УДК 517.9

Ю. Самойленко, канд. фіз.-мат. наук

АСИМПТОТИЧНІ ДВОФАЗОВІ СОЛІТОНОПОДІБНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПЕРШОГО СТЕПЕНЯ ПРИ СТАРШІЙ ПОХІДНІЙ

Запропоновано алгоритм побудови асимптотичних двофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром першого степеня при старшій похідній.

The algorithm of constructing asymptotic two phase soliton type solution to Korteweg – de Vries equation with variable coefficients and small parameter of the first degree at the highest derivative is proposed.

1. Вступ

Як відомо, для моделювання найрізноманітніших явищ та процесів використовуються нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними, серед яких одним з найбільш відомих є рівняння Кортевега-де Фріза [7]

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 . \quad (1)$$

Особливістю цього рівняння є наявність так званих солітонних розв'язків, прикладом яких може бути функція [4]

$$u(x,t) = -2ch^{-2}(x-4t) ,$$

яка описує так званий односолітонний розв'язок рівняння (1).

Як виявилося згодом, рівняння (1) має не лише однофазові, а й дво– та багатофазові солітонні розв'язки. Так, для рівняння (1) відомий точний двохсолітонний розв'язок [6]:

$$u(x,t) = -12\frac{3+4ch\,(2x-8t)+ch\,(4x-64t)}{\left[ch\,(3x-36t)+3ch\,(x-28t)\right]^2} , \quad (2)$$

де $(x,t)\in \mathbf{R}^2$.

Рівняння Кортевега-де Фріза належить до класу так званих інтегрованих нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, до якого також входять, зокрема, нелінійне рівняння Шредінгера, рівняння sin-Gordon, рівняння Кадомцева-Петвіашвілі, точні розвязки яких можна знайти за допомогою методів теорії оберненої задачі розсіювання. Хоча рівняння Кортевега-де Фріза призвело до виникнення математичної теорії солітонів, а згодом і до виникнення оберненої задачі розсіювання, яка дозволяє знайти точні розв'язки для великого класу нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, проте цей метод не може бути використаний для знаходження точних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза для випадку, коли його коефіцієнти є змінними. У такому випадку при наявності малого параметра використовують асимптотичні методи, за допомогою яких будують асимптотичні розв'язки. Так, в [3, 10] досліджувалось рівняння вигляду

$$\varepsilon^n u_{xxx} = a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x, \quad n\in N ,$$

де

$$a(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

функції $a_k(x)$, $b_k(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $k\ge 0$, для якого було запропоновано алгоритм побудови однофазових асимптотичних розв'язків та було показано, що вигляд асимптотики залежить від степеня малого параметра при старшій похідній. В [2] було запропоновано алгоритм побудови асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку для випадку, коли малий параметр при старшій похідній має вигляд ε^2 .

В даній статті розглядається питання про побудову двофазових солітоноподібних асимптотичних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon u_{xxx} = a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x, \quad (3)$$

де

$$a(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k, \quad (4)$$

функції $a_k(x)$, $b_k(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $k\ge 0$.

2. Основні припущення і позначення

Аналогічно до [1] позначимо через $G_1 = G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ – лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, таких, що для довільних невід'ємних цілих чисел n , m , q , p рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ виконуються такі дві умови:

1. Справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t,\tau) = 0, \quad (x,t)\in K ;$$

2. Існує така нескінченно диференційовна функція $f^{-}(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty}\tau^{n}\frac{\partial^{m}}{\partial\tau^{m}}\frac{\partial^{q}}{\partial t^{q}}\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\Big(f(x,t,\tau)-f^{-}(x,t)\Big)=0,\quad (x,t)\in K.$$

Нехай $G_1^0=G_1^0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ – лінійний підпростір простору $G_1=G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ нескінченно диференційованих функцій $f=f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, таких, що рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ виконується умова $\lim\limits_{\tau\to-\infty}f(x,t,\tau)=0.$

Позначимо за допомогою $G_2^0=G_2^0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ лінійний простір нескінченно диференційованих функцій $f=f(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $(x,t,\tau_1,\tau_2)\in\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, для яких існують такі функції $f_1^{\pm}=f_1^{\pm}(x,t,\tau_2),\ f_2^{\pm}=f_2^{\pm}(x,t,\tau_1)\in G_1^0$, що для довільних невід'ємних цілих чисел α, q, p_1, p_2, β_1, β_2 мають місце співвідношення:

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\tau_1^{p_1}\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial\tau^{\beta_1}}\frac{\partial^{\beta_2}}{\partial\tau^{\beta_2}}\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^{q}}{\partial t^{q}}\Big(f(x,t,\tau_1,\tau_2)-f_1^{\pm}(x,t,\tau_2)\Big)=0,\quad (x,t)\in K,$$

$$\lim_{\tau_2\to\pm\infty}\tau_2^{p_1}\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial\tau^{\beta_1}}\frac{\partial^{\beta_2}}{\partial\tau^{\beta_2}}\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^{q}}{\partial t^{q}}\Big(f(x,t,\tau_1,\tau_2)-f_2^{\pm}(x,t,\tau_1)\Big)=0,\quad (x,t)\in K\ ,$$

а за допомогою $G_2=G_2(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ – лінійний простір нескінченно диференційованих функцій $f=f(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $(x,t,\tau_1,\tau_2)\in\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, для яких існують такі функції $f_1^{\pm}=f_1^{\pm}(x,t,\tau_2),$ $f_2^{\pm}=f_2^{\pm}(x,t,\tau_1)\in G_1^0$ та нескінченно диференційовані функції $u_1^{\pm}=u_1^{\pm}(x,t),\ u_2^{\pm}=u_2^{\pm}(x,t)$, що для довільних невід'ємних цілих чисел α, q, p_1, p_2, β_1, β_2 мають місце співвідношення:

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\tau_1^{p_1}\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial\tau^{\beta_1}}\frac{\partial^{\beta_2}}{\partial\tau^{\beta_2}}\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^{q}}{\partial t^{q}}\Big(f(x,t,\tau_1,\tau_2)-f_1^{\pm}(x,t,\tau_2)-u_1^{\pm}(x,t)\Big)=0,\quad (x,t)\in K,$$

$$\lim_{\tau_2\to\pm\infty}\tau_2^{p_1}\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial\tau^{\beta_1}}\frac{\partial^{\beta_2}}{\partial\tau^{\beta_2}}\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^{q}}{\partial t^{q}}\Big(f(x,t,\tau_1,\tau_2)-f_2^{\pm}(x,t,\tau_1)-u_2^{\pm}(x,t)\Big)=0,\quad (x,t)\in K.$$

Означення. *Функція $u(x,t,\varepsilon)$ називається 2-фазовою солітоноподібною функцією, якщо для довільного цілого числа $N\ge 0$ вона може бути зображена у вигляді:*

$$u(x,t,\varepsilon)=Y_N\left(x,t,\frac{S_1(x,t)}{\sqrt{\varepsilon}},\frac{S_2(x,t)}{\sqrt{\varepsilon}},\varepsilon\right)+O\Big(\varepsilon^{N+\frac12}\Big),\tag{5}$$

де $Y_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)=\sum\limits_{j=0}^{2N}\varepsilon^{\frac{j}{2}}\Big(u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\Big),\ \tau_1=\dfrac{S_1(x,t)}{\sqrt{\varepsilon}},\ \tau_2=\dfrac{S_2(x,t)}{\sqrt{\varepsilon}}$; *функції* $S_k=S_k(x,t)\in C^{\infty}\big(\mathbf{R}\times[0;T]\big),$ *причому* $\frac{\partial S_k}{\partial x}|_{\Gamma_k}\ne 0$; $\Gamma_k=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T],S_k(x,t)=0\},\ \ k=1,2$; $u_j(x,t)$, $j=\overline{1,2N}$, *– нескінченно диференційовні функції;* $V_0(x,t,\tau_1,\tau_2)\in G_2^0$, $V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\in G_2$, $j=\overline{1,2N}$.

Асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок рівняння (3) шукається у вигляді асимптотичного ряду

$$u(x,t,\varepsilon)=Y_N(x,t,\varepsilon)+O\Big(\varepsilon^{N+\frac12}\Big),\tag{6}$$

де

$$Y_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{\frac{j}{2}}\Big(u_j(x,t)+V_j(t,\tau_1,\tau_2)\Big),\ \ \tau_1=\frac{x-\varphi_1(t)}{\sqrt{\varepsilon}},\quad \tau_2=\frac{x-\varphi_2(t)}{\sqrt{\varepsilon}}.\tag{7}$$

Функція $U_N(x,t,\varepsilon)=\sum\limits_{j=0}^{2N}\varepsilon^{\frac{j}{2}}u_j(x,t)$ називається регулярною частиною асимптотики (6), а функція

$$V_N(t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{\frac{j}{2}}V_j(t,\tau_1,\tau_2)\ -$$

сингулярною частиною асимптотики (6). При цьому з урахуванням позначення (6), (7) маємо $Y_N(x,t,\varepsilon)=U_N(x,t,\varepsilon)+V_N(t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)$.

Криві $x=\varphi_s(t)$, $s=1,2$, називаються кривими розриву і визначаються в процесі побудови асимптотичного розв'язку.

Відповідно до загальної ідеї асимптотичних методів, для визначення коефіцієнтів асимптотичних розкладів (6) та враховуючи вигляд похідних $u_t(x,t,\varepsilon)$, $u_x(x,t,\varepsilon),\ u_{xxx}(x,t,\varepsilon)$, після їх підстановки в рівняння (3) знаходимо:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^3 U_N}{\partial x^3}+\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^3}\left[\frac{\partial^3 V_N}{\partial \tau_1^3}+\frac{\partial^3 V_N}{\partial \tau_1^2\partial\tau_2}+\frac{\partial^3 V_N}{\partial \tau_1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 V_N}{\partial \tau_2^3}\right]\right)=$$

$$=a(x,\varepsilon)\left(\frac{\partial U_N}{\partial t}+\frac{\partial V_N}{\partial t}-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial V_N}{\partial \tau_1}\varphi_1'(t)-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial V_N}{\partial \tau_2}\varphi_2'(t)\right)+$$

$$+b(x,\varepsilon)\left(\frac{\partial U_N}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial V_N}{\partial \tau_1}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial V_N}{\partial \tau_2}\right)(U_N+V_N)+g_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon),\quad N=0,1,...,$$

де $g_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{N+\frac{1}{2}}\right)$ – деяка нескінченно диференційована функція своїх аргументів.

Регулярна частина асимптотики визначається з системи диференціальних рівнянь з частинними похідними:

$$a_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial t}+b_0(x)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}=0, \tag{8}$$

$$a_0(x)\frac{\partial u_j}{\partial t}+b_0(x)u_j\frac{\partial u_0}{\partial x}+b_0(x)u_0\frac{\partial u_j}{\partial x}=F_j(x,t),\quad j=\overline{1,2N}, \tag{9}$$

де функції $F_j(x,t)$ визначаються рекурентним чином після знаходження функцій $u_0(x,t),\ u_1(x,t),\ \dots,\ u_{j-1}(x,t)$.

Очевидно, що система рівнянь (8), (9) має нескінченно диференційований розв'язок при досить загальних припущеннях. Тому надалі вважатимемо, що система (8), (9) має нескінченно диференційований для всіх $(x,t)\in R\times[0;T]$ розв'язок.

3. Визначення сингулярної частини асимптотики

Аналогічно [1, 8] сингулярна частина асимптотики (6) спочатку визначається на кожній з кривих $x=\varphi_s(t)$, $s=1,2$. Для знаходження функції $V_0(t,\tau_1,\tau_2)$ на кривій $x=\varphi_s(t)$ маємо рівняння

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1^3}+3\frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1^2\partial\tau_2}+3\frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_2^3}=\left[-\varphi_1'(t)a_0(\varphi_s(t))+b_0(\varphi_s(t))u_0(\varphi_s(t),t)\right]\frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_1}+\\ +\left[-\varphi_2'(t)a_0(\varphi_s(t))+b_0(\varphi_s(t))u_0(\varphi_s(t),t)\right]\frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_2}+b_0(\varphi_s(t))V_{0s}\left[\frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_2}\right],\end{gathered} \tag{10}$$

де через $V_{0s}(t,\tau_1,\tau_2)$ позначено функцію $V_0(t,\tau_1,\tau_2)$ на кривій $x=\varphi_s(t)$, її похідні обчислюються в точці $\left(t,0,\frac{\varphi_1(t)-\varphi_2(t)}{\varepsilon}\right)$ для випадку $x=\varphi_1(t)$ та в точці $\left(t,\frac{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}{\varepsilon},0\right)$ для випадку $x=\varphi_2(t)$ $t\in[0;T]$. При цьому функції $a_0(x)$, $b_0(x)$, $u_0(x,t)$ в (10) визначаються на відповідних кривих $x=\varphi_s(t),\ s=1,2.$

Для визначення функцій $V_j(t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,2N}$, на кривій $x=\varphi_s(t)$ маємо систему рівнянь

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_1^3}+3\frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_1^2\partial\tau_2}+3\frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_2^3}=\\ =\left[-\varphi_1'(t)a_0(\varphi_s(t))+b_0(\varphi_s(t))u_0(\varphi_s(t),t)\right]\frac{\partial V_{js}}{\partial \tau_1}+\left[-\varphi_2'(t)a_0(\varphi_s(t))+b_0(\varphi_s(t))u_0(\varphi_s(t),t)\right]\frac{\partial V_{js}}{\partial \tau_2}+\\ +b_0(\varphi_s(t))\left[V_{js}\frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_1}+V_{js}\frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_2}+V_{0s}\frac{\partial V_{js}}{\partial \tau_1}+V_{0s}\frac{\partial V_{js}}{\partial \tau_2}\right]+F_{js}(t,\tau_1,\tau_2),\quad j=\overline{1,2N}\end{gathered} \tag{11}$$

де через $V_{js}(t,\tau_1,\tau_2)$ позначено значення $V_j(t,\tau_1,\tau_2)$ на кривій $x=\varphi_s(t)$, функції $a_0(x)$, $b_0(x)$, $u_0(x,t)$ в (11) визначаються на кривих $x=\varphi_s(t),\ s=1,2$, а, відповідно, функція $F_{js}(t,\tau_1,\tau_2)$ визначається рекурентним чином після знаходження функцій $V_{0s}(t,\tau_1,\tau_2)$, $V_{1s}(t,\tau_1,\tau_2),\ \dots,\ V_{j-1,s}(t,\tau_1,\tau_2)$ на відповідних кривих. Зокрема, маємо

$$\begin{gathered}F_{1s}(t,\tau_1,\tau_2)=b_0(\varphi_s(t))V_{0s}\frac{\partial u_0(\varphi_s(t),t)}{\partial x}+a_0(\varphi_s(t))\frac{\partial V_{0s}}{\partial t}+\\ +\Big[\tau_s b_0'(\varphi_s(t))V_{0s}+b_1(\varphi_s(t))V_{0s}+\tau_s b_0'(\varphi_s(t))u_0(\varphi_s(t),t)+b_1(\varphi_s(t))u_0(\varphi_s(t),t)+\tau_s b_0(\varphi_s(t))\frac{\partial u_0(\varphi_s(t),t)}{\partial x}+\\ +b_0(\varphi_s(t))u_1(\varphi_s(t),t)-\varphi_1'(t)a_0'(\varphi_s(t))\tau_s-\varphi_1'(t)a_1(\varphi_s(t))\Big]\frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_1}+\\ +\Big[\tau_s b_0'(\varphi_s(t))V_{0s}+b_1(\varphi_s(t))V_{0s}+\tau_s b_0'(\varphi_s(t))u_0(\varphi_s(t),t)+b_1(\varphi_s(t))u_0(\varphi_s(t),t)+\end{gathered}$$

$$+\tau_s b_0(\varphi_s(t))\frac{\partial u_0(\varphi_s(t),t)}{\partial x}+b_0(\varphi_s(t))u_1(\varphi_s(t),t)\ -\varphi_2{}'(t)\,a_0{}'(\varphi_s(t))\tau_s-\varphi_2{}'(t)a_1(\varphi_s(t))\Big]\frac{\partial V_{0s}}{\partial\tau_2}.$$

Оскільки функція $V_0(t,\tau_1,\tau_2)\in G_2^0$, а функції $V_j(t,\tau_1,\tau_2)\in G_2$, $j=\overline{1,2N}$, то рівняння (10), (11) з точністю $O\left(\varepsilon^N\right)$, де N – довільне натуральне число, еквівалентні рівнянням

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^3}+3\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2}+3\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_2^3}=\left[-\varphi_1{}'(t)a_0(\varphi_1(t))+b_0(\varphi_1(t))u_0(\varphi_1(t),t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+$$
$$+\left[-\varphi_2{}'(t)a_0(\varphi_2(t))+b_0(\varphi_2(t))u_0(\varphi_2(t),t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}+b_0(\varphi_2(t))V_0\left[\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}\right], \tag{12}$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_1^3}+3\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2}+3\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_2^3}=$$
$$=\left[-\varphi_1{}'(t)a_0(\varphi_1(t))+b_0(\varphi_1(t))u_0(\varphi_1(t),t)\right]\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}+\left[-\varphi_2{}'(t)a_0(\varphi_2(t))+b_0(\varphi_2(t))u_0(\varphi_2(t),t)\right]\frac{\partial V_j}{\partial\tau_2}+$$
$$+b_0(\varphi_1(t))\left[V_j\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+V_0\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}\right]+b_0(\varphi_2(t))\left[V_j\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}+V_0\frac{\partial V_j}{\partial\tau_2}\right]+F_j\,(t,\tau_1,\tau_2),\ j=\overline{1,2N}. \tag{13}$$

Тут функції $V_j(t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{0,2N}$, визначаються на множині $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, де $\Gamma_k=\{(x,t)\in R\times[0;T]:x=\varphi_k(t)\}$, $k=1,2$. При цьому припускається, що виконуються умови

$$b_0(\varphi_1(t))=b_0(\varphi_2(t)), \tag{14}$$

$$F_{j1}(t,\tau_1,\tau_2)=F_{j2}(t,\tau_1,\tau_2),\quad j=\overline{1,2N}. \tag{15}$$

Зокрема, рівність (15) можлива, наприклад, у випадку виконання умов:

$$a_0(\varphi_1(t))=a_0(\varphi_2(t)), \tag{16}$$

$$b_0(\varphi_1(t))\frac{\partial u_0(\varphi_1(t),t)}{\partial x}=b_0(\varphi_2(t))\frac{\partial u_0(\varphi_2(t),t)}{\partial x}, \tag{17}$$

$$b_0{}'(\varphi_1(t))=b_0{}'(\varphi_2(t))=0, \tag{18}$$

$$b_0{}'(\varphi_1(t))u_0(\varphi_1(t),t)+b_0(\varphi_1(t))\frac{\partial u_0(\varphi_1(t),t)}{\partial x}-\varphi_2{}'(t)a_0{}'(\varphi_1(t))=0, \tag{19}$$

$$b_0{}'(\varphi_2(t))u_0(\varphi_2(t),t)+b_0(\varphi_2(t))\frac{\partial u_0(\varphi_2(t),t)}{\partial x}-\varphi_1{}'(t)a_0{}'(\varphi_2(t))=0, \tag{20}$$

Слід зауважити, що умови (17)–(20) є необхідними і достатніми для того, щоб функція $F_1\ (t,\tau_1,\tau_2)\in G_2^0$.

Зазначимо, що для двосолітонного розв'язку рівняння (2) вказані вище умови виконуються. Надалі припускаємо, що умови (14), (15) мають місце.

Розглянемо рівняння (12), (13). Виконаємо для рівнянь (12), (13) заміну змінних

$$\xi=\frac{\gamma_2(t)\tau_1-\gamma_1(t)\tau_2}{\gamma_2(t)-\gamma_1(t)},\quad \eta=\frac{\tau_1-\tau_2}{\gamma_2(t)-\gamma_1(t)}, \tag{21}$$

де $\gamma_j(t)=-\varphi_j{}'(t)a_0(\varphi(t))+b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t),\quad j=1,2$, $\gamma_1(t)\neq\gamma_2(t)$, $t\in[0;T]$.

Тоді (12) набуде вигляду рівняння:

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial\xi^3}-b_0(\varphi(t))\frac{\partial V_0}{\partial\xi}V_0+\frac{\partial V_0}{\partial\eta}=0, \tag{22}$$

яке за допомогою заміни змінних $\xi_1=\left(\frac{1}{6}b_0(\varphi(t))\right)^{\frac{1}{2}}\xi,\quad \eta_1=\left(\frac{1}{6}b_0(\varphi(t))\right)^{\frac{3}{2}}\eta$ зводиться до рівняння Кортевега-де Фріза з постійними коефіцієнтами вигляду

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial\xi_1^3}-6V_0\frac{\partial V_0}{\partial\xi_1}+\frac{\partial V_0}{\partial\eta_1}=0. \tag{23}$$

Як відомо з теорії оберненої задачі розсіювання [9] двохсолітонний розв'язок рівняння (23) має вигляд:

$$V_0(\xi_1,\eta_1)=-2\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\ln det\left(E+G\right), \tag{24}$$

де E – (2×2)– одинична матриця, а матриця G має вигляд:

$$G=\begin{pmatrix} c_1^2(\eta_1)\dfrac{\exp(-2\kappa_1\xi_1)}{2\kappa_1} & c_1(\eta_1)c_2(\eta_1)\dfrac{\exp(-(\kappa_1+\kappa_2)\xi_1)}{\kappa_1+\kappa_2} \\ c_1(\eta_1)c_2(\eta_1)\dfrac{\exp(-(\kappa_1+\kappa_2)\xi_1)}{\kappa_1+\kappa_2} & c_2^2(\eta_1)\dfrac{\exp(-2\kappa_2\xi_1)}{2\kappa_2} \end{pmatrix},$$

$$c_j(\eta_1)=c_j(0)e^{\kappa_j^3(t)\eta_1},\;\; \kappa_j(t)=\sqrt{\gamma_j(t)}\left(\frac{1}{6}b_0(\varphi(t))\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

З (24) знаходимо, що для функції $V_0(\xi_1,\eta_1)$ виконується співвідношення

$$\lim_{\tau_1\to+\infty}V_0(t,\tau_1,\tau_2)=f_{01}^{+}(t,\tau_2)=-4\kappa_2c_2^2(0)e^{-2A\tau_2\kappa_2}\left[1+\tfrac{c_2^2(0)}{2\kappa_2}e^{-2A\tau_2\kappa_2}\right]^{-2},$$

$$\lim_{\tau_1\to-\infty}V_0(t,\tau_1,\tau_2)=f_{01}^{-}(t,\tau_2)=4\kappa_2c_2^2(0)(\kappa_1-\kappa_2)^2(\kappa_1+\kappa_2)^{-2}e^{-2A\tau_2\kappa_2}\left[1+\tfrac{c_2^2(0)(\kappa_1-\kappa_2)^2}{2\kappa_2(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{-2A\tau_2\kappa_2}\right]^{-2},$$

$$\lim_{\tau_2\to+\infty}V_0(t,\tau_1,\tau_2)=f_{02}^{+}(t,\tau_1)=-4\kappa_1c_1^2(0)e^{-2A\tau_1\kappa_1}\left[1+\tfrac{c_1^2(0)}{2\kappa_1}e^{-2A\tau_1\kappa_1}\right]^{-2},$$

$$\lim_{\tau_2\to-\infty}V_0(t,\tau_1,\tau_2)=f_{01}^{-}(t,\tau_2)=4\kappa_1c_1^2(0)(\kappa_1-\kappa_2)^2(\kappa_1+\kappa_2)^{-2}e^{-2A\tau_1\kappa_1}\left[1+\tfrac{c_1^2(0)(\kappa_1-\kappa_2)^2}{2\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{-2A\tau_1\kappa_1}\right]^{2},$$

де $A=\left(\frac{1}{6}b_0(\varphi(t))\right)^{\frac{1}{2}}$. Функції $f_{01}^{\pm}(t,\tau_1)$ та $f_{02}^{\pm}(t,\tau_2)$, очевидно належать простору G_1^0, тобто функція $V_0(t,\tau_1,\tau_2)$ належить простору G_2^0.

Розглянемо питання про розв'язність системи лінійних рівнянь (13) в просторі G_2. Має місце лема.

Лема 1 [3]. *Необхідною умовою розв'язності рівняння (13) в просторі G_2 є умови ортогональності вигляду:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\Big(F_j(t,\tau_1,\tau_2)V_0(t,\tau_1,\tau_2)\Big)d\tau_2=0; \tag{25}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\tau_2\to\pm\infty}\Big(F_j(t,\tau_1,\tau_2)V_0(t,\tau_1,\tau_2)\Big)d\tau_1=0. \tag{26}$$

Нехай виконуються умови (14), (16) – (20). Тоді з умов ортогональності (25), (26) при $j=1$ знаходимо співвідношення для визначення кривих розриву $x=\varphi_s(t)$, $s=1,2$:

$$2b_0(\varphi(t))\frac{\partial u_0(\varphi(t),t)}{\partial x}\frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)}+a_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)}\right)=0, \tag{27}$$

$$b_0(\varphi(t))\frac{\partial u_0(\varphi(t),t)}{\partial x}\frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)}+a_0'(\varphi_1(t))\varphi_1'(t)\frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)}+a_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)}\right)=0, \tag{28}$$

$$2b_0(\varphi(t))\frac{\partial u_0(\varphi(t),t)}{\partial x}\frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)}+a_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)}\right)=0, \tag{29}$$

$$b_0(\varphi(t))\frac{\partial u_0(\varphi(t),t)}{\partial x}\frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)}+a_0'(\varphi_2(t))\varphi_2'(t)\frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)}+a_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)}\right)=0, \tag{30}$$

де $t\in[0;T]$.

Зокрема, якщо виконується умова $a_0'(\varphi_1(t))=a_0'(\varphi_2(t))=0$, то система рівнянь (27)–(30) значно спрощується і набуває вигляду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)}\right)=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)}\right)=0\,.$$

Звідси отримуємо звичайні диференціальні рівняння для визначення кривих $x=\varphi_s(t)$, $s=1,2$:

$$\Big(-a_0(\varphi(t))\varphi_1'(t)+b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t)\Big)^{\frac{3}{2}}=C_1(b_0(\varphi(t)))^2, \tag{31}$$

$$\Big(-a_0(\varphi(t))\varphi_2'(t)+b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t)\Big)^{\frac{3}{2}}=C_2(b_0(\varphi(t)))^2, \tag{32}$$

де C_1 та C_2 довільні сталі.

Розглянемо рівняння (13). Виконавши заміну змінних (21) отримаємо систему рівнянь

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \xi^3} - b_0(\varphi)\left(\frac{\partial V_0}{\partial \xi} V_j + \frac{\partial V_j}{\partial \xi} V_0\right) + \frac{\partial V_j}{\partial \eta} = F_j(\xi, \eta). \tag{33}$$

Припустимо, що функція $F_j(\xi,\eta)$, $j = \overline{1,2N}$, належить простору швидко спадних функцій щодо ξ для довільних $|\eta| < T_1$. Тоді існує [5] розв'язок $V_j(\xi,\eta)$, $j = \overline{1,2N}$, рівняння (33), визначений для $|\eta| < T_1$, такий, що $V_j(\xi,\eta)$, $j = \overline{1,2N}$, належить простору швидко спадних функцій щодо змінної ξ. Отже, рівняння (13) має нескінченно диференційований розв'язок $V_j(t,\tau_1,\tau_2)$, визначений для всіх $\{(\tau_1,\tau_2) \in \mathbf{R}^2 : |\tau_1 - \tau_2| < CT_1\}$, де $C = |\gamma_2(t) - \gamma_1(t)|$.

Теорема 1. *Припустимо, що функції $a_k(x)$, $b_k(x)$, $k \ge 0$, є нескінченно диференційовними на $\mathbf{R}^1$, система (31), (32) має такий розв'язок $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ для $t \in [0;T]$, що $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ та виконуються умови (14) і (16)–(20).*

Тоді функція

$$Y_0(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + V_0(t,\tau_1,\tau_2), \quad \tau_s = \frac{x - \varphi_s(t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad s = 1,2,$$

є головним членом асимптотичного розвинення для двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (3) при $t \in [0;T]$.

Теорема 2. *Припустимо, що функції $a_k(x)$, $b_k(x)$, $k \ge 0$, є нескінченно диференційовними на $\mathbf{R}^1$, система (31), (32) має такий розв'язок $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ для $t \in [0;T]$, що $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, виконуються умови (14) – (20), функції $F_j(\xi,\eta)$ $j = \overline{1,2N}$, належить простору швидко спадних функцій щодо ξ для $|\eta| < T_1$.*

Тоді функція

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{\frac{j}{2}} \left(u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\right), \quad \tau_s = \frac{x - \varphi_s(t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad s = 1,2,$$

є асимптотичним розвиненням для двофазового солітоноподібного розв'язку задачі (2) для всіх $\left\{(x,t) \in R \times [0;T] : |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < \varepsilon C T_1\right\}$, *де* $C = |\gamma_2(t) - \gamma_1(t)|$.

4. Висновки

В даній статті запропоновано алгоритм побудови асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром першого порядку при старшій похідній.

1. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи матем. наук. – 1981. – Вып. 36 (219), N. 2. – С. 63 – 124. 2. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 58, N.1. – С.111 – 124. 3. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2008. – Т.60,
N. 3. – С. 378 – 387. 4. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Советское радио. – 368 с. 5. *Фаминский А.В.* Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1988. – Вып.13. – С. 56 – 105. 6. *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Korteweg-de Vries equation and Generalizations. VI. Methods for Exact Solutions // Comm. Pure and Appl. Math. – 1974. – V. 27. – P. 97 – 133. 7. *Korteweg D.J., de Vries G.* On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Philos. Mag. – 1895. – N. 39. – P. 422 – 433. 8. *Maslov V.P., Omel'yanov G.A.* Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: American Math. Society. – 2001. – 243 p. 9. *Miura R.M.* The Korteweg-de Vries equation: survey of results // SIAM Review – 1976. – V. 18, N. 3. – P. 412 – 459. 10. *Samoylenko YuI.* Asymptotical expansions for one-phase soliton-type solution to perturbed Korteweg-de Vries equation // Proceedings of the Fifth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". – K.: Institute of Mathematics. – 2004. – T. 3. – P. 1435 – 1441.

Надійшла до редколегії 24.02.10

УДК 517.9

П. Фекета, асп.

ІНВАРІАНТНІ МНОГОВИДИ ОДНОГО КЛАСУ РОЗРИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянуто питання існування інваріантних тороїдальних множин одного класу систем диференціальних рівнянь, визначених на прямому добутку m-вимірного тора і евклідового простору, з імпульсним збуренням на підмноговиді тора розмірності m–1.

Existence problems of invariant toroidal sets for a certain class of system of differential equations defined on direct product of m-measurable torus and Euclidian space subjected an impulsive perturbations on m–1-measurable submanifold of torus are considered.

1. Вступ

Основним об'єктом дослідження даної роботи є система диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням, визначена на прямому добутку m -вимірного тора і n -вимірного евклідового простору вигляду

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, x),\ \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi),\ \varphi \notin \Gamma,$$
$$\Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi).$$