

## ЗАКОН СПІВІСНУВАННЯ ГОМОКЛІНІЧНИХ ТРАЕКТОРІЙ ДЛЯ ВІДОБРАЖЕНЬ НАД ПРОСТОРОМ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

*Встановлено порядок співіснування гомоклінічних траєкторій для відображень простору неперервних функцій відрізка в себе, які породжуються деякою неперервною функцією відрізка.*

*Ключові слова: гомоклінічні траєкторії, співіснування траєкторій, теорема Шарковського, неперервні відображення відрізка, нескінченновимірні простори*

**Вступ.** Для неперервних відображень відрізка закон співіснування гомоклінічних траєкторій був сформульований на конференції в 1979 р. [1] та остаточно доведено в [3]. Там, зокрема, встановлювався такий порядок співіснування гомоклінічних траєкторій для неперервних функцій відрізка:

$$1 \succ 3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \dots \succ 2 \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ 2^2 \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \\ \dots \succ 2^n \succ 2^n \cdot 3 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 7 \succ \dots$$

Цей лінійний порядок натуральних чисел описує закон співіснування гомоклінічних у такому сенсі: якщо  $f \in C^0(I, I)$  має  $n$ -гомоклінічну траєкторію, то для кожного  $m$ , для якого  $n \succ m$ , функція  $f$  має також  $m$ -гомоклінічну траєкторію. Виникає запитання: чи можна перенести цей закон на множини функцій, які діють не на відрізку, а на більш складній, зокрема, нескінченновимірній множині. Цікавим кандидатом на роль такої множини є простір неперервних функцій відрізка  $C^0(I, I)$ , над яким діє відображення, яке також задається неперервною функцією відрізка  $F(\varphi(x)) = f(\varphi(x))$ ,  $\varphi \in C^0(I, I)$  та  $f \in C^0(I, I)$ . Такі нескінченновимірні системи є, з одного боку, відносно простими для дослідження, а з іншого, вони мають важливе теоретичне значення, зокрема, до них зводяться різниці рівняння з неперервним часом вигляду  $x(t+1) = f(x(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (див., напр., [4-5]).

Мета статті – встановити, що зазначений вище порядок співіснування гомоклінічних траєкторій виконується і для таких систем.

**Основні означення і попередні відомості.** Періодичною траєкторією, або циклом функції  $f: X \rightarrow X$ , називають множину точок  $\{x, f(x), f(f(x)), \dots, f^{n-1}(x)\}$ , якщо  $f^n(x) = x$  і  $f^d(x) \neq x$  для будь-якого  $0 < d < n$ . Число  $n$  називають періодом цього циклу. Кажуть, що траєкторія  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  гомоклінічна до циклу  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , якщо точка  $x_0$  не періодична, її  $\omega$ -гранична множина збігається з  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  й існує деяка послідовність прообразів  $x_0$   $\{x_{-1}, x_{-2}, x_{-3}, \dots\} \subset X$ , для якої  $f(x_{-k-1}) = x_{-k}$ ,  $k \geq 0$ , і множина всіх часткових границь цієї послідовності збігається з  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ .

Нехай  $I$  – замкнений інтервал,  $C^0(I, I)$  – простір неперервних функцій з інтервалу  $I$  у себе з рівномірною метрикою і  $f \in C^0(I, I)$ . Розглянемо відображення над простором неперервних функцій відрізка вигляду  $F(\varphi(x)) = f(\varphi(x))$ ,  $\varphi \in C^0(I, I)$ , для деякої  $f \in C^0(I, I)$ .

Для відображень відрізка гомоклінічна траєкторія називається односторонньою, якщо до кожної з точок  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  відповідна підпослідовність прообразів наближається з однієї сторони. Якщо ж хоча б до однієї з точок вона наближається з двох сторін, то ця траєкторія називається двосторонньою гомоклінічною траєкторією.

Для відображень над  $C^0(I, I)$  гомоклінічна траєкторія  $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$  називається односторонньою, якщо до кожної з точок  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  відповідна підпослідовність прообразів наближається з однієї сторони, тобто для будь-якого  $x \in I$  до кожної з точок  $\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)\}$  відповідна підпослідовність прообразів наближається з однієї сторони.

$m$ -гомоклінічною траєкторією називається гомоклінічна траєкторія до циклу періоду  $m$  або двостороння гомоклінічна траєкторія до циклу періоду  $m/2$ .

**Теорема (Шарковський, 1965) [2].** *Існує такий порядок співіснування періодичних траєкторій для неперервних функцій відрізка:*

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \dots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \\ \dots \succ 2^n \cdot 3 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 7 \succ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1$$

Якщо  $f \in C^0(I, I)$  має цикл періоду  $n$ , то для кожного  $m$ , для якого  $n \succ m$ , функція  $f$  має також цикл періоду  $m$ .

Теорема Шарковського встановлює закон співіснування періодичних траєкторій для неперервних функцій відрізка. Перш ніж встановити, як виконується закон співіснування гомоклінічних траєкторій, треба показати, чому виконується порядок Шарковського. Покажемо, що для класу функцій  $F(\varphi(x)) = f(\varphi(x))$ ,  $\varphi \in C^0(I, I)$ , для деякої функції  $f \in C^0(I, I)$  порядок співіснування періодичних траєкторій збігається з порядком Шарковського.

Дійсно, нехай відображення  $F$  має цикл періоду  $n$ , покажемо, що  $F$  має також цикл періоду  $m$  для будь-якого  $m$ , для якого  $n \succ m$ . Спочатку розглянемо випадок, коли  $n$  не є степенем двійки. Тоді  $n = 2^k l$  для деякого цілого  $k \geq 0$  і непарного  $l \neq 1$ . Існує таке  $\varphi \in C^0(I, I)$ , що  $F^n(\varphi(x)) = \varphi(x)$  для будь-якого  $x \in I$ , і  $F^d(\varphi(x)) \neq \varphi(x)$  для  $d = 1, 2, \dots, n-1$ . Для кожного фіксованого  $x = x_0$  маємо  $F^n(\varphi(x_0)) = \varphi(x_0)$ , а отже, точка  $\varphi(x_0)$  періодична для функції  $f$ , причому її період є дільником  $n$ .

Нам треба показати, що хоча б для однієї точки  $x_0 \in I$  період  $\varphi(x_0)$  відносно функції  $f$  не є степенем двійки. Це, очевидно, виконується, оскільки, припускаючи супротивне, ми отримаємо, що для будь-якого  $x \in I$ ,  $F^{2^k}(\varphi(x)) = \varphi(x)$ , що суперечить тому, що мінімальним періодом відображення  $F$  є величина  $n$ . Отже, існує точка  $x^* \in I$ , для якої значення  $\varphi(x^*)$  є періодичною точкою функції  $f$  із періодом, що є дільником  $n$  і не є степенем двійки.

Для неперервної функції відрізка  $f$  виконується теорема Шарковського, а, отже, оскільки всі дільники  $n$ , що не є степенями двійки, займають у порядку Шарковського місце, що є не слабшими, ніж  $f$ , будь-який з них є сильнішим в сенсі порядку Шарковського, аніж  $m$  для будь-якого  $m$ , такого, що  $n \succ m$ . Тому  $f$  має періодичну точку періоду  $m$ , яку позначимо за допомогою  $a \in I$ . Тоді стала функція  $\varphi(t) \equiv a$  є періодичною точкою відображення  $F$  періоду  $m$ .

Тепер розглянемо випадок, коли  $n$  є степенем двійки. У цьому разі кожне  $m$ , для якого  $n \succ m$ , є меншим степенем двійки. Існує таке  $\varphi \in C^0(I, I)$ , що  $F^n(\varphi(x)) = \varphi(x)$ , а отже, для будь-якого  $x \in I$ ,  $f^n(\varphi(x)) = \varphi(x)$ . Якби для кожної точки  $x \in I$  період відносно функції  $f$  був строго меншим за  $n$ , то виконувалося б  $F^{n-1}(\varphi(x)) = \varphi(x)$ , що призводить до суперечності з припущенням, що періодом відображення  $F$  є значення  $n$ . Отже, існує точка  $x^* \in I$ , яка періодична періоду  $n$  для функції  $f$ . Тому за теоремою Шарковського функція  $f$  також має деяку точку  $a$  періоду  $m$ . Тоді  $\varphi(t) \equiv a$  є періодичною точкою періоду  $m$  для відображення  $F$ .

Перейдемо до доведення основного результату.

**Основна теорема.** Існує такий порядок співіснування гомоклінічних траєкторій для відображень над  $C^0(I, I)$  вигляду  $F(\varphi(x)) = f(\varphi(x))$ ,  $f \in C^0(I, I)$ :

$$1 \triangleright 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \dots \\ \dots \triangleright 2^n \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright 2^n \cdot 7 \triangleright \dots$$

Якщо відображення  $F$  має  $n$ -гомоклінічну траєкторію, то для кожного  $m$ , для якого виконується властивість  $n \triangleright m$ ,  $F$  має також  $m$ -гомоклінічну траєкторію.

**Доведення.** Нехай відображення  $F$  має деяку  $n$ -гомоклінічну траєкторію, тобто або односторонню гомоклінічну траєкторію до циклу періоду  $n$ , або двосторонню до циклу періоду  $n/2$ .

У випадку, коли  $n$  не є степенем двійки, ми можемо стверджувати, що якщо відображення  $F$  має  $n$ -гомоклінічну траєкторію, то воно має і періодичну траєкторію відповідно періоду  $n$  або  $n/2$ , до якого ця гомоклінічна траєкторія збігається. Як показано вище, звідси випливає, що функція  $f$  також матиме періодичну точку періоду  $n$  або старшого в сенсі порядку Шарковського періоду (звідки також випливає існування циклу періоду  $n$ ). У статті [3] показано (див. теореми 3, 4), що якщо неперервна функція відрізка має цикл періоду  $n \neq 2^d$ , то вона має і односторонню гомоклінічну до циклу такого ж періоду, тобто  $n$ -гомоклінічну траєкторію. А отже,  $f$  має і  $m$ -гомоклінічні траєкторії для всіх  $m$ , таких, що  $n \triangleright m$ . Отже, існує деяка точка  $a \in I$ , для якої траєкторія  $a$  є  $m$ -гомоклінічною траєкторією для функції  $f$ . Тоді  $\varphi(x) \equiv a$  є  $m$ -гомоклінічною точкою для відображення  $F$ .

Далі припустимо, що  $n = 2^k$ . Нехай відображення  $F$  має  $n$ -гомоклінічну траєкторію  $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$  до деякої періодичної траєкторії  $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n'}\}$ , де  $n' = n$ , якщо  $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$  є односторонньою гомоклінічною траєкторією, і  $n' = n/2$ , якщо  $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$  – двостороння. Серед точок  $\{\varphi_0(x), x \in I\}$  можуть існувати періодичні точки функції  $f$ , однак їхній період є дільником  $n$ , і отже, не може перевищувати  $n$ .

Якби всі точки  $\{\varphi_0(x), x \in I\}$  були періодичними, то внаслідок обмеженості на кількість можливих періодів, так само періодичною була б і функція  $\varphi_0$ , що суперечить означенню гомоклінічної траєкторії. Тому існує така точка  $x^* \in I$ , що  $\varphi_0(x^*)$  не є періодичною, а отже, і всі прообрази  $\varphi_0(x^*)$  не є періодичними точками функції  $f$ .

Оскільки  $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$  є гомоклінічною траєкторією відображення  $F$ , то для кожної точки  $x \in I$  існує послідовність прообразів, множина всіх часткових границь якої збігається з  $\omega$ -граничною множиною точки  $\varphi_0(x)$ . Зокрема,  $\omega$ -граничною множиною точки  $\varphi_0(x^*)$  є множина  $\{\pi_1(x^*), \pi_2(x^*), \dots, \pi_{n'}(x^*)\}$ , у якій деякі з її елементів можуть збігатися, однак вона є циклом періоду  $2^d$ ,  $d \leq k$  для функції  $f$ .

Множина часткових границь послідовності прообразів  $\varphi_0(x^*)$ , що повторює послідовність прообразів  $\varphi_0$ , збігається з цією множиною. Отже,  $\varphi_0(x^*)$  є гомоклінічною точкою функції  $f$ , причому її  $\omega$ -гранична множина

є періодичною траєкторією з періодом  $2^d$ ,  $d \leq k$ . Окрім того, якщо задана  $n$ -гомоклінічна траєкторія для відображення  $F$  була односторонньою, то односторонньою буде і гомоклінічна траєкторія точки  $\varphi_0(x^*)$ .

Таким чином, функція  $f$  має  $2^d$ -гомоклінічну або  $2^{d+1}$ -гомоклінічну траєкторію, причому в обох випадках це не перевищує  $n$ -гомоклінічну траєкторію. Згідно з [3] із останньої властивості випливає, що  $f$  має також  $n$ -гомоклінічну траєкторію, а отже, вона має і  $m$ -гомоклінічну траєкторію  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ . Тоді траєкторія функції  $\varphi(t) \equiv x_0$  є  $m$ -гомоклінічною траєкторією відображення  $F$ .

**Висновки.** Порядок співіснування гомоклінічних траєкторій для відображень простору  $C^0(I, I)$  вигляду  $F(\varphi(x)) = f(\varphi(x))$ ,  $f \in C^0(I, I)$  збігається з порядком співіснування гомоклінічних траєкторій для неперервних відображень відрізка.

**Список використаних джерел:**

1. Федоренко В. В. О сосуществовании периодических и гомоклинических траекторий / В. В. Федоренко, А. Н. Шарковский // V Всесоюз. конф. по качественной теории дифференциальных уравнений : Тез. докл. – Кишинев : Штиинца, 1979. – С. 174–175.
2. Шарковский А. Н. Об одной классификации неподвижных точек / А. Н. Шарковский // Укр. матем. журн., 1965. – 17 (5). – С. 80–95.
3. Kuznetsov M. V. The order of coexistence of homoclinic trajectories for the maps of an interval / M. V. Kuznetsov // Ukr Math Jour., 2019. – Vol. 71, iss. 7. – P. 1146–1152.
4. Romanenko O. Yu. Dynamical systems induced by continuous time difference equations and long-time behavior of solutions / O. Yu. Romanenko // Jour. of Difference Equations and Applications, 2003. – Vol. 9, iss. 3-4. – P. 263–280.
5. Sharkovsky A. N. Difference Equations and Their Applications / A. N. Sharkovsky, Y. L. Maistrenko, E. Yu. Romanenko. – Dordrecht : Springer Netherlands, 1993. – 358 p.

Надійшла до редколегії 20.09.20

M. Kuznietsov, PhD Student  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

### THE LAW OF COEXISTENCE OF HOMOCLINIC TRAJECTORIES FOR MAPS OF THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

*The paper deals with problem of ordering coexistence of homoclinic trajectories for maps of segment into itself, which are generated by a certain continuous function of the segment.*

**Keywords:** homoclinic trajectories, coexistence of trajectories, Sharkovsky theorem, continuous mapping of interval, infinite-dimensional spaces.

УДК 517.9:519.63

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.02.07-11>

Б. Довгий, канд. фіз.-мат. наук, доц.,  
Л. Вакал, канд. тех. наук,

Є. Вакал, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
E-mail: dovgyi\_i\_ko@i.ua, lara.vakal@gmail.com, jvakal@gmail.com

### ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕСАМОСПРЯЖЕНИМ ОПЕРАТОРОМ І ЗВ'ЯЗАНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

*Розглянуто крайову задачу для параболічного рівняння другого порядку з несамопряженим оператором. Подібні задачі є математичною моделлю ряду задач, що описують процеси конвективно-дифузійного перенесення речовини, механізми виникнення у плазмі пробою лазерної активності тощо. При дослідженні фізики пробою слід урахувати лавиноподібне наростання кількості вільних електронів за рахунок процесів багатофотонної іонізації під впливом оптичних імпульсів. Це вимагає включення в постановку задачі зв'язаних крайових умов. Важливою обставиною, яку слід враховувати при розробці методики розв'язання такої задачі, є виконання певного закону збереження. Для розв'язання крайової задачі запропоновано підхід на основі методу скінченних різниць. Апроксимацію рівняння і крайових умов побудовано так, щоб різницева схема була повністю консервативною і апроксимувала вихідну задачу з другим порядком за просторовою змінною і часом та мала другий порядок збіжності. Для ефективного розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь на кожному часовому проміжку використано метод прогонки для складних систем у поєднанні з методом немонотонної прогонки для систем з тридіагональною матрицею. Для проведення числових розрахунків розроблено програмне забезпечення на основі системи комп'ютерної математики MATLAB. Отримано наближений розв'язок прикладної задачі для різних моментів часу, а також значення коефіцієнта поглинання, зміна знака якого вначає перехід плазми в лазерно активний стан.*

**Ключові слова:** несамопряжений оператор, зв'язані крайові умови, закон збереження, метод прогонки для складних систем, метод немонотонної прогонки.

**Вступ.** У роботі розглядається крайова задача для рівнянням другого порядку параболічного типу з несамопряженим оператором. Подібні задачі виникають при математичному моделюванні багатьох фізичних процесів, зокрема, конвективно-дифузійного перенесення речовини, конвективного тепломасообміну, механізму виникнення в плазмі пробою лазерної активності [1; 6]. При дослідженні фізики пробою слід урахувати лавиноподібне наростання кількості вільних електронів за рахунок процесів багатофотонної іонізації під впливом оптичних імпульсів, що приводить до необхідності розгляду кінетичного рівняння Больцмана для функції розподілу електронів за енергіями. Якщо виконати перехід від розмірної задачі до безрозмірної, то математична модель цього фізичного процесу може бути описана параболічним рівнянням зі зв'язаними крайовими умовами. Важливою обставиною, яку