

Список використаних джерел

1. Баскаков А.Г., Пастухов А.И. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 2001. – 42, №6. – С. 1231 – 1243.
2. Городний М.Ф. l_p -розв'язки одного різницевого рівняння в банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, №3. – С. 425-430.
3. Дороговцев А.Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – К.: Вища шк., 1992. – 319 с.
4. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – К.: Наук. думка, 1972. – 248 с.
5. Пелюх Г.П. О непрерывных и ограниченных на всей вещественной оси решениях систем нелинейных разностных уравнений и их свойствах // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, №12. – С. 1636-1645.
6. Сиротенко А.В. Обмежені та сумовні зі степенем p розв'язки різницевого рівняння з цілочисельним аргументом // Вісник Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – №4. – С. 68-72.
7. Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций – М.: Мир, 1973. – 342 с.

Надійшла до редколегії 25.02.14

М. Городний, д-р физ.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
А. Сиротенко, асист.
НТУУ "КПІ", Київ

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СО СТЕПЕНЬЮ p РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНЫМ АРГУМЕНТОМ

Получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых разностное уравнение с непрерывным аргументом имеет единственное интегрируемое со степенью p (ограниченное) решение для специального класса "входных" функций.

M. Gorodnii, Full Doctor
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv
A. Syrotenko, PhD graduate
National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv

p -INTEGRABLE SOLUTIONS FOR DIFFERENCE EQUATION WITH CONTINUOUS ARGUMENT

We consider linear difference equation with continuous argument in a complex Banach space. For input p -integrable function from a some class, we obtain necessary and sufficient conditions, under which this equation has a unique p -integrable solution.

УДК 517.946

І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, Т. Пилипюк, викладач
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ЗОБРАЖЕНИЕ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ НА КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ СЕГМЕНТІ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

Методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лебедєва) зі спектральним параметром одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для системи рівнянь параболічного типу на кусково-однорідному сегменті $[R_0, R]$ з м'якими межами. Моделювання еволюційного процесу здійснено методом гібридного диференціального оператора Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лебедєва).

ВСТУП. Параболічні крайові задачі в однорідних середовищах (однорівнях областях) становлять значний теоретичний та практичний інтерес, оскільки знаходять застосування при математичному моделюванні різноманітних процесів і явищ природознавства, техніки, технологій [1, 14].

В останні десятиліття значна увага приділяється також дослідженню параболічних крайових задач в неоднорідних середовищах [3, 15]. У цьому випадку коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими. Для таких задач класичний метод відокремлення змінних [17] застосувати важко. Але для досить широкого класу подібних задач при побудові їх точних розв'язків можливе ефективне використання методу гібридних інтегральних перетворень [2, 6, 7, 10].

У теоретичних дослідженнях і прикладних задачах найбільш часто вживаними є диференціальні оператори 2-го порядку, зокрема, диференціальний оператор Фур'є [16]

$$F = \frac{d^2}{dr^2},$$

диференціальний оператор Ейлера [9]

$$B_{\alpha}^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r \frac{d}{dr} + \alpha^2,$$

диференціальний оператор Бесселя [12]

$$B_{v,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha + 1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{v^2 - \alpha^2}{r^2},$$

диференціальний оператор Лежандра [5]

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{sh^2 r},$$

узагальнений диференціальний оператор Лежандра [5]

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1^2}{1 - chr} + \frac{\mu_2^2}{1 + chr} \right), \quad \mu = (\mu_1, \mu_2)$$

та диференціальний оператор Конторовича-Лебедева [11]

$$B_{\alpha} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r \frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2.$$

Якщо $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [18], а L_j – один із перелічених диференціальних операторів, то завжди можна утворити гібридний диференціальний оператор, що відповідає геометричній структурі кусково-однорідного середовища.

Наприклад, для кусково-однорідного проміжку $(R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R)$ можна утворити гібридний диференціальний оператор

$$M = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2 L_1 + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 L_2 + \theta(r - R_2)\theta(R - r)a_3^2 L_3; \quad a_j^2 = \text{const}.$$

При цьому очевидно, що оператор L_1 визначений на проміжку (R_0, R_1) , оператор L_2 – на проміжку (R_1, R_2) , а оператор L_3 – на проміжку (R_2, R) .

Зрозуміло, що змінивши порядок сполучення операторів L_1, L_2, L_3 ми одержимо інший гібридний диференціальний оператор.

У свою чергу, кожний гібридний диференціальний оператор породжує відповідне гібридне інтегральне перетворення [4], яке можна застосувати для побудови точних аналітичних розв'язків лінійних крайових задач математичної фізики в кусково-однорідних середовищах.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглядається задача про структуру обмеженого на множині $D_2 = \{(t, r) : t \in (0; +\infty); r \in I_2 = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R); R_0 > 0, R < +\infty\}$ розв'язку системи еволюційних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу [17]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1(t, r) - a_1^2 B_{\alpha_1} [u_1] &= f_1(t, r), \quad r \in (R_0, R_1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2(t, r) - a_2^2 \Lambda_{(\mu)} [u_2] &= f_2(t, r), \quad r \in (R_1, R_2), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3(t, r) - a_3^2 B_{\alpha_2} [u_3] &= f_3(t, r), \quad r \in (R_2, R) \end{aligned} \quad (1)$$

з нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$L_{11}^0 [u_1(t, r)]|_{r=R_0} = g_0(t), \quad L_{22}^3 [u_3(t, r)]|_{r=R} = g_R(t) \quad (2)$$

та умовами спряження

$$(L_{j1}^k [u_k(t, r)] - L_{j2}^k [u_{k+1}(t, r)])|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); \quad j, k = 1, 2. \quad (3)$$

У системі (1) беруть участь диференціальні оператори Бесселя $B_{\alpha_1} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha_1 + 1)r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} - (\nu^2 - \alpha_1^2)r^{-2}$, Лежандра $\Lambda_{(\mu)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + cthr \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} (\mu_1^2 (1 - chr)^{-1} + \mu_2^2 (1 + chr)^{-1})$ та (Конторовича-Лебедева) $B_{\alpha_2} = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha_2 + 1)r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha_2^2 - \lambda^2 r^2$; $2\alpha_j + > 0$, $\nu \geq \alpha_1$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$.

У рівностях (2) та (3) беруть участь диференціальні оператори

$$\begin{aligned} L_{11}^0 &= \left(\alpha_{11}^0 + \delta_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t}; \quad L_{22}^3 = \left(\alpha_{22}^3 + \delta_{22}^3 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^3 + \gamma_{22}^3 \frac{\partial}{\partial t}, \\ L_{jm}^k &= \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}; \quad j, m, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Умови на коефіцієнти: $\alpha_{11}^0 \leq 0$, $\beta_{11}^0 \geq 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0$; $\delta_{11}^0 \geq 0$, $\gamma_{11}^0 \geq 0$; $\alpha_{22}^3 \geq 0$, $\beta_{22}^3 \geq 0$, $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0$; $\delta_{22}^3 \geq 0$, $\gamma_{22}^3 \geq 0$; $\alpha_{jm}^k \geq 0$, $\delta_{jm}^k \geq 0$, $\beta_{jm}^k \geq 0$, $\gamma_{jm}^k \geq 0$; $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$; $c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0$; $c_{j2,k} \equiv \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0$,

$$\alpha_{11}^k \gamma_{21}^k - \alpha_{21}^k \gamma_{11}^k = \beta_{11}^k \delta_{21}^k - \beta_{21}^k \delta_{11}^k, \quad \alpha_{12}^k \gamma_{22}^k - \alpha_{22}^k \gamma_{12}^k = \beta_{12}^k \delta_{22}^k - \beta_{22}^k \delta_{12}^k. \quad (5)$$

Зауваження 1. Наявність оператора диференціювання за часом $\frac{\partial}{\partial t}$ в крайових умовах у точках $r = R_0$, $r = R$ та в умовах спряження ми інтерпретуємо, виходячи з фізичних міркувань про теплові хвилі, як м'якість межі середовища щодо відбиття хвиль.

Зауваження 2. У випадку, коли межі середовища жорсткі щодо відбиття хвиль ($\delta_{11}^0 = 0$; $\gamma_{11}^0 = 0$; $\delta_{22}^3 = 0$; $\gamma_{22}^3 = 0$; $\delta_{jm}^k = 0$; $\gamma_{jm}^k = 0$), маємо мішану задачу з класичними крайовими умовами та класичними умовами спряження, розв'язок якої одержується з розв'язку задачі (1)-(3) як частковий випадок.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Розв'язок мішаної параболічної задачі спряження (1)-(3) побудуємо методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лебєдєва) зі спектральним параметром у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна).

Гібридне інтегральне перетворення Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лебєдєва) зі спектральним параметром

Розглянемо на множині I_2 гібридний диференціальний оператор (ГДО)

$$M_{v,(\alpha)}^{(\mu)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2 B_{v,\alpha_1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 \Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_2)(R - r)a_3^2 B_{\alpha_2}, \quad (6)$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда, $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Означення. Областю задання ГДО $M_{v,(\alpha)}^{(\mu)}$ назвемо множину G функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

- 1) функція $f(r) = \{B_{v,\alpha_1}[g_1(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]; B_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2 ;
- 2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0 \right) g_1(r) \Big|_{r=R_0} = 0, \quad \left(\tilde{\alpha}_{22}^3 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3 \right) g_3(r) \Big|_{r=R} = 0 \quad (7)$$

та умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k \right) g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k \right) g_{k+1}(r) \right] \Big|_{r=R_k} = 0, \quad j, k = 1, 2. \quad (8)$$

У рівностях (7) та (8) беруть участь величини:

$$\tilde{\alpha}_{jk}^m = \alpha_{jk}^m - (\beta^2 + \gamma^2) \delta_{jk}^m, \quad \tilde{\beta}_{jk}^m = \beta_{jk}^m - (\beta^2 + \gamma^2) \gamma_{jk}^m, \quad j, k = 1, 2, \quad m = \overline{0, 3}; \quad \gamma^2 = \max\{\gamma_1^2; \gamma_2^2; \gamma_3^2\}$$

$\beta \in (0, +\infty)$ – спектральний параметр.

Зауважимо, що для двох елементів $u \in G$ та $v \in G$ з умов спряження (8) випливає базова тотожність:

$$(u'_k v_k - u_k v'_k) \Big|_{r=R_k} = \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}} [u'_{k+1}(r) v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r) v'_{k+1}(r)] \Big|_{r=R_k}. \quad (9)$$

Якщо для функції $u(r) = \{u_1(r); u_2(r); u_3(r)\}$ умови спряження будуть неоднорідними, тобто

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k \right) u_k(r) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k \right) u_{k+1}(r) \right] \Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}, \quad j, k = 1, 2, \quad (10)$$

то базова тотожність (9) набуває вигляду:

$$(u'_k v_k - u_k v'_k) \Big|_{r=R_k} = \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}} [u'_{k+1}(r) v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r) v'_{k+1}(r)] \Big|_{r=R_k} + \\ + c_{11,k}^{-1} [Z_{v,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta) \omega_{2k} - Z_{v,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta) \omega_{1k}], \quad k = 1, 2. \quad (11)$$

Ми прийняли до уваги, що $v_j(r)$ задовольняють однорідні умови спряження (8). У рівності (11) беруть участь функції

$$Z_{v,(\alpha);i2}^{(\mu),k}(\beta) = \left(\tilde{\alpha}_{i2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{i2}^k \right) v_{k+1}(r) \Big|_{r=R_k}; \quad i, k = 1, 2.$$

Введемо до розгляду величини

$$a_1^2 \sigma_1 = \frac{c_{11,1} c_{11,2} sh R_1 R_2^{2\alpha_2+1}}{c_{21,1} c_{21,2} sh R_2 R_1^{2\alpha_1+1}}, \quad a_2^2 \sigma_2 = \frac{c_{11,2} R_2^{2\alpha_2+1}}{c_{21,2} sh R_2}, \quad a_3^2 \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 sh r + \theta(r - R_2)\theta(R - r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}$$

та скалярний добуток

$$\begin{aligned} (u(r), v(r)) &= \int_{R_0}^R u(r)v(r)\sigma(r)dr = \int_{R_0}^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr + \\ &+ \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r dr + \int_{R_2}^R u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1} dr. \end{aligned} \quad (12)$$

Безпосередньо можна перекоонатися у справедливості рівності

$$\left(M_{v,(\alpha)}^{(\mu)}[u(r)], v(r) \right) = \left(u(r), M_{v,(\alpha)}^{(\mu)}[v(r)] \right), \quad (13)$$

тобто ГДО $M_{v,(\alpha)}^{(\mu)}$ – самоспряжений.

Припустимо, що спектральний параметр (власне число) β і йому відповідає власна (спектральна) функція

$$V_{v,(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta) = \sum_{i=1}^3 \theta(r - R_{i-1})\theta(R_i - r)V_{v,(\alpha);i}^{(\mu)}(r, \beta), \quad R_3 \equiv R. \quad (14)$$

Для знаходження власних елементів ГДО $M_{v,(\alpha)}^{(\mu)}$ розглянемо спектральну задачу Штурма-Ліувілля: побудувати обмежений на множині I_2 розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя, Лежандра та (Конторовича-Лебедєва) для звичайних функцій

$$\begin{aligned} (B_{v,\alpha_1} + b_1^2)V_{v,(\alpha);1}^{(\mu)}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (R_0, R_1), \\ (\Lambda_{(\mu)} + b_2^2)V_{v,(\alpha);2}^{(\mu)}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (R_1, R_2), \\ (B_{\alpha_2} + b_3^2)V_{v,(\alpha);3}^{(\mu)}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (R_2, R) \end{aligned} \quad (15)$$

з однорідними крайовими умовами (7) та умовами спряження (8); $b_j = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2 \geq 0$, $j = \overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{v,\alpha_1} + b_1^2)v = 0$ утворюють дійсні функції Бесселя першого роду $J_{v,\alpha_1}(b_1 r)$ та другого роду $N_{v,\alpha_1}(b_1 r)$ [12]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2)v = 0$ утворюють дійсні узагальнені приєднані функції Лежандра $A_{v_2}^{(\mu)}(chr)$ та $B_{v_2}^{(\mu)}(chr)$, $v_2^* = -1/2 + ib_2$; [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння (Конторовича-Лебедєва) $(B_{\alpha_2} + b_3^2)v = 0$ утворюють функції $C_{\alpha_2}(\lambda r, b_3)$ та $D_{\alpha_2}(\lambda r, b_3)$ [11].

Будемо відшукувати функції $V_{v,(\alpha);j}^{(\mu)}(r, \beta)$ як лінійну комбінацію фундаментальної системи розв'язків:

$$\begin{aligned} V_{v,(\alpha);1}^{(\mu)}(r, \beta) &= A_1 J_{v,\alpha_1}(b_1 r) + B_1 N_{v,\alpha_1}(b_1 r), \quad r \in (R_0, R_1), \\ V_{v,(\alpha);2}^{(\mu)}(r, \beta) &= A_2 A_{v_2}^{(\mu)}(chr) + B_2 B_{v_2}^{(\mu)}(chr), \quad r \in (R_1, R_2), \\ V_{v,(\alpha);3}^{(\mu)}(r, \beta) &= A_3 C_{\alpha_2}(\lambda r, b_3) + B_3 D_{\alpha_2}(\lambda r, b_3), \quad r \in (R_2, R). \end{aligned} \quad (16)$$

Крайові умови (7) та умови спряження (8) для визначення шести величин A_j , B_j ($j = \overline{1,3}$) дають однорідну алгебраїчну систему з шести рівнянь:

$$\begin{aligned} u_{v,\alpha_1;11}^{01}(b_1 R_0)A_1 + u_{v,\alpha_1;11}^{02}(b_1 R_0)B_1 &= 0; \\ u_{v,\alpha_1;j1}^{11}(b_1 R_1)A_1 + u_{v,\alpha_1;j1}^{12}(b_1 R_1)B_1 - Y_{v_2;j2}^{(\mu),11}(chR_1)A_2 - Y_{v_2;j2}^{(\mu),12}(chR_1)B_2 &= 0, \quad j = 1, 2; \\ Y_{v_2;j1}^{(\mu),21}(chR_2)A_2 + Y_{v_2;j1}^{(\mu),22}(chR_2)B_2 - X_{\alpha_2;j2}^{21}(\lambda R_2, b_3)A_3 - X_{\alpha_2;j2}^{22}(\lambda R_2, b_3)B_3 &= 0; \\ X_{\alpha_2;22}^{31}(\lambda R_3, b_3)A_3 + X_{\alpha_2;22}^{32}(\lambda R_3, b_3)B_3 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Введемо до розгляду функції:

$$\begin{aligned} \delta_{v,\alpha_1;jk}(b_1 R_0, b_1 R_1) &= u_{v,\alpha_1;11}^{01}(b_1 R_0)u_{v,\alpha_1;j1}^{12}(b_1 R_1) - u_{v,\alpha_1;11}^{02}(b_1 R_0)u_{v,\alpha_1;j1}^{11}(b_1 R_1), \quad j = 1, 2; \\ \delta_{v_2;jk}^{(\mu)}(chR_1, chR_2) &= Y_{v_2;j2}^{(\mu),11}(chR_1)Y_{v_2;k1}^{(\mu),22}(chR_2) - Y_{v_2;j2}^{(\mu),12}(chR_1)Y_{v_2;k1}^{(\mu),21}(chR_2); \quad j, k = 1, 2; \\ \delta_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3) &= X_{\alpha_2;j2}^{21}(\lambda R_2, b_3)X_{\alpha_2;22}^{32}(\lambda R_3, b_3) - X_{\alpha_2;j2}^{22}(\lambda R_2, b_3)X_{\alpha_2;22}^{31}(\lambda R_3, b_3); \\ a_{v,\alpha_1;j}^{(\mu)}(\beta) &= \delta_{v,\alpha_1;11}(b_1 R_0, b_1 R_1)\delta_{v_2;j}^{(\mu)}(chR_1, chR_2) - \delta_{v,\alpha_1;21}(b_1 R_0, b_1 R_1)\delta_{v_2;1j}^{(\mu)}(chR_1, chR_2); \\ b_{\alpha_2;j}^{(\mu)}(\beta) &= \delta_{\alpha_2;22}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3)\delta_{v_2;j1}^{(\mu)}(chR_1, chR_2) - \delta_{\alpha_2;12}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3)\delta_{v_2;j2}^{(\mu)}(chR_1, chR_2). \end{aligned}$$

Алгебраїчна система (17) має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю [8]:

$$\delta_{v,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta) \equiv a_{v,\alpha_1;1}^{(\mu)}(\beta) \delta_{\alpha_2;22}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3) - a_{v,\alpha_1;2}^{(\mu)}(\beta) \delta_{\alpha_2;12}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3) = \\ = \delta_{v,\alpha_1;11}(b_1 R_0, b_1 R_1) b_{\alpha_2;2}^{(\mu)}(\beta) - \delta_{v,\alpha_1;21}(b_1 R_0, b_1 R_1) b_{\alpha_2;1}^{(\mu)}(\beta) = 0. \quad (18)$$

Таким чином, ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M_{v,(\alpha)}^{(\mu)}$.

Підставимо в систему (17) $\beta = \beta_n$ ($b_j(\beta_n) = b_{jn}$) й відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності.

Припустимо, що $A_1 = -A_0 u_{v,\alpha_1;11}^{02}(b_{1n} R_0)$, $B_1 = A_0 u_{v,\alpha_1;11}^{01}(b_{1n} R_0)$, де $A_0 \neq 0$ підлягає визначенню. Перше рівняння системи стає тотожністю, а для визначення величин A_2 , B_2 одержуємо алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$Y_{v_{2n};j2}^{(\mu);11}(chR_1)A_2 + Y_{v_{2n};j2}^{(\mu);12}(chR_1)B_2 = A_0 \delta_{v,\alpha_1;j1}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1); \quad j = 1, 2 \quad (19)$$

Визначник алгебраїчної системи (19) обчислюється безпосередньо:

$$Y_{v_{2n};12}^{(\mu);11}(chR_1)Y_{v_{2n};22}^{(\mu);12}(chR_1) - Y_{v_{2n};22}^{(\mu);11}(chR_1)Y_{v_{2n};12}^{(\mu);12}(chR_1) = \frac{c_{21,1}}{S_{(\mu)}(b_{2n})shR_1} \equiv q_{(\mu)}(\beta_n) \neq 0, \quad v_{2n}^* = -1/2 + ib_{2n}.$$

Отже, алгебраїчна система (19) має єдиний розв'язок [8]:

$$A_2 = \frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta_n)} = \left[\delta_{v,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y_{v_{2n};22}^{(\mu);12}(chR_1) - \delta_{v,\alpha_1;21}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y_{v_{2n};12}^{(\mu);12}(chR_1) \right], \quad (20)$$

$$B_2 = \frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta_n)} = \left[\delta_{v,\alpha_1;21}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y_{v_{2n};12}^{(\mu);11}(chR_1) - \delta_{v,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y_{v_{2n};22}^{(\mu);11}(chR_1) \right].$$

При відомих A_2 , B_2 для визначення A_3 , B_3 маємо алгебраїчну систему рівнянь

$$X_{\alpha_2;j2}^{21}(\lambda R_2, b_{3n})A_3 + X_{\alpha_2;j2}^{22}(\lambda R_2, b_{3n})B_3 = -A_0 q_{(\mu)}^{-1} a_{v,\alpha_1;j1}^{(\mu)}(\beta_n), \quad j = 1, 2. \quad (21)$$

Визначник алгебраїчної системи (21) обчислюється безпосередньо:

$$X_{\alpha_2;12}^{21}(\lambda R_2, b_{3n})X_{\alpha_2;22}^{22}(\lambda R_2, b_{3n}) - X_{\alpha_2;22}^{21}(\lambda R_2, b_{3n})X_{\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2, b_{3n}) = \\ = -c_{21,2}sh(\pi b_{3n}) \left(\pi \lambda^{2\alpha_2} R_2^{2\alpha_2+1} \right)^{-1} \equiv -q_{\alpha_2}(\beta_n) \neq 0.$$

Отже, алгебраїчна система (21) має єдиний розв'язок [8]:

$$A_0 = q_{\alpha_2}(\beta_n) q_{(\mu)}(\beta_n); \quad B_3 = \omega_{v,(\alpha);1}^{(\mu)}(\beta_n), \quad A_3 = -\omega_{v,(\alpha);2}^{(\mu)}(\beta_n), \quad (22)$$

$$\omega_{v,(\alpha);j}^{(\mu)}(\beta_n) = a_{v,\alpha_1;2}^{(\mu)}(\beta_n) X_{\alpha_2;12}^{2j}(\lambda R_2, b_{3n}) - a_{v,\alpha_1;1}^{(\mu)}(\beta_n) X_{\alpha_2;22}^{2j}(\lambda R_2, b_{3n}); \quad j = 1, 2.$$

Підставимо визначені формулами (20) та (22) величини A_j й B_j ($j = \overline{1,3}$) у рівності (16). Отримаємо функції:

$$V_{v,(\alpha);1}^{(\mu)}(r, \beta_n) = q_{\alpha_2}(\beta_n) q_{(\mu)}(\beta_n) [u_{v,\alpha_1;11}^{01}(b_{1n} R_0) N_{v,\alpha_1}(b_{1n} r) - u_{v,\alpha_1;11}^{02}(b_{1n} R_0) J_{v,\alpha_1}(b_{1n} r)]; \\ V_{v,(\alpha);2}^{(\mu)}(r, \beta_n) = q_{\alpha_2}(\beta_n) [\delta_{v,\alpha_1;21}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) f_{v_{2n};12}^{(\mu);1}(chR_1, chr) - \delta_{v,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) f_{v_{2n};22}^{(\mu);1}(chR_1, chr)]; \quad (23)$$

$$V_{v,(\alpha);3}^{(\mu)}(r, \beta_n) = \omega_{v,(\alpha);1}^{(\mu)}(\beta_n) D_{\alpha_2}(\lambda r, b_{3n}) - \omega_{v,(\alpha);2}^{(\mu)}(\beta_n) C_{\alpha_2}(\lambda r, b_{3n}).$$

Згідно формули (14) власна функція $V_{v,(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta_n)$ ГДО $M_{v,(\alpha)}^{(\mu)}$ визначена.

Методами з роботи [4] доводяться такі твердження.

Теорема 1. Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta_{v,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta) = 0$ складають дискретний спектр ГДО $M_{v,(\alpha)}^{(\mu)}$: дійсні, різні, симетричні відносно $\beta = 0$ й на півосі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = +\infty$.

Теорема 2. Система $\{V_{v,(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ власних функцій ГДО $M_{v,(\alpha)}^{(\mu)}$ узагальнено ортогональна, повна й замкнена.

Теорема 3. Будь-яка функція $g(r) \in G$ зображається абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є за системою $\{V_{v,(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{R_0}^R g(\rho) V_{v,(\alpha)}^{(\mu)}(\rho, \beta_n) \sigma(\rho) d\rho \right) \frac{V_{v,(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta_n)}{\|V_{v,(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta_n)\|^2}. \quad (24)$$

Ряд Фур'є (24) визначає пряме $H_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ та обернене $H_{\nu,(\alpha)}^{-(\mu)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)] = \int_{R_0}^R g(r) V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma(r) dr \equiv \tilde{g}_n, \quad (25)$$

$$H_{\nu,(\alpha)}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta_n) \left(\|V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta_n)\|_1^2 \right)^{-1} \equiv g(r). \quad (26)$$

У формулах (24), (26) бере участь узагальнений квадрат норми власної функції [13]

$$\|V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta_n)\|_1^2 = \int_{R_0}^R [V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta_n)]^2 \sigma(r) dr + \Theta_2(\beta_n, \beta_n). \quad (27)$$

Визначимо величини та функції:

$$d_1 = a_1^2 \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} : c_{11,1}, \quad d_2 = a_2^2 \sigma_2 sh R_2 : c_{11,2}; \quad \tilde{g}_{1n} = \int_{R_0}^{R_1} g_1(r) V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr,$$

$$\tilde{g}_{2n} = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_2 sh r dr, \quad \tilde{g}_{3n} = \int_{R_2}^R g_3(r) V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_3 r^{2\alpha_2-1} dr,$$

$$Z_{\nu,(\alpha);i2}^{(\mu),k}(\beta_n) = \left(\tilde{\alpha}_{i2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{i2}^k \right) V_{\nu,(\alpha);k+1}^{(\mu)}(r, \beta_n) \Big|_{r=R_k}, \quad i, k = 1, 2.$$

Теорема 4. Якщо функція $f(r) = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]; B_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2 , а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0 \right) g_1(r) \Big|_{r=R_0} = g_0, \quad \left(\tilde{\alpha}_{22}^3 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3 \right) g_3(r) \Big|_{r=R} = g_R \quad (28)$$

та умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k \right) g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k \right) g_{k+1}(r) \right] \Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}, \quad j, k = 1, 2, \quad (29)$$

то справджується основна тотожність СГІП ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]] = -\beta_n^2 \tilde{g}_n - \sum_{i=1}^3 k_i^2 \tilde{g}_{in} + (-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0, \beta_n) a_1^2 \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} g_0 + \\ + (\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1} V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3, \beta_n) a_3^2 \sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1} g_R + \sum_{k=1}^2 d_k [Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta_n) \omega_{2k} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta_n) \omega_{1k}]. \quad (30)$$

Розв'язання задачі (1) – (3)

Формули (25), (26), (30) складають математичний апарат для розв'язання мішаної параболічної задачі спряження (1) – (3).

Запишемо систему (1) й нульові початкові умови в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1^2 - a_1^2 B_{\nu,\alpha_1} \right) u_1(t, r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2^2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)} \right) u_2(t, r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_3^2 - a_3^2 B_{\alpha_2} \right) u_3(t, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, r) \\ f_2(t, r) \\ f_3(t, r) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(t, r) \\ u_2(t, r) \\ u_3(t, r) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Інтегральний оператор $H_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ згідно правила (25) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[\dots] = \begin{bmatrix} \int_{R_0}^{R_1} \dots V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr & \int_{R_1}^{R_2} \dots V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_2 sh r dr \\ \int_{R_2}^R \dots V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_3 r^{2\alpha_2-1} dr \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Застосуємо до задачі (31) операторну матрицю-рядок (32) за правилом множення матриць. Внаслідок основної тотожності (30) одержуємо задачу Коші [16]:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} + (\beta_n^2 + \gamma^2) \right] \tilde{u}_n(t) &= \tilde{f}_n(t) + (-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} V_{v,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0, \beta_n) a_1^2 \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} g_0(t) + \\ &+ (\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1} V_{v,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3, \beta_n) a_3^2 \sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1} g_R(t) + \sum_{k=1}^2 d_k \left[Z_{v,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta_n) \omega_{2k} - Z_{v,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta_n) \omega_{1k} \right], \\ \gamma^2 &= \max \{ \gamma_1^2; \gamma_2^2; \gamma_3^2 \}, \quad \tilde{u}_n(t)|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі Коші (33) є функція

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(t) &= \int_0^t e^{-(\beta_n^2 + \gamma^2)(t-\tau)} \left[\tilde{f}_n(\tau) + (-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} V_{v,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0, \beta_n) a_1^2 \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} g_0(\tau) + \right. \\ &\left. + (\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1} V_{v,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3, \beta_n) a_3^2 \sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1} g_R(\tau) + \sum_{k=1}^2 d_k \left(Z_{v,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta_n) \omega_{2k}(\tau) - Z_{v,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta_n) \omega_{1k}(\tau) \right) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (34)$$

Оператор $H_{v,(\alpha)}^{-(\mu)}$ згідно (26) як обернений до (32) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{v,(\alpha)}^{-(\mu)} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \cdots v_{v,(\alpha);1}^{(\mu)}(r, \beta_n) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \cdots v_{v,(\alpha);2}^{(\mu)}(r, \beta_n) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \cdots v_{v,(\alpha);3}^{(\mu)}(r, \beta_n) \end{bmatrix}; \quad v_{v,(\alpha);j}^{(\mu)}(r, \beta_n) = \frac{V_{v,(\alpha);j}^{(\mu)}(r, \beta_n)}{\|V_{v,(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta_n)\|_1}. \quad (35)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (35) за правилом множення матриць до матриці-елементу $[\tilde{u}_n(t)]$, де функція $\tilde{u}_n(t)$ визначена формулою (34). У результаті низки елементарних перетворень одержуємо інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної параболічної задачі спряження (1) – (3):

$$\begin{aligned} u_j(t, r) &= \int_0^t \left[W_{v,(\alpha);1j}^{(\mu)}(t-\tau, r) g_0(\tau) + W_{v,(\alpha);3j}^{(\mu)}(t-\tau, r) g_R(\tau) \right] d\tau + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \int_0^t \left[R_{v,(\alpha);12}^{(\mu),j,k}(t-\tau, r) \omega_{2k}(\tau) - R_{v,(\alpha);22}^{(\mu),j,k}(t-\tau, r) \omega_{1k}(\tau) \right] d\tau + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} H_{v,(\alpha);jk}^{(\mu)}(t-\tau, r, \rho) f_k(\tau, \rho) \sigma_k \phi_k(\rho) d\rho d\tau, \quad j = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (36)$$

де $\varphi_1(\rho) = \rho^{2\alpha_1+1}$, $\varphi_2(\rho) = sh\rho$, $\varphi_3(\rho) = \rho^{2\alpha_2-1}$.

У рівностях (36) беруть участь головні розв'язки задачі:

1) породжені крайовою умовою у точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W_{v,(\alpha);1j}^{(\mu)}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2 + \gamma^2)t} (-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} V_{v,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0, \beta_n) v_{v,(\alpha);j}^{(\mu)}(r, \beta_n) a_1^2 \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}, \quad j = \overline{1,3};$$

2) породжені крайовою умовою у точці $r = R$ функції Гріна

$$W_{v,(\alpha);3j}^{(\mu)}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2 + \gamma^2)t} (\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1} V_{v,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3, \beta_n) v_{v,(\alpha);j}^{(\mu)}(r, \beta_n) a_3^2 \sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}, \quad j = \overline{1,3};$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{v,(\alpha);i2}^{(\mu),j,k}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2 + \gamma^2)t} Z_{v,(\alpha);i2}^{(\mu),k}(\beta_n) v_{v,(\alpha);j}^{(\mu)}(r, \beta_n) d_k; \quad i, k = 1, 2, \quad j = \overline{1,3};$$

4) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H_{v,(\alpha);jk}^{(\mu)}(t, r, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2 + \gamma^2)t} v_{v,(\alpha);j}^{(\mu)}(r, \beta_n) v_{v,(\alpha);k}^{(\mu)}(\rho, \beta_n); \quad j, k = \overline{1,3}.$$

Зауваження 3. Якщо $\gamma^2 = \gamma_1^2 > 0$, то $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \geq 0$, $k_3^2 = \gamma_1^2 - \gamma_3^2 \geq 0$; якщо $\gamma^2 = \gamma_2^2 > 0$, то $k_1^2 = \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \geq 0$, $k_2^2 = 0$, $k_3^2 = \gamma_2^2 - \gamma_3^2 \geq 0$; якщо $\gamma^2 = \gamma_3^2 > 0$, то $k_1^2 = \gamma_3^2 - \gamma_1^2 \geq 0$, $k_2^2 = \gamma_3^2 - \gamma_2^2 \geq 0$, $k_3^2 = 0$.

Зауваження 4. Якщо початкові умови відмінні від нуля, тобто

$$u_1|_{t=0} = g_1(r), \quad r \in (R_0, R_1); \quad u_2|_{t=0} = g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2); \quad u_3|_{t=0} = g_3(r), \quad r \in (R_2, R),$$

то в рівностях (36) функції $f_k(\tau, \rho)$ будуть замінені на функції $[f_k(\tau, \rho) + g_k(\rho)\delta_+(\tau)]$, де $\delta_+(\tau)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $\tau = 0 +$ [18], та з'являться доданки

$$W_{v,(\alpha);1j}^{(\mu)}(t, r)\psi_0 + W_{v,(\alpha);3j}^{(\mu)}(t, r)\psi_R + \sum_{k=1}^2 \left(R_{v,(\alpha);12}^{(\mu);j,k}(t, r)\psi_{2k} - R_{v,(\alpha);22}^{(\mu);j,k}(t, r)\psi_{1k} \right). \quad (37)$$

Тут прийняті позначення:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0), & \psi_R &= \delta_{22}^3 g_3'(R_3) + \gamma_{22}^3 g_3(R_3), \\ \psi_{jk} &\equiv [\delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k)] - [\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k)]; & j, k &= 1, 2. \end{aligned}$$

Практика показує, що доданки (37) з'являються в результаті відображення від меж середовища початкових теплових хвиль.

Ці доданки можна анулювати, якщо перейти до нових початкових даних $\bar{g}_j(r)$ за формулами

$$g_j(r) = \bar{g}_j(r) + a_j r + b_j, \quad j = \overline{1, 3}$$

і визначити a_j та b_j із системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} (\delta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 R_0) a_1 + \gamma_{11}^0 b_1 &= \psi_0, & (\delta_{22}^3 + \gamma_{22}^3 R_3) a_3 + \gamma_{22}^3 b_3 &= \psi_R \\ [(\delta_{j1}^k + \gamma_{j1}^k R_k) a_k + \gamma_{j1}^k b_k] - [(\delta_{j2}^k + \gamma_{j2}^k R_k) a_{k+1} + \gamma_{j2}^k b_{k+1}] &= \psi_{jk}; & j, k &= 1, 2. \end{aligned} \quad (38)$$

При виконанні умов на коефіцієнти алгебраїчна система (38) завжди має єдиний розв'язок.

ВИСНОВКИ. Методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лебедева) зі спектральним параметром у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) побудовано точний аналітичний розв'язок мішаної задачі для системи еволюційних рівнянь параболічного типу, змодельованих гібридним диференціальним оператором Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лебедева) на кусково-однорідному сегменті $R_0 \leq r \leq R$ з м'якими межами. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків (із залученням методів комп'ютерної математики) реальних еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах, які моделюються параболічними крайовими задачами (процеси теплопровідності, дифузії).

Список використаних джерел

1. Городецкий В.В. Граничные свойства гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці, 1998.
2. Громик А.П., Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський, 2011.
3. Дейнека В.С., Сергиенко І.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К., 1998.
4. Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці, 2001.
5. Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. – Чернівці, 2002.
6. Конет І.М., Ленюк М.П. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці, 2001.
7. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці, 2004.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М., 1971.
9. Ленюк М.П. Інтегральні перетворення, породжені диференціальним оператором Ейлера другого порядку. – Чернівці, 2012.
10. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К., 1997.
11. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лебедева. – Чернівці, 2002.
12. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль, 2004.
13. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Ейлера, Бесселя, Лежандра). Частина 2. – Тернопіль, 2011.
14. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці, 2003.
15. Сергиенко І.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К., 1991.
16. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М., 1959.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М., 1972.
18. Шварц Л. Математические методы для физических наук. – М., 1965.

Надійшла до редколегії 12.11.13

І. Конет, д-р физ.-мат. наук, проф., Т. Пилипук, преподаватель
Каменец-Подольский НУ имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольский

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА НА КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ СЕГМЕНТЕ С МЯГКИМИ ГРАНИЦАМИ

Методом гибридного интегрального преобразования типа Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лебедева) со спектральным параметром получено интегральное представление точного аналитического решения смешанной задачи для системы уравнений параболіческого типа на кусочно-однородном сегменте $[R_0, R]$ с мягкими границами. Моделирование эволюционного процесса осуществлено методом гибридного дифференциального оператора Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лебедева).

I. Konet, Full Doctor, T. Pylypiuk, assistant
Ivan Ogiienko National University of Kamenetz-Podolsk, Kamenetz-Podolsk

THE INTEGRAL REPRESENTATION OF THE SOLUTION OF MIXED PROBLEM FOR A SYSTEM OF EVOLUTIONARY EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE IN PIECE-HOMOGENEOUS SEGMENT WITH SOFT BOUNDARIES

The integral representation of exact analytical solution of mixed problems for equations of parabolic type in piecewise homogeneous segment $[R_0, R]$ with soft boundaries is obtained by the method of hybrid integral type conversion Bessel-Legendre-(Kontorovich-Lebedev) with spectral parameter. Modeling of the evolutionary process is done by using a hybrid differential operator Bessel-Legendre-(Kontorovich-Lebedev).