УДК 517.9 + 531.19

В. Герасименко, д-р фіз.-мат. наук, А. Бодрова, студ., М. Боровченкова, студ.

ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ СИСТЕМ ЧАСТИНОК З ДИСИПАТИВНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

Для одновимірної системи частинок з дисипативною взаємодією побудована ієрархія рівнянь ББГКІ, якою описується еволюція гранульованих середовищ. Доведено існування розв'язків задачі Коші цієї ієрархії для початкових даних з простору послідовностей обмежених функцій. Розглянуто також питання строгого виводу нелінійних кінетичних рівнянь таких систем.

For a one-dimensional system of particles with a dissipative interaction we construct the BBGKY hierarchy which describes the evolution of granular materials. For initial data from the space of sequences of bounded functions the existence of a solution of the Cauchy problem of this hierarchy is proved. We discuss also a problem of the rigorous derivation of nonlinear kinetic equations of such systems.

1. Вступ

Гранульовані середовища становлять значний інтерес не лише з точки зору їх застосувань, але і як приклад динамічних багатокомпонентних систем, статистичні (колективні) властивості яких відрізняються від аналогічних властивостей звичайних рідин і газів [3], [7], [10]. Наприклад, ефект колапсу, утворення кластерів та інших структур [10], немаксвелівський розподіл швидкостей гранул в рівноважному стані [7].

Дисипативний характер взаємодії між гранулами призводить до ряду нетривіальних з математичної точки зору особливостей при дослідженні рівнянь, якими моделюють еволюцію станів таких систем. В сучасних роботах [1], [2], [9] в основу опису мікроскопічної еволюції гранульованих систем покладено кінетичні рівняння типу рівнянь Больцмана та Больцмана-Енського. Відомо [4], що такі кінетичні рівняння у випадку системи пружних куль в границі Больцмана-Ґреда описуть асимптотику розв'язку ієрархії рівнянь ББГКІ (ієрархії Боголюбова-Борна-Гріна-Кірквуда-Іована). Внаслідок сингулярного характеру потенціала взаємодії між гранулами виникає проблема строгого обґрунтування ієрархії рівнянь ББГКІ, що описують такі системи, та їх зв'язку з зазначеними кінетичними рівняннями.

Мета роботи полягає в обґрунтуванні ієрархії рівнянь ББГКІ для систем частинок з дисипативною взаємодією та побудові розв'язку задачі Коші для цих рівнянь у відповідних функціональних просторах.

2. Дисипативна динаміка багаточастинкових систем

Для гранульованих речовин припускається, що середня довжина вільного пробігу гранул значно більша за їх типовий розмір і динаміка таких систем визначається дисипативною природою короткодіючої взаємодії між гранулами. Тому розглядаємо одновимірну систему n твердих куль одиничної маси з діаметром σ, що рухаються в просторі $\mathbb{R}$. Фазові координати *i*-тої частинки, $1 \le i \le n$, будемо позначати $(q_i, p_i) \equiv x_i$, де $q_i \in \mathbb{R}$ – координати її центру, а $p_i \in \mathbb{R}$ – імпульс. Підмножина фазового простору системи n частинок $W_n^\sigma \equiv \{(q_1,\dots,q_n) \in \mathbb{R}^n \,\|\, q_i - q_j |< \sigma$ *хоча б для однієї пари* $(i,j):\ i \ne j \in \{1,\dots,n\}\}$ – множина заборонених конфігурацій.

Фазові траєкторії системи твердих куль визначені майже скрізь на фазовому просторі $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus W_n)$, тобто крім певної множини $\mathfrak{M}_n^0$ лебегової міри нуль [4]. До множини $\mathfrak{M}_n^0$ належать такі точки фазового простору $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus W_n)$, що в процесі еволюції системи: (a) відбувається одночасне розсіяння більше ніж двох частинок, (b) одночасне розсіяння більше ніж однієї пари частинок, (c) нескінченне число зіткнень за скінченний проміжок часу.

Якщо $(q_1,\dots,q_n) \in \partial W_n^\sigma$, частинки взаємодіють (непружньо розсіюються), тоді імпульси p_i^*, p_j^* частинок після взаємодії визначаються через імпульси p_i, p_j частинок до взаємодії з таких рівнянь:

$$p_i^* - p_j^* = -e(p_i - p_j),\ \ p_i^* + p_j^* = p_i + p_j, \tag{1}$$

де $e \in [0,1]$ – коефіцієнт відновлення, яким характеризується величина дисипації енергії при взаємодії (міра непружності розсіяння гранул). Перше рівняння в (1) є законом розсіяння, який у випадку пружного розсіяння може бути замінено на закон збереження енергії, друге рівняння в (1) є законом збереження імпульсу.

Введемо параметр $\varepsilon = \dfrac{1-e}{2} \in [0, \dfrac{1}{2})$, тобто границя $\varepsilon \to 0$ є границею пружного розсіяння. Тоді розв'язок рівнянь (1) – значення імпульсів частинок після розсіяння, має вигляд

$$p_i^* = p_j + \varepsilon(p_i - p_j),\ \ p_j^* = p_i - \varepsilon(p_i - p_j). \tag{2}$$

Зауважимо, що одновимірна система частинок цілком моделює характерні властивості гранульованих речовин, оскільки в багатовимірному випадку при непружному розсіянні дисипує тільки нормальна компонента відносного імпульсу частинок.

Відповідно значення імпульсів частинок до розсіяння визначаються такими виразами

$$p_i' = p_j + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - 1}(p_i - p_j),\ \ p_j' = p_i - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - 1}(p_i - p_j). \tag{3}$$

В просторі послідовностей інтегровних функцій L_n^1 визначена група еволюційних операторів $S_n(t)$ системи n гранул

$$(S_n(t)f_n)(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases} f_n(X_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,X_n(t,x_1,\dots,x_n)), & \text{ÿêù î } (x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus W_n^{\sigma}))\setminus\mathfrak{M}_n^0; \\ 0, & \text{ÿêù î } (q_1,\dots,q_n)\in W_n,(x_1,\dots,x_n)\bigcup\mathfrak{M}_n^0, \end{cases} \tag{4}$$

де $X_i(t,x_1,\dots,x_n)$ – фазова траєкторія *i*-тої частинки системи *n* частинок, яка визначається в такий же спосіб як для системи пружних куль [4]. Основні властивості еволюційного оператора $S_n(t)$ описано в монографіях [4], [9].

Для нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями $f_n\in L^1_{n,0}\subset L^1_n$ в сенсі збіжності по нормі простору L^1_n існує границя, якою визначається інфінітезимальний генератор групи операторів (4)

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(S_n(-t)f_n-f_n)=-\mathcal{L}_n f_n, \tag{5}$$

де оператор $\mathcal{L}$ – генератор рівняння Ліувілля [4], який визначається через оператор Ліувілля системи невзаємодіючих частинок

$$\mathcal{L}_n f_n=(\mathcal{L}^o_n)_{|\partial W_n^{\sigma}} f_n=\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial}{\partial q_i} f_n(x_1,\dots,x_n)_{|\partial W_n^{\sigma}}$$

з певними граничними умовами [9] на $\partial W_n^{\sigma}=\{(q_1,\dots,q_n)\in\mathbb{R}^n \,||\, q_i-q_j|=\sigma$ *хоча б для однієї пари* $(i\neq j)\in(1,\dots,n)\}$.

Сформулюємо ще одну необхідну надалі властивість групи операторів (4). При $t>0$ розглянемо такий функціонал

$$(S_2(-t)f_2-S_1(-t)S_1(-t)f_2,\varphi_2)\doteq\frac{1}{2}\int\limits_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^2} dx_1dx_2(S_2(-t)f_2(x_1,x_2)-S_1(-t)S_1(-t)f_2(x_1,x_2))\varphi_2(x_1,x_2). \tag{6}$$

Згідно означення (4), якщо φ_2 – неперервно диференційована функція та f_2 – інтегровна функція, то функціонал (6) існує. В функціоналі (6) оператори $S_2(-t)$ і $S_1(-t)S_1(-t)$ на інтегровних функціях визначаються відповідно такими формулам

$$(S_2(-t)f_2)(x_1,x_2)=\begin{cases} f_2(q_1+(-p_1\tau+p_1'\ (-t+\tau))\theta-(1-\theta)p_1t,\theta p_1'\ +(1-\theta)p_1, & \\ q_2+(-p_2\tau+p_2'\ (-t+\tau))\theta-(1-\theta)p_2t,\theta p_2'\ +(1-\theta)p_2), & \text{якщо } (q_1-q_2)(p_1-p_2)<0,(q_1,q_2)\notin W_2^{\sigma}; \\ f_2(q_1-p_1t,p_1,q_2-p_2t,p_2), & \text{якщо } (q_1-q_2)(p_1-p_2)>0,(q_1,q_2)\notin W_2^{\sigma}; \\ 0, & \text{якщо } (q_1,q_2)\in W_2^{\sigma}. \end{cases}$$

$$(S_1(-t)S_1(-t)f_2)(x_1,x_2)=f_2(q_1-p_1t,p_1,q_2-p_2t,p_2),$$

де $\tau=\tau(x_1,x_2)$ – момент розсіяння частинок [3], $\theta\equiv\theta(-t+\tau)$ – характеристична функція. Результат обчислення значення функціоналу (6) можна подати у формі аналога рівняння Дюамеля.

Лема. *Для* $t>0$ *справедлива рівність*

$$(S_2(-t)f_2-S_1(-t)S_1(-t)f_2,\varphi_2)=(\int_0^t d\tau\, S_2(-t+\tau)\mathcal{L}_{int}(1,2)S_1(-\tau)S_1(-\tau)f_2,\varphi_2), \tag{7}$$

де

$$\Big(\mathcal{L}_{int}(1,2)f_2\Big)(x_1,x_2)\doteq$$
$$\doteq\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}((1-\theta)\delta(q_1-\sigma-q_2)+\theta\delta(q_1+\sigma-q_2))f_2(q_1,p_1',q_2,p_2')-(\theta\delta(q_1-\sigma-q_2)+(1-\theta)\delta(q_1+\sigma-q_2))f_2(x_1,x_2), \tag{8}$$

δ *– функція Дірака,* $p_1'\ ,p_2'$ *– значення імпульсів частинок до розсіяння (3) та* $\theta\doteq\theta(p_2-p_1)$ *– характеристична функція.*

Доведення Леми подібне доведенню аналогічного твердження у випадку системи пружних куль [9] з урахуванням того факту, що якобіан перетворення від змінних (q_1,p_1,q_2,p_2) до $(q_1,p_1'\ ,\tau,p_2'\ )$ дорівнює $\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}\,|\,p_1-p_2\,|$. Для системи n частинок, враховуючи, що фазові траєкторії визначені всюди на фазовому просторі крім множини $\mathfrak{M}_n^0$ лебегової міри нуль, твердження леми відповідно узагальнюється в такий спосіб: $\mathcal{L}_{int}(1,..,n)=\sum_{1=i<j}^{n}\mathcal{L}_{int}(i,j)$, де оператор $\mathcal{L}_{int}(i,j)$ визначається формулою (8).

3. Ієрархія рівнянь Боголюбова для гранульованого газу

Введемо такі позначення: $Y \equiv (x_1,\dots,x_s)$, $X \equiv (x_1,\dots,x_{s+n})$, $d(X\setminus Y) \equiv dx_{s+1}\dots dx_{s+n}$, $X_Y = (Y, x_{s+1},\dots,x_{s+n})$ – множина, елементами якої є множина Y і елементи $x_{s+1},\dots,x_{s+n}$, та $|X| = s+n$ – число елементів множини X.

Якщо $F(0) \in L^1$, розв'язок $F(t) = (1, F_1(t,x_1),\dots,F_s(t,x_1,\dots,x_s),\dots)$ початкової задачі для ієрархії рівнянь ББГКІ визначається розкладом [6]

$$F_{|Y|}(t,Y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus W_n)} d(X\setminus Y)\mathfrak{A}_{1+|X\setminus Y|}(t,X_Y)F_{|X|}(0,X), \tag{9}$$

по групах частинок, еволюція яких описується кумулянтом $\mathfrak{A}_{1+|X\setminus Y|}(t,X_Y)$ відповідного порядку еволюційних операторів (4)

$$\mathfrak{A}_{1+|X\setminus Y|}(t,X_Y) \doteq \sum_{P:X_Y=\bigcup_l X_l}(-1)^{|P|-1}(|P|-1)!\prod_{X_l\subset P}S_{|X_l|}(-t,X_l), \tag{10}$$

де $\sum_{\mathrm{P}}$ – це сума по всім можливим розбиттям P множини X_Y на $|P|$ таких підмножин $X_l \subset X_Y$, $X_k \cap X_l = \varnothing$, $k \neq l$, що множина Y належить одній з підмножин X_l. Зауважимо, що порядок кумулянта $\mathfrak{A}_{1+|X\setminus Y|}(t)$ визначається кількістю елементів множини X_Y (множина X_Y складається з $1+|X\setminus Y|$ елементів).

Сформулюємо необхідні надалі властивості кумулянтів. Для кумулянта (10) порядку $(1+|X\setminus Y|)$ справедлива така рівність

$$\mathfrak{A}_{1+|X\setminus Y|}(t,X_Y) = \sum_{\substack{Z\subset X\setminus Y,\\ Z\neq\varnothing}}\mathfrak{A}_2(t,Y,Z)\sum_{\mathrm{P}:X\setminus(Y\cup Z)=\bigcup_l X_l}(-1)^{|\mathrm{P}|}|\mathrm{P}|!\prod_{X_l\subset\mathrm{P}}\mathfrak{A}_1(t,X_l), \tag{11}$$

де $\sum_Z$ – сума по всім непорожнім підмножинам Z з множини $X\setminus Y$. Згідно рівності (7) маємо

$$(\mathfrak{A}_2(t,Y,Z)f,\varphi) = \left(\int_0^t d\tau S_{|Y\cup Z|}(-t+\tau,Y,Z)\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(Y,Z)S_{|Y|}(-\tau,Y)S_{|Z|}(-\tau,Z)f,\varphi\right).$$

Оскільки група операторів (4) визначена всюди на фазовому просторі крім множини $\mathfrak{M}_n^0$ лебегової міри нуль, то для $n>2$ в сенсі збіжності по нормі простору інтегровних функцій справедлива така рівність: $\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\mathfrak{A}_n(t,Y)f_n(Y) = 0.$

Враховуючи такі властивості, знаходимо еволюційні рівняння, яким задовольняє послідовність (9). В результаті встановлюємо, що еволюція всіх можливих станів системи твердих куль з дисипативною взаємодією описується послідовністю $F(t) = (1, F_1(t,x_1),\dots,F_s(t,x_1,\dots,x_s),\dots)$, яка в просторі послідовностей інтегровних функцій є розв'язком такої абстрактної задачі Коші

$$\frac{\partial}{\partial t}F(t) = (-\mathcal{L} + \mathfrak{a}\mathcal{L}_{int})F(t), \tag{12}$$

$$F(t)_{|t=0} = F(0), \tag{13}$$

де $-\mathcal{L} + \mathfrak{a}\mathcal{L}_{int}$ – генератор ієрархії еволюційних рівняннь (12), $-\mathcal{L} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(-\mathcal{L}_n)$ – оператор Ліувілля (5) та $\mathfrak{a}$ – аналог оператора знищення квантової теорії поля [4]: $(\mathfrak{a}f)_n(x_1,\dots,x_n) = \int dx_{n+1}f_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1})$.

Для $t>0$ інтеграл зіткнень $\mathfrak{a}\mathcal{L}_{int}F(t)$ в ієрархії (12) покомпонентно має вигляд

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}\mathcal{L}_{int}F(t))_n(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}dPP\Big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}F_{n+1}(t,x_1;\dots;q_i,p_i^*(p_i,P);\dots;x_n;q_i-\\ &-\sigma,p_{n+1}^*(p_i,P)) - F_{n+1}(t,x_1;\dots;x_n;q_i-\sigma,p_i+P)\Big)+\\ &+\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}dPP\Big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}F_{n+1}(t,x_1;\dots;q_i,\tilde{p}_i^*(p_i,P);\dots;x_n;q_i+\sigma,\tilde{p}_{n+1}^*(p_i,P))-\\ &-F_{n+1}(t,x_1;\dots;x_n;q_i+\sigma,p_i-P)\Big),\end{aligned} \tag{14}$$

де вирази

$$p_i^*(p_i,P) = p_i - P + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}P,\quad p_{n+1}^*(p_i,P) = p_i - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}P$$

та

$$\tilde{p}_i^*(p_i,P)=p_i+P-\frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}P,\quad \tilde{p}_{n+1}^*(p_i,P)=p_i+\frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}P$$

є значеннями імпульсів відповідних частинок до зіткнення (3). У випадку $t<0$ для інтегралу зіткнень $\mathfrak{a}\mathcal{L}_{int}F(t)$ маємо

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}\mathcal{L}_{int}F(t))_n(x_1,\dots,x_n)=&\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}dPP(F_{n+1}(t,x_1;\dots;q_i,p_i;\dots;x_n;q_i-\sigma,p_i-P)-\\&-(1-2\varepsilon)^2F_{n+1}(t,x_1;\dots;q_i,p_i^*(p_i,P);\dots;x_n;q_i-\sigma,p_{n+1}^*(p_i,P))+\\&+\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}dPP(F_{n+1}(t,x_1;\dots;q_i,p_i;\dots;x_n;q_i+\sigma,p_i+P))-\\&-(1-2\varepsilon)^2F_{n+1}(t,x_1;\dots;q_i,\tilde{p}_i^*(p_i,P);\dots;x_n;q_i+\sigma,\tilde{p}_{n+1}^*(p_i,P)),\end{aligned}\tag{15}$$

де вирази $p_i^*(p_i,P)=p_i+P-\varepsilon P,\quad p_{n+1}^*(p_i,P)=p_i+\varepsilon P$ та $\tilde{p}_i^*(p_i,P)=p_i-P+\varepsilon P,\quad \tilde{p}_{n+1}^*(p_i,P)=p_i-\varepsilon P$ є значеннями імпульсів відповідних частинок після зіткнення (2).

Зауважимо, що формальною границею ієрархії (12) при $\varepsilon\to 0$ є ієрархія рівнянь ББГКІ для одновимірної системи пружних куль [5].

Аналогічно результату, який встановлено для системи пружних куль [7],[8], на основі рівності (7) та зображення (11) можна довести існування розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (12), (13) для початкових даних з простору послідовностей обмеженних функцій. Справедлива така теорема.

Теорема. *Якщо* $|F_n(0)|\le const\xi^n\exp\left(-\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{2}\right)$, *то функції* $F_s(t,x_1,\dots,x_s)$ *існують і ряд (9), яким вони визначаються, збігається рівномірно відносно* $(x_1,\dots,x_s)$ *з довільного компакту при* $t\in(-t_0,t_0)$, *де* $t_0=(2^3\sqrt{2\pi}\xi\beta)^{-1}$. *Послідовність функцій* $F_s(t),s\ge 1,$ *є єдиним слабким розв'язком задачі Коші (12)-(13).*

4. Висновки

В роботі на основі динаміки багаточастинкової системи дисипативно взаємодіючих частинок розвинуто математично строгий
підхід до опису гранульованих середовищ.

Для сингулярного потенціалу взаємодії, який описує непружне розсіяння гранул, в просторі послідовностей інтегровних функцій обґрунтовано вивід ланцюжка рівнянь Боголюбова (ієрархію ББГКІ) (12)-(15). Доведено існування розв'язку в просторі послідовностей обмежених функцій, якими описуються стани нескінченних систем.

На основі цього результату можна строго обґрунтувати кінетичні рівняння, які *a priori* покладено в основу теорії гранульованих середовищ [2], [3], [7], [8], [10]. Дійсно [6,7], границя Больцмана-Ґреда $\lim_{\sigma\to 0}F_1(t)=f_1(t)$ розв'язку (9) ієрархії рівнянь (12)-(15) визначається кінетичним рівнянням типу Больцмана [1], [10]

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,q,p)=-p\frac{\partial}{\partial q}f_1(t,q,p)+\int_{-\infty}^{+\infty}dp_1\,|p-p_1|\left(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}f_1(t,q,p')f_1(t,q,p_1')-f_1(t,q,p)f_1(t,q,p_1)\right),$$

квазіпружна границя розв'язку $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\; f_1(t)=f^0(t)$ якого задовольняє кінетичне рівняння Мак Намари (або рівняння тертя) [8]

$$\frac{\partial}{\partial t}f^0(t,q,p)=-p\frac{\partial}{\partial q}f^0(t,q,p)+\frac{\partial}{\partial p}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}d\tilde{p}\,|\tilde{p}-p|(\tilde{p}-p)f^0(t,q,\tilde{p})f^0(t,q,p)\right).$$

Зауважимо, що такого типу нелінійні кінетичні рівняння описують характерні властивості гранульованих середовищ [7], [10].

1. *Benedetto D., Caglioti E., Pulvirenti M.* Collective Behavior of One-Dimensional Granular Media // Modelling in Appl. Sci., Birkhäuser, 2000.-P. 81-110. 2. *Brey J.J., Dufty J.W., Santos A.* Dissipative Dynamics for Hard Spheres // J. Stat. Phys.-1997.-87.-P. 1051-1068. 3. *Cercignani C.* Recent Developments in the Mechanics of Granular Materials // Fisica Matematica e Ingegneria delle Strutture: Rapporti e Compatibilita. Pitagora Editrice. Bologna. 1995.-P.119 -132. 4. *Cercignani C., Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya.* Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.- 252p. 5. *Gerasimenko V.I.* On Solutions of Bogolyubov Equations for One-dimensional System of Hard Spheres // Teor. Mat. Fiz.-1992.-91.-C. 120-131. 6. *Gerasimenko V.I., Ryabukha T.V., Stashenko M.O.* On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions.// J. Phys. A: Math. Gen. -2004.-37. – P. 9861-9872. 7. *Goldhirsch I.* Scales and Kinetics of granular flows // Chaos.-1999.-9.-P. 659-672. 8. *Mac Namara S., Young W.R.* Kinetics of a One-Dimensional Granular Medium in Quasielastic Limit // Phys. Fluids.-1993.-A.-5.-P. 34-45. 9. *Petrina D.Ya.* Stochastic Dynamics and Boltzmann hierarchy. – Kyiv: Inst. Math., 2008.- 400p. 10. *Toscani G.* The Large-Time Behavior of Nonconservative Evolution Equations // Kinetic Methods for Nonconservative and Reacting Systems. Seconda Universita di Napoli., 2005.-16.-P. 145-320.

Надійшла до редколегії 16.11.09