

УДК 519.7

DOI: 10.37069/1683-4720-2020-34-13

©2020. С.В. Сапунов, О.С. Сенченко, О.А. Середа

## МЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ КАНОНІЧНОЇ ВИЗНАЧАЛЬНОЇ ПАРИ ДЛЯ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ГРАФІВ

Робота присвячена дослідженню представлення графів з розміченими вершинами множинами слів у алфавіті міток вершин та пошуку метричних властивостей цього представлення. Графи з розміченими вершинами широко використовуються для описання та моделювання обчислювальних процесів у програмуванні, робототехніці, перевірці моделей тощо. При цьому графи відіграють роль інформаційного середовища для одного або декількох мобільних агентів. Переміщення агентів по графу визначають послідовності міток вершин – слова в алфавіті міток. Граф з розміченими вершинами називається Д-графом, якщо в околі кожної його вершини всі інші вершини мають попарно різні мітки. Для Д-графів у випадку, коли відомі карта графа (тобто множини вершин і ребер та функція розмітки) та ініціальна вершина, з якої агенти починають свої переміщення, існує однозначна відповідність між послідовністю міток вершин, які відвідує агент, і траєкторією переміщень цього агента на графі. У випадку, коли зовнішньому спостерігачу невідома карта досліджуваного Д-графа, переміщення агентів можуть бути організовані в такий спосіб, щоб на основі їх аналізу спостерігач одержав шукану інформацію щодо структури графа (наприклад, карту графа, найкоротші шляхи між вершинами, порівняння досліджуваного графа з графом-еталоном). У даній роботі уточнюється представлення Д-графів так званою визначальною парою множин слів. Перша компонента цієї пари описує цикли графа, друга – його висячі вершини. Це представлення є аналогом системи визначальних співвідношень для повністю визначених автоматів. Також розглянуто структуру мінімальної за кількістю слів так званої канонічної визначальної пари та наведено алгоритм її побудови. Для детермінованого графа із заданою кількістю вершин і ребер знайдено точну оцінку кількості слів у першій компоненті його канонічної визначальної пари та мінімальні й максимальні досяжні оцінки кількості слів у другій компоненті канонічної визначальної пари. Результати дозволяють створювати та використовувати нові методи та алгоритми для розв'язання задач аналізу графів з розміченими вершинами.

**MSC:** 68R10.**Ключові слова:** графи з розміченими вершинами, визначальна пара.

### 1. Вступ.

Теорія графів є важливим розділом дискретної математики, який надає потужний апарат для розв'язання задач різного ступеня складності в найрізноманітніших галузях наукової та практичної діяльності. Широке застосування графів пов'язане з тим, що вони є природним засобом пояснення складних ситуацій на інтуїтивному рівні. Ці переваги представлення складних структур і процесів графами стають ще більш відчутними за наявності оптимальних засобів їх зображення. Одним із сучасних напрямків теорії графів є дослідження розмічених (зважених) графів, тобто графів, елементи яких – вершини, дуги, інцидентори тощо – мають мітки з попередньо визначеного алфавіту. Такі графи широко використовуються в інформатиці та кібернетиці для описання та моделювання різноманітних обчислю-

вальних процесів. Серед розмічених графів найбільш дослідженими є скінченні орієнтовані графи з розміченими ребрами (LTS [1], зважені автомати [2], скінченні автомати [3] тощо). Також існує багато обчислювальних процесів (наприклад, у програмуванні [4], робототехніці [5], верифікації моделей [6]), які можна природньо представити графами з розміченими вершинами.

У роботі [7] запропоновано представлення скінченних всюди визначених автоматів без виходів системами визначальних співвідношень – множинами пар слів спеціального вигляду, що задають еквівалентні траєкторії в автоматі. За допомогою такого представлення було розв’язано задачу характеристики – визначення, чи є дана множина пар слів системою визначальних співвідношень для заданого автомата без безпосередньої побудови самого автомата. У роботі [8] поняття та апарат систем визначальних співвідношень розповсюджено на так звані детерміновані графи – клас графів з розміченими вершинами, у яких в околі кожної вершини всі вершини мають попарно різні мітки [9]. Доцільність такого розповсюдження випливає з природнього взаємозв’язку між детермінованими графами та мовами в алфавіті міток вершин (для детермінованих графів траєкторія руху однозначно відновлюється за послідовністю міток вершин). Цей взаємозв’язок дозволяє застосовувати методи теорії автоматів до аналізу розмічених графів. В роботі [8] розглядається наступна задача. Задано довільну пару множин слів у деякому алфавіті. Чи можливо за цією парою побудувати такий граф з розміченими вершинами, що в околі кожної його вершини усі вершини мають різні мітки? Ця задача є актуальною, оскільки графи з такою розміткою мають низку важливих застосувань, наприклад, вони використовуються при розподілі часових слотів (тайм-слотів) у мережах, які працюють за принципом множинного доступу з часовим поділом [10]. У випадку, якщо відповідь на питання задачі є позитивною, то виникає питання про метричні характеристики такої пари. У нашій роботі уточнено процедуру, яка за даною парою або будує детермінований граф, для якого ця пара є визначальною, або сповіщує, що це зробити неможливо, та знайдено чисельні значення потужності компонент канонічної визначальної пари.

## 2. Визначальна пара для детермінованих графів.

У роботі розглядаються неорієнтовані, скінченні, непорожні, зв’язні, звичайні (такі, що не містять петлі та кратні ребра) графи з розміченими вершинами  $G = (V, E, X, \xi(V))$ , де  $V$  – множина вершин графа,  $E$  – множина його ребер,  $\xi(V) : V \rightarrow X$  – всюди визначена функція розмітки вершин графа символами скінченного алфавіту  $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ . Далі такі графи будемо скорочено називати терміном «розмічений граф». Значення функції розмітки для вершини  $v$  будемо називати її міткою. Множину всіх слів скінченної довжини в алфавіті  $X$  будемо позначати через  $X^*$ . Нехай  $p = x'_1 \dots x'_k$  ( $x'_i \in X$ ), тоді довжину слова  $p$  будемо позначати через  $d(p)$ . Через  $E(v)$  позначатимемо множину вершин, що є суміжними вершині  $v$ :  $v' \in E(v) \leftrightarrow (v, v') \in E$ .

У залежності від додаткових умов, що накладаються на функцію розмітки вершин, з множини всіх розмічених графів виділяють окремі підкласи. У цій роботі розглядаються так звані детерміновані графи (далі Д-графи), у яких для будь-

яких вершин  $v, v', v'' \in V$  з  $(v, v'), (v, v'') \in E$  та  $\xi(v') = \xi(v'')$  впливає рівність  $v' = v''$ . Змістовно кажучи, наведене означає, що у Д-графів будь-які дві вершини, що одночасно суміжні деякій вершині, мають різні мітки.

Для дослідження структури розмічених графів часто використовують один або декілька мобільних агентів з обмеженою пам'яттю, які поміщають на досліджуваний граф [11, 12]. Математичною формалізацією таких агентів є скінченні графохідні автомати [4]. Ці агенти можуть сповіщати спостерігачу та/або іншим агентам певну інформацію щодо локальних околів вершин, на яких вони наразі знаходяться. На основі цієї інформації та/або інструкцій спостерігача агенти можуть переміщатися по ребрах графа. Переміщення агентів визначають послідовності міток вершин, які вони відвідали. Зважаючи на це, Д-графи є дуже зручними для такого дослідження, оскільки, якщо спостерігач має карту графа (множини  $V, E, X$  та функцію  $\xi(V)$ ) та знає, на яку вершину досліджуваного Д-графа був поміщений агент на початку дослідження (тобто, ініціальну вершину), то за цією послідовністю міток може бути однозначно відновлена траєкторія переміщення агента по графу. У випадку, коли спостерігачу не відома карта досліджуваного графа, переміщення агентів можуть бути організовані в такий спосіб, щоб на основі їх аналізу спостерігач одержав шукану інформацію про структуру графа (наприклад, складення карти графа, пошуку у ньому найкоротших шляхів, порівняння досліджуваного графа з графом-еталоном).

Нехай  $G = (V, E, X, \xi(V))$  – довільний розмічений граф. Детермінізацією  $G$  назвемо процедуру, яка продовжується до тих пір, поки в графі існують такі різні вершини  $v, v', v'' \in V$ , що одночасно виконуються умови  $v', v'' \in E(v)$  та  $\xi(v') = \xi(v'')$ , і складається з ототожнення вершин  $v'$  та  $v''$ , заміни кратних ребер, що виникають в результаті цього ототожнення, одним ребром та вилучення ребра  $(v', v'')$  (якщо воно існувало в  $G$ ). Неважко бачити, що ця процедура закінчується за скінченну кількість кроків, її результат визначається однозначно та цей результат є Д-графом.

Зафіксуємо деяку вершину  $v_0 \in V$  Д-графа  $G = (V, E, X, \xi(V))$ , яку далі будемо називати ініціальною. У цій роботі при дослідженні структури Д-графа всі шляхи, які ми будемо розглядати, починаються з ініціальної вершини, тому далі ми будемо розглядати саме Д-графи з ініціальною вершиною (та коротко їх називати «Д-графами»), цю вершину за необхідності ми будемо виділяти у позначенні Д-графа:  $G = (V, E, X, \xi(V), v_0)$ .

Ізоморфізмом Д-графів  $G_1 = (V_1, E_1, X, \xi_1(V_1), v')$  і  $G_2 = (V_2, E_2, X, \xi_2(V_2), v'')$  з однаковою множиною міток вершин  $X$  називаємо взаємно однозначну відповідність  $\varphi : V_1 \leftrightarrow V_2$  між множинами їх вершин, що зберігає їх ініціальні вершини, відношення суміжності вершин та функцію розмітки вершин:  $\varphi(v') = v''$ ,  $\forall v', v'' \in V_1 \quad ((v', v'') \in E_1 \leftrightarrow (\varphi(v'), \varphi(v'')) \in E_2)$  та  $\forall v \in V_1 \quad \xi_1(v) = \xi_2(\varphi(v))$ ; ізоморфізм графів  $G_1$  та  $G_2$  будемо позначати  $G_1 \cong G_2$  або  $G_1 \cong_{\varphi} G_2$ . Зафіксуємо вершину  $v'_1$  Д-графа  $G = (V, E, X, \xi(V))$ . Оскільки шляху  $p = v'_1 \dots v'_k$  однозначно відповідає слово в алфавіті міток  $\xi(p) = \xi(v'_1) \xi(v'_2) \dots \xi(v'_k)$  [9], то надалі шлях  $p$  розглядатимемо як  $\xi(p)$  та позначатимемо рівністю  $v'_1 p = v'_k$ .

Шлях  $p = x'_1 x'_2 \dots x'_k$  назвемо припустимим для вершини  $v'_1$ , якщо  $\xi(v'_1) = x'_1$ , та існують такі вершини  $v'_2, \dots, v'_k \in V$ , що  $\xi(v'_2) = x'_2, \dots, \xi(v'_k) = x'_k$ , і  $(v'_1, v'_2), \dots, (v'_{k-1}, v'_k) \in E$ . Слово  $x'_k \dots x'_1$  будемо називати реверсом слова  $p = x'_1 \dots x'_k$  та позначати його через  $p^{-1}$ , слова  $p$  та  $p^{-1}$  назвемо взаємнозворотними. Слово  $p$ , для якого виконується рівність  $vp = v$ , назвемо циклічним для вершини  $v$ . Слово  $q = x''_1 \dots x''_m$  назвемо початковим відрізком слова  $p = x'_1 \dots x'_k$  у випадку, якщо  $m \leq k$  та виконуються рівності  $x''_1 = x'_1, \dots, x''_m = x'_m$ , цей факт позначатимемо через  $q \subseteq p$ .

Всі вершини заданого Д-графа  $G = (V, E, X, \xi(V), v_0)$  можна розбити на два класи за такою процедурою: видалимо з  $G$  усі висячі вершини, відмінні від ініціальної, разом із ребрами, що є інцидентними цим вершинам. Цю процедуру будемо повторювати до тих пір, поки це можливо. Одержаний у такий спосіб граф  $B(G)$  назвемо базою графа  $G$ , вершини, що входять до  $B(G)$ , назвемо базовими, а ті вершини  $G$ , що не входять до  $B(G)$ , – вільними. Неважко бачити, що база графа будується однозначно за скінченну кількість кроків, база  $B(G)$  може складатися з однієї ініціальної вершини (у випадку, коли  $G$  є деревом), а у випадку, коли  $B(G)$  містить хоча б одну вершину, яка відмінна від ініціальної, то вона повинна містити хоча б один простий цикл. Звідси випливає, що кожна базова вершина, яка є відмінною від ініціальної вершини  $v_0$ , суміжна щонайменше двом базовим вершинам. Вільну вершину  $v$  назвемо прямим предком вільної вершини  $v'$ , якщо для будь-якого шляху  $p'$ , такого, що  $v_0 p' = v'$ , існує такий початковий відрізок  $p \subseteq p'$ , що  $v_0 p = v$ , цей факт позначатимемо через  $v \preceq v'$ . Звернемо увагу, що для будь-якої вільної вершини  $v$  виконується  $v \preceq v$ .

Далі вважаємо, що всі шляхи в графі починаються з ініціальної вершини. Будемо робити представлення Д-графа  $G = (V, E, X, \xi(V), v_0)$  парою  $\{C, L\}(x')$  скінчених множин слів  $C, L \in X^*$ , для якої всі слова з  $C$  та  $L$  є припустимими для  $v_0$ , слова множини  $C$  описують цикли графа  $G = (V, E, X, \xi(V), v_0)$ , а слова  $L$  описують його висячі вершини. Далі в роботі під терміном «пара»  $\{C, L\}(x')$  розуміємо саме такі дві скінченні множини  $C$  та  $L$ , що всі слова множини  $C$  починаються та закінчуються символом  $x'$ , а всі слова множини  $L$  починаються з цього символу. При цьому множини  $C$  та  $L$  будемо називати компонентами пари  $\{C, L\}(x')$ .

У [8] визначено процедуру, яка за заданою парою  $\{C, L\}(x')$  або будує Д-граф  $G(\{C, L\}(x'))$ , або показує, що за цією парою Д-граф побудувати неможливо. Уточнимо цю процедуру у такому вигляді.

Покладемо, що спочатку граф  $G(\{C, L\}(x'))$  складається з однієї вершини  $v_0$  з міткою  $\xi(v_0) = x'$ .

*Етап 1.* Для кожного слова  $p_i = x' x'_1 \dots x'_i x' \in C$  додаємо  $n - 1$  вершину  $v_1^i, \dots, v_{n-1}^i$  з мітками відповідно  $x'_1, \dots, x'_{n-1}$  та  $n$  ребер  $(v_0, v_1^i), (v_1^i, v_2^i), \dots, (v_{n-2}^i, v_{n-1}^i), (v_{n-1}^i, v_0)$ . Після кожного такого додавання детермінізуємо одержаний граф.

*Етап 2.* У графі, який ми одержали після виконання етапу 1, можуть існувати висячі вершини. Кожну таку вершину  $v$ , що є відмінною від ініціальної вершини  $v_0$ , поміщаємо для подальшого аналізу у множину  $Q$ , яка на початку була порожня.

*Етап 3.* Для кожного слова  $p_j = x'_1 x_1^j \dots x_{n-1}^j \in L$  виконуємо таку послідовність дій: додаємо вершини  $v_1^j, \dots, v_{n-1}^j$  з мітками відповідно  $x_1^j, \dots, x_{n-1}^j$ , ребра  $(v_0, v_1^j), \dots, (v_{n-2}^j, v_{n-1}^j)$  та детермінізуємо одержаний граф. Якщо в результаті детермінізації вершина  $v_0 p_j$  не є висячею, то вважаємо, що граф  $G(\{C, L\}(x'))$  не існує, і процедура завершується. Якщо ж в результаті детермінізації з'явилась висяча вершина  $v$ , відмінна від вершини  $v_0 p_j$ , то цю вершину поміщаємо для подальшого аналізу у множину  $Q$ . Після цього переходимо до наступного слова компоненти  $L$ .

*Етап 4.* Для кожної вершини  $v \in Q$  розглядаємо всі слова компоненти  $L$ : якщо не існує такого  $p \in L$ , що вершина  $v$  є прямим предком вершини  $v_0 p$ , то вважаємо, що граф  $G(\{C, L\}(x'))$  не існує.

*Етап 5.* Розглядаємо всі слова множини  $L$ : якщо існує таке  $p \in L$ , що вершина  $v_0 p$  не є висячею, то вважаємо, що граф  $G(\{C, L\}(x'))$  не існує.

Якщо в результаті виконання цієї процедури за парою  $\{C, L\}(x')$  можливо побудувати граф  $G(\{C, L\}(x'))$ , то таку пару назвемо правильною.

Правильну пару  $\{C, L\}(x')$  назвемо визначальною для Д-графа  $G$ , якщо  $G(\{C, L\}(x')) \cong G$ . Зауважимо, що таке завдання Д-графа визначальною парою в деякій мірі (етапами 1 та 3) є аналогічним представленням автоматів системою визначальних співвідношень, запропонованому у [7].

Доцільність введення другого, четвертого та п'ятого етапів процедури побудови Д-графа за парою обумовлено намаганням чітко розділити функції компонентів пари: передбачається, що слова компоненти  $C$  описують базові вершини графа, а слова компоненти  $L$  – його вільні вершини, причому кожне слово  $p \in L$  описує висячу вершину  $v_0 p$ , а для кожної вільної висячої вершини  $v$  потрібне існувати хоча б одне таке слово  $p \in L$ , що  $v_0 p = v$  (зауважимо, що у випадку, коли вершина  $v_0$  є висячею, то її не потрібно описувати у компоненті  $L$ ). У випадку, коли слова множини  $C$  задають деякі вільні вершини графа (тобто після виконання етапу 2 множина  $Q$  не є порожньою), ці вільні вершини обов'язково повинні бути описаними словами компоненти  $L$  (див. етап 4), а якщо такого опису нема, то вважаємо, що за парою  $\{C, L\}(x')$  граф  $G(\{C, L\}(x'))$  побудувати неможливо.

Розглянемо дію окремих етапів наведеної вище процедури на такому прикладі.

*Приклад 1.* Нехай  $C = \{134321, 1245231\}$ ,  $L = \{124143, 12342, 132541, 12435\}(1)$ . На рис. 1 а зображено граф, який одержуємо після виконання етапів 1 та 2. Вершина  $v'$ , що виділена, є висячею та відмінною від ініціальної вершини  $v_0$ , тому цю вершину поміщаємо до множини  $Q$ .

На рис. 1 б зображено граф, який одержуємо після виконання етапу 3. Після розгляду слова 124143 вершина  $v''$ , що виділена, є висячею та відмінною від вершини  $v_0$ , тому цю вершину поміщаємо до множини  $Q$ .

Далі робимо аналіз вершин  $v'$  та  $v''$ , що входять до множини  $Q$ . Оскільки вершина  $v'$  є прямим предком вершини  $u'$ ,  $12342 \in L$  та  $v_0 12342 = u'$ , а також вершина  $v''$  є прямим предком самої себе,  $132541 \in L$  та  $v_0 132541 = v''$  (рис. 1 в), то переходимо до виконання етапу 5.

Оскільки вершина  $v$  (рис. 1 г) не є висячою,  $v_0 124143 = v$  та  $124143 \in L$ , то за умовою етапу 5 граф  $G(\{C, L\}(1))$  не існує.

Зауважимо, що для пари  $\{C, L'\}(1)$ , де  $L' = L - \{124143\}$  граф  $G(\{C, L'\}(1))$  існує, він зображений на рис. 1 г.

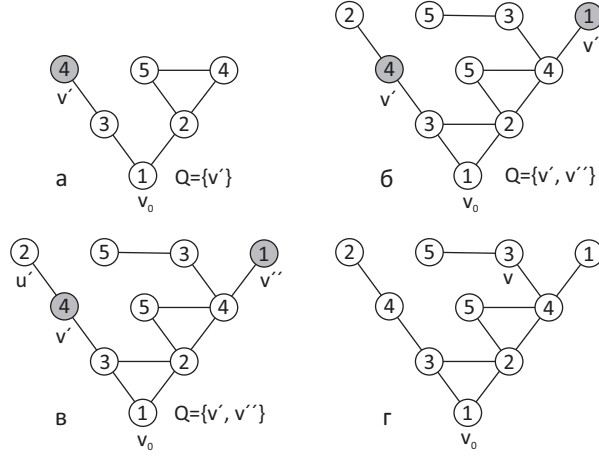


Рис. 1. Ілюстрація процедури побудови Д-графа за заданою парою

### 3. Канонічна визначальна пара.

Нехай  $G = (V, E, X, \xi(V), v_0)$  – деякий Д-граф. Зафіксуємо на  $X$  лінійний порядок  $<$ :  $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ . Визначимо на  $X^*$  лінійний порядок  $\leq$ :

- 1) для будь-якого  $x_i \in X$ , де  $1 \leq i \leq p$ , покладемо  $x_i \leq x_i$ ;
- 2) для будь-яких  $p, q \in X^*$ , якщо  $d(p) < d(q)$ , то  $p \leq q$ ;
- 3) для будь-яких  $p, q \in X^*$ , якщо  $p = x'_1 \dots x'_s$ ,  $q = x''_1 \dots x''_s$ ,  $x'_1 = x''_1, \dots, x'_{(k-1)} = x''_{(k-1)}$  і для деякого  $k \leq s$  виконується  $x'_k < x''_k$ , то  $p \leq q$ .

Неважко бачити, що порядок  $\leq$  на множині  $X^*$  визначається лінійним порядком  $<$  на множині  $X$ .

Визначимо допоміжну множину слів в алфавіті  $X$ . Базис досяжності  $\mathcal{V}_G$  це довільна множина слів  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subseteq X^*$ , яка задовольняє умовам:

- 1)  $\{v_0 w_i | i = 1, 2, \dots, n\} = V$ ;
- 2) якщо  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , то  $v_0 w_i \neq v_0 w_j$ ;
- 3) якщо  $w_i = w'_i x$ ,  $x \in X$ , то  $w'_i \in \{w_1, \dots, w_n\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Якщо множина  $\mathcal{V}_G$  складається із слів, найменших за порядком  $\leq$ , то називатимемо її найкоротшим базисом досяжності. Зрозуміло, що такий базис визначено однозначно. Далі, якщо не обумовлено інше, вважатимемо, що базис  $\mathcal{V}_G$  найкоротший. Кістякове дерево графа  $G$ , яке природним чином визначається базисом  $\mathcal{V}_G$ , позначимо  $T_V$ .

Опишемо алгоритм побудови так званої канонічної визначальної пари  $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$ .

Спочатку покладемо  $\Sigma_G = \emptyset$  і  $\Lambda_G = \emptyset$ .

Якщо граф  $G$  складається з однієї вершини  $v_0$ , то покладемо  $\Sigma_G = \emptyset$ ,  $\Lambda_G = \emptyset$  і  $\mathcal{V}_G = \{\xi(v_0)\}$ .

Нехай граф  $G$  містить більше ніж одну вершину. Спочатку до множини  $\Lambda_G$  додаємо усі слова  $w \in \mathcal{V}_G$  такі, що вершина  $v_0 w$  є висячою вершиною графа  $G$ . Після цього для кожної двійки слів  $p, q \in \mathcal{V}_G \setminus \Lambda_G$ , якщо жодне з них не є початковим відрізком іншого і  $v_0 p q^{-1} = v_0$ , то додаємо до множини  $\Sigma_G$  менше за порядком  $\leq$  із слів  $p q^{-1}$  і  $q p^{-1}$ . Далі прибираємо усі повтори слів у  $\Sigma_G$ , залишаючи по одному екземпляру. Побудову канонічної визначальної пари завершено.

Сформулюємо деякі очевидні властивості слів, що належать множині  $\Sigma_G$ , які безпосередньо впливають з алгоритму її побудови.

**Лема 1.** *Нехай  $\Sigma_G \neq \emptyset$ . Тоді виконуються такі твердження:*

- а) для будь-якого  $\sigma \in \Sigma_G$  існують такі  $p, q \in X^*$ , що  $p q = \sigma$  та  $p \in \mathcal{V}_G$  і  $q^{-1} \in \mathcal{V}_G$ ;
- б) якщо  $\sigma \in \Sigma_G$ , то  $d(\sigma) \leq 4$ ;
- в) для кожного  $\sigma \in \Sigma_G$  знайдуться такі  $p, q \in X^*$ ,  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , що  $\sigma = p x q y p^{-1}$ .

Змістовно кажучи, перше твердження встановлює своєрідну мінімальність початкових та кінцевих відрізків слова  $\sigma \in \Sigma_G$ . Друге твердження безпосередньо впливає з детермінованості графа  $G$  та того, що  $\sigma$  містить простий цикл. Третє твердження встановлює, що простий цикл, який міститься у  $\sigma$ , не може бути представлений у вигляді  $p x p^{-1}$  для будь-яких  $p \in X^*$  та  $x \in X$ .

Для будь-якої вершини  $v \in V$  за допомогою  $sp_v$  позначатимемо найкоротше за порядком  $\leq$  слово, для якого  $v_0 sp_v = v$ .

**Лема 2.** *Нехай  $(v_1, v_2)$  – деяке ребро графа  $G = (V, E, X, \xi(V), v_0)$ ,  $\xi(v_1) = x'_1$  та  $\xi(v_2) = x'_2$ . Тоді існують такі  $z_1, z_2 \in X^*$ , що виконується хоча б одне з тверджень:*

- а)  $sp_{v_1} x'_2 z_1 \in \Sigma_G \cup \Lambda_G$ ;
- б)  $sp_{v_2} x'_1 z_2 \in \Sigma_G \cup \Lambda_G$ .

Змістовно кажучи, лема 2 стверджує, що пара  $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$  містить певну інформацію про кожне ребро графа  $G$ .

З процедури побудови канонічної визначальної пари також впливає таке корисне твердження.

**Лема 3.** *Якщо хоча б одна компонента  $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$  графа  $G = (V, E, X, \xi(V), v_0)$  не є порожньою множиною, то для кожної вершини  $v \in V$  існують такі  $z_1, z_2, z_3 \in X^*$ , що виконується хоча б одне з тверджень:*

- а)  $sp_v z_1 \in \Lambda_G$ ;
- б)  $sp_v z_2 \in \Sigma_G$ ;
- в)  $z_3 (sp_v)^{-1} \in \Sigma_G$ .

*Доведення.* Нехай  $v \in V$ . Якщо  $v = v_0$ , то  $sp_v = \xi(v_0)$ . Оскільки всі слова базису  $\mathcal{V}_G(v_0)$  починаються з символу  $\xi(v_0)$ , то за побудовою пари  $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$  всі слова з  $\Lambda_G$  (у випадку  $\Lambda_G \neq \emptyset$ ) починаються з  $\xi(v_0)$ , а всі слова з  $\Sigma_G$  (у випадку  $\Sigma_G \neq \emptyset$ ) починаються та закінчуються символом  $\xi(v_0)$ , тому в цьому випадку твердження леми виконується.

Нехай тепер  $v \neq v_0$ . Якщо  $v$  не належить базі  $B(G)$ , та, при цьому,  $v$  є висячою вершиною, то  $sp_v \in \Lambda_G$ , тому виконується твердження (а) (при цьому  $z$  є порожнім словом). Якщо ж  $v \notin B(G)$  та  $v$  не є висячою вершиною, то згідно процедури побудови бази графа, існує висяча вершина  $v' \neq v_0$  та скінченний ланцюг попарно різних вільних вершин  $v_1, \dots, v_k$ , що  $(v, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v') \in E$ . Тоді, виходячи з мінімальності слова  $sp_v$  за порядком  $\leq$ ,  $sp_{v'} = sp_v \xi(v_1) \dots \xi(v_k) \xi(v')$ , тому виконується твердження (а) (при цьому  $z = \xi(v_1) \dots \xi(v_k) \xi(v')$ ).

Нехай тепер  $v \in B(G)$ . Покладемо  $sp_v = w'x$ , де  $x \in X$ . З алгоритму побудови бази графа безпосередньо випливає, що вершина  $v$  суміжна не менш ніж двом вершинам, що належать базі  $B(G)$ . Нехай  $v_1$  – така вершина з  $B(G)$ , що  $v_0 w' \neq v_1$ ; покладемо  $\xi(v_1) = x'_1$ . Якщо  $sp_{v_1} \neq sp_v x'_1$ , то за алгоритмом побудови  $\Sigma_G$  одне з двох взаємозворотних слів  $sp_v (sp_{v_1})^{-1}$  або  $sp_{v_1} (sp_v)^{-1}$  належить  $\Sigma_G$ , тому виконується або твердження (б) (при цьому  $z = sp_{v_1}^{-1}$ ), або твердження (в) (при цьому  $z = sp_{v_1}^{-1}$ ).

Якщо ж  $sp_{v_1} = sp_v x'_1$ , то, виходячи зі скінченності графа  $G$ , одержимо такий ланцюг базових вершин  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$  з мітками  $x'_1, x'_2, \dots, x'_{k-1}, x'_k$  відповідно, що  $sp_{v_2} = sp_{v_1} x'_2, \dots, sp_{v_{k-1}} = sp_{v_{k-2}} x'_{k-1}$  та  $sp_{v_k} \neq sp_{v_{k-1}} x'_k$ ; у цьому ланцюзі вершина  $v_k$  може співпадати з однією з вершин  $v_1, \dots, v_{k-1}$ , а всі інші вершини є попарно різними. Тоді, за алгоритмом побудови  $\Sigma_G$ , або  $sp_v x'_1 x'_2 \dots x'_{k-1} (sp_{v_k})^{-1} \in \Sigma_G$  (тобто, виконується твердження (б) та  $z = x'_1 x'_2 \dots x'_{k-1} (sp_{v_k})^{-1}$ ), або  $sp_{v_k} (sp_v x'_1 x'_2 \dots x'_{k-1})^{-1} \in \Sigma_G$  (тобто, виконується твердження (в) та  $z = sp_{v_k} x'_1 x'_2 \dots x'_{k-1}$ ), що доводить лему.  $\square$

З процедури побудови графа за його визначальною парою випливає наступне твердження.

**Теорема 1.**  $G(\{\Sigma_G, \Lambda_G\}) \cong G$ .

Для доведення цієї теореми була досліджена покрокова побудова графа  $G(\{\Sigma_G, \Lambda_G\})$  за словами множин  $\Sigma_G$  та  $\Lambda_G$ . Для цього покладемо  $\Sigma_G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$  та  $\Lambda_G = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$ . Введемо сімейство множин  $M_i$  ( $0 \leq i \leq k+q$ ) у такий спосіб:  $M_0 = \emptyset$ ,  $M_1 = \{\sigma_1\}$ ,  $M_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ ,  $\dots$ ,  $M_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} = \Sigma_G$ ,  $M_{k+1} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k, \lambda_1\}$ ,  $\dots$ ,  $M_{k+q} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k, \lambda_1, \dots, \lambda_q\} = \Sigma_G \cup \Lambda_G$ . За словами цього сімейства множин вводяться два сімейства графів:  $G_i$  та  $H_i$ . Графи сімейства  $G_i$  є підграфами графа  $G$ , що визначаються вершинами та ребрами слів з відповідної множини  $M_i$ , а графи сімейства  $H_i$  побудовані за словами з відповідної множини  $M_i$  за допомогою процедури, яку задано в другому розділі цієї роботи. За цією процедурою  $H_{k+q} = G(\{\Sigma_G, \Lambda_G\})$ , а з лем 2 та 3 випливає рівність  $G_{k+q} = G$ . Індукцією за  $i$  ( $0 \leq i \leq k+q$ ) показано, що  $H_i \cong G_i$ .

Далі знайдемо потужності першої та другої компонент канонічної визначальної пари для графа із заданою кількістю вершин і ребер.

#### 4. Потужність першої компоненти канонічної визначальної пари.

Нехай далі Д-граф  $G = (V, E, X, \xi(V), v_0)$  містить  $n$  вершин та  $m$  ребер.

Знайдемо кількість слів у множині  $\Sigma_G$ .

**Теорема 2.**  $|\Sigma_G| = m - n + 1$ .



*Доведення.* Позначимо клас  $D$ -графів з  $n$  вершинами та  $m$  ребрами через  $\mathcal{G}_{n,m}$ . Оскільки кожен представник такого класу є простим зв'язним графом, то  $n - 1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$ . Доведення проведемо індукцією за кількістю ребер.

Нехай  $m = n - 1$ . Тоді будь-який представник  $G$  класу  $\mathcal{G}_{n,n-1}$  є деревом, тобто не містить циклів, з чого випливає, що  $|\Sigma_G| = 0$ . При цьому  $n - 1 - n + 1 = 0$ , що доводить базу індукції.

Припустимо, що у будь-якого представника  $G$  класу  $\mathcal{G}_{n,k}$ ,  $n - 1 < k < \frac{n(n-1)}{2}$ , потужність  $|\Sigma_G| = k - n + 1$ . Доведемо, що у будь-якого представника  $G'$  класу  $\mathcal{G}_{n,k+1}$  потужність  $|\Sigma_{G'}| = k - n + 2$ .

Нехай  $G' = (V, E, X, \xi(V), v_0) \in \mathcal{G}_{n,k+1}$ . Оскільки  $n - 1 < k$ , то  $n < k + 1$ , тобто  $D$ -граф  $G'$  містить хоча б один простий цикл. Нехай ребро  $(v_1, v_2)$  належить деякому простому циклу графа  $G'$  та не належить кістяковому дереву  $T(G, v_0)$ . Тоді граф  $G = G' - (v_1, v_2)$  є зв'язним та містить  $k$  ребер. Неважко бачити що цей граф є  $D$ -графом. За індуктивним припущенням  $|\Sigma_G| = k - n + 1$ .

Нехай  $v_0 p_1 = v_1$  та  $v_0 p_2 = v_2$ , причому  $p_1, p_2$  належать найкоротшому базису досяжності  $\mathcal{V}_G(v_0)$ . Тоді, оскільки в графі  $G$  вершини  $v_1$  та  $v_2$  не є суміжними, жодне з двох слів  $p_1(p_2)^{-1}$  та  $p_2(p_1)^{-1}$  не належить  $\Sigma_G$ . При цьому, за алгоритмом побудови канонічної визначальної пари, одне з двох слів  $p_1(p_2)^{-1}$  або  $p_2(p_1)^{-1}$  (менше за порядком  $\leq$ ) належить  $\Sigma_{G'}$ . Нехай для визначеності  $p_1(p_2)^{-1} \in \Sigma_{G'}$ .

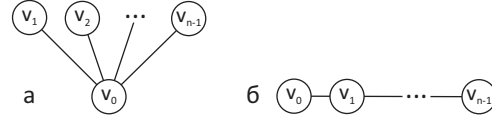
Оскільки ребро  $(v_1, v_2) \notin T(G, v_0)$ , то  $\mathcal{V}_{G'}(v_0) = \mathcal{V}_G(v_0)$ , тому, за алгоритмом побудови канонічної визначальної пари,  $\Sigma_G = \Sigma_{G'} - p_1(p_2)^{-1}$ . Таким чином одержали, що  $\Sigma_{G'}$  містить на одне слово більше, ніж  $\Sigma_G$ , тобто  $|\Sigma_{G'}| = (k - n + 1) + 1 = k - n + 2$ , що доводить індуктивний крок та теорему взагалі.  $\square$

**ЗАУВАЖЕННЯ 2.1.** Величина  $|\Sigma_G|$  співпадає з цикломатичним числом графа  $G$ . З цього можна зробити припущення, що множина слів  $\Sigma_G$  визначає деякий базис циклів графа  $G$ , пов'язаний з остовним деревом, яке в свою чергу визначається базисом  $\mathcal{V}_G(v_0)$ . Викликає цікавість задача побудови за множиною  $\Sigma_G$  усіх інших циклів графа  $G$ .

##### **5. Досяжні мінімальна та максимальна оцінки потужності другої компоненти канонічної визначальної пари.**

За алгоритмом побудови канонічної визначальної пари графа  $G = (V, E, X, \xi(V), v_0)$  потужність її другої компоненти або дорівнює кількості висячих вершин у  $G$ , або, у випадку, коли  $v_0$  є висячею вершиною, менша на одиницю цієї кількості. Неважко бачити, що, якщо нам відомі лише кількості вершин та ребер у графі, то кількість висячих вершин у ньому не є константою, тому будемо шукати саме мінімальні та максимальні оцінки (бажано, досяжні) потужності другої компоненти канонічної визначальної пари графа.

Спочатку розглянемо випадок, коли граф  $G$  є деревом, тобто  $m = n - 1$ . У цьому випадку всі вершини  $G$ , які є відмінними від вершини  $v_0$ , можуть одночасно бути висячими (див. рис. 2 а), проте  $G$  повинен мати хоча б одну висячу вершину, відмінну від ініціальної, тому  $1 \leq |\Lambda_G| \leq n - 1$ ; на рис. 2 б зображено граф, для якого нижня оцінка є досяжною.



**Рис. 2.** Дерева, для яких максимальна та мінімальна оцінки потужності другої компоненти канонічної визначальної пари є досяжними

Далі розглянемо випадок, коли  $G$  не є деревом, тобто  $n - 1 < m \leq \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ . У такому випадку завжди існує такий граф з  $n$  вершинами та  $m$  ребрами, всі вершини якого входять до одного простого циклу, тому, за алгоритмом побудови канонічної визначальної пари  $0 \leq |\Lambda_G|$ .

Знайдемо верхню оцінку потужності  $|\Lambda_G|$ . Опишемо структуру графа  $G$  з класу  $\mathcal{G}_{n,m}$ , для якого кількість висячих вершин, що не належать базі  $B(G)$ , буде максимальною. Нехай у графі  $|B(G)|$  вершин належать його базі. Незавжди бачити, що максимальна кількість вільних висячих вершин у  $G$  дорівнює  $n - |B(G)|$ , це можливо у випадку, при якому всі вільні вершини графа є висячими (як приклад, всі вільні вершини такого графа є суміжними ініціальної вершини), а число  $n - |B(G)|$  при мінімально можливій для графа з класу  $\mathcal{G}_{n,m}$  потужності  $|B(G)|$  (мінімально можливе значення  $|B(G)|$  далі будемо позначати через  $\delta(m, n)$ ) і буде верхньою оцінкою потужності  $|\Lambda_G|$ . Позначимо  $c(m, n) = |\Sigma_G| = m - n + 1$ . Таким чином, число  $\delta(m, n)$  є найменшою кількістю вершин звичайного зв'язного графа  $G'$ , у якого, за теоремою 2,  $|\Sigma_{G'}| = m - n + 1$  простих циклів, що описані множиною  $\Sigma_{G'}$ .

Для знаходження  $\delta(m, n)$  використаємо той очевидний факт, що найбільша кількість простих циклів, та найбільша потужність першої компоненти канонічної визначальної пари для графа  $G$  з  $n$  вершинами є у повного графа  $K_n$ . Тому  $\delta(m, n)$  дорівнює такому мінімальному значенню  $z$ , що число  $c(m, n)$  не переважає потужність  $|\Sigma_{K_z}|$ . Оскільки у  $K_z$  кількість ребер дорівнює  $\frac{z \cdot (z-1)}{2}$ , то  $|\Sigma_{K_z}| = \frac{z \cdot (z-1)}{2} - z + 1 = (\frac{z}{2} - 1) \cdot (z - 1)$ . Іншими словами, значенням  $\delta(m, n)$  буде таке мінімальне натуральне число  $z$ , що задовільняє нерівності  $m - n + 1 \leq (\frac{z}{2} - 1) \cdot (z - 1)$ . З урахуванням натуральності  $m, n$  та  $z$  шукане значення  $\delta(m, n) = \lceil \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 2 \cdot n + 2 \cdot m} \rceil$ , де позначення  $\lceil x \rceil$  означає найменше натуральне число, що не менше за  $x$ .

Сформулюємо результати цього розділу у вигляді наступного твердження.

**Теорема 3.** Нехай  $D$ -граф  $G = (V, E, X, \xi(V), v_0)$  містить  $n$  вершин та  $m$  ребер. Якщо  $m = n - 1$ , то  $1 \leq |\Lambda_G| \leq n - 1$ . Якщо ж  $m > n - 1$ , то  $0 \leq |\Lambda_G| \leq n - \lceil \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 2 \cdot n + 2 \cdot m} \rceil$ , причому всі оцінки є досяжними.

## 6. Висновки.

У роботі уточнено процедуру, яка за довільною парою множин або буде детермінований граф, для якого ця пара є визначальною, або сповіщує, що це зробити неможливо. Знайдено чисельні оцінки канонічної визначальної пари для  $D$ -графів із відомою кількістю вершин та ребер – кількість слів у першій компоненті пари та мінімальні й максимальні досяжні оцінки кількості слів у другій компоненті пари.

Результати дозволять використовувати нові методи та алгоритми для розв'язання задач аналізу графів з поміченими вершинами.

#### Цитована література

1. *Letichevsky A.* Algebra of behavior transformation and its application. – Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra: Kudryavtsev V.B., Rosenberg I.G., Goldstein M. (eds): NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, vol 207. – Dordrecht : Springer, 2005. – P. 241–272.
2. *Droste M., Kuich W., Vogler H.* Handbook of Weighted Automata. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. – 608 p.
3. *Sakarovitch J.* Elements of Automata Theory. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 784 p.
4. *Okhotin A.* Graph-Walking Automata: From Whence They Come, and Whither They are Bound // In: Hospodár M., Jirásková G. (eds) Implementation and Application of Automata. CIAA 2019. – Lecture Notes in Computer Science, vol, 11601. – 2019. – Springer, Cham.
5. *Dudek, G., Jenkin, M.* Computational Principles of Mobile Robotics, 2nd ed. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
6. *Baier C., Katoen J.-P.* Principle of Model Checking. – The MIT Press, 2008. – 984 p.
7. *Grunskii I.S., Senchenko A.S.* Properties of systems of defining relations for automata // Discrete Mathematics and Applications. – 2004. – Vol. 14, Iss. 6. – P. 593–601.
8. *Сапунов С.В., Сенченко А.С.* Лингвистическое представление графов с помеченными вершинами // Доповіді Національної академії наук України. – 2019. – № 11. – С. 17–24.
9. *Grunskii I., Mikhaylova I., Sapunov S.* Domination on the vertices of labeled graphs // Algebra and Discrete Mathematics. – 2012. – Vol. 15, Iss. 2. – P. 174–184.
10. *Медведева Н.С., Смирнов А.В.* NP-полнота и один полиномиальный подкласс задачи о двухшаговой раскраске графа // Модел. и анализ информ. систем. – 2019. – Т. 26, № 3. – С. 405–419.
11. *Stepkin A.V.* Using a Collective of Agents for Exploration of Undirected Graphs // Cybernetics and System Analysis. – 2015. – Vol. 51, Iss. 2. – P. 223–233.
12. *Сапунов С.В.* Восстановление графа с помеченными вершинами перемещающимся по нему мобильным агентом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Т. 15, вып. 2. – С. 228–238.

#### References

1. Letichevsky, A. (2005). Algebra of behavior transformation and its application. In: Kudryavtsev V.B., Rosenberg I.G., Goldstein M. (eds) *Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra*. NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, vol 207, 241–272. Dordrecht, Springer.
2. Droste, M., Kuich, W., Vogler, H. (2009). *Handbook of Weighted Automata*. Berlin, Heidelberg, Springer.
3. Sakarovitch, J. (2009). *Elements of Automata Theory*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
4. Okhotin, A. (2019). *Graph-Walking Automata: From Whence They Come, and Whither They are Bound*. In: Hospodár M., Jirásková G. (eds) Implementation and Application of Automata. CIAA 2019. Lecture Notes in Computer Science, vol. 11601. Springer, Cham.
5. Dudek, G., Jenkin, M. (2010). *Computational Principles of Mobile Robotics, 2nd ed.* Cambridge, Cambridge Univ. Press.
6. Baier, C., Katoen, J.-P. (2008). *Principle of Model Checking*. The MIT Press.
7. Grunskii, I.S., Senchenko, A.S. (2004). Properties of systems of defining relations for automata. *Discrete Mathematics and Applications*, 14(6), 593–601.
8. Sapunov, S.V., Senchenko, A.S. (2019). Lingvisticheskoe predstavlenie grafov s pomechennymi vershinami. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 11, 17–24 (in Russian).
9. Grunskii, I., Mikhaylova, I., Sapunov, S. (2012). Domination on the vertices of labeled graphs. *Algebra and Discrete Mathematics*, 15(2), 174–184.

10. Medvedeva, N.S., Smirnov, A.V. (2019). NP-completeness and one polynomial subclass of the two-step graph colouring problem. *Model. Anal. Inform. Sist.*, 26(3), 405–419.
11. Stepkin, A.V. (2015). Using a Collective of Agents for Exploration of Undirected Graphs. *Cybernetics and System Analysis*, 51(2), 223–233.
12. Sapunov S.V. (2015). Reconstruction of a labeled graph by a graph-walking mobile agent. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 15(2), 228–238.

**S.V. Sapunov, A.S. Senchenko, O.A. Sereda**

**Metric properties of the canonical defining pair for determined graphs.**

The aim of this paper is to study the representation of deterministic graphs (D-graphs) by sets of words over the vertex labels alphabet and to find metric properties of this representation. Vertex-labeled graphs are widely used in various computational processes modeling in programming, robotics, model checking, etc. In such models graphs playing the role of an information environment of single or several mobile agents. Walks of agents on a graph determines the sequence of vertices labels or words in the alphabet of labels. A vertex-labeled graph is said to be D-graph if all vertices in the neighborhood of every its vertex have different labels. For D-graphs in case when the graph as a whole and the initial vertex (i.e. the vertex from which the agent started walking) are known there exists the one-to-one correspondence between the sequence of vertices visited by the agent and the trajectory of its walks on the graph. In case when the D-graph is not known as a whole, agent walks on it can be arranged in such way that an observer obtains information about the structure of the graph sufficient to solve the problems of graph recognizing, finding optimal path between vertices, comparison between current graph and etalon graph etc. This paper specifies the representation of D-graphs by the defining pair of sets of words (the first describes cycles of the graph and the second – all its vertices of degree 1). This representation is an analogue of the system of defining relations for everywhere defined automata. The structure of the so-called canonical defining pair, which is minimal in terms of the number of words, is also considered. An algorithm for building such pair is developed and described in detail. For D-graphs with a given number of vertices and edges, the exact number of words in the first component of its canonical defining pair and the minimum and maximum attainable bounds for the the number of words in the second component of this pair are obtained. This representation allows us to use new methods and algorithms to solve the problems of analyzing vertex-labeled graphs.

**Keywords:** *vertex-labeled graphs, defining pair.*

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ  
*Sapunov\_SV@ukr.net, Senchenko.a76@gmail.com,*  
*0955174042@ukr.net*

*Отримано 19.11.20*