УДК 517.98

М. Городній, д-р фіз.-мат. наук. , І. Гончар, асп.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: *goncharinna@ukr.net*

ПРО СУМОВНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ

Досліджується питання про існування єдиного сумовного розв'язку одного різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом у банаховому просторі.

ВСТУП. Нехай $\mathbb{B}$ – скінченновимірний комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\overline{0}$; A, B – лінійні, а отже, і обмежені оператори в $\mathbb{B}$, для яких існують обернені оператори A^{-1}, B^{-1}; I – одиничний оператор в $\mathbb{B}$. Покладемо

$$l_1(\mathbb{B}) = \left\{ \overline{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{B} \mid \|\overline{x}\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty \right\}.$$

Тоді $l_1(\mathbb{B})$ – комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|_1$.

Розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + y_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n + y_n, n \leq 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset l_1(\mathbb{B})$ – задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset l_1(\mathbb{B})$ – шукана послідовність.

Мета цієї статті – отримати необхідні та достатні умови на оператори A, B, при виконанні яких справджується така умова.

Умова 1. Для довільної послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset l_1(\mathbb{B})$ рівняння (1) має єдиний розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $l_1(\mathbb{B})$.

Аналогічне питання щодо існування єдиного обмеженого розв'язку досліджувалося, зокрема, в [3–5] для різницевого рівняння зі сталими і в [1, 4, 6, 7] зі змінними операторними коефіцієнтами, а єдиного розв'язку у просторі $l_p, 1 \leq p < \infty$, – у [1, 2]. У [7, с. 250] доведено, що для різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом

$$x_{n+1} = T_n x_n + y_n, n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

умова існування єдиного обмеженого розв'язку виконується тоді і тільки тоді, коли для послідовності лінійних обмежених операторів виконується умова дискретної дихотомії. Цю умову важко перевірити. Інший підхід до дослідження різницевого рівняння (2), за допомогою якого для (2) отримано достатні умови існування єдиного обмеженого розв'язку, запропоновано в [4, с. 25]. Цей підхід розвивається та використовується і в даній роботі.

ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ. Розглянемо множини

$$G_- = \left\{ z \in \mathbb{B} \mid \sum_{k=1}^{\infty} \|A^k z\| < \infty \right\}; G_-^m = G_-, m \geq 0; \qquad G_-^{-m} = \left\{ z \in \mathbb{B} \mid \sum_{k=1}^{\infty} \|A^k B^m z\| < \infty \right\}, m \geq 1;$$

$$G_+ = \left\{ z \in \mathbb{B} \mid \sum_{k=1}^{\infty} \|B^{-k} z\| < \infty \right\}; G_+^{-n} = G_+, n \geq 0; \qquad G_+^n = \left\{ z \in \mathbb{B} \mid \sum_{k=1}^{\infty} \|B^{-k} A^{-n} z\| < \infty \right\}, n \geq 1.$$

Усі ці множини лінійні, а тому є підпросторами скінченновимірного простору $\mathbb{B}$. У подальшому використовуються наступні леми.

Лема 1. Якщо виконується умова 1, то $G_- \bigcap G_+ = \{\overline{0}\}$.

Доведення. Припустимо, що існує $u \neq \overline{0}, u \in G_- \bigcap G_+$. Тоді однорідне рівняння $\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n, n \leq 0, \end{cases}$ має окрім нульового ненульовий розв'язок $\left\{ ..., B^{-2}u, B^{-1}u, \underbrace{u}_{1}, Au, A^2u, ... \right\}$ у просторі $l_1(\mathbb{B})$, що суперечить умові 1.

Лему 1 доведено.

Лема 2. Якщо виконується умова 1, то $\mathbb{B} = G_- \dot{+} G_+$, тобто $\mathbb{B}$ є прямою сумою G_- та G_+.

Доведення. Зафіксуємо $u \in \mathbb{B}$ і доведемо, що існують такі $\alpha \in G_-, \beta \in G_+$, що $u = \alpha + \beta$. Розглянемо рівняння

$$\begin{cases} u_{n+1} = Au_n, n \geq 1, \\ u_1 = Bu_0 + u_0, \\ u_{n+1} = Bu_n, n \leq -1. \end{cases}$$

Згідно умови 1 це рівняння має єдиний розв'язок $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ в $l_1(\mathbb{B})$. Тоді $u_0 \in G_+$, оскільки $u_{-k} = B^{-k}u_0, k \geq 1$. Також із умови $u_0 \in G_+$ випливає, що $Bu_0 \in G_+$. Нарешті $u_1 \in G_+$, оскільки $u_{k+1} = A^k u_1, k \geq 1$.Отже, $u = \alpha + \beta$, де $\alpha = u_1, \beta = -Bu_0$.

Доведемо єдиність розкладу. Припустимо, що $u=\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2$. Тоді $\alpha_1-\alpha_2=\beta_2-\beta_1$, причому $\alpha_1-\alpha_2\in G_-,\beta_2-\beta_1\in G_+$. З леми 1 випливає, що $\alpha_1=\alpha_2,\beta_1=\beta_2$. Лему 2 доведено.

Лема 3. Якщо $\mathbb{B}=G_-\dot{+}G_+$, то $\mathbb{B}=G_-^{-n}\dot{+}G_+=G_-\dot{+}G_+^n$ для кожного $n\geq 1$.

Доведення. Зафіксуємо $n\geq 1$ і покажемо, що $\mathbb{B}=G_-^{-n}\dot{+}G_+$ Якщо припустити існування елемента $u\neq\overline{0},u\in G_-^{-n}\bigcap G_+$, то отримаємо $B^n u\neq\overline{0},B^n u\in G_-\bigcap G_+$. Маємо протиріччя.

Зафіксуємо тепер $u\in\mathbb{B}$ і покажемо, що u зображується у вигляді $u=u_{-n}^-+u_{-n}^+$, де $u_{-n}^-\in G_-^{-n}$, $u_{-n}^+\in G_+$. Оскільки $\mathbb{B}=G_-\dot{+}G_+$, то існують такі $w^\pm\in G_\pm$, що $B^n u=w^-+w^+$. Покладемо $u_{-n}^-=B^{-n}w^-$. Тоді $u_{-n}^-\in G_-^{-n}$, а також $\left(u-u_{-n}^-\right)\in G_+$, оскільки $B^n\left(u-u_{-n}^-\right)=w^+\in G_+$.

Аналогічно перевіряється, що $\mathbb{B}=G_-\dot{+}G_+^n$. Лему 3 доведено.

Лема 4. Якщо виконується умова 1, то спектри $\sigma(A),\sigma(B)$ операторів A,B не перетинаються з одиничним колом $S=\left\{\lambda\in\mathbb{C}\ \left|\lambda\right|=1\right\}$.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто нехай існує $\lambda\in S\bigcap\sigma(A)$. Зафіксуємо базис в $\mathbb{B}$, у якому A має жорданову нормальну форму. Нехай простір $\mathbb{B}$ m – вимірний, а числу λ відповідає клітина Жордана розміру $k\times k$. Базис $\{e_1,e_2,...,e_m\}$ в $\mathbb{B}$ вибираємо так, щоб у цьому базисі оператору A відповідала матриця

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & | & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & | & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & | & \\ - & - & - & - & - & - & | & - \\ & & & & & & | & M\end{pmatrix}.$$

Тут M – квадратна матриця розмірності $(m-k)\times(m-k)$ (відсутня при $m=k$) і на незаповнених місцях розташовані нулі.

Покладемо $u=e_k$ і розглянемо послідовність

$$y_n=\frac{\lambda^n}{n^2}u,n\geq 1;\qquad y_n=\overline{0},n\leq 0. \tag{3}$$

Ця послідовність належить простору $l_1(\mathbb{B})$, а отже за умовою 1 їй відповідає єдиний розв'язок $\{x_n,n\in\mathbb{Z}\}\in l_1(\mathbb{B})$. З (1), (3) випливає, що для всіх $n\geq 1$ маємо

$$x_{n+1}=A^n x_1+\lambda A^{n-1}u+...+\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)^2}Au+\frac{\lambda^n}{n^2}u. \tag{4}$$

Нехай $x_1=\sum_{j=1}^m t_j e_j$. Тоді у вибраному базисі маємо

$$x_1=\begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_{k-1}\\ t_k\\ t_{k+1}\\ \vdots\\ t_m\end{pmatrix},\quad u=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad A^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & ...C_n^{k-1}\lambda^{n-k+1} & & | & \\ 0 & \lambda^n & \cdots C_n^{k-2}\lambda^{n-k+2} & & | & \\ ... & ... & ... & ... & | & \\ 0 & 0 & ... & \lambda^n & | & \\ - & - & - & \_ & - & - \\ & & & & | & M^n\end{pmatrix}.\ n\geq 1$$

Тут k-та координата вектора u дорівнює 1.

Тому внаслідок (4) k-та координата $\left(x_{n+1}\right)_k$ вектора x_{n+1} записується у вигляді

$$\left(x_{n+1}\right)_k=\lambda^n t_k+\lambda^n\left(1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}\right),$$

що суперечить включенню $\{x_n,n\in\mathbb{Z}\}\in l_1(\mathbb{B})$. Таким чином, $\sigma(A)\bigcap S=\varnothing$.

За допомогою аналогічних міркувань перевіряється, що і $\sigma(B)\bigcap S=\varnothing$. Лему 4 доведено.

Нехай $\sigma_-(A),\sigma_-(B)$ – частини спектрів операторів A,B, які лежать всередині, а $\sigma_+(A),\sigma_+(B)$ – ззовні S. Вважатимемо, що множини $\sigma_\pm(A),\sigma_\pm(B)$ непорожні. Зауважимо, що усі отримані нижче результати залишаються правильними і у випадку, коли серед них є порожні, з очевидними змінами в отриманих формулах.

Внаслідок леми 4 при виконанні умови 1 простір $\mathbb{B}$ розкладається в пряму суму інваріантних відносно A підпросторів $\mathbb{B}=\mathbb{B}_+(A)\dot{+}\mathbb{B}_-(A)$ (див., наприклад, [4, с. 6]) таким чином, що звуження $A_\pm$ оператора A на $\mathbb{B}_\pm(A)$ мають спектри $\sigma_\pm(A)$. Аналогічно $\mathbb{B}=\mathbb{B}_+(B)\dot{+}\mathbb{B}_-(B)$ і звуження $B_\pm$ оператора B на $\mathbb{B}_\pm(B)$ мають такі ж властивості. Відзначимо, що при цьому ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|A_+^{-n}\right\|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\|A_-^{n}\right\|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\|B_+^{-n}\right\|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\|B_-^{n}\right\| \tag{5}$$

збігаються.

Лема 5. $G_-=\mathbb{B}_-(A),\ G_+=\mathbb{B}_+(B)$.

Доведення. Із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|A_-^{n}\right\|$ для кожного $z\in\mathbb{B}_-(A)$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|A^{n}z\right\|$, а отже, $\mathbb{B}_-(A)\subset G_-$.

Також у випадку, коли $z\in\mathbb{B}_+(A)\bigcap G_-$, маємо $\|z\|=\left\|A_+^{-n}A_+^{n}z\right\|\le\left\|A_+^{-n}\right\|\left\|A_+^{n}z\right\|\le\left\|A_+^{-n}\right\|\sum_{k=1}^{\infty}\left\|A^{k}z\right\|\to 0, n\to\infty$, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|A_+^{-n}\right\|$ збігається. Таким чином, $z=\overline{0}$ і $G_-=\mathbb{B}_-(A)$. Аналогічно встановлюємо, що $G_+=\mathbb{B}_+(B)$. Лему 5 доведено.

Нехай виконується умова 1. Зафіксуємо послідовність $\overline{u}=\{u_n,n\in\mathbb{Z}\}\subset l_1(\mathbb{B})$. Внаслідок лем 2, 3 її елементи єдиним чином зображуються у такому вигляді:

$u_0=u_0^-+u_0^+$, де $u_0^-\in G_-,u_0^+\in G_+$;

якщо $n\ge 1$, то $u_n=u_n^-+u_n^+$, де $u_n^-\in G_-,u_n^+\in G_+^n$;

якщо $n\le -1$, то $u_n=u_n^-+u_n^+$, де $u_n^-\in G_-^n,u_n^+\in G_+$.

Лема 6. Якщо виконується умова 1, то відповідний послідовності $\{u_n,n\in\mathbb{Z}\}$ єдиний у просторі $l_1(\mathbb{B})$ розв'язок рівняння (1) зображується у вигляді

$$x_1=u_0^-+\sum_{\upsilon=-\infty}^{-1}B^{|\upsilon|}u_\upsilon^- -\sum_{\upsilon=1}^{\infty}A^{-\upsilon}u_\upsilon^+, \tag{6}$$

$$x_n=u_{n-1}^-+\sum_{k=0}^{n-2}A^{n-1-k}u_k^- +\sum_{\upsilon=-\infty}^{-1}A^{n-1}B^{|\upsilon|}u_\upsilon^- -\sum_{\upsilon=n}^{\infty}A^{-\upsilon+n-1}u_\upsilon^+,\quad n\ge 2, \tag{7}$$

$$x_n=u_{n-1}^-+\sum_{\upsilon=-\infty}^{n-2}B^{|\upsilon|+n-1}u_\upsilon^- -\sum_{\upsilon=n}^{o}B^{n-1-\upsilon}u_\upsilon^+ -\sum_{\upsilon=1}^{\infty}B^{n-1}A^{-\upsilon}u_\upsilon^+,\quad n\le 0, \tag{8}$$

Тут усі ряди з (6–8) збігаються за нормою простору $\mathbb{B}$.

Доведення. Нехай $y_0=u_0^-\in G_-,\ y_n=\overline{0},n\ne 0$. Тоді рівняння (1) записується у вигляді

$$\begin{cases} x_{n+1}=Ax_n, n\ge 1,\\ x_1=Bx_0+u_0^-,\\ x_{n+1}=Bx_n, n\le -1.\end{cases} \tag{9}$$

Єдиний у просторі $l_1(\mathbb{B})$ розв'язок рівняння (9) явно визначається, а саме $x_n=\overline{0},n\le 0;\ x_1=u_0^-,\quad x_n=A^n u_0^-,n\ge 1,$ і зображується у вигляді (6)–(8) при $y_0=u_0^-,\ y_n=\overline{0},n\ne 0$.

Аналогічно перевіряється, що для довільного фіксованого $m\in\mathbb{Z}$ відповідні послідовностям $y_m=u_m^-$, $y_n=\overline{0},n\ne m$, та $y_m=u_m^+,\ y_n=\overline{0},n\ne m$, єдині у просторі $l_1(\mathbb{B})$ розв'язки різницевого рівняння (1) також задаються формулами (6) – (8), записаними для цих послідовностей.

Зафіксуємо $p\in\mathbb{N},p\ge 2,$ і покладемо $\overline{u}_p=\{\ldots,\overline{0},u_{-p},u_{-p+1},\ldots,u_p,\overline{0},\ldots\}$. Тоді $\overline{u}_p\in l_1(\mathbb{B})$. Скориставшись лінійністю різницевого рівняння (1) і додавши отримані вище розв'язки, що відповідають послідовностям $y_m=u_m^\pm$, $y_n=\overline{0},n\ne m,|m|\le p$, отримаємо, що відповідний елементу $\overline{u}_p$ єдиний у просторі $l_1(\mathbb{B})$ розв'язок рівняння (1) записується у такому вигляді:

$$x_1^p=u_0^-+\sum_{\upsilon=-p}^{-1}B^{|\upsilon|}u_\upsilon^- -\sum_{\upsilon=1}^{p}A^{-\upsilon}u_\upsilon^+; \tag{10}$$

$$x_n^p=u_{n-1}^-+\sum_{k=0}^{n-2}A^{n-1-k}u_k^- +\sum_{\upsilon=-p}^{-1}A^{n-1}B^{|\upsilon|}u_\upsilon^- -\sum_{\upsilon=n}^{p}A^{-\upsilon+n-1}u_\upsilon^+,\quad 2\le n\le p, \tag{11}$$

$$x_{p+1}^{p}=u_{p}^{-}+\sum_{k=0}^{p-1}A^{p-k}u_{k}^{-}+\sum_{\upsilon=-p}^{-1}A^{p}B^{|\upsilon|}u_{\upsilon}^{-}, \tag{12}$$

$$x_{n}^{p}=\sum_{k=0}^{p}A^{n-1-k}u_{k}^{-}+\sum_{\upsilon=-p}^{-1}A^{n-1}B^{|\upsilon|}u_{\upsilon}^{-},\quad n\ge p+2, \tag{13}$$

$$x_{n}^{p}=u_{n-1}^{-}+\sum_{\upsilon=-p}^{n-2}B^{|\upsilon|+n-1}u_{\upsilon}^{-}-\sum_{\upsilon=n}^{0}B^{n-1-\upsilon}u_{\upsilon}^{+}-\sum_{\upsilon=1}^{p}B^{n-1}A^{-\upsilon}u_{\upsilon}^{+},\quad -p+2\le n\le 0, \tag{14}$$

$$x_{-p+1}^{p}=u_{-p}^{-}-\sum_{\upsilon=n}^{0}B^{-p-\upsilon}u_{k}^{+}-\sum_{\upsilon=1}^{p}B^{-p}A^{-\upsilon}u_{\upsilon}^{+}, \tag{15}$$

$$x_{n}^{p}=-\sum_{\upsilon=-p}^{0}B^{n-1-\upsilon}u_{\upsilon}^{+}-\sum_{\upsilon=1}^{p}B^{n-1}A^{-\upsilon}u_{\upsilon}^{+},\quad n\le -p. \tag{16}$$

Зауважимо тепер, що $\overline{u}_p\to\overline{u}, p\to\infty$, у просторі $l_1(\mathbb{B})$.

Розглянемо оператор $T:l_1(\mathbb{B})\to l_1(\mathbb{B})$, що якщо покласти $\overline{w}=\{w_n,n\in\mathbb{Z}\}\in l_1(\mathbb{B})$, то координати $T\overline{w}=\left\{\left(T\overline{w}\right)_n,n\in\mathbb{Z}\right\}\in l_1(\mathbb{B})$ визначаються за допомогою рівностей $\left(T\overline{w}\right)_n=w_{n+1}-Aw_n,n\ge 1$, $\left(T\overline{w}\right)_n=w_n-Bw_n,n\le 0$.

Зауважимо, що $T\in L(l_1(\mathbb{B}))$ і рівняння (1) за допомогою оператора T записується у вигляді $T\overline{x}=\overline{y}$. Із умови 1 і теореми Банаха про обернений оператор випливає, що для T існує обернений оператор $T^{-1}\in L(l_1(\mathbb{B}))$. Тому $\overline{x}_p=\left\{x_p^n,n\in\mathbb{Z}\right\}=T^{-1}\overline{u}_p\to T^{-1}\overline{u}=\overline{x},p\to\infty,$ де координати $\overline{x}_p$ та $\overline{x}$ визначаються відповідно за формулами (6) – (8) та (10)–(16). Оскільки із збіжності в $l_1(\mathbb{B})$ випливає покоординатна збіжність, то, перейшовши в (10), (11), (14) до границі при $p\to\infty$, робимо висновок, що твердження леми 6 виконується.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ. Основний результат статті сформульований у вигляді наступних теорем.

Теорема 1. Якщо виконується умова 1, то :

а1) $\mathbb{B}=G_-\dot{+}G_+$;

а2) для довільної послідовності $\{u_n,n\in\mathbb{Z}\}\subset l_1(\mathbb{B})$ відповідний їй єдиний у просторі $l_1(\mathbb{B})$ розв'язок $\{x_n,n\in\mathbb{Z}\}$ рівняння (1) визначається за допомогою формул (6)–(8).

Теорема 1 виконується внаслідок лем 2, 6.

Теорема 2. Нехай виконується умова а1) теореми 1, а також відповідна кожній послідовності $\{u_n,n\in\mathbb{Z}\}\subset l_1(\mathbb{B})$ побудована за допомогою формул (6)–(8) послідовність $\{x_n,n\in\mathbb{Z}\}$ належить простору $l_1(\mathbb{B})$. Тоді справджується умова 1 і за допомогою формул (6)–(8) визначено відповідний послідовності $\{u_n,n\in\mathbb{Z}\}$ єдиний у просторі $l_1(\mathbb{B})$ розв'язок $\{x_n,n\in\mathbb{Z}\}$ рівняння (1).

Доведення. Із умови а1) і леми 3 випливає існування зображень $u_m=u_m^-+u_m^+,m\in\mathbb{Z}$. Отже, послідовність $\{x_n,n\in\mathbb{Z}\}$ визначена коректно і за припущенням теореми 2 належить до $l_1(\mathbb{B})$.

Перевіримо виконання рівностей (1). Внаслідок (6) матимемо:

$$Ax_1=Au_0^-+\sum_{\upsilon=-\infty}^{-1}AB^{|\upsilon|}u_{\upsilon}^--\sum_{\upsilon=1}^{\infty}AA^{-\upsilon}u_{\upsilon}^+=\sum_{\upsilon=-\infty}^{-1}AB^{|\upsilon|}u_{\upsilon}^--\sum_{\upsilon=1}^{\infty}A^{1-\upsilon}u_{\upsilon}^+-u_1^+-u_1^-+u_1^-+Au_0^-=x_2-u_1.$$

При $n\ne 1$ рівності (1) перевіряються аналогічно.

Якщо припустити, що рівняння (1) має два різні розв'язки у просторі $l_1(\mathbb{B})$, то їхня різниця, яку позначимо $\{v_n,n\in\mathbb{Z}\}$, є ненульовим розв'язком однорідного рівняння (1), тобто

$$\begin{cases}v_{n+1}=Av_n,n\ge 1,\\ v_{n+1}=Bv_n,n\le 0.\end{cases} \tag{17}$$

Із (17) випливає, що $v_{n+1}=A^nv_1,\quad v_{-n+1}=B^{-n}v_1$ для всіх $n\ge 1$. Тому $v_1\ne\overline{0}$ і, одночасно, $v_1\in G_-\bigcap G_+$. Маємо протиріччя. Теорему 2 доведено.

Наслідок. Нехай A,B – такі оборотні оператори, що $\sigma(A)\bigcap S=\varnothing,\ \sigma(B)\bigcap S=\varnothing,\ \mathbb{B}_-(A)=\mathbb{B}_-(B),\ \mathbb{B}_+(A)=\mathbb{B}_+(B)$. Тоді виконується умова 1.

Доведення. З леми 5 і умов наслідку випливає, що $G_-\dot{+}G_+=\mathbb{B}_-(A)\dot{+}\mathbb{B}_+(A)=\mathbb{B}$. Зафіксуємо $u\in\mathbb{B},m\in\mathbb{N}$. Елемент u єдиним чином зображується у вигляді

$$u=u^-+u^+, \tag{18}$$

де $u^-\in G_-,u^+\in G_+$. При цьому, з урахуванням інваріантності $\mathbb{B}_-(B)$ відносно оператора B, при фіксованому $m\ge 1$ отримаємо, що $B^mu^-\in G_-$, а отже, $u^-\in G_-^{-m}$ Тому (18) визначає розклад u відносно G_-^{-m} та G_+ Аналогічно перевіряється, що (18) задає розклад u відносно G_- та G_+^m.

Таким чином, коли позначити через $P_{\pm}$ проектори на $G_{\pm}$, то для фіксованої послідовності $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset l_1(\mathbb{B})$ при виконанні умов наслідку, у формулах (6)–(8) матимемо $u_m^- = P_- u_m, u_m^+ = P_+ u_m$ для кожного $m \in \mathbb{Z}$. Тому із (6)–(8) випливає, що

$$\|x_1\| \le \sum_{\upsilon=-\infty}^{0} \left\|B_-^{|\upsilon|}\right\| \|P_-\| \|u_\upsilon\| + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \left\|A_+^{-\upsilon}\right\| \|P_+\| \|u_\upsilon\|, \tag{19}$$

$$\|x_n\| \le \sum_{k=0}^{n-1} \left\|A_-^{n-1-k}\right\| \|P_-\| \|u_k\| + \sum_{\upsilon=-\infty}^{-1} \left\|A_-^{n-1}\right\| \left\|B_-^{|\upsilon|}\right\| \|P_-\| \|u_\upsilon\| + \sum_{\upsilon=n}^{\infty} \left\|A_+^{n-1-\upsilon}\right\| \|P_+\| \|u_\upsilon\|, \quad n \ge 2, \tag{20}$$

$$\|x_n\| \le \sum_{\upsilon=-\infty}^{n-1} \left\|B_-^{|\upsilon|+n-1}\right\| \|P_-\| \|u_\upsilon\| + \sum_{\upsilon=n}^{0} \left\|B_+^{|\upsilon|+n-1}\right\| \|P_+\| \|u_\upsilon\| + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \left\|B_+^{n-1}\right\| \left\|A_+^{-\upsilon}\right\| \|P_+\| \|u_\upsilon\|, \quad n \le 0. \tag{21}$$

Внаслідок (19)–(21) і збіжності рядів (5) справджується включення $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_1(\mathbb{B})$. Отже, виконуються усі умови теореми 2. Наслідок доведено.

ВИСНОВКИ. Отримано необхідні та достатні умови існування єдиного сумовного розв'язку різницевого рівняння (1). Отримані результати узагальнюють і доповнюють для рівняння (1) твердження теореми 7 з [4, с. 25].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Баскаков А. Г., Пастухов А. И. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журнал. – 2001. – 42, №6. – С. 1231–1243.
2. Городній М. Ф. l_p -розв'язки одного різницевого рівняння в банаховому просторі // Укр. матем. журн. – 2003. – 55, №3. – С. 425–430.
3. Городний М. Ф. Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. матем. журн. – 1991. – 43, №1. – С. 42–46.
4. Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – К.: Вища шк., 1992. – 319 с.
5. Ким В. С. Об условиях существования ограниченных решений разностного уравнения в банаховом пространстве // Диффер. уравнения. – 1967. – 3, №12. – С. 2151–2160.
6. Слюсарчук В. Е. Обратимость линейных неавтономных разностных операторов в пространстве ограниченных на $\mathbb{Z}$ функций // Мат. заметки. – 1985. – 37, вып. 5. – С. 662–666.
7. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

Стаття надійшла до редколегії 09.06.15

Городний М., д-р физ.-мат. наук., Гончар И., асп.,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

О СУММИРУЕМЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Исследуется вопрос о существовании единственного суммируемого решения одного разностного уравнения с переменным операторным коэффициентом в банаховом пространстве.

Gorodnii M., Full Doctor, Gonchar I., PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

ON THE SUMMABLE SOLUTIONS OF ONE DIFFERENCE EQUATION

We study the problem of existence of the unique summable solution of the difference equation with variable operator coefficient in Banach space.

УДК 517.946

I. Konet, Full Doctor, T. Pylypiuk, teacher
Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky
e-mail: *konet51@ukr.net, t-myh@i.ua*

THE INTEGRAL REPRESENTATION OF THE SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SYSTEM OF EVOLUTIONARY PARABOLIC EQUATIONS IN PIECE-HOMOGENEOUS POLAR AXIS WITH SOFT LIMITS

By means of method of Laplace integral transform in combination with the method of Cauchy functions the integral representation of exact analytical solution of mixed problem for the system of evolutionary parabolic equations modeled by hybrid differential operator of Bessel-Euler-(Kontorovich-Lebedev) in the piece-homogeneous polar axis $r \ge 0$ with soft limits is obtained.

INTRODUCTION. Parabolic boundary value problems in homogeneous environments (simply connected domains) make up a significant theoretical and practical interest because they are used in the mathematical modeling of various processes and phenomena of natural science, technique, various technologies [1, 15].

In the last decades much attention is given to the investigation of parabolic boundary value problems in nonhomogeneous media [3, 16]. In this case, the coefficients of equations are piecewise continuous or, in particular, piecewise constant. For these problems it is difficult to apply classical method of separation of variables [18]. But for rather wide class of similar problems in the construction of exact solutions the method of integral or hybrid integral transforms [2, 6, 7, 11] can be effectively used.

In theoretical studies and applied problems most often the differential operators of 2nd order are used, in particular it is Fourier differential operator [17]

$$F = \frac{d^2}{dr^2},$$