

ДО ЧИТАЧІВ**МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ МОЛОДИХ ВЧЕНИХ
ДО 70-РІЧЧЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ**

13–15 грудня 2010 року на механіко-математичному факультеті науковим товариством аспірантів і студентів механіко-математичного факультету за сприяння фонду підтримки студентських ініціатив Київського національного університету імені Тараса Шевченка було проведено Міжнародну наукову конференцію молодих вчених, присвячену 70-річчю механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

У роботі конференції взяло участь 44 учасники з різних міст України і одна учасниця з Естонії.

На конференції працювали секції з механіки, диференціальних рівнянь і математичної фізики, алгебри і геометрії, теорії ймовірностей і математичної статистики.

Під час урочистого відкриття конференції зі вступним словом виступив співголова організаційного комітету конференції декан механіко-математичного факультету професор Городній М. Ф.

Для учасників конференції лекцію, що присвячена шляхам отримання нових наукових результатів, прочитав радник дирекції Інституту математики НАН України академік НАН України Корольук В. С. Текст цієї лекції друкується мовою оригіналу в даному виданні.

Редколегія

УДК 519.24

В. Корольук, акад. НАН України

ПРИНЦИП БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ЭВОЛЮЦИЙ

Текст пленарної лекції, яка була прочитана 13 грудня 2011 року для учасників міжнародної наукової конференції, присвяченої 70-річчю механіко-математичного факультету.

Plenary lecture given on December 13, 2011 for participants of International scientific conference of young scientists devoted to 70th years of faculty of mathematics and mechanics of Kyiv National Taras Shevchenko University.

1. История вопроса

В конце 2008 года на семинаре в ун-те Bielefeld'a (Германия) я услышал доклад американского профессора польского происхождения А. Korzeniowski о методе фазового укрупнения стохастических систем, изложенного в нашей с N. Limnios монографии [3], а затем о проблеме больших уклонений для стохастических систем в схеме фазового укрупнения. Спустя полгода, весной 2009 года, я задумал познакомиться с проблемой больших уклонений по существующей литературе, которая содержит работы, начиная с 60-х годов XX ст. Оказалось, что монографий по проблеме больших уклонений более 20-ти, и, конечно же, несчетное количество статей. Работая по гранту в Bielefeld ун-те весной 2009 года, я предложил нашему руководителю гранта проф. Ю. Кондратьеву обсудить проблему больших уклонений на его семинаре. К счастью, которое я называю "Провидением" он назвал мне еще одну монографию по проблеме больших уклонений, о которой нам с И. Самойленко не было известно, а именно: J. Feng, T. Kurtz "Large Deviation for Stochastic Processes" [1]. В ней развит оригинальный метод исследования проблемы больших уклонений, основанный на асимптотическом анализе экспоненциального генератора, компенсирующего экспоненциальный мартингал. Я решил, что имеется перспектива применить метод асимптотического анализа линейного генератора марковского процесса, компенсирующего линейный мартингал, обеспечивающий характеристику марковского процесса.

В отличие от всех прежних работ, в которых асимптотический анализ проблемы больших уклонений осуществляется с использованием большого параметра серии $n \rightarrow \infty$ (или даже нескольких больших параметров), я принял решение переформулировать задачи асимптотического анализа проблемы больших уклонений в терминах малого параметра серии $\varepsilon \rightarrow 0$. На первый взгляд кажется, что это то же самое: $\varepsilon = 1/n$. Однако, как говорится "Федот да не тот!" Я надеялся (и как показывают последующие результаты -- не напрасно), что вместе с малым параметром серии $\varepsilon \rightarrow 0$ мне удастся инсталлировать /внедрить/ решение проблем сингулярного возмущения в анализ проблемы больших уклонений?!

Все упиралось, как оказалось, в проблему нормирования марковского процесса (scaling) в анализе больших уклонений!

Устав от непонятных формул монографии [1], содержащей 3 части, 13 глав (400 стр. текста), я заглянул в третью часть (главы 10 и 11), в которых рассматривались конкретные модели марковских процессов в проблеме больших уклонений. В частности, в гл. 10, п. 10.1.6 (в шестом параграфе!) под названием "Other Scalings" (иная нормировка) я обнаружил знакомую мне нормировку в схеме диффузионной аппроксимации, предложенной А. Могульским [4]. Правда, вместо одного большого параметра серии $n \rightarrow \infty$ использовалось два больших параметра n и β_n связанные между собой соотношением: $n/\beta_n \rightarrow 0$.

Осталось подобрать малый параметр серии $\varepsilon \rightarrow 0$ таким образом, чтобы выполнялось это соотношение. Думаю, если свести проблему больших уклонений к такой задаче, каждый грамотный математик может с ней справиться. Оказывается, что нормировка асимптотически малой диффузии в проблеме больших уклонений сводится к следующей схеме: $n = \varepsilon^{-2}, \beta_n = \varepsilon^{-3}$. Так мы получаем нормированный марковский процесс в проблеме больших уклонений в схеме асимптотически малой диффузии (АМД) !

Известно, что асимптотические проблемы в теории случайных процессов можно охарактеризовать следующим образом:

I Закон больших чисел – усреднение: $\varepsilon\eta(t/\varepsilon) \Rightarrow b(t), \varepsilon \rightarrow 0$.

II Центральная предельная теорема – диффузионная аппроксимация: $\varepsilon\eta(t/\varepsilon^2) \Rightarrow w_\sigma(t), \varepsilon \rightarrow 0$.

III Экспоненциально малые вероятности – большие отклонения: $\varepsilon^2\eta(t/\varepsilon^3) \cong \varepsilon w_\sigma(t), \varepsilon \rightarrow 0$,

т. е. асимптотически малая диффузия.

Если применить эту нормировку в асимптотическом анализе *линейного генератора марковского процесса*, то получим асимптотическую эквивалентность.

Линейный генератор для процесса с независимыми приращениями задается формулой

$$L\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} [\varphi(u+z) - \varphi(u)] L(dz).$$

I В схеме усреднения

$$L^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} [\varphi(u+\varepsilon z) - \varphi(u)] L(dz) = b\varphi'(u) + o_\varepsilon(1), \quad b = \int_{\mathbb{R}} z L(dz).$$

II В схеме диффузионной аппроксимации ($b = 0$):

$$L^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}} [\varphi(u+\varepsilon z) - \varphi(u)] L(dz) = \frac{1}{2} B\varphi''(u) + o_\varepsilon(1), \quad B = \int_{\mathbb{R}} z^2 L(dz).$$

III В схеме асимптотически малой диффузии ($b = 0$):

$$L^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-3} \int_{\mathbb{R}} [\varphi(u+\varepsilon^2 z) - \varphi(u)] L(dz) = \varepsilon \frac{1}{2} B\varphi''(u) + o(\varepsilon).$$

Так проблема больших отклонений уложилась в общую схему асимптотического анализа в теории случайных процессов.

Теперь рассмотрим проблему больших отклонений так, как это предложено в монографии [1]. Экспоненциальный генератор больших отклонений H задается соотношением

$$H\varphi(x) = e^{-\varphi(x)} L e^{\varphi(x)}.$$

При этом обеспечивается мартингальная характеристика больших отклонений в виде экспоненциального мартингала

$$\tilde{\mu}_t = \exp\{\varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t H\varphi(x(s)) ds\}.$$

Пример. Пусть $L\varphi(x) = \varphi''(x)$, что соответствует диффузии. Тогда легко вычислить $H\varphi(x) = [\varphi'(x)]^2 + \varphi''(x)$.

Теперь рассмотрим проблему больших отклонений в схеме серий с малым параметром серии $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$).

Экспоненциальный генератор в схеме серий, согласно [1], задается в виде: $H^\varepsilon \varphi(u) = e^{-\varphi/\varepsilon} \varepsilon L e^{\varphi/\varepsilon}$.

Для асимптотически малой диффузии $L^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon \frac{1}{2} B\varphi''(u)$, $B = \sigma^2$.

Вычисляем экспоненциальный генератор $H^\varepsilon \varphi(u) = \frac{1}{2} B[\varphi'(u)]^2 + o_\varepsilon(1)$.

Следовательно, предельный экспоненциальный генератор асимптотически малой диффузии имеет вид

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2} B[\varphi'(u)]^2.$$

Далее рассмотрим процессы с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии, которые задаются генератором

$$L^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-3} \int_{\mathbb{R}} [\varphi(u+\varepsilon^2 z) - \varphi(u)] L(dz).$$

Вычислим экспоненциальный генератор $H^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}} [e^{\Delta^\varepsilon \varphi} - 1] L(dz)$,

$$\Delta^\varepsilon \varphi(u) := \varepsilon^{-1} [\varphi(u+\varepsilon^2 z) - \varphi(u)] = \varepsilon z \varphi'(u) + o(\varepsilon^2).$$

Следовательно $H^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}} [\varepsilon z \varphi'(u) + \varepsilon^2 \frac{1}{2} z^2 [\varphi'(u)]^2] L(dz) + o_\varepsilon(1)$, то есть

$$H^\varepsilon \varphi(u) = \frac{1}{2} B[\varphi'(u)]^2 + o_\varepsilon(1).$$

Так получаем результат А. Могульского [4] по методу [1].

2. Следующий этап: случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме фазового укрупнения

Случайные эволюции с независимыми приращениями задаются соотношением

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(ds; x(s)), \quad t \geq 0.$$

Марковский процесс переключений $x(t), t \geq 0$, задается генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_{\mathbb{R}} [\varphi(y) - \varphi(x)] P(x, dy), \quad x \in E.$$

Марковские процессы с независимыми приращениями $\eta(t; x), x \in E, t \geq 0$, задаются генератором

$$\Gamma(x)\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} [\varphi(u+z) - \varphi(u)] \Gamma(dz; x), \quad x \in E.$$

Случайная эволюция $\xi(t), t \geq 0$, характеризуется генератором [3]

$$L\varphi(u, x) = Q\varphi(\cdot, x) + \Gamma(x)\varphi(u, \cdot).$$

Снова возникает *проблема нормировки* (!) Теперь уже двух процессов: $\xi(t), t \geq 0$, и марковского процесса переключений $x(t), t \geq 0$. Случайные эволюции в схеме асимптотически малой диффузии рассматриваются при таком нормировании: $\xi^\varepsilon(t) = \varepsilon^2 \xi(t/\varepsilon^3), x(t/\varepsilon^2), t \geq 0$.

Основные предположения следующие:

A1: Марковский процесс $x(t), t \geq 0$, равномерно эргодический со стационарным распределением $\pi(A), A \in \varepsilon$.

A2: Условие балланса (общее):

$$b(x) := \int_{\mathbb{R}} z \Gamma(dz; x) \equiv 0.$$

Теорема 1. Проблема больших уклонений для случайной эволюции $\xi^\varepsilon(t), t \geq 0$, решается экспоненциальным генератором малой диффузии

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2} B[\varphi'(u)]^2,$$

$$B = \int_E \pi(dx) B(x), \quad B(x) = \int_{\mathbb{R}} z^2 \Gamma(dz; x).$$

Сначала мы строим асимптотическое представление для *линейного генератора марковского процесса (двух-компонентного!)*

$$L^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-2} Q\varphi(\cdot, x) + \varepsilon B(x)\varphi(u, \cdot) + o(\varepsilon).$$

Убеждаемся, что мы имеем дело со схемой асимптотически малой диффузии.

Затем наступает заключительный этап. Требуется стыковать *проблему больших уклонений с проблемой сингулярного возмущения (ПСВ)*. ПСВ для генератора Q эргодического марковского процесса, который является приводимо обратимым с одномерным подпространством нулей, задаваемым проекционным оператором Π , который реализуется стационарным распределением $\pi(dx)$ используется в асимптотическом анализе случайных эволюций в схеме усреднения, диффузионной аппроксимации, а также в схеме пуассоновской аппроксимации [3].

Такая стыковка достигается с помощью "know-how", которое я пока не аргументирую а формулирую в виде асимптотического представления в таком виде:

$$H^\varepsilon \varphi^\varepsilon = e^{-\varphi^\varepsilon/\varepsilon} \varepsilon L^\varepsilon e^{\varphi^\varepsilon/\varepsilon} = Q\varphi_1 + \frac{1}{2} B(x)[\varphi'(u)]^2 + o_\varepsilon(1).$$

Далее используется решение проблемы сингулярного возмущения

$$Q\varphi_1 + \frac{1}{2} B(x)[\varphi'(u)]^2 = \frac{1}{2} B[\varphi'(u)]^2,$$

$$B = \Pi B(x) = \int_E \pi(dx) B(x).$$

Заключительный этап состоит в записи *условия разрешимости* проблемы сингулярного возмущения, которое приводит к формуле:

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2} B[\varphi'(u)]^2.$$

Так что, предельный экспоненциальный генератор в схеме асимптотически малой диффузии для случайной эволюции с независимыми приращениями задается точно также, как и для самих процессов с независимыми приращениями. Однако теперь диффузия вычисляется с помощью усреднения по стационарному распределению переключающего марковского процесса вторых моментов случайных эволюций $B(x)$ зависящих от состояния $x \in E$ марковского процесса переключений.

Совершив инсталляцию проблемы сингулярного возмущения в анализ проблемы больших уклонений, я почувствовал восторг, который хорошо передает четверостишие Михаила Ломоносова:

Открылась бездна,
Звезд полна.
Звездам числа нет,
Бездне дна.

1. Feng J., Kurtz T. G. Large Deviation for Stochastic Processes. – Providence: AMS, 2006. – V. 131. – 404 p. 2. Freidlin M. J., Wentzel A. D. Random Perturbation of Dynamical Systems. – Berlin: Springer-Verlag, 1998. – 420 p. 3. Koroliuk V. S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. – Singapore: World Scientific Publ., 2005. – 331 p. 4. Mogulskii A. A. Large deviation for processes with independent increments // Ann. Prob. – 1993. – Vol. 21. – P. 202–215.