13. Nayfeh A.H. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface / A.H. Nayfeh // Trans. ASME., Ser. E.,1976. – 43, № 4. – P. 584–588.
14. Thomas R. A nonlinear Schrödinger equation for water waves on finite depth with constant vorticity / R. Thomas, C. Kharif, M. Manna // Physics of Fluids, 2012. – 24(12). – 127102. doi:10.1063/1.4768530.

Надійшла до редколегії 17.12.19

О. Авраменко, д-р. физ.-мат. наук, проф.,
М. Лунёва, асп.
Центральноукраинский государственный педагогический университет
имени Владимира Винниченко, Кропивницкий, Украина

МОДУЛЯЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ТРЁХСЛОЙНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Статья посвящена проблеме распространения слабонелинейных волновых пакетов вдоль поверхностей контакта в трёхслойной гидродинамической системы "полупространство – слой – слой с твёрдой крышкой". Получено условие разрешимости проблемы в приближении третьего порядка, выведено эволюционное уравнение в форме нелинейного уравнения Шредингера и условие модуляционной устойчивости его решений. В случае баланса между дисперсией и нелинейностью получено решение, представлена диаграмма его устойчивости и её анализ.
Ключевые слова: трехслойная гидродинамическая систем, волновые пакеты, модуляционная устойчивость, нелинейное уравнение Шредингера.

O. Avramenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.,
M. Lunyova, Ph. D. stud.
Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

MODULATION STABILITY OF WAVE PACKETS IN A THREE-LAYER HYDRODYNAMIC SYSTEM

The article is devoted to the problem of propagation of weakly nonlinear wave-packets along contact surfaces in a three-layer hydrodynamic system "half space – layer – layer with rigid lid". The condition of solvability of the problem in the third-order approximation is obtained, the evolution equation is derived in the form of a nonlinear Schrödinger equation and the modulation stability condition for its solutions is obtained. The stability diagram and its analysis are presented for the solution which takes place in the case of the balance between dispersion and non-linearity.
Keywords: three-layer hydrodynamic systems, wave packets, modulation stability, nonlinear Schrödinger equation.

УДК 517.9
DOI: https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.08.35-40

В. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Ю. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук,
М. Орлова, студ.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: valsamyul@gmail.com

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ НА НЕНУЛЬОВОМУ ФОНІ

Побудовано асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами і малим параметром першого степеня при старшій похідній для випадку ненульового фону. Наведено алгоритм відшукання такого асимптотичного розв'язку і продемонстровано його застосування на прикладі рівняння Кортевега–де Фріза з конкретно заданими змінними коефіцієнтами.
Ключові слова: рівняння Кортевега-де Фріза, сингулярне збурення, змінні коефіцієнти, асимптотичні розв'язки, солітоноподібні розв'язки.

Вступ. Рівняння Кортевега–де Фріза на сьогодні є одним із найбільш відомих нелінійних рівнянь із частинними похідними [11]. Це рівняння використовується при вивченні математичних моделей різних явищ і процесів, серед яких поширення хвиль у рідинах [17], коливання в ангармонічній решітці [16], хвильові процеси в біологічних системах [6], передача сигналів у телекомунікаційних системах тощо. Значний інтерес науковців до даного рівняння викликаний, зокрема, ще й тим, що рівняння Кортевега–де Фріза є цікавим об'єктом для дослідження, оскільки володіє розв'язками з надзвичайно різноманітними властивостям, серед яких солітонні, квазіперіодичні, періодичні та інші типи розв'язків [18]. Більше того, саме при дослідженні рівняння Кортевега–де Фріза було запропоновано метод оберненої задачі розсіювання [9], який став потужним інструментом вивчення нелінійних рівнянь сучасної теоретичної і математичної фізики [2, 8, 10]. Разом з тим значний інтерес становлять рівняння зі змінними коефіцієнтами, оскільки такі рівняння використовуються при моделюванні процесів у середовищах зі змінними характеристиками та малою дисперсією, для вивчення яких чи не єдиним ефективним методом дослідження є асимптотичний аналіз [5, 7, 12, 13].

У даній статті розглядається рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром при старшій похідній вигляду

$$\varepsilon u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \qquad (1)$$

де коефіцієнти рівняння записуються за допомогою асимптотичних рядів

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k a_k(x,t), \quad b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k b_k(x,t), \qquad (2)$$

функції $a_k(x,t)$, $b_k(x,t) \in C^{\infty}(R\times[0,T])$, $k \geq 0$, $T > 0$, ε – малий параметр.

Для рівняння (1) будуються асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки, які за своєю структурою близькі до солітонних розв'язків [14].

1. Основні поняття і позначення. Нехай $S = S(\mathbf{R})$ – простір швидко спадних функцій, тобто таких нескінченно диференційовних на множині $\mathbf{R}$ функцій, що для довільних цілих чисел $m, n \ge 0$ виконується умова [3, 12]:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left| x^m \frac{d^n}{dx^n} u(x) \right| < +\infty.$$

Через $C^\infty(0,T;S)$ позначимо простір нескінченно диференційовних на множині $\mathbf{R}\times[0;T]$ функцій $u(x,t)$, для яких при довільних цілих m, $k > 0$ виконується умова

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(D_x^m D_t^k u\right)^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+x^2\right)^m \left(D_t^k u\right)^2 dx < \infty.$$

Аналогічно [3, 12, 15] позначимо через $G_1 = G_1(R\times[0;T]\times R)$ лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in R\times[0;T]\times R$, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, p, q, r рівномірно щодо змінних (x,t) на кожній компактній множині $K\subset R\times[0;T]$ виконуються умови:

1) справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x,t,\tau) = 0, \quad (x,t)\in K;$$

2) існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial \tau^r}\left(f(x,t,\tau) - f^-(x,t)\right) = 0, \quad (x,t)\in K.$$

Нехай $G_1^0 = G_1^0(R\times[0;T]\times R)\subset G_1$ – простір функцій $f = f(x,t,\tau)\in G_1$, $(x,t,\tau)\in R\times[0;T]\times R$, для яких рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K\subset R\times[0;T]$ виконується умова $\lim_{\tau\to-\infty} f(x,t,\tau) = 0.$

Означення 1 [3, 12]. *Функція* $u = u(x,t,\varepsilon)$*, де* ε *– малий параметр, називається однофазовою солітоноподібною, якщо ця функція для довільного цілого* $N\ge 0$ *зображується асимптотичним розкладом вигляду*

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right] + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \tau = \frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}, \tag{3}$$

де $\varphi(t)\in C^{(\infty)}([0;T])$ *– скалярна дійсна функція, функції* $u_j(x,t)$, $j=\overline{0,N},$ *– нескінченно диференційовні (у точках* $t=0$, $t=T$ *розглядаються відповідно ліва і права похідні);* $V_0(x,t,\tau)\in G_1^0,$ $V_j(x,t,\tau)\in G_1$ $j=\overline{1,N}$.

Функція $x-\varphi(t)$ *називається фазою однофазової солітоноподібної функції* $u(x,t,\varepsilon)$.

Опишемо алгоритм побудови асимптотичного однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (1) для загального випадку та для випадку, коли коефіцієнти (1) мають конкретний вигляд.

2. Алгоритм побудови асимптотичних розв'язків та його обґрунтування. При розробці алгоритму побудови асимптотичного розв'язку для заданого рівняння насамперед треба визначити вигляд (зображення) такого розв'язку. У випадку рівняння (1) асимптотичний розв'язок шукається у вигляді [3]

$$u(x,t,\varepsilon) = Y_N(x,t,\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{4}$$

де

$$Y_N(x,t,\tau,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{j/2}\left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right], \quad \tau = \frac{x-\varphi(t)}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Зауважимо, що асимптотичний розклад проводиться за дробовими степенями малого параметра. Функція

$$U_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{j/2} u_j(x,t)$$

називається регулярною частиною асимптотики (4), а функція

$$V_N(x,t,\tau,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{j/2} V_j(x,t,\tau)$$

– сингулярною частиною асимптотики (4). При цьому, очевидно, $Y_N = U_N + V_N$.

Визначення коефіцієнтів асимптотичного розкладу (4) виконується з використанням загальних ідей теорії асимптотичних методів. При цьому спочатку визначається регулярна частина, а згодом – сингулярна частина асимптотики (4).

2.1. Регулярна частина асимптотики. Члени регулярної частини асимптотики визначаються як розв'язки системи диференціальних рівнянь з частинними похідними для функцій $u_j(x,t),$ $j=\overline{0,2N}$, вигляду

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} u_0 = 0, \tag{5}$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t}+b_0(x,t)u_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial x}+b_0(x,t)u_j(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}=$$
$$=f_j(x,t,u_0,u_1,\ldots,u_{j-1}),\quad j=\overline{1,2N}, \tag{6}$$

де функції $f_j(x,t,u_0,u_1,\ldots,u_{j-1}),\quad j=\overline{1,2N}$, у правій частині (6) визначаються рекурентним чином. Зокрема,

$$f_1(x,t,u_0)=-a_1(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t}-b_1(x,t)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x},$$
$$f_2(x,t,u_0,u_1)=-a_1(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial t}-a_2(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t}-b_1(x,t)u_1\frac{\partial u_0}{\partial x}-$$
$$-b_0(x,t)u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}-b_2(x,t)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}-b_1(x,t)u_0\frac{\partial u_1}{\partial x}.$$

Функції $u_j(x,t),\quad j=\overline{0,2N}$, можна знайти послідовно, інтегруючи диференціальні рівняння (5), (6). Дійсно, оскільки рівняння (5) є квазілінійним диференціальним рівнянням із частинними похідними, а інші рівняння в (6) – лінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними, то їхні розв'язки можна знайти, наприклад, за допомогою методу характеристик [1]. Тому вважатимемо регулярну частину асимптотики (4) відомою.

2.2. Визначення членів сингулярної частини асимптотики. Доданки сингулярної частини асимптотики (4) визначаються із системи диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau^3}+a_0(x,t)\frac{\partial V_0}{\partial\tau}\varphi'(t)-b_0(x,t)\left(u_0\frac{\partial V_0}{\partial\tau}+V_0\frac{\partial V_0}{\partial\tau}\right)=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau^3}+a_0(x,t)\frac{\partial V_j}{\partial\tau}\varphi'(t)-b_0(x,t)\left(u_0\frac{\partial V_j}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(V_0V_j\right)\right)=F_j(x,t,\tau), \tag{8}$$

де функції $F_j(x,t,\tau)=F_j(t,V_0(x,t,\tau),\ldots,V_{j-1}(x,t,\tau),u_0(x,t),\ldots,u_j(x,t)),$ визначаються рекурентно після визначення функцій регулярної частини асимптотики $u_0(x,t)$, $u_1(x,t)$, $\ldots$, $u_j(x,t)$, $V_0(x,t,\tau),$ $V_1(x,t,\tau)$, $\ldots$, $V_{j-1}(x,t,\tau)$, $j=\overline{1,2N}$.

Процедура визначення сингулярної частини асимптотики має декілька етапів. Спочатку функції сингулярної частини асимптотики визначаються на кривій розриву $\varphi=\varphi(t)$, яка апріорі вважається відомою. Потім визначається звичайне диференціальне рівняння для функції $\varphi=\varphi(t)$, після чого будується продовження сингулярної частини асимптотики з кривої розриву $x=\varphi(t)$ у деякий окіл цієї кривої таким чином, щоб доданки сингулярної частини асимптотики побудованого розв'язку належали простору G_1 .

Для визначення сингулярної частини асимптотики на кривій розриву, тобто функцій $v_j=v_j(t,\tau)=V_j(x,t,\tau)|_{x=\varphi(t)}$, $j=\overline{0,N}$, маємо диференціальні рівняння з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial\tau^3}+a_0(\varphi,t)\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\varphi'(t)-b_0(\varphi,t)\left[u_0(\varphi,t)\frac{\partial v_0}{\partial\tau}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\right]=0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial^3 v_j}{\partial\tau^3}+a_0(\varphi,t)\frac{\partial v_j}{\partial\tau}\varphi'(t)-b_0(\varphi,t)\left[u_0(\varphi,t)\frac{\partial v_j}{\partial\tau}+v_j\frac{\partial v_0}{\partial\tau}+v_0\frac{\partial v_j}{\partial\tau}\right]=F_j(t,\tau), \tag{10}$$

де функції $F_j(t,\tau)=F_j(t,V_0(x,t,\tau),\ldots,V_{j-1}(x,t,\tau),u_0(x,t),\ldots,u_j(x,t))|_{x=\varphi(t)},$ у правій частині рівнянь (10) визначаються рекурентно після визначення функцій $u_0(x,t)$, $u_1(x,t)$, $\ldots$, $u_j(x,t)$, $V_0(x,t,\tau),$ $V_1(x,t,\tau)$, $\ldots$, $V_{j-1}(x,t,\tau)$, $j=\overline{1,2N}$.

Розв'язок рівняння (9) можна отримати в наочному вигляді:

$$v_0(t,\tau)=-3\frac{A(\varphi,t)}{b_0(\varphi,t)}\cosh^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi,t)}}{2}(\tau+c_0(t))\right), \tag{11}$$

де $\varphi=\varphi(t)$, і використано позначення

$$+12\tau\cosh^{-3}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)-24\cosh^{-2}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right). \tag{12}$$

Тут і далі припукається виконання умови про те, що $A(\varphi,t)>0,$ де $c_0(t)$ – стала інтегрування.

Справедливі такі твердження, які використовуються при математичному обгрунтуванні описанного вище алгоритму.

Лема 1. *Якщо $A(\varphi,t)>0$, то розв'язком рівняння (9) у просторі G_1^0 є функція вигляду (11).*

Лема 2. *Якщо $F_j(t,\tau)\in G_1^0$, $j=\overline{1,2N},$ то розв'язок рівнянь (12) існує у просторі G_1 тоді і лише тоді, коли виконуються умова* [4]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F_j(t,\tau)v_0(t,\tau)d\tau=0,\quad j=\overline{1,N}. \tag{13}$$

Леми 1 і 2 використовуються не лише для обгрунтування алгоритму побудови асимптотичних розв'язків рівняння (2), але й для визначення кривої розриву, про яку згадувалося вище.

Розглянемо умову ортогональності (13) при $j=1$, тобто для функції

$$F_1(t,\tau)=a_0(\varphi,t)\frac{\partial v_0}{\partial t}+\ C\neq 1\ b_1(\varphi,t)\frac{\partial v_0}{\partial \tau}v_0+\tau b_{0x}(\varphi,t)\frac{\partial v_0}{\partial \tau}v_0.$$

Зауважимо, що функція $F_1(t,\tau)\in G_1^0$.

Враховуючи умову ортогональності (13), при $j=1$ знаходимо звичайне диференціальне рівняння для функції $\varphi(t)$:

$$15a_0(\varphi,t)b_0(\varphi,t)\frac{d}{dt}A(\varphi,t)+\Big[\big(10a_{0x}(\varphi,t)b_0(\varphi,t)-36a_0(\varphi,t)b_{0x}(\varphi,t)\big)\varphi'+$$
$$+10b_0^2(\varphi,t)u_{0x}(\varphi,t)+3(b_0^2(\varphi,t))_x u_0(\varphi,t)-5a_0(\varphi,t)(b_0^2(\varphi,t))_t\Big]A(\varphi,t)=0\,. \tag{14}$$

За досить загальних припущень щодо функцій $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$ для коефіцієнтів диференціального рівняння (14) виконуються умови теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші, а тому це рівняння має розв'язок. Позначимо

$$\Phi_j(t,\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}F_j(t,\tau)d\tau+E_j(t).$$

Тут функція $E_j(t)$, $j=\overline{1,N}$, – стала інтегрування, яка визначається з умови $\lim\limits_{\tau\to+\infty}E_j(t,\tau)=0.$ Справедлива лема.

Лема 3. *Якщо* $F_j(t,\tau)\in G_1^0$, $j=\overline{1,N},$ *і виконується умова (13), то* $v_j(t,\tau)\in G_1^0$, $j=\overline{1,2N},$ *тоді і лише тоді, коли виконується умова*

$$\lim_{\tau\to-\infty}\Phi_j(t,\tau)=0,\quad j=\overline{1,2N}. \tag{15}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (10) можна записати, використовуючи метод варіації довільної сталої, у вигляді

$$v_j(t,\tau)=\left(\int_{\tau_0}^{\tau}\Phi_j(t,\tau_1)v_{0\tau}(t,\tau_1)d\tau_1+c_1\right)v_{0\tau}(t,\tau)\int_{\tau_0}^{\tau}v_{0\tau}^{-2}(t,\tau_1)d\tau_1-\left(\int_{\tau_0}^{\tau}\Phi_j(t,\tau_1)v_{0\tau}(t,\tau_1)\int_{\tau_0}^{\tau_1}v_{0\tau}^{-2}(t,\xi)d\xi d\tau_1+c_2\right)v_{0\tau}(t,\tau)\,, \tag{16}$$

де c_1, c_2 – довільні дійсні сталі.

2.3. Обґрунтування асимптотики. Доведено таке твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються припущення:*

1) *функції* $a_k(x,t)$, $b_k(x,t)\in C^{(\infty)}(R\times[0;T])$, $k\geq 0$;
2) *справедлива нерівність* $A(\varphi,t)>0,$ *для функції* $\varphi(t)$, *що задовольняє рівняння* (17);
3) *функції* $F_j(t,\tau)\in G_1^0$, $j=\overline{1,N}$, *і виконуються умови* (13), (15).

Тоді асимптотичний однофазовий солітоноподібний розв'язок рівняння (31) *має вигляд*

$$Y_N(x,t,\tau,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\big[u_j(x,t)+v_j(t,\tau)\big],\quad \tau=\frac{x-\varphi(t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{17}$$

і цей розв'язок задовольняє на множині $\mathbf{R}\times[0;T]$ *рівняння* (1) *з точністю* $O(\varepsilon^N)$, *а при* $\tau\to\pm\infty$ *функція* (17) *задовольняє рівняння* (1) *з точністю* $O\left(\varepsilon^{N+1/2}\right)$.

3. Рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами для випадку, коли $a_0(x,t)=1$, $a_1(x,t)=t^2$, $b_0(x,t)=1,$ $b_1(x,t)=x^2+t^2.$ Побудуємо асимптотичні розв'язки рівняння (1), коли його коефіцієнти мають вигляд

$$a(x,t,\varepsilon)=1+\varepsilon t^2\,,\quad b(x,t,\varepsilon)=1+\varepsilon\left(x^2+t^2\right). \tag{18}$$

Асимптотичний розв'язок рівняння (1), (18) шукаємо у вигляді (4). Оскільки доданки регулярної частини асимптотики задовольняють рівняння (5), (6), то як регулярні члени асимптотики покладемо $u_0(x,t)=1$, $u_1(x,t)=1$.

3.1. Головний член асимптотичного солітоноподібного розв'язку. Головний доданок сингулярної частини асимптотики – функція $v_0(t,\tau)$, визначається формулою

$$v_0(t,\tau)=-3\frac{A(\varphi,t)}{b_0(\varphi,t)}\cosh^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi,t)}}{2}(\tau+c_0(t))\right), \tag{19}$$

де $c_0(t)$ – стала інтегрування, $\varphi=\varphi(t)$ – функція, що визначає криву розриву. Нагадаємо, що ця функція має задовольняти умову

$$A(\varphi,t)=-a_0(\varphi,t)\varphi'(t)+b_0(\varphi,t)u_0(\varphi,t)>0. \tag{20}$$

Нехай надалі стала інтегрування $c_0(t)=0$. Тоді крива розриву визначається із рівняння (14), яке набуває вигляду $\frac{d}{dt}(A(\varphi(t),t)=0$. Звідки знаходимо, що при початковій умові $\varphi(0)=0$ крива розриву має вигляд $\varphi(t)=(1-C)t$, де $C\neq 1$ – довільна константа.

Головний член сингулярної частини асимптотики вигляду (4) визначається за допомогою формули

$$v_0(t,\tau)=-3\frac{A(\varphi(t),t)}{b_0(\varphi(t),t)}\cosh^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{2}\tau\right)=-3C\cosh^{-2}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=-3C\cosh^{-2}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\frac{x-(1-C)t}{\sqrt{\varepsilon}}\right). \quad (21)$$

Очевидно, що функція $v_0(t,\tau)\in G_1^0$.

3.2. Побудова першого члена сингулярної частини асимптотики. Побудуємо перший доданок сингулярної частини. Ураховуючи вираз для функції

$$F_1(t,\tau)=a_0(\varphi(t),t)\frac{dv_0}{dt}+\frac{\partial v_0}{\partial\tau},$$

знаходимо

$$\Phi_1(t,\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}F_1(t,\tau)d\tau+E_1(t)=a_0(\varphi(t),t)\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\tau}v_0 d\tau+v_0(t,\tau)+E_1(t)=v_0(t,\tau)+E_1(t).$$

Оскільки $v_0(t,\tau)\in G_1^0$, то можна покласти $E_1(t)=0$, де $E_1(t)$ – є стала інтегрування. Тоді

$$v_1(t,\tau)=\left(\int_{\tau_0}^{\tau}\Phi_1(t,\tau_1)v_{0\tau}(t,\tau_1)d\tau_1+c_1\right)v_{0\tau}(t,\tau)\int_{\tau_0}^{\tau}v_{0\tau}^{-2}(t,\tau_1)d\tau_1-\left(\int_{\tau_0}^{\tau}\Phi_1(t,\tau_1)v_{0\tau}(t,\tau_1)\int_{\tau_0}^{\tau_1}v_{0\tau}^{-2}(t,\xi)d\xi d\tau_1+c_2\right)v_{0\tau}(t,\tau)=$$

$$=-\frac{1}{16}\cosh^{-5}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)-\frac{3}{32}\cosh^{-7}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)-$$

$$-3\cosh^{-6}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)\sinh^{2}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)-\frac{45}{16}\tau\cosh^{-7}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)+$$

$$+3\cosh^{-6}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)+\frac{1}{16}\cosh^{-3}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)+\cosh^{-4}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)+$$

$$+\frac{15}{16}\tau\cosh^{-5}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)-\cosh^{-4}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)+$$

$$+12\tau\cosh^{-3}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right)-24\cosh^{-2}\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau\right).$$

Отже, асимптотичний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$Y_1(x,t,\tau)=u_0(x,t)+v_0(t,\tau)+\sqrt{\varepsilon}(u_1(x,t)+v_1(t,\tau)),\ \tau=\frac{x-(1-C)t}{\sqrt{\varepsilon}},\ \text{де стала } C>0,\ C\neq 1. \quad (22)$$

Продемонструємо графічно відповідні асимптотичні розв'язки для випадку $C=2$.

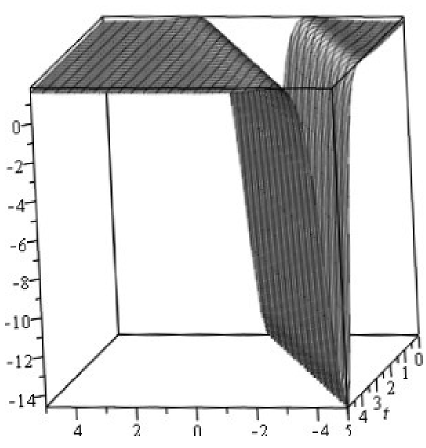

Рис. 1. Розв'язок (22) при $\varepsilon=0{,}36$

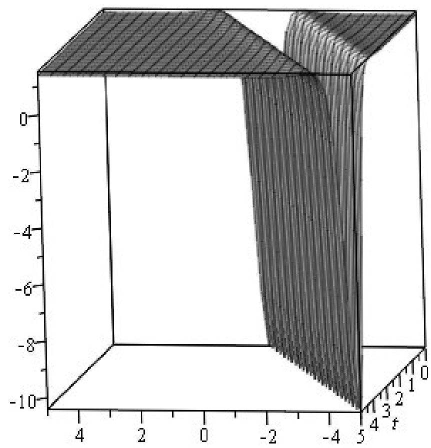

Рис. 2. Розв'язок (22) при $\varepsilon=0{,}16$

Висновки. У даній статті розглянуто задачу про побудову асимптотичного однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами ы малим параметром першого степеня при старшій похідній для випадку ненульового фону. Наведено алгоритм побудови такого асимптотичного розв'язку в загальному випадку та продемонстровано його використання для випадку конкретно заданих змінних коефіцієнтів.

Список використаних джерел:

1. Головатий Ю.Д. Диференціальні рівняння / Ю.Д. Головатий, В.М. Кирилич, С.П. Лавренюк. – Львів : ЛНУ ім. Ів. Франка, 2011. – 470 с.
2. Новиков С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза / С.П. Новиков // Функц. анализ и его прилож., 1974. – Т. 8, № 3. – С. 54–66.
3. Самойленко В.Г. Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами / В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко // Укр. мат. журн., 2005. – Т. 57, № 1. – С. 111–124.
4. Самойленко В.Г. Існування розв'язку неоднорідного рівняння з одновимірним оператором Шредінгера в просторі швидко спадних функцій / В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко // Укр. мат. вісн., 2012. – Т. 9, № 2. – С. 237–245.
5. Ablowitz M.J. Nonlinear dispersive waves. Asymptotic analysis and solitons / M.J. Ablowitz. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2011. – 348 p.
6. Davydov A.S. Solitons in biology / A.S. Davydov // Physica Scripta, 1979. – Vol. 20, № 2. – P. 307–315.
7. Dobrokhotov S.Yu. Hugoniot–Maslov chains for solitary vortices of the shallow water equation / S.Yu. Dobrokhotov // Rus. J. Math. Phys., 1999. – Vol. 6, № 2. – P. 137–173.
8. Egorova I. On Cauchy problem for the Korteweg-de Vriea equation with step-like finite gap initial data I. Schwartz-type perturbations / I. Egorova, K. Grunert, G. Teschl // Nonlinearity, 2009. – Vol. 22. – P. 1431–1457.
9. Korteweg-de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solutions / C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruscal, R.M. Miura // Comm. Pure Appl. Math., 1974. – Vol. 27. – P. 97–133.
10. Hirota R. Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solutions / R. Hirota // Phys. Rev. Lett., 1971. – Vol. 27. – P. 1192–1194.
11. Korteweg D.J. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves / D.J. Korteweg, de G. Vries // Philos. Mag., 1895. – № 39. – P. 422–433.
12. Maslov V.P., Omel'yanov G.A. Geometric asymptotics for PDE. I. / V.P. Maslov, G.A. Omel'yanov – Providence : American Math. Society, 2001. – 243 p.
13. Samoilenko V. Asymptotic soliton-like solutions to the singularly perturbed Benjamin–Bona–Mahony equation with variable coefficients / V. Samoilenko, Yu. Samoilenko // J. of Math. Phys., 2019. – Vol. 60, № 1. – P. 011501–011513.
14. Asymptotic solutions of solitontype of the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients and singular perturbation / V.H. Samoilenko, V.O. Limarchenko, V.S. Vovk , K.S. Zaitseva // Mathematical Modeling and Computing, 2019. – Vol. 6, № 2. – P. 374–385.
15. Samoylenko V.Hr. On Cauchy problem for Korteweg-de Vries equation with variable coefficients and small parameter / V.Hr. Samoylenko, Yu. Samoylenko // Collection of papers "Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics". – Siedlce : Wydavnitstwo Collegium Mazovia, 2011. – P. 128–135.
16. Toda M. Waves in nonlinear lattice / M. Toda // Suppl. Theory Phys., 1970. – № 45. – P. 174–200.
17. Whithem G.B. Nonlinear dispersive waves / G.B. Whithem // Proc. Roy. Soc., Ser. A., 1965. – № 283. – P. 238–261.
18. Zabusky N.J. Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states / N.J. Zabusky, M.D. Kruskal // Phys. Rev. Lett., 1965. – Vol. 15. – P. 240–243.

Надійшла до редколегії 18.12.19

В. Самойленко, д-р физ.-мат. наук, проф.,
Ю. Самойленко, д-р физ.-мат. наук,
М. Орлова, студ.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА НЕНУЛЕВОМ ФОНЕ

Построены асимптотические однофазовые солитоноподобные решения уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами и малым параметром первой степени при старшей производной для случая ненулевого фона. Предложен алгоритм нахождения такого асимптотического решения и продемонстрировано его применение на примере уравнения Кортевега–де Фриза с конкретно заданными переменными коэффициентами.

Ключевые слова: уравнения Кортевега-де Фриза, сингулярное возмущение,переменные коэффициенты; асимптотические решения; солитоноподобные развязки.

V. Samoilenko, Full Doctor, prof.,
Yu. Samoilenko, Full Doctor,
M. Orlova, stud.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ASYMPTOTIC SOLUTIONS TO THE KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH VARIABLE COEFFICICNTES AT NON-ZERO BACKGROUND

Problem on studying asymptotic one-phase soliton-like solutions to the Korteweg–de Vries equation with variable coefficients and a small parameter of the first degree at the highest derivative is considered for the case of non-zero background. There is given an algorithm of constructing the solutions for general case. The algorithm is demonstrated for the equation with some given variable coefficients.

Keywords: he Korteweg-de Vries equation, singular perturbation, variable coefficients, asymptotic solutions, soliton like solutions.

УДК 539.3
DOI: https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.09.40-47

Н. Гук, д-р фіз.-мат. наук,
Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара, Дніпро, Україна
E-mail: natalyguk29@gmail.com

ОСОБЛИВОСТІ ВАРІАЦІЙНОГО ФОРМУЛЮВАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Розглянуто задачу ідентифікації жорстких включень у матеріалі пружної пластини за результатами вимірювання деформацій. Задачу сформульовано як обернену задачу теорії тонких пластин. Варіаційне формулювання враховує функціонал повної енергії пластини та додаткову умову, що визначає близькість розрахованого за допомогою математичної моделі та спостережуваного станів пластини. Пошук розв'язку оберненої задачі здійснено у два етапи: визначається місцерозташування включень; уточнюються значення фізико-механічних параметрів включень з використанням градієнтного методу.

Ключові слова: тонкі пластини, обернені задачі, ідентифікація жорстких включень, пружна пластина, деформація.

Вступ. При дослідженні фізичних явищ або об'єктів емпіричними методами досить часто виникають обставини, при яких відсутня можливість безпосереднього вимірювання деяких характеристик об'єкта дослідження. Виконання експерименту може бути пов'язане з технічними і матеріальними труднощами, однак майже завжди є можливість шляхом спостереження отримати будь-які додаткові відомості про досліджуваний об'єкт, за якими можливо зробити