

АНОТАЦІЯ

Скворцов С.О. Локальна поведінка відображень з необмеженою характеристикою. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика (11 – Математика та статистика). - Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційна робота присвячена розвитку теорії відображень, а саме, дослідженню їх локальної, межевої та глобальної поведінки. Серед іншого, розглянуті питання, пов'язані з одностайною неперервністю сімей відображень всередині і на межі області, проблема неперервного продовження на межу, проблема усунення ізольованої межевої точки, проблеми збіжності відображень тощо. Відображення, що розглядаються, як правило задовольняють або «пряму», або «обернену» нерівність Полецького. Вивчення таких умов пов'язано з тим, що переважна більшість сучасних класів відображень задовольняє верхні та/або нижні оцінки спотворення модуля сімей кривих. Зокрема, модуль сімей кривих є незмінним при конформних відображеннях, при квазіконформних відображеннях він змінюється в скінченну кількість разів, і може змінюватись як певна вагова функція при відображенні зі скінченим спотворенням, де «вага» дорівнює або так званій внутрішній, або зовнішній дилатації відображення. В загальній теорії відображень іноді розглядають і інші ваги, наприклад, дотичну дилатацію, або дилатацію відносно p -модуля тощо. Усі вони є прикладами функції « Q » з означення кільцевих Q -відображень, які вивчаються в дисертації.

Слід зазначити, що в теорії відображень велика увага приділялась дослідженню конформних перетворень. Згодом з'явилися квазіконформні відображення як більш широкий клас (М. Лаврентьєв, Ю. Вяйсяля, Ф. Герінг) та їх узагальнення – відображення з обмеженим спотворенням (Ю.Г. Решетняк). У різний час дослідженням властивостей вказаних відображень займалися такі відомі вчені як Л. Альфорс, Б. Бояр-

ський, М. Бракалова, В. Гольдштейн, В. Гутлянський, Т. Іванець, А. Казаку, О. Лехто, М. Крісті, О. Мартіо, В. Міклюков, С. Рікман, Б. Шабат, А. Ухлов та інші. Приблизно з початку 2000-х років до вивчення був запропонований клас Q -гомеоморфізмів. Трохи пізніше був запропонований і «найбільш загальний» клас кільцевих Q -гомеоморфізмів, дослідженням якого в евклідовому просторі, а згодом і у метричних просторах, займались О. Афанасьєва, М. Крісті, О. Мартіо, В. Рязанов, Р. Салімов, Є. Севостьянов, У. Сребро, Е. Якубов та інші.

Серед іншого, в дисертації доведена одностайна неперервність та логарифмічна неперервність за Гельдером відображень з оберненою нерівністю Полецького, можливість їх неперервного межового продовження та одностайна неперервність в межових точках, теореми збіжності. Для відображень з прямою нерівністю Полецького доведений аналог теореми Сохоцького–Касораті–Вейерштраса у метричних просторах.

Дисертація має теоретичний характер. Отримані результати мають самостійний науковий інтерес і можуть бути використані як для подальших досліджень в теорії відображень, так і при отриманні теорем існування гомеоморфних розв'язків рівнянь Бельтрамі з виродженням.

Дисертаційна робота складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, загальних висновків і списку використаних джерел.

У вступі обґрунтовується актуальність теми дослідження, описані об'єкт та предмет дослідження, наводиться зв'язок роботи з науковими програмами та темами. Також зазначені наукова новизна, тема, задачі дослідження, практичне значення, особистий внесок здобувача та інформація про апробацію результатів.

У першому розділі наведені необхідні відомості, означення, а також огляд відомих результатів за темою дослідження.

У другому розділі розглянуті питання, пов'язані з поведінкою відображень областей евклідового простору. Розділ складається з чотирьох

підрозділів. У першому підрозділі доведена одностайна неперервність сімей відображень, обернені до яких є кільцевими Q -гомеоморфізмами за умови, що відповідна функція Q є інтегрованою. У другому підрозділі доведена теорема про логарифмічну оцінку зверху для відкритих дискретних відображень з оберненою нерівністю Полецького та відповідний наслідок для гомеоморфізмів (так звана логарифмічна неперервність за Гельдером). Третій підрозділ присвячений проблемі продовження відображень в ізольовану точку межі області у випадку, коли обернене відображення є кільцевим Q -відображенням за умови інтегровності функції Q . Останній підрозділ – приклади.

Третій розділ містить чотири підрозділи. Перший підрозділ містить два важливих твердження: можливість з'єднання чотирьох точок у замиканні області непересічними кривими і твердження про те, що образ фіксованого континуума при кільцевому Q -відображенні не може наблизитися до межі області образу, якщо ця область не має невірджених компонент межі, а діаметр образу цього континуума обмежений знизу. У другому підрозділі розглядаються відображення, обернені до яких є кільцевими Q -гомеоморфізмами. Для цього класу відображень доведено твердження про його одностайну неперервність в замиканні області за умов $Q \in L^1(D)$, $\text{diam } f(A) \geq \delta$, або $h(f(A)) := \sup_{x,y \in f(A)} h(x,y) \geq \delta$, де A – деякий континуум, а $h(x,y)$ – хордальна (сферична) відстань між точками $x, y \in \overline{\mathbb{R}^n}$. У третьому підрозділі досліджена поведінка кільцевих Q -гомеоморфізмів у замиканні області з умовами $h(f(A)) \geq \delta$ і $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \delta$. Окремо отримане аналогічне твердження для випадку відкритих дискретних замкнених кільцевих Q -відображень за умови існування у кожній області континуума $K_f \subset D'_f$ такого, що $h(K_f) \geq \delta$ і $h(f^{-1}(K_f), \partial D) \geq \delta > 0$. У цьому підрозділі також був розглянутий випадок так званих простих кінців. Нарешті, в останньому підрозділі доведені теореми про локальну і межу поведінку гомеоморфізмів з оберненою нерівністю Полецького в термінах простих кінців (випадок складних меж).

Четвертий розділ містить п'ять підрозділів, перший з яких присвячений дослідженню збіжності відображень, які є оберненими до (p, q) -відображень в кожній точці образу. У другому підрозділі йдеться про проодностайну неперервність сім'ї всіх гомеоморфізмів $g : D' \rightarrow D$, обернені до яких є Q -гомеоморфізмами за умов, що D' є областю квазіекстремальної довжини (скорочено – QED -областю). Результат доведений за умови існування не менше двох точок межі образу та за умови інтегровності функції Q з означення класу. Аналогічний результат доведений за умови, що $\text{diam } f(A) \geq \delta$ при відображенні $f := g^{-1}(A)$. В третьому підрозділі доведена теорема про неперервне продовження кільцевого Q -відображення відносно (p, q) -модуля в ізольовану точку межі області метричного простору. Як наслідок, для цих відображень і широкого класу метричних просторів отриманий аналог класичної теореми Сохоцького–Касораті–Вейєрштрасса. У четвертому підрозділі доведені теореми про неперервне продовження та одностайну неперервність сімей кільцевих Q -відображень метричних просторів відносно (p, q) -модулів по простих кінцях. П'ятий підрозділ містить твердження про одностайну неперервність сім'ї відкритих дискретних відображень за умови, що вихідний простір допускає слабку сферикалізацію, а межа образу містить не менше двох точок. Також у цьому підрозділі наведені деякі приклади, які ілюструють отримані результати.

Ключові слова: квазіконформні відображення, відображення з обмеженим і скінченним спотворенням, модулі сімей кривих, одностайна неперервність, неперервне продовження на межу.

Skvortsov S. O. Local behavior of mappings with unbounded characteristics.

The thesis for obtaining the scientific degree Doctor of Philosophy in speciality 111 – Mathematics(PhD). (11 – Mathematics and Statistics). – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The dissertation is devoted to the development of the mapping theory, namely, the study of local, boundary and global behavior of mappings. Among other things, we have considered issues related to the equicontinuity of families of mappings inside and at the boundary of the domain, the problem of continuous extension to the boundary, the problem of removability of an isolated boundary point, the problem of convergence of mappings, and so on. The mappings under consideration, as a rule, satisfy either the «direct» or the «inverse» Poletsky inequality. The study of such conditions due to the fact that most modern classes of mappings satisfy the upper and/or lower estimates of the distortion of the modulus of the families of paths. In particular, the modulus of families of paths is not distorted under conformal mappings, may be distorted in a finite number of times under quasiconformal mappings, and can change as a certain weight function under mappings with a finite distortion, where the weight is equal to either so-called inner or outer dilatation. In general mapping theory, other weights are sometimes considered, such as tangent dilatation, or dilatation with respect to p -modulus, and so on. They are all examples of the function « Q » from the definition of ring Q -maps, which are studied in the dissertation.

Initially, the study of the theory of mappings was primarily concerned with conformal transformations. Later, quasiconformal mappings began to be studied, which were a wider class of mappings in comparison with conformal mappings (M. Lavrentyev, J. Väisälä, F. Gehring). As a result of the further development of the theory of mappings, quasiconformal mappings with branching, or quasiregular mappings, also appeared (Yu. Reshetnyak). The well-

known scientists such as L. Ahlfors, B. Bojarski, M. Brakalova, V. Gol'dshtein, V. Gutlyanskii, T. Iwaniec, A. Cazacu, O. Lehto, M. Cristea, O. Martio, V. Miklyukov, S. Rickman, B. Shabat, A. Ukhlov and others have been studying the properties of such mappings at various times. Around the beginning of the 2000s, the class Q -homeomorphisms was proposed for study. A little later, the «most general» class of ring Q -homeomorphisms was proposed. O. Afanasiyeva, M. Cristea, O. Mario, V. Ryazanov, R. Salimov, E. Sevost'yanov, U. Srebro, E. Yakubov studied this class both in Euclidean space and later in metric spaces.

Among other things, in our dissertation we proved the equicontinuity and logarithmic Hölder continuity of mappings with the inverse Poletsky inequality, the possibility of their continuous boundary extension and equicontinuity at boundary points, convergence theorems, as well. For mappings with a direct Poletsky inequality, we proved an analogue of the Sokhotsky-Casorati-Weierstrass theorem in metric spaces.

The dissertation has a theoretical character. The obtained results have an independent scientific interest and can be used both for further research in the theory of mappings and in obtaining theorems for the existence of homeomorphic solutions of Beltrami equations with degeneration.

The dissertation consists of annotations in Ukrainian and English, introduction, four sections, divided into subsections, general conclusions and a list of references.

In the introduction we substantiate the relevance of the research topic, describe the object and subject of research, as well as we provide a link to work with research programs and topics. We also indicate the scientific novelty, topic, research objectives, practical significance, personal contribution of the applicant and information on approbation of results.

In the first section we provide the necessary information, definitions, as well as an overview of the known results on the research topic.

In the second section, we consider issues related to the behavior of mappi-

ngs of domains of the Euclidean space. The section consists of four subsections. In the first subsection we proved the equicontinuity of the families of mappings inverse to which are ring Q -homeomorphisms provided that the corresponding function Q is integrable. The second subsection proves the theorem on the logarithmic upper estimate for open discrete mappings with inverse Poletsky inequality and the corresponding consequence for homeomorphisms (the so-called logarithmic Hölder continuity). The third subsection is devoted to the problem of continuous extension of mappings to an isolated point of the boundary of the domain in the case when the inverse mapping is a ring Q -mapping and a function Q is integrable. The last subsection is devoted to examples.

The third section contains four subsections. The first subsection contains two important statements such as the possibility of joining four points with disjoint paths in the closure of the domain and the statement that the image of a fixed continuum under a ring Q -mapping can not be close to the boundary of the image domain, if this domain does not have nondegenerate boundary components, and the diameter of the image of this continuum is bounded from below. The second subsection considers mappings inverse to which are ring Q -homeomorphisms. For this class of mappings, we have proved its equicontinuity in the closure of a domain under the conditions $Q \in L^1(D)$, $\text{diam } f(A) \geq \delta$, or $h(f(A)) := \sup_{x,y \in f(A)} h(x,y) \geq \delta$, where A is some continuum, and $h(x,y)$ is the chordal (spherical) distance between the points $x, y \in \overline{\mathbb{R}^n}$. The third subsection investigates the behavior of ring Q -homeomorphisms in the closure of a domain with conditions $h(f(A)) \geq \delta$ and $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \delta$. A similar statement was obtained separately for case of open discrete closed ring Q -maps provided that there exists the continuum $K_f \subset D'_f$ such that $h(K_f) \geq \delta$ and $h(f^{-1}(K_f), \partial D) \geq \delta > 0$ for any D'_f . In this subsection we also considered the case of the so-called prime ends. Finally, in the last subsection we prove theorems on the local and boundary behavior of homeomorphisms with the inverse Poletsky inequality in terms of

prime ends (the case of complex boundaries).

The fourth section contains five subsections, the first of which is devoted to the study of the convergence of mappings that are inverse to (p, q) -mappings at each point of the image. The second subsection deals with the equicontinuity of the family of all homeomorphisms $g : D' \rightarrow D$, the inverses of which are Q -homeomorphisms under the conditions that D' is a quasi-extremal distance domain (abbreviated – QED -domain). We proved this result provided that there are at least two points of the boundary of the image and the function Q is integrable. A similar result is proved under the condition that $\text{diam } f(A) \geq \delta$ for $f := g^{-1}(A)$. In the third subsection, the theorem on the continuous extension of a ring Q -map with respect to (p, q) -modulus to an isolated point of the boundary of the metric space is proved. As a consequence, for these mappings an analog of the classical Sokhotsky-Casorati-Weierstrass theorem is obtained for a wide class of metric spaces. The fourth subsection proves the theorems on continuous extension and equicontinuity of families of ring Q -maps of metric spaces with respect to (p, q) -modulus by prime ends. The fifth subsection contains statements about the equicontinuity of the family of open discrete mappings provided that the source space allows a weak sphericalization, and the boundary of the image contains at least two points. In this subsection, are also given some examples that illustrate the obtained results.

Key words: quasiconformal mappings, mappings with bounded and finite distortion, modules of curve families, equicontinuity, continuous boundary extension.