

6. Filbet F. Accurate Numerical Methods for the Collisional Motion of (Heated) Granular Flows / F. Filbet, L. Pareschi, G. Toscani // J. of Computational Phys., 2005. – Vol. 202. – P. 216–235.
7. Pareschi L. Implicit-Explicit Runge–Kutta Schemes for Stiff Systems of Differential Equations / L. Pareschi, G. Russo // Recent Trends in Numerical Analysis. – 2000. – P. 269–288.
8. Pareschi L. Numerical Solution of the Boltzmann Equation I: Spectrally Accurate Approximation of the Collision Operator / L. Pareschi, G. Russo // SIAM J. on Numerical Analysis, 2000. – Vol. 37, N 4. – P. 1217–1245.
9. Petrina D.Ya. Stochastic Dynamics and Boltzmann hierarchy / D.Ya. Petrina. – Kyiv : Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2008. – 400 p.
10. Toscani G. The Large-Time Behavior of Nonconservative Evolution Equations / G. Toscani // Kinetic Methods for Nonconservative and Reacting Systems. Seconda Università di Napoli, 2005. – Vol. 16. – P. 145–320.
11. Strang G. On the Construction and Comparison of Difference Schemes / G. Strang // SIAM J. on Numerical Analysis, 1968. – Vol. 5(3). – P. 506–517.

Надійшла до редколегії 24.12.19

И. Гапьяк, канд. физ.-мат. наук, ассист.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ГРАНУЛИРОВАННЫХ ГАЗОВ

Для систем частиц с диссипативной взаимодействием рассмотрено обобщение классического уравнения Больцмана, а именно, кинетическое уравнение типа Больцмана для гранулированных газов. Построено численное решение задачи Коши для такого кинетического уравнения и исследована его устойчивость.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, гранулированные газы, многочисленные развязки, вычислительные схемы.

I. Gapyak, Ph. D., assist. prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

THE NUMERICAL SOLUTION OF THE BOLTZMANN KINETIC EQUATION FOR GRANULAR GASES

For a system of particles with a dissipative interaction we consider the Boltzmann type kinetic equation for granular gases. A numerical solution of the Cauchy problem for the Boltzmann type kinetic equation is constructed in two dimensional space and its stability is investigated.

Keywords: the Boltzmann kinetic equation, granular gases, numerical solutions, computing schemes.

УДК 532.59

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.07.30-35>

О. Авраменко, д-р. физ.-мат. наук, проф.,
М. Луньова, асп.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна
E-mail: oavramenko777@gmail.com, luneva.mariya@ukr.net

МОДУЛЯЦІЙНА СТІЙКІСТЬ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У ТРИШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ

Присвячено задачі про поширення слабконелінійних хвильових пакетів уздовж поверхонь контакту в тришаровій гідродинамічній системі "півпростір – шар – шар з твердою кришкою". Отримано умову розв'язності задачі в наближенні третього порядку, виведено еволюційне рівняння у формі нелінійного рівняння Шредінгера та умову модуляційної стійкості його розв'язків. Для розв'язку, який існує при балансі між дисперсією та нелінійністю, представлено діаграму стійкості та її аналіз.

Ключові слова: тришарова гідродинамічна систем, хвильові пакети, модуляційна стійкість, нелінійне рівняння Шредінгера.

Вступ. Аналіз умов стійкості внутрішніх хвиль у рідких системах різної густини викликають великий інтерес як у теоретичному, так і практичному плані, а дослідження хвильових процесів у рідинах та їхніх загальних властивостей на сьогодні залишається актуальним. Уперше нелінійне рівняння Шредінгера (НРШ) для слабконелінійних хвиль з дисперсією було отримане Бенні та Ньюеллом. НРШ для хвиль скінченної глибини було виведено Хасімото і Оно методом багатьох масштабів. Нелінійне рівняння еволюції у формі НРШ для різних двовимірних слабконелінійних гідродинамічних систем ідеальної рідини скінченної глибини були отримані в [3], [10] за допомогою того ж методу. Згодом Томас та ін. [14] вивели НРШ для поверхневих хвиль скінченної глибини з вихорами.

Найфе в статті [13] провів достатньо повний та розгорнутий аналіз хвильового руху і системі "півпростір–півпростір", методом багатомасштабних розвинень до третього порядку виведено еволюційне рівняння Шредінгера. Аналогічні дослідження про поширення хвильових пакетів у двохшарових гідродинамічних системах представлені у ряді праць, зокрема, для випадку "півпростір – шар з твердою кришкою" – у [4], для випадку "шар з твердим дном – шар з твердою кришкою" – у [5], для випадку "шар з твердим дном – шар" – у [6, 8]. Аналогічні підходи застосовані для дослідження поширення хвильових пакетів у тришаровій системі "шар з твердим дном – шар – шар з твердою кришкою" у працях [11, 12]. Задача про поширення внутрішніх хвиль у тришаровій гідродинамічній системі "півпростір – шар – шар з твердою кришкою" розглядалася у [1, 7, 9], де отримано дисперсійне рівняння та його розв'язки, побудовано три лінійні наближення слабконелінійної задачі, отримано умову розв'язуваності задачі другого наближення, досліджено енергетичні характеристики та форму хвильових пакетів на поверхнях контакту.

Ця стаття є продовженням згаданих вище досліджень. Тут виведено еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів та отримано умову модуляційної стійкості розв'язку, який існує при балансі між дисперсією та нелінійністю.

1. Постановка задачі. Досліджується задача про поширення двовимірних хвильових пакетів на поверхні нев'язкої нестисливої рідини під впливом сили тяжіння. Вважається, що хвилі поширюються вздовж осі x , а вертикальна вісь z спрямована в напрямку протилежному до напрямку дії сили тяжіння. Гідродинамічна система (рис. 1) складається з нижнього півпростору, середнього шару та верхнього шару з твердою кришкою $z = h_2 + h_3$. Середній шар обмежений поверхнями контакту $z = \eta_1(x, t)$ та $z = h_2 + \eta_2(x, t)$.

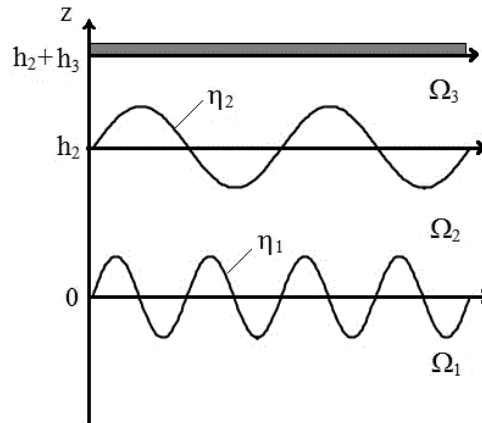


Рис 1. Схематичне зображення гідродинамічної системи "півпростір – шар – шар з твердою кришкою"

У безрозмірних величинах, введених за допомогою товщини внутрішнього шару h_2 , характерної довжини хвилі L , максимального відхилення a нижньої поверхні контакту та прискорення вільного падіння g , рух рідини описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \quad \text{у } \Omega_j, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \quad \text{при } z = \alpha \eta_1(x, t), j = 1, 2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \quad \text{при } z = h_2 + \alpha \eta_2(x, t), j = 2, 3, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (\rho_1 - \rho_2) \eta_1 + 0.5 \alpha \left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right) - 0.5 \alpha \left(\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)^2 \right) - \\ - T_1 \left[1 + \left(\alpha \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } z = \alpha \eta_1(x, t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \rho_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + \alpha \eta_2 (\rho_2 - \rho_3) + h_2 (\rho_2 - \rho_3) + 0.5 \rho_2 \alpha \left(\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)^2 \right) - 0.5 \rho_3 \alpha \left(\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right)^2 \right) - \\ - T_2 \alpha \left[1 + \left(\alpha \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } z = h_2 + \alpha \eta_2(x, t), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h_2 + h_3, \quad (6)$$

$$|\overline{\varphi_1}| \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, \quad (7)$$

де φ_j ($j = 1, 2, 3$) потенціали швидкостей в областях Ω_j ; ρ_1, ρ_2, ρ_3 – значення густини у відповідному шарі; T_1 та T_2 – коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях контакту, відповідно; t – час; α – коефіцієнт нелінійності.

Використавши метод багатомасштабних розвинень до третього порядку [13],

$$\eta_i(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{in}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad i = 1, 2,$$

$$\varphi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2, 3,$$

де $x_k = \alpha^k x$ та $t_k = \alpha^k t$ ($k = 0, 1, 2$), було отримано постановки для трьох перших наближень задачі та проведені дослідження у перших двох наближеннях [1, 7, 9].

Наведемо потрібні для подальшого дослідження співвідношення.

Відхилення поверхонь контакту

$$\eta_{11} = A(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{i\theta} + \bar{A}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-i\theta},$$

$$\eta_{21} = \frac{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega^2} \left(A(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{i\theta} + \bar{A}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-i\theta} \right), \quad (8)$$

де $A(x_1, x_2, t_1, t_2)$ і $\bar{A}(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – обвідна хвильового пакета на нижній поверхні контакту та її комплексно спряжена, $\theta = kx_0 - \omega t_0$, k та ω – хвильове число та частота центру хвильового пакету.

Умова розв'язності другого наближення

$$V_1 A_{t_1} + V_2 A_{x_1} = 0, \quad (9)$$

де V_i ($i=1,2$) коефіцієнти, що залежать від $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, h_2, h_3, T_1, T_2, \omega$; A_{x_1} , A_{t_1} – частинні похідні обвідної хвильового пакета.

2. Еволюційне рівняння та модуляційна стійкість його розв'язку. Підставивши отримані раніше розв'язки задач першого та другого наближення в рівняння для третього наближення, отримаємо задачу у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_{13_{x_0 x_0}} + \Phi_{13_{zz}} &= \left[-2\omega A_{x_2} - 2iA_{t_1 x_1} + \frac{i\omega}{k}(2kz-1)A_{x_1 x_1} \right] e^{i\theta+kz} + cc + NST, \\ \Phi_{23_{x_0 x_0}} + \Phi_{23_{zz}} &= \left[-K_1 A_{x_2} - 2iK_2 A_{t_1 x_1} + \frac{i}{k} K_3 A_{x_1 x_1} \right] e^{i\theta} + cc + NST, \\ \Phi_{33_{x_0 x_0}} + \Phi_{33_{zz}} &= \left[-2K_4 A_{x_2} - 2iK_5 A_{t_1 x_1} + \frac{i}{k} K_6 A_{x_1 x_1} \right] e^{i\theta} + cc + NST, \\ \eta_{13_{t_0}} - \Phi_{13_z} &= -A_{t_2} e^{i\theta} + i\omega k K_7 A^2 \bar{A} e^{i\theta} + cc + NST \text{ при } z=0, \\ \eta_{13_{t_0}} - \Phi_{23_z} &= -A_{t_2} e^{i\theta} + i\omega k K_8 A^2 \bar{A} e^{i\theta} + cc + NST \text{ при } z=0, \\ \eta_{23_{t_0}} - \Phi_{23_z} &= -\frac{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega^2} A_{t_2} e^{i\theta} + i\omega k K_9 A^2 \bar{A} e^{i\theta} + cc + NST \text{ при } z=h_2, \\ \eta_{23_{t_0}} - \Phi_{23_z} &= -\frac{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega^2} A_{t_2} e^{i\theta} + i\omega k K_{10} A^2 \bar{A} e^{i\theta} + cc + NST \text{ при } z=h_2, \\ \rho_1 \Phi_{13_{t_0}} - \rho_2 \Phi_{23_{t_0}} + (\rho_1 - \rho_2) \eta_{13} - T_1 \eta_{13_{x_0 x_0}} &= (i\omega K_{11} A_{t_2} - K_{12} A_{t_1 t_1} + K_{13} A_{t_1 x_1} + 2ikT_1 A_{x_2} + T_1 A_{x_1 x_1}) e^{i\theta} + \\ &+ K_{14} A^2 \bar{A} e^{i\theta} + cc + NST \text{ при } z=0, \\ \rho_2 \Phi_{23_{t_0}} - \rho_3 \Phi_{33_{t_0}} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{23} - T_2 \eta_{23_{x_0 x_0}} &= \left(i\omega K_{15} A_{t_2} - K_{16} A_{t_1 t_1} + K_{17} A_{t_1 x_1} + \right. \\ &+ 2ik \frac{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega^2} A_{x_2} + \left. \frac{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega^2} A_{x_1 x_1} \right) e^{i\theta} + \\ &+ K_{18} A^2 \bar{A} e^{i\theta} + cc + NST \text{ при } z=h_2, \\ \Phi_{33_z} &= 0 \text{ при } z=h_2+h_3, \\ \Phi_{13} &\rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (10)$$

де K_i ($i=\overline{1,18}$) – коефіцієнти, що залежать від $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, h_2, h_3, T_1, T_2, \omega$, отримані в пакеті символьних обчислень і тут не наводяться; NST – несекулярні доданки; cc – тут і далі, комплексно спряжені величини до попередніх виразів.

Розв'язки третього наближення, записані через невизначені коефіцієнти $B_{ij}^{(3)}$, $C_{ij}^{(3)}$, $D_{ij}^{(3)}$, $E_{ij}^{(3)}$, $F_{ij}^{(3)}$, $G_{ij}^{(3)}$, мають вигляд

$$\begin{aligned} \Phi_{13} &= \left(B_{10}^{(3)} + B_{11}^{(3)} \cdot z + B_{12}^{(3)} \cdot z^2 \right) e^{i\theta+kz} + \left(B_{20}^{(3)} + B_{21}^{(3)} \cdot z \right) e^{2i\theta+2kz} + B_{30}^{(3)} e^{3i\theta+3kz} + cc, \\ \Phi_{23} &= \left(C_{10}^{(3)} + C_{11}^{(3)} \cdot z + C_{12}^{(3)} \cdot z^2 \right) e^{i\theta+k(h_2-z)} + \left(C_{20}^{(3)} + C_{21}^{(3)} \cdot z \right) e^{2i\theta+2k(h_2-z)} + C_{30}^{(3)} e^{3i\theta+3k(h_2-z)} + \\ &+ \left(D_{10}^{(3)} + D_{11}^{(3)} \cdot z + D_{12}^{(3)} \cdot z^2 \right) e^{i\theta-k(h_2-z)} + \left(D_{20}^{(3)} + D_{21}^{(3)} \cdot z \right) e^{2i\theta-2k(h_2-z)} + D_{30}^{(3)} e^{3i\theta-3k(h_2-z)} + cc, \\ \Phi_{33} &= E_{11}^{(3)} \cdot (h_2 + h_3 - z) \sinh k(h_2 + h_3 - z) \cdot e^{i\theta} + E_{21}^{(3)} \cdot (h_2 + h_3 - z) \sinh 2k(h_2 + h_3 - z) \cdot e^{2i\theta} + \\ &+ \left(E_{10}^{(3)} + E_{12}^{(3)} \cdot (h_2 + h_3 - z)^2 \right) \cosh k(h_2 + h_3 - z) e^{i\theta} + E_{20}^{(3)} \cosh 2k(h_2 + h_3 - z) e^{2i\theta} + E_{30}^{(3)} \cosh 3k(h_2 + h_3 - z) e^{3i\theta} + cc, \quad (11) \\ \eta_{13} &= F_0^{(3)} + F_1^{(3)} e^{i\theta} + F_2^{(3)} e^{2i\theta} + F_3^{(3)} e^{3i\theta} + cc, \\ \eta_{23} &= G_0^{(3)} + G_1^{(3)} e^{i\theta} + G_2^{(3)} e^{2i\theta} + G_3^{(3)} e^{3i\theta} + cc. \end{aligned}$$

Підставивши вирази для невідомих функцій (11) у (10), із перших трьох рівнянь знайдемо коефіцієнти $B_{11}^{(3)}$, $B_{12}^{(3)}$, $C_{11}^{(3)}$, $C_{12}^{(3)}$, $D_{11}^{(3)}$, $D_{12}^{(3)}$, $E_{11}^{(3)}$, $E_{12}^{(3)}$. Урахувавши ці значення, після прирівнювання виразів в правих і лівих частинах при $e^{i\theta}$ отримано систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $B_{10}^{(3)}$, $C_{10}^{(3)}$, $D_{10}^{(3)}$, $E_{10}^{(3)}$, $F_1^{(3)}$, $G_1^{(3)}$:

$$\begin{aligned} -kB_{10}^{(3)} &= b_1, \\ k e^{kh_2} C_{10}^{(3)} - k e^{-kh_2} D_{10}^{(3)} &= b_2, \\ k C_{10}^{(3)} - k D_{10}^{(3)} - i\omega G_1^{(3)} &= b_3, \\ k \sinh(kh_3) E_{10}^{(3)} - i\omega G_1^{(3)} &= b_4, \\ -i\rho_1 \omega B_{10}^{(3)} + i\rho_2 \omega e^{kh_2} C_{10}^{(3)} + i\rho_2 \omega e^{-kh_2} D_{10}^{(3)} + (\rho_1 - \rho_2 + T_1 k^2) F_1^{(3)} &= b_5, \\ -i\rho_2 \omega C_{10}^{(3)} - i\rho_2 \omega D_{10}^{(3)} + i\rho_3 \omega \cosh(kh_3) E_{10}^{(3)} + (\rho_2 - \rho_2 + T_2 k^2) G_1^{(3)} &= b_6, \end{aligned} \quad (12)$$

де $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ – вільні члени, які залежать від $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, h_2, h_3, T_1, T_2, \omega$.

Система лінійних рівнянь (12) несумісна, її умова розв'язності має вигляд

$$W_1 A_{t_2} + W_2 A_{x_2} + W_3 A_{x_1 x_1} + W_4 A^2 \bar{A} = 0, \quad (13)$$

де W_i ($i = \overline{1,4}$) коефіцієнти, що залежать від $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, h_2, h_3, T_1, T_2, \omega$.

Групова швидкість $\omega' = d\omega / dk$ отримана із дисперсійного співвідношення [1], з урахуванням чого умова розв'язності (9) задачі другого наближення набуває вигляду

$$A_t + \omega' A_{x_1} = 0. \quad (14)$$

Аналогічно, умова розв'язності (13) третього наближення має вигляд

$$A_{t_2} + \omega' A_{x_2} - \frac{1}{2} i \omega'' A_{x_1 x_1} = i A^2 \bar{A}. \quad (15)$$

Частинні похідні A_t, A_x, A_{xx} запишемо у вигляді сум за степенями параметра нелінійності

$$A_t = \sum_{n=1}^2 \alpha^n A_{t_n} + O(\alpha^3), \quad A_x = \sum_{n=1}^2 \alpha^n A_{x_n} + O(\alpha^3), \quad A_{xx} = \alpha^2 A_{x_1 x_1} + O(\alpha^3), \quad (16)$$

де похідні A_{t_n} та A_{x_n} визначають внесок членів порядку α^n у загальне значення похідних A_t та A_x .

Помножимо співвідношення (14) та (15) на α та α^2 , додамо одне до одного отримані вирази та, враховуючи (16), отримаємо шукане еволюційне рівняння обвідної на нижній поверхні контакту. Маємо:

$$A_t + \omega' A_x - \frac{1}{2} i \omega'' A_{xx} = i \alpha^2 I A^2 \bar{A}. \quad (17)$$

Враховуючи співвідношення (8) та використовуючи рівняння (17), нескладно отримати еволюційне рівняння на верхній поверхні контакту

$$A_t + \omega' A_x - \frac{1}{2} i \omega'' A_{xx} = i \alpha^2 J A^2 \bar{A}, \quad (18)$$

де

$$J = \frac{\rho_2^2 \omega^4}{\left(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + \left(\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3 \right) \sinh kh_2 \right)^2} I \quad (19)$$

Здійсимо перехід до системи, що рухається з груповою швидкістю, використавши заміну $t = \zeta$ і $\xi = x - \omega't$. При цьому еволюційне рівняння (17) набуде вигляду

$$A_\zeta - \frac{1}{2} i \omega'' A_{\xi\xi} = i \alpha^2 I A^2 \bar{A} \quad (20)$$

Зазначимо, що еволюційне рівняння (17) має розв'язок, який залежить лише від часу, який існує при балансі між дисперсією та нелінійністю [2]:

$$A = \frac{1}{2} a \exp(i \alpha^2 a^2 I \zeta), \quad (21)$$

де a – стала. Такий розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера раніше вже розглядався у статтях [4, 5, 6, 13] для різних двошарових гідродинамічних систем. Умови модуляційної стійкості на нижній та верхній поверхнях контакту для даної гідродинамічної системи мають вигляд

$$I \omega'' < 0, \quad (22)$$

$$J \omega'' < 0. \quad (23)$$

Зазначимо, що враховуючи рівність (19), при дослідженні модуляційної нестійкості хвильових пакетів на нижній та верхній поверхнях контакту можна обмежитись лише розглядом умови (22). Чисельний аналіз знакосталості величин I та ω виявив наступне. Величина ω є від'ємною на всій області дослідження, а I змінює знак залежно від параметрів системи. Знайдено криві, при переході через які величина I змінює знак. На рис. 2 зображено діаграму модуляційної стійкості розв'язку (21). Області модуляційної стійкості (МС) та модуляційної нестійкості (МН) побудовані в системі (ρ_3, k) для фізично прийнятних значень $0 < \rho_3 < \rho_2$ та $0 < k < 1,4$, значення густини нижнього півпростору $\rho_1 = 1$ та густини середнього шару $\rho_2 = 0,9$.

При $h_3 = 0,5$ виявлено три криві, що розділяють площину (ρ_3, k) на дві області МС та три області МН (рис. 2а). Перша вузька область МС1, що обмежена кривими "1" і "2", відповідає капілярним хвилям. Друга область МС2, що обмежена кривими "1", "2" і "3", відповідає як капілярним, так і гравітаційним хвилям та розділяє дві області модуляційної нестійкості МН2 і МН3. Третя область модуляційної нестійкості МН1 виявлена для хвильових чисел більших за одиницю і ця область відділяється від МС1 та МС2 кривою "2".

На рис. 2, б представлено діаграму стійкості при $h_3 = 1,5$. Виявлено дві криві, які розділяють площину (ρ_3, k) на дві області модуляційної нестійкості (МН1 для капілярних хвиль та МН2 для капілярно-гравітаційних), а також дві області модуляційної стійкості МС1 і МС2. Область модуляційної нестійкості для капілярно-гравітаційних хвиль при $h_3 = 1,5$ утворилась у результаті злиття двох областей модуляційної нестійкості МН2 та МН3 при меншому значенні товщини верхнього шару $h_3 = 0,5$ (рис. 2, а).

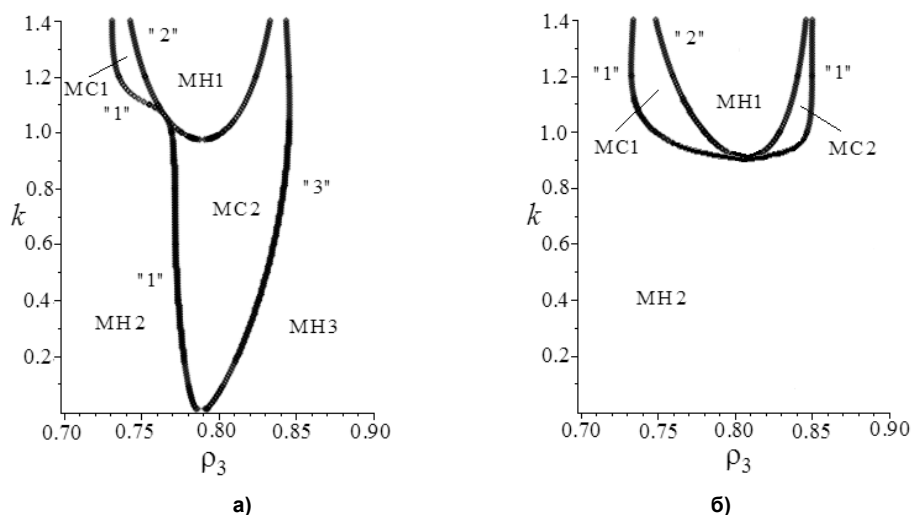


Рис. 2. Діаграми стійкості при значенні товщини верхнього шару а) $h_3 = 0,5$, б) $h_3 = 1,5$

Висновки. Розглянуто слабконелінійну задачу поширення хвильових пакетів у системі "півпростір – шар – шар з твердою кришкою". Виведено еволюційні рівняння поширення хвильових пакетів вздовж поверхонь контакту у вигляді нелінійних рівнянь Шредингера. Побудовано діаграми модуляційної стійкості для різних значень товщини верхнього шару на площині "густина верхнього шару – хвильове число", при цьому виявлено криві, які відділяють область модуляційної стійкості від нестійкості для капілярних та гравітаційних хвиль. Виявлено, що області модуляційної нестійкості істотно розширюються при збільшенні товщини верхнього шару.

Список використаних джерел:

1. Умови поширення хвиль у напівнескінченній тришаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою / О.В. Авраменко, В.В. Наратовий, М.В. Луньова, І.Т. Селезов // Математичні методи та фізико-механічні поля, 2017. – 60, № 4. – С. 137–151.
2. Гуртовий Ю.В. Математичне моделювання нормальної і аномальної дисперсії хвильового пакету / Ю.В. Гуртовий // Наукові записки. Серія : Математичні науки, 2016. – С. 39–44.
3. Седлецький Ю.В. Нелінійне рівняння Шредингера вищого порядку для стоксових хвиль на поверхні рідини довільної глибини / Ю.В. Седлецький // Укр. фіз. журн., 2003. – Т. 48, № 1. – С. 82–95.
4. Селезов І.Т. Еволюція нелінійних волнових пакетів з урахуванням поверхневого натяження на поверхні контакту / І.Т. Селезов, О.В. Авраменко // Математичні методи та фізико-механічні поля, 2001. – 44, № 2. – С. 113–122.
5. Селезов І.Т. Устойчивость волновых пакетов в двухслойной гидродинамической системе / І.Т. Селезов, О.В. Авраменко, Ю.В. Гуртовий // Прикладна гідромеханіка, 2006. – 8(90). – С. 60–65.
6. Нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных гравитационных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью / І.Т. Селезов, О.В. Авраменко, Ю.В. Гуртовий, В.В. Наратовий // Математичні методи та фізико-механічні поля, 2016. – 52, № 1. – С. 72–83.
7. Avramenko O. Analysis of energy of internal waves in a three-layer semiinfinite hydrodynamic system / O. Avramenko, M. Lunyova // Eastern-European J. of Enterprise Technologies, 2018. – 2/5 (92). – P. 26–33.
8. Avramenko O.V. Energy of Motion of Internal and Surface Waves in a Two-Layer Hydrodynamic System / O.V. Avramenko, V.V. Naratoviy, I.T. Selezov // J. of Mathemat. Sci., 2018. – 229 (3). – P. 241–252.
9. Avramenko O.V. Wave propagation in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system with a rigid lid / O.V. Avramenko, M.V. Lunyova V.V. Naratoviy // Eastern-European J. of Enterprise Technologies, 2017. – 5/5 (89). – P. 58–66. doi: 10.15587/1729-4061.2017.111941.
10. Choi W. Nonlinear evolution equations for two-dimensional surface waves in a fluid of finite depth / W. Choi // J. of Fluid Mechanics, 1995. – 295. – P. 381–394.
11. Hurtoviy Yu. Analysis of conditions for the propagation of internal waves in a three-layer finite-depth liquid / Yu. Hurtoviy, V. Naratoviy, V. Bohdanov // Eastern-European J. of Enterprise Technologies, 2018. – 3/5 (93). – P. 37–46.
12. Naratoviy V. Investigation of the energy of wave motions in a three-layer hydrodynamic system/ V. Naratoviy, D. Kharchenko // Waves in Random and Complex Media, 2019. – <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/17455030.2019.1699674>.

13. Nayfeh A.H. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface / A.H. Nayfeh // Trans. ASME., Ser. E., 1976. – 43, № 4. – P. 584–588.
 14. Thomas R. A nonlinear Schrödinger equation for water waves on finite depth with constant vorticity / R. Thomas, C. Kharif, M. Manna // Physics of Fluids, 2012. – 24(12). – 127102. doi:10.1063/1.4768530.

Надійшла до редколегії 17.12.19

О. Авраменко, д-р. физ.-мат. наук, проф.,
 М. Лунёва, асп.
 Центральноукраїнський державний педагогічний університет
 імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна

МОДУЛЯЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ТРЁХСЛОЙНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Статья посвящена проблеме распространения слабонелинейных волновых пакетов вдоль поверхностей контакта в трёхслойной гидродинамической системе "полупространство – слой – слой с твёрдой крышкой". Получено условие разрешимости проблемы в приближении третьего порядка, выведено эволюционное уравнение в форме нелинейного уравнения Шредингера и условие модуляционной устойчивости его решений. В случае баланса между дисперсией и нелинейностью получено решение, представлена диаграмма его устойчивости и её анализ.

Ключевые слова: трехслойная гидродинамическая систем, волновые пакеты, модуляционная устойчивость, нелинейное уравнение Шредингера.

O. Avramenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.,
 M. Lunyova, Ph. D. stud.
 Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

MODULATION STABILITY OF WAVE PACKETS IN A THREE-LAYER HYDRODYNAMIC SYSTEM

The article is devoted to the problem of propagation of weakly nonlinear wave-packets along contact surfaces in a three-layer hydrodynamic system "half space – layer – layer with rigid lid". The condition of solvability of the problem in the third-order approximation is obtained, the evolution equation is derived in the form of a nonlinear Schrödinger equation and the modulation stability condition for its solutions is obtained. The stability diagram and its analysis are presented for the solution which takes place in the case of the balance between dispersion and non-linearity.

Keywords: three-layer hydrodynamic systems, wave packets, modulation stability, nonlinear Schrödinger equation.

УДК 517.9

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.08.35-40>

В. Самойленко, д-р физ.-мат. наук, проф.,
 Ю. Самойленко, д-р физ.-мат. наук,
 М. Орлова, студ.
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
 E-mail: valsamyul@gmail.com

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ НА НЕНУЛЬОВОМУ ФОНІ

Побудовано асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами і малим параметром першого степеня при старшій похідній для випадку ненульового фону. Наведено алгоритм відшукування такого асимптотичного розв'язку і продемонстровано його застосування на прикладі рівняння Кортевега–де Фріза з конкретно заданими змінними коефіцієнтами.

Ключові слова: рівняння Кортевега–де Фріза, сингулярне збурення, змінні коефіцієнти, асимптотичні розв'язки, солітоноподібні розв'язки.

Вступ. Рівняння Кортевега–де Фріза на сьогодні є одним із найбільш відомих нелінійних рівнянь із частинними похідними [11]. Це рівняння використовується при вивченні математичних моделей різних явищ і процесів, серед яких поширення хвиль у рідинах [17], коливання в ангармонічній решітці [16], хвильові процеси в біологічних системах [6], передача сигналів у телекомунікаційних системах тощо. Значний інтерес науковців до даного рівняння викликають, зокрема, ще й тим, що рівняння Кортевега–де Фріза є цікавим об'єктом для дослідження, оскільки володіє розв'язками з надзвичайно різноманітними властивостями, серед яких солітонні, квазіперіодичні, періодичні та інші типи розв'язків [18]. Більше того, саме при дослідженні рівняння Кортевега–де Фріза було запропоновано метод оберненої задачі розсіювання [9], який став потужним інструментом вивчення нелінійних рівнянь сучасної теоретичної і математичної фізики [2, 8, 10]. Разом з тим значний інтерес становлять рівняння зі змінними коефіцієнтами, оскільки такі рівняння використовуються при моделюванні процесів у середовищах зі змінними характеристиками та малою дисперсією, для вивчення яких чи не єдиним ефективним методом дослідження є асимптотичний аналіз [5, 7, 12, 13].

У даній статті розглядається рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром при старшій похідній вигляду

$$eu_{xxx} = a(x, t, \varepsilon)u_t + b(x, t, \varepsilon)uu_x, \quad (1)$$

де коефіцієнти рівняння записуються за допомогою асимптотичних рядів

$$a(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k a_k(x, t), \quad b(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k b_k(x, t), \quad (2)$$

функції $a_k(x, t)$, $b_k(x, t) \in C^\infty(R \times [0, T])$, $k \geq 0$, $T > 0$, ε – малий параметр.

Для рівняння (1) будуються асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки, які за своєю структурою близькі до солітонних розв'язків [14].