10. Seong-a Kim, Toshiyuki Sugava. Invariant Schwarzian derivatives of higher order // arXiv:0911.2663v1 [math.CV] 13 Nov 2009.
11. Stepanyuk G.P., Chichurin A.V. About one condition of the integrability of the linear differential equation of the fourth order // Vesnik of Brest University. Series 4: Physics. Mathematics. – 2011. – № 2. – P. 99-103.
12. Stepanyuk G.P., Chichurin A.V. About the solutions of the nonlinear differential equation of the fourth order, associated to the linear equations of the fourth order by the instrumentality of Schwarzian derivative // Collection of articles of the Intern. Conf. "Fundamental and applied problems of solid mechanics, mathematical modeling and information technologies", 12-15.08.2013), Cheboksary. Part 2, Mathematical Modeling and Information Technologies. P. 60-66.
13. Yakushkin N.A. Generalized Schwarzian derivative and its applications // Proceedings of ISA RAS, The dynamics of inhomogeneous systems, 2008, issue 12, P.139-158.

Надійшла до редколегії 16.12.13

**О.Чичурін, д-р фіз.-мат. наук, доц., проф.,
КУЛ, Люблін, Польща, СНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Г. Степанюк, ст. лаб.
СНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна**

ПРО ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ, КОЕФІЦІЄНТИ ЯКОГО ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ СИСТЕМУ ТРЬОХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

У роботі знайдено загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння четвертого порядку, коефіцієнти якого задовольняють систему трьох диференціальних рівнянь першого порядку.

**А.Чичурін, д-р физ.-мат. наук, доц., проф.
КУЛ, Люблин, Польша, ВНУ имени Леси Українки, Луцк, Украина
Г. Степанюк, ст. лаб.
ВНУ имени Леси Українки, Луцк, Украина**

ОБ ОБЩЕМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРОГО УДОВЛЕТВОРЯЮТ СИСТЕМЕ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В работе найдено общее решение линейного дифференциального уравнения четвертого порядка, коэффициенты которого удовлетворяют системе трех дифференциальных уравнений первого порядка.

УДК 517.98

**М. Городній, д-р фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
А. Сиротенко, асист.,
НТУУ "КПІ", Київ**

ІНТЕГРОВНІ ЗІ СТЕПЕНЕМ p РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ З НЕПЕРЕРВНИМ АРГУМЕНТОМ

Отримано необхідні і достатні умови, при виконанні яких різницеве рівняння з неперервним аргументом має єдиний інтегровний зі степенем p (обмежений) розв'язок для спеціального класу "вхідних" функцій.

ВСТУП. Нехай B – комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\overline{0}$, A – лінійний неперервний оператор, що діє із B в B. Покладемо при $p \in [1,\infty)$

$$l_p(B) := \left\{ \overline{x} = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset B \,\middle|\, |\overline{x}|_p := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|x_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \text{ і } l_\infty(B) := \left\{ \overline{x} = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset B \,\middle|\, |\overline{x}|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty \right\}.$$

Зафіксуємо $p \in [1,\infty]$. Відомо [1,2,4], що різницеве рівняння

$$x_{n+1} = Ax_n + y_n, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

має для довільного $\overline{y} = \{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(B)$ єдиний розв'язок $\overline{x} = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $l_p(B)$ тоді і лише тоді, коли для спектра $\sigma(A)$ оператора A виконується умова

$$\sigma(A) \cap \{ z \in C \,|\, |z| = 1 \} = \varnothing. \tag{2}$$

У випадку, коли умова (2) не виконується, у [6] отримано результат про існування та властивості розв'язків різницевого рівняння (1). Сформулюємо цей результат, оскільки він використовується в подальшому.

Нехай V_d – набір усіх таких елементів $y \in B$, що різницеве рівняння (1) має при $y_0 = y, \ y_n = \overline{0}, \ n \neq 0$, єдиний розв'язок в просторі $l_p(B)$. Цей розв'язок у подальшому позначатимемо $\overline{x}_y$.

Теорема 1 [6]. Нехай множина V_d містить хоча б один ненульовий елемент та виконуються наступні умови:

1) якщо $\{y; y_m : m \geq 1\} \subset V_d$ і $\|y_m - y\| \to 0$ при $m \to \infty$, то для розв'язків $\overline{x}_y$, $\overline{x}_{y_m}$ рівняння (1), що відповідають y та y_m, виконується $\left|\overline{x}_y - \overline{x}_{y_m}\right|_p \to 0$ при $m \to \infty$.

2) для довільної послідовності $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset V_d$, що належить $l_p(B)$, рівняння (1) має єдиний розв'язок в $l_p(B)$.

Тоді V_d – інваріантний відносно A підпростір в B і $\sigma(\tilde{A})\cap\left\{z\in C\,\big|\,|z|=1\right\}=\varnothing$ для звуження $\tilde{A}$ оператора A на V_d.

Мета цієї статті – отримати аналогічний результат для випадку аналогічного до (1) різницевого рівняння з неперервним аргументом. Про застосування різницевих рівнянь див. [1,3-5] та наведені там посилання.

ФОРМУЛЮВАННЯ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТУ. Нехай $C(\mathbb{R},B)$ – множина неперервних (за нормою) B-значних функцій, заданих на $\mathbb{R}$. Покладемо

$$L_{C,p}(B):=\left\{f\in C(\mathbb{R},B)\,\middle|\,\|f\|_p:=\left(\int_{\mathbb{R}}\|f(t)\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\},\ p\in[1,\infty);\ L_{C,\infty}(B):=\left\{f\in C(\mathbb{R},B)\,\middle|\,\|f\|_\infty:=\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|<\infty\right\};$$

$$L_{b,p}(B):=\left\{f\in L_{C,p}(B)\,\middle|\,\|f\|_{b,p}:=\|f\|_p+\|f\|_\infty<\infty\right\},\ p\in[1,\infty].$$

Неважко переконатися, що $\left(L_{b,p}(B),\|\cdot\|_{b,p}\right)$ – банахів простір, а також для кожного $\overline{y}=\left\{y_n:n\in\mathbb{Z}\right\}\in l_p(B)$ функція

$$f_{\overline{y}}(t)=\{t\}y_{[t]+1}+(1-\{t\})y_{[t]},\ t\in\mathbb{R}, \tag{3}$$

у якій $[t]$ і $\{t\}$ позначають відповідно цілу і дробову частину числа t, належить простору $L_{b,p}(B)$.

Зафіксуємо $p\in[1,\infty]$ і розглянемо різницеве рівняння з неперервним аргументом

$$x(t+1)=Ax(t)+f(t),\ t\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

де $f\in L_{b,p}(B)$ – задана функція.

Позначимо через V набір усіх таких елементів $y\in B$, що різницеве рівняння (4) має єдиний розв'язок $x_y(t),\ t\in\mathbb{R}$, у просторі $L_{b,p}(B)$, що відповідає функції $f_y(t),\ t\in\mathbb{R}$, яка будується за правилом (3) по послідовності $y_0=y,\ y_n=\overline{0},\ n\neq 0$, причому $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\|x_y(t_0+k)\right\|^p<\infty$ для кожного $t_0\in[0,1)$.

Основний результат статті містить наступна теорема.

Теорема 2. Нехай V містить хоча б один ненульовий елемент, а також виконуються такі умови:

1) якщо $\left\{u,u_m:m\geq 1\right\}\subset V$ і $\|u_m-u\|\to 0$ при $m\to\infty$, то для розв'язків x_u, x_{u_m} рівняння (4), що відповідають функціям f_u, f_{u_m}, виконується $\left\|x_{u_m}-x_u\right\|_{b,p}\to 0$ при $m\to\infty$;

2) для довільної функції $f\in L_{b,p}(B)$ такої, що $f:\mathbb{R}\to V$, рівняння (4) має єдиний розв'язок $x\in L_{b,p}(B)$ такий, що $x:\mathbb{R}\to V$.

Тоді V – інваріантний відносно A підпростір в B і для звуження $\hat{A}$ оператора A на V виконується умова

$$\sigma(\hat{A})\cap\left\{z\in C\,\big|\,|z|=1\right\}=\varnothing. \tag{5}$$

ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ. У подальшому використовуються такі леми.

Лема 1. Якщо виконується умова (2), то рівняння (4) має для довільної функції $f\in L_{b,p}(B)$ єдиний розв'язок в просторі $L_{b,p}(B)$.

Доведення. Згідно з [3, с.8] внаслідок умови (2) простір B розкладається в пряму суму підпросторів $B=B_+\dotplus B_-$, інваріантних відносно оператора A і таких, що для звужень $A_\pm$ оператора A на $B_\pm$ виконуються включення $\sigma(A_-)\subset\left\{z\in C\,\big|\,|z|<1\right\}$, $\sigma(A_+)\subset\left\{z\in C\,\big|\,|z|>1\right\}$. Тому

$$\exists m\in N\ \ \exists\delta\in(0,1)\ \ \forall n\geq m:\ \left\|A_-^n\right\|\leq\delta^n,\ \left\|A_+^{-n}\right\|\leq\delta^n. \tag{6}$$

Зафіксуємо $f\in L_{b,p}(B)$ і покладемо

$$x(t):=\sum_{n=0}^{\infty}A_-^n f(t-1-n)-\sum_{n=-\infty}^{-1}A_+^n f(t-1-n),\ t\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Внаслідок (6) кожний з доданків у (7) є неперервною на $\mathbb{R}$ функцією як рівномірно збіжний ряд із неперервних функцій, а також $\|x\|_\infty\leq\|f\|_\infty\left(\sum_{n=0}^{m-1}\left\|A_-^n\right\|+\sum_{n=-m+1}^{-1}\left\|A_+^n\right\|+\frac{2\delta^m}{1-\delta}\right)$.

Покажемо, що $\|x\|_p<\infty$. Для цього достатньо встановити, що коли $\{\beta_n:n\geq 1\}\subset\mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|<\infty$ і $h\in L_{C,p}(B)$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n h(t-n)\in L_{C,p}(B)$. Останнє виконується, оскільки $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\beta_n h(t-n)\right\|_p=\|h\|_p\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|<\infty$.

Лему 1 доведено.

Лема 2. Нехай виконується умова (2) і функція $f \in L_{b,p}(B)$ така, що додатково для довільного $t_0 \in [0,1)$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| f(t_0+k) \right\|^p < \infty . \tag{8}$$

Тоді для відповідного до $f \in L_{b,p}(B)$ єдиного в $L_{b,p}(B)$ розв'язку x рівняння (4) і для довільного $t_0 \in [0,1)$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| x(t_0+k) \right\|^p < \infty . \tag{9}$$

Доведення. Із (6) випливає, що коли покласти $a_n = \left\| A_-^n \right\|,\ n \ge 0,\quad a_n = \left\| A_+^n \right\|,\ n \le -1$, то $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty$. Тому, при фіксованому $t_0 \in [0,1)$, скориставшись зображенням (7) і нерівністю Юнга для згортки [7, c. 318], отримаємо

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| x(t_0+k) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| \left\| f(t_0-1+k-n) \right\| \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} = |g*h|_p \le |g|_1 |h|_p < \infty .$$

Лему 2 доведено.

Лема 3. Нехай для довільної функції $f \in L_{b,p}(B)$, для якої виконується умова (8), існує єдиний розв'язок рівняння (4), що належить простору $L_{b,p}(B)$. Тоді рівняння (1) має для довільного $\overline{y} = \{ y_n : n \in \mathbb{Z} \} \in l_p(B)$ єдиний розв'язок $\overline{x}$ у просторі $l_p(B)$.

Доведення. Зафіксуємо $\overline{y} = \{ y_n : n \in \mathbb{Z} \} \in l_p(B)$. Для побудованої згідно з (3) функції $f_{\overline{y}}$ виконується умова (8), а отже, існує єдиний в $L_{b,p}(B)$ розв'язок x рівняння (4), який внаслідок леми 2 задовольняє умову (9). Зокрема, $x(n+1) = Ax(n) + f(n) = Ax(n) + y_n$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$, а отже, $\{ x(n) : n \in \mathbb{Z} \}$ – розв'язок рівняння (1) в $l_p(B)$.

Якщо від супротивного рівняння (2) має два різні розв'язки в $l_p(B)$, то існує ненульова послідовність $\{ u_n : n \in \mathbb{Z} \} \in l_p(B)$ така, що

$$u_{n+1} = Au_n,\ n \in \mathbb{Z} . \tag{10}$$

Розглянемо функцію $u(t) = \{t\} u_{[t]+1} + (1-\{t\}) u_{[t]},\ t \in \mathbb{R}.$ Це ще один розв'язок однорідного рівняння

$$x(t+1) = Ax(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

з простору $L_{b,p}(B)$. Маємо протиріччя.

Лему 3 доведено.

Лема 4. Нехай V містить хоча б один ненульовий елемент. Тоді V – лінійний многовид і інваріантна відносно A множина.

Доведення. Оскільки $V \ne \varnothing$ і при $y \in V$ рівняння (4) має єдиний в $L_{b,p}(B)$ розв'язок $x_y(t),\ t \in \mathbb{R}$, що відповідає $f_y(t),\ t \in \mathbb{R}$, то $\overline{0} \in V$. Справді, інакше знайдеться ненульова функція $u \in L_{b,p}(B)$, така, що $u(t+1) = Au(t),\ t \in \mathbb{R}$, а отже, $x_y + u$ – теж розв'язок різницевого рівняння (4), що відповідає функції f_y. Останнє суперечить єдиності розв'язку.

Враховуючи, що $\overline{0} \in V$, легко переконатися, що V – лінійний многовид. Також при $y \in V$, подіявши на рівності $x(t+1) = Ax(t) + f_y(t),\ t \in \mathbb{R}$, оператором A, дістанемо, що $Ay \in V$.

Лему 4 доведено.

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 2. Спочатку переконаємося, що $V = V_d$.

1) $p = \infty$. Нехай $y \in V$, x – обмежений розв'язок рівняння (4), що відповідає функції f_y. Тоді $x(1) = Ax(0) + y$ і $x(n+1) = Ax(n)$ для кожного $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Отже, $\{ x_n = x(n) : n \in \mathbb{Z} \}$ – обмежений розв'язок рівняння (1), що відповідає елементу y. Нехай, від супротивного, рівняння (1) має 2 різні обмежені розв'язки, відповідні до y. Тоді існує ненульова обмежена послідовність $\overline{u} = \{ u_n : n \in \mathbb{Z} \}$, що задовольняє рівняння (10).

Розглянемо функцію $u(t) = \{t\} u_{[t]+1} + (1-\{t\}) u_{[t]},\ t \in \mathbb{R}$. Вона неперервна, обмежена, ненульова, а також для довільного $t \in \mathbb{R}$

$$Au(t) = \{t\} Au_{[t]+1} + (1-\{t\}) Au_{[t]} = \{t\} u_{[t]+2} + (1-\{t\}) u_{[t]+1} = u(t+1) ,$$

тобто рівняння (11) має ненульовий обмежений розв'язок, що суперечить тому, що $\overline{0} \in V$. Отже, $y \in V_d$.

Нехай тепер $y \in V_d$, $\{ x_n : n \in \mathbb{Z} \}$ – обмежений розв'язок рівняння (1), що відповідає елементу y. Тоді функція

$$x_y(t) = \{t\} x_{[t]+1} + (1-\{t\}) x_{[t]},\ t \in \mathbb{R} , \tag{12}$$

неперервна, обмежена. Також неважко переконатися, що x_y – розв'язок рівняння (4), що відповідає функції f_y. Якщо, від супротивного, рівняння (4) має два різні неперервні обмежені розв'язки, що відповідають функції f_y, то

існує ненульовий неперервний обмежений розв'язок u рівняння (11). Тоді існує $t_0 \in \mathbb{R}$, для якого $u(t_0) \neq \overline{0}$. Тому $u(t_0+n+1) = Au(t_0+n)$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$, тобто $\{u(t_0+n) : n \in \mathbb{Z}\}$ – ненульовий обмежений розв'язок рівняння (1), що суперечить тому, що $\overline{0} \in V_d$. Отже, $y \in V$. Таким чином, $V = V_d$.

2) $p \in [1,\infty)$. Нехай $y \in V$, x – розв'язок рівняння (4) у просторі $L_{b,p}(B)$, який відповідає функції f_y. Тоді $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|x(k)\|^p < \infty$, а отже $\{x(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ – розв'язок рівняння (1), що відповідає y і належить простору $l_p(B)$. Якщо (1) має два різні розв'язки в $l_p(B)$, то існує ненульова послідовність $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(B)$, що задовольняє рівняння (10). Тоді функція $u(t) = \{t\}u_{[t]+1} + (1-\{t\})u_{[t]},\ t \in \mathbb{R}$, є неперевним обмеженим розв'язком рівняння (4), а також

$$\int_{\mathbb{R}} \|u(t)\|^p \, dt \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_k^{k+1} \left(\|u_k\| + \|u_{k+1}\|\right)^p dt \right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\|u_k\| + \|u_{k+1}\|\right)^p < \infty \tag{13}$$

і для довільного $t_0 \in [0,1)$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|u(t_0+k)\|^p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| \{t_0\}u_{[t_0]+k+1} + (1-\{t_0\})u_{[t_0]+k} \right\|^p \le \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(\|u_l\| + \|u_{l+1}\|\right)^p < \infty . \tag{14}$$

Отже, однорідне рівняння (11) має ненульовий розв'язок в $L_{b,p}(B)$, для якого виконується умова (9). Маємо протиріччя. Таким чином, $y \in V_d$.

Нехай тепер $y \in V_d$, $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ – розв'язок рівняння (1), що відповідає елементу y. Розглянемо функцію $x_y(t)$, що задана за допомогою формули (12). Тоді аналогічно (13,14) перевіряємо, що $\int_{\mathbb{R}} \|x_y(t)\|^p \, dt < \infty$ і для функції x_y виконується умова (9). Тому ця функція є розв'язком рівняння (4) в просторі $L_{b,p}(B)$, для якого виконується умова (9). Нехай, від супротивного, існують два такі розв'язки. Тоді рівняння (11) має ненульовий розв'язок $u(t),\ t \in \mathbb{R}$, в $L_{b,p}(B)$, що задовольняє умову (9). Отже, існує таке $t_0 \in \mathbb{R}$, що $u(t_0) \neq \overline{0}$, $u(t_0+k+1) = Au(t_0+k)$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$, а також $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|u(t_0+k)\|^p < \infty$. Це означає, що рівняння (10) має ненульовий розв'язок в $l_p(B)$. Маємо протиріччя. Отже, $V = V_d$.

Покажемо тепер, що при виконанні умов 1), 2) теореми 2 виконуються умови 1), 2) теореми 1. Нехай $\{u, u_m : m \ge 1\} \subset V_d$, $\|u_m - u\| \to 0$ при $m \to \infty$. Нехай $\overline{x}(m) = \{x_n^m : n \in \mathbb{Z}\}, m \ge 1$, $\overline{x} = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ – єдині розв'язки рівняння (1) у просторі $l_p(B)$, що відповідають елементам u_m та u. Тоді побудовані аналогічно до (12) функції x_{u_m}, x_u є розв'язками рівняння (4) у просторі $L_{b,p}(B)$, що відповідають f_{u_m} та f_u. Тому $\left|\overline{x}(m) - \overline{x}\right|_p \le \left\|x_{u_m} - x_u\right\|_{b,p} \to 0$, $m \to \infty$, а отже, для V_d виконується умова 1) теореми 1.

Зафіксуємо тепер $\overline{y} = \{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset V_d$, $\overline{y} \in l_p(B)$. Побудуємо функцію $f_{\overline{y}}$ за правилом (3). Ця функція належить простору $L_{b,p}(B)$ і набуває значення в $V = V_d$. Згідно умови 2) теореми 2 існує єдиний розв'язок x рівняння (4) у просторі $L_{b,p}(B)$, що відповідає функції $f_{\overline{y}}$. Тоді $x(n+1) = Ax(n) + f_{\overline{y}}(n) = Ax(n) + y_n$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$, тобто $\{x_n = x(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ – розв'язок рівняння (1) у просторі $l_p(B)$, який відповідає елементу $\overline{y}$, і для цього розв'язку маємо $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset V_d$.

Якщо, від супротивного, цей розв'язок не єдиний, то існує ненульова послідовність $\{u_m : m \in \mathbb{Z}\} \in l_p(B)$, яка є розв'язком рівняння (10). Це суперечить тому, що $\overline{0} \in V_d$.

Отже, умова 2) теореми 1 теж виконується. Оскільки $V = V_d$, то з теореми 1 випливає, що виконується твердження теореми 2.

Зауваження 1. Якщо V – інваріантний відносно оператора A підпростір в B і для звуження $\hat{A}$ оператора A на V виконується умова (5), то внаслідок леми 1 виконується умова 2) теореми 2.

Зауваження 2. Внаслідок теореми 2 правильне обернене до леми 1 твердження.

ВИСНОВКИ. Для різницевого рівняння $x(t+1) = Ax(t) + f(t),\ t \in \mathbb{R}$, доведено теорему про існування і єдиність у просторі $L_{b,p}(B)$ розв'язку у випадку, коли $\sigma(A) \cap \left\{z \in C \,\middle|\, |z| = 1\right\} \neq \varnothing$, де A – лінійний неперервний оператор, що діє з бананового простору B в B.

Список використаних джерел

1. Баскаков А.Г., Пастухов А.И. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 2001. – 42, №6. – С.1231 – 1243.
2. Городній М.Ф. l_p -розвязки одного різницевого рівняння в банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, №3. – С. 425-430.
3. Дороговцев А.Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – К.: Вища шк,, 1992. – 319 с.
4. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – К.: Наук. думка, 1972. – 248 с.
5. Пелюх Г.П. О непрерывных и ограниченных на всей вещественной оси решениях систем нелинейных разностных уравнений и их свойствах // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, №12. – С. 1636-1645.
6. Сиротенко А.В. Обмежені та сумовні зі степенем p розв'язки різницевого рівняння з цілочисельним аргументом // Вісник Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – №4. – С. 68-72.
7. Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций – М.: Мир, 1973. – 342 с.

Надійшла до редколегії 25.02.14

М. Городний, д-р физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев
А. Сиротенко, асист.
НТУУ "КПИ", Киев

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СО СТЕПЕНЬЮ p РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНЫМ АРГУМЕНТОМ

Получены необходимые и достаточные условия, при выолнении которых разностное уравнение с непрерывным аргументом имеет единственное интегрируемое со степенью p (ограниченное) решение для специального класса "входных" функций.

M. Gorodnii, Full Doctor
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv
A. Syrotenko, PhD graduate
National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv

p -INTEGRABLE SOLUTIONS FOR DIFFERENCE EQUATION WITH CONTINUOUS ARGUMENT

We consider linear difference equation with continuous argument in a complex Banach space. For input p –integrable function from a some class, we obtain necessary and sufficient conditions, under which this equation has a unique p -integrable solution.

УДК 517.946

І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, Т. Пилипюк, викладач
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ НА КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ СЕГМЕНТІ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

Методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лєбєдєва) зі спектральним параметром одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для системи рівнянь параболічного типу на кусково-однорідному сегменті $[R_0, R]$ з м'якими межами. Моделювання еволюційного процесу здійснено методом гібридного диференціального оператора Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лєбєдєва).

ВСТУП. Параболічні крайові задачі в однорідних середовищах (однозв'язних областях) становлять значний теоретичний та практичний інтерес, оскільки знаходять застосування при математичному моделюванні різноманітних процесів і явищ природознавства, техніки, технологій [1, 14].

В останні десятиліття значна увага приділяється також дослідженню параболічних крайових задач в неоднорідних середовищах [3, 15]. У цьому випадку коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими. Для таких задач класичний метод відокремлення змінних [17] застосувати важко. Але для досить широкого класу подібних задач при побудові їх точних розв'язків можливе ефективне використання методу гібридних інтегральних перетворень [2, 6, 7, 10].

У теоретичних дослідженнях і прикладних задачах найбільш часто вживаними є диференціальні оператори 2-го порядку, зокрема, диференціальний оператор Фур'є [16]

$$F = \frac{d^2}{dr^2} \ ,$$

диференціальний оператор Ейлера [9]

$$B_\alpha^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1) r \frac{d}{dr} + \alpha^2 \ ,$$

диференціальний оператор Бесселя [12]

$$B_{\nu,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2-\alpha^2}{r^2} \ ,$$

диференціальний оператор Лежандра [5]