Отже, похибка розв'язку (20), для знаходження якого застосовувалась найкраще рівномірне наближення ядра $K(x,t)$, є значно меншою (в 33 рази), ніж похибка розв'язку (22), отриманого з використанням для апроксимації $K(x,t)$ відрізку ряду Тейлора.

ВИСНОВКИ. При розв'язанні інтегральних рівнянь Фредгольма ІІ роду методом вироджених ядер використання найкращих середньоквадратичних або чебишовських наближень для апроксимації ядер довільного вигляду дозволяє отримати більш точні розв'язки цих рівнянь, ніж при застосуванні інших видів наближень (зокрема, наближень частковими сумами рядів Тейлора). В роботі запропоновано неперервний генетичний алгоритм для найкращої апроксимації ядра інтегрального рівняння як функції двох змінних за допомогою суми скінченного числа добутків функцій, що залежать тільки від однієї змінної. Пошук найкращих розв'язків в ГА здійснюється одразу з цілої множини точок, а не з єдиної точки, як у більшості традиційних методів оптимізації. Алгоритм простий в реалізації та може застосовуватися для розв'язання інших подібних задач. Отримані результати обчислювальних експериментів дають підстави вважати, що запропонований ГА є ефективним засобом апроксимації ядер інтегральних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т.2 – М.: Наука, 1966. – 640 с.
2. Вакал Л. П. Генетичні алгоритми для чебишовської апроксимації // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2013. – № 12. – С. 20–26.
3. Вакал Л. П. Застосування чебишовської апроксимації при розв'язанні інтегральних рівнянь // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2011. – № 10. – С. 78–84.
4. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.
5. Верлань Д. А. Ітераційні алгоритми апроксимації функцій двох змінних // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. – 2009. – Вип. 2. – С.24–32.
6. Демидович Б. П, Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
7. Каленчук-Порханова А. О., Вакал Л. П. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2007. – № 6. – С. 141–148.
8. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
9. Крылов В. И., Бобков В. В, Монастырный П. И. Вычислительные методы высшей математики. Т. 2. – Минск: Вышэйшая школа, 1975. – 672 с.
10. Панченко Т. В. Генетические алгоритмы. – Астрахань: Издательский дом "Астраханский университет", 2007. – 87 с.
11. Zemyan S. M. The classical theory of integral equations: a concise treatment. – Secaucus: Birkhauser Boston Inc., 2012. – 344 p.

Стаття надійшла до редколегії 06.03.16

Вакал Е., канд. физ.-мат. наук, Вакал Ю., канд. физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев
Вакал Л., канд. техн. наук
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, Киев

НАИЛУЧШАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Для решения интегрального уравнения Фредгольма II рода с ядром произвольного вида предложен непрерывный генетический алгоритм для наилучшей (среднеквадратической, равномерной) аппроксимации ядра суммами конечного числа произведений функций, зависящих только от одной переменной. Показано, что предложенный алгоритм является эффективным средством аппроксимации ядер.

Vakal E., PhD, Vakal Yu., PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv
Vakal L., PhD
V. M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv

BEST APPROXIMATION FOR A KERNEL OF FREDHOLM INTEGRAL EQUATION WITH USING GENETIC ALGORITHM

A continuous genetic algorithm for the best (mean-square, uniform) approximation of a kernel by sum of a finite number of one-variable functions products is proposed for solving Fredholm integral equation of the second kind with a general kernel. It is shown that the proposed algorithm is an effective mean for kernels approximation.

УДК 517.947

І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Т. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
м. Кам'янець-Подільський
e-mail: konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОБМЕЖЕНОГО КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі для необмеженого кусково-однорідного циліндра.

ВСТУП. Теорія гіперболічних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема, рівнянь математичної фізики, – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається завдяки численним застосуванням її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ механіки, фізики, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та крайових задач для рівнянь гіперболічного типу одержано у працях Адамара Ж. [1], Гордінга Л. [4], Митропольського Ю. О., Хоми Г. П., Гром'яка М. І. [9], Самойленка А. М., Ткача Б. П. [11], Смирнова М. М. [13], Чернятина В. А. [16] та інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

Відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометрії області (гладкість межі, наявність кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто методи побудови розв'язків крайових і мішаних задач для лінійних, квазілінійних та деяких нелінійних рівнянь різних типів (гіперболічних, параболічних, еліптичних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань механічних систем приводять до крайових і мішаних задач не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [6, 12].

Для досить широкого класу лінійних крайових задач в кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх точних розв'язків виявився метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [5, 7, 8].

У цій статті методом гібридних інтегральних перетворень побудовано точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики для необмеженого кусково-однорідного циліндра.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо задачу про структуру обмеженого на множині

$D=\{(t,r,\varphi,z): t>0;\ r\in I_n^+=\bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1}(R_{j-1};R_j),\ R_0=0,\ R_{n+1}=R<+\infty;\quad \varphi\in[0;2\pi); z\in(-\infty;+\infty)\}$ 2π – періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [10],

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}-\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_j++\chi_j^2 u_j=f_j(t,r,\varphi,z);\quad r\in I_j;\quad j=\overline{1,n+1}, \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_j\big|_{t=0}=g_j^1(r,\varphi,z);\quad \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0}=g_j^2(r,\varphi,z);\quad r\in I_j;\quad j=\overline{1,n+1} \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s u_1}{\partial r^s}\right|_{r=0}=0;\quad \left.\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1}\right|_{r=R}=g(t,\varphi,z); \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\right|_{z=-\infty}=0;\quad \left.\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\right|_{z=+\infty}=0;\quad s=0,1; \tag{4}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k\right)u_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\right|_{r=R_k}=0;\quad j=1,2;\quad k=\overline{1,n}, \tag{5}$$

де a_{rj}, $a_{\varphi j}$, a_{zj}, χ_j, α_{js}^k, β_{js}^k – деякі невід'ємні сталі; причому

$$\alpha_{22}^{n+1}\ge 0,\quad \beta_{22}^{n+1}\ge 0;\quad \alpha_{22}^{n+1}+\beta_{22}^{n+1}\ne 0;\ c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k\ne 0;\ c_{1k}\cdot c_{2k}>0;$$

$$f(t,r,\varphi,z)=\{f_1(t,r,\varphi,z),f_2(t,r,\varphi,z),\dots,f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\};\ g^1(r,\varphi,z)=\left\{g_1^1(r,\varphi,z),g_2^1(r,\varphi,z),\dots,g_{n+1}^1(r,\varphi,z)\right\};$$

$g^2(r,\varphi,z)=\left\{g_1^2(r,\varphi,z),g_2^2(r,\varphi,z),\dots,g_{n+1}^2(r,\varphi,z)\right\}$; $g(t,\varphi,z)$ – задані обмежені неперервні функції;

$u(t,r,\varphi,z)=\{u_1(t,r,\varphi,z),u_2(t,r,\varphi,z),\dots,u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$ – шукана функція.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Припустимо, що розв'язок задачі (1)–(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [14, 15, 2].

До задачі (1)–(5) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty;+\infty)$ щодо змінної z [14]:

$$F\left[g(z)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(z)\exp(-i\sigma z)dz\equiv\tilde g(\sigma),\quad i=\sqrt{-1}, \tag{6}$$

$$F^{-1}\left[\tilde g(\sigma)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde g(\sigma)\exp(i\sigma z)d\sigma\equiv g(z), \tag{7}$$

$$F\left[\frac{d^2 g}{dz^2}\right]=-\sigma^2 F[g(z)]\equiv-\sigma^2\tilde g(\sigma). \tag{8}$$

Інтегральний оператор F за формулою (6) внаслідок тотожності (8) тривимірній початково-крайовій задачі спряження (1)–(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'=\left\{(t,r,\varphi); t>0; r\in I_n^+;\varphi\in[0;2\pi)\right\}$ 2π-періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \tilde{u}_j + \left(a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2 \right) \tilde{u}_j = \tilde{f}_j(t, r, \varphi, \sigma); \; r \in I_j; \; j = \overline{1, n+1}, \tag{9}$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_j\Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^1(r, \varphi, \sigma); \; \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^2(r, \varphi, \sigma); \; r \in I_j; \; j = \overline{1, n+1}; \tag{10}$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s \tilde{u}_1}{\partial r^s}\Big|_{r=0} = 0; \; \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{u}_{n+1}\Big|_{r=R} = \tilde{g}(t, \varphi, \sigma); \tag{11}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) \tilde{u}_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) \tilde{u}_{k+1} \right]\Big|_{r=R_k} = 0; \; j = 1,2; \; k = \overline{1, n}. \tag{12}$$

До задачі (9)–(12) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [15]:

$$F_m\left[g(\varphi) \right] = \int_0^{2\pi} g(\varphi)\exp(-im\varphi)d\varphi \equiv g_m, \; i \text{ – "уявна" одиниця}, \tag{13}$$

$$F_m^{-1}[g_m] = \frac{\mathrm{Re}}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m g_m \exp(im\varphi) \equiv g(\varphi), \tag{14}$$

$$F_m\left[\frac{d^2 g}{d\varphi^2} \right] = -m^2 F_m[g(\varphi)] \equiv -m^2 g_m, \tag{15}$$

де $\mathrm{Re}(\cdots)$ – дійсна частина виразу $(\cdots)$ щодо φ; $\varepsilon_0 = 1, \; \varepsilon_k = 2; \; k = 1,2,3\ldots$

Інтегральний оператор F_m, який діє за формулою (13), внаслідок тотожності (15) двовимірній початково-крайовій задачі спряження (9)–(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \left\{ (t, r); t > 0; r \in I_n^+ \right\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm}}{\partial t^2} - a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{jm}^2}{r^2} \right) \tilde{u}_{jm} + \left(a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2 \right) \tilde{u}_{jm} = \tilde{f}_{jm}(t, r, \sigma); \; r \in I_j; \; j = \overline{1, n+1}; \; \nu_{jm} = a_{\varphi j} m / a_{rj}, \tag{16}$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^1(r, \sigma); \; \frac{\partial \tilde{u}_{jm}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^2(r, \sigma); \; r \in I_j; \; j = \overline{1, n+1}, \tag{17}$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s \tilde{u}_{1m}}{\partial r^s}\Big|_{r=0} = 0; \; \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{u}_{n+1,m}\Big|_{r=R} = \tilde{g}_m(t, \sigma); \tag{18}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) \tilde{u}_{km} - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) \tilde{u}_{k+1,m} \right]\Big|_{r=R_k} = 0; \; j = 1,2; \; k = \overline{1, n}. \tag{19}$$

До задачі (16)–(19) застосуємо скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду на кусково-однорідному сегменті I_n^+ з n точками спряження щодо змінної r [2]:

$$H_{sn}\left[f(r) \right] = \int_0^R f(r)V(r, \lambda_s)\sigma(r)rdr \equiv \tilde{f}(\lambda_s), \tag{20}$$

$$H_{sn}^{-1}\left[\tilde{f}(\lambda_s) \right] = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{f}(\lambda_s)\frac{V(r, \lambda_s)}{\left\| V(r, \lambda_s) \right\|^2} \equiv f(r), \tag{21}$$

$$H_{sn}\left[B_{(m)}[f(r)] \right] = -\lambda_s^2 \tilde{f}(\lambda_s) - \sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r)V_k(r, \lambda_s)\sigma_k r dr + a_{n+1}^2 R\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}V_{n+1}(R, \lambda_s)\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{df}{dr} + \beta_{22}^{n+1} f \right)\Big|_{r=R}, \tag{22}$$

$$R_0 = 0, \; R_{n+1} = R.$$

У формулах (20)–(22) беруть участь, виписані в [2], спектральна функція $V(r, \lambda_s)$, вагова функція $\sigma(r)$ та гібридний диференціальний оператор Бесселя $B_{(m)} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{rk}^2 \theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r)B_{\nu_{km}}$, де $B_{\nu_{km}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{km}^2}{r^2}$ – диференціальний оператор Бесселя, $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда.

Запишемо диференціальні рівнянння (16) та початкові умови (17) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r1}^2 B_{\nu_{1m}} + q_1^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{1m} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r2}^2 B_{\nu_{2m}} + q_2^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{2m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r,n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m}} + q_{n+1}^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{n+1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \tilde{f}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{f}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\left.\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \tilde{u}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m}^1(r,\sigma) \\ \tilde{g}_{2m}^1(r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m}^1(r,\sigma) \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial}{\partial t}\left.\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \tilde{u}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m}^2(r,\sigma) \\ \tilde{g}_{2m}^2(r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m}^2(r,\sigma) \end{bmatrix}, \tag{24}$$

де $q_j^2(\sigma) = a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2;\ \ j = \overline{1, n+1}.$

Інтегральний оператор H_{sn}, який діє за формулою (20), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{sn}[\cdots] = \left[\int_0^{R_1} \cdots V_1(r,\lambda_s)\sigma_1 r dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \cdots V_2(r,\lambda_s)\sigma_2 r dr \quad \int_{R_{n-1}}^{R_n} \cdots V_n(r,\lambda_s)\sigma_n r dr \quad \int_{R_n}^{R} \cdots V_{n+1}(r,\lambda_s)\sigma_{n+1} r dr \right] \tag{25}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (23), (24). Внаслідок тотожності (22) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_s^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma)\right)\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda_s,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{f}}_{jm}(t,\lambda_s,\sigma) + a_{n+1}^2 R\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}V_{n+1}(R,\lambda_s)\tilde{g}_m(t,\sigma), \tag{26}$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda_s,\sigma)\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jm}^1(\lambda_s,\sigma); \quad \left.\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda_s,\sigma)\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jm}^2(\lambda_s,\sigma), \tag{27}$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda_s,\sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j}\tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda_s)\sigma_j r dr;\ j = \overline{1,n+1},\ \ \tilde{\tilde{f}}_{jm}(t,\lambda_s,\sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j}\tilde{f}_{jm}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda_s)\sigma_j r dr,\ j = \overline{1,n+1},$$

$$\tilde{\tilde{g}}_{jm}^k(\lambda_s,\sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j}\tilde{g}_{jm}^k(r,\sigma)V_j(r,\lambda_s)\sigma_j r dr;\ \ k = 1,2;\ \ j = \overline{1,n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max\left\{q_1^2, q_2^2, ..., q_{n+1}^2\right\} = q_1^2$ і покладемо всюди $\gamma_j^2 = q_1^2 - q_j^2;\ \ j = \overline{1,n+1}$. Задача Коші (26), (27) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{u}}_m}{dt^2} + \Delta^2(\lambda_s,\sigma)\tilde{\tilde{u}}_m = \tilde{\tilde{f}}_m(t,\lambda_s,\sigma) + a_{n+1}^2 R\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}V_{n+1}(R,\lambda_s)\tilde{g}_m(t,\sigma), \tag{28}$$

$$\left.\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda_s,\sigma)\right|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda_s,\sigma); \quad \left.\frac{d\tilde{\tilde{u}}_m}{dt}\right|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda_s,\sigma), \tag{29}$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda_s,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda_s,\sigma); \quad \tilde{\tilde{f}}_m(t,\lambda_s,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{f}}_{jm}(t,\lambda_s,\sigma),$$

$$\tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda_s,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jm}^1(\lambda_s,\sigma), \quad \tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda_s,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jm}^2(\lambda_s,\sigma); \quad \Delta^2(\lambda_s,\sigma) = \lambda_s^2 + a_{z1}^2\sigma^2 + \chi_1^2.$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком неоднорідної задачі Коші (28), (29) є функція

$$\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda_s,\sigma) = \frac{\sin(\Delta(\lambda_s,\sigma)t)}{\Delta(\lambda_s,\sigma)}\tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda_s,\sigma) + \frac{d}{dt}\frac{\sin(\Delta(\lambda_s,\sigma)t)}{\Delta(\lambda_s,\sigma)}\tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda_s,\sigma) + \int_0^t \frac{\sin(\Delta(\lambda_s,\sigma)(t-\tau))}{\Delta(\lambda_s,\sigma)} \times$$

$$\times\left[\tilde{\tilde{f}}_m(\tau,\lambda_s,\sigma) + a_{n+1}^2 R\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}V_{n+1}(R,\lambda_s)\tilde{g}_m(t,\sigma)\right]d\tau. \tag{30}$$

Оскільки суперпозиція операторів H_{sn} та H_{sn}^{-1} є одиничним оператором, то оператор H_{sn}^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{sn}^{-1}[\cdots] = colon\left(\sum_{s=1}^{\infty}\cdots\frac{V_1(r,\lambda_s)}{\left\|V(r,\lambda_s)\right\|^2},\ \sum_{s=1}^{\infty}\cdots\frac{V_2(r,\lambda_s)}{\left\|V(r,\lambda_s)\right\|^2},\ \dots\dots\dots\dots,\ \sum_{s=1}^{\infty}\cdots\frac{V_{1n+}(r,\lambda_s)}{\left\|V(r,\lambda_s)\right\|^2}\right) \tag{31}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (31) до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda_s,\sigma)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda_s,\sigma)$ визначена формулою (30). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (16)–(19):

$$\tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma)=\sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(\Delta(\lambda_s,\sigma)t)}{\Delta(\lambda_s,\sigma)}\tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda_s,\sigma)+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin(\Delta(\lambda_s,\sigma)t)}{\Delta(\lambda_s,\sigma)}\tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda_s,\sigma)\right]\frac{V_j(r,\lambda_s)}{\left\|V(r,\lambda_s)\right\|^2}+ \quad (32)$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^t\frac{\sin(\Delta(\lambda_s,\sigma)(t-\tau))}{\Delta(\lambda_s,\sigma)}\left[\tilde{\tilde{f}}_m(\tau,\lambda_s,\sigma)+a_{n+1}^2R\sigma_{n+1}\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}(R,\lambda_s)\tilde{g}_m(\tau,\sigma)d\tau\right]\frac{V_j(r,\lambda_s)}{\left\|V(r,\lambda_s)\right\|^2};\ j=\overline{1,n+1}.$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma)$,, визначених формулами (32), обернені оператори F^{-1} та F_m^{-1} і, виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$u_j(t,r,\varphi,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jk}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z-\xi)f_k(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z-\xi)g_k^1(\rho,\alpha,\xi)\times$$
$$\times\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho+\sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z-\xi)g_k^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho+$$
$$+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}W_{j,r}(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z-\xi)g(\tau,\alpha,\xi)d\xi d\alpha d\tau; \quad (33)$$

$j=\overline{1,n+1},$ які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

У формулах (33) застосовано компоненти

$$E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z)=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\left(\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\Delta(\lambda_s,\sigma)t)}{\Delta(\lambda_s,\sigma)}\cos(\sigma z)d\sigma\frac{V_j(r,\lambda_s)V_k(\rho,\lambda_s)}{\left\|V(r,\lambda_s)\right\|^2}\right)\cos(m\varphi)$$ матриці впливу (функції впливу) та компоненти $W_{j,r}(t,r,\varphi,z)=a_{n+1}^2R\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}E_{j,n+1}(t,r,R,\varphi,z)$ радіальної матриці Гріна (функції Гріна) розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z)$ і радіальних функцій Гріна $W_{j,r}(t,r,\varphi,z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (33), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4) та умови спряження (5) в сенсі теорії узагальнених функцій [17].

Єдиність розв'язку (33) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) задачі (1)–(5).

Методами з [3, 17] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (33) визначають обмежений класичний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t,r,\varphi,z),\ g_j^1(r,\varphi,z),\ g_j^2(r,\varphi,z)$ задовольняють умови:

двічі неперервно диференційовні за кожною змінною;
мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
абсолютно сумовні за змінною z на $(-\infty;+\infty)$;

справджують умови спряження, а функція $g(t,\varphi,z)$ задовольняє умови 1–3, то гіперболічна початково-крайова задача (1)–(5) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (33).

Зауваження 1. У випадку $a_{rj}=a_{\varphi j}=a_{zj}\equiv a_j>0$ формули (33) визначають структуру розв'язку гіперболічної початково-крайової задачі (1)–(5) в ізотропному необмеженому кусково-однорідному циліндрі.

Зауваження 2. Параметри $\alpha_{22}^{n+1},\beta_{22}^{n+1}$ дозволяють виділяти із формул (33) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на радіальній поверхні $r=R$ крайові умови 1-го роду $(\alpha_{22}^{n+1}=0,\beta_{22}^{n+1}=1)$, 2-го роду $(\alpha_{22}^{n+1}=1,\beta_{22}^{n+1}=0)$ та 3-го роду $(\alpha_{22}^{n+1}=1,\beta_{22}^{n+1}\equiv h>0)$.

Зауваження 3. Аналіз розв'язку (33) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j^k(r,\varphi,z),(k=1,2),\ g(t,\varphi,z)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

Зауваження 4. У випадку $\chi_j^2\equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат.

Зауваження 5. У випадку $\alpha_{11}^k=0,\ \beta_{11}^k=1;\ \alpha_{12}^k=0,\ \beta_{12}^k=1;\ \alpha_{21}^k=E_1^k,\ \beta_{21}^k=0;\ \alpha_{22}^k=E_2^k,\ \beta_{22}^k=0,$ де E_1^k, E_2^k – модулі Юнга ($k=\overline{1,n},$) умови спряження (5) збігаються з класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках 4, 5 (при $f_j(t,r,\varphi,z)\equiv 0$) розглянута гіперболічна крайова задача є математичною моделлю вільних коливних процесів у необмеженому кусково-однорідному суцільному циліндрі.

ВИСНОВКИ. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в необмеженому кусково-однорідному суцільному циліндрі. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука. 1978.
2. Быблив О. Я., Ленюк М. П. Интегральные преобразования Ханкеля 1-го рода для кусочно-однородных сегментов с применением к задачам математической физики // Вычисл. и прикл. математика. – К., 1988. – Вып. 65. – С. 24–34.
3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958.
4. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. – М.: ИЛ, 1961.
5. Громик А. П., Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011.
6. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998.
7. Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці: Прут, 2004.
8. Конет І. М. Гіперболічні крайові математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2013.
9. Митропольський Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – К.: Наук. думка. 1991.
10. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2006.
11. Самойленко А. М., Ткач Б. П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1992.
12. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991.
13. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1962.
14. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: ИЛ, 1955.
15. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. – М.: Гостехтеориздат, 1956.
16. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. – М.: Изд-во МГУ, 1991.
17. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965.

Стаття надійшла до редколегії 06.11.15

Конет И., д-т физ.-мат, наук, проф., Пилипюк Т., канд, физ,-мат, наук
Каменец-Подольский Национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольск

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

Методом интегральных и гибридных интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений (функций влияния и функций Грина) впервые построено интегральное представление точного аналитического решения гиперболической краевой задачи для неограниченного кусочно-однородного цилиндра.

Konet I., Full Doctor, Prof., Pylypiuk T., PhD
Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE UNLIMITED PIECEWISE HOMOGENEOUS CYLINDER

By means of method of integral and hybrid integral transforms in combination with the method of principal solutions (influence functions and Green's functions) the integral image of exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem for unlimited piecewise homogeneous cylinder is constructed for the first time.

УДК 517.9

М. Яременко, канд. фіз.-мат. наук
Міжнародний математичний центр НАН України
e-mail: math.kiev@gmail.com

КВАЗІЛІНІЙНІ ЕЛІПТИЧНІ СИСТЕМИ З СИНГУЛЯРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглянуто квазілінійні еліптичні системи диференціальних рівнянь з частинними похідними у всьому евклідовому просторі, встановлено нові більш слабкі умови існування розв'язку таких систем в певному класі функцій та його єдиність (результати нові у випадку лінійних систем та квазілінійного рівняння $N=1$).

Вступ. Стаття присвячена дослідженню умов існування розв'язку квазілінійних еліптичних систем диференціальних рівнянь з вимірними коефіцієнтами, тобто встановленню обмежень на не лінійність, за яких система буде мати розв'язок і дослідженню єдиності такого розв'язку в певному класі функцій [9].

Методи дослідження подібних систем є подібними до тих, що застосовуються для розгляду одного рівняння (у нашому випадку при $N=1$) але у випадку системи розглядається не скалярний простір, а векторний, тобто всі означення, теореми і леми повинні бути переформульовані в нових термінах з відповідними змінами. При цьому поняття спряженого елементу набуває дещо іншого змісту, навіть поняття узагальненого розв'язку можна формулювати по різному [9].

При дослідженні квазілінійних систем (або рівнянь у випадку $N=1$, який допускається в даній статті, але за умов $l>2$) важливими є результати які стосуються відповідних лінійних систем (або рівнянь).

При дослідженні подібних задач основна увага зосереджується на двох напрямках: по-перше, це – умови росту, по-друге, умови щодо сингулярності.

Найкращими з відомих результатів (з невеликими змінами щодо сингулярностей), які стосуються квазілінійних рівнянь та систем, є результати які сформульовано в [9 с. 465]. Але це зовсім не означає, що умови згаданої вище праці не були покращені для певних класів рівнянь, навпаки, таких робіт досить багато [5–8].