

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ І ГЛОБАЛЬНОГО
ІНФОРМАЦІЙНОГО ПРОСТОРУ**

ЗЕЛЕНСЬКИЙ Кирило Харитонович

УДК 621.315:678.027

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПОЛІМЕРНИХ
МАТЕРІАЛІВ В ЕКСТРУДЕРАХ**

01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

КИЇВ – 2021

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі біомедичної кібернетики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» Міністерства освіти і науки України.

**Науковий
консультант**

Член-кореспондент НАН України,
доктор технічних наук, професор
Трофимчук Олександр Миколайович
директор Інституту телекомунікацій і глобального
інформаційного простору НАН України

**Офіційні
опоненти**

Доктор технічних наук, професор
Кіріченко Людмила Олегівна
професор кафедри прикладної математики Харківського
національного університету радіоелектроніки України.

Доктор технічних наук, доцент
Іванюк Віталій Анатолійович
завідувач кафедрою інформатики Кам'янець-Подільського
національного університету ім. Івана Огієнка України.

Доктор технічних наук, професор
Синєглазов Віктор Михайлович
Завідувач кафедри авіаційних комп'ютерно-інтегрованих
комплексів Національного авіаційного університету України.

Захист відбудеться 14 травня 2021 р. о 13-й годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.255.01 в Інституті телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України за адресою: м. Київ, Чоколівський бульвар, 13.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України за адресою: м. Київ, Чоколівський бульвар, 13.

Автореферат розіслано 14 квітня 2021 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Д26.255.01



О. Г. Лебідь

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Внаслідок великої продуктивності екструдерів, їхньої суттєвої коштовності, а також високої ціни полімерних матеріалів експериментальні дослідження з модернізації обладнання та удосконалення технологічних режимів призводять до коштовних витрат матеріалів та часу. Це спонукає до розвитку теоретичних засад процесів, що досліджуються. Одним із основних інструментів, що сприяє отриманню потрібних результатів і надає можливість мінімізувати коштовні натурні випробування, є математичне моделювання. Але існуючі математичні моделі процесів течії, теплообміну і фазового перетворення полімерів у каналах екструзійного обладнання не забезпечують якісний та кількісний аналіз процесів, оскільки переважна більшість із них формулюються або в одновимірній постановці, або формулюються у тривимірній постановці, але розв'язання відповідних крайових задач не наводяться або на розв'язки посилаються на відомі ``стандартні" пакети чисельного розв'язання, які за своєю природою не пристосовані до вирішення нелінійних моделей, оскільки для розробки методів розв'язання нелінійних рівнянь, особливо для диференційних рівнянь із частинними похідними не може бути ``стандартних" пакетів чисельного розв'язання у силу специфіки наявних нелінійностей у рівняннях.

У зв'язку з цим виникає проблема, що пов'язана із розробкою методів розв'язання систем нелінійних рівнянь із частинними похідними математичної фізики. Як відомо, переважна більшість цих методів ґрунтується на використанні або різницевих схем різного порядку, або на використанні методів скінченних елементів, що по суті мало відрізняється від різницевих схем. Крім того, переважна більшість таких підходів обмежується задекларованими постановками тривимірних крайових задач, а результати моделювання подаються в одновимірному вигляді відносно просторових координат (у декартовій системі координат). Вочевидь, це пов'язано із проблемами пошуку розв'язків відповідних систем нелінійних алгебраїчних рівнянь; вочевидь, така задача не може бути вирішена за допомогою ``стандартних" пакетів тощо.

Тому розробка методів наближеного розв'язання таких задач, що вільні від означених недоліків, є актуальна наукова проблема для широкого класу нелінійних диференційних рівнянь математичної фізики.

Вирішення цієї проблеми стало можливим у зв'язку з інтенсивним розвитком комп'ютерної техніки, що надало можливість автоматизувати процес реалізації наближених алгоритмів розв'язання нелінійних крайових задач і створити передумови для вирішення задач автоматичного управління складними системами із розподіленими параметрами.

Підґрунттям для вирішення цих задач є застосування скінченних інтегральних перетворень до нелінійної крайової задачі із застосуванням

апроксимуючих алгоритмів на ґрунті апарату ланцюгових дробів.

Вирішення цих питань є важливим з точки зору покращення якості продукції, підвищення ефективності робіт при проектуванні і модернізації екструзійного обладнання та при удосконаленні технологічних режимів. Тому розвиток теоретичних засад процесів руху і теплообміну нелінійних полімерних середовищ в умовах фазового переходу у каналах екструзійного обладнання за допомогою математичного моделювання процесів, що досліджуються, є актуальний напрямок, що містить наукову новизну, практичну значимість і являє собою теоретичне узагальнення наукової проблеми.

У розвиток методів математичного і комп'ютерного моделювання динамічних об'єктів із розподіленими параметрами вагомий внесок зроблено завдяки науковим працям Бутковського А.Г., Верланя А.Ф., Пупкова К. А., Пустильнікова Л.М., Рапопорта Є.Я., Самойленка А.М., Сергієнка І.В., Федоткіна І.М. та іншими вітчизняними науковцями.

У розвиток методів дослідження процесів тепло і масо перенесення в екструдерах значний внесок здійснено у наукових працях провідних вчених у цій галузі: Жученка А.І., Кіма В.С., Митрошина В. М., Первадчука В.П., Раувендаля К., Труфанової Н.М., Янкова В.І., Абейкуна С., Андреуччі Д., Ескобедо Р., Капассо В., Тадмора З., Чанга Т.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Роботу виконано у Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» на кафедрі теоретичної електротехніки відповідно до пріоритетних напрямків розвитку науки і техніки в Україні (Постанова Кабінету міністрів (КМ) України від 24.12.2001 р., № 1716), Державної програми розвитку промисловості на 2003--2011 роки (Постанова КМ України від 28.07.2003 р., № 1174), а також відповідно до тематики держбюджетних науко-дослідних робіт КПІ ім. Ігоря Сікорського: "Методи та засоби структурно-параметричної ідентифікації електротехнічних систем технологічної лінії з виробництва вітчизняного кабелю з полімерною ізоляцією на надвисокі напруги" (№2908-п № державної реєстрації 0116U003716; замовник – МОН України; автор – виконавець теми)

Мета роботи і завдання досліджень.

Розробка математичних моделей процесів течії і плавлення нелінійних полімерних середовищ у каналах екструзійного обладнання і розв'язання відповідних нелінійних крайових задач, а також дослідження на їх ґрунті впливу конструктивних і технологічних параметрів на гідродинамічні характеристики пластикуючих екструдерів і формуючих інструментів, визначення оптимальних режимів роботи.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

1. Виконати теоретичний опис і розробку просторових математичних моделей процесів нагріву, плавлення, течії і теплообміну полімерних матеріалів

в умовах фазового перетворення у каналах екструзійного обладнання із урахуванням нелінійних властивостей фізико-технічних характеристик полімерів.

2. Розробити методи розв'язання комплексу математичних моделей у різних зонах екструдера (нагріву, плавлення, дозування), які б забезпечували потрібну якість кінцевого продукту на виході із екструдера.

4. Урахувати вплив нелінійних фізико-технічних характеристик полімерних середовищ на процеси теплоперенесення в екструдері.

5. Розробити відповідне алгоритмічне і програмне забезпечення для розрахунку і аналізу процесів, що досліджуються.

Об'єкт дослідження -- процеси екструзійного перероблення термопластичних полімерних матеріалів.

Предмет дослідження -- математичне моделювання масо- і тепло перенесення в екструзійних устаткуваннях полімерних матеріалів.

Методи дослідження. Ґрунтуються на методах математичного моделювання із застосуванням теорії суцільних середовищ, методів математичної фізики, методів наближеного аналізу,

Наукова новизна отриманих результатів полягає у створенні наукових засад розв'язання систем нелінійних диференційних рівнянь у частинних похідних математичної фізики та математичного і комп'ютерного моделювання процесів масо- і тепло перенесення процесів переробки полімерних матеріалів в одношнекових екструдерах із урахуванням їхніх в'язкопластичних властивостей та наявністю фазових переходів у системі тверда суміш--розплав полімерів.

Уперше отримані такі наукові результати:

1. Розроблено числово-аналітичний ітераційний метод розв'язання нелінійних крайових задач, що описуються системами нелінійних диференційних рівнянь у частинних похідних математичної фізики, який на відміну від існуючих підходів надає можливість отримати розв'язок цих задач у квадратурах, що сприяє створенню систем автоматичного або автоматизованого управління технологічними процесами у реальному часі.

2. Розроблено математичне та алгоритмічне і програмне забезпечення, що реалізує цей метод. Зокрема, запропоновано метод апроксимації циліндричних функцій дробово-раціональними виразами. Розроблено алгоритми еквівалентного спрощення складних виразів, що ґрунтуються на використанні апарату ланцюгових дробів. Розроблене алгоритмічне та програмне забезпечення надає можливість автоматизувати процес отримання розв'язків нелінійних крайових задач.

3. Розроблено методи розв'язання нелінійних крайових задач тепломасоперенесення у зоні завантаження і пластикації екструдера, що ґрунтуються на використанні запропонованого ітераційного методу розв'язання нелінійних крайових задач.

4. Розроблено метод розв'язання крайових задач, що описують конвективно- дифузійні процеси у зоні плавлення полімерів та у зоні дозування із урахуванням реологічних властивостей полімерів.

6. Запропоновано метод оптимального управління температурними полями в екструзійних пристроях як управління нелінійним об'єктом із розподіленими параметрами.

Дістали подальший розвиток:

1. Удосконалені математичні моделі процесів нагріву корпусу екструдера, процесу завантаження, плавлення полімерів у одно шнековому екструдері.

2. Вплив різних чинників на динаміку плавлення полімерних сумішей, що підвищує ефективність проектування і модернізації екструдера.

3. Вплив процесів гомогенізації та кристалізації на якість кінцевого продукту.

На захист виносяться:

-- Постановка задачі математичного моделювання процесами тепломасоперенесення в екструзійних пристроях.

-- Числово-аналітичний ітераційний метод розв'язання нелінійних крайових задач, що описують процеси тепломасоперенесення, які описуються системами нелінійних диференційних рівнянь у частинних похідних математичної фізики.

-- Методи апроксимації циліндричних функцій дробово-раціональними функціями.

-- Метод розв'язання крайової задачі, що описує температурне поле у зоні завантаження із урахуванням джерела нагріву та залежності питомої теплоємності від температури суміші полімерів, що суттєво підвищує точність отриманого розв'язку.

-- Метод розв'язання крайової задачі, що описує конвективно-дифузійні процеси у зоні плавлення полімеру.

-- Метод розв'язання крайової задачі, що описує процеси формування тришарового ізоляційного покриття рухомої металевої жили з метою забезпечення якісного виготовлення кабелів на надвисокі напруги.

-- Метод автоматичного управління джерелом нагріву з метою стабілізації процесів нагріву, плавлення та охолодження полімерів для запобігання перегріву полімерної маси.

-- Результати числово-аналітичного моделювання процесів гідродинаміки, тепломасоперенесення у шнекових агрегатах і кабельних головках.

Достовірність отриманих результатів забезпечується їх задовільною збіжністю із відомими теоретичними результатами, із результатами проведених експериментальних досліджень, експериментальними даними інших авторів та із наявними точними розв'язками тестових задач.

Практична значимість і реалізація результатів роботи.

Математичні моделі процесів нагрівання, плавлення і течії полімерів у каналах екструзійних машин та інструментах, що формують, надають можливість:

- проектувати нове обладнання, удосконалювати технологічні режими, при цьому мінімізувати коштовні натурні випробування;
- визначати області локальних перегрівів, що важливо при використанні сучасних полімерних матеріалів;
- враховувати вплив процесів тепломасоперенесення у шнеці на процеси пластикуючої екструзії;
- розробляти системи автоматичного управління технологічними процесами екструзії, орієнтованими на випуск нової продукції;

Дослідження, виконані автором, розширюють уявлення про процеси тепломасоперенесення, руху нелінійних полімерних середовищ у каналах екструзійного обладнання в умовах фазового переходу.

Практичні рекомендації використовувалися при удосконаленні технологічних режимів роботи пластикуючих екструдерів при виготовленні пластмасової ізоляції ПНВП «Прикарпатгаз» та ТОВ «Укрекоконсалт», що підтверджено актами впровадження. Теоретичні результати дисертаційної роботи використовуються у навчальному процесі на кафедрі біомедичної кібернетики факультету біомедичної інженерії НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

Особистий внесок здобувача. Здобувачем сформульовано мету і постановку завдань досліджень, розроблено методи та способи досягнення поставленої мети, сформульовано математичну постановку задач, розроблено ітераційний числово-аналітичний метод розв'язання крайових задач, що описуються системами нелінійних диференційних рівнянь математичної фізики. Здобувачем особисто здійснено наукове обґрунтування впливу реологічних та фізико-технічних характеристик полімерних матеріалів на точність математичного моделювання процесів масо- і теплоперенесення в екструдері, що надало змогу вдосконалити існуючі конструкції екструдерів для переробки полімерних матеріалів і створення нових технологічних ліній для переробки цих матеріалів.

Основні результати теоретичних і практичних досліджень, що представлено у дисертаційній роботі, висвітлено у наукових працях, що наведені у списку публікацій автореферату [1-47]. Зокрема, автором дисертації особисто:

Розроблено ітераційний числово-аналітичний метод пошуку розв'язань крайових задач для систем нелінійних диференційних рівнянь у частинних похідних математичної фізики та алгоритми комп'ютерної реалізації методу.

Комп'ютерне моделювання процесів у зонах змішування та плавлення із урахуванням нелінійних властивостей полімерних матеріалів здійснювалось

разом із аспірантом Болховітіним В.М.

Апробація результатів дисертації. Основні засади і результати дисертації доповідалися і обговорювалися на: IV симпозиумі IFAC "Ідентифікація і оцінка параметрів систем", Тбілісі, 1976; Всеросійській школі-семінарі "Чутливість систем управління", Владивосток, 1976; міжнародній конференції "Automation and robotization in weldnig and applied processes", Strasburg, 1985; 2-nd international conference "Developments in automated and robotic welding", Cambridge, 1987; 2-й міжнародній конференції по електронно-променевому зварюванню, Варна, 1988; Всесоюзній конференції "Математичне та імітаційне моделювання в системах проектування і управління", Чернігів, 1990; 5-й міжнародній науково-практичній конференції "Аерокосмічні системи моніторингу та керування", Київ, 2003; міжнародному симпозиумі SISPRO, Москва, 2006; 4-й Всеукраїнській науково-практичній конференції "Комп'ютерні технології: наука і освіта", 2009; 4-й міжнародній науковій конференції ISDMCI'2009, Євпаторія, 2009; 8-й Всеукраїнській науково-практичній конференції "Комп'ютерні технології: наука і освіта", 2013; 10-й Всеукраїнській науково-практичній конференції "Комп'ютерні технології: наука і освіта", 2017; VII-й міжнародній науково-практичній конференції "ІТОНВ-2019"; 22 науковій і практичній конференції "Theoretical foundations for the implementation and adaptation of scientific achievements in practice", 2020, Helsinki, Finland.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 47 друкованих працях, із них: 24 – у фахових виданнях; 6 – статті у наукових періодичних виданнях іноземних держав; 3 – у наукових виданнях, індексованих у наукометричній базі Scopus; 14 – у матеріалах науково-практичних конференцій.

Структура и обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, 8-ти розділів, висновків, списку літератури, що містить 359 найменувань, і додатків. Загальний обсяг роботи 274 сторінок, в тому числі 36 рисунків, 2 таблиці.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У *вступі* обґрунтовано актуальність проблеми, наведено зміст дисертації за розділами, сформульовано наукову новизну, основні засади, що виносяться на захист, практична значимість роботи.

У *першому розділі* виконано опис екструзійних пристроїв для виготовлення ізоляційних покриттів кабелів на надвисокі напруги. Показано, що якість виготовлення ізоляційних покриттів у значній мірі залежить від процесів руху і теплоперенесення полімерів у гвинтовому каналі шнека.

У переважній більшості праць, присвячених математичному моделюванню процесів тепломасоперенесення у гвинтових каналах екструдерів, робляться такі спрощуючі припущення.

При побудові математичної моделі процесів руху і теплообміну полімеру у гвинтовому каналі пластикуючого екструдера (рис. 1), що ґрунтується на законах збереження маси, кількості руху і енергії: процес стаціонарний за сталого масового розходу; гвинтовий канал розгортається на площину (рис. 2) і використовується зворотний рух; перенос тепла вздовж каналу здійснюється за рахунок конвективної складової, тому дифузія тепла по координаті z не враховується; "пробка" гранул деформівна, а швидкість і густина її є сталі; пружні процеси у розплаві полімеру не враховуються; градієнтами складових швидкостей у напрямку осі z нехтують, оскільки довжина каналу на два-три порядки більша за висоту і ширину каналу, а його геометрія за довжиною є стала або змінюється несуттєво; інерційні і масові сили є малі порівняно із силами в'язкого тертя.

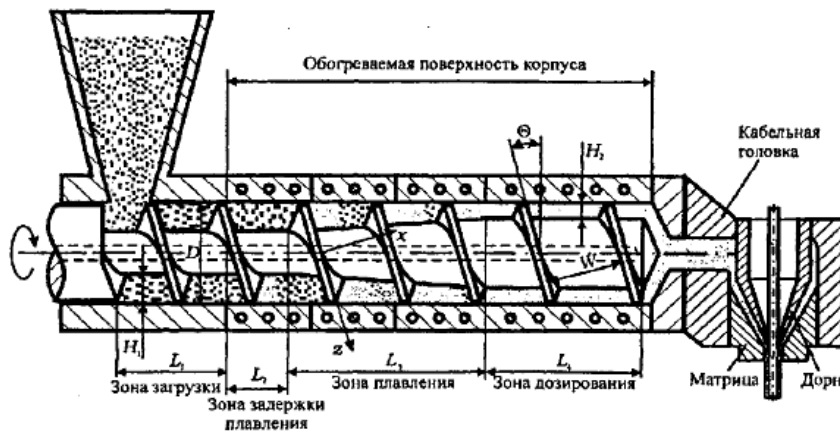


Рис.1 Схема пластикуючого екструдера

Отже, процес руху і теплообміну у гвинтовому каналі пластикуючого екструдера моделюється тепломасоперенесенням матеріалу у довгому прямокутному каналі (рис.2), верхня стінка якого рухається зі сталою швидкістю, що дорівнює окружній швидкості черв'яка, під кутом нарізки гвинтової лінії до осі каналу θ .

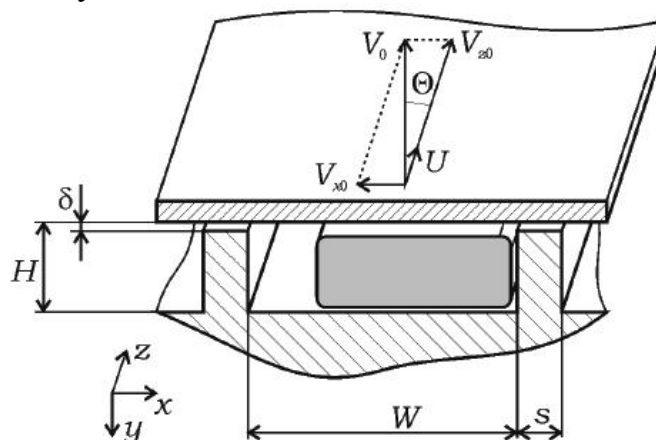


Рис. 2 Схема розгорнутого каналу

Із урахуванням цих допущень система рівнянь, що описує рух і

теплообмін полімеру у каналі шнека, має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0; \\ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_e \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] &= \frac{\partial P}{\partial x}, \\ 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_e \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] &= \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_e \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] &= \frac{\partial P}{\partial z}, \\ \rho C \left(\bar{V}_z \frac{\partial T}{\partial z} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \Phi, \end{aligned}$$

де v_x, v_y, v_z – компоненти швидкості руху розплаву полімеру; \bar{V}_z – середня швидкість (для твердої фази – це швидкість пробки U , для розплаву полімеру – середня швидкість у розплаві полімеру); Φ – функція дисипації; P – тиск; μ_e – ефективна в'язкість розплаву полімеру, що є функція швидкості зсуву та температури.

Ефективна в'язкість визначається

$$\mu_e = \mu_0 e^{-\beta(T-T_0)} (I_2/2)^{(n-1)/2},$$

де β – температурний коефіцієнт в'язкості; n – показник аномалії в'язкості; I_2 – другий інваріант тензору швидкостей деформації; μ_0 – коефіцієнт консистенції розплаву полімеру.

Функція дисипації обчислюється за формулою:

$$\Phi = \mu_e I_2/2.$$

У якості межової умови з температури на вході у канал використовується температура гранул полімеру із завантажуючого бункера. На внутрішній поверхні корпусу задається розподіл температури, що визначається технологічними умовами перероблення полімерного матеріалу. Температура на шнеці визначається за допомогою ітераційної процедури при сумісному розв'язанні цієї задачі та задачі по визначенню температури шнеку. Межа розділу фаз визначається ізотермою, що відповідає деякій середній (в інтервалі фазових перетворень) температурі плавлення. Межові умови для складових швидкостей визначаються із умови прилипання рідини до твердих непроникних поверхонь (стінкам каналу та поверхні розділення фаз). Реологічні і теплофізичні властивості поліетилену

n	μ_0	T_0	β	T_0	ρ_s	ρ_m	λ_s	λ_m
	Па·с ^{n}	°C	1/°C	°C	кг/м ³	кг/м ³	Вт/(м·°C)	Вт/(м·°C)
0,44	10,825	160	0,018	110	919,0	779,0	0,335	0,182

Початкова температура грануляту дорівнює 20°C . Число обертів шнеку -- $N_s = 60$ об/хв. Масова продуктивність екструдера $Q_0 = 0,02 \div 0,12$ кг/с.

У **другому розділі** на підставі аналізу, виконаному у першому розділі, сформульовані математичні моделі: нагріву корпусу екструдера, зони завантаження та затримки плавлення, зони плавлення полімеру як двофазної "пробка" – розплав, зони дозування (гомогенізація і кристалізація розплаву). Докладно ці математичні моделі висвітлено у відповідних розділах.

Третій розділ присвячений розробці методу числово-аналітичного розв'язання нелінійних крайових задач для рівнянь у частинних похідних.

Розглядається система диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$a_0 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = F(t, x, u(t, x), \dots) = f(t, x, u(t, x), \dots) + L(u), \quad (1)$$

$$D = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq t \leq T\}$$

Початкові і межові умови задаються у вигляді

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x); \quad g(t, x)|_{x=S} = 0. \quad (2)$$

Подемо систему рівнянь ((2)) у вигляді

$$a_0 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = L(x)u(t, x) + N[t, x, u(t, x)]. \quad (3)$$

Розв'язання крайової задачі у разі лінійної системи рівнянь записується у вигляді ряду за власними функціями

$$u^{(0)}(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{m=1}^{N_z} \varphi_x(\beta_k^x, x) \varphi_y(\beta_l^y, y) \varphi_z(\beta_m^z, z) T(\mu_{mlk}, t); \quad T(t) = \bar{\bar{u}}(\mu_{mlk}, t) \quad (4)$$

Побудуємо ітераційний процес

$$a_0 \frac{\partial^2 u^{(m+1)}}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial u^{(m+1)}}{\partial t} = L[u^{(0)}] + N[u^{(m)}], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Після підстановки виразу для $u^{(0)}$ у нелінійну частину отримаємо

$$N(u^{(0)}) = N \left\{ \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=1}^{N_z} T_{n,j,i}(t) \varphi_i(x) \varphi_j(y) \varphi_n(z) \right\}.$$

$$\left[\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=1}^{N_z} T_{n,j,i}(t) \left(\frac{d\varphi_i(x)}{dx} \right)^2 \left(\frac{d\varphi_j(y)}{dy} \right)^2 \left(\frac{d\varphi_n(z)}{dz} \right)^2 \right], \dots \}.$$

Застосування до цього виразу скінченних інтегральних перетворень за просторовими змінними із урахуванням межових умов та часом із урахуванням початкових умов за відомого виразу для нелінійної частини дозволяє отримати

$$\bar{\bar{N}}[u^{(0)}(x, y, z, t)] = F \left[\sum_{n,j,i} (T_{n,j,i}^{m,l,k}(t))^2, (T_{n,j,i}^{m,l,k}(t))^3, \dots \right]; \quad \bar{\bar{N}} = \int_G N[u^{(0)}(x, y, z, t)] dG.$$

Оскільки у правій частині цього виразу містяться відомі функції від збурення у вихідному рівнянні, а також від початкової і межових умов крайової задачі, до цього виразу можна застосовувати інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\bar{N}[u^{(0)}(x, y, z, t)]] &= \mathcal{L}\left\{F\left[\sum_{n,j,i}^{m,l,k} (T_{n,j,i}^{m,l,k}(t))^2, (T_{n,j,i}^{m,l,k}(t))^3, \dots\right]\right\} = \\ &= \mathcal{L}[T1_{n,j,i}^{m,l,k}(t)] = \bar{T}1_{n,j,i}^{m,l,k}(p).\end{aligned}$$

Після певних перетворень отримуємо вирази для

$$\begin{aligned}T1_{n,j,i}^{m,l,k}(t) &= A1_{n,j,i}^{m,l,k} + A2_{n,j,i}^{m,l,k} t + A3_{n,j,i}^{m,l,k} t^2 + \dots + B1_{n,j,i}^{m,l,k} e^{-\mu_{n,j,i}^{m,l,k} t} + \dots \\ T1_{n,j,i}^{m,l,k}(t) &= A1_{n,j,i}^{m,l,k} + A2_{n,j,i}^{m,l,k} t + A3_{n,j,i}^{m,l,k} t^2 + \dots + B1_{n,j,i}^{m,l,k} \sin(\mu_{n,j,i}^{m,l,k} t) + \dots \\ u^{(1)}(x, y, z, t) &= u^{(0)}(x, y, z, t) + \sum_{m,l,k} Z\varphi_k(x)\varphi_l(y)\varphi_m(z)[C1_{m,l,k} + C2_{m,l,k} t + \dots \\ &+ (a1/\omega_1)_{m,l,k} \sin \omega_1 t + a2_{m,l,k} \cos \omega_1 t + (a2/\omega_2)_{m,l,k} \sin \omega_2 t + a2_{m,l,k} \cos \omega_2 t].\end{aligned}$$

Оцінка точності розв'язання. Будемо оцінювати точність наближень на кожній ітерації за нормою у просторі $L^2(G)$.

$$\|u^{(n)}(x, y, z, t) - u^{(n-1)}(x, y, z, t)\|^2 = \int_{\Omega} [u^{(n)}(x, y, z, t) - u^{(n-1)}(x, y, z, t)] d\Omega =$$

$$= \left\{ \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \int_0^T \varphi_k(x)\varphi_l(y)\varphi_m(z)[U_{m,l,k}^{(n)}(t) - U_{m,l,k}^{(n-1)}(t)] dz dy dx dt \right\}^2.$$

$$\|u^{(n)}(x, y, z, t) - u^{(n-1)}(x, y, z, t)\|^2 = \left\{ \int_0^T [U_{m,l,k}^{(n)}(t) - U_{m,l,k}^{(n-1)}(t)] dt \right\}^2.$$

$$\|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_{L_G^2} < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Запропоновано алгоритм розв'язання крайових задач із рухомими межами. Розглядається задача:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (7)$$

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right]_{u=u_k} = \frac{Q}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{u=u_k}. \quad (8)$$

У межах двохфазної зони $0 < z < L$ температура задовольняє межові умови

$$u|_{z=0} = u_s, \quad u|_{z=L} = u_l; \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{Q_s}{\lambda_s}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=L} = -\frac{Q_l}{\lambda_l}, \quad (10)$$

де Q_s – тепловий потік, який відводиться від двохфазної зони через її межу $z=0$; Q_l – тепловий потік, що підводиться до двохфазної зони через межу $z=L$.

Умова балансу субстанції на межі розділу твердої і рідинної фаз у загальному випадку записується так:

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} - \lambda_2 \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = Q \frac{dh}{dt}. \quad (11)$$

Схема розв'язання задачі полягає у такому. Відшукується розв'язання лінійної крайової задачі (7) – (10) із фіксованими межами. Отримане розв'язання заміщується в умову (11) при $L=h_0$, h_0 – початкове значення параметра h руху межі поділу рідинної і твердої фаз. Потім відшукується розв'язання диференціального рівняння відносно $h(t)$ (11). Отриманий вираз для $h(t)$ дає криву руху межі розділу фаз у першому наближенні. Якщо норма різниці між h_0 і $h_1(t)$ перевищує потрібну точність, ітерації повторюються.

У **четвертому розділі** викладено розроблене автором алгоритмічне і програмне забезпечення розв'язання нелінійних крайових задач для нелінійних рівнянь у частинних похідних математичної фізики.

Спочатку розглянемо апроксимацію дробово-раціональним виразом функції Бесселя першого роду. Застосування функцій такого типу досить поширене при розв'язанні крайових задач для диференціальних рівнянь. Функції Бесселя записуються у вигляді

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)}. \quad (12)$$

Поставимо задачу домогтися точності апроксимації $\varepsilon = 0,00001$. Представимо (12) у вигляді скінченного ланцюгового дробу [19,21]

Апроксимуємо (12) дробово-раціональною функцією

$$\bar{J}_0(z = (x/2)^2) \simeq \frac{1 - 3.2556z + 2.2378z^2 - 0.54686z^3 + 0.054185z^4 - 0.0018907z^5}{1 + 0.24435z + 0.0305z^2 + 0.00254z^3 + 10^{-5}(15.23z^4 + 0.642z^5 + 0.0154z^6)}. \quad (13)$$

Перетворимо цей дробово-раціональний вираз у суму ланок другого степеню. Для цього необхідно визначити корені знаменника. Маємо:

$$z^6 + 41.6z^5 + 9861.6z^4 + 4 \cdot 10^4 z^3 + 1.97 \cdot 10^5 z^2 + 1.58 \cdot 10^6 z + 6.47 \cdot 10^6 = (179.26 + 16.793z + z^2)(164.03 + 24.529z + z^2)(220.11 + 0.24981z + z^2).$$

Після цього з метою визначення коефіцієнтів у чисельниках виразів другого степеню треба розв'язати відповідну систему лінійних алгебраїчних

рівнянь. ($Ab = d$).

Отже, функція Бесселя першого роду 0-го порядку апроксимується виразом

$$J_0(z) \simeq \frac{679310 + 65794z}{179.26 + 16.793z + z^2} + \frac{-506130 - 79342z}{164.03 + 24.529z + z^2} + \frac{-154720 + 1310z}{220.11 + 0.24981z + z^2}; z = \frac{\sigma_j}{2} x^2.$$

Оцінка похибки наближення: $J_0(7) = 0.30010$; $\bar{J}_0(7) = 0.30010$.

За таким же алгоритмом одержано апроксимуючу функцію для функції Бесселя першого роду 1-го та 2-го порядку

У згорнутому вигляді апроксимацію функцій Бесселя першого роду n -порядку можна записати у такому вигляді

$$J_n(x) = \sum_{k=1}^3 \frac{c_{6k+3}^n + c_{6k+4}^n x^2}{c_{6k}^n + c_{6k+1}^n x^2 + c_{6k+2}^n x^4}, \quad (14)$$

m – кількість власних значень при вирішенні відповідної задачі Штурма-Ліувілля.

Із урахуванням виразу (14) можна записати добуток двох функцій Бесселя першого роду

$$J_n(\sigma_j x) J_l(\sigma_i x) = \sum_{k=1}^3 \frac{c_{6k+3}^n + c_{6k+4}^n x^2}{c_{6k}^n + c_{6k+1}^n x^2 + c_{6k+2}^n x^4} \sum_{k=1}^3 \frac{c_{6k+3}^l + c_{6k+4}^l x^2}{c_{6k}^l + c_{6k+1}^l x^2 + c_{6k+2}^l x^4} \quad (15)$$

Для того, щоб привести процес інтегрування добутку дробово-раціональних функцій до обчислення інтегралів від ланцюгів другого порядку, що є стандартна процедура математичного аналізу, подамо вираз (15) у вигляді суми ланцюгів другого порядку:

$$I2_{n,l}(x) = \int_0^R J_n(x) J_l(x) x dx = \int_0^R \sum_{k=1}^3 \frac{d_{6k+3} + d_{6k+4} x^2}{[d_{6k} + d_{6k+1} x^2 + d_{6k+2} x^4]^2} x dx + \int_0^R \sum_{k=4}^9 \frac{d_{6k+3} + d_{6k+4} x^2}{d_{6k} + d_{6k+1} x^2 + d_{6k+2} x^4} x dx. \quad (16)$$

Для добутку 3-х функцій Бесселя

$$I3_{n,l,m}(x) = \int_0^R J_n(x) J_l(x) J_m(x) x dx = \int_0^R \sum_{k=1}^3 \left[\frac{d_{6k+3} + d_{6k+4} x^2}{[d_{6k} + d_{6k+1} x^2 + d_{6k+2} x^4]^3} + \sum_{k=4}^{12} \frac{d_{6k+3} + d_{6k+4} x^2}{d_{6k} + d_{6k+1} x^2 + d_{6k+2} x^4} \right] x dx. \quad (17)$$

У випадку, коли задача поставлена для полого циліндру, замість функцій Бесселя першого роду у якості власних функцій задіяні функції Бесселя другого роду – функції Неймана

$$Y_n(\sigma_j x) = \frac{2}{\pi} (C + \log \frac{x}{2}) J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+k}\right). \quad (18)$$

Апроксимація функції Неймана ускладнюється наявністю $\log x/2$. Застосування до виразу (18) апарату ланцюгових дробів дає

$$Y_n(\sigma_j x) = \sum_{k=1}^3 \frac{c_{6k+3}^n + c_{6k+4}^n x^2}{c_{6k}^n + c_{6k+1}^n x^2 + c_{6k+2}^n x^4} + \sum_{k=1}^3 \frac{c_{6k+3}^l + c_{6k+4}^l x}{c_{6k}^l + c_{6k+1}^l x + c_{6k+2}^l x^2} \quad (19)$$

При обчисленні інтегралу виконується множення сум ланцюгів другого порядку відносно 4-го степеню по x та другого степеню по x за рахунок апроксимації $\log x/2$.

Отже, добуток двох функцій Неймана дає вираз вигляду

$$Y_n(\sigma_j x) Y_l(\sigma_i x) = \sum_{k=1}^3 \frac{b_{6k+3}^n + b_{6k+4}^n x^2}{[b_{6k}^n + b_{6k+1}^n x^2 + b_{6k+2}^n x^4]^2} + \sum_{k=1}^3 \frac{b_{6k+3}^l + b_{6k+4}^l x}{[b_{6k}^l + b_{6k+1}^l x + b_{6k+2}^l x^2]^2} \\ + \sum_{k=4}^6 \frac{b_{6k+3}^n + b_{6k+4}^n x^2}{b_{6k}^n + b_{6k+1}^n x^2 + b_{6k+2}^n x^4} + \sum_{k=4}^6 \frac{b_{6k+3}^l + b_{6k+4}^l x}{b_{6k}^l + b_{6k+1}^l x + b_{6k+2}^l x^2}.$$

Для добутку трьох функцій Неймана матимемо вирази, аналогічні (16), (17), але кількість складових ланцюгів другого порядку буде вдвічі більшою.

Вирази (14) – (19) отримуються для кожного власного значення σ_j, σ_i .

Інша група алгоритмів пов'язана із визначенням власних значень для власних функцій задач Штурма—Ліувілля при виконанні скінченних інтегральних перетворень за рештою просторових змінних. До них належать задачі визначення коренів трансцендентних рівнянь, обчислення інтегралів від добутків власних функцій тощо.

Конвективні складові

Конвективні складові у рівняннях конвективно-дифузійного перенесення субстанції відносно компонент швидкості ($u = v_1, v = v_2, w = v_3$) після застосування інтегральних перетворень за просторовими змінними можна подати у такому вигляді

$$v_1 \frac{\partial f_j}{\partial x} + v_2 \frac{\partial f_j}{\partial y} + v_3 \frac{\partial f_j}{\partial z}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (20)$$

Тут $f_j = [v_1, v_2, v_3, T]$, T – субстанція, що досліджується (температура, концентрація домішків, напруженість, деформація тощо). Координати x, y, z можуть бути як прямокутними декартовими, так і циліндричними або сферичними. У даному випадку це не суттєво, оскільки до виразу (20) застосовано інтегральні перетворення за просторовими змінними. Тож у результаті інтегральних перетворень замість (20) маємо вираз:

$$V_1(t) \cdot T_j(t) + V_2(t) \cdot T_j(t) + V_3(t) \cdot T_j(t), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Функції $V_k(t), T_j(t)$ -- це функції, що отримані внаслідок інтегральних

перетворень за просторовими змінними і є функції часу, які отримуються внаслідок розв'язання системи рівнянь на попередній ітерації. Зокрема, перша ітерація -- це розв'язок системи рівнянь у лінійному наближенні (див. попередній розділ). Наприклад,

$$\overline{\overline{\overline{V_1(t)T_j(t)}}} = v_1 \frac{\partial T}{\partial x} = \iiint_{R_0} v_1(x, y, z, t) T(x, y, z, t) X(x) Y(y) Z(z) dz dy dx.$$

Отже, для кожної конвективної складової у просторі зображень матимемо вираз вигляду

$$f_1(t)f_2(t) = [a_0 + e^{-\alpha_{nkj}t} (a_1g_1(\omega_{nkj}t) + a_2g_2(\omega_{nkj}t))] \times [b_0 + e^{-\alpha_{nkj}t} (b_1h_1(\omega_{nkj}t) + b_2h_2(\omega_{nkj}t))],$$

де $g_1, h_1 - \sin rt$ або $shrt$, $g_2, h_2 - \cos rt$ або $chrt$, залежно від значень ω_{nkj} .

Оскільки інтегральне перетворення за часом (перетворення Лапласу) є лінійне, треба виконати операцію добутку у часі для кожного із конвективних членів ($j = \overline{1,4}$) Після виконання операції добутку отримаємо вираз, до якого можна застосовувати перетворення Лапласа:

$$\overline{V_1(t)T_j(t)} = \sum_{k=1}^4 \left[\frac{c_{6k+2}}{p} + \frac{c_{6k} + c_{6k+1}p}{c_{6k+3} + c_{6k+4}p + c_{6k+5}p^2} \right].$$

Після застосування алгоритму еквівалентного спрощення до всіх складових ($j = \overline{1,4}$) можна записати

$$\mathcal{L}_t[V_1(t)T_j(t) + V_2(t)T_j(t) + V_3(t)T_j(t)] \approx \frac{d_2}{p} + \frac{d_0 + d_1p}{d_3 + d_4p + d_5p^2}. \quad (21)$$

Похибки апроксимації, що виникають, компенсуються за рахунок додаткових ітерацій.

На рис. 3 наведено приклад апроксимації добутку двох функцій часу дробово-раціональним виразом (21).

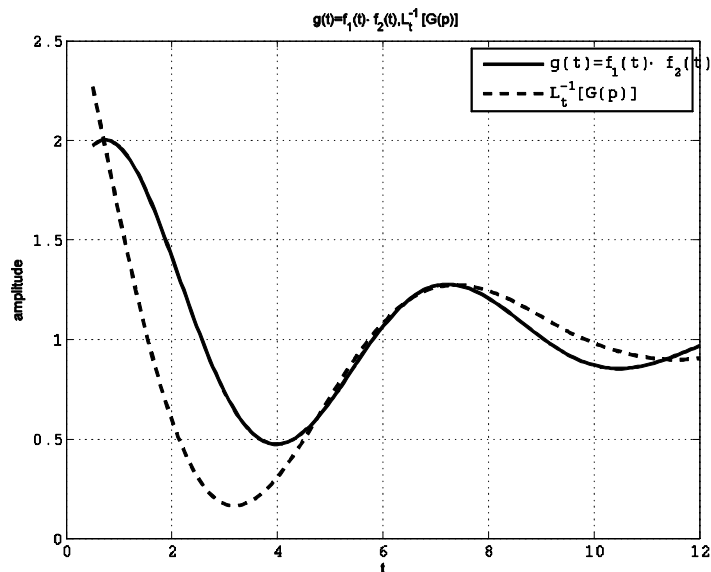


Рис.3 Апроксимація $f_1(t) \cdot f_2(t)$

У п'ятому розділі виконано комп'ютерне моделювання температурного поля корпусу. Розподіл температурного поля корпусу T_k описується рівнянням теплопровідності, яке у циліндричній системі координат має вигляд

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = a_k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_k}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} \right) + \frac{a_k}{\lambda} w, \quad (22)$$

де $a_k = \lambda_k / (c_k \rho_k)$ – коефіцієнт температуропровідності; λ_k, c_k, ρ_k – коефіцієнт теплопровідності (Вт/(м²·°C)), питома теплоємність і густина матеріалу корпусу відповідно; $g(r, z)$ – функція розподілу густини внутрішніх джерел енергії у матеріалі, Вт/м³. Із урахуванням того, що глибина проникнення електромагнітної енергії від індуктора є мала, $\Delta \ll 1$, будемо вважати, що вона діє на зовнішній поверхні корпусу $r = r_4$. Тоді межові умови для корпусу:

$$T_k|_{r=0} = T_{0k}; \quad \frac{\partial T_k}{\partial r}|_{r=r_3} = -\frac{q^k}{h_1}; \quad (23)$$

$$\left[\frac{\partial T_k}{\partial z} - h_1 T_k \right]_{z=0} = T_0, \quad \left[\frac{\partial T_k}{\partial z} + h_1 T_k \right]_{z=L} = 0. \quad (24)$$

де $h_1 = \alpha_k / \lambda_k$; α_k – коефіцієнт тепловіддачі корпусу у навколишнє середовище.

Для поверхні контакту сталеві труби із повітрям $\alpha_k = 9$ Вт/(м²·°C).

Межова умова на бічній поверхні циліндричної заготовки:

$$\left[\lambda_1(T_k) \frac{\partial T_k}{\partial r} + \alpha_1(T_k) T_k(r, z, t) \right]_{r=r_4} = L_G + N_G(T_k); \quad (25)$$

$$L_G = \alpha(T_k) T_0 + \varepsilon_1 \left(\frac{T_0}{100} \right)^4; \quad N_G = \varepsilon_1 \left(\frac{T_k(r_4, z, t)}{100} \right)^4; \quad \varepsilon_1 = 0,65.$$

Функція $g(r_4, z)$ у даному випадку – це температура, з якою індуктор нагріває поверхню корпусу, тобто $g(r_4, z) = T^{\text{ind}}$.

Значення теплофізичних параметрів для корпусу (сталь) за температури $T = 300\text{K}$ дорівнюють: $\rho = 7845$ кг/м³, $c_v = 0,461$ Квт/(кг·с·K), $\lambda = 58$, $\alpha = 10,51/\text{K}$.

Власні функції за змінною r набувають вигляд:

$$R_n(\beta r) = \frac{1}{\|R_n(\beta_n r)\|^2} [I_0(\beta r) - D_n(\beta r_3) J_0(\beta r)].$$

Інтегральне перетворення за змінною r до рівняння (22) та межових умов (23):

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \eta_{nk} \bar{T} = \bar{L}_G - R_n(r_4) \bar{N}_G. \quad (26)$$

$$\bar{L}_G = \overline{Z_k(0)T_0} + (R_n(r_4)\bar{L}_G + R_n(r_3)Z_R); \quad Z_R = z_k q_k / \lambda_1.$$

У просторі зображень за Лапласом маємо

$$\bar{T}_k(\eta_{nk}, p) = \frac{\bar{L}_G}{p(p + \eta_{nk})} - R_n(\beta_n r_4) \frac{1}{p + \eta_{nk}} \mathcal{L}\{\bar{N}_G[T_k^{(0)}(\beta_n, \delta_k, t)]\}.$$

Оскільки у правій частині цього виразу міститься нелінійна функція від T_k (умова Стефана–Больцмана) $N_G = [T_k(r_4, z, t)/100]^4$, розв'язок рівняння (26) будемо шукати за ітераційною схемою. На першій ітерації отримаємо розв'язок рівняння без урахування нелінійної функції N_G .

$$T_k^{(0)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M R_n(\beta_n r) Z_k(\delta_k z) C_{nk} \left(1 - e^{-\eta_{nk} t}\right). \quad (27)$$

де $C_{nk} = \frac{\bar{L}_G}{\eta_{nk}}$, $\eta_{nk} = \frac{\lambda_k}{c_v \rho} (\beta_n^2 + \delta_k^2)$. Замістимо розв'язок (27) в N_G із урахуванням інтегральних перетворень за змінною z :

$$\begin{aligned} \bar{N}_G[T_k^{(0)}(\beta_n, \delta_k, t)] &= \prod_{m=1}^4 \sum_{n_m} \sum_{k_m} D_{n_m, k_m} \left(1 - e^{-\eta_{n_m, k_m} t}\right); \\ D_{n_j, k_j} &= r n_{n_j} z k_{k_j} C_{n_j, k_j}; \quad m = [n, k; n_1, k_1; n_2, k_2; n_3, k_3; n_4, k_4] \\ r n_{n_j} &= R_n(\beta_n r_4) R_{n_1}(\beta_{n_1} r_4) R_{n_2}(\beta_{n_2} r_4) R_{n_3}(\beta_{n_3} r_4) R_{n_4}(\beta_{n_4} r_4); \\ z k_{k_j} &= \frac{1}{\|Z_k(\delta_k z)\|_{k=1}^N} \int Z_k(\beta_k z) Z_{k_1}(\beta_{k_1} z) Z_{k_2}(\beta_{k_2} z) Z_{k_3}(\beta_{k_3} z) Z_{k_4}(\beta_{k_4} z) dz. \end{aligned} \quad (28)$$

Оскільки у цьому виразі температура $T_k^{(0)}(r, z, t)$ входить у 4-му степені ми не будемо виписувати цей добуток (обчислення відповідних перетворень реалізується за допомогою відповідної програми мовою C). Випишемо добуток для однієї складової, наприклад, для $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$. Позначимо $\bar{N}_{1,1,G}$. Тоді

$$\bar{N}_{1,1,G} = \frac{1}{100^4} [D_{11}^4 (1 - e^{-\eta_{11} t})]^4 = \sum_{l=0}^4 d_l e^{-\sigma_l t}, \quad (29)$$

де $d_l = D_{1,1} \cdot (-1)^l \cdot C_l^4$; $\sigma_1 = \eta_{1,1}$, $\sigma_2 = 2\eta_{1,1}$, $\sigma_3 = 3\eta_{1,1}$, $\sigma_4 = 4\eta_{1,1}$.

Решта складових виразу (28) матиме аналогічний вигляд зі зміною індексів 1,1 на i, j .

Тепер застосуємо до (29) алгоритм еквівалентного спрощення [21], який перетворює вирази вигляду (29) у ланцюг другого порядку у просторі зображень

за Лапласом:

$$\overset{\equiv}{T}_k(\eta_{nk}, p) = \frac{a_2^{n,k}}{p} + \frac{a_0^{n,k} + a_1^{n,k}}{a_3^{n,k} + a_4^{n,k} p + a_5^{n,k} p^2}. \quad (30)$$

Застосування ітераційної процедури обчислення виразів вигляду (30) призводить до змінювання значень коефіцієнтів $a_j^{n,k}$, $j = \overline{0,5}$, але структура цього виразу залишається незмінною. Після реалізації ітераційної процедури за досягнення вимог точності (кількість ітерацій) отримуємо розв'язок задачі:

$$T_k(r, z, t) = \sum_{n=1}^M R_n(\beta_n r) \sum_{k=1}^N Z_k(\beta_k z) \left[\bar{b}_0^{n,k} + e^{-\alpha^{n,k} t} (\bar{b}_1^{n,k} f_1(\omega^{n,k} t) + \bar{b}_2^{n,k} f_2(\omega^{n,k} t)) \right].$$

Тут

$$f_1(\omega^{n,k} t) = \begin{cases} \sin(\omega^{n,k} t) & \omega^{n,k} > 0, \\ sh(\omega^{n,k} t) & \omega^{n,k} < 0, \end{cases}; \quad f_2(\omega^{n,k} t) = \begin{cases} \cos(\omega^{n,k} t) & \omega^{n,k} > 0, \\ ch(\omega^{n,k} t) & \omega^{n,k} < 0, \end{cases}$$

Отже, завдяки використанню алгоритмів еквівалентного спрощення нелінійних виразів у рівняннях отримуємо розв'язок нелінійної крайової задачі у класі лінійних функцій.

На рис. 4, 5 наведено результати моделювання температурного поля корпусу шнека.

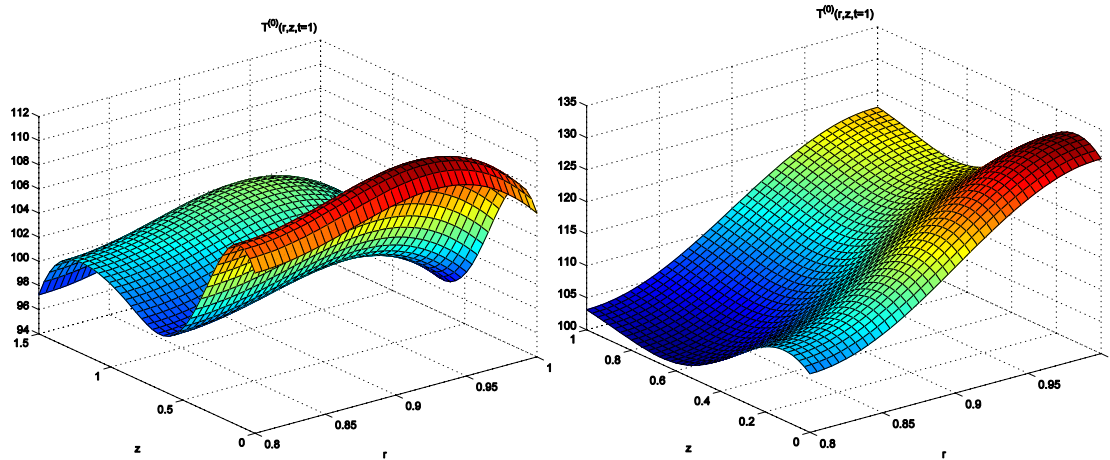


Рис. 4, 5 Температурне поле корпусу шнека за фіксованого t та r відповідно.

Шостий розділ присвячено моделюванню температурного поля полімеру у зоні завантаження і зоні затримки плавлення.

При формулюванні крайової задачі процесу нагрівання сухої поліетиленової суміші на ділянці завантаження необхідно враховувати наявність обертального руху шнеку зі сталою швидкістю $V_{\phi i}$ із нарізкою під кутом φ . Рівняння теплоперенесення набуває вигляду:

$$\rho_n c_{v_n} \left(V_{\text{шн}}^r \frac{\partial T_n}{\partial r} + V_{\text{шн}}^z \frac{\partial T_n}{\partial z} + \frac{\partial T_n}{\partial t} \right) = \lambda_n \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_n}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_n}{\partial z^2} \right). \quad (31)$$

Для поліетилену c_{v_i} суттєво залежить від температури нагрівання. Коефіцієнт теплоємності c_{v_i} апроксимується залежністю

$$c_{v_i} = c_0 + c_1 T + c_2 T^2 \approx 2,5 - 0,024 \cdot T + 5,7 \cdot 10^{-4} \cdot T^2. \quad (32)$$

На межі корпусу і шнеку має виконуватися умова рівності теплових потоків

$$\lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial r} \Big|_{r=r_3} = \lambda_{sn} \frac{\partial T_{sn}}{\partial r} \Big|_{r=r_3}. \quad (33)$$

Із урахуванням (27) маємо межу умову при $r = r_3$ для температури шнеку:

$$T_k(r, z, t) \Big|_{r=r_3} = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M R_n(\beta_n r) \Big|_{r=r_3} Z_k(\delta_k z) \frac{G_{nk}}{\eta_{nk}} \left(1 - e^{-\eta_{nk} t} \right). \quad (34)$$

$$T \Big|_{t=0} = T_k(r, z); \quad T_{\text{шн}} \Big|_{z=0} = T_{sn}^0, \quad \left[\frac{\partial T_{\text{шн}}}{\partial z} + h_2 T_{\text{шн}} \right] \Big|_{z=L_1} = 0. \quad (35)$$

Температурне поле полімерної суміші у зоні завантаження описується крайовою задачею (31)–(35). Із урахуванням залежності коефіцієнту теплоємності полімеру від температури c_{vp} (32) рівняння теплопровідності для полімеру у зоні завантаження можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial T_n}{\partial t} = a_n \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_n}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_n}{\partial z^2} \right) + NT_n(r, z, t), \quad (36)$$

де $a_n = \lambda_n / (\rho c_{01})$.

$$NT_n(r, z, t) = [c'_{11} T_n + c'_{21} T_n^2] \frac{\partial T_n}{\partial t}, \quad (37)$$

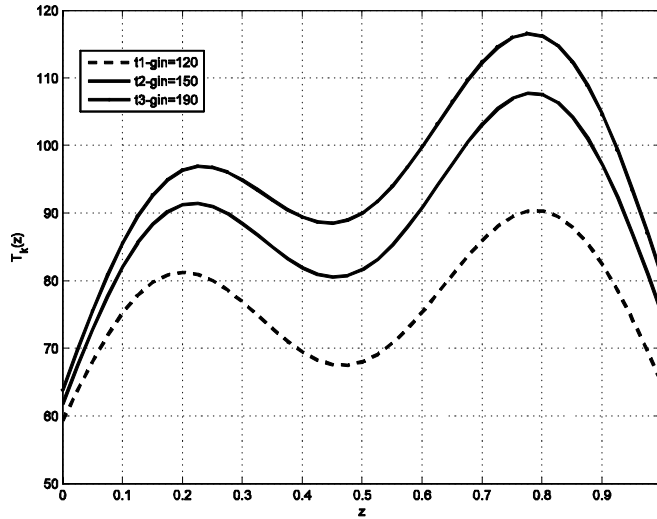
де $c'_{11} = -c_{11}/c_{01}$, $c'_{21} = -c_{21}/c_{01}$. Оскільки рівняння (36) – нелінійне, будемо шукати його розв'язок за ітераційною схемою. Розв'язок лінійної частини рівняння

$$\frac{\partial T_n^{(0)}}{\partial t} = a_{n0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_n^{(0)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_n^{(0)}}{\partial z^2} \right] \quad (38)$$

$a_{n0} = \frac{\lambda_n}{\rho c_{01}}$ із межевими умовами (35) має вигляд, аналогічний (27), і відрізняється теплофізичними параметрами і межевими умовами.

Різниця полягає в умові на межі $r = r_3$, що дає вираз для температурного поля на цій межі. Під час застосування інтегральних перетворень за просторовими змінними до крайової задачі (36)–(38) із урахуванням (34) матимемо для цієї умови:

$$\begin{aligned} \overline{T^k}(r_3, \gamma_k, t) &= \sum_{n_1=1}^M \sum_{k=1}^M \sum_{k_1=1}^M \frac{1}{\|R_{n_1}\|^2} \frac{\partial R_{n_1}}{\partial r} \overline{Z}_{k,k_1} \frac{G_{n_1,k_1}}{\eta_{n_1,k_1}} \left(1 - e^{-\eta_{n_1,k_1} t}\right). \\ &= \sum_{n=1}^M [I_0(\beta_n r_3) - D_n(r_2) J_0(\beta_n r_3)] \left[\sum_{n_1=1}^M \sum_{k=1}^M \sum_{k_1=1}^M UG_{n_1,k,k_1} \left(1 - e^{-\eta_{n_1,k_1} t}\right) \right]. \quad (39) \\ UG_{n,n_1,k,k_1} &= R^{\bar{i}}(r_3) [I_1(\beta_{n_1} r_3) - D_{n_1}(r_2) J_1(\beta_{n_1} r_3)] \overline{Z}_{k,k_1} G_{n_1,k_1} \left(1 - e^{-\eta_{n_1,k_1} t}\right), \\ R^{\bar{i}}(r_3) &= [I_0(\beta_n r_3) - D_n(r_2) J_0(\beta_n r_3)]. \end{aligned}$$

Рис. 6 Графіки температури на межі $r = r_3$

На рис. 6 наведено залежність температури на межі корпус – шнек від параметрів.

Використання цього виразу в якості межевої умови при розв'язанні задачі теплоперенесення (36), (35) та (37) призводить до оперування із $M \times N \times N$ складовими вигляду $UG_{n_1,k,k_1} \left(1 - e^{-\eta_{n_1,k_1} t}\right)$, що практично унеможлиблює їхнє подальше використання. Тому виконаємо спрощення цього виразу.

$$\begin{aligned} \overline{T^k}(r_3, \gamma_k, t) &\approx \sum_{n_1}^M \sum_k^N \sum_{k_1}^N UG_{n_1,k,k_1} \left(1 - e^{-\eta_{n_1,k_1} t}\right) \\ &= Gr_{n,k}(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^M \left[gr_0^{n,k} + e^{-\alpha^{n,k} t} (gr_1^{n,k} \sin(\omega^{n,k} t) + gr_2^{n,k} \cos(\omega^{n,k} t)) \right]. \end{aligned}$$

Алгоритм, за яким виконується таке спрощення, викладено у розділі 4. Похибка, що природно виникає за такого спрощення, компенсується за рахунок ітераційного процесу при вирішенні нелінійної задачі. Запишемо рівняння теплопереносу у шнеці (температурне поле суміші полімеру) після застосування перетворень за просторовими змінними z, r :

$$\overline{\overline{T}}_{0,n,k}(t) + \eta_{n,k} \overline{\overline{T}}_{n,k}(t) = gz_{n,k} + Gr_{n,k}(t).$$

У просторі зображень за часовою координатою t матимемо

$$\begin{aligned} \overline{\overline{T0}}_{n,k}(p) &= \frac{1}{p + \eta_{n,k}} \left[\frac{gz_{n,k}}{p} + \frac{(gr_0^{n,k} \omega^{n,k} - gr_1^{n,k} \alpha^{n,k}) + gr_1^{n,k} (p + \alpha^{n,k})}{(p + \alpha^{n,k})^2 + (\omega^{n,k})^2} \right] \\ &= \frac{gz_{n,k}}{\eta_{n,k}} \frac{1}{p} + \frac{t0_0^{n,k} + t0_1^{n,k} p}{t0_3^{n,k} + t0_4^{n,k} p + p^2}. \end{aligned}$$

У просторі оригіналів маємо

$$T^{(0)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^M R_n(r) Z_k(z) T0(t). \quad (40)$$

$$T0(t) = gz1^{n,k} + e^{-\alpha^{n,k}t} \left[t1_0^{n,k} \sin(\omega^{n,k}t) + t1_1^{n,k} \cos(\omega^{n,k}t) \right]. \quad (41)$$

У цьому виразі враховано наближену рівність

$$\frac{1}{p + \eta^{n,k}} \frac{t0_0^{n,k} + t0_1^{n,k} p}{t0_3^{n,k} + t0_4^{n,k} p + p^2} \Rightarrow e^{-\alpha^{n,k}t} \left[t1_0^{n,k} \sin(\omega^{n,k}t) + t1_1^{n,k} \cos(\omega^{n,k}t) \right].$$

Після отримання розв'язку рівняння у вигляді (40) із урахуванням (41) розв'язок рівняння (36) шукатимемо за ітераційною схемою. Нагадаємо, що

$$NT_{\Pi}^{(1)}(r, z, t) = \left[c'_{11} T_{\Pi}^{(0)} + c'_{21} (TT^{(0)})_{\Pi}^2 \right] \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial t}.$$

Загальну схему розв'язання нелінійного рівняння запишемо у вигляді

$$T_{\Pi}^{(m)}(r, z, t) = T_{\Pi}^{(0)}(r, z, t) + NT_{\Pi}^{(m-1)}(r, z, t), \quad m = 1, 2, \dots$$

Цьому виразу відповідає оригінал (у просторі інтегральних перетворень за просторовими змінними)

$$D_{nk}^{(0)}(t) = \sum_{n,k=1}^M e^{-\alpha_{nk}t} \begin{cases} e1_{nk} \sin \omega_{nk} t + e2_{nk} \cos \omega_{nk} t, & \omega_{nk} < 0, \\ e1_{nk} \operatorname{sh} \omega_{nk} t + e2_{nk} \operatorname{ch} \omega_{nk} t, & \omega_{nk} > 0. \end{cases} \quad (42)$$

Тоді розв'язок у першому наближенні набуде вигляду

$$T^{(1)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M R(\delta_n r) Z(\beta_k z) \left[\frac{G_{nk}}{\eta_{nk}} (1 - e^{-\eta_{nk}t}) + D_{nk}^{(0)}(t) \right].$$

Подальші наближення реалізуються за аналогічною схемою:

$$T^{(m)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M R(\delta_n r) Z(\beta_k z) \left[\frac{G_{nk}}{\eta_{nk}} (1 - e^{-\eta_{nk}t}) + D_{nk}^{(m-1)}(t) \right].$$

На рис. 7, 8 наведено температурні поля у зоні завантаження для перших трьох ітерацій.

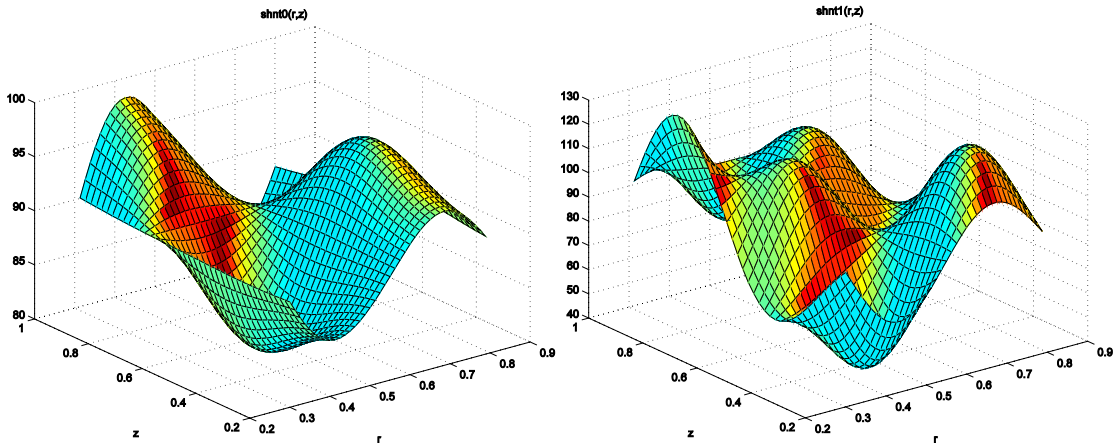


Рис. 7,8 Температурне поле суміші у 1-му та 3-му наближеннях
З графіків 7, 8 видно, що на третій ітерації за $z = 0,9 = L_1$ досягається значення температури суміші, близьке до температури плавлення ПЕНГ.

Оцінка похибки ітерацій

Інтегральна оцінка похибки:

$$\begin{aligned} \Delta^{(m)} &= \int_{r_a}^{r_b} \int_{z_a}^{z_b} \int_{T_0}^{T_k} \left[\sum_{n,k} R_n(r) Z_k(z) D_{n,k}^{(m)}(t) - \sum_{n,k} R_n(r) Z_k(z) D_{n,k}^{(m-1)}(t) \right]^2 dr dz dt \\ &= \int_{T_0}^{T_k} \sum_{n,k} [D_{n,k}^{(m)}(t) D_{n,k}^{(m)}(t) - 2D_{n,k}^{(m)}(t) D_{n,k}^{(m-1)}(t) + D_{n,k}^{(m-1)}(t) D_{n,k}^{(m-1)}(t)] dt \end{aligned} \quad (43)$$

Процеси у зоні затримки плавлення.

Сформулюємо задачу про рух розплаву полімеру у примежовій області шнек – корпус шнека із урахуванням конвективної складової. До рівняння (22) треба додати рівняння руху плівки розплаву. Оскільки плівка розплаву є тонка, досить враховувати розподіл швидкості руху рідини вздовж осової координати z . Тоді матимемо:

$$\rho c_{ef} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}; \quad c_{ef} = c + \frac{1}{\rho} L \delta(T - T^*). \quad (44)$$

Початкові умови:

$$v(z, 0) = V_z(z), \quad T(z, 0) = T_p(z, 0). \quad (45)$$

Межові умови:

$$v(t)_{z=z_1} = V_z(t), \quad T(t)_{z=z_1} = T_p(t), \quad T(r, z, t)|_{r=r_3} = T_{ml,z,t}. \quad (46)$$

Ітераційна процедура розв'язання наведеної системи рівнянь полягає у такому.

1. Спочатку отримуємо розв'язок лінеаризованого рівняння, що відповідає (44).

$$\rho \frac{\partial v^{(0)}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial z^2}.$$

$\nu = \mu/\rho$. Початкова умова $v(z)_{t=0} = v_0$.

Межові умови

$$\left[\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} - h_v v(z,t) \right]_{z=z_0} = 0; \quad \left[\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} + h_v v(z,t) \right]_{z=z_0} = 0. \quad (47)$$

Із урахуванням отриманих власних функцій $Z_k(\beta_k z) = \sin(\beta_k z) + \beta_k/h_v \cos(\beta_k z)$ розв'язок рівняння отримуємо у вигляді

$$v^{(0)}(z,t) = \sum_1^N Z_k(\beta_k z) v_k e^{-\eta_k t}.$$

2. Цей вираз використовуємо для розв'язання лінійної частини рівняння відносно температури

$$[\rho c \theta_v - LT^*] \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} + v^{(0)} \text{grad} T^{(0)} \right) = \text{div}(k \text{grad} T^{(0)}) + q_v.$$

3. Відшукуємо розв'язок рівняння із урахуванням залежності коефіцієнта теплоємності від температури розплаву $c \theta_v + L(T - T^*) - T^{(1)}(z,t)$.

4. Визначаємо вираз для тиску із використанням формули $p = \rho R T^{(1)}(z,t)$.

5. Отримуємо розв'язок рівняння (44) у першому наближенні, тобто розв'язуємо рівняння

$$\rho \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - N_v(v^{(0)}, T^{(1)}); \quad N_v(v^{(0)}, T^{(1)}) = v^{(0)}(z,t) \frac{\partial v^{(0)}}{\partial z} + R \rho \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}.$$

5. Пункти 2—5 повторюємо доти, доки $\|T^{(m+1)}(z,t) - T^{(m)}(z,t)\| > \Delta$ із заміною у викладених пунктах індексів 0 і 1 на m і $m+1$.

Оскільки ітераційна процедура розв'язання нелінійних рівнянь викладена у попередніх розділах, ми у цій частині її не наводимо.

У сьомому розділі вирішується задача плавлення нагрітої у зоні завантаження до температури плавлення полімерної суміші.

Крайова задача про нагрівання твердої суміші ("пробки") у зоні плавлення є аналогічна задачі про нагрівання "пробки" у зоні завантаження. Відмінність полягає у тому, що змінюються умови на межі Γ фазового переходу тверда фаза – рідинна фаза у тому сенсі, що ця межа є рухома. Ітераційна процедура аналогічна викладеній у попередньому розділі із урахуванням необхідності обчислення інтегральних перетворень у змінних межах $r \in [r_a, r'_b = r_b - \xi(z)] \subset \Omega_t$.

$$\rho_n c_{v_n}(T_i) \left(V_{\text{шн}}^r \frac{\partial T_n}{\partial r} + V_{\text{шн}}^z \frac{\partial T_n}{\partial z} + \frac{\partial T_n}{\partial t} \right) = \lambda_n \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_n}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_n}{\partial z^2} \right). \quad (48)$$

Отже, алгоритм розв'язання рівняння (48) відрізняється від наведеного у попередньому розділі у частині обчислення інтегралів від функцій Бесселя другого роду з огляду на змінні межі. Інтегральні перетворення нелінійної складової рівняння теплопровідності (48):

$$nr_{m,n,l} = \frac{1}{\|B_m(\beta_m r'_b)\|} \int_{r_a}^{r_b - \xi(z)} B(\beta_m r) B(\beta_n r) B(\beta_l r) r dr.$$

Природно, що верхня межа інтегралів по r від аналогічних до (48) виразів по мірі просування "пробки" вздовж осі z зменшуватиметься і прямуватиме до нижньої межі r_a . Точка L , в якій $r'_b \approx r_a$ визначатиме довжину зони плавлення і перехід до зони гомогенізації та кристалізації розплаву полімеру.

Оскільки рівняння відносно швидкості руху розчину полімеру містить градієнти тиску у розчині, почнемо розв'язання задачі із розв'язання крайової задачі відносно температури. Із урахуванням температурної залежності коефіцієнту теплоємності c_v , а також наявності конвективної складової і дисипативної складової q_T маємо

$$\rho [c_{0v} + L\delta(T - T^*)] \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda^+ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_T.$$

Відокремимо у цьому рівнянні лінійну частину

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda^+}{c_{0v} \rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - C_T - \frac{1}{\rho} [L\delta(T - T^*)] \frac{\partial T}{\partial t} + q_T,$$

де λ^+ – стрибкоподібне змінювання коефіцієнту теплопровідності на межі поділу тверда фаза – рідинна фаза, через C_T позначено конвективну складову у рівнянні теплоперенесення

$$C_\Phi = v_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad \Phi = \{v_r, v_z, T\}. \quad (49)$$

Дослідження масо і теплоперенесення у зоні плавлення складається із трьох етапів. На першому етапі виконується моделювання крайової задачі теплопровідності, тобто без урахування конвективних складових і дисипативної складової. Розв'язок цієї задачі отримано у попередньому розділі.

$$T^{(0)}(r, z, t) = \sum_{n,k}^{M,N} R_n(r) Z_k(z) [T0_{m,k} + T1_{m,k} e^{-\gamma_{m,k} t}]. \quad (50)$$

Наявність градієнту тиску у рівняннях відносно швидкості руху розплаву врахуємо відповідно до рівняння $p = \rho RT$, тобто $\partial p / \partial r = R\rho \partial T / \partial r$,

$\partial p/\partial r = R\rho\partial T/\partial z$ із урахуванням (50).

Тоді рівняння руху можна записати у такому вигляді.

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -R \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} + \mu_e \left[\Delta v_r + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} \right] - C_r; \quad (51)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -R \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} + \mu_e \left[\Delta v_z + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right] - C_z; \quad (52)$$

Позначимо, як і раніше, лінійну частину для компонент швидкості руху розплаву через $v_r^{(0)}(r, z, t)$, $v_z^{(0)}(r, z, t)$. Застосування до рівнянь (51), (52) інтегральних перетворень за просторовими змінними дає для $m = 1, 2, \dots$:

$$\frac{d\overline{v_r^{(m)}}}{dt} + \gamma_{n,k}^{v_r} \overline{v_r^{(m)}} = -\overline{RT^{(m-1)}}_r(t) = F_r^{(m-1)}(t)_{n,k} + \overline{C_r} \left(v_r^{(m-1)}(r, z, t), v_z^{(m-1)}(r, z, t) \right);$$

$$\frac{d\overline{v_z^{(m)}}}{dt} + \gamma_{n,k}^{v_z} \overline{v_z^{(m)}} = -\overline{RT^{(m-1)}}_z(t) = F_z^{(m-1)}(t)_{n,k} + \overline{C_z} \left(v_r^{(m-1)}(r, z, t), v_z^{(m-1)}(r, z, t) \right);$$

Із урахуванням виразу (50) після застосування інтегральних перетворень за просторовими змінними у "лінійному наближенні" матимемо

$$(V^{(0)})_r^{m,k}(p) = \frac{1}{p + \gamma_{m,k}^{v_r}} \left[vr_{m,k} - \sum_{m_1, k_1}^{M, K} r 2_{m, m_1} z d_{k, k_1} \left(\frac{T0_{m_1, k_1}}{p} + \frac{T1_{m_1, k_1}}{p + \gamma_{m_1, k_1}^T} \right) \right].$$

$$(V^{(0)})_z^{m,k}(p) = r_m z_k \frac{1}{p + \gamma_{m,k}^{v_z}} \left[vz_{m,k} - \sum_{m_1, k_1}^{M, K} r 2_{m, m_1} z d_{k, k_1} \left(\frac{T0_{m_1, k_1}}{p} + \frac{T1_{m_1, k_1}}{p + \gamma_{m_1, k_1}^T} \right) \right],$$

де $r 2_{m, m_1}$, $z d_{k, k_1}$ – коефіцієнти інтегральних перетворень за змінними r і z відповідно.

Підсумовування у цих виразах із застосуванням алгоритму еквівалентного спрощення дає:

$$(V^{(0)})_r^{m,k}(p) \approx \frac{vr_2}{p} + \frac{vr_0 + vr_1 p}{vr_3 + vr_4 p + vr_5 p^2}; \quad (V^{(0)})_z^{m,k}(p) \approx \frac{vz_2}{p} + \frac{vz_0 + vz_1 p}{vz_3 + vz_4 p + vz_5 p^2}.$$

Оригінали від цих виразів є:

$$vr^{(0)}(r, z, t) = \sum_{m=1}^M R_m(\beta_m r) \sum_{k=1}^N Z_k(\alpha z) Vrt_{m,k}^{(0)}(t); \quad (53)$$

$$Vrt_{m,k}^{(0)}(t) = vrt_2 + e^{-\gamma_{m,k}^{v_r} t} \left(vrt_1 \sin(\omega_{v_r} t) + vrt_1 \cos(\omega_{v_r} t) \right);$$

$$vz^{(0)}(r, z, t) = \sum_{m=1}^M R_m(\beta_m r) \sum_{k=1}^N Z_k(\alpha z) Vz_{m,k}^{(0)}(t) \quad (54)$$

$$Vzt_{m,k}^{(0)}(t) = vzt_2 + e^{-\gamma_{m,k}^{v_z} t} \left(vzt_1 \sin(\omega_{v_z} t) + vzt_1 \cos(\omega_{v_z} t) \right).$$

За наявності виразів для компонент швидкості руху розплаву у лінійному наближенні можна визначити конвективні складові у рівняннях для швидкостей і температури. Замістимо (50), (53), (54) у (49). Наведемо вираз для C_{v_r} . Вираз для C_{v_z} – аналогічний.

$$C_{v_r}^{(0)} = \sum_{m_1, m_2, k_1, k_2}^M K R_{m_1}(\beta_{m_1} r) Z_{k_1}(\alpha_{k_1} z) \text{Vrt}_{m_1, k_1}^{(0)}(t) \frac{dR_{m_2}(\beta_{m_2} r)}{dr} Z_{k_2}(\alpha_{k_2} z) \text{Vrt}_{m_2, k_2}^{(0)}(t) \\ + \sum_{m_1, m_2, k_1, k_2}^M K R_{m_1}(\beta_{m_1} r) Z_{k_1}(\alpha_{k_1} z) \text{Vzt}_{m_1, k_1}^{(0)}(t) R_{m_2}(\beta_{m_2} r) \frac{dZ_{k_2}(\alpha_{k_2} z)}{dz} \text{Vrt}_{m_2, k_2}^{(0)}(t).$$

Застосування до цього виразу інтегральних перетворень за просторовими змінними призводить до виразів вигляду

$$\overline{\overline{C}}_{v_r, m, k}^{(0)} = \sum_{m_1, m_2, k_1, k_2}^M K F_{m_1, m_2, k_1, k_2}^{m, k}(t);$$

$$F_{m_1, m_2, k_1, k_2}^{m, k}(t) = F1_{m_1, m_2, k_1, k_2}^{m, k} \text{Vrt}_{m_1, k_1}^{(0)}(t) \text{Vrt}_{m_2, k_2}^{(0)}(t) + F2_{m_1, m_2, k_1, k_2}^{m, k} \text{Vzt}_{m_1, k_1}^{(0)}(t) \text{Vrt}_{m_2, k_2}^{(0)}(t).$$

Підсумовування за індексами m_1, m_2, k_1, k_2 із застосуванням алгоритму еквівалентного спрощення дає:

$$C_r^{m, k}(p) \approx \frac{vr_2^{m, k}}{p} + \frac{vr_0^{m, k} + vr_1^{m, k} p}{vr_3^{m, k} + vr_4^{m, k} p + vr_5^{m, k} p^2}; \quad (55)$$

За аналогічним алгоритмом отримуємо вираз для

$$C_z^{m, k}(p) \approx \frac{vz_2^{m, k}}{p} + \frac{vz_0^{m, k} + vz_1^{m, k} p}{vz_3^{m, k} + vz_4^{m, k} p + vz_5^{m, k} p^2}; \quad C_T^{m, k}(p) \approx \frac{t_2^{m, k}}{p} + \frac{t_0^{m, k} + t_1^{m, k} p}{t_3^{m, k} + t_4^{m, k} p + t_5^{m, k} p^2}. \quad (56)$$

Алгоритм обчислення коефіцієнтів $vr_j^{m, k}$, $vz_j^{m, k}$, $t_j^{m, k}$ у конвективних складових викладений у розділі 4.

Оскільки дисипативна складова у рівнянні для температури може бути записана у вигляді

$$q_T = \frac{2A\mu_e}{\rho c 0_v} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2,$$

із урахуванням (55), (56) матимемо

$$Q_T^{m, k}(p) \approx \frac{2A\mu_e}{\rho c 0_v} \left[\frac{Tq_2}{p} + \frac{Tq_0 + Tq_1 p}{Tq_3 + Tq_4 p + Tq_5 p^2} \right].$$

Тоді у першому наближенні для температурного поля у просторі зображень матимемо:

$$\overline{\overline{\overline{T}}}_{m,k}^{(1)}(p) = \overline{\overline{\overline{T}}}_{m,k}^{(0)}(p) - C_T^{m,k}(p) + \overline{\overline{\overline{q}}}_{T,m,k}(p) \approx \frac{t1_{m,k}^0 + t1_{m,k}^1 p}{t1_{m,k}^3 + t1_{m,k}^4 p + t1_{m,k}^5 p^2}.$$

Або у просторі оригіналів

$$T^{(1)}(r, z, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N R_m(r) Z_k(z) TT_{n,k}^{(1)}(t);$$

$$TT_{n,k}^{(1)}(t) = t1_{m,k}^{(0)} - e^{-t1_{m,k}^{(4)} t} (t1_{m,k}^{(1)} f_1(t1_{m,k}^{(5)} t) + t1_{m,k}^{(2)} f_2(t1_{m,k}^{(5)} t)),$$

де $f_1(at), f_2(at)$ – оригінали від ланцюгів другого порядку.

Обчислення цих інтегралів за алгоритмами, що наведені у розділі 4, виконується один раз для всіх ітерацій. У результаті розв'язки для компонент швидкості руху розплаву і температурного поля набувають такого вигляду:

$$v_r^{(m)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M R_n(r) \sum_{k=1}^N Z_k(z) v_{r,n,k}^{(m)}(t); \quad v_z^{(m)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M R_n(r) \sum_{k=1}^N Z_k(z) v_{z,n,k}^{(m)}(t).$$

На рис. 9, 10 наведено графіки компонент швидкостей $v_r^{(m)}(r, z, t)$ та $v_z^{(m)}(r, z, t)$ руху розплаву полімеру у зоні плавлення:

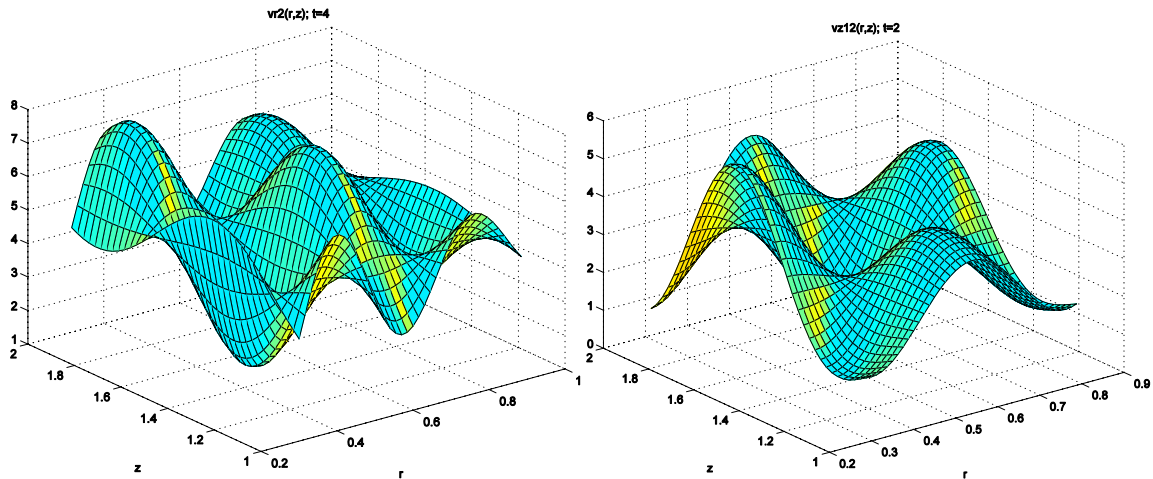


Рис. 9,10 Поля швидкостей $v_r^{(3)}(r, z, t)$ та $v_z^{(3)}(r, z, t)$:

Розв'язок нелінійного рівняння теплопровідності для m -го наближення набуває вигляду

$$T^{(m)}(r, z, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N R_m(r) Z_k(z) TT_{n,k}^{(m)}(t) \quad (57)$$

$$TT_{n,k}^{(m)}(t) = t1_{m,k}^{(0,m-1)} - e^{-t1_{m,k}^{(4,m-1)} t} [t1_{m,k}^{(1,m-1)} f_1(t1_{m,k}^{(5,m-1)} t) + t1_{m,k}^{(2,m-1)} f_2(t1_{m,k}^{(5,m-1)} t)]. \quad (58)$$

Наведемо графіки температурних полів, отриманих на перших 3-х ітераціях.

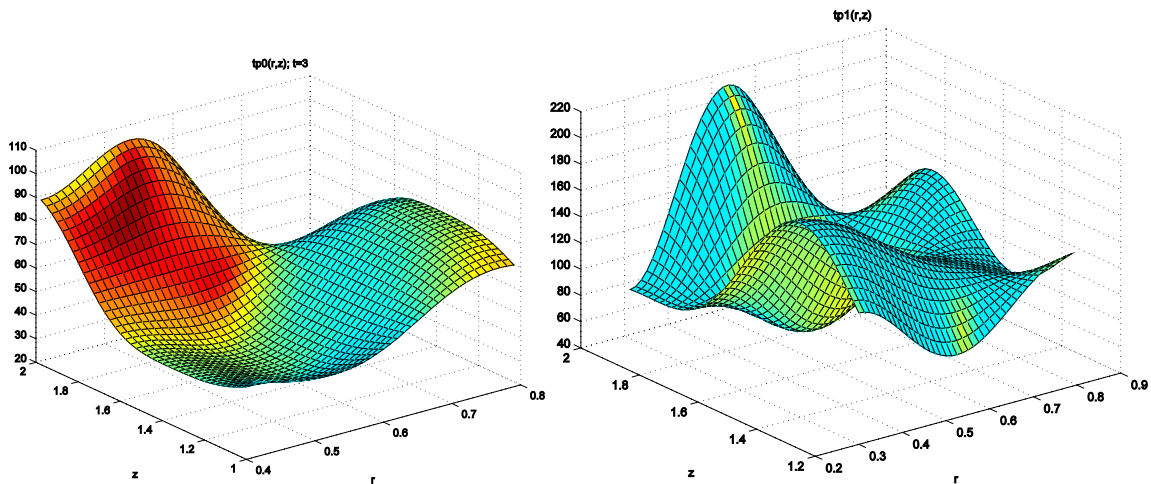


Рис. 11,12 Температурне поле у 0-му та 3-му наближеннях

За наявним наближеним розв'язком (57) для температурного поля розплаву полімеру у першому наближенні можемо виписати вираз для поля тиску

$$p^{(m)}(r, z, t) = \rho RT^{(m)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^N R_n(r) Z_k(z) TT_{n,k}^{(m)}(t)$$

із урахуванням виразу (58) для $TT_{n,k}^{(m)}(t)$.

Оскільки нас цікавить значення тиску на виході із зони плавлення полімеру, слушно визначати значення тиску на межі зони плавлення L і зони дозування:

$$p^{(m)}(r, L, t) = \rho RT^{(m)}(r, L, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^N R_n(r) Z_k(L) TT_{n,k}^{(m)}(t).$$

Отриманий розв'язок задачі про нагрівання "пробки" – твердої полімерної суміші та процесу утворення тонкої плівки розплаву у кінці зони затримки плавлення можна розглядати як перший крок у визначенні межі фазового переходу тверда фаза -- рідинна фаза.

Утворення рідинної фази супроводжується, природно, зменшенням частки твердої фази ("пробки"). Процес плавлення призводить до утворення межі ($r \in [r_a, r_b - \xi]$) для твердої фази і $r \in (r_b, r_a + \xi)$) для рідинної фази.

Суттєва відмінність задачі про фазовий перехід у процесі плавлення полімеру на відміну від класичних задач типу Стефана полягає у тому, що:

1) у процесі плавлення полімеру в екструдері тверда суміш ("пробка") рухається у напрямку осі z зі швидкістю V_z ;

2) це призводить до залежності змінної межі від поздовжньої координати z , тобто $\xi = \xi(z)$.

Визначення межі фазового переходу

На межі фазового переходу мають виконуватися умови збереження тепла

на вільній межі, що поділяє тверду фазу і розчинну:

$$L_V V_n \Big|_{\Gamma} = \frac{\lambda_s}{\rho_s} \frac{\partial T_s}{\partial n} \Big|_{\Omega_s} - \frac{\lambda_l}{\rho_l} \frac{\partial T_l}{\partial n} \Big|_{\Omega_l},$$

де $V_n = d\xi/dz$ – швидкість руху межі фазового переходу, L_V – теплота фазового переходу (визначається експериментально).

У розділі 5 отримано вираз для температурного поля полімерної суміші у вигляді (42).

Тоді розв'язок у першому наближенні набуде вигляду

$$T^{(1)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M R(\delta_n r) Z(\beta_k z) \left[\frac{G_{nk}}{\eta_{nk}} (1 - e^{-\eta_{nk} t}) + D_{nk}^{(0)}(t) \right].$$

Подальші наближення реалізуються за аналогічною схемою:

$$T^{(m)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M R(\delta_n r) Z(\beta_k z) \left[\frac{G_{nk}}{\eta_{nk}} (1 - e^{-\eta_{nk} t}) + D_{nk}^{(m-1)}(t) \right].$$

З огляду на геометрію шнеку ($R_{\text{оі}} \ll L$) можна вважати, що

$$\frac{\partial T}{\partial n} \approx \frac{\partial T}{\partial r} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial B(\beta_m r)}{\partial r} \Big|_{r=r'_b} \sum_{k=1}^K Z(\alpha_k z) t t_{m,k}^{(pl)}(t).$$

Тоді для твердої і рідинної фаз можна записати:

$$\frac{\partial T_s}{\partial n} \approx \frac{\partial T_s}{\partial r} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial B(\beta_m r)}{\partial r} \Big|_{r=r'_b} \sum_{k=1}^K Z(\alpha_k z) t t_{m,k}^{(sl)}(t).$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial n} \approx \frac{\partial T_l}{\partial r} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial B(\beta_m r)}{\partial r} \Big|_{r=r'_a} \sum_{k=1}^K Z(\alpha_k z) t t_{m,k}^{(pl)}(t).$$

Із урахуванням того, що густина матеріалу полімеру майже не змінюється із переходом із твердого у рідинний стан, маємо таке рівняння для визначення швидкості руху межі розділу фаз:

$$L_V V_n = \frac{1}{\rho_{pl}} \sum_{m=1}^M \frac{\partial B(\beta_m r)}{\partial r} \Big|_{r=r'} \sum_{k=1}^K Z(\alpha_k z) \left[\lambda_s t t_{m,k}^{(sl)}(t) - \lambda_l t t_{m,k}^{(pl)}(t) \right].$$

Далі, для того, щоб отримати вираз для межі поділу фаз, зробимо припущення, що процес плавлення полімеру в екструдері із утворенням межі фазового переходу можна вважати квазістаціонарним. Тоді можна записати рівняння для визначення межі фазового переходу у такому вигляді:

$$L_V V_n = \frac{1}{\rho_{pl}} \sum_{m=1}^M \frac{\partial B(\beta_m r)}{\partial r} \Big|_{r=r'} \sum_{k=1}^K Z(\alpha_k z) \left[\lambda_s t t_{m,k}^{(sl)}(0) - \lambda_l t t_{m,k}^{(pl)}(0) \right].$$

$$V_n = \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{\rho L_V} \sum_{k=1}^K Z(\alpha_k z) C_k; C_k = \frac{1}{\rho_{pl}} \sum_{m=1}^M \frac{\partial B(\beta_m r)}{\partial r} \Big|_{r=r'} \left[\lambda_s t t_{m,k}^{(sl)}(0) - \lambda_l t t_{m,k}^{(pl)}(0) \right].$$

Початкова умова для цього рівняння: $\xi(0) = \frac{1}{\rho L_V} \sum_{k=1}^K Z(\alpha_k 0) C_k$.

У 8-му розділі виконано математичне моделювання процесів гомогенізації і кристалізації полімерів.

Перехід полімерів із рідинного стану у твердий супроводжується складними хіміко-фізичними процесами – багатостадійними реакціями полімеризації мономеру, переходом аморфної фази полімеру у кристалічну. Аналіз цього переходу починають із процесу полімеризації, який визначає просторово-часовий розподіл температури для процесу кристалізації. Нестационарні, неізотермічні і просторово розподілені явища полімеризації і кристалізації визначають напружений і деформований стан полімеру.

Запроваджуються два макрокінетичні параметри α і β , які визначають питомий внесок відповідно полімерної і кристалічної фаз. Ступінь полімеризації $\alpha(x, t)$ визначає ступінь завершеності процесу полімеризації і може приймати значення від 0 (вміст полімеру – 0) до 1 (весь мономер перейшов у полімер). Ступінь кристалізації $\beta(x, t)$ визначає ступінь завершеності процесу кристалізації і може приймати значення від 0 (вміст кристалічної фази – 0) до 1 (уся аморфна фаза полімеру перейшла у кристалічну).

За припущення, що технологічні напруження не впливають на температуру і протікання процесу кристалізації, треба вирішувати такі задачі:

1) задачу визначення температурних полів і ступеню кристалізації, або теплокінетичну задачу;

2) крайову задачу визначення напружено-деформованого стану (НДС) системи, що твердіє.

Задача про визначення температурних полів і ступеню полімеризації та кристалізації описується такою крайовою задачею:

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \rho(T)\left(Q_\alpha\frac{d\alpha}{dt} + Q_\beta\alpha\frac{d\beta(t)}{dt}\right). \quad (59)$$

кінетичне рівняння полімеризації

$$\frac{d\alpha(x, t)}{dt} = K_\alpha(1 - \alpha(x, t))(1 + c_0\alpha(x, t))(1 + n\alpha(x, t)) \quad (60)$$

кінетичне рівняння кристалізації

$$\frac{d\beta(x, t)}{dt} = K_\beta(T)(1 + A_0\beta(x, t))(\beta_p(T) - \beta(x, t)), \quad x \in V. \quad (61)$$

$$K_\alpha = k_\alpha \exp\left(-\frac{U}{RT}\right); \quad K_\beta = k_\beta \exp\left(-\frac{E}{RT} - \frac{\Psi}{T_p - T}\right). \quad (62)$$

Початкові та межові умови:

$$\beta(x, 0) = 0, \quad T(x, 0) = T_0;$$

$$\lambda(T)n\text{grad}T(x,t) = h(T(x,t) - T_{av}); \quad n \cdot \text{grad}T(x,t) = 0, \quad x \in S_2;$$

$$T(x,t) = T^*(x,t); \quad x \in S_1,$$

де c – питома теплоємність; ρ – густина; λ – коефіцієнт теплопровідності; Q_α, Q_β – інтенсивності теплових джерел, що обумовлені полімеризацією і кристалізацією відповідно; R – універсальна газова стала; $U, E, k_\alpha, k_\beta, c_0, c_1, n$ – кінетичні сталі, що визначаються експериментально із калориметричних вимірювань; T_p – температура плавлення; β_p – рівноважний ступінь кристалізації.

Теплофізичні властивості полімеру низької густини (ПЕНГ):

$$c = 2,0 - 3,5 \text{ кДж/кг К}; \quad \lambda = 0,29 - 0,42 \text{ Вт/м К}; \quad T_{pl} = 376 - 388 \text{ К}; \quad T_c = 138 \text{ К};$$

Теплота плавлення – 7 кДж/моль.

Результат розв'язання системи рівнянь (59)–(62) є визначення температурного поля і ступеню кристалізації, із урахуванням яких вирішується задача напружено-деформованого стану (НДС) виробу.

Для ПЕНГ вихідні дані: $K_1 = 2,33 \cdot 10^4 \text{ 1/с}$, $U_1 = 30,2 \text{ Кдж/моль}$, $\Psi = 182 \text{ К}$, $T_p = 415 \text{ К}$, $A_0 = 82$, $Q_k = 164 \text{ Кдж/кг}$; $k = 0,1$, $\mu_a = 4,19 \cdot 10^6 \text{ Па}$, $B_{cr} = 1,78 \cdot 10^8 \text{ Па}$, $a_a = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}$, $a_{cr} = 0,9 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}$, $B_a^\infty = 1,08 \cdot 10^8 \text{ Па}$. $R = 8,314 \text{ Дж/(моль К)}$; $1 \text{ Дж} = 4,189 \text{ кал}$.

Розглянемо рівняння відносно ступеню полімеризації α та ступеню кристалізації β .

$$\begin{aligned} (1-\alpha)(1+c_0\alpha)(1+n\alpha) &= (1-\alpha)[1+(c_0+n)\alpha+c_0n\alpha^2] \\ &= 1+(c_0+n-1)\alpha+(c_0n-(c_0+n))\alpha^2-c_0n\alpha^3 = a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+a_3\alpha^3. \\ a_0 &= 1; a_1 = c_0; a_2 = -1; a_3 = -c_0, \quad (n=1). \end{aligned}$$

Маємо рівняння

$$\frac{d\alpha}{dt} = K_\alpha [1 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3]; \quad K_\alpha = k_\alpha \exp\left(-\frac{U}{RT}\right).$$

Оскільки це рівняння містить нелінійну складову відносно $T(r,t)$, треба апроксимувати експоненту, наприклад, дробово-раціональним виразом типу

$$e^{\pm x} \approx \frac{12 \pm 6x + x^2}{12 \mp 6x + x^2},$$

який за $x < 5$ забезпечує [21] гарне наближення до експоненти. Позначимо $C = U/R$. Тоді матимемо

$$K_\alpha = k_\alpha \frac{12 - 6 \cdot T/C + T^2/C^2}{12 + 6 \cdot T/C + T^2/C^2}; \quad C = U/R.$$

Заміщення цього виразу у рівняння (65) дає:

$$(12 + 6T/C + T^2/C^2) \frac{d\alpha(x,t)}{dt} = (12 - 6T/C + T^2/C^2)(1 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3)$$

Відокремимо у цьому рівнянні складові відносно α та T, α :

$$\frac{d\alpha(x,t)}{dt} = 1/12(1 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3) + N_\alpha(T, \alpha); \quad (63)$$

N_α – нелінійна складова рівняння:

$$N_\alpha = T/C \left[6(T/C - 1)(1 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3) - (1 + T/C) \frac{d\alpha(x,t)}{dt} \right]. \quad (64)$$

Отримаємо спочатку розв'язок рівняння (63) за $N_\alpha = 0$.

$$\frac{d\alpha^{(0)}}{dt} = 1 + a_1\alpha, \quad \alpha(0) = 0; \quad \alpha^{(0)}(t) = \frac{1}{a_1} \left(e^{a_1 t} - 1 \right);$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}^{(1)}(p) &= \frac{1}{p(p - a_1)} + \mathcal{L}_t \{ a_2 [\alpha^{(0)}(t)]^2 + a_3 [\alpha^{(0)}(t)]^3 \} \\ &= \frac{1}{p(p - a_1)} + \mathcal{L}_t \left\{ \frac{a_2}{a_1^2} \left(e^{a_1 t} - 1 \right)^2 + \frac{a_3}{a_1^3} \left(e^{a_1 t} - 1 \right)^3 \right\}; \end{aligned}$$

$$\bar{\alpha}^{(1)}(p) \approx \frac{A_2}{p} + \frac{A_0 + A_1 p}{A_3 + A_4 p + A_5 p^2}; \quad \alpha^{(1)}(t) \approx A_2 + e^{-\gamma_\alpha t} [\bar{A}_0(\omega_\alpha T) + \bar{A}_1(\omega_\alpha t)].$$

За аналогією перетворимо функцію K_β у рівнянні (61).

$$b_0 = d_0 = 1; \quad b_1 = 2/D(B - 3T_p); \quad b_2 = (B^2 - 6T_p(B - A))/D^2 + 6/A^2;$$

$$b_3 = 6/D^2(B - 2T_p); \quad b_4 = d_4 = 6/D^2; \quad D = AT_p;$$

$$d_1 = 2/D(+3T_p); \quad d_2 = (B^2 + 6T_p(B - A))/D^2 + 6/A^2; \quad d_3 = 6/D^2(2T_p - B).$$

$$e^{-y} \approx \frac{b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + b_3 T^3 + b_4 T^4}{d_0 + d_1 T + d_2 T^2 + d_3 T^3 + d_4 T^4}; \quad y = \frac{AT_p + BT}{T(T_p - T)}; \quad A = E/R; \quad B = \Psi - A;$$

$$K_\beta = k_\beta \frac{b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + b_3 T^3 + b_4 T^4}{d_0 + d_1 T + d_2 T^2 + d_3 T^3 + d_4 T^4}.$$

Рівняння (61) набуває вигляд:

$$\begin{aligned} (d_0 + d_1 T + d_2 T^2 + d_3 T^3 + d_4 T^4) \frac{d\beta(x,t)}{dt} \\ = (b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + b_3 T^3 + b_4 T^4)(e_0 + e_1 \beta + e_2 \beta^2). \end{aligned} \quad (65)$$

де $e_0 = \beta_p$, $e_1 = c_1 \beta_p - 1$, $e_2 = -c_1$. Отже, маємо систему диференціальних рівнянь (59), (63), (65) відносно температури розплаву полімеру та ступеню гомогенізації α і кристалізації β із відповідними початковими і межовими умовами.

Оскільки ця система рівнянь є нелінійна, пошук її розв'язку шукатимемо

за ітераційною схемою за аналогією із попередніми розділами.

$$d_0 \frac{d\beta(x,t)}{dt} = (e_0 + e_1\beta + e_2\beta^2) + N_\beta(T, \beta); \quad (66)$$

$$N_\beta(T, \beta) = T(b_1 + b_2T + b_3T^2 + b_4T^3)(e_0 + e_1\beta + e_2\beta^2) - T(d_1 + d_2T + d_3T^2 + d_4T^3) \frac{d\beta(x,t)}{dt}. \quad (67)$$

За аналогією маємо

$$\beta^{(1)}(t) \approx B_2 + e^{-\gamma_\beta t} [B_0(\omega_\beta t) + B_1(\omega_\beta t)].$$

На наступному кроці приєднаємо до отриманого розв'язку залежність α і β від температури розплаву $T(x,t)$.

Розв'язок рівняння теплопровідності (59) у "нульовому наближенні", тобто без урахування похідних від ступеню полімеризації α і ступеню кристалізації β ($Q_k = 0$) отримано вище.

$$T^{(m)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M R(\delta_n r) Z(\beta_k z) \left[\frac{G_{nk}}{\eta_{nk}} (1 - e^{-\eta_{nk} t}) + D_{nk}^{(m-1)}(t) \right]. \quad (68)$$

Оскільки вирази для $\alpha^{(1)}(t)$, $\beta^{(1)}(t)$ не залежать від просторових координат, треба знайти вираз для складової рівняння (59) $Q_p \frac{\partial \alpha}{\partial t} + Q_{cr} \frac{\partial \beta}{\partial t}$, тобто знайти вирази для похідних від $\alpha^{(1)}(t)$, $\beta^{(1)}(t)$.

$$Q_p \frac{d\alpha(t)}{dt} + Q_{cr} \frac{d\beta(t)}{dt} = Q_p e^{-\gamma_\alpha t} [-(\gamma_\alpha A_0 + \omega_\alpha A_1)(\omega_\alpha t) + (\omega_\alpha A_0 - \gamma_\alpha A_1)(\omega_\alpha t)] + Q_{cr} e^{-\gamma_\beta t} [-(\gamma_\beta B_0 + \omega_\beta B_1)(\omega_\beta t) + (\omega_\beta B_0 - \gamma_\beta B_1)(\omega_\beta t)].$$

Цей вираз є лінійна функція від t , перетворення Лапласа від нього має вигляд

$$L_T = Q_p \frac{C_1 \omega_\alpha + C_2 (p + \gamma_\alpha)}{(p + \gamma_\alpha)^2 - \omega_\alpha^2} + Q_{cr} \frac{C_3 \omega_\beta + C_4 (p + \gamma_\beta)}{(p + \gamma_\beta)^2 - \omega_\beta^2} \approx \frac{D_0 + D_1 p}{D_3 + D_4 p + p^2}.$$

Згідно загальній схемі застосування перетворення Лапласа маємо

$$\frac{1}{p + \eta_{n,k}} \mathcal{L}_t \{L_T\} = \frac{1}{p + \eta_{n,k}} \frac{D_0 + D_1 p}{D_3 + D_4 p + p^2} \approx \frac{E_0 + E_1 p}{E_3 + E_4 p + p^2}.$$

Об'єднаємо цей вираз із $D^{(m-1)}(t)$. Маємо

$$F_{n,k}^T(t) = D^{(m-1)}(t) + r1_n z1_k \mathcal{L}_{-1} \left\{ \frac{E_0 + E_1 p}{E_3 + E_4 p + p^2} \right\}.$$

де $r1_n, z1_k$ – інтеграли від власних функцій за змінними r, z . У просторі оригіналів маємо

$$\frac{1}{C} F_{n,k}^T(t) = f_2^{n,k} + e^{-\gamma_f^{n,k} t} [f_0^{n,k} (\omega_f^{n,k} t) + f_1^{n,k} (\omega_f^{n,k} t)].$$

Отже, замість (75) маємо

$$T^{(m)}(r, z, t) = T_{\text{pol}}(r, z, t) \approx \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M R(\delta_n r) Z(\beta_k z) F_{n,k}^T(t).$$

Наступний крок полягає у виконанні відповідних перетворень в (64), (67) з метою обчислення нелінійних складових у рівняннях (63), (66).

Розглянемо нелінійну складову (64) у рівнянні (63).

$$N_\alpha = 6 \cdot T/C \left[(T/C - 1)(1 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^3) - (T/C + 1) \frac{d\alpha(x, t)}{dt} \right]. \quad (69)$$

Із урахуванням виразу для $\alpha^{(1)}(t)$ апроксимуємо добуток

$$1 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^3 \approx A_2^\alpha + e^{-\gamma_\alpha t} [A_0^\alpha (\omega_\alpha t) + A_1^\alpha (\omega_\alpha t)].$$

У правій частині цього виразу ми зберегли позначення для сталих затримки γ_α та частоти ω_α коливань, щоб не запроваджувати додаткові позначення.

Розглянемо добуток $(T/C)[(T/C) \mp 1]$ у (69).

$$(T/C)[(T/C) \mp 1] = \sum_{n, n_1=1}^M \sum_{k, k_1=1}^M R(\delta_n r) Z(\beta_k z) R(\delta_{n_1} r) Z(\beta_{k_1} z) F_{n,k}^T(t) \bar{F}_{n_1, k_1}^T(t).$$

$$\bar{F} = F \mp 1, \text{ тобто } \bar{f}_2^{n, k_1} = f_2^{n, k_1} \mp 1.$$

Залежність ступеню полімеризації $\alpha(x, t)$ та ступеню кристалізації $\beta(x, t)$ від просторових координат x є неявний, оскільки рівняння для цих параметрів не залежать від цих координат у явному вигляді. Ця залежність виявляється після урахування коефіцієнтів K_α , K_β як функцій температури розплаву полімеру. Це означає, що ці параметри визначаються у фіксованих точках x як функції часу. Швидкість охолодження зовнішньої поверхні циліндру 0,2 К/с.

V_{cr} – модуль об'ємного стискання кристалічної фази.

У рівняннях позначено: λ_0 – коефіцієнт теплопровідності; Q_p – тепловий ефект полімеризації; Q_{cr} – тепловий ефект кристалізації (швидкість питомого тепловиділення при кристалізації ПЕНГ); k_α, k_β – сталі швидкостей полімеризації і кристалізації; U – енергія активації процесу полімеризації; E^a – енергія активації процесу кристалізації; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – критерії автокаталітичності процесів полімеризації і кристалізації; Ψ – характерна температура полімеру; R – універсальна газова стала; h_0, h_1 – коефіцієнти теплообміну із навколишнім середовищем; $T_p = 415$ К – рівноважна температура плавлення; β_b – рівноважний ступінь кристалічності:

$$\beta_b = 0,52 \sqrt{1 - (T/T_p)^4}.$$

Розрахунки виконувалися для таких значень параметрів задачі:

$$c = 0,24 \cdot 10^3 \text{ кал}/(\text{кг} \cdot \text{град}); \rho = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{см}^3; \lambda_0 = 9 \cdot 10^{-4} \text{ кал}/(\text{см} \cdot \text{град});$$

$$Q_n = 18 \text{ кал}/\text{см}^3; Q_{kr} = 35 \text{ кал}/\text{см}^3; k_\alpha = 5 \cdot 10^5 \text{ 1}/\text{с}; k_\beta = 2 \cdot 10^4 \text{ 1}/\text{с};$$

$$U = 13 \cdot 10^3 \text{ кал}/\text{моль}; R_u = 2 \text{ кал}/(\text{град} \cdot \text{моль}); \varepsilon_1 = 0,18; \varepsilon_2 = 0,05;$$

$$E^a = 8,8 \cdot 10^3 \text{ кал}/\text{моль}; \Psi = 316 \text{ К}; E_1 = E = 10^3 \text{ кал}/\text{моль};$$

$$\alpha_0 = 0,25 \cdot 10^{-1} \text{ 1}/\text{град}; A = 10^2.$$

У додатках наведено акти впровадження та програмний код мовою С реалізації розроблених алгоритмів.

ВИСНОВКИ

Основний результат дисертації – вирішення важливої науково-технічної проблеми по створенню наукових засад удосконалення існуючого і створення нового обладнання для комплексного екструзійного перероблення термопластичних матеріалів, які забезпечують визначення оптимальних конструктивно-технологічних параметрів екструзійного обладнання на базі одношнекових екструдерів, що сприятиме заощадженню енергетичних і матеріальних ресурсів, які необхідні для виконання численних експериментальних досліджень, та отриманню продукції високої якості.

1. Сформульовано математичні моделі процесів нагрівання корпусу екструдера, нагрівання полімерної суміші у зоні завантаження та плавлення, що коректно враховують вплив нелінійних фізико-технічних параметрів та реологічних властивостей полімерного матеріалу на процеси масо- і теплоперенесення у відповідних зонах.

2. Запропоновано ітераційний числово-аналітичний метод розв'язання крайових задач для систем нелінійних диференційних рівнянь із частинними похідними математичної фізики. Застосування цього методу надає можливість отримувати розв'язки таких крайових задач у квадратурах, що є суттєвим при розробці та реалізації систем автоматичного управління відповідними технологічними процесами. Метод ґрунтується на використанні скінченних інтегральних перетворень та застосуванні до нелінійних складових методів апроксимації на ґрунті ланцюгових дробів.

3. Запропонований метод може бути застосований до математичного моделювання широкого кола процесів, що описуються математичними моделями в ортогональних системах координат.

4. Розроблено алгоритмічне забезпечення методів розв'язання крайових задач для систем нелінійних диференційних рівнянь як із звичайними похідними, так й з частинними похідними, що надало можливість автоматизувати процедуру комп'ютерного моделювання пошуку розв'язків відповідних крайових задач.

5. Розроблено математичну модель процесу у зоні плавлення екструдера,

що враховує фазовий перехід тверда суміш ("пробка") – рідинна фаза в'язкопружних полімерних матеріалів із урахуванням дисипативних явищ у розплаві, що надає можливість визначити швидкість руху межі фазового переходу і визначити, таким чином, оптимальний режим нагріву корпусу екструдера для уточнення конструктивних значень довжини зон завантаження, плавлення та дозування.

6. Виконано математичне моделювання процесу індукційного нагріву корпусу екструдера із урахуванням променистого випромінювання на межі із зовнішньою поверхнею корпусу, що надало можливість удосконалити процес теплопередачі від індуктора до корпусу екструдера.

7. Отримано розв'язок крайової задачі, що описує процеси нагрівання полімерної суміші у зоні завантаження із урахуванням залежності коефіцієнту теплоємності від температури, що надало можливість отримати оптимальні значення температурного поля суміші і визначити відповідні значення внутрішньої теплової енергії індуктора нагріву корпусу у зоні завантаження.

8. Отримані значення температурного поля суміші за значень, близьких до температури плавлення у зоні завантаження є критерій, що визначає довжину цієї зони, де починається зона плавлення.

9. Виконано математичне і комп'ютерне моделювання процесів у зоні плавлення полімеру із урахуванням фазового переходу тверда суміш – розплав, що надало можливість визначити швидкість руху межі фазового переходу і порівняти її значення із швидкістю обертального руху черв'яка шнека з метою визначення оптимальних значень внутрішньої теплової енергії індуктора нагріву корпусу у зоні плавлення.

10. Отримано розв'язок комбінованої задачі теплоперенесення у розплаві полімеру і кінетичної задачі гомогенізації і кристалізації розплаву у зоні дозування екструдера, що надало можливість визначити оптимальні значення геометричних розмірів цієї зони.

11. На ґрунті виконаних досліджень у зонах завантаження, плавлення та дозування запропоновано алгоритм управління потужністю індуктора, що нагріває корпус екструдера у зазначених зонах.

12. Точність результатів, що отримано за допомогою запропонованих алгоритмів вирішення нелінійних крайових задач для рівнянь масо- і теплоперенесення оцінюється значеннями норми у гільбертовому просторі $L^p_{[a,b]}$ на послідовних ітераціях реалізації цих алгоритмів. Відносна точність ітераційних алгоритмів 5—10% досягається на 3—4 ітераціях.

13. Розроблено програмний комплекс для моделювання процесів, що описуються системами нелінійних диференційних рівнянь із частинними похідними, програмні модулі якого надають можливість отримувати розв'язки цих рівнянь у квадратурах на ґрунті апроксимуючих перетворень.

14. Вирішення комплексів задач, що розглянуто у дисертаційній роботі,

надає можливість оптимізувати існуюче екструзійне обладнання і проектувати екструзійні лінії для нових виробів із полімерних матеріалів (виготовлення плівок тощо).

15. Результати роботи впроваджено у практику експлуатації та проектування екструзійного перероблення термопластичних полімерів на у кількох організаціях впроваджено методики розрахунків геометричних параметрів екструзійного обладнання, алгоритмічне забезпечення розв'язання крайових задач для систем нелінійних рівнянь типу рівнянь Нав'є—Стокса. Результати досліджень використовуються у навчальному процесі кафедри біомедичної кібернетики факультету біомедичної інженерії та кафедри теоретичної електротехніки факультету електро-енерготехніки та автоматики НТУУ "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського".

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Колективна монографія.

1. Островерхов М.Я., Сільвестров А.М., Зеленський К.Х. Методи дослідження електротехнічних систем і комплексів. Монографія, Київ, Талком, 2019.-- 300 с.

Статті у фахових виданнях:

2. Костюк В.И., Краскевич В.Е., Зеленский К.Х. Идентификация объектов с распределенными параметрами в режиме нормального функционирования. *Изв. Вузов, Приборостроение*. Т.ХХ, №10, 1977. –С.35 –47. (WoS)

3. Костюк В.И., Краскевич В.Е., Зеленский К.Х. Структурная идентификация в частотной области нестационарных объектов с распределенными параметрами. *Межв. науч.-техн. сб. Адаптивные системы автоматического управления*. 1976, №4. С.19 –29.

4. Костюк В.И., Краскевич В.Е., Зеленский К.Х. Идентификация нелинейных объектов с распределенными параметрами. *Изв. АН СССР, серия техн. кибернетика*, 1978, №2. С. 72 –79. (WoS)

5. Бутаков Г.О., Зеленський К.Х., Ігнатенко В.М. Побудова моделі формування геометрії шва при зварюванні виробів неплавким електродом. *Міжв. наук.-техн. зб. Адаптивні системи автоматичного управління*.1998, №1 (21). – С. 69 –76.

6. Зеленський К.Х., Кеменяш Ю.М. Комп'ютерне моделювання процесів демпфування рідини у рухомих ємностях. *Міжв. наук.-техн. зб. Адаптивні системи автоматичного управління*, 2005, №09(29). С .73—79.

7. Зеленський К.Х., Ліщина В.М. Моделювання динаміки обмеженого обсягу рідини із вільною поверхнею. *ІПМС, Збірник наукових праць*, вип.38, 2007. С. 135 –141

8. Зеленский К.Х., Игнатенко В.Н. Оптимальное управление в системах с запаздыванием *Міжв. наук.-техн. зб. Адаптивні системи автоматичного управління*. 2008, №12(32). С.112 –117.

9. Зеленський К.Х. Визначення геометрії зварного шва при зварюванні КДЕ. *Міжв. наук.-техн. зб. Адаптивні системи автоматичного управління*, 2009, №13 (33). С. 118 –125.

10. Зеленський К.Х., Ліщина В.О., Ваврук Є. Математичне моделювання низинних лісових пожеж. *Вісник ЛПУ, Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, №638, 2009. С. 95 –99.

11. Зеленський К.Х., Ліщина В.О. Моделювання динаміки обмеженого обсягу рідини із вільною поверхнею. *ІПМС, Збірник наукових праць*, вип.38, 2007, С.57—63.

12. Зеленський К.Х., Ігнатенко В.М. Оптимальне управління системами із запізненням. *Міжв. наук.-техн. зб. Адаптивні системи автоматичного*

управління. 2008, №12(32). С.93 –97.

13. Зеленський К.Х., Числово-аналітичний метод розв'язання просторово-часових задач із рухомими межами. *Міжв. наук.-техн. зб. Адаптивні системи автоматичного управління*. 2009, №13(33). С. 107 –117.

14. Зеленський К.Х., Ітераційний метод розв'язання нелінійних крайових задач. *Наукові нотатки Луцького національного університету*, вип. 26, т. 2, 2009. С. 92 –99.

15. Зеленський К.Х., Ліщина В.М. Математичне моделювання аеродинаміки верхових лісових пожеж *Наукові нотатки. Міжвузовський збірник*, Луцьк, 2010. Вип. 27. с. 110 –115.

16. Бовсуновська К.С., Зеленський К.Х., Прийомов С.Г. Математичне моделювання закручених потоків у циклонних камерах. *Вісник Університету "Україна". серія : інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика*, Київ, 2011, №2. с. 43 –51.

17. Зеленський К.Х., Ігнатенко В.М., Бовсуновська К.С. Комп'ютерне моделювання динаміки повітряних потоків у циклонних камерах. *Міжв. наук.-техн. зб. Адаптивні системи автоматичного управління*. 2012, №21(41). С. 132 –145.

18. Бовсуновська К.С., Зеленський К.Х. Комп'ютерне моделювання руху твердих домішків у циклонних камерах. *Науковий журнал «Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво»*, Луцьк, 2013, Вип. №13. С. 71 – 78.

19. Zelensky S. Ch., Zelenskaya N. S. Approximation of Bessel functions by rational functions. *Electronics and control systems*. 2015, N 2 (44). p. 121 –124. DOI: 10.38372/1990-5548.44.8908

20. Зеленський К.Х., Настенко Е.А. Математическое моделирование динамики левого желудочка. *Вісник Університету "Україна". серія: інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика*, Київ, 2016, №1 (18) с. 27 –38.

21. Зеленська Н.К., Зеленський К.Х. Апроксимація циліндричних функцій дробово-раціональними виразами. *Вісник Університету "Україна"; серія: інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика*, Київ, 2016, №2(18) с. 17 –23.

22. Зеленський К.Х., Болховітін В.М. До визначення концентрації домішків у двофазних циклонних пристроях. *Вісник Університету "Україна", серія: інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика*, Київ, 2016, №2(18) с. 32 –38.

23. Таланчук П.М., Зеленський К.Х., Болховітін В.М. Моделювання процесу ізоляційного покриття. *Вісник Університету "Україна". серія: інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика*, Київ, 2016, №1 (18) с. 5 –13

24. Зеленський К.Х., Ігнатенко В.М., Стенін О.А. Структурна властивість оптимальних за витратами палива процесів управління у динамічних системах. *Міжв. наук.-техн. зб. Адаптивні системи автоматичного управління*. 2017, Вип. 1(42), Дніпро. С. 97–103.

25. Болховітін В.М., Зеленський К.Х. Математичне моделювання температурних режимів полімерного покриття кабельних виробів. *Вісник Університету "Україна", серія: інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика*, Київ, 2017, №1 (19) с. 50–53.

26. Zelensky S.Ch., Nastenko E.A. Simulation of vortex flows in the left ventricle of the heart. *Electronics and control systems*. 2017, N 2 (46). p. 73–79. DOI: 10.38372/1990-5548.52.1183

27. Зеленский К.Х., Бурлаков М.В. Моделювання процесів плавлення полімерів у гвинтовому каналі шнека. *Вісник Університету "Україна", серія: інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика*, Київ, 2018, №1 (19) с.166–174

Статті у наукових періодичних виданнях іноземних держав:

28. Kostyuk V.I., Kraskevitch V.E., Zelensky K. Kh.. Frequency domain identificaion of complex systems. *Systems Sceince*, 1977, V.2 C.5–12.

29. Зеленський К.Х., Бовсуновська К.С. Математическое моделирование конвективно- диффузионных процессов в циклонных камерах. *Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук, Журнал научных публикаций*, Москва, 2014. с. 44—49

Статті у наукометричних виданнях:

30. Іє. Nastenko, V. Pavlov, E. Nosovets, K. Zelensky. Optimal complexity models in individual control strategy task for objects that cannot be related. 2019 IEEE 14th International conference on computer Sciences and information technologies p. 207-210. doi: 10.1109/STC-CSIT.2019.8929831 (Scopus)

31. Іє. Nastenko, V. Pavlov, E. Nosovets, K. Zelensky Solving the Individual Control Strategy Tasks Using the Optimal Complexity Models Built on the Class of Similar Objects. *Advances in Intelligent Systems and Computing IV. CCSIT 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol 1080, P. 535—546. doi.org/ 10.1007 /978-3-030-33695-0-36 Springer (Scopus)

32. О. Трофимчук, К.Зеленский, Іє. Nastenko. Modeling of a temperature field for extruder body. *System research and information technologies*, 2021, №1 doi.org/ 10.20535 /SRIT.2308-8893.2021.1.03 (Scopus)

33. Зеленський К.Х., Бовсуновська К.С., Болховітін В.М. Алгоритмічне забезпечення розв'язання нелінійних крайових задач тепломасопереносу. *Modern engineering and innovative technologies*. V.15, №1, 2021, DOI 10.30890/2567-5273.2021-15-01, p. 5–12. (Index Copernicus)

Публікації у матеріалах конференцій:

34. Костюк В.И., Краскевич В.Е., Зеленский К.Х. Идентификация

нестационарных объектов с распределенными параметрами в частотной области. Труды IV-го симпозиума ИФАК "Идентификация и оценка параметров систем". Тбилиси, "Мецниереба", 1976, Т.3. С.83–96.

35. F.Kissilevski, K.Zelensky. Adaptive control for welding robot. Proceedings of intern. conf. Automation and robotisation in welding and allied processes. Strasbourg, France, 1985. С.127–135.

36. Кіселівський Ф.М., Бутаков Г.О., Зеленський К.Х. Adaptive control of velding robots. 2-d Intern. Conf. Developments in Automated and robotic Welding, Cambridge: The welding Institute, 1987. p.21-1–21-11

37. Зеленский К.Х. Оценка геометрии сварочной ванны при сварке концентрированными потоками энергии. Доклады 2-й межд. конф. по ЭЛТ. Варна, 1988, С.105–112.

38. Зеленский К.Х. Адаптивное управление процессами сварки неплавящимся электродом. Труды X межд. симпозиума "Welding--90", 1990. Брно. С. 37–42.

39. Зеленський К.Х. Математическое моделирование температурного поля сварочной ванны. Матеріали V Міжнародної науково-технічної конференції. Т.2. Аерокосмічні системи моніторингу та керування. Київ, 2003. С. 24.48 – 24.57.

40. Зеленський К.Х. Числово-аналітичний метод розв'язання нелінійних крайових задач математичної фізики. Матеріали IV міжнар. наук. конф. ISDMCI2009. Євпаторія. 2009.

41. Бовсуновська К.С., Зеленський К.Х. Математичне моделювання аеродинамічних процесів у циклонних апаратах. ISDMCI2011. Євпаторія. 2011. С. 38–40.

42. Зеленський К.Х. Математичне моделювання теплових процесів при вирощуванні монокристалів. Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції "Комп'ютерні технології: наука і освіта", Україна, Луцьк, 9--11 жовтня 2009. С. 53–56.

43. Бовсуновська К.С., Зеленський К.Х. Комп'ютерне моделювання руху твердих домішків у циклонних камерах. Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. Луцьк, 2013, №13, с. 71–77.

44. Болховітін В.М., Зеленський К.Х. Моделювання двохфазних течій у турбулентному потоці. Матеріали X Всеукраїнської науково-практичної конференції "Комп'ютерні технології: наука і освіта", Україна, Київ, 30 –31 березня 2017. С. 75–78.

45. Зеленський К.Х., Болховітін В.М. Математичне моделювання процесу охолодження розплавів полімерів. Тези ІТОНВ-2019. Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології в освіті, науці і виробництві», м. Луцьк, 23-25 травня 2019 р. С. 44–47.

46. Optimal complexity models in individual control strategy task for objects

that cannot be related. IEEE 14th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT), Lviv, Ukraine, 2019.

47. Зеленський К.Х., Болховітін В.М. 22 наукова і практична конференція "Theoretical foundations for the implementation and adaptation of scientific achievements in practice", 2020, Helsinki, Finland.

Анотація

Зеленський К.Х. Математичне моделювання нелінійних полімерних матеріалів в екструдерах – кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеню доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.

Дисертаційна робота присвячена вирішенню науково-технічної проблеми проектування екструзійного обладнання для виготовлення виробів із полімерних речовин зокрема, кабелів на надвисокі напруги із полімерним ізоляційним покриттям.

Створення новітніх технологій й удосконалення існуючих призводить до необхідності урахування властивостей об'єктів, що вивчаються з метою створення ефективних систем автоматичного та автоматизованого управління, які суттєво впливають на поведінку цих об'єктів. Існуючі підходи до розробки таких систем, як правило, ґрунтуються на використанні лінійних математичних моделей для опису динаміки об'єктів. Такий підхід до побудови моделей не враховує найсуттєвіші властивості об'єктів за рахунок або ігнорування нелінійних складових або їхньої лінеаризації. Ця проблема особливо актуальна стосовно процесів із розподіленими параметрами, математичні моделі яких описуються рівняннями із частинними похідними із відповідними додатковими умовами на межі області. В останні десятиліття об'єктам із розподіленими параметрами приділяється велика увага. Це пояснюється бажанням підвищити ефективність математичного моделювання динаміки таких об'єктів і процесів та розробки систем автоматичного й автоматизованого управління, оскільки добре відомо, що всі фізичні процеси і об'єкти за своєю сутністю є об'єкти із розподіленими параметрами. Але переважна більшість моделей, що описують динаміку Об'єктів із розподіленими параметрами є лінійні моделі, хоча добре відомо, що реальні фізичні процеси є за своєю сутністю нелінійні.

Виходячи з цього, виконання математичного моделювання нелінійних процесів є актуальна наукова проблема. Математичне моделювання нелінійних процесів із використанням сучасної обчислювальної техніки надає можливість глибшого і достовірного вивчення цих процесів, суттєвої економії витрат, пов'язаних із традиційним фізичним моделюванням процесів, створення систем автоматичного й автоматизованого управління, що адекватні реальним об'єктам.

Розроблені у дисертаційній роботі методи математичного і комп'ютерного моделювання полімерів із урахуванням нелінійних властивостей надали можливість суттєво підвищити якість моделювання, розробити рекомендації

щодо проектування й удосконалення технологічних процесів з виготовлення кабелів на надвисокі напруги.

Наукова новизна роботи полягає у тому, що вперше запропоновано метод числово-аналітичного розв'язання нелінійних диференційних рівнянь у частинних похідних параболічного типу і його застосування до розв'язання задач нагріву корпусу екструдера, нагріву полімерної суміші у зоні завантаження, зоні плавлення полімеру і гомогенізації та кристалізації розплаву полімеру у зоні дозування. Виконані дослідження надають можливість розрахунку оптимальних розмірів вказаних зон при проектуванні екструзійного обладнання, призначеного для виготовлення широкого кола продукції із застосуванням екструзійних пристроїв.

Ключові слова: екструдер, задача типу Стефана, інтегральні перетворення, ітераційна процедура, числово-аналітичний метод, фазовий перехід, функції Бесселя, рівняння Нав'є–Стокса, шнек, черв'як.

Abstract

Zelensky K.Kh Mathematical modeling of nonlinear polymer media in extruders – qualifying research work on the rights of the manuscript. The dissertation on competition of a scientific degree of the doctor of technical sciences on a specialty 01.05.02 – mathematical simulation and computational methods.

The dissertation is devoted to the decision of a scientific and technical problem of designing of the extrusion equipment for manufacturing of cables on ultrahigh voltages with a polymeric insulating covering.

The creation of new technologies and improvements to existing ones leads to the need to take into account the properties of the objects being studied in order to create effective systems of automatic and automated control, which significantly affect the behavior of these objects. Existing approaches to the development of such systems are usually based on the use of linear mathematical models to describe the dynamics of objects. This approach to building models does not take into account the most significant properties of objects by either ignoring nonlinear components or their linearization. This problem is especially relevant for processes with distributed parameters, the mathematical models of which are described by partial differential equations with corresponding additional conditions at the boundary of the domain. In recent decades, much attention has been paid to objects with distributed parameters. This is due to the desire to increase the efficiency of mathematical modeling of the dynamics of such objects and processes and the development of automatic and automated control systems, as it is well known that all physical processes and objects are essentially objects with distributed parameters. But the vast majority of models describing the dynamics of objects with distributed parameters are linear models, although it is well known that real physical processes are inherently nonlinear.

Based on this, the implementation of mathematical modeling of nonlinear

processes is an urgent scientific problem. Mathematical modeling of nonlinear processes using modern computer technology provides an opportunity for deeper and more reliable study of these processes, significant cost savings associated with traditional physical modeling of processes, the creation of automatic and automated control systems that are adequate to real objects.

The methods of mathematical and computer modeling of polymers developed in the dissertation work taking into account nonlinear properties gave the chance to essentially improve quality of modeling, to develop recommendations on designing and improvement of technological processes on manufacturing of cables on ultrahigh voltages.

The scientific novelty of the work is that for the first time a method of numerical-analytical solution of nonlinear differential equations in partial derivatives of parabolic type and its application to solve problems of heating the extruder body, heating the polymer mixture in the loading zone, melting zone and homogenizing and crystallizing the polymer melt in the dosing zone. The performed researches give the chance to calculate the optimum sizes of the specified zones at designing of the extrusion equipment intended for production of a wide range of production with use of extrusion devices.

Keywords: extruder, Stefan-type problem, integral transformations, iterative procedure, numerical-analytical method, phase transition, Bessel functions, Navier-Stokes equation, screw, worm.