НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Васильєва Ірина Геннадіївна

УДК 531.39, 517.977, 519.217.4

СТАБІЛІЗАЦІЯ РУХУ КЕРОВАНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ВИПАДКОВИМ ВПЛИВОМ У КРИТИЧНИХ ВИПАДКАХ

01.02.01 – теоретична механіка

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Київ — 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладної математики і механіки НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико–математичних наук, професор
ЗУЄВ Олександр Леонідович,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
завідувач відділу прикладної механіки.

Офіційні опоненти:

доктор фізико–математичних наук, професор
МАЗКО Олексій Григорович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу математичних проблем механіки та теорії керування.

доктор фізико–математичних наук, доцент
СЛИНЬКО Віталій Іванович,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник відділу стійкості процесів.

Захист відбудеться "27"квітня 2021 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "25"березня 2021 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **ВАСИЛИК В. Б.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Проблема стабілізації руху неголономних механічних систем досліджується протягом декількох десятиріч. Це зумовлено передусім тим, що практичні задачі керування рухом багатьох транспортних засобів за умов кочення без ковзання описуються математичними моделями з неголономними в'язами. Крім того, відомо, що стан рівноваги неголономних механічних систем неможливо стабілізувати за допомогою неперервного керування зі зворотнім зв'язком через те, що вони не задовольняють необхідну умову стабілізовності, встановлену Р. Брокеттом[1]. Для таких систем розглянуто можливість стабілізації за допомогою розривного керування в роботах А.Астолфи (1996 р.), Ф.Кларка (2010 р.) та за допомогою керування зі зворотнім зв'язком, що залежить від часу в роботах Л.Арнольда (1983 р.), Ж.-Б. Поме (1992р.). Але ці підходи містять один суттєвий недолік: вони розглядаються для систем спеціального вигляду, а отже запропоновані у роботах керування не можуть бути застосовані до загального класу систем такого роду. Властивість стабілізовності станів рівноваги загальних нелінійних керованих систем доведено у роботах Ф. Кларка та ін.[2] та Ж.-М. Корона[3], але зазначені результати є теоремами існування, які не передбачають конструктивного визначення законів керування. Тому залишається актуальним питання розробки універсального алгоритму побудови керування для загальних класів неголономних механічних систем.

Питання стійкості руху систем відносно частини змінних (часткової стійкості) було започатковано в роботі О.М. Ляпунова (1892 р.) і систематично досліджено в роботах В.В.Румянцева, О.С. Озіранера, А.А. Мартинюка, В.І. Воротнікова, О.О. Ігнатьєва, О.Л.Зуєва, В.І. Слинька та ін. Воно виникає природним чином у прикладних задачах, коли для нормального функціонування системи необхідно забезпечити її стійкість лише відносно частини фазових змінних. Також ця задача становить інтерес для класу систем, які не є стійкими у сенсі Ляпунова, але в той же час є асимптотично стійкими відносно частини змінних.

Вагомим обґрунтуванням обраного напряму дослідження є те, що у реальному часі об'єкти знаходяться під дією різних впливів, у тому числі випадкових. Тому для моделювання поведінки тих чи інших об'єктів вкрай важливо

[1]Brockett R. W. Asymptotic stability and feedback stabilization. *Differential geometric control theory.* 1983. Vol. 27, No. 1. P. 181—191.

[2]Clarke, F. H., Ledyaev, Y. S., Sontag, E. D., Subbotin, A. I. Asymptotic controllability implies feedback stabilization.*IEEE Transactions on Automatic Control.* 1997. Vol. 42(10). P. 1394–1407.

[3]Coron J.-M. On the stabilization in the finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback law. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 1995.Vol. 33, No. 3. P.804–833.

враховувати випадкові збурення. Саме із потреб задач стабілізації систем із випадковими впливами виникла теорія стійкості рохв'язків стохастичних диференціальних рівнянь у роботах І.Я. Каца, М.М. Красовського, Г.Кушнера, Р.З. Хасьмінського та ін. У теорії випадкових процесів є багато різних динамічних моделей, які відображають ті чи інші ймовірнісні особливості досліджуваних реальних систем. У даній дисертаційній роботі розглядається класична модель - система стохастичних диференціальних рівнянь Іто. Цей напрям досліджень доповнює підхід теорії робастного керування системами з невідомими обмеженими збуреннями. Конструктивні методи розв'язання задач робастної стійкості та стабілізації руху класів лінійних і нелінійних систем за наявності інтервальних меж параметричних збурень запропоновано у роботах В.Л.Харітонова, Б.Т. Поляка, П.С. Щербакова, К. Жоу, Дж. Дойла, М. Гріна, Д. Лімебера, С. Бойда, О.Г. Мазка, та ін.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України та пов'язана з планами наукових досліджень відділу технічної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України на 2012-2014 роки та відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України на 2017-2020 роки. Здобувач приймав участь у виконанні наступних НДР:

- "Керування моделями мехатронних систем із застосуванням до задач навігації космічних апаратів і стабілізації робототехнічних комплексів", номер державної реєстрації 0112U000029;
- "Керування та аналіз нелінійної динаміки коливальних механічних систем і процесів масопереносу", номер державної реєстрації 0116U002033;
- "Задачі синтезу керування для нелінійних систем з багатомасштабною динамікою", номер державної реєстрації 0117U006052;
- "Стабілізація траєкторій динамічних систем з гібридними керуваннями та проблеми апроксимації розв'язків неавтономних граничних задач", номер державної реєстрації 0119U103214;
- "Стабілізація та планування руху неголономних систем зі збуреннями", номер державної реєстрації 0018U006265;
- "Аналітичні методи дослідження задач стійкості і керування рухом нелінійних механічних систем", номер державної реєстрації 0018U006265;

- "Аналітичні методи дослідження задач керування рухом багатомасштабних мехатронних систем", номер державної реєстрації 0120U100177.

Мета і завдання дослідження.

Об'єктом дослідження є нелінійні механічні системи із випадковими впливами.

Предметом дослідження є задачі стійкості та стабілізації руху зазначених систем.

Метою дисертаційної роботи є отримання ефективних умов асимптотичної стійкості систем нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь (у тому числі за частиною змінних) та застосування цих умов до задач стабілізації руху нелінійних керованих механічних систем.

Завдання дослідження:

- Опис граничної поведінки траєкторій для класу нелінійних диференціальних рівнянь із випадковими впливами, які мають інваріантні множини довільної вимірності. Дослідження питання стійкості таких множин для майже всіх початкових значень фазового простору та отримання достатніх умов прямування до інваріантної множини в термінах функції щільності, монотонної на фазовому потоці.

- Отримання нових достатніх умови асимптотичної стійкості відносно частини змінних тривіального розв'язку нелінійних систем диференціальних рівнянь із випадковими впливами у термінах стохастичної функції Ляпунова.

- Застосування стохастичної модифікації принципу інваріантності Ла-Салля для отримання достатніх умов асимптотичної стійкості інваріантних множин систем диференціальних рівнянь з випадковими впливами.

- Розробка нового підходу до стабілізації руху неголономних механічних систем із використанням функцій керування у вигляді суми неперервного зворотного зв'язку за станом та випадкового процесу.

- Отримання нових стратегій синтезу функцій керування для розв'язання задачі стабілізації руху афінних за керуванням систем вздовж заданої кривої.

- Розв'язання задачі асимптотичної стійкості однопараметричної сім'ї множин із застосуванням нестаціонарних функцій зворотного зв'язку.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовуються такі методи дослідження: метод функцій Ляпунова; методи теорії стохастичних диференціальних рівнянь, методи аналітичної механіки.

Наукова новизна. Усі отримані в роботі результати є новими і полягають в наступному:

- встановлено достатні умови збіжності розв'язків системи нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь до інваріантної множини за майже всіх початкових умов з фазового простору;
- для систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто доведено теорему про асимптотичну стійкість за ймовірністю відносно частини змінних із застосуванням функції Ляпунова зі знакосталою похідною;
- за допомогою стохастичної версії принципу інваріантності Ла-Салля доведено теорему про асимптотичну стійкість інваріантної множини для системи нелінійних диференціальних рівнянь із випадковими впливами;
- досліджено проблеми часткової стабілізації руху твердого тіла навколо його центру мас під дією реактивних моментів та твердого тіла, що містить пару симетричних маховиків. Відмінною особливістю розглянутих систем є наявність випадкових впливів при керуванні. У явному вигляді побудовані керування, що дозволяють забезпечити асимптотичну стійкість руху досліджуваних систем відносно частини змінних;
- запропоновано конструктивний алгоритм побудови керування із використанням $y-$ стохастичної функції Ляпунова, який застосовано до нелінійних систем із стохастичними впливами, що описують динаміку перевернутого маятника з рухомою масою та колісного візка із додатковим ступенем волі;
- одержано нові стратегії керування, що дозволяють розв'язати задачу стабілізації руху класу афінних за керуванням систем вздовж заданої траєкторії. Отримано достатні умови стійкості траєкторій зазначених систем відносно частини змінних в термінах стійкості сім'ї множин.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має насамперед теоретичний характер. Результати дисертаційної роботи розвивають теорію нелінійних керованих систем із випадковими впливами. Проте, алгоритми, отримані у роботі, в перспективі можуть мати практичне застосування в системах комп'ютерного керування рухом робототехнічних систем для прикладних задач у різноманітних галузях промисловості.

Особистий внесок здобувача. Усі положення дисертації, що виносяться на захист, одержані здобувачем особисто. Науковому керівнику, професору О.Л. Зуєву, належать постановки задач та обговорення результатів, здобувачеві належать доведення всіх теорем та дослідження механічних прикладів, а також комп'ютерне моделювання руху всіх розглянутих систем.

Апробація результатів. Результати роботи доповідались на таких конференціях:

- другій Міжнародній конференції "Differential Equation and Control Theory", Świnoujście, Poland, 27-30 вересня 2017 р.;
- міжнародній конференції "International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPhA 2017)", Черкаси, Україна, 17-19 жовтня 2017 р.;
- Міжнародній конференції "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация", присвяченій 100-річчю зі дня народження академіка Е.О. Барбашина, Мінськ, Білорусь, 24-29 вересня 2018 р.;
- четвертій міжнародній конференції "Differential Equation and Control Theory", Kołobrzeg, Poland, 23-26 вересня 2019 р.;
- міжнародній конференції молодих математиків, Київ, Україна, 6-8 червня 2019 р.;
- міжнародній конференції "Dynamical System Modeling and Stability Investigation", Київ, Україна, 24-29 травня 2019 р;

та на семінарах:

- семінарі відділу прикладної та технічної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Донецьк, 2012-2014;
- семінарі відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ, 2018, 2020;
- семінарі відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України, Київ, 2019;
- семінарі Інституту математики Альпійсько-Адріатичного Університету, м. Клагенфурт, Австрія, 2020;
- семінарі Інституту динаміки складних технічних систем ім. Макса Планка, м. Магдебург, Німеччина, 2020;

- семінарі молодих вчених Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ, 2020;
- спільному семінарі з математичних проблем механіки та обчислювальної математики за участю відділу випадкових процесів Інституту математики НАН України, Київ, 2021.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 10 роботах, з яких 1 наукова стаття [3a.] у міжнародному фаховому виданні, що входить до наукометричної бази Scopus та належить до видань другого квартиля (Q 2), 3 статті [1a.,2a.,4a.] у наукових фахових виданнях України та 6 робіт [5a.-10a.] у збірниках тез міжнародних конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, 6 розділів, висновків, списку використаних джерел (що містить 100 найменувань) та додатку. Повний обсяг роботи становить 126 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** визначено об'єкт і предмет дослідження, обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовану мету і завдання дослідження, його наукову новизну, теоретичне і практичне значення, прокоментовано апробацію, описано структуру дисертаційної роботи.

У **розділі 1** дисертаційної роботи викладено огляд літератури за темою дослідження.

Розділ 2 містить методику дослідження, а саме основні означення, теореми та теоретичні відомості з теорії стохастичних диференціальних рівнянь та теорії стійкості руху механічних систем, які пов'язані з дисертаційною роботою.

Виклад *основних результатів* дисертації починається з **розділу 3**, в якому вивчається питання збіжності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь Іто до інваріантної множини за майже всіх початкових умов.

Розглядається система стохастичних диференціальних рівнянь Іто:

$$dx = f_0(x)dt + \sum_{k=1}^{m} f_k(x)dW^k(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n-$ функції класу C^2, що задовольняють умову Ліпшиця на кожному компакті $K \subset \mathbb{R}^n$, $k = 0, ..., m$ та умову лінійного зростання, $W(t) = (W^1(t), ..., W^m(t))-$ стандартний m- вимірний вінерівський процес.

Використовуються наступні позначення:

- $x(t; x_0, s)$– розв'язок рівняння (1), визначений для $t \geq s$, що задовольняє початкову умову $x(s; x_0, s) = x_0$;
- $\rho(b, M)$– евклідова відстань від точки $b \in \mathbb{R}^n$ до множини $M \subset \mathbb{R}^n$, що визначається стандартним чином: $\rho(b, M) = \inf_{x \in M} \|x - b\|$;
- $B_\varepsilon(M) = \{x \in \mathbb{R}^n | \rho(x, M) < \varepsilon\}$– ε– окіл множини M, $\varepsilon > 0$.

Також із системою (1) пов'язано диференціальний оператор $\mathcal{L}^*$, дію якого на функцію $g \in C^2$ визначено наступним чином:

$$\mathcal{L}^* g = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(f_k^i(x) f_k^j(x) g(x) \right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f_0^i(x) g(x) \right). \tag{2}$$

Нагадаємо, що множину $M \subset \mathbb{R}^n$ називають інваріантною для системи (1), якщо для всіх $b \in M, s \in \mathbb{R}$ виконується властивість $x(t; b, s) \in M$ майже напевно для $t \geq s$.

Наступна лема дозволяє оцінити залежність відхилення розв'язків системи (1) від інваріантної множини через відхилення відповідних початкових умов розв'язків.

Лема 3.1 *Розглянемо систему* (1)*. Припустимо, що* M– *компактна множина та функції* $f_j(x), j = \overline{0, m}$ *задовольняють умові лінійного зростання:* $||f_0(x)||^2 + \sum\limits_{k=1}^{m} ||f_k(x)||^2 \leq L(1 + ||x||^2)$*. Тоді існує така функція* $\alpha \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $\alpha(0) = 0$, *що для всіх* $t \in [s, s+1]$ *справедлива наступна оцінка:*

$$E\rho(x(t; x_0, s), M) \leq \alpha(\rho(x_0, M)).$$

Для детермінованих систем підхід до дослідження множини притягальних точок у термінах функції щільності міри було запропоновано в роботі А. Рантцера[4], В.В. Грушковською та О.Л. Зуєвим[5] узагальнено цей результат при послаблених вимогах на міру та відповідну функцію щільності.

Для систем із випадковими впливами, коли стан системи не може бути передбачено із ймовірністю 1, питання притягання траєкторій системи також становить великий інтерес.

Основним результатом розділу 3 є достатні умови збіжності розв'язків системи нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь до інваріантної множини для майже всіх початкових умов фазового простору в термінах функції

[4]Rantzer A. A dual to Lyapunov's stability theorem. Systems and Control Letters. 2001. Vol. 42, No. 3. P. 161-–168.

[5]Grushkovskaya V., Zuyev A. Attractors of nonlinear dynamical systems with a weakly monotone measure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 422. P. 559–570.

щільності міри, яка є монотонною на потоці. Ці умови, що розповсюджують результат Р. Ван Ханделя[6] на випадок інваріантної множини M.

Теорема 3.1 *Розглянемо* $M \subset \mathbb{R}^n-$ *інваріантну множину для* (1) *і функцію з невід'ємними значеннями* $D \in C^2(\mathbb{R}^n \backslash M)$.

Нехай виконано усі умови Леми 3.1. Крім того припустимо виконання наступних умов:

1. $D \in L^1(\mathbb{R}^n \backslash B_\varepsilon(M))$ *для всіх* $\varepsilon > 0$*;*

2. $\mathcal{L}^* D < 0$ *для майже всіх* $x \in \mathbb{R}^n \backslash M$*;*

Тоді для довільного $s \geq 0$ *і для* $\mu-$ *майже кожного* $b \in \mathbb{R}^n$ *виконується наступна властивість*

$$\rho(x(t; b, s), M) \to 0$$

при $t \to \infty$ *майже напевно.*

У **розділі 4** досліджуються питання стійкості інваріантних множин для нелінійних механічних систем із випадковими впливами в термінах функцій Ляпунова.

Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь Іто у вигляді:

$$dx(t) = f(x)dt + \sigma(x)dW(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

де $x \in \mathbb{R}^n-$ вектор стану системи, функції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ та $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times k}$ задовольняють умову Ліпшиця на кожній компактній множині $K \subset \mathbb{R}^n$.

При цьому $x = (x_1, ..., x_n)^T$ та $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))^T-$ це вектори стовпці, а $\sigma(x)-$ це матриця розміру $n \times k$.

Система (3) містить k-мірний вінерівський процес $W(t)$, компоненти якого $w_j(t)$ $(j = 1, 2, ..., k)$ є незалежними стандартними одномірними вінерівськими процесами.

Надалі будемо припускати, що для кожних $x_0 \in \mathbb{R}^n$ та $s \in \mathbb{R}$ існує єдиний строго марківський процес $x(t; x_0, s)$, який є розв'язком системи (3) при $t \geq s$ і задовольняє початкову умову $x(s; x_0, s) = x_0$.

Оскільки у загальному випадку права частина системи (3) може не задовольняти умову лінійного зростання, то глобальне існування розв'язку буде встановлено за допомогою теореми 4.1 Р.З. Хасьминського[7](с. 113).

Надалі вектор стану системи (3) розглядається у двокомпонентному вигляді $x = (y^T, z^T)^T$, де $y = (y_1, ..., y_m)^T \in \mathbb{R}^m$ та $z = (z_1, ..., z_p)^T \in \mathbb{R}^p$, $m + p = n$.

[6] Van Handel R. Almost global stochastic stability. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 2006. Vol. 45, No. 4. P. 1297–1313.

[7] Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Москва: Наука, 1969. 367 с.

Із системою (3) пов'язано наступний диференціальний оператор

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{4}$$

де $[a_{ij}] = \sigma \sigma^T$.

Множина $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, y = 0\}$ називається:

- стійкою за ймовірністю, якщо для будь-яких $s \geq 0$, $\epsilon_1 > 0$ та $\epsilon_2 > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що наступна нерівність виконується за будь-яких початкових умов $x_0 \in \mathbb{R}^n$ при $||y_0|| < \delta$:

$$P\{\sup_{t \geq s} ||y(t; x_0, s)|| > \epsilon_1\} < \epsilon_2. \tag{5}$$

- асимптотично стійкою за ймовірністю, якщо вона є стійкою за ймовірністю і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$P\{\lim_{t \to +\infty} ||y(t; y_0, s)|| = 0\} > 1 - \varepsilon, \tag{6}$$

для всіх $x_0 \in \mathbb{R}^n$ таких, що $\|y_0\| < \Delta$.

Для дослідження стійкості інваріантних множин розглядаються наступні класи функцій:

- клас двічі неперервно диференційованих функцій $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ = [0; +\infty)$, $V(0) = 0$;
- клас неперервних функцій $\mathcal{K}$, який складається з усіх неперервних строго зростаючих функцій
- клас $\mathcal{K}^* = \{\alpha \in \mathcal{K} | \alpha : R^+ \to R^+, \alpha(0) = 0, \alpha(s) \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty\}$.

Наступна лема є допоміжним результатом, що дозволяє встановити достатні умови стохастичної обмеженості розв'язків системи (3) відносно частини змінних і розповсюджує теорему 39.1 з монографії В.В.Румянцева та О.С.Озіранера (1987 р.) на клас стохастичних диференціальних рівнянь.

Лема 4.1 *Розв'язки системи* (3) *є* $y-$ *стохастично обмеженими, якщо існує така двічі неперервно диференційована функція* $V(x)$, *що* $V(x) \geq \alpha(\|y\|)$, $\alpha \in \mathcal{K}^*$ *та* $\mathcal{L}V(x) \leq 0$.

Одним з основних результатів цього розділу є достатні умови асимптотичної стійкості за ймовірністю інваріантної множини вигляду $\{x \in \mathbb{R}^n | y = 0\}$ для системи (3), які викладено в теоремі 4.1.

Теорема 4.1 *Припустимо, що множина $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, y = 0\}$ є інваріантною множиною системи* (3) *і функції $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$, $W \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$ задовольняють наступні властивості:*

1. $\alpha_1(\|y\|) \le V(x) \le \alpha_2(\|y\|)$ *з* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}^*$*;*
2. $\alpha(\|z\|) \le W(x)$ *з* $\alpha \in \mathcal{K}^*$;
3. $\mathcal{L}V(x) \le 0$*;*
4. $\mathcal{L}W(x) \le 0$*;*
5. *множина* $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathcal{L}V(x) = 0\} \backslash M$ *не містить цілих траєкторій системи* (3) *майже напевно.*

Тоді множина $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, y = 0\}$ є асимптотично стійкою за ймовірністю для системи (3).

Не менш важливим завданням є дослідження керованої системи нелінійних диференціальних рівнянь із випадковими впливами і отримання конструктивного алгоритму побудови керування, що дозволить асимптотично стабілізувати інваріантну множину відповідної замкненої системи.

Для цього розглянемо керовану систему:

$$dx(t) = (f(x) + g(x)u)dt + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(x) dW_i(t), \tag{7}$$

де $u = (u_1, ..., u_k)^T \in U = \mathbb{R}^k-$ керування.

Задамо диференціальний оператор $\mathcal{L}_u$:

$$\mathcal{L}_u = \sum_{i=1}^{n} (f(x) + g(x)u)_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$[c_{ij}(x)] = \sigma(x)\sigma^T(x).$$

Для відображення $h : D \to U$, $h(0, z) = 0$, запишемо замкнену для (7) систему зі зворотнім зв'язком $u = h(x)$:

$$dx(t) = (f(x) + g(x)h(x))dt + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(x) dW_i(t). \tag{8}$$

Також задамо функції:

$$a(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x) \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i \partial x_j},$$
$$b_i(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{ji}(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x_j}, \qquad (9)$$
$$b(x) = (b_1(x), ..., b_k(x)).$$

У наступній теоремі пропонується конструктивний спосіб побудови керування, яке забезпечує асимптотичну стійкість множини $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, y = 0\}$ відповідної замкненої системи (8)

Теорема 4.2 *Припустимо:*

1. *існує така функція $V \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$, що $\alpha_1(\|y\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|y\|)$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ з $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}^*$;*
2. *Рівняння $a(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i^0 b_i(x) = 0$ має локально ліпшицев розв'язок $u_i^0 = u_i^0(x)$, для якого множина $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | b(x) = 0, y \neq 0\}$ не містить цілих траєкторій системи (7) з керуванням $u = u^0(x)$ майже напевно. Функції $a(x), b_i(x)$ задаються формулами (9);*
3. *Існує функція $W \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$ та ліпшицева функція $q(x) \geq 0$ такі, що $W(x) \geq \alpha(\|z\|)$, $\alpha \in K^*$, та $\mathcal{L}_{u^0_{(x)} - qb(x)} W(x) \leq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$;*
4. *Множина M є інваріантною для системи (7),(10).*

Тоді зворотній зв'язок

$$u_i = u_i^0 - q(x) b_i(x), \quad i = 1, ...k, \qquad (10)$$

забезпечує асимптотичну стійкість за ймовірністю множини $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, y = 0\}$ для системи (7).

У розділах 4.3, 4.4 наведені вище теореми застосовано до стабілізації обертального руху систем твердих тіл. Відмінною особливістю розглянутих систем є наявність випадкових впливів при керуванні. Стан рівноваги цих систем неможливо стабілізувати у класичному сенсі відносно усіх фазових змінних.

У розділі 4.3 розглянуто проблему стабілізації руху твердого тіла навколо його центру мас під дією моментів сил керування, що реалізується реактивними двигунами орієнтації.

Рівняння руху записано у наступному вигляді:

$$
\begin{aligned}
d\omega_1 &= (\tfrac{A_2-A_3}{A_1}\omega_2\omega_3 + u_1)dt + \omega_1\sigma dW(t),\\
d\omega_2 &= (\tfrac{A_3-A_1}{A_2}\omega_1\omega_3 + u_2)dt + \omega_2\sigma dW(t),\\
d\omega_3 &= \tfrac{A_1-A_2}{A_3}\omega_1\omega_2 dt,
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
d\nu_1 &= (\omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3)dt,\\
d\nu_2 &= (\omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1)dt,\\
d\nu_3 &= (\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2)dt.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Тут $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$– проекції вектора кутової швидкості ω на відповідні головні осі інерції тіла, (ν_1, ν_2, ν_3)– проекції нерухомого орта ν на відповідні головні осі інерції тіла, (A_1, A_2, A_3)– головні центральні моменти інерції тіла, а (u_1, u_2)– керуючі впливи.

Слід зазначити, що динамічні рівняння Ейлера (11) з вінеровськими процесами використовуються для моделювання руху супутника з атмосферними збуреннями на орбітах з висотою до 600 км[8].

До системи (11) застосовано теореми 4.1 та 4.2 із використанням функції Ляпунова $V = \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2) + \frac{k}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2)$. Надалі будемо вважати всі фазові змінні і механічні параметри безрозмірними та оберемо $k = 1$.

У результаті одержано керування зі зворотнім зв'язком:

$$
\begin{aligned}
u_1 = \omega_2\omega_3 - \frac{1}{A_1}\nu_2\nu_3 - \Big\{\frac{|A_1-A_2|}{2A_1}|\omega_3| + A_1\left(\left|\frac{A_1-A_2}{2A_1A_2}\omega_3\right| + \varepsilon\right) +\\
+\frac{1}{2}\sigma\sigma^T\Big\}\omega_1,\\
u_2 = -\omega_1\omega_3 + \frac{1}{A_2}\nu_1\nu_3 - \Big\{\frac{|A_1-A_2|}{2A_2}|\omega_3| + A_2\left(\left|\frac{A_1-A_2}{2A_1A_2}\omega_3\right| + \varepsilon\right) +\\
+\frac{1}{2}\sigma\sigma^T\Big\}\omega_2,
\end{aligned} \tag{13}
$$

де ε– додатний параметр.

Доведено, що запропоноване керування забезпечує асимптотичну стійкість інваріантної множини

$$M = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3) : \nu_1 = \nu_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0\}$$

системи (11), (13) за ймовірністю.

Розділ 4.4 присвячено проблемі одноосьової стабілізації моделі супутника за допомогою двох маховиків.

[8] Rajpurohit T., Haddad W. M. Partial-state stabilization and optimal feedback control for stochastic dynamical systems *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control.* 2017. Vol. 139. – No. 9.

Рівняння руху системи мають вигляд:

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= \left(\tfrac{A_2-A_3}{A_1-I_1}\omega_2\omega_3 + \tfrac{I_2\Omega_2}{A_1-I_1}\omega_3 - \tfrac{1}{A_1-I_1}u_1\right)dt + \omega_1 s dW(t),\\
d\omega_2 &= \left(\tfrac{A_3-A_1}{A_2-I_2}\omega_1\omega_3 - \tfrac{I_1\Omega_1}{A_2-I_2}\omega_3 - \tfrac{1}{A_2-I_2}u_2\right)dt + \omega_2 s dW(t),\\
d\omega_3 &= \left(\tfrac{A_1-A_2}{A_3}\omega_1\omega_2 + \tfrac{I_1\Omega_1}{A_3}\omega_2 - \tfrac{I_2\Omega_2}{A_3}\omega_1\right)dt,\\
d\Omega_1 &= \left(\tfrac{A_1}{I_1(A_1-I_1)}u_1 - \tfrac{A_2-A_3}{A_1-I_1}\omega_2\omega_3 - \tfrac{I_2\Omega_2}{A_1-I_1}\omega_3\right)dt - \omega_1 s dW(t),\\
d\Omega_2 &= \left(\tfrac{A_2}{I_2(A_2-I_2)}u_2 - \tfrac{A_3-A_1}{A_2-I_2}\omega_1\omega_3 + \tfrac{I_1\Omega_1}{A_2-I_2}\omega_3\right)dt - \omega_2 s dW(t),\\
d\nu_1 &= (\omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3)dt,\\
d\nu_2 &= (\omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1)dt,\\
d\nu_3 &= (\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2)dt,
\end{aligned} \tag{14}$$

де ω_i– координати вектора кутової швидкості тіла-носія в головній системі координат, Ω_1, Ω_2– відносні кутові швидкості першого і другого маховиків, відповідно, A_1, A_2, A_3– головні моменти інерції усієї системи, що складається з тіла-носія і маховиків, I_1, I_2– моменти інерції першого і другого маховиків, відповідно, та u_1, u_2– моменти сил керування, що застосовано до першого та другого маховиків, відповідно.

Для системи (14) розв'язано проблему асимптотичної стабілізації інваріантної множини $M = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \Omega_1, \Omega_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3) : \nu_1 = \nu_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0\}$ за ймовірністю.

При цьому в явному вигляді побудовано керування зі зворотним зв'язком:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \nu_2\nu_3 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)\omega_3 + \omega_1\Big(h + \frac{1}{2}\sigma\sigma^T(A_1 - I_1) + \frac{|A_1 - A_2|}{2}|\omega_3|\Big),\\
u_2 &= -\nu_1\nu_3 - (A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)\omega_3 + \omega_2\Big(h + \frac{1}{2}\sigma\sigma^T(A_2 - I_2) + \frac{|A_1 - A_2|}{2}|\omega_3|\Big),
\end{aligned} \tag{15}$$

де $h > 0$.

Результати стабілізації руху розглянутих механічних систем проілюстровано за допомогою чисельного моделювання.

У **розділі 5** досліджено задачу стабілізації руху нелінійних механічних систем із використанням рандомізованого керування.

Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь в детермінованому випадку:

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{16}$$

де $x = (x_1, ..., x_n)^T \in D = \mathbb{R}^n$– вектор стану, а $u = (u_1, ..., u_k)^T \in U = \mathbb{R}^k$– керування.

Багато з таких систем неможливо стабілізувати за допомогою неперервного керування зі зворотнім зв'язком, оскільки вони не задовольняють необхідну умову стабілізовності Брокетта.

Найбільш відомим прикладом системи такого роду є інтегратор Брокетта:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u_1, \\ \dot{x_2} = u_2 \\ \dot{x_3} = x_2 u_1 - x_1 u_2. \end{cases} \tag{17}$$

Для стабілізації (17) в роботах Е.М.Блоха, С.В.Дракунова (1996 р.), А.Астолфі (1998 р.) було запропоновано використання розривного керування, в монографії О.Л.Зуєва зі співавторами (2013 р.) показано, що інтегратор Броккетта можливо стабілізувати в класі імпульсних керувань.

У роботах Й.Нішімури[9] для дослідження стабілізації (17) використано неперервне керування із додаванням випадкового процесу.

Розглянемо систему

$$dx(t) = f(x)dt + g(x)udt, \tag{18}$$

та керування u у вигляді суми детермінованої і стохастичної компонент: $u_i = h_i + \sigma_i(x)W_i(t)$, де $h : D \to U$, $h(0) = 0$, $W_i(t)-$ стандартний одновимірний вінерівський процес. Тоді система (18) набуває вигляду

$$dx(t) = (f(x) + g(x)h(x))dt + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(x) dW_i(t). \tag{19}$$

Будемо казати, що функція $V \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$:

- називається $y-$ стохастичною функцією Ляпунова (y-СФЛ)для системи (19), якщо існують $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathcal{K}^*$ такі, що
$$\beta_1(||y||) \le V(x) \le \beta_2(||y||), \quad \inf_{u \in U} \mathcal{L}_u V(x) \le -\alpha(||y||) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$
- задовольняє властивість малості керування відносно y якщо для кожного $\epsilon > 0$ та $x_0 \in M = \{x | y = 0\}$ існує $\delta > 0$ таке, що
$$x \in B(x_0; \delta) \Rightarrow \inf_{||u|| < \epsilon} \mathcal{L}_u V(x) \le -\alpha(||y||).$$

Основним результатом розділу є наступна теорема, яка узагальнює конструктивне доведення теореми Арцтейна[10,11] на задачу часткової стабілізації стохастичних систем.

[9] Nishimura Y. Stabilization by artifical Wiener processes. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2016. Vol. 61. P. 3574—3579.
[10] Arstein Z. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis.* 1983. Vol. 7, No. 11. P. 1163-–1173.
[11] Florchinger P. Lyapunov-like techniques for stochastic stability. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 1995. Vol. 33, No. 4. P. 1151-–1169.

Теорема 5.1 *Нехай $V \in C^2(\mathcal{D}; \mathbb{R})$ є y-стохастичною функцією Ляпунова, що задовольняє властивість малості керування.*

Тоді існує неперервне керування зі зворотнім зв'язком $h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^k$, $h(0, z) = 0$, таке, що тривіальний розв'язок відповідної замкненої системи (19) з $u = h(x)$ є y-асимптотично стійким за ймовірністю.

Керування $h(x)$ задається наступним чином:

$$h_i(x) = \begin{cases} 0, & b = 0, \\ -\frac{b_i}{\|b\|^2}(a + (a^2 + \|b\|^4)^{\frac{1}{2}}), & b \neq 0, 2(a^2 + \|b\|^4)^{\frac{1}{2}} \geq \alpha(\|y\|), \\ -\frac{b_i}{2\|b\|^2}(2a + \alpha(\|y\|)), & \textit{в іншому випадку}, \end{cases} \tag{20}$$

де

$$\begin{gathered} a(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x) \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \\ b_i(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{ji}(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x_j}, \\ b(x) = (b_1(x), ..., b_k(x)). \end{gathered} \tag{21}$$

Підрозділи 5.2 - 5.4 присвячено застосуванню запропонованого методу побудови керування до нелінійних механічних систем із випадковими впливами, що описують рух перевернутого маятника, колісного візка з рухомою масою та балансуючого робота.

Розділ 6 дисертації присвячено проблемі часткової стабілізації нелінійних систем вздовж заданої траєкторії. У цьому розділі досліджується клас нелінійних систем вигляду

$$\dot{x}(t) = f_0(t, x) + \sum_{k=1}^{m} f_k(x) u_k, \tag{22}$$

де $x = (x_1, ..., x_n)^T \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ вектор стану, $u = (u_1, ..., u_m)^T \in \mathbb{R}^m$ керування, $f_i \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $m < n$.

Для дослідження асимптотичної поведінки траєкторій системи (22) використовуються означення:

- π_ε**– розв'язків**

  Нехай задано функцію $y^* : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n_1}$ та керування зі зворотнім зв'язком $u^\varepsilon(t, x, y^*) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, що залежить від параметра $\varepsilon > 0$.

  Тоді π_ε– розв'язком системи (22) з початковими умовами $x_0 \in \mathbb{R}^n$ та керуванням $u = u^\varepsilon(t, x, y^*)$ називається така абсолютно неперервна функція $x(t) \in \mathbb{R}^n$, визначена при $t \in [0, +\infty)$, що $x(0) = x^0$ та

$$\dot{x}(t) = f_0(t, x) + \sum_{k=1}^{m} u_k^{\varepsilon}(t, x(t_j), y^*(t_j)) f_k(x(t)), \quad t \in [j\varepsilon, (j+1)\varepsilon]. \quad (23)$$

для кожного $j = 0, 1, 2, ...$

- **стійкості сімейства множин**

  Однопараметричне сімейство непорожніх множин $\{Y_t\}_{t \geq 0}$, $Y_t \subset \mathbb{R}^n$, називається асимптотично стійким для системи (22) зі зворотним зв'язком $u^{\varepsilon}(t; x, y^*)$, якщо виконуються наступні умови:

  1) для кожного $\Delta > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при кожному $t_0 \geq 0$ та $x^0 \in B_{\delta}(Y_{t_0})$ однозначно визначено відповідний π_{ε} розв'язок $x(t)$, що задовольняє початкову умову $x(t_0) = x^0$, $t \geq t_0$ та $x(t) \in B_{\Delta}(Y_t)$ для всіх $t \in [t_0; +\infty)$;
  2) для деякого $\delta > 0$ і для кожного $\Delta > 0$ існує таке $t_1 \geq 0$, що при кожному $t_0 \geq 0$ та $x^0 \in B_{\delta}(t_0)$, відповідний π_{ε} розв'язок $x(t)$ з початковою умовою $x(t_0) = x^0$ задовольняє наступну властивіть: $x(t) \in B_{\Delta}(Y_t)$ для всіх $t \in [t_0 + t_1, \infty)$.

Оскільки в цьому розділі розглядається задача часткової стабілізації, перепишемо систему (22) наступним чином:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= g_0(t, x) + \sum_{k=1}^{m} g_k(x) u_k, \\ \dot{z}(t) &= h_0(t, x) + \sum_{k=1}^{m} h_k(x) u_k, \end{aligned} \quad (24)$$

де функції $g_0 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_1}$, $h_0 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_2}$, $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_1}$, $h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_2}$, $k = \overline{1, m}$ такі, що векторні поля відповідної системи (22) мають вигляд:

$$f_0(x) = \begin{pmatrix} g_0(t, x) \\ h_0(t, x) \end{pmatrix}, \quad f_k(x) = \begin{pmatrix} g_k(x) \\ h_k(x) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Припустимо, що задано довільну криву $y^* \in C(\mathbb{R}^+; D_y)$, $D_y \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ та $p > 0$. Позначимо:

$$Y_t^p = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n | ||y^*(t) - y|| < p, z \in \mathbb{R}^{n_2} \right\}_{t \geq 0}. \quad (25)$$

Основний результат цього розділу полягає в побудові такого керування $u^{\varepsilon}(t, x, y^*)$, що сімейство множин $\{Y_t^p\}_{t \geq 0}$ є асимптотично стійким для замкненої системи (24) з $u = u^{\varepsilon}(t, x, y^*)$. Перш ніж сформулювати відповідну теорему, слід навести припущення, що вводяться щодо векторних полів системи (24) та кривої $y^*(t)$.

Припущення. Нехай $D-$ множина вигляду $D = D_y \times \mathbb{R}^{n_2}$. Припускаємо, що

1.1) Функції $f_0(t,x)$, $f_k(x)$, $(k = \overline{1,m})$ є неперервними при $t \geq 0$, $x \in D$. Крім того, $g_0 \in C^1(\mathbb{R}^+ \times D; \mathbb{R}^{n_1})$, $g_k \in C^2(D; \mathbb{R}^{n_1})$, $h_k \in C^1(D; \mathbb{R}^{n_1})$.

1.2) Для всіх $x \in D$ виконується наступна рангова умова керованості за змінними y:
$$\operatorname{span}\left\{(g_i(x))_{i\in S_1}, (I_{n_1\times n}[f_{i_1}, f_{i_2}])_{(i_1,i_2)\in S_2}\right\} = \mathbb{R}^{n_1}, \tag{26}$$
де $[f_{i_1}, f_{i_2}]-$ дужка Лі, $S_1 \subseteq \{1,2,...,m\}$,$S_2 \subseteq \{1,2,...,m\}^2$.

1.3) Функція $y^* : \mathbb{R}^+ \to D_y$ є ліпшицевою в $\mathbb{R}^+$.

Крім того, для кожної компактної множини $\tilde{D}_y \subset D_y$ і для всіх $k_1, k_2 \in \overline{1,m}$,

- функції f_{k_1}, $L_{f_{k_2}} g_{k_1}$, $L_{f_{k_3}} L_{f_{k_2}} f_{k_1}$ є обмеженими в $\tilde{D} = \tilde{D}_y \times \mathbb{R}^{n_2}$;
- функції f_{k_1} задовольняють умову Ліпшиця в $\tilde{D}$;
- функції f_0, $L_{f_0} g_0$, $L_{f_{k_1}} g_0$, $L_{f_0} g_{k_1}$, $L_{f_0} L_{f_{k_2}} g_{k_1}$ та $\frac{\partial g_0}{\partial t}$ є обмеженими рівномірно по t в $\tilde{D}$;
- функція f_0 задовольняють умову Ліпшиця відносно x рівномірно по t в $\tilde{D}$.

Тоді має місце наступний результат.

Теорема 6.1 *Нехай задано систему* (24) *та криву* $y^* \in C(\mathbb{R}^+; D_y)$. *Припустимо, що виконано 1.1)-1.3), і нехай* $p, \delta > 0-$ *такі константи, що* $B_\delta(Y_t^p) \subset D$ *для всіх* $t \geq 0$. *Множини* $\{Y_t^p\}_{t-ge0}$ *визначено в* (25).

Тоді існує таке $\overline{\varepsilon} > 0$, *що для кожного* $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$ *сім'я множин* $\{Y_t^p\}_{t\geq 0}$ *з* (25) *є асимптотично стійкою для системи* (24) *з керуванням* $u_k = u_k^\varepsilon(t,x,y^*)$.

$$u_k^\varepsilon(t,x,y^*) = \sum_{i\in S_1} \phi_i^k(t,x,y^*) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{(i_1,i_2)\in S_2} \phi_{i_1,i_2}^k(t,x,y^*), \quad k = \overline{1,m}, \tag{27}$$

де

$$\phi_i^k(t,x,y^*) = \delta_{ki} a_i(x,y^*),$$
$$\phi_{i_1,i_2}^k(t,x,y^*) = 2\sqrt{\pi\kappa_{i_1 i_2}|a_{i_1 i_2}(x,y^*)|}\left(\delta_{ki_1}\cos\left(\frac{2\pi\kappa_{i_1 i_2} t}{\varepsilon}\right.\right.$$

$$+\delta_{ki_2}\mathrm{sign}(a_{i_1i_2}(x,y^*))\sin\left(\frac{2\pi\kappa_{i_1i_2}t}{\varepsilon}\right)\Bigg),$$

числа $\kappa_{i_1i_2} \in \mathbb{N}$ *є попарно різними,* $\delta_{ij}-$ *символ Кронекера та* $\left((a_i(x,y^*))_{i\in S_1},(a_{i_1i_2}(x,y^*))_{(i_1i_2)\in S_2}\right)^T = a(x,y^*)$,

$$a(x,y^*) = -\alpha\mathcal{F}^{-1}(x)(y-y^*),\quad \alpha>0,$$

$$\mathcal{F}(x) = \left((g_i(x))_{i\in S_1},(I_{n_1\times n}[f_{i_1},f_{i_2}])_{(i_1i_2)\in S_2}\right).$$

У підрозділі 6.2 продемонстровано застосування отриманого результату до задачі стабілізації математичної моделі руху підводного апарату вздовж заданої кривої.

ВИСНОВКИ

Одержані в дисертаційній роботі результати є новими і полягають у наступному.

1. Розглянуто клас систем нелінійних диференційних рівнянь із випадковими впливами, які мають інваріантні множини довільної вимірності. Досліджено питання про стійкість таких множин за майже всіх початкових умов з фазового простору. Отримано достатні умови збіжності траєкторій системи нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь до інваріантної множини. При дослідженні асимптотичної поведінки розв'язків системи використана функція щільності міри, яка є монотонною на потоці.

2. Стохастичну модифікацію принципу інваріантності Ла-Салля застосовано для отримання достатніх умов асимптотичної стійкості інваріантних множин систем диференціальних рівнянь із випадковими впливами. Запропоновано конструктивний алгоритм побудови керування для стабілізації інваріантних множин зазначених систем із застосуванням функції Ляпунова зі знакосталою похідною.

3. Досліджено проблеми часткової стабілізації руху твердого тіла навколо його центру мас під дією реактивних крутних моментів та руху твердого тіла, що містить пару симетричних маховиків. Відмінною особливістю розглянутих систем є наявність випадкових впливів при керуванні. Ці системи неможливо стабілізувати у класичному сенсі відносно усіх фазових

змінних. Тому було в явному вигляді побудовано керування, що дозволяють досягнути асимптотичної стійкості стану рівноваги досліджуваних систем відносно частини змінних.

4. Конструктивне доведення теореми Арцтейна було узагальнено на проблему часткової стабілізації стохастичних диференціальних рівнянь Іто. Показано можливість застосування запропонованого методу побудови керування для нелінійних систем із випадковими впливами, що описують динаміку руху перевернутого маятника, колісного візка з рухомою масою та балансуючого робота.
5. Одержано нові стратегії керування, що стабілізують за частиною змінних розв'язки класу афінних за керуванням систем. Зазначені керування застосовано до задачі стабілізації таких систем вздовж заданої траєкторії. Для цього поширено концепцію стійкості сім'ї множин на випадок стійкості відносно частини змінних.
6. Отримано достатні умови асимптотичної стійкості однопараметричної сім'ї множин із застосуванням залежного від часу керування у вигляді тригонометричних поліномів.
7. Результати стабілізації усіх розглянутих механічних систем проілюстровано за допомогою чисельного моделювання в програмі Maple із використанням функції ItoProcess().

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1а. Васильева И.Г., Зуев А.Л. Частичная стабилизация нелинейных систем со случайными воздействиями. Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. 2012. Т. 25. С.33–41.

2а. Васильева И.Г., Зуев А.Л. Анализ предельного множества траекторий нелинейной системы со случайными воздействиями для почти всех начальных условий. Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. 2014. Т. 28. С. 20–26.

3а. Zuyev A.L., Vasylieva I.G. Partial stabilization of stochastic systems with application to rotating rigid bodies. IFAC PapersOnLine. 2019. V. 52. P. 162—167.

4a. Vasylieva I.G., Zuyev A.L. Control design for partial stabilization of nonlinear mechanical systems with random disturbances. Збірник праць Інституту математики НАН України. 2019, В. 16(2). С.209-223.

Тези доповідей на конференціях

5a. Vasylieva I.G., Zuev A.L. Partial stabilization of nonlinear stochastic differential equations with application to nonholonomic systems. 2nd International Conference "Differential Equations & Control Theory" (DECT-2017): Book of Abstracts, Świnoujśce, Poland, 27-30 September 2017. Szczecin: University of Szczecin, 2017. P. 22.

6a. Vasylieva I.G., Zuev A.L. Stability analysis for a nonholonomic mechanical system using Sussmann-type processes. International Conference "Differential Equations, Mathematical Physics and Applications": Book of Abstracts, Cherkasy, Ukraine, 17–19 October, 2017. P. 51—52.

7a. Васильева И.Г., Зуев А.Л. Задача стабилизации неголономных механических систем при наличии стохастической компоненты управления. Материалы Международной научной конференции "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация", посвященной 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина, Минск, Белорусь, 24-29 сентября 2018. Минск: БГУ, 2018. С. 85–86.

8a. Васильева И.Г., Зуев А.Л. Устойчивость инвариантных множеств систем нелинейных дифференциальных уравнений со случайными воздействиями. XIX International Conference "Dynamical system modeling and stability investigation": Abstract of Conf. reports, Київ, Україна, 22-24 травня 2019 р. Київ: Київський національний університет ім. Т. Шевченка, 2019. С. 236–237.

9a. Васильєва І.Г. Дослідження стійкості неголономної механічної системи із використанням випадкових процесів типу Суссманна. Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, 6-8 червня 2019 р. Київ: Інститут математики НАН України, 2019. С. 51.

10a. Vasylieva I.G., Zuev A.L. Partial stabilization of nonlinear control system by stochastic feedback laws. 4th International Conference "Differential Equations & Control Theory" (DECT-2019): Book of Abstracts, Kołobrzeg, Poland, 23-26 September 2019. Szczecin: University of Szczecin, 2019. P. 18.

АНОТАЦІЇ

Васильєва І.Г. Стабілізація руху керованих механічних систем з випадковим впливом у критичних випадках. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.01 – "Теоретична механіка".–Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ, 2021. Захист відбудеться в Інституті математики НАН України, Київ.

Дисертаційну роботу присвячено актуальним задачам теоретичної механіки, які виникають при дослідженні стійкості та стабілізації руху механічних систем, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями із випадковим впливом.

Розглянуто питання збіжності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь Іто до інваріантної множини за майже всіх початкових умов. Слід зазначити, що ця задача є певним узагальненням проблеми про достатні умови притягання особливої точки динамічної системи без припущення строгої додатності дивергенції функції щільності на випадок системи нелінійних диференціальних рівнянь із випадковими впливами. Встановлено достатні умови збіжності до інваріантної множини в термінах функції щільності міри, яка є монотонною на фазовому потоці для системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто.

Отримано достатні умови асимптотичної стійкості за ймовірністю інваріантної множини вигляду $M = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n | y = 0 \right\}$ для системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто. Крім того, запропоновано спосіб побудови стабілізуючого керування зі зворотним зв'язком із використанням функції Ляпунова.

Також розглянута можливість практичного застосування отриманих теоретичних відомостей до задач часткової стабілізації руху твердого тіла та систем тіл.

Отримані достатні умови стабілізовності за ймовірністю стану рівноваги системи нелінійних диференціальних рівнянь із випадковими впливами, спираючись на метод керованих функцій Ляпунова. Запропоновано конструктивний алгоритм побудови керування із використанням $y-$ стохастичної функції Ляпунова.

Отриманий результат застосовано до нелінійних систем із стохастичними впливами, що описують коливання перевернутого маятника з рухомою масою, рух колісного візка з додатковим ступенем волі та балансуючого робота.

Детально досліджено проблему часткової стабілізації нелінійних систем вздовж заданої траєкторії. Поширено концепцію стійкості сім'ї множин на випадок стійкості відносно частини змінних. Отримано достатні умови асимптотичної стійкості однопараметричної сім'ї множин із застосуванням залежного від часу керування у вигляді тригонометричних поліномів. Отримані результати застосовано до модельних прикладів механічних систем та проведено симуляцію руху відповідних замкнених систем засобами комп'ютерної алгебри.

Ключові слова: асимптотична стійкість руху відносно частини змінних, стохастичне диференціальне рівняння Іто, функція Ляпунова, асимптотична стійкість інваріантної множини, асимптотична стійкість за ймовірністю, рандомізоване керування, керування зі зворотнім зв'язком, системи твердих тіл.

I.G. Vasylieva. Motion stabilization of mechanical control systems with random influence in critical cases. – The Manuscript.

Dissertation for the degree of a Candidate of Physical and Mathematical Sciences (PhD) in the specialty 01.02.01 - "Theoretical mechanics".– Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Slovyansk, 2021. The defense will be held at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv.

This thesis is devoted to actual problems of theoretical mechanics which arise in the study of the stability of motion of mechanical systems described by nonlinear differential equations with random influence.

The problem of attraction of solutions of the Ito type stochastic differential equations to an invariant set under almost all initial conditions is considered. It should be noted that this problem is a generalization of the deterministic result on sufficient conditions for the attraction of an equilibrium of a dynamical system without assuming that the divergence of the density function is strictly positive. The class of nonlinear differential equations with random effects that admit invariant manifolds of an arbitrary dimension are considered. Sufficient conditions for the attraction to the invariant set in terms of the density function of a measure that has the property of monotonicity on the flow are proved.

Sufficient conditions for the asymptotic stability in probability of an invariant set of the form $M = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n | y = 0 \right\}$ for the system of Ito stochastic differential equations are obtained. This result allows us to construct a stabilizing feedback control with the use of a Lyapunov function.

It is shown that the above results can be applied to the partial stabilization problem for nonlinear control systems with stochastic effects. Problems of stabilizing the motion of a rigid body around its center of mass under the action of jet

control torques and a pair of flywheels are considered.

The result on asymptotic stability in probability of the equilibrium for systems of nonlinear differential equations with random effects is obtained. This result is based on the development of control Lyapunov functions method. The proposed control design uses the notion of a $y-$ stochastic Lyapunov function. The main theorem is applied to nonlinear systems with stochastic effects that describe the dynamics of the inverted pendulum with moving mass, a three-wheeled trolley with an additional degree of freedom, the balancing robot.

The problem of partial stabilization of nonlinear systems along a given trajectory is concidered. The concept of stability of a family of sets in case of stability concerning a part of variables is widespread. Sufficient conditions for the asymptotic stability of a one-parameter family of sets using time-dependent control in the form of trigonometric polynomials are obtained. The obtained results are applied to model examples of mechanical systems. The motion of the corresponding closed systems is simulated by means of computer algebra.

Key words: asymptotic stability of motion with respect to a part of variables, Ito stochastic differential equation, Lyapunov function, asymptotic stability of an invariant set, asymptotic stability in probability, randomized control, feedback law, systems of rigid bodies.

Підписано до друку 15.03.2021. Формат 60 × 84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2,2. Умов. друк. арк. 2,04. Тираж 100 пр. Зам.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.