Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Стоян Юрій Євгенович

Підпис

УДК 519.859

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ УПАКОВКИ ДОВІЛЬНИХ БАГАТОГРАННИКІВ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Харків – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України.

Науковий керівник	доктор технічних наук, професор **Романова Тетяна Євгеніївна,** провідний науковий співробітник відділу математичного моделювання й оптимального проектування, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України.
Офіційні опоненти:	доктор технічних наук, старший науковий співробітник **Гуляницький Леонід Федорович,** завідувач відділу методів комбінаторної оптимізації та інтелектуальних інформаційних технологій, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України;
	доктор технічних наук, професор **Комяк Валентина Михайлівна,** професор кафедри фізико-математичних дисциплін, Національний університет цивільного захисту України.

Захист відбудеться «02» квітня 2019 р. о 14.00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02 Харківського національного університету радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Науки, 14.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Харківського національного університету радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Науки, 14.

Автореферат розісланий «01» березня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради *Підпис* Л. В. Колесник

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. На сучасному етапі інтерес до ефективного розв'язання задач розміщення тривимірних (3D) об’єктів стрімко зростає. Це пояснюється надзвичайною складністю методів їхнього розв'язання та широким спектром практичних застосувань, у тому числі в таких важливих галузях науки та техніки: адитивні технології (розміщення декількох моделей із забезпеченням щільного заповнення усього об'єму робочої камери 3D принтера, що використовує SLS технологію): промислові технології (упаковка промислових матеріалів; задачі пакування в нанотехнологіях під час моделювання мікроструктури матеріалів); аерокосмічна галузь (компонування приладів та обладнання; моделювання структур ракетних палив); матеріалознавство (пакування гранул та їх ущільнення; взаємодія частинок між собою; моделювання структур бетону, піску, вугілля, пористих вибухових речовин та твердих матеріалів); хімічна промисловість (пакування каталізаторів; моделювання абсорбції газу); дослідження з охорони довкілля та неядерна енергетика (розміщення об'єктів у зонах підвищеного ризику); дослідження з енергетики (розміщення повітряних енергетичних установок).

Останні п'ять років у зарубіжній літературі з'являються публікації, в яких розглядаються практичні задачі, що зводяться до оптимізаційних задач упаковки тривимірних об'єктів, що апроксимовані багатогранниками з наперед заданою точністю. Оскільки задачі є NP-складними, під час їх розв’язання зазвичай використовуються евристичні методи. Деякі дослідники пропонують підходи на основі математичного моделювання і загальних процедур оптимізації. Однак, як правило, розглядаються орієнтовані багатогранники (або дозволяються лише дискретні повороти багатогранників), а в якості контейнера використовуються кубоїди. Крім того, існуючі математичні моделі не враховують важливі для практики обмеження на мінімально допустимі відстані між об’єктами та обмеження балансу.

У зв'язку з цим наукового та практичного значення набуває проблема створення інтелектуальних інформаційних технологій розв'язання оптимізаційних задач упаковки неопуклих багатогранників, що допускають неперервні обертання і трансляції, з урахуванням мінімально допустимих відстаней та обмежень балансу, в довільні опуклі контейнери мінімального об'єму, що потребує розробки: конструктивних засобів математичного і комп'ютерного моделювання обмежень розміщення; нових математичних моделей у вигляді задач нелінійного програмування; ефективних методів пошуку допустимих та локально оптимальних розв’язків із застосуванням сучасних NLP-солверів (програмного забезпечення для розв’язання задач нелінійного програмування).

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в період з 2015 р. по 2018 р. у відділі математичного моделювання і оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України відповідно до планів науково-технічних робіт з держбюджетних тем «Створення інтелектуальних інформаційних технологій розв’язання оптимізаційних задач розміщення об'єктів довільних просторових форм» (2012–2016 рр. № ДР 0112U002488), «Розробка математичних моделей та комп'ютерних технологій розв'язання оптимізаційних задач компонування тривимірних об'єктів» (2017–2018 рр. № ДР 0117U000877), в яких здобувач був одним із співвиконавців.

Мета та задачі дослідження. Мета роботи – підвищення ефективності розв'язання оптимізаційних задач оптимальної упаковки довільних багатогранників шляхом розробки конструктивних засобів математичного і комп'ютерного моделювання, нових математичних моделей та ефективних методів локальної оптимізації із застосуванням сучасних NLP-солверів.

Для досягнення цієї мети поставлені такі наукові задачі:

– сформулювати задачу оптимальної упаковки *неопуклих багатогранників* (*OPP – Optimal Polytopes Packing) у опуклому контейнері*, границя якого формується за допомогою сферичних, циліндричних, еліптичних поверхонь та площини, з урахуванням *мінімально допустимих відстаней* та *обмеження балансу (відхилення центра мас системи від заданої точки*).

– розробити засоби математичного моделювання *обмежень розміщення* (неперетин багатогранників та їх включення в контейнер з урахуванням мінімально допустимих відстаней) з використанням методу *phi*-функцій. Формалізувати *обмеження балансу*.

– побудувати математичну модель задачі *OPP* у вигляді задачі нелінійного програмування. Побудувати основні реалізації математичної моделі задачі *OPP* залежно від форми контейнера *(прямий круговий циліндр, кубоїд, куля, опуклий багатогранник, еліпсоїд)*; обмежень на мінімально допустимі відстані (*не задані, задані між кожною парою багатогранників, задані між багатогранниками і боковою поверхнею контейнера*); вигляду функції цілі (*метричні характеристики контейнера*).

– розробити стратегію розв’язання задачі *OPP* на основі особливостей її математичної моделі.

– розробити методи пошуку допустимих та локально оптимальних розв’язків для основних реалізацій задачі *OPP*.

– створити програмне забезпечення для розв’язання основних реалізацій задачі *OPP*.

Об’єкт дослідження – процес оптимізації упаковки неопуклих багатогранників в контейнері з урахуванням *обмежень балансу* та *обмежень розміщення*, включаючи мінімально допустимі відстані.

Предмет дослідження – засоби математичного моделювання, математичні моделі і методи розв’язання задач оптимальної упаковки багатогранників.

Методи дослідження. В роботі застосовуються аналітична геометрія та функціональний аналіз для побудови *phi*-функцій, псевдонормалізованих *phi*-функцій, квазі *phi*-функцій та псевдонормалізованих квазі *phi*-функцій; методи геометричного проектування для побудови математичних моделей та розробки методів пошуку допустимих стартових точок і методів локальної оптимізації для задачі *OPP*.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у такому:

а) набув подальшого розвитку метод *phi*-функцій: вперше побудовані *phi-функції, псевдонормалізовані phi-функції, квазі phi-функції та псевдонормалізовані квазі phi-функції* як засоби математичного моделювання *обмежень розміщення* для задачі *OPP*, що дозволяє описати в аналітичному вигляді: неперетин довільних багатогранників; включення багатогранників в опуклий котейнер; мінімально допустимі відстані між довільними багатогранниками та між багатогранниками та границею контейнера;

б) вперше побудована математична модель задачі *OPP* у вигляді задачі нелінійного програмування (що включає всі глобально оптимальні розв’язки) для неопуклих багатогранників в опуклому контейнері, границя якого формується за допомогою сферичних, циліндричних, еліптичних поверхонь та площини з урахуванням обмежень розміщення та обмежень балансу, що дозволяє використовувати сучасні *NLP-солвери*;

в) вперше побудована математична модель задачі кластерінгу неопуклих багатогранників (*OPC* – Optimal Polytopes Clustering) в сферичній, кубоїдній та циліндричній областях мінімального об’єму, що дозволяє генерувати ефективні допустимі стартові точки для пошуку локальних екстремумів задачі *OPP*;

г) набули подальшого розвитку методи розв’язання задач геометричного проектування: запропонована стратегія розв’язання задачі *OPP* та розроблені ефективні методи для основних її реалізацій, які на відміну від існуючих підходів: враховують одночасно *неперервні трансляції* та *обертання* об’єктів, *мінімально допустимі відстані* і *обмеження балансу*; дозволяють отримувати локально оптимальні розв’язки для задач *OPP*, що є кращими за значенням цільової функції (порівняно з *benchmark instances* – відомими опублікованими результатами).

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати дисертаційної роботи є подальшим розвитком математичного моделювання і обчислювальних методів в геометричному проектуванні: створено нові математичні моделі та розроблено ефективні методи для розв’язання оптимізаційних задач упаковки довільних багатогранників, що мають широкий спектр застосувань в пріоритетних областях науки і техніки (включаючи адитивні технології, космічну інженерію, матеріалознавство, логістику, мінералогію, медицину, нанотехнології, робототехніку, системи розпізнавання образів, авіабудування, машинобудування) .

Світовий рівень створених засобів математичного моделювання та ефективність запропонованих методів підтверджується найкращими результатами обчислювальних експериментів, порівняно із зарубіжними аналогами.

Розроблений програмний модуль оптимізації упаковки довільних неорієнтованих багатогранників застосовується на кафедрі «прикладного матеріалознавства та обробки матеріалів» Національного університету «Львівська політехніка» для розв’язання задачі оптимального заповнення заданого об’єму частинками несферичної форми.

Отримано листа підтримки від G. Fasano – провідного вченого та спеціаліста в області математичного моделювання та оптимізації систем (systems modeling and optimization) європейської компанії «Thales Alenia Space» (https://www.thalesgroup.com/en), в якому зазначено важливість отриманих в роботі результатів для розв'язання оптимізаційних задач компоновки в галузі ракетно-космічного машинобудування.

Запропоновані в роботі засоби, моделі, методи та програмні модулі використовуються в ТОВ «Cloud Works» для розв'язання задач оптимізації процесу 3D-друку, що використовує SLS технологію, а також для розв'язання задач оптимального пакування вантажів у довільних контейнерах у галузі логістики.

Запропоновані засоби математичного моделювання задач *OPP* впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки в курсах: «Математичне та комп'ютерне моделювання в системах підтримки прийняття рішень», «Моделювання геометричних об'єктів».

Особистий внесок здобувача. Усі основні наукові результати дисертаційної роботи отримані особисто автором. У роботах, написаних в співавторстві, дисертантові належать такі результати: [1, 6, 8, 12, 13, 20] – квазі phi-функції і псевдонормалізовані квазі phi-функції для неопуклих багатогранників, що допускають неперервні обертання; [2, 4, 5, 7, 8, 15–20] – NLP математичні моделі задач упаковки неопуклих багатогранників в опуклих контейнерах із урахуванням обмежень балансу; [3, 5, 6] – NLP модель задачі кластерингу пари неопуклих багатогранників в сферичній, кубоїдній та циліндричній областях мінімального об'єму; [9–11, 14] – NLP моделі; метод розв'язання, що включає алгоритм побудови допустимої стартової точки, метод декомпозиції для задач упаковки довільних багатогранників; результати числових експериментів для задачі *OPP* у контейнерах, що мають форму кулі, паралелепіпеда, циліндра, опуклого багатогранника, еліпсоїда, опуклої області, утвореної перетином двох куль.

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи доповідались і отримали схвалення на міжнародних конференціях і наукових семінарах: конференції молодих учених і фахівців «Сучасні проблеми машинобудування» ІПМаш ім. А.М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, 2015, 2016, 2018 рр.); 5-ій міжнародній науковій конференції «Математичне моделювання, оптимізація і інформаційні технології» (Кишинів, Молдова, 2016 р.); 5-ій міжнародній науково-технічній конференції «Інформаційні системи і технології» (Коблево, Україна, 2016 р.); міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології і комп'ютерне моделювання» (Івано-Франківськ – Яремча, Україна, 2016 р.); XIII міжнародній науково-практичній конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (Дніпропетровськ, Україна, 2016 р.); XIII міжнародній науково-практичній конференції «Теоретичні і прикладні аспекти побудови програмних систем» (Київ, Україна, 2016 року); 7-ій міжнародній конференції «Додаток інформаційних і комунікаційних технологій і статистики в економіці і освіті» (Софія, Болгарія, 2017 р.); міжнародному молодіжному форумі

«Радіоелектроніка і молодь в XXI столітті» (Харків, Україна, 2017 р.); XXX міжнародній конференції «Проблеми ухвалення рішень в умовах невизначеності» (Вільнюс, Литва, 2017 р.); 14-ій міжнародній конференції «ESICUP meeting» (Льєж, Бельгія, 2017 р.); 15-ій міжнародній конференції «ESICUP meeting» (Зотермеєр, Нідеранди, 2018 р.); семінарах Харківської секції Наукової ради з проблеми «Кібернетика» (Харків, Україна, 2017, 2018 рр.); семінарі відділу методів негладкої оптимізації, Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України (Київ, Україна, 2018 р.).

Публікації. За темою дисертації опубліковані 20 наукові роботи, у тому числі 6 статей в наукових спеціалізованих виданнях, які входять до переліку ДАК МОН України (з них 2 – до наукометричної бази SCOPUS) та 2 наукові статті у технічних виданнях України; 12 тез доповідей на міжнародних наукових конференціях.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація містить вступ, 5 розділів, висновки по роботі, 4 додатки, 62 рисунки, 2 таблиці та список використаних джерел зі 211 найменувань на 22 сторінках. Повний обсяг дисертації становить 228 сторінок, з них 145 сторінок основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтована актуальність теми дисертації, сформульовані мета і задачі дослідження, вказується об’єкт, предмет і методи дослідження, визначається наукова новизна і практична значущість отриманих результатів, наведено відомості про публікації за темою дисертаційної роботи і апробацію результатів дослідження.

Перший розділ дисертації містить огляд робіт, присвячених практичним застосуванням упаковки 3D об’єктів в сучасних областях науки та техніки, зокрема в адитивних технологіях, матеріалознавстві, логістиці, космічному машинобудуванні та ортопедичній хірургії.

Наукового та практичного значення набуває проблема створення інтелектуальних інформаційних технологій розв'язання оптимізаційних задач упаковки 3D об’єктів на основі конструктивних засобів математичного та комп'ютерного моделювання, сучасних методів оптимізації, що легко адаптуються для конкретних технологічних процесів. Створенню комп'ютерних технологій в області оптимізації, системного аналізу і математичного моделювання, математичної кібернетики, обчислювальної математики, математичного забезпечення ЕОМ і автоматизованих систем керування та обробки даних, штучного інтелекту присвячені роботи багатьох відомих українських вчених, зокрема І.В. Сергієнка, С.І. Ляшка, А.І. Шевченка, Є.М. Кисельової, Ю.В. Крака, Л.Ф. Гуляницького, П.І. Стецюка, В.П. Шила, Р.П. Базилевича, П.І. Бідюка.

Міжнародна організація ESICUP (http://paginas.fe.up.pt/~esicup/) поєднує провідних учених світу, які досліджують методи розв'язання задач пакування та розкрою. Серед них Bennell J., Kendall G. (Велика Британія), Pinter J. (США), Oliveira J., Gomes M. (Португалія), Birgin E. (Бразилія), Wascher G., Scheithauer G., Bortfeldt A. (Німеччина), Fasano G. (Італія), Alvarez-Valdes R. (Іспанія), Hifi M. (Франція), Imahori S. (Японія), Egeblad J., Pisinger D. (Данія), Ikonen I. (Фінляндія), S.X. Li, J. Zhao (Китай).

У розділі наведено огляд джерел літератури, які присвячені задачам оптимальної упаковки тривимірних об’єктів, стисло викладається мета публікацій, особливості запропонованих моделей та алгоритмів.

Аналіз наукової літератури за темою дисертації показав, що у більшості робіт багатогранники переважно є опуклими, до того ж повороти розміщуваних багатогранників або не дозволяються, або можуть бути здійснені тільки з певним дискретним кроком. Як контейнери розглядаються, як правило, кубоїди. Методології розв’язання зазвичай використовують евристики.

Слід зазначити, що останні п'ять років у зарубіжній літературі з'являються публікації, в яких розглядаються практичні задачі, що зводяться до оптимізаційних задач упаковки довільних багатогранників (3D irregular packing problems), серед яких слід зазначити роботи Martínez A. (2016), Fasano G. (2015), Korte A.C.G. (2013), Liu X. (2015), Smeets B. (2015), Верхотурова М.А. (2014), Luiz J.P. Araujo (2018).

Найменш дослідженими є задачі упаковки довільних неопуклих багатогранників в опуклих контейнерах, які разом з неперервними трансляціями допускають неперервні повороти багатогранників, враховують мінімально допустимі відстані та обмеження балансу.

У рамках наукової школи Ю. Г. Стояна розробці засобів математичного моделювання, математичних моделей та методів розв’язання задач упаковки та розкрою присвячено роботи багатьох його учнів, у тому числі М. І. Гіля, В. М Комяк, С. Я. Яковлева, О. О. Ємця, М. В. Новожилової, Т. Є. Романової, О. В. Панкратова, І. В. Гребенніка, В. М. Пацука, Г. М. Яськова, А. М. Чугая.

Оптимізаційним задачам упаковки багатокутників та багатогранників присвячено публікації Ю. Г. Стояна, М. І. Гіля, В. М. Комяк, М. В. Новожилової, Т. Є. Романової, О. В. Панкратова, А. М Чугая, О.В. Карташова, М.В. Злотника.

В основі досліджень є метод phi-функцій, який є найбільш потужним засобом аналітичного моделювання відношень геометричних об'єктів, оскільки цей метод дозволяє описувати оптимізаційні задачі упаковки у вигляді задач нелінійного програмування. На цей час побудовані phi-функції для деяких просторових форм орієнтованих 3D об'єктів та квазі phi-функції для деяких просторових форм неорієнтованих 3D об'єктів. Однак, побудувати нормалізовані (псевдонормалізовані) phi-функції навіть для опуклих неорієнтованих багатогранників не вдалося.

Слід зазначити, що число змінних в існуючих математичних моделях оптимізаційних задач упаковки, як правило, настільки велике, що ускладнює (а іноді робить неможливим) безпосереднє використання сучасних NLP-солверів.

Тому виникає необхідність: в створенні нових засобів математичного та комп'ютерного моделювання обмежень розміщення довільних багатогранників, що допускають неперервні трансляції і повороти (з використанням квазі phi-функцій і псевдонормалізованих квазі phi-функцій); в побудові точної математичної моделі, яка враховує мінімально допустимі відстані між об’єктами та обмеження балансу (у вигляді задачі нелінійного програмування, область допустимих розв'язків якої описується системою нерівностей з гладкими функціями); в розробці ефективних методів розв’язання з оцінкою складності, що є лінійною до кількості багатогранників.

У другому розділі дисертації формулюються основні положення (в рамках теорії геометричного проектування), необхідні для побудови конструктивних засобів математичного і комп'ютерного моделювання відношень між геометричними об'єктами, що виникають в задачах оптимального розміщення довільних phi-об'єктів (зокрема, багатогранників). Розглядаються поняття phi-функції, псевдонормалізованої phi-функції, квазі phi-функції та псевдонормалізованої квазі phi-функції, наводяться їх основні властивості. Обґрунтовується необхідність побудови різних класів phi-функцій і квазі phi-функцій, необхідних для побудови математичних моделей задач оптимального розміщення довільних (опуклих і неопуклих) багатогранників з урахуванням обмежень на мінімально допустимі відстані та обмежень балансу. Визначаються типи контейнерів, описуються багатогранники, як об'єкти розміщення, визначаються обмеження розміщення та балансу. Формулюється постановка базової задачі оптимальної упаковки довільних багатогранників.

Розглядається задача упаковки в такій постановці.

Контейнери. Нехай $\Omega(p)=\{(x,y,z,p)\in R^3:\mathbf{\Psi}(x,y,z,p)\geq 0\}$ визначає опуклий контейнер зі змінними метричними характеристиками p, заданий в системі координат OXYZ, де $\mathbf{\Psi}(x,y,z,p)=\min\{\mathbf{\Psi}_t(x,y,z,p), t=1,\dots,n_\Omega\}$, а функції $\mathbf{\Psi}_t(x,y,z,p)$ є диференційованими, $t=1,\dots,n_\Omega$.

Розміщувані об'єкти. Задано набір, в загальному випадку неопуклих багатогранників $\mathbb{Q}_q$, $q\in J_N$, $J_N=\{1,2,\dots,N\}$. В межах цього дослідження вважаємо, що маса M_q кожного багатогранника $\mathbb{Q}_q$ відома.

Положення та орієнтація кожного багатогранника $\mathbb{Q}_q$ визначається вектором $u_q=(v_q,\theta_q)$ його змінних параметрів розміщення, де $v_q=(x_q,y_q,z_q)$ – вектор трансляції, $\theta_q=(\theta_q^1,\theta_q^2,\theta_q^3)$ – вектор параметрів обертання, θ_q^1, θ_q^2, θ_q^3 – кути Ейлера.

Багатогранник, повернутий на кути θ_q^1, θ_q^2, θ_q^3 і трансльований на вектор v_q, позначається через $\mathbb{Q}_q\left(u_q\right)=\left\{p_q\in R^3: p_q=v_q+M\left(\theta_q\right)\cdot p_q^0, p_q^0\in\mathbb{Q}_q^0\right\}$, де $u_q=(v_q,\ \theta_q)$, $\mathbb{Q}_q^0$ визначає неповернутий і нетрансльований багатогранник $\mathbb{Q}_q$, $M(\theta_q)$ – стандартна матриця повороту

Обмеження. Між кожною парою багатогранників $\mathbb{Q}_q$ і $\mathbb{Q}_g$, $q<g\in J_N$, також як і між багатогранником $\mathbb{Q}_q$, $q\in J_N$, та границею контейнера Ω можуть бути задані мінімально допустимі відстані $\rho_{qg}>0$ і $\rho_q>0$.

Обмеження розміщення (*arrangement constraints)* включають:

а) обмеження на мінімально допустимі відстані (*distance constraints*) між багатогранниками $\mathbb{Q}_q$ та $\mathbb{Q}_g$:

$$dist(\mathbb{Q}_q(u_q), \mathbb{Q}_g(u_g)) \geq \rho_{qg},\ q < g \in J_N, \text{ де}$$
$$dist(\mathbb{Q}_q(u_q), \mathbb{Q}_g(u_g)) = \min_{a \in Q_q, b \in Q_g} \rho(a, b);$$

або обмеження неперетину (*non-overlapping constraints*) (у разі якщо обмеження на мінімально допустимі відстані між багатогранниками не задані), у вигляді

$$\operatorname{int} \mathbb{Q}_q(u_q) \cap \operatorname{int} \mathbb{Q}_g(u_g) = \varnothing,\ q < g \in J_N;$$

б) обмеження включення (*distance containment constraints*) з урахуванням допустимих відстаней

$$dist(\mathbb{Q}_q(u_q), \Omega^*) \geq \rho_q,\ q \in J_N,\ \Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{int} \Omega;$$

або обмеження включення (*containment constraints*) (у разі якщо обмеження на мінімально допустимі відстані між багатогранником та границею контейнера не задані), у вигляді

$$\mathbb{Q}_q(u_q) \subset \Omega \Leftrightarrow \operatorname{int} \mathbb{Q}_q(u_q) \cap \Omega^* = \varnothing,\ q \in J_N.$$

Крім того, можуть бути задані обмеження балансу (*equilibrium constraints*) як відхилення центра мас системи $\Omega_{\mathbb{Q}}$ (контейнер $\Omega(p)$ з упакованими в ньому багатогранниками $\mathbb{Q}_q(u_q)$, $q \in J_N$) від заданої точки $p_e=(x_e,\ y_e,\ z_e)$, що не має перевищувати заданого допустимого значення, у вигляді

$$\mu(p, u) = \min\{\mu_1(p, u), \mu_2(p, u), \mu_3(p, u)\} \geq 0, \tag{1}$$

де

$$\mu_1(p, u) = \min\{-(x_s - x_e) + \Delta x_e, (x_s - x_e) + \Delta x_e\},$$
$$\mu_2(p, u) = \min\{-(y_s - y_e) + \Delta y_e, (y_s - y_e) + \Delta y_e\},$$
$$\mu_3(p, u) = \min\{-(z_s - z_e) + \Delta z_e, (z_s - z_e) + \Delta z_e\},$$
$$x_s = \frac{\sum_{q=1}^{N} M_q \hat{x}_q}{\sum_{q=1}^{N} M_q},\ y_s = \frac{\sum_{q=1}^{N} M_q \hat{y}_q}{\sum_{q=1}^{N} M_q},\ z_s = \frac{\sum_{q=1}^{N} M_q \hat{z}_q}{\sum_{q=1}^{N} M_q},$$

де $u = (u_1, \ldots, u_q, \ldots, u_N)$;

x_s, y_s, z_s – координати центра мас O_s системи $\Omega_{\mathbb{Q}}$;

$\Delta x_e, \Delta y_e, \Delta z_e$ – допустимі відхилення від координат x_e, y_e, z_e точки p_e;

$\hat{x}_q, \hat{y}_q, \hat{z}_q$ – центр мас неопуклого багатогранника $\mathbb{Q}_q(u_q)$.

Функції цілі. Розглядаються різні види функцій цілі, які залежать від параметрів розміщення багатогранників і змінних метричних характеристик контейнера Ω, зокрема, мінімальний об'єм, мінімум коефіцієнта гомотетії, мінімум метричної характеристики контейнера.

Базова задача оптимальної упаковки багатогранників (задача *OPP*) сформульована таким чином:

Упакувати заданий набір довільних багатогранників $\mathbb{Q}_q(u_q)$ $q \in J_N$, всередині опуклого контейнера $\Omega(p)$, з урахуванням мінімально допустимих відстаней і обмежень балансу, так, щоб функція цілі досягала екстремуму.

Також в цьому розділі сформульовано задачу оптимального кластерингу довільних багатогранників (задача *OPC*), як окремий випадок задачі *OPP,* яка полягає в пошуку мінімальної охоплюючої оболонки (що має форму кубоїда, кулі або циліндра) для пари довільних багатогранників, що не перетинаються.

Третій розділ присвячений засобам математичного моделювання обмежень розміщення в задачі *OPP* з використанням методу phi-функцій.

Для моделювання обмежень розміщення (неперетин об'єктів, включення об'єктів в опуклий контейнер, обмежень на мінімально допустимі відстані), побудовані псевдонормалізовані phi-функції і псевдонормалізовані квазі phi-функції для неопуклих багатогранників, а також для неопуклих багатогранників і доповнень до контейнерів, що мають форму паралелепіпеда , кулі, прямого кругового циліндра, еліпсоїда, опуклого багатогранника і довільної опуклої області, обмеженої циліндричною, еліптичною, сферичною поверхнями або площинами.

Нехай $\mathbb{Q}_q(u_q) = \bigcup_{i=1}^{n_q} K_i(u_q)$, де $K_i(u_q)$ – опуклий багатогранник, заданий вершинами $p_k^i = (p_{xk}^i, p_{yk}^i, p_{zk}^i)$, $k = 1, \ldots, m_i$, де

$$p_{xk}^i = x_q + (\sin\theta_q^1 \cos\theta_q^3 + \cos\theta_q^1 \cos\theta_q^2 \sin\theta_q^3) \cdot p_{xk}^0 +$$
$$+(-\sin\theta_q^1 \sin\theta_q^3 + \cos\theta_q^1 \cos\theta_q^2 \cos\theta_q^3) \cdot p_{yk}^0 + (-\cos\theta_q^1 \sin\theta_q^2) \cdot p_{zk}^0,$$
$$p_{yk}^i = y_q + (\cos\theta_q^1 \cos\theta_q^3 - \sin\theta_q^1 \cos\theta_q^2 \sin\theta_q^3) \cdot p_{xk}^0 +$$
$$+(-\cos\theta_q^1 \sin\theta_q^3 - \sin\theta_q^1 \cos\theta_q^2 \cos\theta_q^3) \cdot p_{yk}^0 + (\sin\theta_q^1 \sin\theta_q^2) \cdot p_{zk}^0,$$
$$p_{zk}^i = z_q + (\sin\theta_q^2 \sin\theta_q^3) \cdot p_{xk}^0 + (\sin\theta_q^2 \cos\theta_q^3) \cdot p_{yk}^0 + (\cos\theta_q^2) \cdot p_{zk}^0,$$

$p_k^0 = (p_{xk}^0, p_{yk}^0, p_{zk}^0)$ – координати вершин нетрансльованого та неповертаного багатогранника $\mathbb{Q}_q^0$.

Твердження 1. Функція вигляду

$$\hat{\mathbf{\Phi}}^{\mathbb{Q}_q\Omega^*}(u_q,p)=\min\{\hat{\Phi}^{K_1\Omega^*}(u_q,p),\ldots,\hat{\Phi}^{K_{n_q}\Omega^*}(u_q,p)\} \tag{2}$$

є псевдонормалізованою phi-функцією для неопуклого багатогранника $\mathbb{Q}_q(u_q)$ і об'єкта Ω^*, де

$$\hat{\Phi}^{K_i\Omega^*}(u_q,p)=\tilde{\Phi}^{K_i\Omega^*}(u_q,p)-\rho, \tag{3}$$

$\tilde{\Phi}^{K_i\Omega^*}(u_q,p)$ – нормалізована phi-функція для об'єктів $K_i(u_q)$ і $\Omega^*(p)$,

$$\tilde{\Phi}^{K_i\Omega^*}(u_q,p)=\min\{\mathbf{\Psi}_t(p_k^i,p),t=1,\ldots,n_\Omega,k=1,\ldots,m_i\}.$$

Вигляд кожної функції $\mathbf{\Psi}_t(p_k^i,p)$ залежить від форми контейнера Ω.

Таким чином, $\hat{\mathbf{\Phi}}^{\mathbb{Q}_q\Omega^*}(u_q,p)\geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{dist}(\mathbb{Q}_q(u_q),\Omega^*(p))\geq\rho_q$.

Твердження 2. Функція вигляду

$$\hat{\mathbf{\Phi}}'_{qg}(u_q,u_g,u'_{qg})=\min\{\hat{\Phi}'_{ij}(u_q,u_g,u'_{ij}),i=1,\ldots,n_q,\ j=1,\ldots,n_g\} \tag{4}$$

є псевдонормалізованою квазі phi-функцією для неопуклих багатогранників $\mathbb{Q}_q(u_q)$ і $\mathbb{Q}_g(u_g)$, де $u'_{qg}=(u'_{ij},i=1,\ldots,n_q,\ j=1,\ldots,n_g)$,

$$\hat{\Phi}'_{ij}(u_q,u_g,u'_{ij})=\min\{\Phi^{K_iP_{ij}}(u_q,u'_{ij}),\Phi^{K_jP_{ij}^*}(u_g,u'_{ij})\}-0.5\rho_{qg} \tag{5}$$

– псевдонормалізована квазі phi-функція для об'єктів $K_i(u_q)\subset\mathbb{Q}_q(u_q)$ і $K_j(u_g)\subset\mathbb{Q}_g(u_g)$,

$$\Phi^{K_iP_{ij}}(u_q,u'_{ij})=\min_{1\leq k\leq m_i}\psi_{ij}(p_k^i)\ \text{і}\ \Phi^{K_jP_{ij}^*}(u_g,u'_{ij})=\min_{1\leq k\leq m_j}(-\psi_{ij}(p_k^j)),$$

$P_{ij}=\{(x,y,z):\psi_{ij}(x,y,z)=\alpha_{ij}\cdot x+\beta_{ij}\cdot y+\gamma_{ij}\cdot z+\xi_{ij}\geq 0\}$, $P_{ij}^*=R^3\setminus\operatorname{int}P_{ij}$,
$\alpha=\sin\theta_{ij}^2$, $\beta=-\sin\theta_{ij}^1\cdot\cos\theta_{ij}^2$, $\gamma=\cos\theta_{ij}^1\cdot\cos\theta_{ij}^2$, $u'_{ij}=(\theta_{ij}^1,\theta_{ij}^2,\xi_{ij})$.

Тоді

$$\max_{u'_{qg}}\hat{\mathbf{\Phi}}'_{qg}(u_q,u_g,u'_{qg})\geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{dist}(\mathbb{Q}_q(u_q),\mathbb{Q}_g(u_g))\geq\rho_{qg},$$

$$\widehat{\mathbf{\Phi}}'_{qg}(u_q, u_g, u'_{qg}) \ge 0 \Rightarrow \mathrm{dist}(\mathbb{Q}_q(u_q), \mathbb{Q}_g(u_g)) \ge \rho_{qg}.$$

Побудовано математичну модель базової задачі оптимальної упаковки довільних багатогранників в опуклому контейнері. Наведено її основні властивості. Побудовано математичну модель задачі кластерингу неопуклих багатогранників. Наведено приклад побудови математичної моделі для пари багатогранників.

Математичну модель задачі *OPP* сформульовано так:

$$\min_{u \in W \subset R^{\sigma}} F(u), \tag{6}$$

$$\begin{gathered} W = \{u \in R^{\sigma} : \widehat{\Phi}'_{ij}(u_{a_i}, u_{a_j}, u'_{a_i a_j}) \ge 0, (i, j) \in \Xi, \\ \widehat{\Phi}_i(u_{a_i}, p) \ge 0, i \in I_n, \mu(u) \ge 0, \delta(u) \ge 0\}, \end{gathered} \tag{7}$$

де $u = (\varsigma, \tau) \in R^{\sigma}$;

$\varsigma = (p, u_1, u_2, ..., u_N)$;

p – вектор змінних метричних характеристик контейнера Ω;

$u_{a_i} = (v_{a_i}, \theta_{a_i}) = (x_{a_i}, y_{a_i}, z_{a_i}, \theta^1_{a_i}, \theta^2_{a_i}, \theta^3_{a_i})$ – вектор змінних параметрів розміщення $K_i(u_{a_i}) \subset \mathbb{Q}_q(u_q)$, $i \in I_n, q \in J_N$;

a_i – компонента вектора $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$, $a_i \in J_N, i \in I_n$;

$\Xi = \{(i, j), a_i \ne a_j, i < j = 1, ..., n\}$ – індексна множина, що включає індекси пар багатогранників $K_i(u_{a_i}) \subset \mathbb{Q}_q(u_q)$ та $K_j(u_{a_j}) \subset \mathbb{Q}_g(u_g)$;

$\tau = (u'^1, ..., u'^m)$ – вектор додаткових змінних, $m = card(\Xi)$;

$u'^s = (\theta^{1s}, \theta^{2s}, \xi^s)$ – вектор додаткових змінних квазі phi-функції вигляду (5), $s = 1, ..., m$;

$\sigma = |p| + 6N + 3m$ – число змінних задачі;

$\widehat{\Phi}'_{ij}(u_{a_i}, u_{a_j}, u'_{a_i a_j})$ – псевдонормалізована квазі phi-функція вигляду (5) для об'єктів $K_i(u_{a_i})$ і $K_j(u_{a_j})$, $a_i, a_j \in J_N$, $(i, j) \in \Xi$, $u'_{a_i a_j} = u'^s$, $s = 1, ..., m$;

$\widehat{\Phi}_i(u_{a_i}, p)$ – псевдонормалізована phi-функція вигляду (3) для об'єктів $K_i(u_{a_i})$ і Ω^*;

$F(u)$ – функція цілі, вигляд якої залежить від форми контейнера, наприклад $F(u) = l \cdot w \cdot h$, якщо контейнер має форму кубоїда, $F(u) = r$, якщо контейнер має форму кулі, $F(u) = \lambda$, якщо контейнер має форму еліпсоїда, циліндра, опуклого багатогранника, довільної опуклої області;

$\mu(u) \ge 0$ – система обмежень балансу (1);

$\delta(u) \geq 0$ – система додаткових обмежень, що можуть бути накладені на метричні характеристики контейнера та /або на параметри розміщення багатогранників.

Математична модель (6) – (7) є неопуклою неперервною задачею нелінійного програмування, що включає всі глобально оптимальні розв'язки задачі *OPP*; область допустимих розв'язків (7) описується системою нерівностей з гладкими функціями.

В цьому розділі також наведено математичну модель задачі оптимального кластерингу (OPC), у вигляді задачі нелінійного програмування.

У четвертому розділі розглядається стратегія розв'язання задачі *OPP*, яка ґрунтується на методі мультистарту. Запропоновано метод побудови допустимих стартових точок. Наводиться опис методу декомпозиції POLYDEC для пошуку локальних ектремумів, що дозволяє звести задачу *OPP*, яка має оцінку числа нерівностей і розмірності $O(n^2)$, до послідовності підзадач нелінійного програмування з оцінкою числа нелінійних нерівностей і розмірності $O(n)$.

Стратегія розв'язання задачі OPP. Стратегія розв'язання задачі (6) – (7) включає в себе такі етапи.

Етап 1. Будуємо множину $\{\varsigma^0\}_\chi$ векторів допустимих параметрів розміщення $(u_1^0, u_2^0, ..., u_N^0)$ багатогранників $\mathbb{Q}_q, q \in J_N$, розміщених в контейнері $\Omega^0(p^0)$ в задачі (6) – (7) із урахуванням обмеження балансу $\mu(p^0, u^0) \geq 0$.

Етап 2. Шукаємо локальний мінімум задачі (6) – (7), стартуючи з кожної точки множини $\{\varsigma^0\}_\chi$, отриманої на етапі 1.

Етап 3. Вибираємо кращий зі знайдених на етапі 2 локальних мінімумів, як локально оптимальний розв'язок задачі (6) – (7).

Метод побудови допустимих стартових точок. Для пошуку допустимих параметрів розміщення багатогранників пропонується метод, який включає в себе такі кроки:

Крок 1. Вибираємо досить великі початкові розміри p^0 контейнера Ω^0, для того, щоб здійснити розміщення куль S_q радіуса r_q, описаних навколо неопуклих багатогранників $\mathbb{Q}_q$, $q \in J_N$, всередині контейнера Ω^0.

Крок 2. Генеруємо множину N випадково вибраних центрів (x_q^0, y_q^0, z_q^0) куль всередині контейнера Ω^0.

Крок 3. Розв'язуємо допоміжну задачу нелінійного програмування вигляду

$$\max_{v \in W_\beta} \beta,$$

$$W_\beta = \{v \in R^{3N+1} : \widehat{\Phi}^{S_q S_g}(v_q, v_g, \beta) \geq 0, q < g \in J_N,$$

$$\widehat{\Phi}^{S_q\Omega^*}(v_q,\beta)\geq 0, q\in J_N, 1-\beta\geq 0, \beta\geq 0, \mu(v)\geq 0\},$$

де $v=(x_1,y_1,z_1,...,x_N,y_N,z_N,\beta)$;

$\widehat{\Phi}^{S_qS_g}(v_q,v_g,\beta)$ – псевдонормалізована phi-функція для об'єктів S_q і S_g;

S_q – куля радіуса βr_q;

S_g – куля радіуса βr_g;

$\widehat{\Phi}^{S_q\Omega^*}(v_q,\beta)$ – псевдонормалізована phi-функція для об'єктів S_q і Ω^*.

Глобальний максимум $\beta^*=1$ гарантує розміщення неопуклих багатогранників всередині контейнера Ω^0. Отримуємо точку глобального максимуму $v^*=(x_1^*,y_1^*,z_1^*,...,x_N^*,y_N^*,z_N^*,\beta^*)$.

Крок 4. Формуємо вектор допустимих параметрів розміщення багатогранників $u_1^0,...,u_q^0,...,u_N^0$, припускаючи, що $u_q^0=(x_q^0,y_q^0,z_q^0,\theta_q^0)$, $(x_q^0,y_q^0,z_q^0)=(x_q^*,y_q^*,z_q^*)$, а θ_q^0 – вектор випадково згенерованих кутів повороту багатогранників $\mathbb{Q}_q, q\in J_N$. Генеруємо вектор $\varsigma^0=(p^0,u_1^0,...,u_q^0,...,u_N^0)$.

Крок 5. Формуємо допустиму стартову точку $u^0=(\varsigma^0,\tau^0)$ задачі (6) – (7).

Для пошуку вектора τ^0 розв'язуємо задачу вигляду:

$$\max_{(u'^s,\alpha)\in W'_\alpha}\alpha,$$

де

$$W'_\alpha=\{(u'^s,\alpha)\in R^4:\widehat{\Phi}'_{ij}(u^0_{a_i},u^0_{a_j},u'^s)-\alpha\geq 0, s=1,...,m\},$$

$\alpha\in R^1, u'^s=(\theta^{1s},\theta^{2s},\xi^s)$, за фіксованих параметрів $(u^0_{a_i},u^0_{a_j})$, $\forall(i,j)\in\Xi$.

Метод POLYDEC. В основі цього методу лежить ітераційна процедура, ідея якої полягає в такому: для допустимої стартової точки задачі *OPP* для кожного опуклого багатогранника, що формує неопуклий багатогранник, будується система шести лінійних ε-нерівностей, яка гарантує належність опуклого багатогранника індивідуальному кубічному ε-контейнеру; на кожній ітерації в область допустимих розв'язків підзадачі нелінійного програмування включається система ε-нерівностей для всіх опуклих багатогранників та псевдонормалізовані квазі *phi*-функції тільки для тих пар опуклих багатогранників, що є «ε-сусідами», і псевдонормалізовані *phi*-функції для тих опуклих багатогранників, чиї індивідуальні контейнери перетинаються з границею контейнера. Таким чином, на k-й ітерації розв'язується така підзадача нелінійного програмування:

$$\min_{u_{w_k} \in W_k \subset R^{\sigma-\sigma_k}} F(u_{w_k}), \qquad (8)$$

$$W_k = \{u_{w_k} = (\varsigma, \tau_{w_k}) \in R^{\sigma-\sigma_k} : \widehat{\Phi}'_{ij}(u_{a_i}, u_{a_j}) \ge 0, (i, j) \in \Xi_1^k,$$
$$\widehat{\Phi}_i(u_{a_i}, p) \ge 0, i \in \Xi_2^k, \Phi^{S_i \Omega_i^{k*}}(u_{a_i}) \ge 0, i = 1, \dots, n,$$
$$f(p^{(k-1)}, \varepsilon) \ge 0, \mu(u_{w_k}, p^{(k-1)}) \ge 0\}, \qquad (9)$$

де Ξ_1^k – індексна множина, що містить індекси пар багатогранників $K_i(u_{a_i})$ і $K_j(u_{a_j})$, для яких $\varphi^{\Omega_i^k \Omega_j^k}(v_{a_i}^{(k-1)}, v_{a_j}^{(k-1)}) < 0 \Rightarrow \operatorname{int}\Omega_i^k \bigcap \operatorname{int}\Omega_j^k \neq \varnothing$;

Ω_i^k і Ω_j^k –індивідуальні ε-контейнери багатогранників $K_i(u_{a_i})$ і $K_j(u_{a_j})$, $a_i, a_j \in J_N, (i, j) \in \Xi$;

Ξ_2^k – індексна множина, що містить індекси багатогранників $K_i(u_{a_i})$, $a_i \in J_N$, $i \in I_n$, для яких $\widehat{\Phi}^{\Omega_i^k \Omega_\varepsilon^*}(v_{a_i}^{(k-1)}) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{int}\Omega_i^k \bigcap \operatorname{int}\Omega_\varepsilon^{k*} \neq \varnothing$, $\Omega_\varepsilon^{k*} = \Omega^{k*} \oplus S(\varepsilon)$, $S(\varepsilon)$ – куля радіуса ε;

$\sigma_k = 3(m - card(\Xi_1^k))$ – число видалених на k-й ітерації додаткових змінних у відповідних псевдонормалізованих квазі *phi*-функціях, $\sigma - \sigma_k = |p| + 6N + card(\Xi_1^k)$, $card(\Xi_1^k)$ порядку ($O(n)$);

$f(p^{(k-1)}, \varepsilon) \ge 0$ – обмеження на розміри контейнера Ω^k на k-й ітерації.

Точка локального мінімуму підзадачі (8) – (9) на останній ітерації оптимізаційної процедури є точкою локального мінімуму задачі *OPP*.

Позитивність методу POLYDEC полягає в тому, що в більшості випадків аналізується значно менша кількість пар багатогранників, ніж m, оскільки для кожного багатогранника здійснюється перевірка тільки його «ε-сусідів».

Таким чином, метод декомпозиції POLYDEC дозволяє звести задачу (6) – (7) з великою кількістю нерівностей $O(n^2)$ і великою розмірністю $O(n^2)$ області допустимих розв’язків вигляду (7) до послідовності підзадач меншої розмірності $O(n)$ зі значно меншим числом нелінійних нерівностей $O(n)$, де n – число опуклих багатогранників, що формують неопуклі багатогранники.

На рисунку 1 наведена ілюстрація ітеративної процедури, що реалізує метод POLYDEC, для розв’язання задачі упаковки неопуклих багатогранників в циліндрі, де $u^{(0)}$ відповідає стартовій точці, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ та $u^{(3)}$ – локально оптимальним розв’язкам підзадач (8) – (9) на першій, другій та третій ітераціях, $u^* = u^{(3)}$ є точкою локального мінімуму задачі (6) – (7).

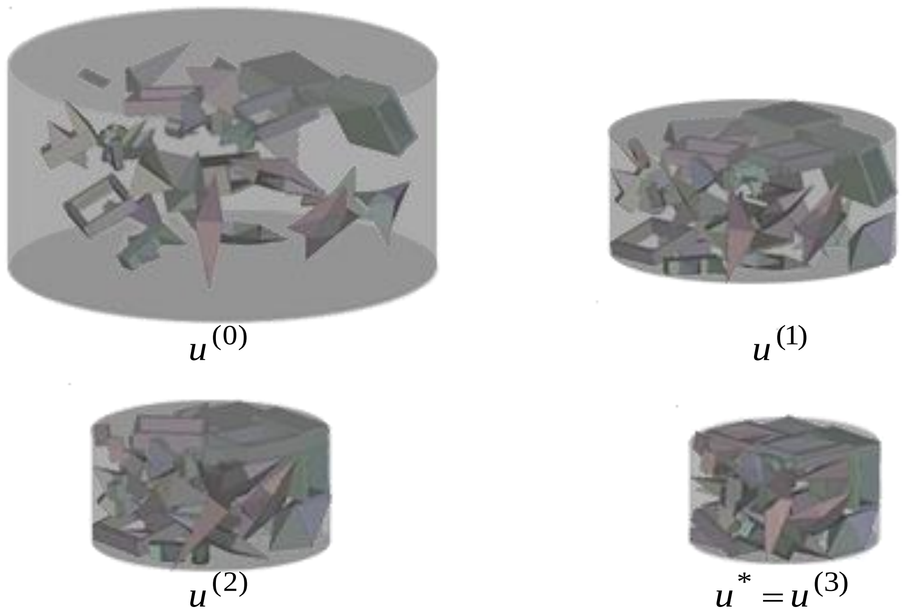

Рисунок 1 – Розміщення неопуклих багатогранників в циліндрі, що відповідає послідовності допустимих точок $u^{(0)}$, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{*}=u^{(3)}$

У п'ятому розділі наводяться результати обчислювальних експериментів, отриманих в ході тестування розроблених засобів математичного моделювання, побудованих математичних моделей, запропонованих методів та алгоритмів розв'язання. Проведено порівняння результатів розв'язання задач *OPP* з кращими опублікованими результатами (benchmark instances). Наведено результати експериментів, що підтверджують ефективність методу POLYDEC. На рисунку 2 зображене локально оптимальне розміщення багатогранників в мінімальних охоплюючих областях в задачі *OPC*. Експерименти проводилися на комп'ютері AMD Athlon 64 X2 5200+. Для розв'язання задач нелінійного програмування використовується бібліотека IPOPT, яка знаходиться у відкритому доступі на некомерційних репозиторіях програмного забезпечення (див. https://projects.coin-or.org/Ipopt).

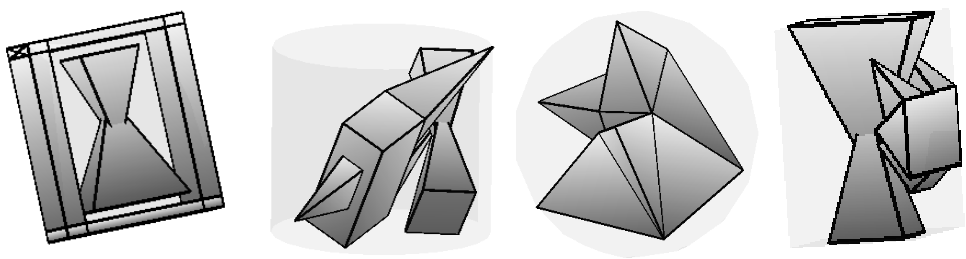

Рисунок 2 – Локально оптимальне розміщення багатогранників в задачі *OPC*

На рисунку 3 зображені приклади локально оптимальних упаковок багатогранників в опуклих контейнерах (у тому числі у кулі, циліндрі, кубоїді, еліпсоїді та опуклому багатограннику) для задачі *OPP*.

Порівняння результатів роботи з відомими світовими аналогами. Виконано порівняння результатів даного дослідження та відомих аналогів.

Отримано найкраще значення цільової функції.

У таблиці 1 наведені результати порівняння для прикладів, поданих в [1*]. Для кожного прикладу мінімальний об’єм контейнера, знайдений методом, що запропонований в цьому дослідженні, виявляється менше, ніж найкращий розв’язок, запропонований в [1*].

Для кожного з прикладів розглядаються багатогранники, вихідна інформація щодо яких наведена в роботі [2*].

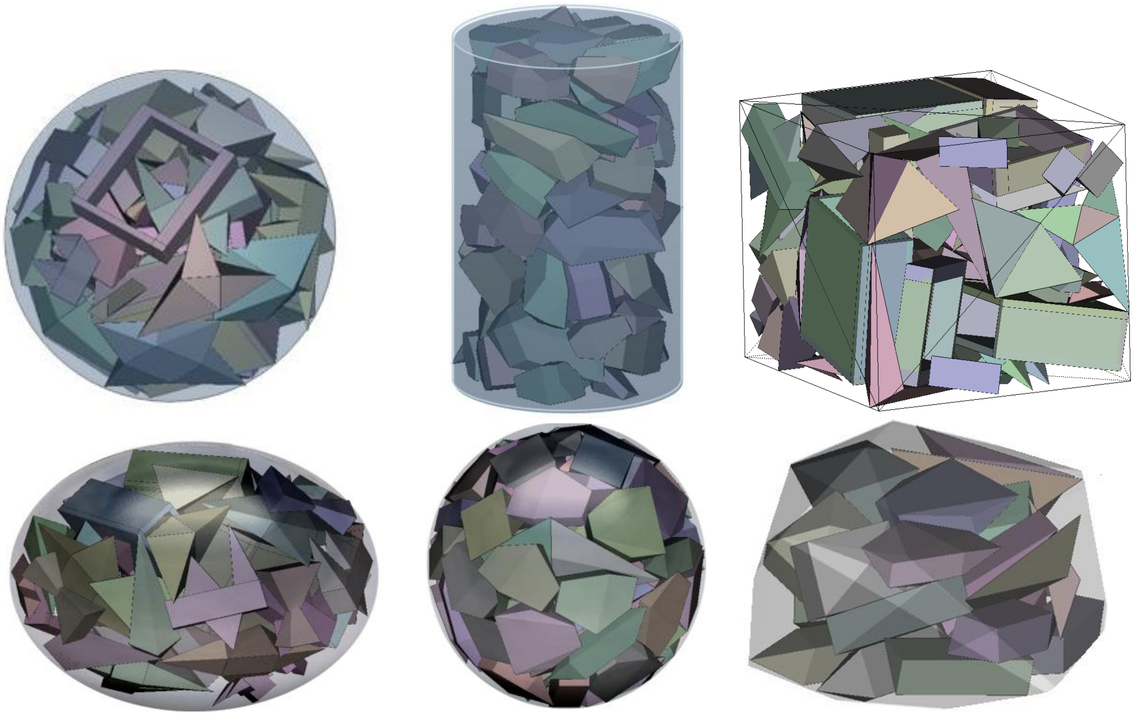

Рисунок 3 – Локально оптимальні упаковки багатогранників в задачі *OPP*

Таблиця 1 – Порівняння результатів для прикладів, наведених в [1*]

Задача	Найкращий об’єм з [1*]	Найкращий час з [1*]	Об’єм знайдений за допомогою FSPA*+ POLYDEC	Час пошуку розв’язку за допомогою FSPA*+ POLYDEC	Об’єм знайдений за допомогою [2*]**+ POLYDEC	Час пошуку розв’язку за допомогою [2*]**+ POLYDEC
20 з [2*]	32550	26202.1	27432.64	34313.34	28106.64	5360.67
30 з [2*]	48300	53741.5	41646.17	35289.34	40277.19	33008.89
40 з [2*]	61950	99952.0	53158.88	201501.5	55988.46	195051.51
50 з [2*]	77280	125210.6	68214.56	215144.55	61630.68	270654.84
36 з [2*]	12480	9637.5	10461.67	23023.12	–	–

* – допустима стартова точка, знайдена за допомогою FSPA;

** – допустима стартова точка, знайдена за допомогою алгоритму, запропонованого в [2*].

[1*] Xiao Liu, Jia-min Liu, An-xi Cao, Zhuang-le Yao HAPE3D – a new constructive algorithm for the 3D irregular packing problem // Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering. 2015. № 16 (5). P. 380–390.

[2*] Stoyan Y.G., Gil N.I., Pankratov A. [et al.] Packing Non-Convex Polytopes into a Parallelepiped (Electronic resource) // Technische Universitat Dresden. 2004. Mode of access: http://www.math.tu-dresden.de/~scheith/ABSTRACTS/PREPRINTS/04-non-conv.pdf

Розглядаються обчислювальні експерименти, що підтверджують ефективність методу POLYDEC.

Проведено порівняння результатів розв’язання різних задач упаковки довільних багатогранників з застосуванням та без застосування методу POLYDEC.

Результати цього порівняння наведено у табл. 2.

Таблиця 2 – Результати аналізу ефективності методу декомпозиції POLYDEC

Задача	Середній час обчислень (с)		Число змінних		Число нерівностей	
	Із застосуванням POLYDEC	Без застосування POLYDEC	Із застосуванням POLYDEC	Без застосування POLYDEC	Із застосуванням POLYDEC	Без застосування POLYDEC
N=10	283	1380	626	1791	3086	7934
N=20	4980.74	75026.31	1334	7471	8028	30916
N=30	35289.34	-	2817	17334	16047	69336

На рисунку 4 зображені діаграми, які ілюструють результати порівняння наведені, в таблиці 2.

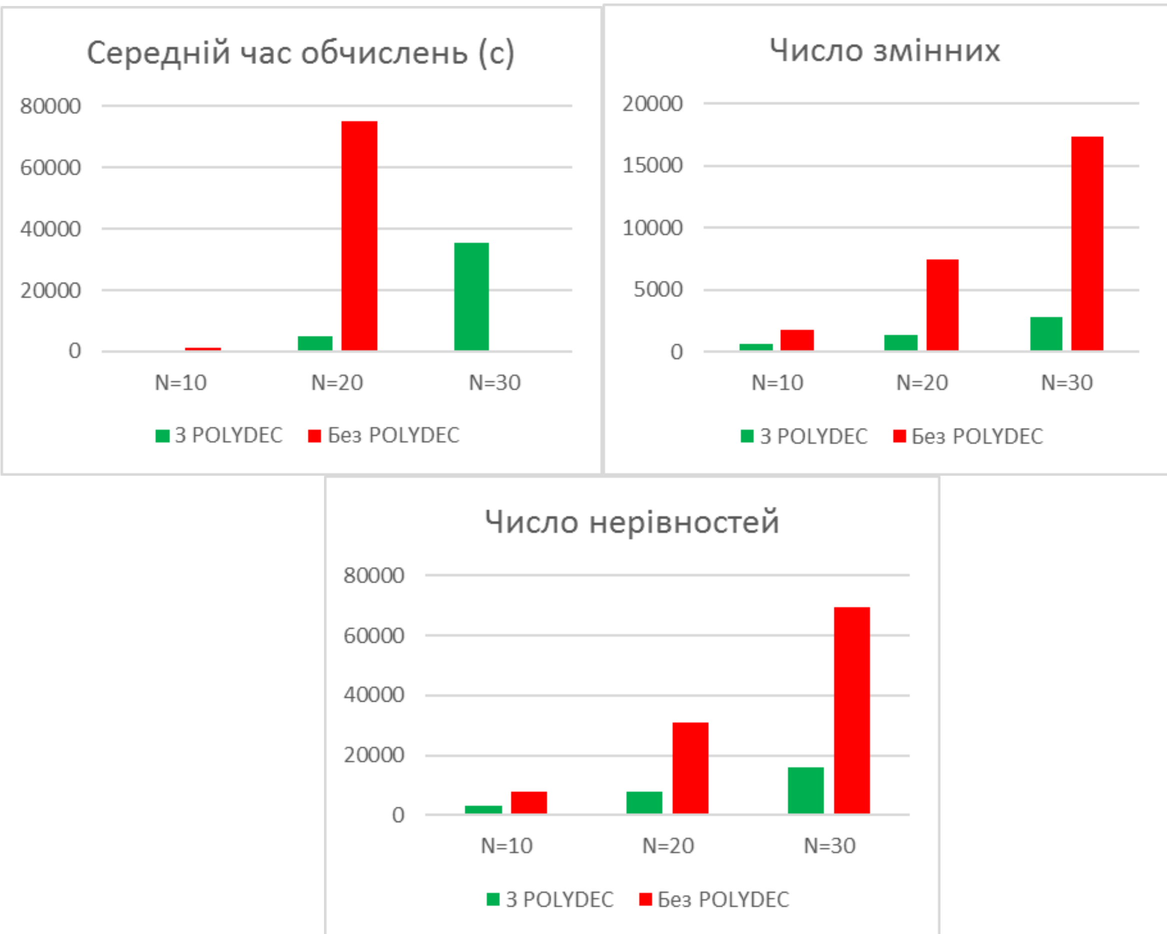

Рисунок 4 – Результати порівняння розв’язання різних задач упаковки довільних багатогранників з застосуванням та без застосування методу POLYDEC

Додатки дисертації містять: довідку про використання програмного модуля оптимізації упаковки довільних неорієнтованих багатогранників, листа підтримки від Giorgio Fasano – провідного вченого та спеціаліста в галузі математичного моделювання та оптимізації систем європейської компанії «Thales Alenia Space», акт про впровадження запропонованих в роботі засобів, моделей, методів та програмних модулей в IT компанії ТОВ «Cloud Works», акт про впровадження в навчальний процес, опис інтерфейсу і можливостей дослідницької програми «Concave Demo», точки локальних екстремумів для прикладів наведених у розділі 5.

ВИСНОВКИ

У дисертації розв’язано важливу наукову задачу оптимальної упаковки неопуклих багатогранників на основі отриманих нових фундаментальних, теоретично обґрунтованих результатів, включаючи створення конструктивних засобів математичного моделювання, побудову нових математичних моделей, розробку ефективних методів розв’язання.

Основні наукові результати дисертації:

а) набув подальшого розвитку метод *phi*-функцій: вперше побудовані *phi-функції, псевдонормалізовані phi-функції, квазі phi-функції та псевдонормалізовані квазі phi-функції* як засоби математичного моделювання *обмежень розміщення* для задачі *OPP*, що дозволяє описати в аналітичному вигляді: неперетин довільних багатогранників; включення багатогранників в опуклий котейнер; мінімально допустимі відстані між довільними багатогранниками та між багатогранниками та границею контейнера. Формалізовано *обмеження балансу* у вигляді системи нелінійних нерівностей з гладкими функціями

б) вперше побудована математична модель задачі *OPP* у вигляді задачі нелінійного програмування (що включає всі глобально оптимальні розв’язки) для неопуклих багатогранників в опуклому контейнері, границя якого формується за допомогою сферичних, циліндричних, еліптичних поверхонь та площини з урахуванням обмежень розміщення та обмежень балансу, що дозволяє використовувати сучасні *NLP-солвери*;

в) вперше побудована математична модель задачі кластерінгу неопуклих багатогранників (*OPC* – Optimal Polytopes Clustering) в сферичній, кубоїдній та циліндричній областях мінімального об’єму, що дозволяє генерувати ефективні допустимі стартові точки для пошуку локальних екстремумів задачі *OPP*;

г) набули подальшого розвитку методи розв’язання задач геометричного проектування: запропонована стратегія розв’язання задачі *OPP* та розроблені ефективні методи для основних її реалізацій, які на відміну від існуючих підходів: враховують одночасно *неперервні трансляції* та *обертання* об’єктів, *мінімально допустимі відстані* і *обмеження балансу*; дозволяють отримувати локально оптимальні розв’язки для задач *OPP*, що є кращими за значенням цільової функції (порівняно з *benchmark instances* – відомими опублікованими результатами).

д) створено програмне забезпечення для розв’язання основних реалізацій задачі *OPP*;

е) створено програмний модуль для розв’язання задачі *OPC*.

є) виконано порівняння результатів числових експериментів та відомих світових аналогів, отримано найкращі значення цільової функції для усіх, та покращено час розв’язання – для багатьох тестових прикладів. Виконано аналіз ефективності методу декомпозиції POLYDEC.

Отримані наукові результати являють собою подальший розвиток теорії математичного моделювання і обчислювальних методів в геометричному проектуванні.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Stoian Y. E., Chugay A. M., Pankratov A. V., Romanova T. E. Two Approaches to Modeling and Solving the Packing Problem for Convex Polytopes // Cybernetics and Systems Analysis. 2018. № 4 (54). P. 585-593.
2. Стоян Ю. Е., Панкратов А.В., Романова Т.Е. Упаковка многогранников в выпуклый контейнер минимального объема // Системи управління, навігації та зв’язку. 2018. № 2 (48). С. 48-54
3. Chugay A., Stoian Ye. Cluster packing of concave non-oriented polyhedra in a cuboid // Advanced Information Systems. 2018. № 2(1). P.16-21
4. Stoian Y., Pankratov A., Romanova T. Optimal clustering of polyhedra // Bionics Intelligence. 2017. № 2 (89). P. 12-22
5. Чугай А.М., Панкратов О.В., Романова Т.Є., Стоян Ю.Є. Оптимізація процесу 3D-друку для SLS технології адитивного виробництва // Системи управління, навігації та зв’язку. 2017. № 6 (46). С. 127-130
6. Стоян Ю.Е., Романова Т.Е., Панкратов А.В. Математическая модель задачи оптимальной компоновки многогранников в выпуклой многогранной области // Системи управління, навігації та зв’язку. 2016. № 3 (39). С. 62-66.
7. Панкратов А.В., Романова Т.Е., Стоян Ю.Е., Чугай А.М. Задача оптимизации упаковки многогранников в сферическом и цилиндрическом контейнерах // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2016. № 1/4 (79). С. 39-47.
8. Панкратов А.В., Романова Т.Е., Стоян Ю.Е. Псевдонормализованные квази phi-функции для многогранников // Радиоэлектроника и информатика. 2015. № 3. С. 22-26.
9. Стоян Ю.Е. Упаковка многогранников в выпуклый контейнер минимального объема. Современные проблемы машиностроения: тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов, Харьков: Ин-т. проблем машиностроения им. А. М. Подгорного НАН Украины. 2018. С. 18.
10. Romanova T., Bennell J.A., Stoyan Y., Pankratov A. Packing of arbitrary polyhedra with continuous rotations using nonlinear optimisation. ESICUP meeting: тез. докл. 15-ой международной конференции, Zoetermeer, Netherlands. 2018. P. 17-18

11. Stoian Y.E., Romanova T.E., Pankratov A.V. Packing of polyhedra within a convex container. Problem of Decision Making under Uncertainties: тез. докл. XXX международной конференции, Вильнюс, Литва. 2017. С. 116

12. Стоян Ю.Е. Математическое моделирование оптимизации упаковки многогранников в выпуклой многогранной области. Радиоэлектроника и молодёжь в XXI веке: тез. докл. XXI Международного молодёжного форума, Харьков: ХНУРЭ. 2017. С. 104-105.

13. Romanova T.E., Pankratov A.V., Stoian Y.E. Packing of Polytopes within Spherical and Cylindrical Containers. ESICUP meeting: тез. докл. 14-ой международной конференции, Льеж, Бельгия. 2017. С. 23.

14. Chugay A., Pankratov A., Romanova T. Stoian Yu. Optimization of the process of 3D-Printing for SLS technologies of additive production. Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education: тез. докл. 7-ой международной конференции. – София, Болгария. 2017. FA24. С. 134-138.

15. Stoian Yu. Packing polyhedrons using quasi-phi-functions. Современные проблемы машиностроения: тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов, Харьков: Институт проблем машиностроения им. А.М. Подгорного НАН Украины. 2016. С. 33.

16. Stoian Yu. Mathematical model and solution algorithm for packing problem of convex polyhedra. Information Technologies and Computer Modelling: тез. докл. международной научно-практической конф., Ивано-Франковск – Яремча. 2016. С. 187-188

17. Стоян Ю.Е., Панкратов А.В., Романова Т.Е., Чугай А.М. О NLP-задаче оптимальной упаковки невыпуклых многогранников в сферическом и цилиндрическом контейнерах. Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: тез. докл. 5-ой Межд. науч. конф., Кишинев, Молдавия. 2016. С. 345-348

18. Стоян Ю.Е., Романова Т.Е., Панкратов А.В. Упаковка невыпуклых многогранников в кубоиде минимального объема. Информационные системы и технологии: тез. докл. 5-ой Международная научно-техническая конф., Коблево. 2016. С. 129-130

19. Стоян Ю.Е., Панкратов А.В., Романова Т.Е. Об особенностях задачи оптимизации компоновки невыпуклых многогранников. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тезисы докладов XIII международной научно-практической конференции, Днепропетровск. 2016. С. 198-199

20. Стоян Ю.Е. Псевдонормализованная квази phi-функция для невыпуклых многогранников. Современные проблемы машиностроения: тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов, Харьков: Ин-т. проблем машиностроения им. А. М. Подгорного НАН Украины. 2015. С. 18.

АНОТАЦІЯ

Стоян Ю.Є. Математичне моделювання та методи розв'язання оптимізаційних задач упаковки довільних багатогранників. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Харківський національний університет радіоелектроніки МОН України, Харків, 2019.

В дисертації розглядається задача оптимальної упаковки довільних багатогранників в опуклому контейнері, границя якого утворена сферичними, циліндричними, еліптичними поверхнями та площинами. Багатогранники допускають неперервні обертання та трансляції. Враховуються обмеження на мінімально допустимі відстані та обмеження балансу. Задача називається задачею *OPP* (*Optimal Polytopes Packing*). Робота присвячена розробці засобів математичного та комп'ютерного моделювання, математичних моделей та методів розв'язання задачі *OPP*.

Розроблені конструктивні засоби математичного моделювання обмежень розміщення задачі *OPP* у вигляді нових класів псевдонормалізованих *phi*-функцій для моделювання обмежень включення довільних багатогранників у довільний опуклий контейнер з урахуванням мінімально допустимих відстаней і псевдонормалізованих квазі *phi*-функцій для моделювання обмежень неперетину довільних багатогранників з урахуванням мінімально допустимих відстаней.

Побудовано та досліджено математичну модель задачі *OPP*, у вигляді задачі нелінійного програмування. Залежно від вигляду функції цілі (метричні характеристики контейнеру чи коефіцієнт гомотетії), форми контейнера (прямий круговий циліндр, кубоїд, куля, опуклий багатогранник, довільна опукла область, еліпсоїд), різних комбінацій обмежень (мінімально допустимі відстані та обмеження балансу) розглянуто основні реалізації задачі *OPP*. Запропоновано стратегію розв'язку задачі *OPP*, яка заснована на методі мультистарту. Розроблено ефективні методи побудови допустимих стартових точок та локальної оптимізації (метод декомпозиції) з використанням солвера IPOPT для пошуку локальних екстремумів в підзадачах нелінійного програмування.

Запропоновані методи дозволяють знаходити локально оптимальні розв'язки задачі *OPP*, найкращі за значенням цільової функції (порівняно з відомими опублікованими результатами) та вперше отримати розв'язки для довільних опуклих контейнерів.

Отримані результати використовуються у навчальному процесі. Результати даного дослідження можуть мати застосування, наприклад, в адитивних технологіях, матеріалознавстві, логістиці, космічному машинобудуванні, ортопедичній хірургії.

Ключові слова: упаковка, опуклі контейнери, неорієнтовані багатогранники, допустимі відстані, обмеження балансу, квазі phi-функції, математичне моделювання, нелінійна оптимізація, метод декомпозиції.

АННОТАЦИЯ

Стоян Ю. Е. Математическое моделирование и методы решения оптимизационных задач упаковки произвольных многогранников. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Харьковский национальный университет радиоэлектроники МОН Украины, Харьков, 2019.

В диссертации рассматривается задача оптимальной упаковки произвольных многогранников в выпуклом контейнере, граница которого формируется сферическими, цилиндрическими, эллиптическими поверхностями и плоскостями. Многогранники допускают непрерывные вращения и трансляции. Учитываются ограничения на минимально допустимые расстояния и ограничения баланса. Задача называется задачей *OPP* (*Optimal Polytopes Packing*). Работа посвящена разработке средств математического и компьютерного моделирования, математических моделей и методов решения задачи *OPP*.

Разработаны конструктивные средства математического моделирования ограничений размещения задачи *OPP* в виде новых классов псевдонормализованных phi-функций для моделирования ограничений включения произвольных многогранников в выпуклый контейнер с учетом минимально допустимых расстояний и псевдонормализованных квази phi-функций для моделирования ограничений непересечения произвольных многогранников с учетом минимально допустимых расстояний.

Построена и исследована математическая модель задачи *OPP* в виде задачи нелинейного программирования. В зависимости от вида функции цели (метрические характеристики контейнера или коэффициент гомотетии), формы контейнера (прямой круговой цилиндр, кубоид, шар, выпуклый многогранник, эллипсоид, произвольная выпуклая область), различных комбинаций ограничений (минимально допустимые расстояния и ограничения баланса) рассматрены основные реализации задачи *OPP*. Предложена стратегия решения задачи *OPP,* основанная на методе мультистарта. Разработаны эффективные методы построения допустимых стартовых точек и локальной оптимизации (метод декомпозиции) с использованием солвера IPOPT для поиска локальных экстремумов в подзадачах нелинейного программирования.

Предложенные методы позволяют находить локально оптимальные решения задачи *OPP*, лучшие по значению целевой функции (по сравнению с известными опубликованными результатами) и впервые получить решения для произвольных выпуклых контейнеров.

Полученные результаты используются в учебном процессе. Результаты данного исследования могут иметь приложения, например, в аддитивных технологиях, материаловедении, логистике, космическом машиностроении, ортопедической хирургии.

Разработанный программный модуль оптимизации упаковки

произвольных многогранников используется на кафедре «Прикладного материаловедения и обработки материалов» Национального университета «Львовская политехника» для решения задачи оптимального заполнения заданного объема частицами несферической формы.

Предложенные в работе средства, модели, методы и программные модули используются в ООО «Cloud Works» для решения задач оптимизации процесса 3D-печати, которое использует SLS технологию, а также для решения задач оптимальной упаковки грузов в произвольных контейнерах в сфере логистики.

Полученные научные результаты являются дальнейшим развитием теории математического моделирования и вычислительных методов в геометрическом проектировании.

Ключевые слова: упаковка, выпуклые контейнеры, неориентированные многогранники, допустимые расстояния, ограничения баланса, квази phi-функции, математическое моделирование, нелинейная оптимизация, метод декомпозиции.

ABSTRACT

Stoian Y.E. Mathematical modeling and methods for solving optimization problems of arbitrary polytopes packing. – Qualifying scientific work on the manuscript.

Thesis for a candidate degree in specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – Kharkiv national university of radioelectronics of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The thesis studies the problem of optimal packing of arbitrary polytopes into a convex container that is formed by spherical, cylindrical, elliptical surfaces and planes. The polytopes allow continuous rotations and translations. The given minimum allowable distances as well as equilibrium constraints are taken into account. The problem is called the *optimal polytopes packing* (*OPP*). The thesis is devoted to the development of tools of mathematical and simulation modelling, mathematical models and solution methods for *OPP* problem.

Constructive tools of mathematical modelling of placement constraints in *OPP* problem are developed in the form of new classes of pseudonormalised *phi*-functions for modelling containment of arbitrary polytopes within the arbitrary convex container taking into account the given minimum allowable distances and pseudonormalised quasi-*phi*-functions for modelling non-overlapping of arbitrary polytopes taking into account given minimum allowable distances.

The mathematical model of *OPP* problem is constructed and investigated in the form of non-linear programming problem. Basic realizations of *OPP* problem are developed depending on the form of objective function (metric characteristics of the container or homothetic coefficient), the form of the container (cylinder, cuboid, sphere, convex polytope, ellipsoid, arbitrary convex domain), combinations of *constraints* (minimum allowable distances and equilibrium constraints). The strategic of solution of *OPP* problem, based on the multi-start method is proposed. The efficient methods are developed for the construction of efficient starting points and

local optimization (decomposition method), employing IPOPT solver for the search for local extrema in non-linear programming subproblems.

Proposed methods allow to search for local-optimal solutions of *OPP* problem with the best value of the objective function (in comparison with the known published results) and first obtain the solutions for arbitrary convex containers.

The obtained results are used in the educational process. Results of this work can have applications in additive technologies, material science, logistics, space engineering, orthopedic surgery.

Keywords: packing, convex containers, non-oriented polytopes, allowable distances, equilibrium constraints, quasi phi-functions, mathematical modeling, nonlinear optimization, decomposition method.

Підписано до друку 15.01.2019 р.
Формат 60х84/16. Папір офсетний.
Друк-цифровий. Умовн. друк. арк. 0,9. Тираж 100 прим. Зам. № 144

Надруковано у копі-центрі «МОДЕЛІСТ»
(ФО-П Миронов М.В., Свідоцтво ВО4№022953)
м. Харків, вул. Мистецтв, 3 літер Б-1
Тел. 7-170-354
www.modelist.in.ua