

УДК 517.5+510.3+511.72

## Про деякі множини дійсних чисел, визначені в термінах нега-s-кового та канторівського нега-s-кового зображень

С. О. Сербенюк

(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

АНОТАЦІЯ. Стаття присвячена дослідженню множин

$$\mathbb{S}_{(-s,0)} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-s)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}, \alpha_n \in A_0, s > 2 \right\},$$
$$S^- \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}, \alpha_n \in A_0, s > 2 \right\},$$

де  $2 < s$  — фіксоване натуральне число. Доведено, що вони є континуальними, ніде не щільними, досконалими, самоподібними множинами нульової міри Лебега, знайдено їх розмірність Хаусдорфа-Безиковича, а також вивчено властивості фрактальних підмножин даних множин. Означено поняття нега-s-кового ряду Кантора, досліджено взаємозв'язок між знакопочережними рядами Кантора та нега-s-ковим представленням та вивчено фрактальні властивості однієї множини, елементи якої представлені нега-s-ковим рядом Кантора.

ABSTRACT. The article is devoted to the investigation of the following sets

$$\mathbb{S}_{(-s,0)} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-s)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}, \alpha_n \in A_0, s > 2 \right\},$$
$$S^- \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}, \alpha_n \in A_0, s > 2 \right\},$$

where  $2 < s$  is a fixed integer number. It is proved, the sets are continuous, nondense, perfect and Lebesgue zero-measure self-similar sets. Hausdorff-Besicovitch dimension of the sets is calculated and properties of fractal subsets of these sets are studied. A notion of nega-s-adic Cantor series is defined and interconnection between nega-s-adic representation and alternating Cantor series is investigated. Fractal properties of one set, that her elements are represented by nega-s-adic Cantor series are studied.

## 1. ВСТУП

Важливим питанням у математиці є моделювання дійсних чисел за допомогою рядів, елементи яких є числами, оберненими до натуральних. Ці представлення дійсних чисел широко застосовуються в теорії сингулярних функцій, фрактальній геометрії, теорії динамічних систем, теорії ймовірностей та ін. Проте, метричні теорії таких зображень є набагато менш розвинутими, ніж метрична теорія s-кових дробів. Узагальненням s-кової системи числення є представлення дійсних чисел знакододатними рядами Кантора. Водночас виникає потреба побудувати узагальнення неґа-s-кового представлення дійсних чисел, яким, відповідно, будуть знакопочережні ряди Кантора. Слід відзначити, що однією із задач метричної теорії чисел є відшукування взаємозв'язків між різними представленнями (розкладами) дійсних чисел, а однією із задач теорії множин — вивчення властивостей множин спеціального типу, елементи яких задані в термінах різних зображень. Цим задачам і буде присвячена дана стаття, в якій фігуруватимуть неґа-s-кове представлення та представлення знакопочережними рядами Кантора. Об'єктом дослідження є фрактальні множини канторівського типу, на елементи яких накладені додаткові умови.

Нехай  $s$  — фіксоване натуральне число, більше 1.

Нехай  $A \equiv \{0, 1, 2, \dots, s-1\}$  — алфавіт s-кової системи числення,  $A_0 = A \setminus \{0\}$  та  $L \equiv (A_0)^\infty = A_0 \times A_0 \times \dots$  — простір односторонніх послідовностей елементів множини  $A_0$ . Якщо  $(k_n)$  — деяка фіксована послідовність натуральних чисел, то ряд

$$\frac{\alpha_{k_1}}{(-s)^{k_1}} + \frac{\alpha_{k_2}}{(-s)^{k_2}} + \dots + \frac{\alpha_{k_n}}{(-s)^{k_n}} + \dots, \alpha_{k_n} \in A,$$

називається *неґа-s-ковим рядом*.

Ввівши заміну:  $m_1 = k_1, m_2 = k_2 - k_1, m_3 = k_3 - k_2, \dots, m_n = k_n - k_{n-1}, \dots$ , отримаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m_1+m_2+\dots+m_n}}{(-s)^{m_1+m_2+\dots+m_n}}, \alpha_{m_1+m_2+\dots+m_n} \in A. \quad (1)$$

Ті числа  $x \in [-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}]$ , які можна представити у вигляді розкладу (1) мають наступне неґа-s-кове зображення:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m_1+m_2+\dots+m_n}}{(-s)^{m_1+m_2+\dots+m_n}} \equiv \Delta \underbrace{0\dots 0}_{m_1-1} \alpha_{m_1} \underbrace{0\dots 0}_{m_2-1} \alpha_{m_1+m_2} \dots \underbrace{0\dots 0}_{m_n-1} \alpha_{m_1+m_2+\dots+m_n} \dots$$

Нехай  $(d_n)$  — деяка фіксована послідовність натуральних чисел, більших 1,  $(A_n)$  — послідовність множин  $A_n \equiv \{0, 1, 2, \dots, d_n - 1\}$  та  $L_n \equiv A_1 \times A_2 \times A_n \times \dots$

Ряд виду

$$-\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} - \frac{\varepsilon_3}{d_1 d_2 d_3} + \dots + \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} + \dots, \varepsilon_n \in A_n, \quad (2)$$

називається *знакопочереджним рядом Кантора*.

Знакопочереджний ряд Кантора, який є одночасно нега- $s$ -ковим рядом, називається *нега- $s$ -ковим рядом Кантора*. А саме:

$$-\frac{\varepsilon_1}{s^{m_1}} + \frac{\varepsilon_2}{s^{m_1+m_2}} - \frac{\varepsilon_3}{s^{m_1+m_2+m_3}} + \dots + \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{s^{m_1+m_2+\dots+m_n}} + \dots, \varepsilon_n \in A. \quad (3)$$

Очевидним є наступне твердження.

**Лема 1.** Для того, щоб нега- $s$ -ковий ряд (1) був знакопочереджним рядом Кантора, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$  послідовність  $(m_n)$  була послідовністю непарних натуральних чисел та  $\varepsilon_n = \alpha_n \in A$ .

Змішаним  $s$ -ковим рядом називається ряд виду

$$-\frac{\alpha_1}{s^{k_1}} + \frac{\alpha_2}{s^{k_2}} - \frac{\alpha_3}{s^{k_3}} + \dots + \frac{(-1)^n \alpha_n}{s^{k_n}} + \dots, \alpha_n \in A.$$

Очевидно, останній ряд є знакопочереджним рядом Кантора.

Великий інтерес викликають часткові випадки, коли послідовності  $(\alpha_n)$  та  $(m_n)$  є взаємозалежними. Зокрема, коли  $m_n = \alpha_n \in A_0$  для довільного  $n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 1.** Множини

$$\mathbb{S}_{(-s,0)} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-s)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}, (\alpha_n) \in L, s > 2 \right\},$$

$$S^- \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}, (\alpha_n) \in L, s > 2 \right\},$$

є:

- (1) континуальними, ніде не щільними, досконалими нуль-множинами Лебега;
- (2) самоподібними фракталами, розмірність Хаусдорфа-Безиковича  $\alpha_0$  яких задовольняє рівняння:

$$\sum_{i=1}^{s-1} \left( \frac{1}{s} \right)^{i\alpha_0} = 1.$$

Результати останньої теореми доведені в наступних розділах даної статті.

## 2. Множини $\mathbb{S}_{(-s,u)}$ , де $u = \overline{0, s-1}$

**2.1. Множина  $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$ .** Нехай  $s > 2$  — фіксоване натуральне число.

Нехай маємо послідовність  $(V_n)$  множин  $V_n$  таких, що для всіх  $n \in \mathbb{N}$   $V_n \subseteq A_0$ :

$$V_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_{m_n}^{(n)}\} \subseteq A_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad a_1^{(n)} < a_2^{(n)} < \dots < a_{m_n}^{(n)},$$

$1 \leq m_n \leq s-1$  — натуральне число,

$$L_V \equiv V_1 \times V_2 \times V_3 \times \dots \times V_n \times \dots$$

**Означення 1.** Множиною  $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$  називається підмножина чисел відрізка  $[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}]$ , яка задається з використанням нега-s-кового представлення наступним чином:

$$M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}] \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cdot (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}, (\alpha_n) \in L_V \right\}. \quad (4)$$

**Означення 2.** Множиною  $\mathbb{M}[S_{(-s,0,V_n)}]$  називається підмножина чисел відрізка  $[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}]$ , яка задається з використанням нега-s-кового зображення наступним чином:

$$M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}] \equiv \left\{ x : x = \Delta^{-s} \underbrace{0\dots 0}_{\alpha_1-1} \alpha_1 \underbrace{0\dots 0}_{\alpha_2-1} \alpha_2 \dots \underbrace{0\dots 0}_{\alpha_n-1} \alpha_n \dots, (\alpha_n) \in L_V \right\}. \quad (5)$$

Означення 1 та 2 є еквівалентними.

**Властивість 1.** Множина  $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$  не містить нега-s-ково-раціональних чисел.

Дана властивість випливає з означення нега-s-кового представлення дійсного числа та означення 2.

Введемо наступні позначення:

$\delta_i^0$  — найменше непарне число з множини  $V_i$ ,

$\delta_i$  — найбільше непарне число з множини  $V_i$ ,

$\omega_i^0$  — найменше парне число з множини  $V_i$ ,

$\omega_i$  — найбільше парне число з множини  $V_i$ .

**Властивість 2.**

$$\inf M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}] = -\frac{\delta_1^0}{s^{\delta_1^0}} - \frac{\omega_2^0}{s^{\delta_1^0+\omega_2^0}} - \frac{\omega_3^0}{s^{\delta_1^0+\omega_2^0+\omega_3^0}} - \dots - \frac{\omega_i^0}{s^{\delta_1^0+\omega_2^0+\dots+\omega_i^0}} + \dots$$

**Зауваження 1.** Якщо існує  $n_0$ , що  $V_{n_0}$  не містить парних чисел, то замість  $\omega_{n_0}^0$  вибираємо  $\delta_{n_0}$ . Далі, з множини  $V_{n_0+1}$  вибираємо  $\delta_{n_0+1}^0$ , а якщо це також неможливо, то вибираємо  $\omega_{n_0+1}$ .

Якщо  $V_1$  не містить непарних чисел, то вибираємо  $\omega_1$  і найбільші парні числа вибираємо тих пір, поки не знайдеться перша множина, що містить хоча б одне непарне число.

**Властивість 3.**

$$\sup M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}] = \frac{\omega_1^0}{s^{\omega_1^0}} + \frac{\omega_2^0}{s^{\omega_1^0+\omega_2^0}} + \frac{\omega_3^0}{s^{\omega_1^0+\omega_2^0+\omega_3^0}} + \dots + \frac{\omega_i^0}{s^{\omega_1^0+\omega_2^0+\dots+\omega_i^0}} + \dots$$

**Зауваження 2.** Якщо існує  $n_0$ , що  $V_{n_0}$  не містить парних чисел, то замість  $\omega_{n_0}^0$  вибираємо  $\delta_{n_0}$ . Далі, з множини  $V_{n_0+1}$  вибираємо  $\delta_{n_0+1}^0$ , а якщо це неможливо зробити, то вибираємо  $\omega_{n_0+1}$ .

Якщо  $V_1$  не містить парних чисел, то вибираємо  $\delta_1$  і  $\delta_2^0$ . Потім вибираємо  $\omega_3^0$ , а якщо таке число вибрати неможливо, то аналогічно обираємо  $\delta_3$  і  $\delta_4^0$  і т. д.

#### Властивість 4.

$$M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}] \subseteq \mathbb{S}_{(-s,0)}, \text{ де } M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}] = \mathbb{S}_{(-s,0)} \Leftrightarrow L_V \equiv L.$$

**Теорема 2.** Множина  $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$  є ніді не щільною нуль-множиною Лебега.

Остання теорема випливає з відповідних властивостей множини  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$  (які будуть доведені в наступному розділі) та властивості 4.

**Означення 3.** Циліндром  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0,V_n)}$  рангу  $n$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_n$  називатимемо множину виду:

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0,V_n)} \equiv \left\{ x : x = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{(-s)^{c_1+c_2+\dots+c_k}} + \frac{1}{(-s)^{c_1+c_2+\dots+c_n}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+i}}{(-s)^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\dots+\alpha_{n+i}}} \right\},$$

де  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — фіксовані числа з множин  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , відповідно та  $(\alpha_{n+i}) \in L_V$  для  $i = 1, 2, 3, \dots$

**Теорема 3.** Множина  $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$  є самоподібним фракталом тоді і тільки тоді, коли

$$\{a_1, a_2, \dots, a_m\} = V_1 = V_2 = \dots = V_n = \dots, \text{ де } a_j \in A_0, j = \overline{1, m}, 2 < m < s, m \in \mathbb{N}.$$

Причому, значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича  $\alpha_0(M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}])$  множини  $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$  задовольняє рівняння:

$$\sum_{j=1}^m \left( \frac{1}{s} \right)^{a_j \alpha_0} = 1.$$

**Доведення.** З означення 3 випливає, що

$$d(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0,V_n)}) = \frac{1}{s^{c_1+c_2+\dots+c_n}} d\left(\left\{x : x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+i}}{(-s)^{\alpha_{n+1}+\dots+\alpha_{n+i}}}, \alpha_{n+i} \in L_V\right\}\right) = \frac{d_n}{s^{c_1+\dots+c_n}}.$$

В силу теореми 2 та рівності

$$\frac{d(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1}}^{(-s,0,V_n)})}{d(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0,V_n)})} = \frac{1}{s^{c_{n+1}}} \cdot \frac{d_{n+1}}{d_n}$$

і випливає твердження теореми. □

## 2.2. Множина $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ .

*Означення 4.* Множиною  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$  називається підмножина чисел відрізка  $[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}]$ , яка задається з використанням неґа-s-кового представлення наступним чином:

$$\mathbb{S}_{(-s,0)} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cdot (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}, (\alpha_n) \in L \right\}, \quad (6)$$

де  $s$  — фіксоване натуральне число, більше 2.

**Лема 2.** Множина  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$  є континуальною.

*Доведення.* Покажемо, що множини  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$  та  $C[-s, A_0]$  є еквівалентними. Тобто, побудуємо взаємно однозначну відповідність між цими множинами, а саме:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cdot (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}} \xrightarrow{f} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-s)^n} = f(x) = y,$$

що еквівалентно

$$x = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{\alpha_1-1}}^{-s} \alpha_1 \underbrace{0\dots 0}_{\alpha_2-1} \alpha_2 \dots \underbrace{0\dots 0}_{\alpha_n-1} \alpha_n \dots \xrightarrow{f} \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{-s} = f(x) = y.$$

Нехай маємо  $x_1$  та  $x_2$  з  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ ,  $x_1 \neq x_2$ , причому:

$$x_1 = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{\alpha_1-1}}^{-s} \alpha_1 \underbrace{0\dots 0}_{\alpha_2-1} \alpha_2 \dots \underbrace{0\dots 0}_{\alpha_n-1} \alpha_n \dots, \quad x_2 = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{\beta_1-1}}^{-s} \beta_1 \underbrace{0\dots 0}_{\beta_2-1} \beta_2 \dots \underbrace{0\dots 0}_{\beta_n-1} \beta_n \dots.$$

Припустимо, що  $f(x_1) = f(x_2)$  — неґа-s-ково-ірраціональне число. Звідси слідує, що  $\alpha_n = \beta_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Тобто,  $x_1 = x_2$ , що суперечить умові.

Припустимо, що  $f(x_1) = f(x_2)$  — неґа-s-ково-раціональне число. Проте, це неможливо, оскільки жодне число з множини  $C[-s, A_0]$  не має два неґа-s-кових зображення.

Таким чином,  $f$  — взаємно однозначна відповідність між  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$  та  $C[-s, A_0]$ , що свідчить про еквівалентність цих множин. Із континуальності  $C[-s, A_0]$  випливає континуальність  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ .  $\square$

З властивостей 2 і 3 множини  $M[\mathbb{S}_{(-s,0),V_n}]$  випливають наступні рівності:

$$\inf \mathbb{S}_{(-s,0)} = -\frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^5} - \dots = -\frac{s^2+1}{s(s^2-1)},$$

$$\sup \mathbb{S}_{(-s,0)} = \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^4} + \frac{2}{s^6} + \dots = \frac{2}{s^2-1}.$$

*Означення 5.* Циліндром  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0)}$  рангу  $n$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_n$  називатимемо підмножину множини  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ , всі елементи якої мають в своєму неґа-s-ковому зображенні перші  $n$  відмінних від 0 цифр, рівних  $c_1, c_2, \dots, c_n$  відповідно.

**Лема 3.** Циліндри  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0)}$  мають наступні властивості:

**Властивість 5.**

$$\inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0)} = \begin{cases} g_n^{(-s)} + \frac{\inf \mathbb{S}_{(-s,0)}}{(-s)^{c_1+c_2+\dots+c_n}}, & \text{якщо } c_1 + \dots + c_n - \text{парне число}; \\ g_n^{(-s)} + \frac{\sup \mathbb{S}_{(-s,0)}}{(-s)^{c_1+c_2+\dots+c_n}}, & \text{якщо } c_1 + \dots + c_n - \text{непарне число}. \end{cases}$$

$$\sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0)} = \begin{cases} g_n^{(-s)} + \frac{\sup \mathbb{S}_{(-s,0)}}{(-s)^{c_1+c_2+\dots+c_n}}, & \text{якщо } c_1 + \dots + c_n - \text{парне число}; \\ g_n^{(-s)} + \frac{\inf \mathbb{S}_{(-s,0)}}{(-s)^{c_1+c_2+\dots+c_n}}, & \text{якщо } c_1 + \dots + c_n - \text{непарне число}, \end{cases}$$

де

$$g_n^{(-s)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i (-1)^i}{s^{c_1+c_2+\dots+c_i}}.$$

**Властивість 6.**

$$d(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0)}) = \frac{d(\mathbb{S}_{(-s,0)})}{s^{c_1+c_2+\dots+c_n}}, \text{ де } d(\cdot) - \text{діаметр множини.}$$

**Властивість 7.**

$$\frac{d(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1}}^{(-s,0)})}{d(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0)})} = \frac{1}{s^{c_{n+1}}}.$$

**Властивість 8.**

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0)} = \bigcup_{i=1}^{s-1} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n i}^{(-s,0)}.$$

**Властивість 9.** Для циліндрів  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1}}^{(-s,0)}$   $(n+1)$ -го рангу з основою  $c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1}$  виконуються наступні співвідношення:

$$\inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n p}^{(-s,0)} > \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n (p+1)}^{(-s,0)}, \text{ якщо } c_1 + c_2 + \dots + c_n + p - \text{парне число},$$

$$\inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n (p+1)}^{(-s,0)} > \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n p}^{(-s,0)}, \text{ якщо } c_1 + c_2 + \dots + c_n + p - \text{непарне число}.$$

**Властивість 10.**

$$T_{c_1 c_2 \dots c_n p}^{(-s,0)} \cap \mathbb{S}_{(-s,0)} = \emptyset, \text{ де } T_{c_1 c_2 \dots c_n p}^{(-s,0)} - \text{інтервал, причому:}$$

$$T_{c_1 c_2 \dots c_n p}^{(-s,0)} = \begin{cases} \left( \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n (p+1)}^{(-s,0)}; \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n p}^{(-s,0)} \right), & \text{якщо } c_1 + \dots + c_n + p - \text{парне число}; \\ \left( \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n p}^{(-s,0)}; \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n (p+1)}^{(-s,0)} \right), & \text{якщо } c_1 + \dots + c_n + p - \text{непарне число}, \end{cases}$$

де  $1 \leq p < s-1$  — натуральне число.

**Властивість 11.**

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n p}^{(-s,0)} \cap \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n (p+1)}^{(-s,0)} = \emptyset, \text{ де } p \in \{1, 2, \dots, s-2\}.$$

**Властивість 12.** Якщо  $x_0 \in \mathbb{S}_{(-s,0)}$ , то

$$x_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0)}.$$

*Доведення.* Властивості 5 – 8 впливають з означень циліндра  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0)}$  та множини  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ .

Доведемо властивість 9. Маємо циліндри  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n p}^{(-s,0)}$ ,  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n (p+1)}^{(-s,0)}$ , де  $1 \leq p < s-1$ .

Введемо позначення:

$$g_n^{(-s)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(-s)^{c_1+c_2+\dots+c_i}}; \quad \varpi_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n.$$

З означення циліндра  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0)}$  випливає, що

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n p}^{(-s,0)} \subset \left\{ \left[ g_n^{(-s)} + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}}; g_n^{(-s)} + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{2}{(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}} \right], \right. \\ \left. \left[ g_n^{(-s)} + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{2}{(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}}; g_n^{(-s)} + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}} \right], \right.$$

де в першому випадку число  $\varpi_n + p$  – парне, а в другому – число  $\varpi_n + p$  є непарним.

Аналогічно

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n (p+1)}^{(-s,0)} \subset \left\{ \left[ g_n^{(-s)} + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}}; g_n^{(-s)} + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{2}{(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}} \right], \right. \\ \left. \left[ g_n^{(-s)} + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{2}{(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}}; g_n^{(-s)} + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}} \right], \right.$$

де в першому випадку число  $(\varpi_n + p + 1)$  – парне, а в другому – непарне.

Перейдемо тепер до доведення нерівностей, сформульованих в умові властивості.

Нехай  $\varpi_n + p = c_1 + c_2 + \dots + c_n + p$  – парне. Тоді

$$\inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n p}^{(-s,0)} - \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n (p+1)}^{(-s,0)} = g_n^{(-s)} + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}} - \\ - g_n^{(-s)} - \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} - \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}} = \frac{1}{s^{\varpi_n+p}} \left( ps + p + 1 - \frac{s^3 + s^2 + s + 1}{s(s^2-1)} \right) > 0,$$

оскільки

$$\frac{s^3 + s^2 + s + 1}{s(s^2-1)} = 1 + \frac{(s+1)^2}{s(s^2-1)} = 1 + \frac{s+1}{s(s-1)} < 2.$$

Нехай  $\varpi_n + p = c_1 + c_2 + \dots + c_n + p$  – непарне. Тоді

$$\inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n (p+1)}^{(-s,0)} - \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n p}^{(-s,0)} = g_n^{(-s)} + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}} - \\ - g_n^{(-s)} - \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} - \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}} = \frac{1}{s^{\varpi_n+p+1}} \left( ps + p + 1 - \frac{s^3 + s^2 + s + 1}{s(s^2-1)} \right) > 0.$$

Для доведення властивості 10 достатньо довести наступні нерівності:



- при умові, що  $c_1 + c_2 + \dots + c_n + p$  — парне число

$$\begin{cases} \sup \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n (p+1) c_{n+2}}^{(-s,0)} - \sup \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n (p+1)}^{(-s,0)} < 0, \\ \inf \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n p c_{n+2}}^{(-s,0)} - \inf \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n p}^{(-s,0)} > 0. \end{cases}$$

- при умові, що  $c_1 + c_2 + \dots + c_n + p$  — непарне число

$$\begin{cases} \sup \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n p c_{n+2}}^{(-s,0)} - \sup \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n p}^{(-s,0)} < 0, \\ \inf \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n (p+1) c_{n+2}}^{(-s,0)} - \inf \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n (p+1)}^{(-s,0)} > 0. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$l_0(c_1, c_2, \dots, c_n, p) = \begin{cases} -\frac{s^2+1}{s(s^2-1)}, & \text{якщо } c_1 + c_2 + \dots + c_n + p \text{ — парне число;} \\ \frac{2}{s^2-1}, & \text{якщо } c_1 + c_2 + \dots + c_n + p \text{ — непарне число.} \end{cases}$$

$$l(c_1, c_2, \dots, c_n, p) = \begin{cases} \frac{2}{s^2-1}, & \text{якщо } c_1 + c_2 + \dots + c_n + p \text{ — парне число;} \\ -\frac{s^2+1}{s(s^2-1)}, & \text{якщо } c_1 + c_2 + \dots + c_n + p \text{ — непарне число.} \end{cases}$$

Нехай  $c_1 + c_2 + \dots + c_n + p$  — парне число.

$$\begin{aligned} \sup \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n (p+1) c_{n+2}}^{(-s,0)} - \sup \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n (p+1)}^{(-s,0)} &= g_n^{(-s)} + \frac{p+1}{(-s)^{c_1+\dots+c_n+p+1}} + \frac{c_{n+2}}{(-s)^{c_1+\dots+c_n+p+1+c_{n+2}}} + \\ &+ \frac{l(c_1, c_2, \dots, c_n, p+1, c_{n+2})}{(-s)^{c_1+\dots+c_n+p+1+c_{n+2}}} - g_n^{(-s)} - \frac{p+1}{(-s)^{c_1+\dots+c_n+p+1}} - \frac{l(c_1, c_2, \dots, c_n, p+1)}{(-s)^{c_1+\dots+c_n+p+1}} = \\ &= -\frac{1}{s^{c_1+\dots+c_n+p+1}} \left( \frac{c_{n+2}}{(-s)^{c_{n+2}}} + \frac{l(c_1, c_2, \dots, c_n, p+1, c_{n+2})}{(-s)^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)} \right) = \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{s^{c_1+\dots+c_n+p+1}} \left( \frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{s^2+1}{s(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)} \right) < 0, & \text{якщо } c_{n+2} \text{ — парне;} \\ -\frac{1}{s^{c_1+\dots+c_n+p+1}} \left( -\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{2}{(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)} \right) < 0, & \text{якщо } c_{n+2} \text{ — непарне,} \end{cases} \end{aligned}$$

оскільки

$$-\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{2}{(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)} = \frac{(s^2+1)s^{c_{n+2}} + sc_{n+2} - (s^2c_{n+2} + 2)s}{(s^2-1)s^{1+c_{n+2}}} \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \inf \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n p c_{n+2}}^{(-s,0)} - \inf \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n p}^{(-s,0)} &= \frac{c_{n+2}}{(-s)^{c_1+\dots+c_n+p+c_{n+2}}} + \frac{l_0(c_1, c_2, \dots, c_n, p, c_{n+2})}{(-s)^{c_1+\dots+c_n+p+c_{n+2}}} - \\ - \frac{l_0(c_1, c_2, \dots, c_n, p)}{(-s)^{c_1+\dots+c_n+p}} &= \begin{cases} \frac{1}{s^{c_1+\dots+c_n+p}} \left( \frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{s^2+1}{s(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)} \right) > 0, & c_{n+2} \text{ — парне;} \\ \frac{1}{s^{c_1+\dots+c_n+p}} \left( -\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{2}{(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)} \right) > 0, & c_{n+2} \text{ — непарне.} \end{cases} \end{aligned}$$

Нехай  $c_1 + c_2 + \dots + c_n + p$  — непарне число.

$$\begin{aligned} \sup \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n p c_{n+2}}^{(-s,0)} - \sup \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n p}^{(-s,0)} &= \frac{c_{n+2}}{(-s)^{c_1 + \dots + c_n + p + c_{n+2}}} + \frac{l(c_1, c_2, \dots, c_n, p, c_{n+2})}{(-s)^{c_1 + \dots + c_n + p + c_{n+2}}} - \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{s^{c_1 + \dots + c_n + p}} \left( \frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{s^2 + 1}{s(s^2 - 1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2 + 1}{s(s^2 - 1)} \right) < 0, & c_{n+2} \text{ — парне;} \\ -\frac{1}{s^{c_1 + \dots + c_n + p}} \left( -\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{2}{(s^2 - 1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2 + 1}{s(s^2 - 1)} \right) < 0, & c_{n+2} \text{ — непарне.} \end{cases} \\ \inf \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n (p+1) c_{n+2}}^{(-s,0)} - \inf \Delta_{c_1 c_1 \dots c_n (p+1)}^{(-s,0)} &= \frac{c_{n+2}}{(-s)^{c_1 + \dots + c_n + p + 1 + c_{n+2}}} + \frac{l_0(c_1, c_2, \dots, c_n, p + 1, c_{n+2})}{(-s)^{c_1 + \dots + c_n + p + 1 + c_{n+2}}} - \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s^{c_1 + \dots + c_n + p}} \left( \frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{s^2 + 1}{s(s^2 - 1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2 + 1}{s(s^2 - 1)} \right) > 0, & c_{n+2} \text{ — парне;} \\ \frac{1}{s^{c_1 + \dots + c_n + p}} \left( -\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{2}{(s^2 - 1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2 + 1}{s(s^2 - 1)} \right) > 0, & c_{n+2} \text{ — непарне.} \end{cases} \end{aligned}$$

Властивість 11 є наслідком властивості 10.

Властивість 12. З властивостей циліндрів досліджуваної множини слідує, що якщо  $x_0 \in \mathbb{S}_{(-s,0)}$ , то

$$x_0 \in \Delta_{\alpha_1}^{(-s,0)} \cap \Delta_{\alpha_1 \alpha_2}^{(-s,0)} \cap \dots \cap \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{(-s,0)} \cap \dots,$$

$$\text{де } x_0 = \Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{\alpha_1 - 1} \alpha_1 \underbrace{0 \dots 0}_{\alpha_2 - 1} \alpha_2 \dots \underbrace{0 \dots 0}_{\alpha_n - 1} \alpha_n \dots}^{-s}.$$

Крім того

$$x_0 \in [\inf \Delta_{\alpha_1}^{(-s,0)}; \sup \Delta_{\alpha_1}^{(-s,0)}] \cap [\inf \Delta_{\alpha_1 \alpha_2}^{(-s,0)}; \sup \Delta_{\alpha_1 \alpha_2}^{(-s,0)}] \cap \dots \cap [\inf \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{(-s,0)}; \sup \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{(-s,0)}] \cap \dots$$

Як наслідок, число  $x_0$  належить системі відрізків:

$$[\inf \Delta_{\alpha_1}^{(-s,0)}; \sup \Delta_{\alpha_1}^{(-s,0)}] \supset [\inf \Delta_{\alpha_1 \alpha_2}^{(-s,0)}; \sup \Delta_{\alpha_1 \alpha_2}^{(-s,0)}] \supset \dots \supset [\inf \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{(-s,0)}; \sup \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{(-s,0)}] \supset \dots$$

Тому, з аксіоми Кантора випливає, що

$$x_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0)}.$$

□

**Теорема 4.** Множина  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$  є досконалою ніде не щільною нуль-множиною Лебега.

*Доведення.* Ніде не щільність випливає із властивості 10 циліндрів  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-s,0)}$ . Досконалість та рівність міри Лебега досліджуваної множини нулю доводяться по аналогії з доведенням відповідних властивостей для множини

$$S \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}, (\alpha_n) \in L \right\}$$

в [12]. □

**Теорема 5.** Множина  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$  є самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича  $\alpha_0(\mathbb{S}_{(-s,0)})$  якого задовольняє рівняння:

$$\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_0} + \left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha_0} + \dots + \left(\frac{1}{s}\right)^{(s-1)\alpha_0} = 1.$$

*Доведення.* Оскільки множина  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$  обмежена і замкнена, то вона є компактом.

Крім того

$$\mathbb{S}_{(-s,0)} = \bigcup_{i=1}^{s-1} \left[ \left[ \inf \Delta_i^{(-s,0)}; \sup \Delta_i^{(-s,0)} \right] \cap \mathbb{S}_{(-s,0)} \right]$$

та

$$\left[ \left[ \inf \Delta_i^{(-s,0)}; \sup \Delta_i^{(-s,0)} \right] \cap \mathbb{S}_{(-s,0)} \right] \stackrel{s-i}{\sim} \mathbb{S}_{(-s,0)} \text{ для всіх } i = \overline{1, s-1}.$$

Тому значення  $\alpha_s(\mathbb{S}_{(-s,0)})$  самоподібної розмірності множини  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$  задовольняє рівняння:

$$\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_s} + \left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha_s} + \dots + \left(\frac{1}{s}\right)^{(s-1)\alpha_s} = 1.$$

В силу того, що множина  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$  є самоподібним компактом простору  $\mathbb{R}^1$ , то значення самоподібної розмірності множини  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$  співпадає із значенням розмірності Хаусдорфа-Безиковича цієї множини [10]. □

**2.3. Множина  $\mathbb{S}_{(-s,u)}$ .** Нехай  $u$  — фіксоване натуральне число з  $A$ .

*Означення 6.* Множиною  $\mathbb{S}_{(-s,u)}$  називається підмножина чисел відрізка  $\left[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}\right]$ , яка з використанням нега- $s$ -кового представлення задається наступним чином:

$$\mathbb{S}_{(-s,u)} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha_n - u}{-s^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}} \right) - \frac{u}{s+1}, (\alpha_n) \in L \right\},$$

*Означення 7.* Множиною  $\mathbb{S}_{(-s,u)}$  називається підмножина чисел відрізка  $\left[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}\right]$ , яка з використанням нега- $s$ -кового зображення задається наступним чином:

$$\mathbb{S}_{(-s,u)} \equiv \left\{ x : x = \Delta_{\underbrace{\alpha_1 - 1}_{u \dots u}}^{-s} \underbrace{\alpha_2 - 1}_{u \dots u} \dots \underbrace{\alpha_n - 1}_{u \dots u}, (\alpha_n) \in L, u \neq \alpha_n \forall n \in \mathbb{N} \right\}, \text{ де}$$

$u$  — фіксоване число.

Означення 7 і 8 є еквівалентними.

**Теорема 6.** Нехай множина  $E$  — множина канторівського типу, яка складається зі всіх таких елементів, кожен з яких в нега- $s$ -ковій системі числення має зображення, яке містить лише набори цифр з деякої конкретної скінченної множини  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  наборів цифр.

Тоді розмірність Хаусдорфа-Безиковича  $\alpha_0(E)$  множини  $E$  задовольняє рівняння:

$$N(\sigma_m^1) \left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_0} + N(\sigma_m^2) \left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha_0} + \dots + N(\sigma_m^k) \left(\frac{1}{s}\right)^{k\alpha_0} = 1,$$

де  $N(\sigma_m^k)$  — кількість  $k$ -цифрових наборів з множини  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  та  $N(\sigma_m^1) + N(\sigma_m^2) + \dots + N(\sigma_m^k) = m$ .

*Доведення.* Нехай  $E$  — множина канторівського типу, яка складається зі всіх таких елементів, в неґа-s-ковому зображенні яких використовуються лише набори цифр з множини  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ . Тоді очевидним є існування наборів  $e_1 e_2 \dots e_r$ ,  $\iota_1 \iota_2 \dots \iota_t$ , де  $r, t \in \mathbb{N}$  (можуть являти собою не один, а кілька наборів з  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ ), таких, що

$$\inf E = \Delta_{(e_1 e_2 \dots e_r)(e_1 e_2 \dots e_r) \dots}^{-s} \quad \sup E = \Delta_{(\iota_1 \iota_2 \dots \iota_t)(\iota_1 \iota_2 \dots \iota_t) \dots}^{-s}.$$

$$d(E) = \sup E - \inf E, \text{ де } d(\cdot) \text{ — діаметр множини.}$$

Циліндром  $\Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n}^{(-s, E)}$  ранґу  $n$  з основою  $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n$  називатимемо таку підмножину множини  $E$ , всі елементи якої мають в своєму неґа-s-ковому зображенні  $n$  перших фіксованих набори з  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ . Легко помітити, що

$$d(\Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n}^{(-s, E)}) = \frac{d(E)}{s^{N(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n)}},$$

де  $N(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n)$  — кількість цифр в усіх наборах  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ .

В силу того, що

$$E = C[-s, \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}], \quad E \subset [\inf E; \sup E] \text{ та}$$

$$\frac{\Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \tau_{n+1}}^{(-s, E)}}{\Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n}^{(-s, E)}} = \frac{1}{s^{N(\tau_{n+1})}},$$

$$E = [I_{\tau_1} \cap E] \cup [I_{\tau_2} \cap E] \cap \dots \cap [I_{\tau_m} \cap E],$$

$$\text{де } I_{\tau_i} = \left[ \inf \Delta_{\tau_i}^{(-s, E)}; \sup \Delta_{\tau_i}^{(-s, E)} \right], \quad i = \overline{1, m}.$$

Таким чином

$$\left[ I_{\tau_1^1} \cap E \right] \overset{s^{-1}}{\sim} E, \left[ I_{\tau_2^1} \cap E \right] \overset{s^{-1}}{\sim} E, \dots, \left[ I_{\tau_{n_1}^1} \cap E \right] \overset{s^{-1}}{\sim} E;$$

$$\left[ I_{\tau_1^2} \cap E \right] \overset{s^{-2}}{\sim} E, \left[ I_{\tau_2^2} \cap E \right] \overset{s^{-2}}{\sim} E, \dots, \left[ I_{\tau_{n_2}^2} \cap E \right] \overset{s^{-2}}{\sim} E;$$

.....

$$\left[ I_{\tau_1^k} \cap E \right] \overset{s^{-k}}{\sim} E, \left[ I_{\tau_2^k} \cap E \right] \overset{s^{-k}}{\sim} E, \dots, \left[ I_{\tau_{n_k}^k} \cap E \right] \overset{s^{-k}}{\sim} E,$$

де  $\tau_j^k$  — деякий  $k$ -цифровий набір з  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  ( $j = \overline{1, n_k}$ ), а  $n_k$  — кількість  $k$ -цифрових наборів з  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ .

Отже, множина  $E$  є самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якого задовольняє рівняння:

$$N(\sigma_m^1) \left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_0} + N(\sigma_m^2) \left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha_0} + \dots + N(\sigma_m^k) \left(\frac{1}{s}\right)^{k\alpha_0} = 1.$$

□

З останньої теореми випливають наступні твердження.

**Теорема 7.** Множина  $\mathbb{S}_{(-s,u)}$  є самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича  $\alpha_0(\mathbb{S}_{(-s,u)})$  якого задовольняє рівняння:

$$\sum_{i \in A_u} \left(\frac{1}{s}\right)^{i\alpha_0} = 1, \text{ де } A_u = \{1, 2, \dots, s-1\} \setminus \{u\}.$$

**Теорема 8.** Множина  $\mathbb{S}_{(-s,u)}$  є континуальною, досконалою ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

**Означення 8.** Множиною  $M[\mathbb{S}_{(-s,u,V_n)}]$  називається множина виду:

$$\mathbb{S}_{(-s,u)} \equiv \left\{ x : x = \Delta^{-s} \underbrace{u \dots u}_{\alpha_1 - 1} \alpha_1 \underbrace{u \dots u}_{\alpha_2 - 1} \alpha_2 \dots \underbrace{u \dots u}_{\alpha_n - 1} \alpha_n, (\alpha_n) \in L_V, u \neq \alpha_n \forall n \in \mathbb{N} \right\}, \text{ де}$$

$u$  — фіксоване число.

По аналогії до проведеного дослідження для множин  $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$ ,  $\mathbb{S}_{(-s,u)}$ , сформулюємо наступні теореми.

**Теорема 9.** Множина  $M[\mathbb{S}_{(-s,u,V_n)}]$  є ніде не щільною нуль-множиною Лебега.

**Теорема 10.** Множина  $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$  є самоподібним фракталом тоді і тільки тоді, коли

$$\{a_1, a_2, \dots, a_m\} = V_1 = V_2 = \dots = V_n = \dots, \text{ де } a_j \in A_0, j = \overline{1, m}, 2 < m < s, m \in \mathbb{N}.$$

Причому, значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича  $\alpha_0(M[\mathbb{S}_{(-s,u,V_n)}])$  множини  $M[\mathbb{S}_{(-s,u,V_n)}]$  задовольняє рівняння:

$$\sum_{j=1, a_j \neq u}^m \left(\frac{1}{s}\right)^{a_j \alpha_0} = 1.$$

3. Множина  $S^-$ 3.1. Дослідження властивостей множини  $S^-$ .

Означення 9. Множиною  $S^-$  називатимемо множину виду:

$$S^- \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{s^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}, (\alpha_n) \in L, \right\}, \text{ де}$$

$2 < s$  — фіксоване натуральне число.

Циліндром  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^-$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_n$  рангу  $n$  називатимемо множину всіх можливих чисел з  $S^-$ , для яких виконується умова:

$$\alpha_1 = c_1, \alpha_2 = c_2, \dots, \alpha_n = c_n, \text{ де } c_1, c_2, \dots, c_n \text{ — фіксований набір чисел.}$$

Очевидно, що

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^- \subset \begin{cases} \left[ \sigma_{2k} + \frac{\inf S^-}{s^{c_1 + c_2 + \dots + c_{2k}}}; \sigma_{2k} + \frac{\sup S^-}{s^{c_1 + c_2 + \dots + c_{2k}}} \right], & \text{якщо } n = 2k, k \in \mathbb{N}; \\ \left[ \sigma_{2k+1} - \frac{\sup S^-}{s^{c_1 + c_2 + \dots + c_{2k+1}}}; \sigma_{2k+1} - \frac{\inf S^-}{s^{c_1 + c_2 + \dots + c_{2k+1}}} \right], & \text{якщо } n = 2k + 1, \end{cases}$$

де

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s^{c_1 + c_2 + \dots + c_i}}, \inf S^- = \frac{-s^{s-1} + s - 1}{s^s - 1}, \sup S^- = \frac{-s^2 + s + 1}{s^s - 1}.$$

Лема 4. Справедливими є наступні властивості:

(1)

$$d(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^-) = \frac{s^{s-1} - s^2 + 2}{(s^s - 1)s^{c_1 + c_2 + \dots + c_n}}.$$

(2)

$$\frac{\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1}}^-}{\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^-} = \frac{1}{s^{c_{n+1}}}.$$

(3)

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1}}^- \subset \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^- \quad \forall c_n \in A_0, n \in \mathbb{N}.$$

(4) Циліндри  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} 1}^-, \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} 2}^-, \dots, \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [s-1]}^-$  розташовані:

- "справа на ліво", якщо  $n$  — парне. Тобто,

$$\forall k \in \mathbb{N} : \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k-1} [c_{2k}+1]}^- < \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k-1} c_{2k}}^-,$$

- "зліва на право", якщо  $n$  — непарне. Тобто,

$$\forall k \in \mathbb{N} : \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k} c_{2k+1}}^- < \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k} [c_{2k+1}+1]}^-.$$

*Доведення.* Перша та друга властивості випливають з означення циліндричних множин.

Для доведення *третьої* властивості потрібно розглянути випадки для парного та непарного  $n$ .

1. Нехай  $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ . Тоді нерівність  $\inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1}}^- \geq \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^-$  можна записати у вигляді:

$$\sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\dots+c_m}} - \frac{c_{2k+1}}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k+1}}} - \frac{\sup S^-}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k+1}}} \geq \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\dots+c_m}} + \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k}}},$$

що еквівалентно

$$\frac{-c_{2k+1} - \sup S^- \geq s^{c_{2k+1}} \inf S^-,}{(s^2 - s - 1) + s^{c_{2k+1}}(s^{s-1} - s + 1) - c_{2k+1}(s^s - 1)} \geq 0.$$

Очевидно, що остання нерівність перетворюється в рівність при  $c_{2k+1} = 1$ .

Тепер для парного  $n$  перевіримо виконання нерівності  $\sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1}}^- \leq \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^-$ .

$$\sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\dots+c_m}} - \frac{c_{2k+1}}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k+1}}} - \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k+1}}} \leq \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\dots+c_m}} + \frac{\sup S^-}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k}}},$$

$$-c_{2k+1} - \inf S^- \leq s^{c_{2k+1}} \sup S^-,$$

що еквівалентно

$$(1 + c_{2k+1} + s^{2+c_{2k+1}} + s^{s-1}) - s - s^{1+c_{2k+1}} - c_{2k+1}s^s - s^{c_{2k+1}} \leq 0.$$

Остання нерівність перетворюється в рівність при  $c_{2k+1} = s - 1$ .

2. Нехай  $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ . Тоді нерівність  $\inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1}}^- \geq \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^-$  еквівалентна нерівності:

$$\sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\dots+c_m}} + \frac{c_{2k+2}}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k+2}}} + \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k+2}}} \geq \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\dots+c_m}} - \frac{\sup S^-}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k+1}}},$$

в результаті отримаємо:

$$(s - 1 - c_{2k+2}) - s^{c_{2k+2}}(s^2 - s - 1) + s^{s-1}(s c_{2k+2} - 1) \geq 0,$$

що очевидно. При  $c_{2k+2} = s - 1$  остання нерівність перетворюється в рівність.

Аналогічно, для нерівності  $\sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1}}^- \leq \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^-$ , отримаємо:

$$\sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\dots+c_m}} + \frac{c_{2k+2}}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k+2}}} + \frac{\sup S^-}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k+2}}} \leq \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\dots+c_m}} - \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k+1}}},$$

$$\sup S^- + c_{2k+2}(s^s - 1) \leq -s^{c_{2k+2}} \inf S^-,$$

$$(s - s^2) + (1 - c_{2k+2}) + (s - 1)s^{c_{2k+2}} + s^{s-1}(s c_{2k+2} - s^{c_{2k+2}}) \leq 0,$$

що справджується для всіх можливих значень  $c_{2k+2}$  та  $s > 2$  і перетворюється в рівність при  $c_{2k+2} = 1$ .

Перейдемо до доведення *четвертої* властивості про розташування циліндричних множин.

•

$$\begin{aligned} & \forall k \in \mathbb{N} : \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k-1} [c_{2k}+1]}^- - \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k-1} c_{2k}}^- = \\ &= \frac{c_{2k} + 1}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k}+1}} + \frac{\sup S^-}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k}+1}} - \frac{c_{2k}}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k}}} - \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k}}} = \\ &= \frac{1}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k}}} \left( \frac{1-s}{s} c_{2k} + 2 \frac{s^s - s^2 + s}{s(s^s - 1)} \right) = \\ &= \frac{s^s(2 + c_{2k} - s c_{2k}) + s(c_{2k} + 2 - 2s) - c_{2k}}{s(s^s - 1) s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k}}} < 0. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} & \forall k \in \mathbb{N} : \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k} c_{2k+1}}^- - \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k} [c_{2k+1}+1]}^- = \\ &= \frac{c_{2k+1}}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k}+c_{2k+1}}} - \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\dots+c_{2k}+c_{2k+1}}} - \frac{1 + c_{2k+1}}{s^{1+c_1+c_2+\dots+c_{2k}+c_{2k+1}}} + \frac{\sup S^-}{s^{1+c_1+c_2+\dots+c_{2k}+c_{2k+1}}} = \\ &= \frac{1}{s^{1+c_1+c_2+\dots+c_{2k}+c_{2k+1}}} \left( \frac{s^s - 2s^2 + 2s + 1}{s^s - 1} - \frac{s^{s+1} c_{2k+1} - s c_{2k+1}}{s^s - 1} + \frac{s^s c_{2k+1} - c_{2k+1}}{s^s - 1} + \frac{s^s - 1}{s^s - 1} \right) = \\ &= \frac{s^s(2 + c_{2k+1} - s c_{2k+1}) + s(2 - 2s - c_{2k+1}) - c_{2k+1}}{(s^s - 1) s^{1+c_1+c_2+\dots+c_{2k}+c_{2k+1}}} < 0. \end{aligned}$$

□

**Наслідок 1.** Для всіх  $c_n \in \{1, 2, \dots, s-2\}$ :  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} c_n}^- \cap \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [c_n+1]}^- = \emptyset$ .

**Наслідок 2.** Інтервали виду

$\left( \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k-1}}^- ; \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k-2} [c_{2k-1}+1]}^- \right), \left( \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k-1} [c_{2k}+1]}^- ; \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k-1} c_{2k}}^- \right), k \in \mathbb{N},$   
є "дірками" множини  $S^-$ .

**Наслідок 3.** Для довільного  $x_0 \in S^-$

$$x_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^-.$$



### 3.2. Властивості множини $S^-$ .

**Теорема 11.** Множина  $S^-$  є:

- континуальною, ніде не щільною, досконалою нуль-множиною Лебега;
- самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича  $\alpha_0$  якого задовольняє рівняння:

$$\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_0} + \left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha_0} + \dots + \left(\frac{1}{s}\right)^{(s-1)\alpha_0} = 1.$$

Доведення проводиться по аналогії до доведення відповідних властивостей для множини  $\mathbb{S}_{(-s,0)}$  з врахуванням доведеної в останньому розділі леми та її наслідків, а також з врахуванням властивостей представлення чисел знакопозиченими рядами Кантора.

### 3.3. Класи $S^-$ -множин.

**Означення 10.** Множиною  $S_V^-$  називається множина  $S^-$ , якщо виконується умова:  $\forall i \in \mathbb{N} \quad \alpha_i \in A_i \subset A_0 \subset A \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$

Оскільки множина  $S^-$  є підмножиною відрізка  $\left[\frac{-s^{s-1}+s-1}{s^s-1}, \frac{-s^2+s+1}{s^s-1}\right]$  та за означенням  $\alpha_i \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$ , то  $S_V^- \subseteq S^-$ .

З властивостей множини  $S^-$  випливає наступний наслідок.

**Наслідок 4.** Нехай  $\forall i \in \mathbb{N} \quad \alpha_i \in A_i \subset A_0 \subset A$ , тобто

$$\alpha_1 \in V_1 \subseteq A_0 \subset A, \alpha_2 \in V_2 \subseteq A_0 \subset A, \alpha_3 \in V_3 \subseteq A_0 \subset A, \dots, \alpha_n \in V_n \subseteq A_0 \subset A, \dots$$

тоді

$$\Delta_{c_1 \dots c_{2k}}^- \subset \left[ \sum_{m=1}^{2k} \frac{c_m}{s^{c_1+\dots+c_m}} + \frac{\inf S_V^-}{s^{c_1+\dots+c_{2k}}}; \sum_{m=1}^{2k} \frac{c_m}{s^{c_1+\dots+c_m}} + \frac{\sup S_V^-}{s^{c_1+\dots+c_{2k}}} \right],$$

$$\Delta_{c_1 \dots c_{2k+1}}^- \subset \left[ \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{c_m}{s^{c_1+\dots+c_m}} - \frac{\sup S_V^-}{s^{c_1+\dots+c_{2k+1}}}; \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{c_m}{s^{c_1+\dots+c_m}} - \frac{\inf S_V^-}{s^{c_1+\dots+c_{2k+1}}} \right],$$

де

$$\inf S_V^- = -\frac{\min\{\alpha_1\}}{s^{\min\{\alpha_1\}}} + \frac{\max\{\alpha_2\}}{s^{\min\{\alpha_1\}+\max\{\alpha_2\}}} - \frac{\min\{\alpha_3\}}{s^{\min\{\alpha_1\}+\max\{\alpha_2\}+\min\{\alpha_3\}}} + \dots,$$

$$\sup S_V^- = -\frac{\max\{\alpha_1\}}{s^{\max\{\alpha_1\}}} + \frac{\min\{\alpha_2\}}{s^{\max\{\alpha_1\}+\min\{\alpha_2\}}} - \frac{\max\{\alpha_3\}}{s^{\max\{\alpha_1\}+\min\{\alpha_2\}+\max\{\alpha_3\}}} + \dots$$

**Теорема 12.** Множина  $S_V^-$  є:

- ніде не щільною;

- нуль-множиною Лебега;
- обмеженою;
- множина  $S_V^-$  не завжди є самоподібною і

$$\alpha_0(S_V) \leq \alpha_0(S).$$

Множина  $S_V^-$  є самоподібна, коли

$$V_1 = V_2 = V_3 = \dots = V_n = \dots = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}, \quad (d_i \in A_0, 1 < m \leq s-1, m \in \mathbb{N}).$$

Тоді розмірність Хаусдорфа-Безиковича  $\alpha_0(S_V^-)$  множини  $S_V^-$  обчислюється за формулою:

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{s}\right)^{d_j \alpha_0} = 1.$$

#### 4. Множини дійсних чисел, що представлені з використанням НЕГА-S-КОВИХ РЯДІВ КАНТОРА

**Теорема 13.** Нехай  $s > 1$  — фіксоване натуральне число та для всіх  $n \in \mathbb{N}$   $\alpha_{m_1+m_2+\dots+m_n} \neq 0$  і  $m_n \in \{3, 5, 7, \dots, 2i+1, \dots\}$ .

Множина  $M_{(-D,s)}$

$$M_{(-D,s)} \equiv \left\{ x : x = \Delta \underbrace{0\dots 0}_{m_1-1}^{\alpha_{m_1}} \underbrace{0\dots 0}_{m_2-1}^{\alpha_{m_1+m_2}} \dots \underbrace{0\dots 0}_{m_n-1}^{\alpha_{m_1+m_2+\dots+m_n}} \dots \right\}.$$

є  $N$ -самоподібним фракталом, розмірність  $\alpha_0$  Хаусдорфа-Безиковича якого дорівнює:

$$\alpha_0(M_{(-D,s)}) = \log_s \left( \sqrt[3]{\frac{s-1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{27(s-1)^2-4}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{s-1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{27(s-1)^2-4}{3}}} \right).$$

*Доведення.* З (3) та теореми 6 випливає, що розмірність  $\alpha_0$  Хаусдорфа-Безиковича множини  $M_{(-D,s)}$  при  $m_n \in \{3, 5, 7, \dots, 2i+1, \dots\}$ ,  $\alpha_{m_1+m_2+\dots+m_n} \neq 0$  та фіксованому  $s > 1$  задовольняє рівняння:

$$(s-1) \left(\frac{1}{s}\right)^{3\alpha_0} + (s-1) \left(\frac{1}{s}\right)^{5\alpha_0} + (s-1) \left(\frac{1}{s}\right)^{7\alpha_0} + \dots + (s-1) \left(\frac{1}{s}\right)^{(2i+1)\alpha_0} + \dots = 1, \quad i = 1, 2, \dots,$$

яке еквівалентне рівнянню

$$s^{3\alpha_0} - s^{\alpha_0} - (s-1) = 0.$$

За формулами Кардано й отримаємо відповідний результат.  $\square$

**Зауваження 3.** Якщо умова  $m_n = 1$  виконується скінченну кількість разів, то значення розмірності множини  $M_{(-D,s)}$  не змінюється. Якщо ж умова  $m_n = 1$  виконується для всіх  $n \in \mathbb{N}$  або  $m_n \neq 1$  виконується скінченну кількість разів, тоді значення розмірності  $\alpha_0(M_{(-D,s)})$  Хаусдорфа-Безиковича множини  $M_{(-D,s)}$  дорівнюватиме  $\log_s(s-1)$ .

Цілком очевидно, що елементи множини  $M_{(-D,s)}$  є представленими нега- $s$ -ковими рядами Кантора.

**Наслідок 5.** Якщо послідовність непарних натуральних чисел  $(m_n)$  є фіксованою і чисто періодичною з періодом  $(m_1 m_2 \dots m_t)$ , тоді множина  $M'_{(-D,s,t)}$  всіх можливих дійсних чисел, які можна представити нега- $s$ -ковими рядами Кантора (3) з відповідною послідовністю  $(m_n)$  є самоподібним фракталом, причому

$$\alpha_0(M'_{(-D,s,t)}) = \frac{t}{m_1 + m_2 + \dots + m_t}.$$

*Доведення.* Оскільки елементи згаданої вище множини мають періодичне нега- $s$ -кове зображення, тобто

$$M'_{(-D,s,t)} \ni x = \Delta^{-s} \left( \underbrace{0 \dots 0}_{m_1-1} \alpha_{m_1} \underbrace{0 \dots 0}_{m_2-1} \alpha_{m_1+m_2} \dots \underbrace{0 \dots 0}_{m_t-1} \alpha_{m_1+m_2+\dots+m_t} \right),$$

де  $\{m_1, m_2, \dots, m_t\}$  — фіксований набір непарних чисел, а  $\alpha_{m_1}, \alpha_{m_1+m_2}, \dots, \alpha_{m_1+\dots+m_t}$  — числа з множини  $A$ , тоді за теоремою 6, значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича відповідної множини задовольнятиме рівняння:

$$s^t \left( \frac{1}{s} \right)^{(m_1+m_2+\dots+m_t)\alpha_0} = 1.$$

З останнього рівняння й слідує твердження наслідку. □

#### ЛІТЕРАТУРА

- [1] Beardon A.F. On the Hausdorff dimension of general Cantor sets // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1965.— 61.— P. 679–694.
- [2] Bill Mance. Normal numbers with respect to the Cantor series expansion. — The Ohio State University, 2010. — 290 p.
- [3] Cantor G. Ueber die einfachen Zahlensysteme. Z. Mathl. Phys. — 1869.— Bd. 14.— S. 121–128.
- [4] Eggleston H. G. The fractional dimension of a set defined by decimal properties // Quart. J. Math. — 1949.— 20.— P. 31–36.
- [5] Eggleston H. G. Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory // Proc. London Math. Soc. — 1953.— 54.— P. 42–93.
- [6] Hensley D. Continued Fraction Cantor Sets, Hausdorff Dimension and Functional Analysis // Journal of number theory. — 1992.— 40.— P. 336–358.

- [7] *Randolph J. E.* Some properties of sets of the Cantor type // J. London Math. Soc. — 1941.— 16.— P. 38–42.
- [8] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Зображення чисел  $s$ -адичними рядами Енгеля // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.— 2008, №9.— С. 212 —224.
- [9] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.— 2006, №7.— С. 105 —116.
- [10] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [11] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.,* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка, 1992. — 208 с.
- [12] *Сербенюк С.О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості однієї множини дійсних чисел, визначеної в термінах  $s$ -кового зображення // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.— 2010, № 11.— С. 241 — 250.
- [13] *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні властивості та використання однієї узагальненої множини, заданої  $s$ -ковим зображенням з параметром// Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2011, №12. — С. 66-75.
- [14] *Сербенюк С. О.* Зображення чисел знакододатними рядами Кантора: задання раціональних чисел// Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, №14. — С. 253-267.
- [15] *Ралко Ю. В.* Зображення чисел рядами Кантора та деякі його застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.— 2009, № 10.— С. 132 —140.
- [16] *Федер Е.* Фракталы. — М.: Мир, 1991. — 254 с.