

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Козак Андрій Анатолійович



УДК 539.3

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ У ЗАДАЧАХ ПРО НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ
ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

05.23.17 – будівельна механіка

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Київ – 2021

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі будівельної механіки та в Науково-дослідному інституті будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: кандидат технічних наук, доцент
Ворона Юрій Володимирович,
Київський національний університет будівництва і архітектури МОН України,
професор кафедри будівельної механіки

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, старший науковий співробітник
Євзеров Ісаак Данилович,
директор товариства з обмеженою відповідальністю «ВЕГА КАД»

кандидат технічних наук, доцент
Андрусенко Олена Миколаївна,
Національний транспортний університет МОН України,
доцент кафедри вищої математики

Захист відбудеться *«19» лютого 2021 р. о 13 годині* на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.056.04 у Київському національному університеті будівництва і архітектури за адресою: 03680, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 31, ауд. 466.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Київського національного університету будівництва і архітектури за адресою: 03680, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 31.

Автореферат розісланий *«18» січня 2021 року*.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
Д.Т.Н., доцент



Д. В. Михайловський

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження хвильових процесів в пружних середовищах тісно пов'язані із сучасними задачами сейсмології, сейсморозвідки та проектування підземних споруд. При цьому задачі про деформацію пружних елементів складної форми вимагають для свого розв'язання залучення методів чисельного аналізу.

Найбільш широко розповсюдженим чисельним методом є метод скінченних елементів, що базується на представленні області, яку займає об'єкт розрахунку, сукупністю дискретних елементів простої структури. За допомогою цього методу в наш час проводиться переважна більшість чисельних розрахунків складних інженерних систем будь-якої вимірності.

Одним з ефективних методів розв'язання крайових і початково-крайових задач будівельної механіки, які описуються лінійними рівняннями з частинними похідними, є зведення їх до інтегральних рівнянь. Такий метод (він має назву метод потенціалу або метод граничних інтегральних рівнянь) є потужним теоретичним засобом, який широко застосовується для дослідження питань щодо існування та єдиності розв'язків крайових задач. Разом з тим, цей метод виявився ефективним засобом чисельного аналізу пружних об'єктів, особливо в тих випадках, коли необхідно дослідити параметри напружено-деформованого стану (НДС) лише на границі та в обмеженій зоні поблизу границі розрахункової області. Головна перевага методу граничних інтегральних рівнянь (ГІР) полягає в зниженні на одиницю розмірності задачі. При чисельній реалізації методу дискретизації піддається тільки границя, що особливо важливо, коли об'єкт розрахунку займає нескінченну область. Це зумовило широке застосування методу для розв'язання різних, головним чином, статичних та квазістатичних задач будівельної механіки. Зауважимо, що існує значна кількість важливих інженерних об'єктів, таких як довгі циліндричні тунелі, динамічне навантаження на які досить повільно змінюється по довжині. Динамічний НДС таких об'єктів варто розглядати саме в двовимірній постановці.

Аналіз літературних джерел виявив, з одного боку, недостатню кількість доступних публікацій, пов'язаних із застосуванням методу ГІР до аналізу нестационарних коливальних процесів в пружних об'єктах, а з іншого боку, важливість вказаного напрямку досліджень для інженерної практики. Тому розробка ефективних засобів чисельної реалізації методу ГІР у задачах про нестационарні коливання пружних елементів конструкцій є актуальною проблемою будівельної механіки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відповідності до загального плану наукових досліджень кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) і Науково-дослідного інституту будівельної механіки КНУБА (НДІБМ КНУБА) за темами ЗДБ-2013 «Теорії і методи дослідження стаціонарних та нестационарних коливань та прогнозування динамічної поведінки пружних систем, що збуджуються стохастичними та ударними впливами» (2013-2015 рр. № держ.

реєстрації 0113U002290), 2ДБ-2016 «Теорія і методи аналізу динамічного деформування складних механічних систем під дією навантажень періодичного, стохастичного та ударного характеру» (2016-2018 рр. № держ. реєстрації 0116U000840), 2ДБ-2019 «Чисельні методи дослідження та прогнозування нелінійних коливань, динамічної стійкості та кризових явищ і хаотичної поведінки пружних систем» (2019-по т.ч. № держ. реєстрації 0119U002578). Автор брав безпосередню участь у виконанні цих науково-дослідних робіт як співвиконавець.

Мета і завдання дослідження. Мета дисертаційної роботи полягає у розробці чисельної методики, яка спирається на співвідношення методу граничних інтегральних рівнянь і орієнтована на дослідження вимушених нестационарних коливань пружних елементів конструкцій у двовимірній постановці, реалізацію розробленої методики у вигляді обчислювального комплексу і розв'язання з його допомогою прикладних задач.

Мета роботи досягається вирішенням наступних завдань:

- отримання розв'язувальних співвідношень методу ГПР для дослідження нестационарного динамічного НДС пружних елементів конструкцій;
- розробка алгоритмів чисельного дослідження у двовимірній постановці нестационарних хвильових процесів, як за допомогою гранично-часових інтегральних рівнянь (ГЧІР), так і шляхом переходу в частотну область;
- розробка програмного забезпечення для чисельного розв'язання за методом ГПР задач про нестационарні коливання масивних елементів конструкцій, які знаходяться у плоскому деформованому стані;
- аналіз достовірності результатів розв'язання контрольних задач, отриманих за допомогою розроблених методик, шляхом їх порівняння з еталонними;
- чисельне розв'язання прикладних задач про динамічну реакцію плоскодеформованих масивних елементів конструкцій.

Об'єктом дослідження є змушені нестационарні коливання пружних масивних елементів конструкцій, які знаходяться у плоскому деформованому стані.

Предметом дослідження є двовимірні динамічні поля переміщень і напружень, що виникають при нестационарному навантаженні пружних масивів.

Методи дослідження. Чисельне розв'язання означеного класу задач виконане за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь. Послідовно реалізуються і порівнюються два підходи, перший з яких пов'язаний із застосуванням гранично-часових інтегральних рівнянь, а другий базується на переході в частотну область за допомогою розкладання навантаження в ряд Фур'є. Розглядаються задачі про зсувні нестационарні коливання пружних масивів з циліндричною границею, а також хвильові процеси в пружних масивах з послабленнями, які знаходяться в стані плоскої деформації. Алгебраїзація задачі здійснюється за колокаційною схемою методу граничних елементів, при цьому інтегрування за часовою координатою за припущенням про кусково-лінійний характер зміни невідомих виконується аналітично. Також з використанням аналітичних виразів, отриманих в роботі, обчислюються сингулярні частини граничних інтегралів по елементам, які містять полюс інтегрування.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

- отримані розв’язувальні співвідношення та побудовано алгоритм дослідження з використанням ГЧІР нестационарних зсувних коливань масивів з отворами. На основі побудованого алгоритму розроблена і програмно реалізована методика чисельного аналізу параметрів динамічного НДС.

- отримано новий розв’язок задачі про нестационарні зсувні коливання простору, послабленого двома циліндричними отворами. Досліджено залежність результатів розрахунку від відстані між отворами;

- на основі теоретичного апарату методу потенціалу розроблені і програмно реалізовані дві методики чисельного дослідження нестационарних двовимірних динамічних полів переміщень і напружень в пружних середовищах. Одна методика використовує в якості алгоритмічної основи ГЧІР, а друга використовує перехід в частотну область. Встановлена однакова ефективність обох підходів;

- запропоновано та реалізовано новий чисельно-аналітичний підхід до обчислення сингулярних складових граничних інтегралів в задачах про коливання пружних масивних об’єктів, що знаходяться в плоскому деформованому стані;

- отримані нові розв’язки задачі про взаємний вплив двох близько розташованих циліндричних отворів, границя одного з яких зазнає дії імпульсного навантаження;

- розв’язана прикладна задача про двовимірний динамічний НДС пружного масиву, ділянки поверхні якого зазнають дії напівсинусоїдальних імпульсів.

Практичне значення одержаних результатів полягає у реалізації розроблених гранично-елементних підходів до аналізу нестационарних коливань плоско-деформованих масивів з послабленнями у вигляді програмного забезпечення з високим рівнем автоматизації обробки результатів розрахунку. Отримані результати використано в Науково-дослідному інституті будівельної механіки КНУБА при виконанні держбюджетних науково-дослідних робіт. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані в проектно-конструкторських та наукових установах у різних галузях народного господарства для визначення динамічного НДС відповідальних деталей та елементів конструкцій при нестационарному динамічному навантаженні.

Особистий внесок здобувача. В дисертаційній роботі викладені такі наукові результати, отримані особисто автором. Отримані розв’язувальні співвідношення, розроблена і програмно реалізована методика дослідження з використанням ГЧІР нестационарних зсувних коливань масивів [4, 5, 6]. Отримано новий розв’язок задачі про нестационарні зсувні коливання простору, послабленого двома циліндричними отворами. Досліджено залежність результатів розрахунку від відстані між отворами [5]. З використанням ГЧІР розроблена і програмно реалізована методика чисельного дослідження нестационарних двовимірних динамічних полів переміщень і напружень в пружних середовищах [2]. Реалізовано новий чисельно-аналітичний підхід до обчислення сингулярних складових граничних інтегралів в задачах про коливання пружних масивних об’єктів, що знаходяться в плоскому деформованому стані [2, 7]. Досліджено взаємний вплив двох близько розташованих циліндричних отворів, границя одного з яких зазнає дії імпульсного навантаження [2, 3]. Розв’язана прикладна

задача про двовимірний динамічний НДС пружного масиву, поверхня якого зазнає дії напівсинусоїдальних імпульсів [1].

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідались та обговорювались: на 72-75 науково-практичних конференціях Київського національного університету будівництва і архітектури (м. Київ, 2011-2014 рр.), на конференціях молодих вчених, аспірантів та студентів Київського національного університету будівництва і архітектури (м. Київ, 2011-2013 рр.), на Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки» (Дніпродзержинськ, 2012 р.), на VII Всероссийской (с междунар. участием) конф. по механике деформируемого твердого тела. (Ростов-на-Дону, 2013р).

У повному обсязі дисертація доповідалась на міжкафедральному семінарі Київського національного університету будівництва і архітектури (Київ, 2020 р.).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані в 12 наукових працях, з них: у фахових наукових журналах і збірниках – 7; у публікаціях матеріалів міжнародних і вітчизняних конференцій – 5.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з вступу, чотирьох розділів, висновку, списку використаних джерел і додатку. Загальний обсяг дисертації становить 128 сторінок, у тому числі 110 сторінки основного тексту, 35 рисунків, 10 таблиць по тексту, список використаних джерел із 163 найменувань на 18 сторінках, додаток на двох сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтована актуальність теми, визначені мета і задачі досліджень, наведена загальна характеристика роботи.

У першому розділі на підставі огляду літературних джерел надана оцінка теперішнього стану досліджень методу граничних інтегральних рівнянь та обґрунтовано напрямки досліджень.

Теоретичним питанням застосування методу ГІР до розв'язання крайових задач присвячені дослідження В.Д. Купрадзе і його учнів, а також С.Г. Міхліна, Н.І. Мухелішвілі та інших авторів.

Подальший розвиток методу і розробка ефективних чисельних схем пов'язано з іменами Д.В. Вайнберга, О. Я. Александрова, С.М. Белоносова, О.Л. Синявського, Ю.В. Верюжського та його учнів, а також С.Д. Гавелі, Б.О. Галанова, Г.Б. Ковнерістова, Ю.Д. Копейкіна, Д.Н. Нізомова, П.І. Перліна та інших. Чисельна реалізація методу потенціалу стосовно стаціонарних і нестаціонарних динамічних задач розглядалася на роботах Ш.М. Айталієва, П. Бенерджі, К.А. Бреббія, Ж. Домінгеса, В.В. Зозулі, Л.А. Ігумнова, С. Кобаяші, Т.А. Круза, Д. Нардіні, Ф. Ріццо, І.З. Ройтфарба, К. Такакуди, Тю В'ет Кионга, Н.М. Хуторянського, Чан Дик Тіня, Д. Шиппі, Р.П. Шоу та інших.

Другий розділ присвячений дослідженню з позицій МГІР зсувних нестаціонарних коливань пружного нескінченного масиву під дією сил прикладених до границі циліндричного отвору і рівномірно розподілених по довжині твірних. Переміщення і напруження в точках границі задовольняють гранично-часове інтегральне рівняння (ГЧІР)

$$\frac{1}{2}u(\vec{x}_0, t) = \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} U(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) q(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} T(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) u(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau. \quad (1)$$

де $\vec{x}_0 \in \Gamma$; $U(\vec{x}_0, \vec{y}, t)$ – фундаментальний розв’язок задачі

$$U(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) = \frac{C}{2\pi\mu \left[C^2 t^2 - r(\vec{x}_0, \vec{y})^2 \right]^{1/2}} H[Ct - r(\vec{x}_0, \vec{y})]. \quad (2)$$

$r(\vec{x}_0, \vec{y}) = |\vec{y} - \vec{x}_0|$ – відстань між точками \vec{x}_0 і \vec{y} ; $H(Ct - r)$ – ступінчаста функція Хевісайда. Узагальнена похідна фундаментального розв’язку має вигляд:

$$T(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) = \frac{C}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{r}{(C^2 t^2 - r^2)^{3/2}} H(Ct - r) + \frac{1}{(C^2 t^2 - r^2)^{1/2}} \frac{\partial H(Ct - r)}{\partial r} \right]. \quad (3)$$

За допомогою інтегрування частинами можна позбутися диференціювання функції Хевісайда і надати ГЧІР (1) вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(\vec{x}_0, t) = & \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} U(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) q(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \\ & - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} V(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) u(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau + \frac{1}{C} \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} U(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) \dot{u}(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{де} \quad V(\vec{x}_0, \vec{y}, t) = \frac{C}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{C(r - Ct)}{(C^2 t^2 - r^2)^{3/2}} H(Ct - r). \quad (5)$$

Вирази (1) і (4) являють собою гранично-часове інтегральне рівняння (ГЧІР) відносно незаданих граничними умовами переміщень $u(\vec{y}, t)$ та напружень $q(\vec{y}, t)$ в точках $\vec{y} \in \Gamma$. Зауважимо, що інтеграли в правих частинах виразів (1) і (4) є сингулярними і розуміються за Коші. Зазначимо також, що коли характер залежності від часу функцій $u(\vec{y}, t)$ та $q(\vec{y}, t)$ є відомим або заданим, то інтегрування по часовій координаті може бути виконане в аналітичному вигляді.

Було розглянуто тестову задачу про симетричне навантаження кругового циліндричного отвору граничними навантаженнями $q_R(t) = Q_R f(t)$, причому функція $f(t)$ відповідала дії короткочасного імпульсу. Задача була розв’язана за допомогою ГЧІР (4), а також шляхом переходу в частотну область.

В першому випадку врахування центральної симетрії дозволило перетворити інтегральне рівняння (4) на алгебраїчне

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(t) = & q(\tau) \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} U(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) d\Gamma_y d\tau - \\ & - u(\vec{\tau}) \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} V(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) d\Gamma_y d\tau + \frac{\dot{u}(\tau)}{C} \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} U(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) d\Gamma_y d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

В другому випадку функція $q_R(t)$ вважалась імпульсно-періодичною, що дозволяє розкласти її в ряд Фур'є. Переміщення всередині розрахункової області на відстані r від центру також подаються у вигляді ряду Фур'є, що дозволяє знайти переміщення із наперед заданою точністю в будь-якій точці розрахункової області. Зокрема, на границі отвору маємо

$$u(R, t) = -f_0 \frac{Q_R R \ln R}{\mu} + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^K f_k \frac{Q_R C}{\mu \omega_k} \frac{H_0^{(1)}\left(\frac{\omega_k R}{C}\right)}{\left[H_1^{(1)}\left(\frac{\omega_k R}{C}\right) \right]} \exp(-i\omega_k t) \right]. \quad (7)$$

Чисельне розв'язування задачі було виконано при трьох різновидах імпульсного навантаження: трапецеїдального, трикутного та параболічного. В усіх випадках максимальне переміщення, отримане з використанням представлення (6), при збільшенні кількості членів ряду прямувало до відповідного результату розв'язання рівняння (4).

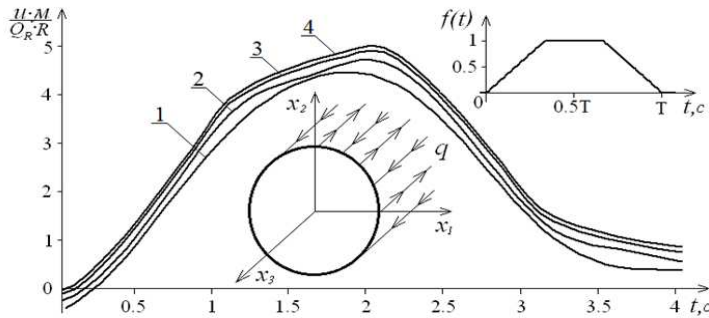
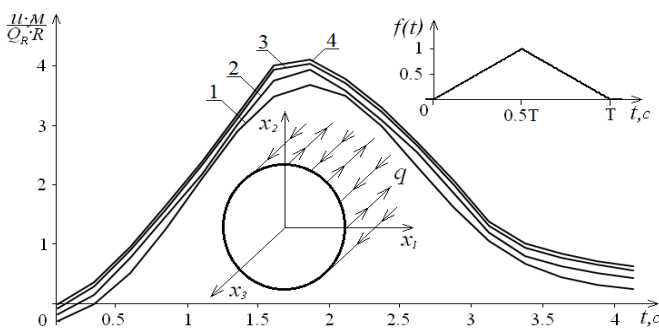


Рис. 1. Реакція системи на імпульс трапецеїдальної форми

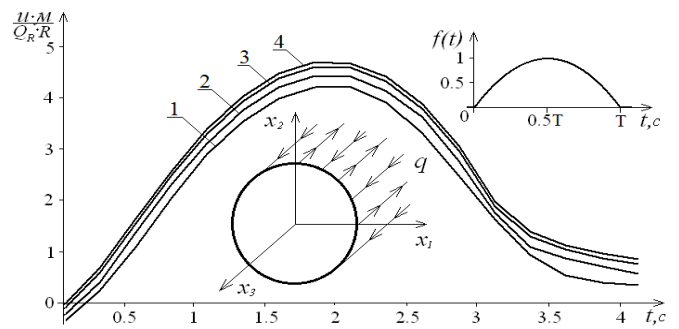
Результати обчислень за формулою (7):

- 1 – при 4 гармоніках, $u_{\max}^{norm} = 4,35$;
- 2 – при 8 гармоніках, $u_{\max}^{norm} = 4,66$;
- 3 – при 24 гармоніках, $u_{\max}^{norm} = 4,86$
- 4 – результат розв'язання за МГЧІР, $u_{\max}^{norm} = 4,91$.



- 1 – при 4 гармоніках, $u_{\max}^{norm} = 3,66$;
- 2 – при 8 гармоніках, $u_{\max}^{norm} = 3,91$;
- 3 – при 24 гармоніках, $u_{\max}^{norm} = 4,01$
- 4 – розв'язання за МГЧІР, $u_{\max}^{norm} = 4,09$

Рис. 2. Реакція системи на імпульс трикутної форми



- 1 – при 4 гармоніках, $u_{\max}^{norm} = 4,2$;
- 2 – при 8 гармоніках, $u_{\max}^{norm} = 4,431$;
- 3 – при 24 гармоніках, $u_{\max}^{norm} = 4,69$
- 4 – розв'язання за МГЧІР, $u_{\max}^{norm} = 4,73$

Рис. 3. Реакція системи на імпульс параболічної форми

Таким чином, наведені результати чисельних розрахунків свідчать про досить високу точність та ефективність даних, отриманих за допомогою розробленої гранично-елементної методики аналізу зсувних нестационарних пружних коливань, спричинених дією одиничного імпульсу.

Перейдемо до задач про нестационарні коливання в стані плоскої деформації.

Розглядаються коливання пружного тіла, яке знаходиться в стані плоскої деформації. До границі тіла прикладене навантаження, що є довільною функцією часу. Такі коливання описуються системою рівнянь динамічної рівноваги (8).

Будемо розв'язувати задачу за нульових початкових умов.

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \rho \ddot{u}_1 = 0 \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) - \rho \ddot{u}_2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

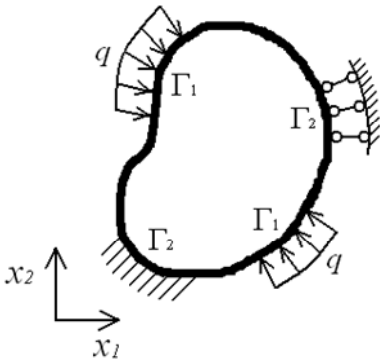


Рис. 4. Пружне тіло, яке знаходиться в стані плоскої деформації

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, & \sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22} \end{aligned}$$

Початкові умови:

$$u_i(\vec{x}, t=0) = 0 \quad \dot{u}_i(\vec{x}, t=0) = 0$$

Граничні умови: на частині границі Γ_1

задано $q_i(\vec{y}, t)$ на Γ_2 задано $u_i(\vec{y}, t)$,

$$\vec{y} = \{y_1, y_2\} \in \Gamma$$

Як і в задачі про зсувні коливання, розв'язання можливо здійснити двома способами.

Згідно першого задача розв'язується безпосередньо в часовому просторі.

Згідно другого способу задача переводиться в частотну область за допомогою розкладу в ряд Фур'є. Відповідно замість розв'язання системи рівнянь динамічної рівноваги (8) необхідно багаторазово при різних значеннях частоти гармонічних коливань розв'язувати систему рівнянь (9).

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 u_1^k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1^k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \rho \omega_k^2 u_1^k = 0 \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_2^2} \right) + \rho \omega_k^2 u_2^k = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Будемо розв'язувати задачу за допомогою апарату методу потенціалу. Застосуємо перший підхід тобто здійснимо розв'язання задачі в часовій області.

Запишемо гранично-часове інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2}u_k(\vec{x}, t) + \int_0^t \int_{\Gamma} u_j(\vec{y}, \tau) T_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) d\Gamma d\tau = \int_0^t \int_{\Gamma} t_j(\vec{y}, \tau) U_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) d\Gamma_y d\tau. \quad (10)$$

Тут фундаментальний розв'язок задачі

$$U_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, t) = \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{1}{C_1} \frac{H(C_1 t - r)}{r^2} \left[\left(2R_1 + \frac{r^2}{R_1} \right) r_{k,r_j} - R_1 \delta_{kj} \right] - \frac{1}{C_2} \frac{H(C_2 t - r)}{r^2} \left[\left(2R_2 + \frac{r^2}{R_2} \right) r_{k,r_j} - \left(R_2 + \frac{r^2}{R_2} \right) \delta_{kj} \right] \right\}. \quad (11)$$

$$H - \text{функція Хевісайда } H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}.$$

Узагальнена похідна фундаментального розв'язку

$$T_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, t) = \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{1}{C_1} \frac{H(C_1 t - r)}{C_1} \left[-B_{kj} \left(2R_1 + \frac{r^2}{R_1} \right) - D_{kj} \frac{r^3}{R_1^3} \right] + \frac{\delta(C_1 t - r)}{C_1} D_{kj} \left(2R_2 + \frac{r^2}{R_2} \right) + \frac{H(C_2 t - r)}{C_2} \left[A_{kj} \frac{r}{R_2^3} + B_{kj} \left(2R_1 + \frac{r^2}{R_2} \right) + D_{kj} \frac{r^3}{R_1^3} \right] - \frac{\delta(C_2 t - r)}{C_2} \left[A_{kj} \frac{1}{R_2} D_{kj} \left(2R_2 + \frac{r^2}{R_2} \right) \right] \right\} \quad (12)$$

де δ – дельта функція Дірака, C_1 , C_2 – швидкості відповідно поздовжньої та поперечної хвилі.

Особливості фундаментального розв'язку, в цьому випадку полягає в тому, що вона містить в своєму складі функцію Хевісайда, тому інтеграли, які входять у вираз ГЧІР називають потенціалами, що спізнюються.

Оскільки при розв'язанні ГЧІР необхідно виконувати інтегрування не тільки з просторовими координатами, а й за часом, необхідно прийняти гіпотезу про характер зміни невідомих за цією координатою. В роботі прийнята кусково-лінійна апроксимація невідомих за часом і отримані замкнені формули для аналітичного обчислення відповідних інтегралів.

$$u_k(\vec{x}, t) = \sum_{m=1}^M u_k(\vec{x}, m\Delta t) \eta_m(t). \quad (13)$$

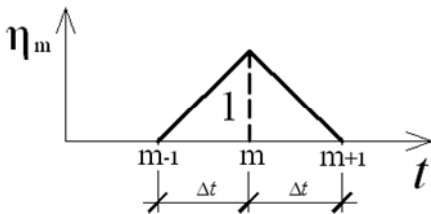


Рис. 5. Кусково-лінійна апроксимація

згортка ядра T_{kj} та функції форми η_m

$$\int_{\Delta t_m} \eta_m(\tau) T_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, t_n - \tau) d\tau = P_{kj}^{mn}. \quad (14)$$

Після цього інтегрування по просторовим координатам наведених нижче виразів (15-19) в кожен розглядуваний момент часу виконується за квадратурними формулами.

$$P_{kj}^{mn} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\mu}{4\pi\rho C_{\alpha}^2} \frac{1}{r} \left[A_{kj}^{(\alpha)} P_{\alpha} - B_{kj}^{(\alpha)} q_{\alpha} \right], \quad (15)$$

$$P_{\alpha} = \frac{t - \tau_{m-1}}{3\Delta t} \frac{(\eta_{\alpha}^2 - 1)^{3/2}}{\eta_{\alpha}} - 2 \frac{t - \tau_m}{3\Delta t} \frac{(\theta_{\alpha}^2 - 1)^{3/2}}{\theta_{\alpha}} + \frac{t - \tau_{m+1}}{3\Delta t} \frac{(\beta_{\alpha}^2 - 1)^{3/2}}{\beta_{\alpha}}, \quad (16)$$

$$A_{kj}^{(\alpha)} = 4(-1)^{\alpha} \left[\frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{kj} - 4r_{k,r_j}) + r_{k,n_j} + r_{j,n_k} \right], \quad (17)$$

$$B_{kj}^{(1)} = 4 \frac{\partial r}{\partial n} r_{k,r_j} + 2 \frac{\lambda}{\mu} r_{k,n_j}, \quad (18)$$

$$B_{kj}^{(2)} = 2 \frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{kj} - 2r_{k,r_j}) + r_{j,n_k}. \quad (19)$$

Якщо застосовується другий підхід (перехід в частотну область), то маємо ГР наступного вигляду

$$\frac{1}{2} u_j^*(\vec{x}, \omega) = \int_{\Gamma} \tau_k^*(\vec{y}, \omega) U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_k^*(\vec{y}, \omega) T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y, \quad j, k = 1, 2. \quad (20)$$

$U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ – фундаментальний розв'язок задачі (амплітуди переміщень в пружному двовимірному просторі від дії зосередженої сили, одиничної амплітуди, яка прикладена в точці \vec{x} в напрямку осі θx_j):

$$U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) = \frac{i}{4\mu} \left[\delta_{jk} U_0(r, \omega) + r_{,j} r_{,k} U_2(r, \omega) \right], \quad (21)$$

$$U_0(r, \omega) = H_0^{(1)}(k_1 r) - \frac{H_1^{(1)}(k_2 r)}{k_2 r} + \alpha \frac{H_1^{(1)}(k_1 r)}{k_1 r}, \quad (22)$$

$$U_2(r, \omega) = H_2^{(1)}(k_2 r) - \alpha H_2^{(1)}(k_1 r), \quad (23)$$

$$k_j = \frac{\omega}{C_j}; \quad C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \quad C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad \alpha = \frac{C_2^2}{C_1^2}; \quad r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial y_j} = \frac{y_j - x_j}{r};$$

$r = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ – відстань між точками \vec{x} і \vec{y} ; ρ – густина матеріалу; λ і μ – константи Ламе; $H_k^{(1)}$ – функція Ганкеля 1-го роду порядку k ; $T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ – узагальнена похідна фундаментального розв'язку, тобто напруження на площинках з компонентами нормалі, які виникають в пружному двовимірному просторі від дії вищезгаданої одиничної сили:

$$T_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) = \lambda n_j(\vec{y}) \frac{\partial U_{km}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)}{\partial y_m} + \mu \left(\frac{\partial U_{km}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)}{\partial y_j} + \frac{\partial U_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)}{\partial y_m} \right) n_m(\vec{y}) =$$

$$= \frac{i}{4} \left[r_{,k} n_j T_1 + (\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k) T_2 + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} T_3 \right], \quad (24)$$

$$T_1 = \frac{2}{r} \left[H_2^{(1)}(k_2 r) - \alpha H_2^{(1)}(k_1 r) \right] - \frac{\lambda}{\mu} \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} k_1 H_1^{(1)}(k_1 r), \quad (25)$$

$$T_2 = \frac{1}{r} \left[2H_2^{(1)}(k_2 r) - k_2 r H_1^{(1)}(k_2 r) - 2\alpha H_2^{(1)}(k_1 r) \right]; \quad (26)$$

$$T_3 = \frac{2}{r} \left[k_2 r H_1^{(1)}(k_2 r) - 4H_2^{(1)}(k_2 r) - \alpha k_1 r H_1^{(1)}(k_1 r) + 4\alpha H_2^{(1)}(k_1 r) \right]. \quad (27)$$

Чисельна процедура розв'язання системи ГР (20) базується на представленні границі розрахункової області сукупністю граничних елементів (ГЕ), в межах кожного з яких задані точки колокації, а невідомі змінюються за призначеним законом. В результаті система (20) перетворюється на систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень незаданих граничними умовами переміщень і напружень у вузлах колокації. Коефіцієнти матриці системи обчислюються шляхом інтегрування по окремим ГЕ при послідовному суміщенні т. \vec{x} з кожним колокаційним вузлом. Ситуація значно ускладнюється, коли інтегрування проводиться по тому самому елементу, на якому розташована т. \vec{x} . В цьому випадку відстань між точками \vec{x} і \vec{y} може стати нескінченно малою, а підінтегральні вирази набути нескінченно великих значень, що робить неможливим безпосереднє обчислення діагональних коефіцієнтів алгебраїчного аналога системи. Для подолання вказаної перешкоди функції Ганкеля, що входять до складу ядер ГР, наближено замінюються початковими відрізками ряду Маклорена. При цьому компоненти ядер набувають вигляду сум, перший доданок яких виявляється рівним компоненті відповідного статичного потенціалу, тоді як інші доданки при $r = 0$ мають скінченні значення:

$$\begin{aligned} U_0(r, \omega) = & \frac{i}{\pi} \left\{ (1+\alpha) \ln(r) + \frac{1-\alpha}{2} + \gamma(1+\alpha) + \alpha \ln\left(\frac{k_1}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2}{2}\right) - \right. \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left[\gamma(3+\alpha^2) - \frac{11+5\alpha^2}{4} + \alpha^2 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + 3 \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{6} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left(\gamma(5+\alpha^3) - \frac{22+5\alpha^2}{3} + \alpha^3 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + 5 \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{(1+\alpha)}{2} - \left(\frac{k_2 r}{4}\right)^2 \left[(3+\alpha^2) - \frac{1}{6} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (5+\alpha^3) \right] + O(r^6), \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(r, \omega) = & \frac{i}{\pi} \left\{ (\alpha-1) + \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left[\left(\gamma - \frac{3}{4}\right) (1-\alpha^2) - \alpha^2 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left(\left(\gamma - \frac{17}{12}\right) (1-\alpha^3) - \alpha^3 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 [(1-\alpha^2)-\frac{1}{3}\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (1-\alpha^3)]+O(r^6), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} T_1(r, \omega) = & \frac{i}{\pi r} \left\{ -2\alpha + \frac{1}{2}(rk_2)^2 \left[\gamma(1-2\alpha+3\alpha^2) - \frac{3-4\alpha+5\alpha^2}{4} - \right. \right. \\ & -\alpha(2-3\alpha)\ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (\gamma(1-3\alpha^2+5\alpha^3) - \\ & \left. \left. - \frac{17-45\alpha^2+73\alpha^3}{12} - \alpha^2(3-5\alpha)\ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\ & + r\left(\frac{k_2}{2}\right)^2 [(1-2\alpha+3\alpha^2)-\frac{1}{3}\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (1-3\alpha^2+5\alpha^3)]+O(r^5), \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(r, \omega) = & \frac{i}{\pi r} \left\{ 2\alpha + \frac{1}{2}(rk_2)^2 \left[-\gamma(1+\alpha^2) + \frac{1+3\alpha^2}{4} - \alpha^2\ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) - \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{3}\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left(-\gamma(2+\alpha^3) + \frac{28+17\alpha^3}{12} - \alpha^3\ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) - 2\ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\ & - r\left(\frac{k_2}{2}\right)^2 [(1+\alpha^2)-\frac{1}{3}\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (2+\alpha^3)]+O(r^5), \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3(r, \omega) = & \frac{i}{\pi r} \left\{ 4(1-\alpha) + \frac{1}{2}(rk_2)^2 [(1-\alpha^2) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6}\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left(\frac{11-12\gamma}{3}(1-\alpha^3) + 4\alpha^3\ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) - 4\ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{k_2}{3}\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^3 (\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2)+O(r^5), \quad (32) \end{aligned}$$

$\gamma = 0.5772156649$ - Ейлерова стала.

Оскільки інтегрування ядер статичної задачі труднощів не викликає, то проблему алгебраїзації системи ГІР можна вважати вирішеною, і лишається тільки з'ясувати межі застосування наближених представлень (28) – (32). Для цього кожному з компонент ядер обчислюємо при різних значеннях аргументів безпосередньо за однією з формул (22) – (26), а потім – за відповідним наближеним представленням, утримуючи один, або два, або три члени ряду. Результати обчислень свідчать, що в переважній кількості випадків при значеннях параметра $k_2 r \leq 1$ похибка обчислення компонент ядер за наближеними формулами не перевищує 1%, якщо у виразах (29)-(32) утримуються три члени ($N=3$). Таким чином, проблему обчислення діагональних коефіцієнтів матриці алгебраїчного аналога системи (20) можна вважати вирішеною.

Співставлення обох підходів було виконано шляхом розв'язання тестової задачі про дію трапецеїдального імпульсу на границю кругового циліндричного отвору.

Циліндричні хвилі, що розповсюджуються від отвору описуються рівнянням

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (33)$$

$$\sigma_{rr} = \begin{cases} q(t), & r=R, \\ 0, & r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (34)$$

де $\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r}$ – радіальні напруження.

В роботі отримано чисельно-аналітичний розв'язок цієї задачі за допомогою прямого і оберненого перетворення Лапласа.

Ця сама задача була розв'язана з використанням ГЧІР (10) та ГІР (20). В обох випадках була врахована симетрія, що дозволило звести інтегральні рівняння до алгебраїчних.

На рис. 6 наведені графіки нормованих значень величин $u_r^{норм.} = \frac{u_r(R)\mu}{q_0 R}$

(криві 3 і 4) та $\sigma_{\theta\theta}^{норм.} = \frac{\sigma_{\theta\theta}(R)}{q_0}$ (криві 1 і 2), обчислених в точках границі отвору.

Графіки 1 і 3 побудовані за допомогою чисельно-аналітичного підходу, тобто з використанням прямого і оберненого перетворення Лапласа. Для побудови графіків 2 і 4 були застосовані розв'язки рівняння (20) та його узагальнена похідна відповідно. При розрахунках було використано вісім перших членів ряду ($K=7$). Навантаження у вигляді трапецеїдального імпульсу мало параметри $\bar{t}_1=4.44$, $\bar{t}_2=15.56$, $\bar{T}_q=20$.

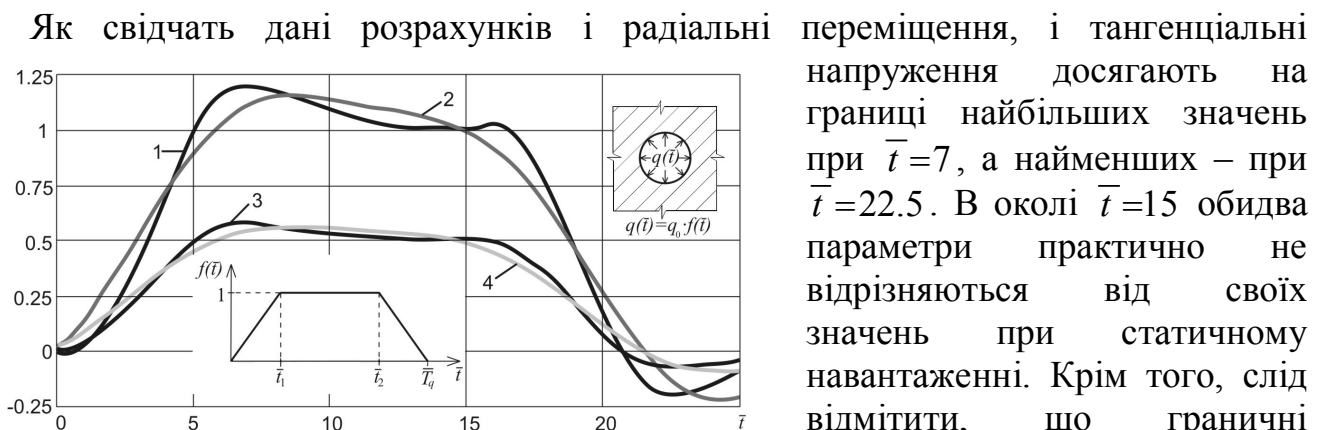


Рис. 6. Графіки нормованих значень величин переміщень та напружень при дії трапецеїдального імпульсу

(10) і розбитті часового інтервалу, впродовж якого діє імпульсне навантаження на

Як свідчать дані розрахунків і радіальні переміщення, і тангенціальні напруження досягають на границі найбільших значень при $\bar{t}=7$, а найменших – при $\bar{t}=22.5$. В околі $\bar{t}=15$ обидва параметри практично не відрізняються від своїх значень при статичному навантаженні. Крім того, слід відмітити, що граничні напруження мають локальний максимум при $\bar{t}=15.95$. Зазначимо, що при розв'язанні задачі з використанням ГЧІР

40 частин отримуємо дані, які практично не відрізняються від еталонних, отриманих за допомогою прямого і оберненого перетворення Лапласа

Бачимо також, що при використанні в другому підході восьми членів ряду Фур'є (графіки 2 і 4) отримуємо досить приблизну картину динамічного НДС. Детальніше співставлення нормованих радіальних переміщень, отриманих за двома підходами, міститься в табл. 1.

Таблиця 1

\bar{i}	Еталонне значення $u_r^{норм.}$	Наближені значення за формулою (20)					
		$K = 7$		$K = 11$		$K = 15$	
		$u_r^{норм.}$	Відносна похибка, %	$u_r^{норм.}$	Відносна похибка, %	$u_r^{норм.}$	Відносна похибка, %
7	0.574	0.543	5.4	0.585	1.9	0.577	0.5
15	0.502	0.483	3.8	0.518	3.2	0.505	0.6
22.5	-0.0725	-0.0568	21.7	-0.0793	9.4	-0.0749	3.3

Результати обчислення і порівняння нормованих тангенціальних напружень наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

\bar{i}	Еталонне значення $\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Наближені значення за формулою (20)					
		$K = 7$		$K = 11$		$K = 15$	
		$\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Відносна похибка, %	$\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Відносна похибка, %	$\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Відносна похибка, %
7	1.198	1.109	7.4	1.213	1.3	1.205	0.6
15	1.005	0.990	1.5	1.055	5.0	1.016	1.1
15.95	1.020	0.917	10.1	1.020	0.1	1.011	0.9
22.5	-0.193	-0.130	32.9	-0.120	3.4	-0.198	2.6

Як бачимо, при збільшенні кількості членів ряду Фур'є наближений розв'язок прямує, хоча і досить повільно, до еталонного. Зазначимо, що вже при 12 членах ряду ($K = 11$) розбіжність максимальних значень параметрів НДС не перевищує 2%, а відповідні графіки візуально майже не відрізняються між собою. Отже, за наявності надійного інструменту для визначення переміщень і напружень при вимушених гармонічних коливаннях другий підхід також може успішно застосовуватись при дослідженні реакції двовимірних пружних об'єктів, послаблених різного роду отворами.

В третьому розділі розглянуто чисельну реалізацію МГЧІР в задачах про нестационарні коливання за відсутності центральної симетрії, тобто про динамічну реакцію масивних елементів конструкцій довільної форми.

Спочатку розглянуто зсувні коливання, які описуються гранично-часовими інтегральними рівняннями (4). При розв'язанні задачі використано варіант МГЕ, який базується на поданні криволінійних ділянок границі у вигляді сукупності дуг кола (граничних елементів), в межах кожного з яких в певний момент часу, невідомі переміщення вважаються постійними. В результаті такої заміни граничне інтегральне рівняння перетворюється на алгебраїчне:

$$\left[\frac{1}{2}u(\bar{x}_i, t_n) + \sum_{k=1}^K u(\bar{x}_k, t_n) \int_{\Delta\Gamma_k} Z_n(\bar{x}_i, \bar{y}, t_n) d\Gamma_y \right] = Q_R \int_{\Gamma} P(\bar{x}_i, y, t_n) d\Gamma_y - \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^K u(\bar{x}_k, t_m) \int_{\Delta\Gamma_k} Z_m(\bar{x}_i, \bar{y}, t_n) d\Gamma_y, \quad (35)$$

де через $\Delta\Gamma_k$ позначена область, яку займає k -й ГЕ, K – загальна кількість елементів.

Розміщуючи полюс \bar{x}_i послідовно в центрах всіх елементів, отримуємо в кожен обраний момент часу t_n систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих переміщень в цих точках. Процедура обчислення коефіцієнтів системи (35) детально описана в роботі.

Була розглянута задача про динамічний НДС масиву з двома круговими

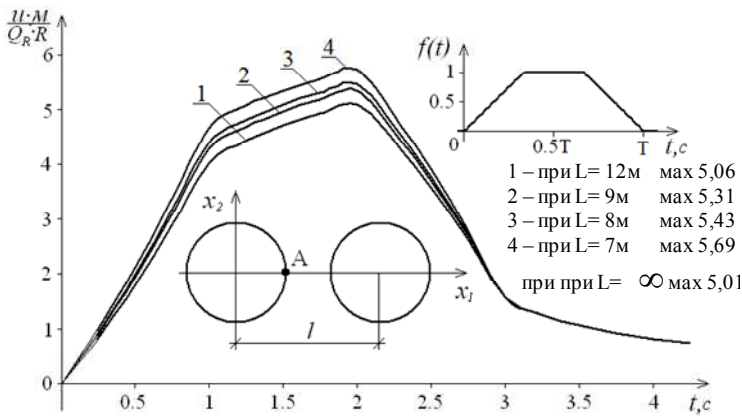


Рис. 7. Залежність від часу найбільших переміщень системи

циліндричними отворами радіусу $R=3$ м, один з яких є навантаженим. Навантаження змінюється в часі за трапецеїдальним законом (симетричний імпульс) і є постійним вздовж границі отвору. Відстань між центрами отворів l змінювалась в діапазоні від 7 до 12 метрів. Виявилось, що незалежно від відстані між отворами найбільші переміщення виникають в точці A , яка розташована на границі навантаженого отвору та лежить на прямій, що з'єднує центри отворів. На рисунку 7 наведені графіки залежності від часу переміщення в точці A при різних відстанях між отворами.

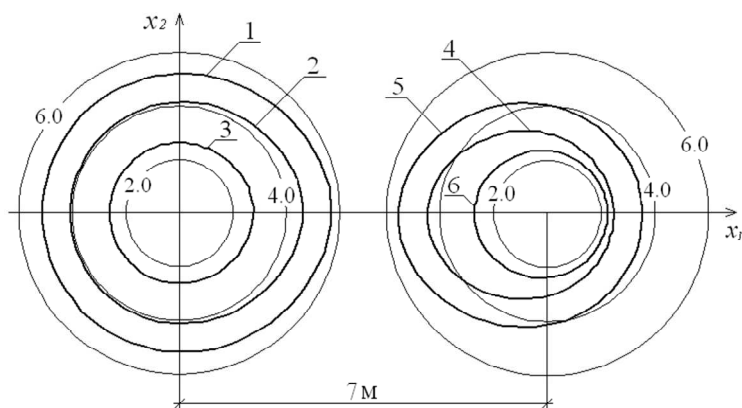


Рис. 8. Графіки граничних переміщень в різні моменти часу.

Разом із зменшенням відстані між отворами сильнішою стає нерівномірність розподілу переміщень вздовж границі.

Графіки граничних переміщень в різні моменти часу наведені в полярних координатах на рис. 8.

1 – $t=2T/3$ $u_{max}=5,69$, $u_{min}=5,14$;
5 – $t=2T/3$ $u_{max}=5,52$, $u_{min}=3,52$;
2 – $t=T/3$ $u_{max}=4,64$, $u_{min}=4,08$;
4 – $t=T/3$ $u_{max}=4,46$, $u_{min}=2,45$;
3 – $t=11T/12$ $u_{max}=2,75$, $u_{min}=2,61$;
6 – $t=11T/12$ $u_{max}=2,71$, $u_{min}=2,22$.

Наведені приклади свідчать про те, що розроблена методика може бути застосована для дослідження нестационарних зсувних коливань пружних масивів під дією імпульсного навантаження.

Була чисельно розв'язана задача про взаємний вплив двох циліндричних отворів в пружному просторі, який перебуває в стані плоскої деформації. Один з отворів піддається дії несиметричного трапецеїдального імпульсу. Задача була розв'язана як в часовій області за допомогою ГЧІР (10), так і в частотній області з використанням ГІР (20).

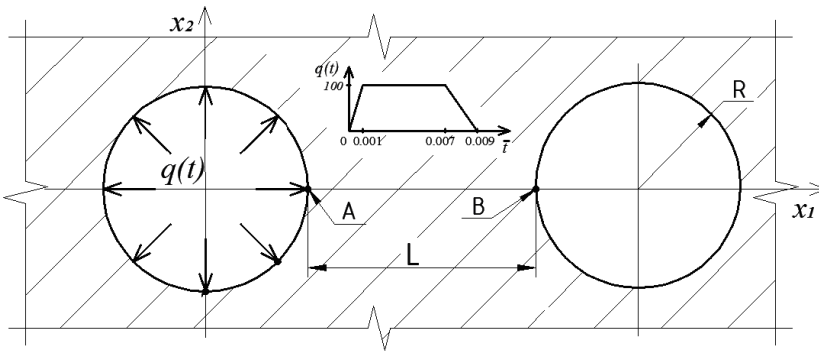


Рис. 9. Дія несиметричного трапецеїдального імпульсу

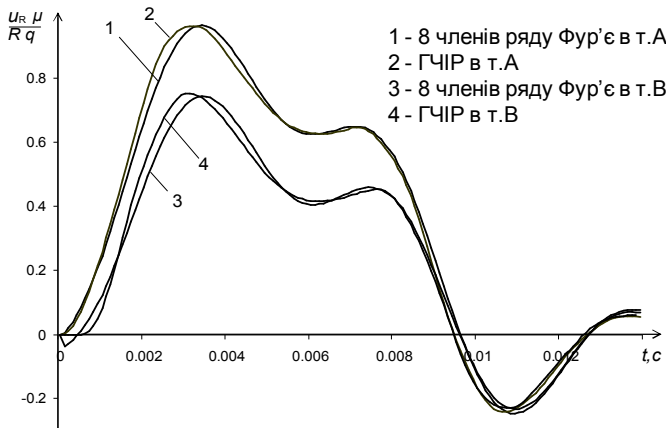


Рис. 10. Радіальні переміщення в точках А і В.

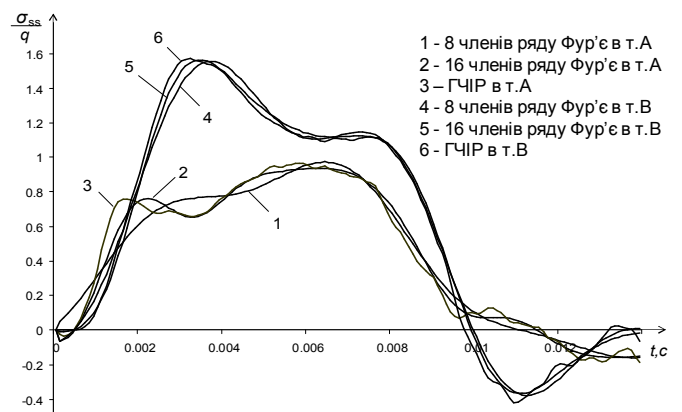


Рис. 11 Тангенціальні напруження в точках А і В

Розбіжність результатів за переміщеннями і за напруженнями, отриманих за двома підходами була незначною. Також незначною була різниця у витратах часу. Тому надалі задачі розв'язувались за допомогою більш простого підходу, пов'язаного із застосуванням ГІР (20).

Детально була розглянута задача про дію на один з отворів симетричного імпульсу трапецеїдальної форми рисунок 12.

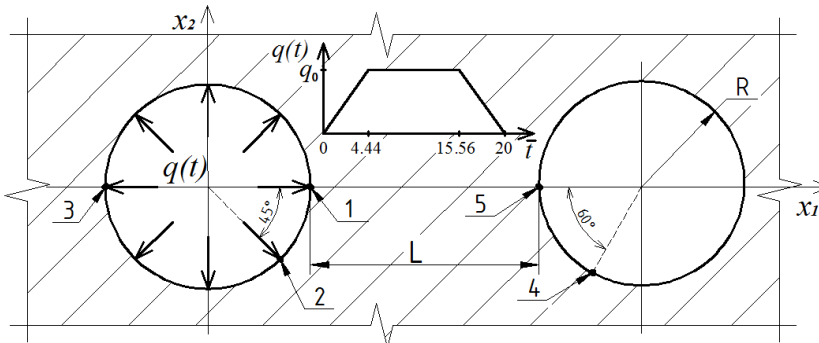


Рис. 12. Дія симетричного трапецеїдального імпульсу на один з отворів.

імпульсу трапецеїдальної форми рисунок 12. Розподіл радіальних переміщень $u_r^{норм.} = u_r \mu / (q_0 R)$ і тангенціальних напружень $\sigma_{ss}^{норм.} = \sigma_{ss} / q_0$ вздовж границі отворів в різні моменти часу показаний на графіках (рис 13, 14). Цифрами позначені графіки залежності від часу

нормованих величин у точках навантаженого (криві 1, 2, 3) і ненавантаженого (криві 4, 5) контурів. Розташування вказаних точок можна побачити на рис. 12.

Значення нормованих радіальних переміщень у вказані моменти часу, а також при статичному прикладенні тиску q_0 містяться в таблиці 3. Для порівняння в

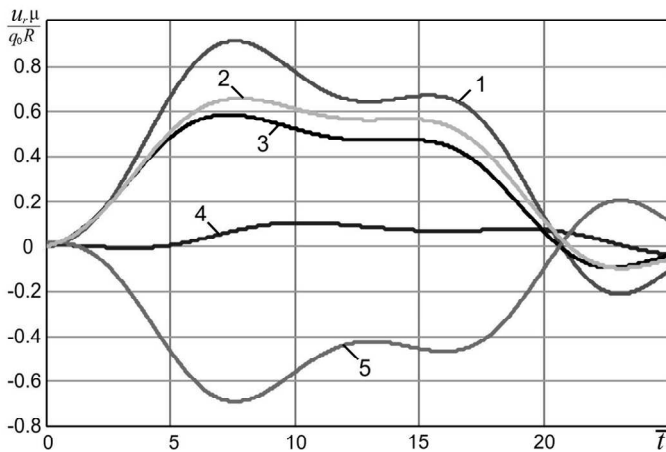


Рис. 13. Графіки залежності від часу нормованих радіальних переміщень

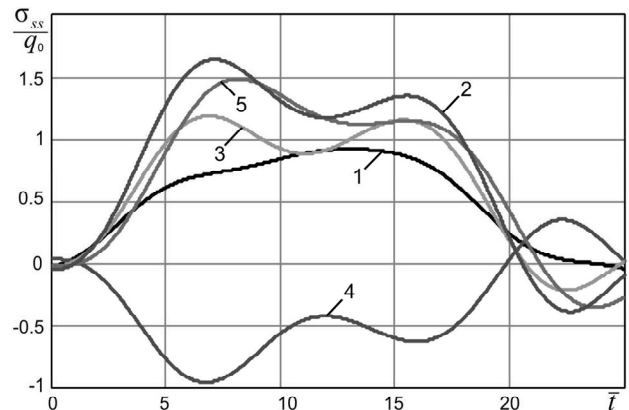


Рис. 14. Графіки залежності від часу нормованих тангенціальних напружень

останньому стовпчику таблиці наведені результати обчислення за допомогою перетворення Лапласа переміщень на границі простору з одним циліндричним отвором.

Таблиця 3

Момент часу	Нормовані радіальні переміщення в точках границі					
	т. 1	т. 2	т. 3	т. 4	т. 5	Один отвір
t1=7	0.898	0.643	0.579	0.051	-0.682	0.574
t2=15.4	0.666	0.552	0.462	0.064	-0.464	0.502
t3=22.6	-0.206	-0.096	-0.098	0.015	0.195	-0.073
Статичне навантаж.	0.686	0.549	0.480	0.059	-0.481	0.500

Величини нормованих напружень в характерні моменти часу, а також при статичному прикладенні тиску містяться в табл. 4. Знову для порівняння в останньому стовпчику таблиці наведені результати обчислення за допомогою перетворення Лапласа напружень на границі простору з одним отвором. Зазначимо, що всі чисельні результати були отримані з використанням алгебраїчного аналогу ГР (20) при утриманні 12 гармонік.

Таблиця 4

Момент часу	Нормовані тангенціальні напруження в точках границі					
	т. 1	т. 2	т. 3	т. 4	т. 5	Один отвір
t1=7	0.723	1.638	1.182	-0.957	1.410	1.205
t2=15.4	0.867	1.343	1.152	-0.620	1.142	1.018
t3=22.6	0.021	-0.387	-0.218	0.343	-0.280	-0.200
Статичне навантаж.	0.768	1.260	0.985	-0.609	1.111	1.00

Розподіл радіальних переміщень вздовж границі навантаженого отвору в моменти часу t_1 , t_2 і t_3 показаний на рисунку 15,а (криві 1, 2, 3 відповідно). На рисунку 15,б наведений розподіл переміщень на границі ненавантаженого отвору.

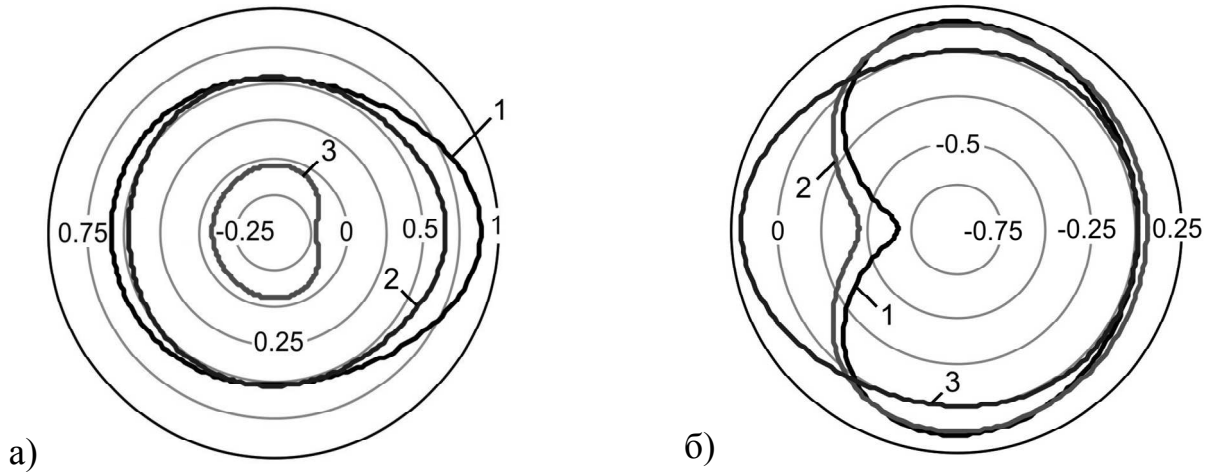


Рис. 15. Розподіл радіальних переміщень вздовж границі отвору в моменти часу $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3$ а) навантажений отвір, б) ненавантажений отвір

Розподіл тангенціальних напружень в моменти часу \bar{t}_1, \bar{t}_2 і \bar{t}_3 (криві 1, 2, 3 відповідно) показаний на рисунках 16,а (границя навантаженого отвору) та 16,б (границя ненавантаженого отвору).

Максимальні тангенціальні напруження на навантаженому контурі спостерігаються в околі т. 2 в момент часу \bar{t}_1 , причому їх значення перевищують величини напружень при статичному прикладенні навантаження приблизно на 30%. В околі т. 3 найбільші напруження також мають місце в момент \bar{t}_1 , але тут перевищення статичного рівня становить приблизно 20%. Водночас, найбільші напруження біля т. 1 виникають в момент \bar{t}_2 , а їх перевищення порівняно із статичним рівнем становить 13%. Також досить великі тангенціальні напруження спостерігаються на ненавантаженому контурі в околі т. 5 в моменти \bar{t}_1 і \bar{t}_3 .

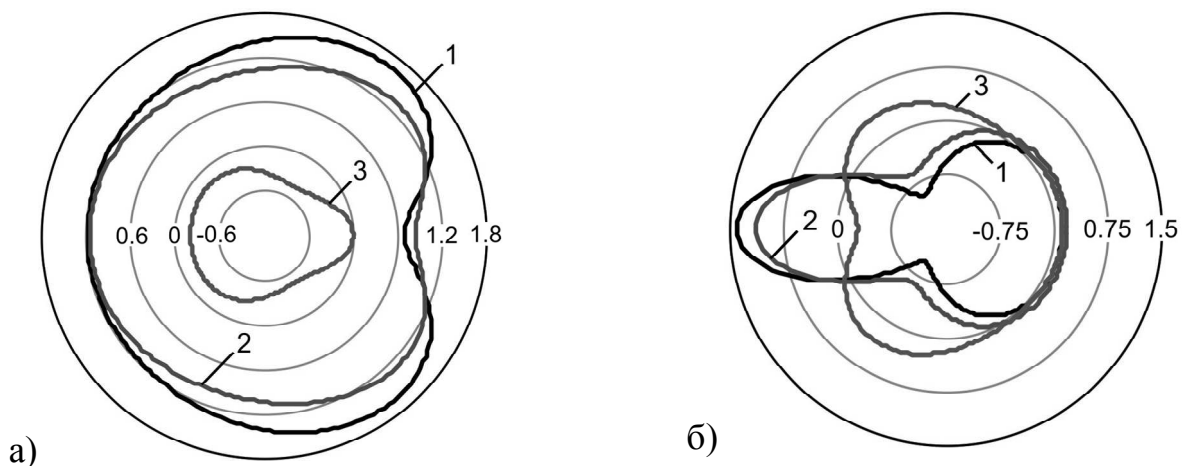


Рис. 16. Розподіл тангенціальних напружень в моменти часу $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3$ а) навантажений отвір, б) ненавантажений отвір

В четвертому розділі розглянута задача про двовимірний динамічний НДС ґрунтового масиву під трубопроводом у процесі його ущільнення двома плоскими поверхнями, що рухаються одна проти одної за напівсинусоїдальним законом із частотою $f=25$ Гц (рис. 17).

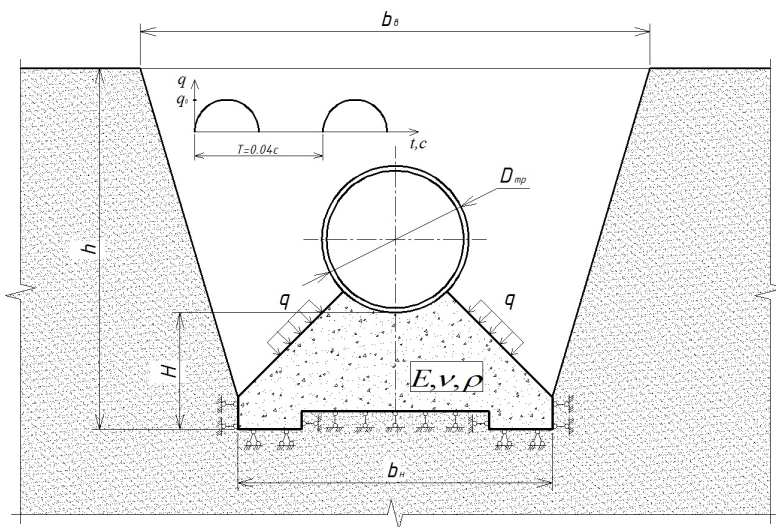


Рис. 17. Задача про двовимірний динамічний НДС ґрунтового масиву

Стінки траншеї мають значно більший модуль пружності, ніж масив ґрунту під трубою, тому їх поверхні вважаються недеформівними. Для діаметра трубопроводу $D_{гр}=1,22$ м висота ґрунтового масиву становитиме $H=0,82$ м; геометричні розміри траншеї $h=3,0$ м, $b_г=4,4$ м, $b_н=2,62$ м. Механічні властивості насипного ґрунту характеризуються модулем пружності $E=20$ МПа, коефіцієнтом Пуассона $\nu=0,3$

та густиною $\rho=1760$ кг/м³.

Відомо, що з технологічних причин підйом труби в процесі ущільнення є неприпустимим, тому мета розрахунку полягає перш за все в перевірці знаків вертикальних переміщень точок верхньої викривленої ділянки контуру. Розрахунок проводиться в два етапи. Впродовж першого етапу аналізуються усталені коливання пружного масиву під дією тиску на бокові поверхні, що має вигляд періодичних імпульсів, причому в межах кожного періоду тривалістю $T=0,04$ с інтенсивність тиску змінюється за законом

$$q(t) = \begin{cases} q_0 \sin(\omega t), & nT < t \leq nT + \frac{T}{2}, \\ 0, & nT + \frac{T}{2} < t \leq (n+1)T \end{cases}, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (36)$$

де $\omega = 2\pi f$, $q_0 = 0,2$ МПа.

Напівсинусоїдальний імпульс можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$q(t) = \frac{q_0}{\pi} \left[1 + \frac{\sin(\omega t)}{2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\omega t)}{4k^2 - 1} \right], \quad (37)$$

після чого задача зводиться до багаторазового розв'язання системи ГПР (20) при різних значеннях частоти коливань $k\omega$.

Слід зазначити, що на верхню криволінійну поверхню ґрунтового масиву передаються додаткові вертикальні навантаження, спричинені силами інерції, що виникають внаслідок нерівномірного вертикального руху труби. Якщо прийняти наближену модель про заміну приєднаної маси труби незв'язаними між собою точковими масами, то в кожній точці зони контакту

$$\tau_2^{\text{од.}}(\vec{y}, t) = -m_{mp} \ddot{u}_2(\vec{y}, t),$$

де $m_{mp} = \frac{q_{mp}}{\Gamma_{on}}$; q_{mp} - погонна маса труби; Γ_{on} - довжина дуги кола, вздовж якої відбувається контакт труби та ґрунтової основи.

Оскільки розв'язок задачі шукається у вигляді суми стаціонарних гармонічних станів, то в кожному такому стані

$$\tau_2^{\text{од.}}(\vec{y}, t) = -m_{mp} \omega^2 u_2^*(\vec{y}, t).$$

Таким чином, між додатковими інерційними навантаженнями і переміщеннями точок границі існує лінійна залежність. Тоді ГІР (20) набуває вигляду

$$\frac{1}{2} u_j^*(\vec{x}, \omega) - \int_{\Gamma/\Gamma_{on}} u_k^*(\vec{y}, \omega) T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y + \int_{\Gamma_{on}} u_k^*(\vec{y}, \omega) [T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) - m\omega^2 U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)] d\Gamma_y = \int_{\Gamma} \tau_k^*(\vec{y}, \omega) U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y. \quad (38)$$

Погонну масу труби знаходимо за формулою:

$$q_{mp} = \pi [t_{mp} (D_{mp} - t_{mp}) \rho_{cm} + t_{iz} (D_{mp} - t_{iz}) \rho_{iz}],$$

де $t_{mp} = 0,012$ м - товщина стінки трубопроводу; $\rho_{cm} = 7800$ кг/м³ - густина матеріалу труби; $t_{iz} = 0,03$ м - товщина ізоляційного шару; $\rho_{iz} = 1100$ кг/м³ - густина ізоляції.

З урахуванням наведених значень маємо $m_{mp} = 480$ кг/м². Крім того, демпфірування, зумовлене внутрішнім тертям в матеріалі, враховується за так званою комплексною гіпотезою, причому коефіцієнт непружного опору дорівнює 0,12.

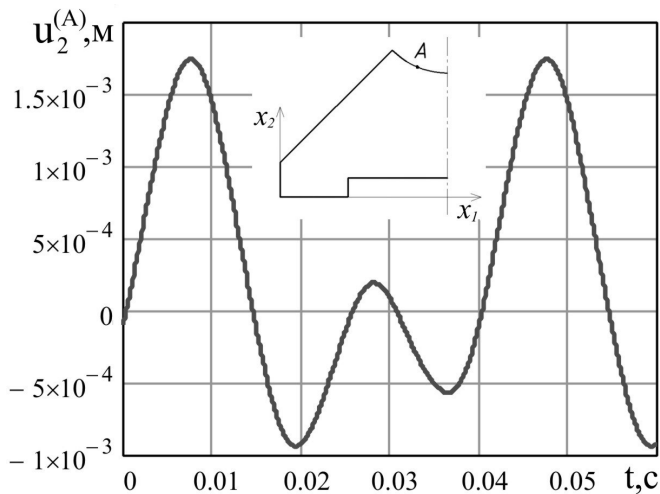


Рис. 18. Графік залежності від часу вертикального переміщення в т. А

На рис. 18 наведений графік залежності від часу вертикального переміщення в т. А на верхній викривленій ділянці контуру.

Найбільшого значення $u_2 = 1,75 \cdot 10^{-3}$ м переміщення в цій точці досягає в момент часу $t = 0,0076$ с. В той же час другий етап розрахунку показав, що від дії власної ваги ґрунту та ваги трубопроводу точка А переміщується вниз на величину $1,92 \cdot 10^{-3}$ м, що більше за значення, знайдене при динамічному розрахунку. Така сама картина

спостерігається і в інших точках на верхній ділянці контуру. Отже, вимога щодо недопущення підйому труби задовольняється.

На рис. 19 показані графіки залежності від часу напружень σ_{11} в точках на осі симетрії перерізу масиву.

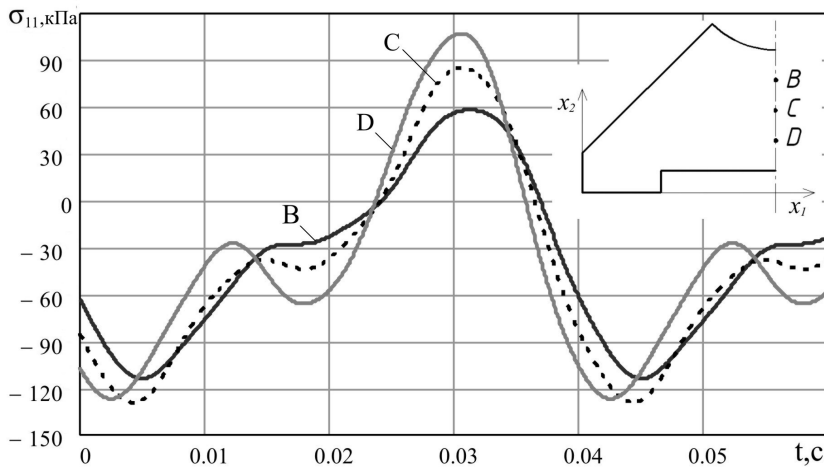


Рис. 19. Графіки залежності від часу напружень σ_{11} в точках на осі симетрії перерізу масиву

симетрії перерізу масиву. Бачимо, що найбільші значення напруження σ_{11} в усіх точках на вертикалі під центром труби спостерігаються в момент часу $t = 0,031$ с, коли

$$\sigma_{11}^{(B)} = 59,6 \text{ кПа},$$

$$\sigma_{11}^{(C)} = 86,3 \text{ кПа},$$

$$\sigma_{11}^{(D)} = 107,7 \text{ кПа}.$$

Зазначимо, що всі ці напруження є додатними,

тобто відповідають розтягу.

З іншого боку, напруження в зазначених точках, спричинені дією власної ваги ґрунту та ваги трубопроводу є від'ємними і більшими за модулем ніж при динамічному розрахунку - $\sigma_{11}^{(B)} = 117,8 \text{ кПа}$, $\sigma_{11}^{(C)} = 131,4 \text{ кПа}$, $\sigma_{11}^{(D)} = 122,5 \text{ кПа}$.

Таким чином, сумарні напруження σ_{11} в точках під трубою є стискаючими, тобто ґрунт зазнає ущільнення.

Отже, наведені результати свідчать про те, що розроблена чисельна методика може бути успішно застосована для аналізу динамічного двовимірного НДС пружних масивів складної форми.

ВИСНОВКИ

1. На основі теоретичного апарату методу потенціалу розроблені, програмно реалізовані і застосовані для розв'язання тестових, модельних та прикладних задач нові ефективні методики дослідження нестационарних двовимірних динамічних полів переміщень і напружень в пружних середовищах.

2. Основні результати проведених дисертаційних досліджень полягають у наступному:

– отримані розв'язувальні співвідношення та побудовано алгоритм дослідження з використанням методу ГЧІР нестационарних зсувних коливань масивів з отворами. На основі побудованого алгоритму розроблена і програмно реалізована методика чисельного аналізу параметрів динамічного НДС;

– розроблені і програмно реалізовані дві методики чисельного дослідження нестационарних двовимірних динамічних полів переміщень і напружень в пружних середовищах. Одна методика використовує в якості алгоритмічної основи ГЧІР, а друга використовує перехід в частотну область. Встановлена однакова ефективність обох підходів;

– запропоновано та реалізовано новий чисельно-аналітичний підхід до обчислення сингулярних складових граничних інтегралів в задачах про коливання пружних масивних об'єктів, що знаходяться в плоскому деформованому стані;

– отримані нові розв'язки задачі про взаємний вплив двох близько розташованих циліндричних отворів, границя одного з яких зазнає дії імпульсного навантаження. Досліджено залежність результатів розрахунку від відстані між отворами.

3. Достовірність отриманих результатів і ефективність розроблених методик підтверджені шляхом розв'язання широкого кола контрольних прикладів

4. Проведено дослідження динамічного НДС ґрунтового масиву під трубопроводом у процесі його ущільнення двома плоскими поверхнями, що передають на границю масиву напівсинусоїдальні імпульси. Встановлено, що в результаті прикладеного динамічного навантаження технологічні умови функціонування трубопроводу не порушуються.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

а) статті в наукових фахових виданнях України:

1. Ворона Ю.В. Граничноелементна методика дослідження динамічного НДС пружних масивів / Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко О.С. // Опір матеріалів і теорія споруд. –2014. – Вип.93. С. 27-36.
2. Ворона Ю.В. Дослідження двовимірних нестационарних коливань пружних масивів з отворами / Ворона Ю.В., Черненко О.С., Козак А.А. // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2013. – Вип.91. С. 133-146.
3. Ворона Ю.В. Двовимірний НДС пружного масиву з двома отворами при імпульсному навантаженні / Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко О.С. // Опір матеріалів і теорія споруд. –2012 – Вип.90. С. 117-123.
4. Ворона Ю.В. Дослідження за методом граничних інтегральних рівнянь усталених коливань пластин з тріщинами / Ворона Ю.В., Черненко О.С., Козак А.А. // Опір матеріалів і теорія споруд. –2012 – Вип.89. С. 158-164.
5. Ворона Ю.В. Методика чисельного дослідження антиплоских нестационарних коливань масивних елементів конструкцій / Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко О.С. // Опір матеріалів і теорія споруд –2011 – Вип.88. С. 83-96.
6. Ворона Ю.В. Коливання двовимірних масивних тіл, послаблених тріщинами нормального відриву / Ворона Ю.В., Гончаренко М.В., Черненко О.С., Козак А.А. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2011 – Вип.87 С. 131-143.

б) статті, що включені в наукових періодичних видань інших держав, та у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз:

7. Vorona Yu.V. Boundary element approaches to the problem of 2-D non-stationary elastic vibrations / Yu.V. Vorona, A.A. Kozak // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUBA, 2020. – Issue 104. – P. 321-327.

в) основні публікації по доповідям на міжнародних та вітчизняних конференціях

8. Козак А.А. Методика дослідження за методом граничних елементів динамічного напруженого стану масивів / А.А. Козак / Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА, 1–3 листопада 2011 р: тези доповідей. – в 2х частинах. – ч.1. – К.: КНУБА, 2011 С.42-43.
9. Козак А.А. Методика дослідження нестационарних коливань двовимірних елементів конструкцій / А.А. Козак / Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА, 6–8 листопада 2012 р: тези доповідей. – в 2х частинах. – ч.1. – К.: КНУБА, 2012 С.45.
10. Козак А.А. Розповсюдження пружних хвиль від циліндричного отвору при імпульсному навантаженні/ А.А. Козак / Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА, 7–8 листопада 2013 р: тези доповідей. – К.: КНУБА, 2013 С.43.
11. Ворона Ю.В. Исследование колебаний двумерных массивов с трещинами с помощью метода граничных элементов / Ю.В. Ворона, Е.С. Черненко, А.А. Козак // Математичні проблеми технічної механіки – 2012: міжнар. наук. конф., 16–19 квітня 2012 р.: матеріали конф. – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2012. – С. 111
12. Ворона Ю.В. Граничноэлементные подходы к задаче о двумерных нестационарных колебаниях упругих массивов / Ю.В. Ворона, А.А. Козак, Е.С. Черненко // Тр. VII Всероссийской (с междунар. участием) конф. по механике деформируемого твердого тела. - Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2013. Т.1. – С. 139 – 143.

АНОТАЦІЯ

Козак А.А. Чисельна реалізація методу граничних інтегральних рівнянь у задачах про нестационарні коливання пружних елементів конструкцій. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.23.17 – будівельна механіка. – Київський національний університет будівництва і архітектури Міністерства освіти і науки України, Київ, 2021.

В дисертації на основі теоретичного апарату методу потенціалу розроблені, програмно реалізовані і застосовані для розв'язання тестових, модельних та прикладних задач нові ефективні методики дослідження нестационарних двовимірних динамічних полів переміщень і напружень в пружних середовищах.

Розглянуті нестационарні зсувні коливання масивів з отворами. Отримані розв'язувальні співвідношення та побудовано алгоритм чисельного розв'язання задачі з використанням методу гранично-часових інтегральних рівнянь. На основі побудованого алгоритму розроблена і програмно реалізована методика чисельного аналізу параметрів динамічного напружено-деформованого стану. Отримано новий розв'язок задачі про нестационарні зсувні коливання простору, послабленого двома циліндричними отворами. Досліджено залежність результатів розрахунку від відстані між отворами.

Проведені дослідження нестационарних коливань масивних елементів конструкцій, які знаходяться в стані плоскої деформації. Розроблені і програмно реалізовані дві методики чисельного дослідження динамічних полів переміщень і напружень в таких об'єктах. Одна методика використовує в якості алгоритмічної основи співвідношення методу гранично-часових інтегральних рівнянь, а друга базується на переході в частотну область за допомогою розкладення навантаження в ряд Фур'є. Встановлена однакова ефективність обох підходів. Для реалізації другої методики запропоновано та реалізовано новий чисельно-аналітичний підхід до обчислення сингулярних складових граничних інтегралів в задачах про гармонічні коливання пружних масивних об'єктів, що знаходяться в плоскому деформованому стані. Підхід оснований на наближеному представленні компонент ядер інтегральних рівнянь відрізком степеневого ряду, причому перший член цього представлення має найсильнішу особливість і співпадає з відповідною компонентою статичного ядра, інтегрування якої не становить труднощів. Розв'язана задача про взаємний вплив двох близько розташованих циліндричних отворів, границя одного з яких зазнає дії імпульсного навантаження.

Розв'язана прикладна задача про динамічний напружено-деформований стан пружного масиву, на який спирається трубопровід. Масив знаходиться в стані плоскої деформації, а ділянки його поверхні зазнають дії напівсинусоїдальних імпульсів. Встановлено, що в результаті прикладеного динамічного навантаження технологічні умови функціонування трубопроводу не порушуються.

Ключові слова: нестационарні коливання, зсувні деформації, плоско-деформовані пружні масиви, гранично-часові інтегральні рівняння, сингулярність, імпульсне навантаження.

SUMMARY

Kozak A. A. Numerical implementation of boundary integral equation method in problems of nonstationary vibrations of elastic elements of structures. – Manuscript.

Dissertation for a degree of candidate of technical sciences, specialty 05.23.17 – structural mechanics. – Kyiv National University of Construction and Architecture of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2021.

New effective numerical techniques for research of nonstationary 2D dynamic fields of displacements and stresses in elastic media are developed in the dissertation on the basis of the theoretical apparatus of the potential method. After the computer implementation the techniques were applied for solving test, model and real technical problems. Nonstationary anti-plane shear vibrations of solids with holes were considered. Resolving relations are obtained and an algorithm for numerical solution of the problem using the time-dependent boundary integral equations method is constructed. On the basis of the developed algorithm the technique for the numerical analysis of dynamic stress-strain state parameters is developed and implemented in computer code. A new solution of the problem of nonstationary anti-plane shear vibrations of a continuum weakened by two cylindrical holes is obtained. The dependence of the numerical results on the distance between the holes is investigated. Studies of nonstationary vibrations of massive structural elements that are in a state of planar deformation have been carried out. Two techniques for numerical research of dynamic fields of displacements and stresses in such objects have been developed and implemented in computer codes. One technique uses as an algorithmic basis the relations of the time-dependent boundary integral equations method, and the other is based on the transition to the frequency domain by decomposing the load into a Fourier series. The same efficiency of both approaches is established. To implement the second method, a new numerical-analytical approach to the calculation of singular components of boundary integrals in problems of harmonic oscillations of elastic solids in the state of plane deformation is proposed and implemented. The approach is based on an approximate representation of the integral equations kernels components by an initial segment of the power series. The first term of this representation has the strongest singularity and coincides with the corresponding component of the static kernel, the integration of which is not difficult. The problem of mutual influence of two closely spaced cylindrical holes, the boundary of one of which is subjected to a pulse load, is solved. The applied problem of the dynamic stress-strain state of the elastic solid on which the pipeline rests is solved. The solid is in a state of plane deformation, and parts of its surface are exposed to semi-sinusoidal pulses. It is established that technological conditions of functioning of the pipeline are not broken as a result of the applied dynamic loading.

Keywords: nonstationary vibrations, anti-plane shear deformations, plane-deformed elastic solid, time-dependent boundary integral equations, singularity, impulse loading.

Козак Андрій Анатолійович

**ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ У ЗАДАЧАХ ПРО НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ
ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ**

05.23.17 – будівельна механіка

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Відповідальний за випуск
д.т.н., доцент Д. В. Михайловський

Підписано до друку 15.01.2021. Формат А5 (148x210 мм).
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура Таймс.
Авт. арк. 0,85. Обл. вид. арк. 0,9. Ум. друк. арк. 0,84.
Наклад 100 прим. Зам. 01-15/01-2021.

Віддруковано у видавництві «Каравела» з оригіналів автора,
просп. Рокосовського, 8а, м. Київ, 04201, Україна.
тел. (044) 592-39-36. E-mail: caravela@ukr.net

Свідоцтво
про внесення суб'єкта видавничої справи до
Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції:
ДК №2035 від 16.12.2004 р.