НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ФЕЩЕНКО ІВАН СЕРГІЙОВИЧ

УДК 517.982.22+517.983.23

СИСТЕМИ ПІДПРОСТОРІВ ГІЛЬБЕРТОВИХ І БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.01 - математичний аналіз
111- математика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 2019

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник
академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
САМОЙЛЕНКО Юрій Стефанович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу функціонального аналізу.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, професор
КАДЕЦЬ Володимир Михайлович,
Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна МОН України,
професор кафедри фундаментальної математики
факультету математики і інформатики;

доктор фізико-математичних наук, професор
ДУДКІН Микола Євгенович,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
в.о. завідувача кафедри диференціальних рівнянь
фізико-математичного факультету.

Захист відбудеться ″24″ вересня 2019 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

Автореферат розісланий ″14″ серпня 2019 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. 1. Вивчення систем $L = (V; V_1, \ldots, V_n)$ підпросторів $V_1, \ldots, V_n$ скінченновимірного векторного простору V, $n \in \mathbb{N}$ є важливою задачею алгебри. Згадаємо, наприклад, задачі про опис нерозкладних трійок підпросторів, про опис нерозкладних четвірок підпросторів [1], про опис нерозкладних зображень у просторі V скінченних частково впорядкованих множин [2].

Нехай X — банахів простір, а $X_1, ..., X_n$ — його підпростори (тут і надалі слово підпростір означає замкнену лінійну множину). Вивчення систем $S = (X; X_1, ..., X_n)$ підпросторів простору X є важливою задачею функціонального аналізу. Дисертаційна робота присвячена двом напрямам у теорії систем підпросторів банахових просторів: структурним теоремам для систем підпросторів гільбертового простору (розділ 1) і вивченню властивостей сум підпросторів банахового простору (розділи 2, 3, 4).

2. Структурні теореми для систем підпросторів гільбертового простору. Тут ми обмежимось випадком, коли $X = H$ — комплексний гільбертів простір. Зазвичай (якщо наша мета — одержати структурну теорему) системи підпросторів гільбертового простору розглядаються з точністю до унітарної еквівалентності. (Нагадаємо, що дві системи підпросторів $S = (H; H_1, ..., H_n)$ і $S' = (H'; H_1', ..., H_n')$ називаються унітарно еквівалентними, якщо існує унітарний оператор $U : H \to H'$, такий, що $U(H_k) = H_k'$ для всіх $k = 1, 2, ..., n$). При цьому складність задачі опису систем із n підпросторів залежить від n.

Якщо $n = 1$, то структура одного підпростору дуже проста. Ми маємо ортогональний розклад $H = H_1 \oplus H_1^\perp$, щодо якого $H_1 = H_1 \oplus \{0\}$. Це означає, що довільна система одного підпростору є ортогональною прямою сумою найпростіших систем виду $(M; M)$ і $(M; \{0\})$, де M — гільбертів простір. Також ми бачимо, що довільна система з одного підпростору "будується" з найпростіших нерозкладних систем одного підпростору — $(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ і $(\mathbb{C}; \{0\})$. Нагадаємо, що систему $S = (H; H_1, \ldots, H_n)$ називають *розкладною*, якщо існує ортогональний розклад $H = H' \oplus H''$ у пряму суму ненульових підпросторів H', H'' і системи підпросторів $S' = (H'; H_1', \ldots, H_n')$, $S'' = (H''; H_1'', \ldots, H_n'')$, такі, що $H_k = H_k' \oplus H_k''$ для всіх $1 \leqslant k \leqslant n$. Система підпросторів S називається *нерозкладною*, якщо вона не є розкладною. Таким чином, нерозкладні системи одного підпростору є "цеглинками", з яких, у певному сенсі, "будується" довільна система з одного підпростору.

Якщо $n = 2$, то структура пари підпросторів цілком описується за допомогою теореми П. Халмоша про 2 проектори (Halmos' two projections theorem) [3]. При цьому у відповіді виникає обмежений самоспряжений оператор (кутовий оператор). Як показує теорема Халмоша, довільна пара підпросторів (подібно до одного підпростору) "будується" з "цеглинок" — нерозкладних пар підпросторів. Ці "цеглинки" — чотири

[1] Gelfand I. M., Ponomarev V. A. Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space// Colloquia Mathematica Societatis Ianos Bolyai, 5 Hilbert space operators, Tihany (Hungary).—1970.— P. 163–237.

[2] Исследования по теории представлений// Зап. научн. сем. ЛОМИ.—Том 28, ред. Д. К. Фаддеев.— Наука, Л.— 1972.

[3] Halmos P. R. Two subspaces// Trans. Amer. Math. Soc.—1969.—Vol. 144.— P. 381–389.

пари підпросторів одновимірного простору $\mathbb{C}$: $S_{00} = (\mathbb{C}; \{0\}, \{0\})$, $S_{01} = (\mathbb{C}; \{0\}, \mathbb{C})$, $S_{10} = (\mathbb{C}; \mathbb{C}, \{0\})$, $S_{11} = (\mathbb{C}; \mathbb{C}, \mathbb{C})$; сім'я пар підпросторів двовимірного простору $\mathbb{C}^2$, яка параметризується кутом $\varphi \in (0, \pi/2)$ — підпростір H_1 породжується вектором $(1,0)^t$, а підпростір H_2 — вектором $(\cos\varphi, \sin\varphi)^t$.

Якщо $n = 3$, то задача опису трійки підпросторів гільбертового простору з точністю до унітарної еквівалентності "надзвичайно складна" (або, як іще кажуть, безнадійна або $*$-дика в термінології Ю.С. Самойленка і С.А. Кругляка). Це означає, що ця задача містить як підзадачу задачу опису з точністю до унітарної еквівалентності пари обмежених самоспряжених операторів у гільбертовому просторі (що рівнозначно до задачі опису одного оператора $C = A + iB$). Остання задача — стандартна "надзвичайно складна" задача теорії операторів у гільбертовому просторі. Відзначимо, що навіть за деяких додаткових умов, наприклад, що другий підпростір H_2 ортогональний до третього підпростору H_3, задача опису таких трійок підпросторів залишається "надзвичайно складною" [4], [5], [6].

Звичайно, все сказане для $n = 3$ правильне і при $n \geqslant 3$.

Таким чином, природньо виділити деякий клас систем підпросторів і спробувати описати з точністю до унітарної еквівалентності: а) всі системи з цього класу і б) всі нерозкладні системи з цього класу ("цеглинки").

3. Деякі класи систем підпросторів. 1971 року фізики H. N. V. Temperley і E. H. Lieb ввели алгебри

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\langle p_1, p_2, \ldots, p_n \mid p_j^2 = p_j,\ & j = 1, 2, \ldots, n;\\ & p_i p_j p_i = \nu p_i,\ |i-j| = 1;\\ & p_i p_j = p_j p_i,\ |i-j| \geqslant 2\rangle,\end{aligned}$$

$\nu \in \mathbb{C}$ у зв'язку з вивченням моделей статистичної фізики [7]. У випадку $\nu = \tau_0^2 \in (0,1)$ такі алгебри можна розглядати як $*$-алгебри, якщо означити в них інволюцію рівностями $p_j^* = p_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Нехай π — деяке $*$-зображення такої $*$-алгебри в гільбертовому просторі H, а H_i — образи ортогональних проекторів $P_i = \pi(p_i)$. Таким чином ми отримали систему підпросторів $S = (H; H_1, \ldots, H_n)$, що задовольняє такі умови:

(1) сусідні пари підпросторів розташовані під кутом $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, де $\tau_0 = \cos\theta_0$, тобто $P_i P_{i+1} P_i = \tau_0^2 P_i$, $P_{i+1} P_i P_{i+1} = \tau_0^2 P_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$;

(2) інші пари підпросторів "комутують", тобто $P_i P_j = P_j P_i$.

Нехай A_n — граф із множиною вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$ і множиною ребер $\{i, i+1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Тоді умови на кут між підпросторами відповідають парам вершин i, j,

---

[4] Кругляк С. А., Самойленко Ю. С. Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов// Функциональный анализ и его приложения.—1980.— Том 14, № 1.— С. 60–62.

[5] Kruglyak S. A., Samoĭlenko Yu. S. On complexity of description of representations of $*$-algebras generated by idempotents// Proc. Am. Math. Soc.—2000.—Vol. 128, No. 6.— P. 1655–1664.

[6] Ostrovskiĭ V., Samoĭlenko Yu. Introduction to the Theory of Representations of Finitely Presented $*$-algebras. I. Representations by bounded operators// Rev. Math. & Math. Phys.—1999.— Vol. 11.— P. 1–261.

[7] Temperley H. N. V., Lieb E. H. Relations between 'percolations' and 'colouring' problems and other graph theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the percolation problem// J. Proc. Roy. Soc. London Ser. A.—1971.—Vol. 322.— P. 251–280.

що з'єднані ребром в A_n, а умови комутативності — парам вершин i, j, які не з'єднані ребром.

Розглянемо клас систем підпросторів, що визначається графом Γ і функцією τ на його ребрах. Нехай Γ — граф без петель і кратних ребер із множиною вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$. Позначимо через E множину ребер Γ, а через $\overline{E}$ — множину пар вершин $\{i, j\}$, які не з'єднані ребром у Γ. Нехай на ребрах Γ задано функції $\theta : E \to (0, \pi/2) : \{i, j\} \mapsto \theta_{\{i,j\}}$ і $\tau = \cos\theta : E \to (0, 1) : \{i, j\} \mapsto \tau_{\{i,j\}}$. Через $Sys(\Gamma, \tau)$ позначимо множину систем підпросторів S, таких, що:

(1) якщо $\{i, j\} \in E$, то підпростори H_i, H_j розташовані під кутом $\theta_{\{i,j\}}$, тобто $P_iP_jP_i = \tau^2_{\{i,j\}}P_i$ і $P_jP_iP_j = \tau^2_{\{i,j\}}P_j$;

(2) якщо $\{i, j\} \in \overline{E}$, то підпростори H_i, H_j "комутують", тобто $P_iP_j = P_jP_i$.

Системи $S \in Sys(\Gamma, \tau)$ можна розглядати як $*$-зображення відповідної $*$-алгебри

$$\begin{aligned}\mathcal{TL}_{\Gamma,\tau} = \mathbb{C}\langle p_1, p_2, \ldots, p_n \mid p_j^2 = p_j^* = p_j,\ j = 1, 2, \ldots, n;\\ p_ip_jp_i = \tau^2_{\{i,j\}}p_i,\ \{i, j\} \in E;\\ p_ip_j = p_jp_i,\ \{i, j\} \in \overline{E}\rangle.\end{aligned}$$

Зауважимо, що якщо "забути" про інволюцію, тобто в означенні $\mathcal{TL}_{\Gamma,\tau}$ умови $p_j^2 = p_j^* = p_j$ замінити на $p_j^2 = p_j$, то визначена таким чином алгебра буде *проективною алгеброю* [8].

Вужчиий клас систем підпросторів отримаємо, якщо для кожної пари вершин i, j, які не з'єднані ребром у Γ, умову комутативності посилити, замінивши на умову *ортогональності* $P_iP_j = P_jP_i = 0$. Множину таких систем підпросторів — "простих" систем підпросторів — позначимо через $Sys(\Gamma, \tau, \perp)$. Такі системи можна розглядати як $*$-зображення відповідної $*$-алгебри $\mathcal{TL}_{\Gamma,\tau,\perp}$ (яка є фактор-алгеброю $*$-алгебри $\mathcal{TL}_{\Gamma,\tau}$). Вивченню $*$-алгебр $\mathcal{TL}_{\Gamma,\tau,\perp}$ і класів систем підпросторів $Sys(\Gamma, \tau, \perp)$ присвячена серія робіт (див. огляд Ю.С. Самойленка і О.В. Стрільця [9]).

Природнім чином виникає клас систем підпросторів, що займає "проміжне" положення між $Sys(\Gamma, \tau)$ і $Sys(\Gamma, \tau, \perp)$. Нехай E^c — деяка підмножина множини $\overline{E}$. Позначимо через $Sys(\Gamma, E^c, \tau)$ множину систем підпросторів $S = (H; H_1, \ldots, H_n)$, таких, що:

(1) якщо $\{i, j\} \in E$, то підпростори H_i, H_j розташовані під кутом $\theta_{\{i,j\}}$;

(2) якщо $\{i, j\} \in E^c$, то підпростори H_i, H_j "комутують";

(3) якщо $\{i, j\} \in \overline{E} \setminus E^c$, то підпростори H_i, H_j ортогональні.

У першому розділі дисертації ми вивчаємо класи систем підпросторів $Sys(K_{1,N}, E^c_m, \tau)$, де $N \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $2m \leqslant N$, $K_{1,N}$ — "зірка" з N променями, τ — довільна функція на ребрах $K_{1,N}$, а множина E^c_m складається з пар вершин $\{2k, 2k+1\}$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

4. Замкненість і доповнювальність. Одними із найпростіших властивостей лінійної множини в банаховому просторі є замкненість і доповнювальність. Питання про

[8] Graham J. J. Modular representations of Hecke algebras and related algebras// Ph.D. thesis.—Univ. Sydney.— 1995. Розділ 6.

[9] Самойленко Ю. С., Стрелец А. В. О простых n-ках подпространств гильбертова пространства// Український математичний журнал.—2009.— Том 61, № 12.— С. 1668–1703.

замкненість важливе і виникає, наприклад, у теорії наближень. Питання про доповнювальність є тоншим питанням геометрії банахових просторів. Нагадаємо відповідне означення. Нехай X — дійсний або комплексний банахів простір. Нехай M — лінійна підмножина простору X. Будемо казати, що M доповнювальна в X, якщо існує лінійна множина N (доповнення), така, що простір X є топологічною прямою сумою M і N. Це означає, що оператор суми $S : M \times N \to X$, визначений рівністю $S(x, y) = x+y$, $x \in M, y \in N$, є ізоморфізмом (нормованих лінійних просторів). Тут $M \times N$ є лінійним простором усіх пар (x, y) з $x \in M, y \in N$, наділеним нормою $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Легко перевірити, що M доповнювальна в X тоді і тільки тоді, коли існує неперервний лінійний проектор на M, тобто неперервний лінійний оператор $P : X \to X$, такий, що $Px \in M$ для всіх $x \in X$ і $Px = x$ для $x \in M$.

Кожна доповнювальна лінійна множина замкнена, тобто є підпростором (це випливає з того, що $M = S(M \times \{0\})$). Саме тому доповнювальні лінійні множини називають доповнювальними підпросторами. Зауважимо, що можна дати таке (рівнозначне) означення доповнювальності: лінійна множина M називається доповнювальною в X, якщо M замкнена (тобто є підпростором), і існує підпростір N, такий, що $M \cap N = \{0\}$ і $M + N = X$ (рівносильність цього означення і попереднього випливає з того, що кожна доповнювальна лінійна множина замкнена, і з теореми Банаха про обернений оператор).

Якщо простір X гільбертів, то кожен підпростір M простору X доповнювальний в X (можна розглянути ортогональний розклад $X = M \oplus M^{\perp}$, або, що фактично те саме, ортогональний проектор на M). Звичайно, це правильно і у випадку, коли X ізоморфний до гільбертового простору. Але якщо X не ізоморфний до гільбертового простору, то X містить підпростір, який не є доповнювальним в X (це теорема Lindenstrauss-Tzafriri).

Варто зауважити, що питання про доповнювальність підпростору становить інтерес не лише саме собою. Це питання виникає, наприклад, у теорії груп Банаха-Лі і нескінченновимірних гладких однорідних просторів [10].

5. Суми підпросторів. Нехай X — банахів простір і $X_1, ..., X_n$ — підпростори X. Визначимо суму $X_1, ..., X_n$ природнім чином, а саме,

$$X_1 + ... + X_n := \{x_1 + ... + x_n \mid x_1 \in X_1, ..., x_n \in X_n\}.$$

Очевидно, що $X_1 + ... + X_n$ — лінійна множина в X. Тому, природнім чином, виникають питання про замкненість (в X) цієї множини і її доповнювальність в X. При цьому у питанні про доповнювальність природньо вважати, що всі підпростори X_i доповнювальні в X.

Оскільки кожен доповнювальний підпростір замкнений, питання про доповнювальність тісно пов'язане з питанням про замкненість (достатні умови для доповнювальності суми підпросторів автоматично будуть достатніми умовами для замкненості цієї суми). Також відзначимо, що якщо простір X гільбертів, то лінійна множина $X_1+...+X_n$ доповнювальна в X тоді і тільки тоді, коли вона замкнена в X.

[10] Beltiţă D. Smooth Homogeneous Structures in Operator Theory// Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics.—Vol. 137.— Chapman & Hall/CRC, New York.—2006. Chapter 4.

Системи підпросторів $X_1, ..., X_n$, для яких питання про замкненість їхньої суми є дуже важливим, виникають у різних областях математики, наприклад, у теоретичній томографії і теорії рідж-функцій (плоских хвиль) [11], [12]; теорії вейвлетів і кратномасштабному аналізі [13]; статистиці [14], [15]; апроксимаційних алгоритмах у гільбертових і банахових просторах і, зокрема, в методах поперемінних проекцій [16], [17], [18], [19]; задачі знаходження елемента гільбертового простору з заданими ортогональними проекціями на скінченне число підпросторів [20]; теорії банахових алгебр [21], [22], [23]; теорії операторних алгебр [24]; задачах квадратичної оптимізації в гільбертовому просторі [25]; теорії μ-псевдо майже періодичних функцій (або послідовностей) і μ-псевдо майже автоморфних функцій (або послідовностей) [26].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі функціонального аналізу Інституту математики НАН України в рамках наукових тем "Спектральні та алгебраїчні методи функціонального аналізу в задачах математичної фізики", номер державної реєстрації 0111U000024, і "Методи функціонального аналізу в задачах сучасної математичної фізики", номер державної реєстрації 0116U003126.

Мета і завдання дослідження.

Об'єктом дослідження є системи підпросторів банахового, і, зокрема, гільберто-

[11] Shepp L.A., Kruskal J.B. Computerized tomography: the new medical X-ray technology// Amer. Math. Monthly.—1978.— Vol. 85, No. 6.— P. 420–439.

[12] Pinkus A., Ridge Functions// Cambridge Tracts in Mathematics.— Cambridge: Cambridge University Press.— 2015. Див. Introduction, Chapter 7 і бібліографію там.

[13] Kim H.O., Kim R.Y., Lim J.K. Characterization of the closedness of the sum of two shift-invariant subspaces// J. Math. Anal. Appl.—2006.— Vol. 320, Issue 1.— P. 381–395. і бібліографія.

[14] Bickel P.J., Ritov Y., Wellner J.A. Efficient estimation of linear functionals of a probability measure P with known marginal distributions// Ann. Statist.—1991.— Vol. 19, No. 3.— P. 1316–1346.

[15] Buja A. What Criterion for a Power Algorithm?// in: H. Rieder (ed.), Robust Statistics, Data Analysis, and Computer Intensive Methods. Lecture Notes in Statistics.— Vol. 109.— Springer, New York, NY.— 1996.— P. 49–61.

[16] Pinkus A., Ridge Functions// Cambridge Tracts in Mathematics.— Cambridge: Cambridge University Press.— 2015. Див. Chapter 9 і бібліографію там.

[17] Bauschke H.H., Borwein J.M. On projection algorithms for solving convex feasibility problems// SIAM Rev.—1996.— Vol. 38, No. 3.— P. 367–426. Див. теорему 5.19.

[18] Badea C., Grivaux S., Muller V. The rate of convergence in the method of alternating projections// St. Petersburg Math. J.—2012.— Vol. 23, No. 3.— P. 413–434. Див. теорему 4.1.

[19] Pustilnyk E., Reich S., Zaslavski A.J. Convergence of non-periodic infinite products of orthogonal projections and nonexpansive operators in Hilbert space// J. Approx. Theory.—2012.—Vol. 164.—P. 611–624. Див. Section 3.

[20] Combettes P.L., Reyes N.N. Functions with prescribed best linear approximations// J. Approx. Theory.—2010.—Vol. 162, Issue 5.—P. 1095–1116. і бібліографія.

[21] Rudin W. Spaces of type $H^\infty + C$// Ann. Inst. Fourier (Grenoble).—1975.—Vol. 25, No. 1.— P. 99–125.

[22] Dixon P.G. Non-closed sums of closed ideals in Banach algebras// Proc. Amer. Math. Soc.—2000.—Vol. 128, No. 12.— P. 3647–3654.

[23] Dudziak J., Gamelin T.W., Gorkin P. Hankel operators on bounded analytic functions// Trans. Amer. Math. Soc.—2000.—Vol. 352, No. 1.— P. 363–377.

[24] Hartz M. Topological isomorphisms for some universal operator algebras// J. Funct. Anal.—2012.—Vol. 263, Issue 11.— P. 3564–3587.

[25] Schochetman I.E., Smith R.L., Tsui S-K. On the closure of the sum of closed subspaces// Int. J. Math. Math. Sci.—2001.— Vol. 26, No. 5.—P. 257–267.

[26] Blot J., Cieutat P. Completeness of Sums of Subspaces of Bounded Functions and Applications// Commun. Math. Anal.—2016.—Vol. 19, No. 2.— P. 43–61.

вого простору.

Предметом дослідження є структура систем підпросторів гільбертового простору, які задовольняють певні умови на кути між кожною парою підпросторів, властивості замкненості сум операторних образів у гільбертовому просторі й доповнювальності сум доповнювальних підпросторів банахового простору, а також властивість "зменшення" системи підпросторів гільбертового простору до лінійно незалежної системи підпросторів зі збереженням суми підпросторів системи.

Метою дослідження є:

1) опис систем підпросторів гільбертового простору, які задовольняють певні умови на кути між кожною парою підпросторів системи;

2) отримання достатніх умов для того, щоб сума операторних образів у гільбертовому просторі була замкнена;

3) встановлення достатніх умов для того, щоб сума доповнювальних підпросторів банахового простору була доповнювальна, й отримання за цих умов формули для неперервного лінійного проектора на цю суму підпросторів;

4) встановлення достатніх умов для того, щоб сума маргінальних підпросторів в L^p була доповнювальна в L^p, і отримання за цих умов доповнювального підпростору для цієї суми;

5) отримання відповіді на таке запитання: чи правильно, що довільну систему підпросторів гільбертового простору можна "зменшити" до лінійно незалежної системи підпросторів зі збереженням суми підпросторів?

Для досягнення цієї мети у роботі було поставлено такі *завдання*:

1. Дослідити структуру систем підпросторів гільбертового простору, для яких кожна пара підпросторів задовольняє одну з умов (Ang) (підпростори лежать під заданим кутом один до одного), (Com) (ортогональні проектори на підпростори комутують), (Ort) (підпростори ортогональні). При цьому ці умови природнім чином пов'язані з графом-зіркою з множиною вершин $1, 2, ..., 2m + r + 1$, у якого вершина 1 з'єднана з усіма іншими вершинами, а пари вершин $(2, 3), (4, 5), ..., (2m, 2m+1)$ з'єднані пунктиром. Якщо кожній вершині графа поставити у відповідність підпростір, то умова (Ang) відповідає парам вершин, які з'єднані ребром, умова (Com) відповідає парам вершин, які з'єднані пунктиром, умова (Ort) відповідає парам вершин, які не з'єднані ребром і не з'єднані пунктиром. Отримати: а) опис (з точністю до унітарної еквівалентності) всіх систем підпросторів, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort) і б) опис (з точністю до унітарної еквівалентності) всіх незвідних систем підпросторів, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort).

2. Отримати необхідні і достатні умови для того, щоб точка 0 належала істотному спектру суми обмежених самоспряжених операторів, попарні добутки яких компактні.

3. Отримати необхідні і достатні умови для того, щоб сума образів обмежених самоспряжених операторів, попарні добутки яких компактні, була замкнена.

4. Отримати достатні умови для того, щоб образи неперервних лінійних операторів $A_k : H_k \to H$, $k = 1, 2, ..., n$ були слабко лінійно незалежні і їхня сума була замкнена в H. Тут $H_1, ..., H_n, H$ — гільбертові простори.

5. Отримати достатню умову для того, щоб n доповнювальних підпросторів бана-

хового простору X були лінійно незалежні, а їхня сума була доповнювальною в X. За цієї умови отримати формулу для неперервного лінійного проектора на цю суму підпросторів. Дослідити цю достатню умову на точність.

6. Отримати достатню умову для того, щоб n маргінальних підпросторів у просторі L^p були лінійно незалежними, а їхня сума була доповнювальна у просторі L^p. За цієї умови знайти доповнювальний підпростір для цієї суми маргінальних підпросторів.

7. Довести, що довільну систему підпросторів гільбертового простору можна "зменшити" до лінійно незалежної системи підпросторів із такою самою сумою підпросторів. Більш того, довести, що для довільних підпросторів $H_1, H_2, ..., H_n$ гільбертового простору H знайдуться підпростори $M_2 \subset H_2, M_3 \subset H_3, ..., M_n \subset H_n$, такі, що підпростори $H_1, M_2, M_3, ..., M_n$ лінійно незалежні і їхня сума дорівнює $H_1 + H_2 + ... + H_n$.

Методи дослідження.

При розв'язанні завдань дисертаційної роботи використовуються методи функціонального аналізу і теорії операторів. Зокрема, в розділі 1 системи підпросторів описуються за допомогою операторної матриці Грама системи підпросторів. У розділі 2 використовується операторна матриця Грама системи операторних образів у гільбертовому просторі. У розділі 3 використовується операторна матриця Грама системи доповнювальних підпросторів банахового простору. У розділі 4 використовується структурна теорема П. Халмоша для пари підпросторів гільбертового простору.

Наукова новизна отриманих результатів.

Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

1. Досліджено структуру систем підпросторів гільбертового простору, для яких кожна пара підпросторів задовольняє одну з умов (Ang) (підпростори лежать під заданим кутом один до одного), (Com) (ортогональні проектори на підпростори комутують), (Ort) (підпростори ортогональні). При цьому ці умови природнім чином пов'язані з графом-зіркою з множиною вершин $1, 2, ..., 2m + r + 1$, у якого вершина 1 з'єднана з усіма іншими вершинами, а пари вершин $(2, 3), (4, 5), ..., (2m, 2m+1)$ з'єднані пунктиром. Якщо кожній вершині графа поставити у відповідність підпростір, то умова (Ang) відповідає парам вершин, які з'єднані ребром, умова (Com) відповідає парам вершин, які з'єднані пунктиром, умова (Ort) відповідає парам вершин, які не з'єднані ребром і не з'єднані пунктиром. Отримано: а) опис (з точністю до унітарної еквівалентності) всіх систем підпросторів, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort), і б) опис (з точністю до унітарної еквівалентності) всіх незвідних систем підпросторів, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort).

2. Отримано необхідні і достатні умови для того, щоб точка 0 належала істотному спектру суми обмежених самоспряжених операторів, попарні добутки яких компактні.

3. Отримано необхідні і достатні умови для того, щоб сума образів обмежених самоспряжених операторів, попарні добутки яких компактні, була замкнена.

4. Отримано достатні умови для того, щоб образи неперервних лінійних операторів $A_k : H_k \to H$, $k = 1, 2, ..., n$ були слабко лінійно незалежні і їхня сума була замкнена в H. Тут $H_1, ..., H_n, H$ — гільбертові простори.

5. Отримано достатню умову для того, щоб n доповнювальних підпросторів банахового простору X були лінійно незалежними, а їхня сума була доповнювальною в X.

За цієї умови отримано формулу для неперервного лінійного проектора на цю суму підпросторів. Цей проектор подається у вигляді границі певної послідовності операторів (збіжність — за операторною нормою) і ми одержуємо оцінку зверху для швидкості збіжності. Також показано, що ця достатня умова для того, щоб сума скінченного числа доповнювальних підпросторів була доповнювальною, є точною (в певному сенсі).

6. Отримано достатню умову для того, щоб n маргінальних підпросторів у просторі L^p були лінійно незалежними, а їхня сума була доповнювальна у просторі L^p. За цієї умови знайдено доповнювальний підпростір для цієї суми маргінальних підпросторів.

7. Доведено, що довільну систему підпросторів гільбертового простору можна "зменшити" до лінійно незалежної системи підпросторів із тією самою сумою підпросторів. Більш того, доведено, що для довільних підпросторів $H_1, H_2, ..., H_n$ гільбертового простору H знайдуться підпростори $M_2 \subset H_2, M_3 \subset H_3, ..., M_n \subset H_n$, такі, що підпростори $H_1, M_2, M_3, ..., M_n$ лінійно незалежні і їхня сума дорівнює $H_1 + H_2 + ... + H_n$.

Практичне значення отриманих результатів.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Отримані результати, а також методи, за допомогою яких вони отримані, можуть бути використані при вивченні питань функціонального аналізу, теорії операторів і геометрії банахових просторів. Результати розділу 2, які стосуються замкнeності суми образів неперервних лінійних операторів у гільбертовому просторі, а також результати розділу 3 можуть бути використані в тих областях математики, де виникає питання про замкненість суми підпросторів банахового простору (див. Актуальність теми).

Особистий внесок здобувача.

Усі результати дисертаційної роботи, які виносяться на захист, здобувач одержав самостійно. У спільній з О.В. Стрільцем роботі [2] результати параграфу 3 і пунктів 4.1, 4.2 належать здобувачу (на захист виносяться результати пунктів 4.1 і 4.2). В розділі 4 дисертаційної роботи ідея леми 4.1.2 (точніше, того, що якась лема такого типу має бути) належить В.І. Рабановичу. Доведення цієї леми належить здобувачу.

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертаційної роботи були представлені на конференції:

1. "Banach Algebras and Applications" dedicated to the memory of William G. Bade (July 29—August 4, 2013, Gothenburg, Sweden) у форматі Poster Talk

і доповідались на міжнародних конференціях:

2. International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (18—23 September, 2017, Lviv, Ukraine);

3. International Conference "Modern Stochastics:Theory and Applications.IV". Dedicated to the 100-th anniversary of I.I.Gikhman (May 24—26, 2018, Kyiv, Ukraine);

а також на таких семінарах:

1. науковому семінарі "Теорія ймовірностей та математична статистика" кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники: доктор фіз.-мат. наук, професор Ю.С. Мішура, доктор фіз.-мат. наук, професор Ю.В. Козаченко) (м. Київ, 26.02.2019);

2. науковому семінарі “Асимптотичні методи в статистиці” в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники: доктор фіз.-мат. наук, професор О.Г. Кукуш, доктор фіз.-мат. наук, професор Р.Є. Майборода) (м. Київ, 4.03.2019);

3. семінарі “Сучасний аналіз” у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники: доктор фіз.-мат. наук, професор О.О. Курченко, доктор фіз.-мат. наук, професор В.М. Радченко, доктор фіз.-мат. наук, професор І.О. Шевчук) (м. Київ, 3.04.2019);

4. Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України (керівники: академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор Ю.М. Березанський, академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор Ю.С. Самойленко, член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук А.Н.Кочубей) (м. Київ, 13.03.2019 і 12.10.2016).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 5 фахових роботах, серед яких 4 статті у журналах, які індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus. Частково вони також висвітлені в матеріалах 3 міжнародних конференцій.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається з анотацій (українською та англійською мовами), змісту, вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 57 найменувань, і додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Загальний обсяг дисертації становить 170 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** зазначаються: актуальність теми дисертації і її зв’язок з іншими науковими програмами, планами, темами в місці виконання дисертаційної роботи; мета і завдання, об’єкт, предмет і методи дослідження; наукова новизна і практичне значення отриманих результатів; особистий внесок здобувача; список конференцій і наукових семінарів, на яких доповідались одержані результати; інформація про публікації автора; структура і обсяг роботи, а також подяки.

У **розділі 1** ми вивчаємо структуру систем підпросторів гільбертового простору, для яких кожна пара підпросторів системи задовольняє певну умову на множину кутів між підпросторами.

1. Постановка задачі. Нехай m, r — невід’ємні цілі числа, покладемо $N = 2m + r$. Розглянемо “зірку” з N променями, тобто граф $K_{1,N}$, множина вершин якого $V = \{1, 2, \dots, N + 1\}$ занумерована таким чином, що вершина 1 з’єднана з усіма іншими вершинами. Таким чином, множина ребер E рівна $\{\{1, k\} \mid k \in V \setminus \{1\}\}$. Через E^c_m позначимо множину пар вершин $\{\{2k, 2k + 1\} \mid 1 \leqslant k \leqslant m\}$ (на рисунку ці пари вершин з’єднані пунктиром).

Нехай кожному ребру $\{1, k\}$ поставлено у відповідність кут $\theta_{\{1,k\}} \in (0, \pi/2)$, тобто задана функція $\theta : E \to (0, \pi/2)$. Визначимо функцію $\tau = \cos\theta : E \to (0, 1)$, тобто $\tau_{\{1,k\}} = \cos\theta_{\{1,k\}} \in (0, 1)$.

Уведені граф $K_{1,N}$, множина E^c_m і функція τ дозволяють “наочно” сформулювати умови, яким задовольняють системи підпросторів $S = (H; H_1, \dots, H_n)$, $n = N + 1$, що вивчаються в розділі 1.

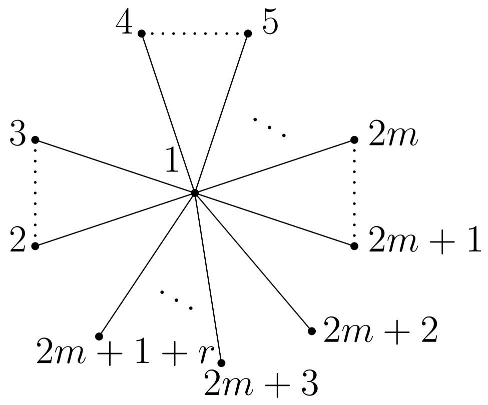

Рис. 0.1: Граф $K_{1,N}$ із “пунктирними ребрами” E_m^c

(Ang): Умови на кути (відповідні парам вершин, які з'єднані ребром). Для кожного $k = 2, 3, \ldots, N+1$ підпростори H_1 і H_k розташовані під кутом $\theta_{\{1,k\}}$, тобто $P_1 P_k P_1 = \tau^2_{\{1,k\}} P_1$ і $P_k P_1 P_k = \tau^2_{\{1,k\}} P_k$.

(Com): Умови комутування (відповідні парам вершин, які з'єднані пунктиром). Для кожного $k = 1, 2, \ldots, m$ ортогональні проектори P_{2k} і P_{2k+1} комутують, тобто $P_{2k} P_{2k+1} = P_{2k+1} P_{2k}$.

(Ort): Умови ортогональності (відповідні парам вершин, які не з'єднані ребром або пунктиром). Якщо пара різних вершин i, j не з'єднана ребром і ця пара не належить множині E_m^c, то відповідні підпростори H_i і H_j ортогональні, тобто $P_i P_j = 0$.

Зауважимо, що у випадку $m = 0$ система підпросторів, яку ми вивчаємо, є “простою” системою підпросторів, пов'язаною з графом $K_{1,N}$ і функцією τ на його ребрах [27].

Наші основні задачі — описати структуру *всіх* систем підпросторів S, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort), і описати структуру *всіх незвідних (=нерозкладних)* систем підпросторів S, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort).

2. Структуру таких систем підпросторів зручно описувати за допомогою G-конструкції систем підпросторів гільбертового простору (конструкції системи підпросторів за її операторною матрицею Грама). Наведемо цю конструкцію.

Нехай $H_{0,k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, — набір ненульових гільбертових просторів. Означимо гільбертів простір $\widetilde{H} = H_{0,1} \oplus \ldots \oplus H_{0,n}$ і позначатимемо $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ природний скалярний добуток у ньому. Означимо підпростори $\widetilde{H}_k = \{(0, ..., 0, x, 0, ..., 0) | x \in H_{0,k}\}, 1 \leqslant k \leqslant n$, де x стоїть на k-ому місці. Нехай $B : \widetilde{H} \to \widetilde{H}$ — обмежений невід'ємний самоспряжений оператор, причому для його блочного розкладу $B = (B_{i,j} : H_{0,j} \to H_{0,i},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n)$ виконано $B_{k,k} = I_{H_{0,k}}, 1 \leqslant k \leqslant n$. Означимо $\widetilde{H}_0 = \operatorname{Ker} B$. Використовуючи оператор B, визначимо скалярний добуток у лінійному просторі $\widetilde{H}/\widetilde{H}_0$ рівністю $\langle x + \widetilde{H}_0, y + \widetilde{H}_0 \rangle = \langle Bx, y \rangle_0$, $x, y \in \widetilde{H}$. Очевидно, що це означення коректне, тобто не залежить від вибору представників класів еквівалентності. Нехай H — поповнення простору $\widetilde{H}/\widetilde{H}_0$ відносно цього скалярного добутка. Визначимо обмежений лінійний оператор $\rho : \widetilde{H} \to H$ рівністю $\rho(x) = x + \widetilde{H}_0$. Означимо $H_k = \rho(\widetilde{H}_k) = \{z + \widetilde{H}_0 \mid z \in \widetilde{H}_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Оскільки

[27] Самойленко Ю. С., Стрелец А. В. О простых n-ках подпространств гильбертова пространства// Український математичний журнал.—2009.— Том 61, № 12.— С. 1668–1703.

для довільного $z \in \widetilde{H}_k$ $\|z + \widetilde{H}_0\| = \sqrt{\langle Bz, z\rangle_0} = \|z\|_0$, то H_k є підпростором простору H. Систему підпросторів $(H; H_1, \ldots, H_n)$, одержану в результаті застосування наведеної вище конструкції, позначатимемо $\mathcal{G}(H_{0,1}, \ldots, H_{0,n}; B)$, а саму конструкцію називатимемо G-конструкцією.

3. Перед тим, як навести опис усіх систем підпросторів, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort), зробимо кілька зауважень.

Зауваження 1. Спочатку покажемо, що без обмеження загальності можна вважати, що $\tau_{\{1,2k\}} = \tau_{\{1,2k+1\}}$ для всіх $1 \leqslant k \leqslant m$. Наступна лема отримана нами разом з О.В. Стрільцем.

Лема 1.4.1. *Нехай M, M_1, M_2 — підпростори H. Припустимо, що підпростори M, M_i розташовані під кутом $\varphi_i \in [0, \pi/2)$, $i = 1, 2$, а ортогональні проектори на підпростори M_1, M_2 комутують. Тоді якщо $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то підпростори M_1, M_2 ортогональні.*

Отже, зменшивши m (якщо це необхідно), можна вважати, що $\tau_{\{1,2k\}} = \tau_{\{1,2k+1\}}$ для всіх $1 \leqslant k \leqslant m$. Позначимо

$$\tau_k = \begin{cases} \tau_{\{1,2k\}} = \tau_{\{1,2k+1\}}, & 1 \leqslant k \leqslant m; \\ \tau_{\{1,k+m+1\}}, & m+1 \leqslant k \leqslant m+r. \end{cases}$$

Зауваження 2. Нульова система $S = (H; 0, \ldots, 0)$ задовольняє всі потрібні умови. В подальшому розглядатимемо ненульові системи підпросторів. Відзначимо, що якщо система $S = (H; H_1, \ldots, H_{N+1})$ задовольняє умову (Ang), і для деякого k підпростір $H_k = 0$, то, як легко бачити, $H_1 = \ldots = H_{N+1} = 0$. Таким чином, якщо система ненульова, то $H_k \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant N+1$.

Зауваження 3. Нехай $S = (H; H_1, \ldots, H_{N+1})$ — ненульова система підпросторів, яка задовольняє умови (Ang), (Com), (Ort). Припустимо, що множина $H_1 + \ldots + H_{N+1}$ не є щільною в H. Визначимо системи

$$S' = (H'; H_1, \ldots, H_{N+1}) \quad \text{і} \quad S'' = (H \ominus H'; 0, \ldots, 0),$$

де $H' = \overline{H_1 + \ldots + H_{N+1}}$. Тоді $S = S' \oplus S''$, S' задовольняє умови (Ang), (Com), (Ort), а S'' є нульовою системою. Тому, щоб описати всі системи підпросторів, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort), досить описати системи, для яких сума $H_1 + \ldots + H_{N+1}$ щільна в H.

4. Тепер ми готові навести опис *усіх* систем підпросторів, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort).

Для гільбертового простору H_0 і набору ортогональних проекторів $Q_1, ..., Q_m$ у ньому визначимо оператор $B = B(Q_1, ..., Q_m) : \oplus_{k=1}^{N+1} H_0 \to \oplus_{k=1}^{N+1} H_0$ рівністю (точніше, блочним розкладом)

$$B = \begin{pmatrix} I & \tau_1 I & \tau_1 I & \dots & \tau_m I & \tau_m I & \tau_{m+1} I & \dots & \tau_{m+r} I \\ \tau_1 I & I & Q_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tau_1 I & Q_1 & I & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tau_m I & 0 & 0 & 0 & I & Q_m & 0 & \dots & 0 \\ \tau_m I & 0 & 0 & 0 & Q_m & I & 0 & \dots & 0 \\ \tau_{m+1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \tau_{m+r} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}.$$

Нехай $\xi(\tau) = 1 - \sum_{k=1}^{m+r} \tau_k^2$. В пункті 1.4.1 ми доводимо, що кожна ненульова система підпросторів $S = (H; H_1, ..., H_{N+1})$, яка задовольняє умови (Ang), (Com), (Ort) і для якої сума підпросторів $H_1, ..., H_{N+1}$ щільна в H, унітарно еквівалентна системі підпросторів $\mathcal{G}(H_0, ..., H_0; B(Q_1, ..., Q_m))$ для деякого гільбертового простору H_0 і набору ортогональних проекторів $Q_1, ..., Q_m$ у ньому, для яких

$$\sum_{k=1}^{m} \tau_k^2 R_k \leqslant \xi(\tau) I, \tag{1}$$

де $R_k = I - Q_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Навпаки, якщо $Q_1, ..., Q_m$ — набір ортогональних проекторів у деякому гільбертовому просторі H_0 і для ортогональних проекторів $R_k = I - Q_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$ виконується операторна нерівність (1), то оператор $B(Q_1, ..., Q_m)$ невід'ємний і система підпросторів $S = \mathcal{G}(H_0, ..., H_0; B(Q_1, ..., Q_m))$ задовольняє умови (Ang), (Com), (Ort).

Крім того, справедливе наступне твердження.

Твердження 1.4.3. *Системи підпросторів $\mathcal{G}(H_0, \dots, H_0; B(Q_1, \dots, Q_m))$ і $\mathcal{G}(H_0', \dots, H_0'; B(Q_1', \dots, Q_m'))$ унітарно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли набори ортогональних проекторів Q_k, $1 \leqslant k \leqslant m$ і Q_k', $1 \leqslant k \leqslant m$ унітарно еквівалентні.*

Таким чином, використавши G-конструкцію систем підпросторів, ми встановили взаємнооднозначну відповідність між ненульовими системами підпросторів S, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort), такими, що множина $H_1 + \ldots + H_{N+1}$ щільна в H, і наборами m ортогональних проекторів $R_1, \ldots, R_m$ у деякому гільбертовому просторі H_0, які задовольняють умову (1) (при цьому системи підпросторів і набори операторів розглядаються з точністю до унітарної еквівалентності).

Зауважимо, що необхідною умовою для виконання (1) є нерівність $\xi(\tau) \geqslant 0$. Тому якщо $\xi(\tau) < 0$, то не існує ненульової системи підпросторів S, яка задовольняє умови (Ang), (Com), (Ort). В подальшому ми вважатимемо, що $\xi(\tau) \geqslant 0$.

5. За допомогою наведеного вище опису всіх систем підпросторів, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort), ми отримали опис усіх незвідних систем підпросторів, які задовольняють умови (Ang),(Com),(Ort).

Твердження 1.4.4. *Система підпросторів $\mathcal{G}(H_0, \dots, H_0; B(Q_1, \dots, Q_m))$ незвідна тоді і тільки тоді, коли набір ортогональних проекторів Q_k, $1 \leqslant k \leqslant m$ незвідний.*

Таким чином, з точністю до унітарної еквівалентності всі ненульові незвідні системи підпросторів, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort), мають вигляд $S = \mathcal{G}(H_0, \dots, H_0; B(Q_1, \dots, Q_m))$, де H_0 — гільбертів простір, $Q_1, \dots, Q_m$ — незвідна сім'я ортогональних проекторів у H_0, така, що для ортогональних проекторів $R_k = I - Q_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$ виконується нерівність (1).

Отже, використавши G-конструкцію, ми показали, що задача опису всіх незвідних унітарно нееквівалентних ненульових систем підпросторів S, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort), еквівалентна до задачі опису незвідних унітарно нееквівалентних наборів ортогональних проекторів $R_1, \dots, R_m$, які задовольняють (1).

У пункті 1.4.2 отримано опис (з точністю до унітарної еквівалентності) всіх незвідних наборів ортогональних проекторів $R_1, ..., R_m$, які задовольняють умову (1). Зауважимо, що для $m \geqslant 3$ при варіаціях параметрів τ_k виникають три можливі ситуації: існує скінченна кількість унітарно нееквівалентних незвідних систем ортогональних проекторів (*скінченна* задача); унітарно нееквівалентних незвідних систем ортогональних проекторів нескінченно багато, але їх іще можна описати (*ручна* задача); задача опису всіх незвідних систем ортогональних проекторів з точністю до унітарної еквівалентності є "безнадійною" в певному сенсі (*дика* задача). Питання про "безнадійність" нашої задачі при певних значеннях параметрів τ_k (коли кількість індексів k, для яких $\tau_k^2 < \xi(\tau)$, не менша від трьох) зводиться до питання про "безнадійність" задачі опису з точністю до унітарної еквівалентності незвідних трійок ортогональних проекторів R_1, R_2, R_3, що задовольняють умову $R_1 + R_2 + R_3 \leqslant (1 + \varepsilon)I$, $\varepsilon > 0$. У підрозділі 1.3 ми доводимо, що ця задача є "безнадійною".

Другий розділ присвячений питанню про замкненість суми підпросторів гільбертового простору. Це — важливе питання функціонального аналізу. Системи підпросторів, для яких питання про замкненість їхньої суми важливе, виникають у теоретичній томографії і теорії рідж-функцій (плоских хвиль), теорії вейвлетів і кратномасштабному аналізі, статистиці, апроксимаційних алгоритмах у гільбертових і банахових просторах і, зокрема, в методах поперемінних проекцій, теорії операторних алгебр та інших областях математики. Точніше, у другому розділі ми розглядаємо навіть загальніше питання про замкненість суми образів неперервних лінійних операторів у гільбертовому просторі (ця задача більш загальна, оскільки кожен підпростір є образом відповідного ортогонального проектора). Остання задача тісно пов'язана з наступним питанням: коли точка 0 належить істотному спектру суми обмежених самоспряжених операторів у гільбертовому просторі?

Покажемо зв'язок між цими задачами. Нехай $H_1, ..., H_n, H$ — комплексні гільбертові простори, і $A_k : H_k \to H$, $k = 1, 2, ..., n$ — набір неперервних лінійних операторів. Нас цікавить питання про замкненість суми образів цих операторів, тобто множини $\sum_{k=1}^n Ran(A_k) = \{\sum_{k=1}^n y_k \mid y_k \in Ran(A_k)\} = \{\sum_{k=1}^n A_k x_k \mid x_k \in H_k\}$.

Твердження 2.2.2. *Множина* $\sum_{k=1}^n Ran(A_k)$ *замкнена тоді і тільки тоді, коли* $\sigma(\sum_{k=1}^n A_k A_k^*) \cap (0, \varepsilon) = \varnothing$ *для деякого* $\varepsilon > 0$. *Якщо ці умови виконані, то* $Ran(\sum_{k=1}^n A_k A_k^*) = \sum_{k=1}^n Ran(A_k)$.

Із твердження 2.2.2 випливає, що якщо точка 0 не належить істотному спектру оператора $\sum_{k=1}^n A_k A_k^*$, то $\sum_{k=1}^n Ran(A_k)$ замкнена. Справді, якщо точка 0 не належить істотному спектру оператора $\sum_{k=1}^n A_k A_k^*$, то вона не є граничною точкою спектра цього оператора, а тому $\sigma(\sum_{k=1}^n A_k A_k^*) \cap (0, \varepsilon) = \varnothing$ для деякого $\varepsilon > 0$. Ця і подібні ідеї використовуються в розділі 2 для встановлення замкнености множини $\sum_{k=1}^n Ran(A_k)$ за певних умов на оператори A_k.

У підрозділі 2.3 ми розглядаємо набори обмежених самоспряжених операторів $A_1, ..., A_n$, для яких кожен добуток $A_i A_j$, $i \neq j$ є компактним оператором. Добре відомо, що істотний спектр $\sigma_e(A)$ суми цих операторів $A = A_1 + ... + A_n$ співпадає, з точністю до точки 0, із об'єднанням істотних спектрів операторів A_i, $i = 1, ..., n$. Виникає природнє запитання: що можна сказати про точку 0? Коли 0 належить істотному спектру оператора A? Ми одержимо необхідну і достатню умову для того, щоб 0 належав істотному спектру оператора A. Позначимо E_{A_i} спектральну проекторнозначну міру оператора A_i, $i = 1, 2, ..., n$. Для $\varepsilon \geqslant 0$ означимо підпростір

$$H_\varepsilon = H_\varepsilon(A_1, \ldots, A_n) = \bigcap_{i=1}^n E_{A_i}([-\varepsilon, \varepsilon])H.$$

Теорема 2.3.2. *$0 \in \sigma_e(A)$ тоді і тільки тоді, коли підпростір H_ε нескінченновимірний для довільного $\varepsilon > 0$.*

Використовуючи цей результат, ми одержуємо необхідну і достатню умову для замкнености суми образів операторів A_i, $i = 1, ..., n$. Очевидно, $H_0 = \bigcap_{i=1}^n Ker(A_i)$. Зауважимо, що $H_0 \subset H_\varepsilon$ для довільного $\varepsilon > 0$.

Теорема 2.3.4. *Множина $\sum_{i=1}^n Ran(A_i)$ замкнена тоді і тільки тоді, коли $H_\varepsilon = H_0$ для деякого $\varepsilon > 0$.*

Використовуючи цей результат, ми одержимо достатню умову для замкнености суми образів операторів.

Теорема 2.3.5. *Нехай $A_{p,i} : K_{p,i} \to H$, $i = 1, \ldots, n_p$, $p = 1, \ldots, m$ — обмежені лінійні оператори (тут $K_{p,i}$ — гільбертові простори, $m, n_1, \ldots, n_m$ — натуральні числа), причому оператор $A_{p,i}^* A_{q,j}$ компактний для довільних $p \neq q$, $i = 1, \ldots, n_p$, $j = 1, \ldots, n_q$. Якщо множина $\mathcal{R}_p = \sum_{i=1}^{n_p} Ran(A_{p,i})$ замкнена для всіх $p = 1, \ldots, m$, то сума цих множин $\sum_{p=1}^m \mathcal{R}_p$ теж замкнена.*

У четвертому підрозділі ми розглядаємо набір неперервних лінійних операторів $A_1 : H_1 \to H$, $A_2 : H_2 \to H$,..., $A_n : H_n \to H$ із замкненими образами (тут $H_1, ..., H_n, H$ — гільбертові простори) і вивчаємо питання про замкненість суми їхніх образів. Із теореми 2.3.5 випливає, що якщо всі добутки $A_i^* A_j$, $i \neq j$ є компактними операторами, то множина $Ran(A_1) + ... + Ran(A_n)$ замкнена в H. Ми покажемо, що якщо істотні норми операторів $A_i^* A_j$, $i \neq j$ є "досить малими" (в певному сенсі), то підпростори $Ran(A_1), ..., Ran(A_n)$ слабко лінійно незалежні і їхня сума $Ran(A_1) + ... + Ran(A_n)$ замкнена. Щоб сформулювати свій основний результат, ми введемо поняття слабкої лінійної незалежності системи підпросторів і поняття істотного зведеного мінімального модуля оператора. Саме за допомогою істотних зведених мінімальних модулів операторів A_k, $k = 1, ..., n$ ми уточнимо значення нечітких слів "досить малі".

Почнімо зі слабкої лінійної незалежності. Нехай X — гільбертів простір, $X_1, \ldots, X_n$ — його підпростори. Кажуть, що підпростори $X_1, \ldots, X_n$ лінійно незалежні, якщо з рівності $x_1 + ... + x_n = 0$, де $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, випливає, що $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Зрозуміло, що $X_1,\dots,X_n$ лінійно незалежні тоді і тільки тоді, коли $X_i \cap \sum_{j\neq i} X_j = \{0\}$ для $i = 1,\dots,n$. Тепер, природньо назвати систему підпросторів $X_1,\dots,X_n$ слабко лінійно незалежною, якщо лінійна множина $X_i \cap \sum_{j\neq i} X_j$ скінченновимірна для всіх $i = 1,\dots,n$.

Тепер перейдемо до істотного зведеного мінімального модуля оператора в гільбертовому просторі. Нехай H_1, H_2 — гільбертові простори, $A : H_1 \to H_2$ — неперервний лінійний оператор. Означимо самоспряжений оператор $B = A^*A\restriction_{H_1\ominus Ker(A)}$: $H_1 \ominus Ker(A) \to H_1 \ominus Ker(A)$. (Таким чином, $A^*A = B \oplus 0$ відносно ортогонального розкладу $H_1 = (H_1 \ominus Ker(A)) \oplus Ker(A)$.) Істотний зведений мінімальний модуль ненульового оператора A, $\gamma_{er}(A)$ визначимо як супремум множини всіх чисел $\gamma \geqslant 0$, для яких існує компактний самоспряжений оператор $K : H_1 \ominus Ker(A) \to H_1 \ominus Ker(A)$, такий, що $B + K \geqslant \gamma^2 I$. Легко показати, що якщо образ оператора A замкнений, то $\gamma_{er}(A) > 0$.

Тепер перейдемо до формулювання теореми про властивості образів операторів A_k з "майже компактними" добутками $A_i^*A_j$. Для неперервного лінійного оператора $A : H_1 \to H_2$ (тут H_1, H_2 — гільбертові простори) будемо позначати $\|A\|_e = \inf\{\|A + K\| \mid K : H_1 \to H_2 \ \text{ компактний}\}$ істотну норму оператора A. Нехай $H_1,\dots,H_n,H$ — комплексні гільбертові простори і $A_k : H_k \to H$ — неперервний лінійний оператор із замкнутим образом $Ran(A_k)$, $k = 1,\dots,n$. Припустимо що, по-перше, $\gamma_{er}(A_k) \geqslant \gamma_k > 0$, $k = 1,\dots,n$ і, по-друге, $\|A_i^*A_j\|_e \leqslant \varepsilon_{i,j}$ для всіх пар $i \neq j$. У подальшому ми припускатимемо, що $\varepsilon_{j,i} = \varepsilon_{i,j}$ для всіх $i \neq j$ (зауважимо, що оскільки $A_j^*A_i = (A_i^*A_j)^*$, то $\|A_j^*A_i\|_e = \|A_i^*A_j\|_e$). Визначимо дійсну симетричну $n\times n$ матрицю $M = (m_{i,j})$ таким чином:

$$m_{i,j} = \begin{cases} \gamma_i^2, & \text{якщо } i = j; \\ -\varepsilon_{i,j}, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Теорема 2.4.1. *Якщо M додатньо визначена, то підпростори $Ran(A_1),\dots,$ $Ran(A_n)$ слабко лінійно незалежні і їхня сума замкнена.*

Як наслідок ми одержимо достатню умову, за якої n підпросторів гільбертового простору слабко лінійно незалежні і їхня сума замкнена. Нехай X — гільбертів простір, $X_1,\dots,X_n$ — його підпростори. Для підпростору Y простору X позначимо P_Y ортогональний проектор на Y. Припустимо, що числа $\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{j,i}$, $i \neq j$ такі, що $\|P_{X_i}P_{X_j}\|_e \leqslant \varepsilon_{i,j}$ для $i \neq j$. Визначимо дійсну симетричну $n \times n$ матрицю $M = (m_{i,j})$ таким чином:

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ -\varepsilon_{i,j}, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Із теореми 2.4.1 випливає, що якщо матриця M додатньо визначена, то підпростори $X_1,\dots,X_n$ слабко лінійно незалежні і їхня сума замкнена. Зокрема, якщо $\sum_{j\neq i} \varepsilon_{i,j} < 1$ для всіх $i = 1,\dots,n$, то підпростори $X_1,\dots,X_n$ слабко лінійно незалежні і їхня сума замкнена.

Третій розділ присвячений питанню про доповнювальність суми скінченного числа доповнювальних підпросторів банахового простору. Нехай X — банахів простір і $X_1,...,X_n$ — доповнювальні підпростори X. Визначимо суму $X_1,...,X_n$ природнім чином, а саме, $X_1 + ... + X_n := \{x_1 + ... + x_n \mid x_1 \in X_1, ..., x_n \in X_n\}$. Виникає природнє запитання (**Питання 1**): *Чи є лінійна множина $X_1 + ... + X_n$ доповнювальною в X?*

Зауважимо, що питання 1 має сенс — сума двох доповнювальних підпросторів може бути недоповнювальна і навіть не замкнена. Простий приклад: нехай X — гільбертів простір, тоді кожен підпростір доповнювальний, і є добре відомі прості приклади двох підпросторів, сума яких не є замкненою. Відзначимо, що навіть якщо сума двох доповнювальних підпросторів замкнена, то вона може не бути доповнювальною. Якщо відповідь на питання 1 позитивна (для деякого набору підпросторів), то виникає наступне природнє запитання (**Питання 2**): *Припустимо, що ми знаємо деякі (неперервні лінійні) проектори $P_1, ..., P_n$ на $X_1, ..., X_n$, відповідно. Чи є формула для деякого проектора на $X_1 + ... + X_n$ (у термінах $P_1, ..., P_n$) (звичайно, за певних додаткових умов)?*

Цим двом питанням і присвячений розділ 3 дисертаційної роботи. В підрозділі 3.2 ми наводимо кілька добре відомих і простих тверджень, які стосуються питань 1 і 2, а також відомі результати стосовно цих питань. Наведемо, для прикладу, одне з таких тверджень.

Твердження 3.2.1. [28] *Якщо $P_i|_{X_j} = 0$, тобто $P_iP_j = 0$, для всіх $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., n\}$, то підпростори $X_1, ..., X_n$ лінійно незалежні, їхня сума доповнювальна в X і підпростір $\ker(P_1) \cap ... \cap \ker(P_n)$ є доповненням для $X_1 + ... + X_n$ в X. Окрім того, оператор $P = P_1 + ... + P_n$ є проектором на $X_1 + ... + X_n$ паралельно $\ker(P_1) \cap ... \cap \ker(P_n)$.*

Підрозділ 3.3 містить наші результати. Нехай $X_1, ..., X_n$ — доповнювальні підпростори банахового простору X. Ми наведемо достатню умову для того, щоб ці підпростори були лінійно незалежними, а їхня сума була доповнювальна в X. За цієї умови ми отримаємо формулу для проектора на цю суму.

Теорема 3.3.1. *Нехай X — банахів простір, $X_1, ..., X_n$ — доповнювальні підпростори X і $P_1, ..., P_n$ — проектори на $X_1, ..., X_n$ відповідно. Припустимо, що невід'ємні числа ε_{ij}, $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., n\}$ такі, що*

$$\|P_i x\| \leqslant \varepsilon_{ij} \|x\|, \quad x \in X_j$$

для кожної пари $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., n\}$. Визначимо $n \times n$ матрицю $E = (e_{ij})$ таким чином:

$$e_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = j; \\ \varepsilon_{ij}, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Позначимо $r(E)$ спектральний радіус E і покладемо $A := P_1 + ... + P_n$.

Якщо $r(E) < 1$, то підпростори $X_1, ..., X_n$ лінійно незалежні, їхня сума доповнювальна в X і підпростір $\ker(P_1) \cap ... \cap \ker(P_n)$ є доповненням для $X_1 + ... + X_n$ в X. Окрім того, послідовність операторів $I - (I - A)^N$ збігається рівномірно до проектора P на $X_1 + ... + X_n$ паралельно $\ker(P_1) \cap ... \cap \ker(P_n)$ при $N \to \infty$.

Наш наступний результат показує, що швидкість збіжності послідовності операторів $I - (I - A)^N$ до проектора P може бути оцінена зверху величиною $C\alpha^N$, де

[28] Dunford N., Schwartz J.T. Linear operators. Part I: general theory// with the assistance of W.G. Bade and R.G. Bartle. Pure and Applied Mathematics.— Vol. 7.— Interscience Publishers, Inc., New York.— 1958. c. 514, Вправа 23(iii).

$\alpha \in [0,1)$. Щоб сформулювати цей результат, нам потрібне таке позначення: для двох векторів $u, v \in \mathbb{R}^n$ будемо писати $u \leqslant v$, якщо $u \leqslant v$ покоординатно. Щоб зробити формулювання нашого результату більш зрозумілим і природнім, зробимо наступне важливе зауваження. Оскільки матриця E невід'ємна, то умова $r(E) < 1$ рівносильна існуванню вектора $w \in \mathbb{R}^n$ із додатніми координатами і числа $\alpha \in [0,1)$, таких, що $Ew \leqslant \alpha w$. Оскільки $r(E^t) = r(E)$, то умова $r(E) < 1$ також рівносильна існуванню вектора w з додатніми координатами і числа $\alpha \in [0,1)$, таких, що $E^t w \leqslant \alpha w$.

Теорема 3.3.2. *Справедливі такі твердження про швидкість збіжності $I-(I-A)^N$ до P.*

1. *Припустимо, що вектор $w = (w_1, ..., w_n)^t$ з додатніми координатами і число $\alpha \in [0,1)$ задовольняють $Ew \leqslant \alpha w$. Тоді*
$$\|I-(I-A)^N - P\| \leqslant (w_1 + ... + w_n)\max\{(1/w_1)\|P_1\|, ..., (1/w_n)\|P_n\|\}\frac{\alpha^N}{1-\alpha}$$
для всіх $N \geqslant 1$.

2. *Припустимо, що вектор $w = (w_1, ..., w_n)^t$ з додатніми координатами і число $\alpha \in [0,1)$ задовольняють $E^t w \leqslant \alpha w$. Тоді*
$$\|I-(I-A)^N - P\| \leqslant (w_1\|P_1\| + ... + w_n\|P_n\|)\max\{(1/w_1), ..., (1/w_n)\}\frac{\alpha^N}{1-\alpha}$$
для всіх $N \geqslant 1$.

Припущення $r(E) < 1$ є *точною* достатньою умовою для того, щоб сума $X_1 + ... + X_n$ була доповнювальна в X. Точніше, справедливий такий результат.

Теорема 3.3.3. *Нехай $E = (e_{ij})$ — $n \times n$ матриця із $e_{ii} = 0$ для $i = 1, ..., n$ і $e_{ij} \geqslant 0$ для всіх $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., n\}$. Якщо $r(E) = 1$, то існують банахів простір X, доповнювальні підпростори $X_1, ..., X_n$ простору X і проектори $P_1, ..., P_n$ на $X_1, ..., X_n$ відповідно, такі, що*

1. *$\|P_i x\| = e_{ij}\|x\|$, $x \in X_j$, для кожної пари $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., n\}$;*

2. *$X_1, ..., X_n$ лінійно незалежні;*

3. *сума $X_1 + ... + X_n$ замкнена, але не доповнювальна в X.*

Зауважимо, що у випадку, коли $r(E) > 1$, цю теорему можна застосувати до матриці $(1/r(E))E$.

Підрозділ 3.4 присвячений питанню про доповнювальність суми маргінальних підпросторів у просторі L^p. Наведемо необхідні означення і акуратно сформулюємо задачу.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — ймовірнісний простір. Позначимо $\mathbb{K}$ поле скалярів, тобто $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Для $\mathcal{F}$-вимірної функції (випадкової величини) $\xi : \Omega \to \mathbb{K}$ позначимо $E\xi$ математичне сподівання ξ (якщо воно існує). Будемо казати, що дві випадкові величини ξ і η

еквівалентні якщо $\xi(\omega) = \eta(\omega)$ для μ-майже всіх ω. Для $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$ позначимо $L^p(\mathcal{F}) = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ множину класів еквівалентності випадкових величин $\xi : \Omega \to \mathbb{K}$, таких, що $E|\xi|^p < \infty$, якщо $p \in [1, \infty)$, і ξ є μ-істотно обмеженою, якщо $p = \infty$. Для $\xi \in L^p(\mathcal{F})$ покладемо $\|\xi\|_p = (E|\xi|^p)^{1/p}$, якщо $p \in [1, \infty)$, і $\|\xi\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|\xi|$, якщо $p = \infty$. Тоді $L^p(\mathcal{F})$ є банаховим простором. Для кожної під-σ-алгебри $\mathcal{A}$ σ-алгебри $\mathcal{F}$ ми визначимо маргінальний підпростір, відповідний до $\mathcal{A}$, $L^p(\mathcal{A})$, наступним чином. $L^p(\mathcal{A})$ складається з тих елементів (класів еквівалентності) простору $L^p(\mathcal{F})$, які містять хоча б одну $\mathcal{A}$-вимірну випадкову величину. Зрозуміло, що $L^p(\mathcal{A})$ є доповнювальним підпростором простору $L^p(\mathcal{F})$ (оператор умовного математичного сподівання $\xi \mapsto E(\xi|\mathcal{A})$ є проектором норми 1 на $L^p(\mathcal{A})$). Позначимо через $L^p_0(\mathcal{A})$ підпростір усіх $\xi \in L^p(\mathcal{A})$, для яких $E\xi = 0$. Цей підпростір також доповнювальний в $L^p(\mathcal{F})$ (оператор центрованого умовного математичного сподівання $\xi \mapsto E(\xi|\mathcal{A}) - E\xi$ є проектором на $L^p_0(\mathcal{A})$).

Нехай $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n$ — під-σ-алгебри $\mathcal{F}$. Питання: коли сума відповідних маргінальних підпросторів $L^p(\mathcal{F}_1) + ... + L^p(\mathcal{F}_n)$ доповнювальна в $L^p(\mathcal{F})$? Оскільки $L^p(\mathcal{F}_i) = L^p_0(\mathcal{F}_i) + \langle 1 \rangle$ (тут $\langle 1 \rangle$ — це підпростір, породжений 1, тобто підпростір сталих випадкових величин), ми бачимо, що $L^p(\mathcal{F}_1) + ... + L^p(\mathcal{F}_n) = L^p_0(\mathcal{F}_1) + ... + L^p_0(\mathcal{F}_n) + \langle 1 \rangle$. Звідси легко випливає, що лінійна множина $L^p(\mathcal{F}_1) + ... + L^p(\mathcal{F}_n)$ доповнювальна в $L^p(\mathcal{F})$ тоді і тільки тоді, коли такою є множина $L^p_0(\mathcal{F}_1) + ... + L^p_0(\mathcal{F}_n)$.

Ми наведемо достатню умову для того, щоб маргінальні підпростори $L^p_0(\mathcal{F}_1), ..., L^p_0(\mathcal{F}_n)$ були лінійно незалежними і їхня сума $L^p_0(\mathcal{F}_1) + ... + L^p_0(\mathcal{F}_n)$ була доповнювальна у просторі $L^p(\mathcal{F})$.

Відправною точкою для нашого результату є наступне просте спостереження: якщо σ-алгебри $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n$ попарно незалежні, то підпростори $L^p_0(\mathcal{F}_1), ..., L^p_0(\mathcal{F}_n)$ є лінійно незалежними і їхня сума доповнювальна в $L^p(\mathcal{F})$. Це випливає із твердження 3.2.1. Щоб це побачити, зауважимо, що оператор центрованого умовного математичного сподівання $\xi \mapsto E(\xi|\mathcal{F}_i) - E\xi$ є проектором на $L^p_0(\mathcal{F}_i)$ в $L^p(\mathcal{F})$. Позначимо цей оператор P_i. Якщо $\xi \in L^p_0(\mathcal{F}_j)$, $j \neq i$, то внаслідок незалежності $\mathcal{F}_i$ і $\mathcal{F}_j$ маємо $P_i\xi = E\xi - E\xi = 0$. Отже, ми можемо використати твердження 3.2.1.

Тепер природньо думати, що якщо σ-алгебри $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n$ попарно "мало залежні", то відповідні маргінальні підпростори будуть лінійно незалежними і їхня сума буде доповнювальною в $L^p(\mathcal{F})$.

Але що означають слова "мало залежні"? Ми надамо цим словам акуратного математичного сенсу наступним чином. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — ймовірнісний простір. Для двох під-σ-алгебр $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-алгебри $\mathcal{F}$ визначимо таку величину

$$\psi'(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf \left\{ \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)\mu(B)} \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \mu(A) > 0, \mu(B) > 0 \right\}.$$

Ця величина добре відома [29]. Легко бачити, що $0 \leqslant \psi'(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leqslant 1$ і $\psi'(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ незалежні. Тепер, використовуючи коефіцієнт ψ', ми

[29] Bradley R.C. Basic Properties of Strong Mixing Conditions. A Survey and Some Open Questions// Probab. Surveys. — 2005. — Vol. 2. — P. 107–144.

можемо в якості міри залежності $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ прийняти число $1 - \psi'(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Тепер ми готові сформулювати наш результат.

Теорема 3.4.1. *Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — ймовірнісний простір і $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n$ — під-σ-алгебри $\mathcal{F}$. Визначимо $n \times n$ матрицю $E = (e_{ij})$ так:*

$$e_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = j; \\ 1 - \psi'(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j), & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Якщо $r(E) < 1$, то для довільного $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$ маргінальні підпростори $L_0^p(\mathcal{F}_1), ..., L_0^p(\mathcal{F}_n)$ лінійно незалежні, їхня сума доповнювальна в $L^p(\mathcal{F})$ і підпростір

$$\{\xi \in L^p(\mathcal{F}) \mid E(\xi|\mathcal{F}_1) = E(\xi|\mathcal{F}_2) = ... = E(\xi|\mathcal{F}_n) = E\xi\}$$

є доповненням для $L_0^p(\mathcal{F}_1) + ... + L_0^p(\mathcal{F}_n)$ в $L^p(\mathcal{F})$.

У **розділі 4** ми вивчаємо питання про "зменшення" системи підпросторів гільбертового простору до лінійно незалежної системи зі збереженням суми підпросторів.

Нехай H_1, H_2 — підпростори гільбертового простору H. Визначимо підпростір $M_2 = H_2 \ominus (H_1 \cap H_2) \subset H_2$. Пара підпросторів H_1, M_2 має наступні властивості. По-перше, $H_1 \cap M_2 = \{0\}$, тобто підпростори H_1 і M_2 лінійно незалежні. По-друге, $H_1 + H_2 = H_1 + (H_1 \cap H_2) + M_2 = H_1 + M_2$. Таким чином, ми "зменшили" пару підпросторів H_1, H_2 до лінійно незалежної пари підпросторів, але з тією самою сумою. В розділі 4 ми доведемо аналогічне твердження для n підпросторів.

Теорема 4.1.1. *Нехай $H_1, ..., H_n$ — підпростори гільбертового простору H. Тоді існують підпростори $M_2 \subset H_2, ..., M_n \subset H_n$, такі, що підпростори $H_1, M_2, ..., M_n$ лінійно незалежні і їхня сума рівна $H_1 + H_2 + ... + H_n$.*

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено двом напрямам у теорії систем підпросторів банахових просторів: вивченню структури систем підпросторів гільбертового простору, які задовольняють певні умови на множину кутів між кожною парою підпросторів системи, і вивченню властивостей сум підпросторів банахового простору. У дисертаційній роботі отримано такі результати:

1. Досліджено структуру систем підпросторів гільбертового простору, для яких кожна пара підпросторів задовольняє одну з умов (Ang) (підпростори лежать під заданим кутом один до одного), (Com) (ортогональні проектори на підпростори комутують), (Ort) (підпростори ортогональні). При цьому ці умови природнім чином пов'язані з графом-зіркою з множиною вершин $1, 2, ..., 2m + r + 1$, у якого вершина 1 з'єднана з усіма іншими вершинами, а пари вершин $(2, 3), (4, 5), ..., (2m, 2m{+}1)$ з'єднані пунктиром. Якщо кожній вершині графа поставити у відповідність підпростір, то умова (Ang) відповідає парам вершин, які з'єднані ребром, умова (Com) відповідає парам вершин, які з'єднані пунктиром, умова (Ort) відповідає парам вершин, які не з'єднані ребром і не з'єднані пунктиром. Отримано: а) опис (з точністю до унітарної еквівалентності) всіх систем підпросторів, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort), і

б) опис (з точністю до унітарної еквівалентності) всіх незвідних систем підпросторів, які задовольняють умови (Ang), (Com), (Ort).

2. Отримано необхідні і достатні умови для того, щоб точка 0 належала істотному спектру суми обмежених самоспряжених операторів, попарні добутки яких компактні.

3. Отримано необхідні і достатні умови для того, щоб сума образів обмежених самоспряжених операторів, попарні добутки яких компактні, була замкнена.

4. Отримано достатні умови для того, щоб образи неперервних лінійних операторів $A_k : H_k \to H$, $k = 1, 2, ..., n$ були слабко лінійно незалежні і їхня сума була замкнена в H. Тут $H_1, ..., H_n, H$ — гільбертові простори.

5. Отримано достатню умову для того, щоб n доповнювальних підпросторів банахового простору X були лінійно незалежними, а їхня сума була доповнювальною в X. За цієї умови отримано формулу для неперервного лінійного проектора на цю суму підпросторів. Цей проектор подається у вигляді границі певної послідовності операторів (збіжність — за операторною нормою) і ми одержуємо оцінку зверху для швидкості збіжності. Також показано, що ця достатня умова для того, щоб сума скінченного числа доповнювальних підпросторів була доповнювальною є точною (в певному сенсі).

6. Отримано достатню умову для того, щоб n маргінальних підпросторів у просторі L^p були лінійно незалежними, а їхня сума була доповнювальна у просторі L^p. За цієї умови знайдено доповнювальний підпростір для цієї суми маргінальних підпросторів.

7. Доведено, що довільну систему підпросторів гільбертового простору можна "зменшити" до лінійно незалежної системи підпросторів із тією самою сумою підпросторів. Більш того, доведено, що для довільних підпросторів $H_1, H_2, ..., H_n$ гільбертового простору H знайдуться підпростори $M_2 \subset H_2, M_3 \subset H_3, ..., M_n \subset H_n$, такі, що підпростори $H_1, M_2, M_3, ..., M_n$ лінійно незалежні і їхня сума рівна $H_1 + H_2 + ... + H_n$.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Фещенко И.С. О замкнутости суммы n подпространств гильбертова пространства// Український математичний журнал. — 2011. — Т. 63, № 10. — С. 1381–1425.

Переклад англійською: Feshchenko I.S. On closeness of the sum of n subspaces of a Hilbert space// Ukrainian Mathematical Journal. — 2012. — Vol. 63, No. 10. — P. 1566–1622.

2. Стрелец А.В., Фещенко И.С. О системах подпространств гильбертова пространства, удовлетворяющих условиям на углы между каждой парой подпространств// Алгебра и анализ. — 2012. — Т. 24, № 5. — С. 181–214.

Переклад англійською: Strelets A.V., Feshchenko I.S. Systems of subspaces in Hilbert space that obey certain conditions, on their pairwise angles// St. Petersburg Math. J. — 2013. — Vol. 24, No. 5. — P. 823–846.

3. Feshchenko Ivan S. On the essential spectrum of the sum of self-adjoint operators and the closedness of the sum of operator ranges// Banach J. Math. Anal. — 2014. — Vol. 8, No. 1. — P. 55–63.

4. Feshchenko Ivan S. On the closedness of the sum of ranges of operators A_k with almost compact products $A_i^* A_j$// J. Math. Anal. Appl. — 2014. — Vol. 416, Issue 1. — P. 24–35.

5. Feshchenko I.S. A sufficient condition for the sum of complemented subspaces to be complemented// Допов. Нац. акад. наук Укр. — 2019. — № 1. — С. 10–15.

6. Feshchenko Ivan, On the essential spectrum of the sum of selfadjoint operators and closedness of the sum of operator ranges// Conference “Banach Algebras and Applications” dedicated to the memory of William G. Bade, July 29 — August 4, 2013, Gothenburg, Sweden. Abstracts, Poster Talks. — P.45.

7. Feshchenko Ivan, When is the sum of complemented subspaces complemented?// International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, 18 — 23 September, 2017, Lviv, Ukraine. Book of Abstracts. — P.22.

8. Feshchenko I.S. On sums of marginal subspaces// International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. IV”. Dedicated to the 100-th anniversary of I.I.Gikhman, May 24 — 26, 2018, Kyiv, Ukraine. Conference Materials. — P.26.

АНОТАЦІЇ

Фещенко І.С. Системи підпросторів гільбертових і банахових просторів, їх властивості та застосування. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01 "Математичний аналіз"(111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

Дисертаційну роботу присвячено двом напрямкам у теорії систем підпросторів банахових просторів: вивченню структури систем підпросторів гільбертового простору, які задовольняють певні умови на множину кутів між кожною парою підпросторів системи, і вивченню властивостей сум підпросторів банахового простору. Досліджено структуру систем підпросторів гільбертового простору, для яких кожна пара підпросторів задовольняє одну з умов (Ang) (підпростори лежать під заданим кутом один до одного), (Com) (ортогональні проектори на підпростори комутують), (Ort) (підпростори ортогональні). Отримано необхідні і достатні умови для того, щоб точка 0 належала істотному спектру суми обмежених самоспряжених операторів, попарні добутки яких компактні. З використанням цього результату отримано необхідні і достатні умови для того, щоб сума образів обмежених самоспряжених операторів, попарні добутки яких компактні, була замкнена. Отримано достатні умови для того, щоб образи неперервних лінійних операторів $A_k : H_k \to H$, $k = 1, 2, ..., n$ були слабко лінійно незалежні і їхня сума була замкнена в H. Тут $H_1, ..., H_n, H$ — гільбертові простори. Отримано достатню умову для того, щоб n доповнювальних підпросторів банахового простору X були лінійно незалежними, а їхня сума була доповнювальною в X. За цієї умови отримано формулу для неперервного лінійного проектора на цю суму підпросторів. Спираючись на цю достатню умову, отримано достатню умову для того, щоб n маргінальних підпросторів у просторі L^p були лінійно незалежними, а їхня сума була доповнювальна у просторі L^p. Доведено, що для довільних підпросторів $H_1, H_2, ..., H_n$ гільбертового простору H знайдуться підпростори $M_2 \subset H_2, M_3 \subset H_3, ..., M_n \subset H_n$, такі, що підпростори $H_1, M_2, M_3, ..., M_n$ лінійно незалежні і їхня сума рівна $H_1 + H_2 + ... + H_n$.

Ключові слова: гільбертів простір, банахів простір, підпростір, доповнювальний підпростір, маргінальний підпростір, проектор, ортогональний проектор, система підпросторів, сума підпросторів.

Фещенко И.С. Системы подпространств гильбертовых и банаховых пространств, их свойства и применение. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.01.01 "Математический анализ" (111 — Математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2019.

Диссертационная работа посвящена двум направлениям в теории систем подпространств банаховых пространств: изучению структуры систем подпространств гильбертова пространства, которые удовлетворяют некоторым условиям на множество углов между каждой парой подпространств системы, и изучению свойств сумм подпространств банахова пространства. Исследовано структуру систем подпространств гильбертова пространства, для которых каждая пара подпространств удовлетворяет одно из условий (Ang) (подпространства расположены относительно друг друга под заданным углом), (Com) (ортогональные проекторы на подпространства коммутируют), (Ort) (подпространства ортогональны). Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы точка 0 принадлежала существенному спектру суммы ограниченных самосопряженных операторов, попарные произведения которых компактны. С использованием этого результата получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы сумма образов ограниченных самосопряженных операторов, попарные произведения которых компактны, была замкнута. Получены достаточные условия для того, чтобы образы непрерывных линейных операторов $A_k : H_k \to H$, $k = 1, 2, ..., n$ были слабо линейно независимы и их сумма была замкнута в H. Тут $H_1, ..., H_n, H$ — гильбертовы пространства. Получено достаточное условие для того, чтобы n дополняемых подпространств банахова пространства X были линейно независимыми, а их сумма была дополняема в X. При этом условии получено формулу для непрерывного линейного проектора на эту сумму подпространств. Опираясь на это достаточное условие, получено достаточное условие для того, чтобы n маргинальных подпространств в пространстве L^p были линейно независимыми, а их сумма была дополняема в пространстве L^p. Доказано, что для произвольных подпространств $H_1, H_2, ..., H_n$ гильбертова пространства H найдутся подпространства $M_2 \subset H_2, M_3 \subset H_3, ..., M_n \subset H_n$, такие, что подпространства $H_1, M_2, M_3, ..., M_n$ линейно независимы и их сумма равна $H_1 + H_2 + ... + H_n$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, банахово пространство, подпространство, дополняемое подпространство, маргинальное подпространство, проектор, ортогональный проектор, система подпространств, сумма подпространств.

Feshchenko I.S. Systems of subspaces of Hilbert and Banach spaces, their properties and applications. — Manuscript.

Candidate of Physical and Mathematical Sciences (PhD) Thesis, speciality 01.01.01 "Mathematical Analysis" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of

Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to the study of structure of systems of subspaces of a Hilbert space that satisfy certain conditions on the sets of angles between each pair of subspaces and to the study of properties of sums of subspaces of a Banach space. (Here and in what follows the word subspace means a *closed* linear set.)

The main part of the thesis consists of the introduction, four chapters, conclusions, list of references and an appendix with the lists of published papers of the author and scientific seminars and conferences where the obtained results were reported.

The first section is devoted to the study of systems of subspaces $H_1, ..., H_n$ of a complex Hilbert space H that satisfy the following conditions: for every index $i > 1$ the set of angles between H_1 and H_i is the one-point set $\{\theta_{1,i}\}$, where $\theta_{1,i} \in (0, \pi/2)$ is given; the orthogonal projections onto the subspaces H_{2k} and H_{2k+1} commute for each $k = 1, ..., m$ (here m is a fixed nonnegative integer which does not exceed $(n-1)/2$); all other pairs of subspaces H_i and H_j are orthogonal. The main tool for the study of such systems of subspaces is a construction of a system of subspaces of a Hilbert space by its Gram operator (G-construction). In the first subsection we single out a certain class of systems of subspaces of a Hilbert space and formulate necessary definitions from the theory of systems of subspaces of a Hilbert space and the main problem. In the second subsection we present the G-construction of a system of subspaces of a Hilbert space and its main properties. The properties will be used in the study of structure of systems of subspaces from the class. The main results of the first section are presented in the fourth subsection. These results are the following: description (up to unitary equivalence) of *all* systems of subspaces from the selected class and description (up to unitary equivalence) of all *irreducible* systems of subspaces from the selected class. Note that for $m \geqslant 3$ three situations are possible, depending on the parameters $\theta_{1,i}$: either the number of unitarily nonequivalent irreducible systems of subspaces is finite (a *finite* problem), or there are infinitely many unitarily nonequivalent irreducible systems of subspaces but they admit a description (a *tame* problem), or the problem of description of all irreducible systems of subspaces up to unitary equivalence is “hopeless” in a certain sense (a *wild* problem). For certain values of the parameters $\theta_{1,i}$, the question about the wildness of our problem reduces to the question about the wildness of the problem of description (up to unitary equivalence) of irreducible triples of orthogonal projections P_1, P_2, P_3 satisfying the operator inequality $P_1 + P_2 + P_3 \leqslant (1 + \varepsilon)I$. In the third subsection, we will show that this problem is $*$-wild.

The second section is devoted to the question on the closedness of the sum of subspaces of a Hilbert space. More precisely, in the second section we consider even the more general question on the closedness of the sum of operator ranges in a Hilbert space. The latter problem is closely related to the following question: when the point 0 belongs to the essential spectrum of the sum of bounded self-adjoint operators in a Hilbert space? In the second subsection we show connection between these two problems and provide a criterion for the sum of operator ranges to be closed. In the third subsection we consider collections of bounded self-adjoint operators $A_1, ..., A_n$ for which each product A_iA_j, $i \neq j$ is compact. It is well known that the essential spectrum of $A = A_1 + ... + A_n$ is equal up to the point 0 to the union of the essential spectra of the operators A_i, $i = 1, ..., n$. The natural question arises: when 0 belongs to the essential spectrum of the operator A? We will get a necessary and sufficient condition for 0 to belong to the essential spectrum of the operator A. This condition is formulated in terms of the projection valued spectral measures of the operators A_i, $i = 1, ..., n$. Using this result, we obtain a necessary and sufficient condition for the sum of ranges of the operators A_i, $i = 1, ..., n$ to be closed. Using the latter result, we will get a sufficient condition for the sum of operator ranges to be closed. In the fourth subsection we consider a collection of continuous linear operators $A_1 : H_1 \to H$, $A_2 : H_2 \to H$,..., $A_n : H_n \to H$ with closed ranges (here $H_1, ..., H_n, H$ are Hilbert spaces) and study the question on the closedness of the sum of their ranges. A result from the third subsection implies that if all products $A_i^* A_j$, $i \neq j$ are compact, then the set $Ran(A_1) + ... + Ran(A_n)$ is closed in H. We will show that if the essential norms of $A_i^* A_j$, $i \neq j$ are "small enough" (in a certain sense), then the subspaces $Ran(A_1), ..., Ran(A_n)$ are weakly linearly independent and their sum $Ran(A_1) + ... + Ran(A_n)$ is closed.

The third section is devoted to the question about the complementability of the sum of a finite number of complemented subspaces of a Banach space. In the first subsection we present a few definitions and facts from the theory of complemented subspaces; formulate main questions, namely, question 1 about the complementability of the sum of complemented subspaces and question 2 about a formula for a projection onto the sum in the case when this sum is complemented; present the definition of a linearly independent system of subspaces and motivation which explains why this property together with the closedness of the sum of subspaces is important. In the second subsection we present a few well-known and simple results regarding the questions 1 and 2 as well as known results regarding these questions. The third subsection contains our results. We provide a sufficient condition for n complemented subspaces of a Banach space X to be linearly independent and their sum to be complemented in X. Under this condition a formula for a (continuous linear) projection onto the sum is given. Note that the projection is a limit, in the uniform operator topology, of a certain sequence of operators and we provide an upper bound for the rate of convergence. We also show that this sufficient condition for the sum of complemented subspaces to be complemented is sharp (in a certain sense). The fourth subsection is devoted to the question on the complementability of the sum of marginal subspaces in L^p. Our main result is an application of the results from the previous subsection. The theorem provides a sufficient condition for n marginal subspaces in the space L^p to be linearly independent and their sum to be complemented in L^p. Moreover, under the condition we find a complement for the sum.

The fourth section is devoted to the problem on reduction of a system of subspaces of a Hilbert space to a linearly independent system of subspaces with the same sum of the subspaces. More precisely, let $H_1, ..., H_n$ be subspaces of a Hilbert space H. Question: can one always find subspaces $M_1 \subset H_1, ..., M_n \subset H_n$ such that $M_1, ..., M_n$ are linearly independent and their sum $M_1 + ... + M_n$ is equal to the sum $H_1 + ... + H_n$? The answer is positive; moreover, subspaces $M_1, ..., M_n$ can be chosen so that $M_1 = H_1$.

Key words: Hilbert space, Banach space, subspace, complemented subspace, marginal subspace, projection, orthogonal projection, system of subspaces, sum of subspaces.