

УДК 519.9

Ластівка І. О.<sup>1</sup>, д.т.н., доц.  
Лаврова О. Є.<sup>2</sup>, студент.

**Метод динамічного програмування для систем диференціальних рівнянь на часових шкалах.**

<sup>1</sup> Національний авіаційний університет, 03058, м. Київ, пр-т. Космонавта Комарова 1, e-mail: [iola@nau.edu.ua](mailto:iola@nau.edu.ua)

<sup>2</sup> Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: [lavrova\\_olia@mail.ru](mailto:lavrova_olia@mail.ru)

I. O. Lastivka<sup>1</sup>, doctor of engineering  
O. E. Lavrova<sup>2</sup>, student.

**Method of the dynamic programming for systems of differential equations on time scales.**

<sup>1</sup> National Aviation University, 03058, Kyiv, Komarova st., 1, e-mail: [iola@nau.edu.ua](mailto:iola@nau.edu.ua)

<sup>2</sup> Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: [lavrova\\_olia@mail.ru](mailto:lavrova_olia@mail.ru)

*В роботі розглянуто задачі оптимального керування на часових шкалах. Описано основні принципи теорії часових шкал. Встановлено властивості функції Беллмана на часових шкалах. Отримано загальне рівняння Беллмана. Метод динамічного програмування поширено на випадок, коли модель представлена системою диференціальних рівнянь на часових шкалах. Розв'язано задачу аналітичного конструювання лінійно-квадратичного регулятора.*

*Ключові слова: Часова шкала, динамічне програмування, оптимальне керування, функція зернистості, рівняння Беллмана.*

*An analysis of existing scientific and methodological literature shows the variety of approaches, methods and tools, based on Bellman optimality principle. However, dynamic programming problem is solved only for the continuous case. In this paper we consider problem of optimal control on time scales. Initially we describe the basics of the time scales's theory, then we represent properties of the Bellman function and general Bellman equation on the time scales. The method of dynamic programming extended to the case, when the model represented by a system of differential equations on time scales. This paper proposes analytical method for designing the linear-quadratic regulator on time scales.*

*Key Words: Time scale, dynamic programming, optimal control, graininess function, Bellman equation.*

Статтю представив академік НАН України, д. ф.-м. н., проф. Перестюк М. О.

**Вступ.** Вивчення диференціальних рівнянь на часових шкалах останнім часом викликає великий інтерес серед дослідників. Це пов'язано з тим, що в 1988 році Stefan Hilger в роботі [1] ввів поняття  $\Delta$ - похідної, що дозволило об'єднати з єдиної точки зору дискретний і неперервний аналіз.

Основи такого аналізу та нові результати викладено в монографіях [2],[4]. В подальшому диференціальні рівняння на часових шкалах в різних напрямках вивчалися в роботах багатьох

авторів. В роботі [8] розглянуто рівняння на часових шкалах в частинних похідних.

В роботі [6] побудовано стохастичний інтеграл на абстрактній шкалі та розглянуто стохастичні диференціальні рівняння на цих шкалах.

Теорія оптимального керування на часових шкалах ще досить мало вивчена. В цьому напрямку відзначимо роботи [5], [7], де зроблені перші спроби застосування методу динамічного програмування до рівнянь на часових шкалах.

Однак в загальному випадку метод динамічного програмування Беллмана для

рівнянь на абстрактних часових шкалах ще не розвинутий. Вивченню цих питань і присвячена дана робота.

Сама робота складається зі вступу і трьох частин. В першій частині приведено основні поняття та твердження, що стосуються часових шкал і використовуються в подальшому. У другій частині отримано загальне рівняння Беллмана методу динамічного програмування, за допомогою якого в третій частині розв'язана лінійно-квадратична задача на часових шкалах.

### 1. Основні поняття, пов'язані з часовими шкалами.

Приведемо необхідні в подальшому поняття, пов'язані з часовими шкалами.

**Означення 1.** [1]. Часовою шкалою  $T$  називається довільна, непорожня, замкнена підмножина дійсних чисел. Покладемо  $T^k = T \setminus \{\max T\}$ , якщо  $\max T$  існує.

Найбільш відомими прикладами часових шкал є  $T = \mathbb{R}$ ,  $T = \mathbb{Z}$ ,  $T = h\mathbb{Z}$  для  $h > 0$ ,  $T = \mathbb{N}$ ,  $T = q^{\mathbb{N}_0}$  для  $q > 1$ .

Введемо наступні поняття, пов'язані з характеристикою часових шкал. Нехай  $T$  – часова шкала.

**Означення 2.** Оператором стрибка  $\sigma: T \rightarrow T$  називається функція  $\sigma(t) = \inf\{s \in T: s > t\}$ , а функцією зернистості  $\mu: T \rightarrow [0, +\infty)$  називається функція  $\mu(t) = \sigma(t) - t$ .

Для функції  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$  визначимо функцію  $f^\sigma: T \rightarrow \mathbb{R}$  як  $f^\sigma = f \circ \sigma$ .

Визначимо поняття  $\Delta$  - похідної.

**Означення 3.** [1]  $\Delta$  - похідною функції  $f$  в точці  $t \in T^k$  називається таке число  $f^\Delta(t)$  (якщо воно існує), що для довільного  $\varepsilon > 0$  існує окіл  $U$  точки  $t$  такий, що для всіх  $s \in U \cap T$ , що виконується нерівність:

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - t]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|.$$

Для визначення відповідних властивостей  $\Delta$  - похідної справедлива наступна теорема.

**Теорема 1.** [2]. Нехай  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \in T^k$ . Тоді

1) Якщо  $f$  – диференційована в точці  $t$ , тоді  $f$  – неперервна в точці  $t$ .

2) Якщо  $f$  – неперервна в точці  $t$ ,  $t < \sigma(t)$ , тоді функція  $f$  – диференційована в точці  $t$  і  $\Delta$  - похідна має наступний вигляд:

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

3) Якщо  $t = \sigma(t)$  і  $f$  – диференційована в точці  $t$ , тоді

$$f^\Delta(t) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

якщо така границя існує.

4) Якщо функція  $f$  – диференційована в точці  $t$ , тоді  $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t)$ .

Розглядаючи конкретні часові шкали можна отримувати більш конкретний вигляд  $\Delta$  - похідної. Так, наприклад,

1) при  $T = \mathbb{R}$ ,  $f^\Delta(t) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$ ,

2) при  $T = \mathbb{Z}$ ,  $f^\Delta(t) = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$ .

Таким чином  $\Delta$  - похідна об'єднує дискретний і неперервний аналіз. Наступна теорема є аналогом похідної складної функції.

**Теорема 2.** [7]. Нехай  $V: T \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V \in C^1(T \times \mathbb{R})$  і функція  $x: T \rightarrow \mathbb{R}$  є  $\Delta$  - диференційованою. Припустимо, що  $z: T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z(\cdot) = V(\cdot, x(\cdot))$ . Тоді для  $t_0 \in T^k$  і  $x_0 = x(t_0)$  функція  $z$  є  $\Delta$  - диференційованою і має місце формула:

$$z^\Delta(t_0) = \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x}(\sigma(t_0), x_0 + h\mu(t_0)x^\Delta(t_0)) dh x^\Delta(t_0) + \frac{\partial V}{\partial t}(t_0, x_0).$$

Маючи поняття  $\Delta$  - похідної можна розглядати диференціальні рівняння на часових шкалах. Отже, розглянемо рівняння

$$x^\Delta = f(t, x) \quad (1)$$

де функція  $f: T \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D$  – область в  $\mathbb{R}^n$ .

**Означення 4.** [2]. Функція  $x: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x = x(t)$  називається розв'язком рівняння (1) на  $T$ , якщо  $x(t)$  має в кожній точці  $\Delta$  - похідну і для всіх  $t \in T$  має місце рівність

$$x^\Delta(t) = f(t, x(t)).$$

**Означення 5.** [2]. Функція  $f(t, x)$  називається регресивною в точці  $t \in T^k$ , якщо відображення  $I + \mu(t)f(t, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  є оборотним.

## 2. Постановка задачі. Рівняння Беллмана.

На часовій шкалі  $T$  розглянемо наступну задачу оптимального керування.

$$\varphi(T_1, x(T_1)) \rightarrow \inf \quad (2)$$

за умов

$$\begin{aligned} x^\Delta &= f(t, x(t), u(t)), T_0 \leq t \leq T_1 \\ x(t_0) &= x_0, (T_1, x(T_1)) \in M \subseteq T \times \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3)$$

Тут  $x \in \mathbb{R}^n$  – фазовий вектор,  $u \in U \subset \mathbb{R}^m$  – вектор керувань, функція  $f: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $T_0 \in T$  – фіксований момент часу, а  $T_1 \in T$  – нефіксований, визначається моментом першого попадання точки  $(T_1, x(T_1))$  в замкнену множину  $M$ .

Допустимими керуваннями задачі (2)-(3) будемо вважати кусково-неперервні функції  $u(t)$ , визначені на  $[T_0, T_1]$  і такі, що  $u(t) \in U$  при всіх  $t \in [T_0, T_1]$ . Для визначеності ці функції будемо вважати неперервними справа. Позначимо через  $\mathfrak{Z}_{t,x}$  множину допустимих керувань  $u(t)$ , що переводять фазову траєкторію  $x(s)$  із положення  $(t, x)$  в множину  $M$ , а через  $Q_0$  – множину досяжності, тобто всі точок  $(t, x)$ , з яких можна потрапити в множину  $M$  по деякій траєкторії, яка відповідає кусково-неперервному керуванню.

Задача оптимізації полягає в тому, щоб в множині допустимих керувань знайти таке керування, яке мінімізує функціонал (2).

Для розв'язання цієї задачі застосуємо метод динамічного програмування Беллмана. Визначимо функцію Беллмана для (2)-(3).

**Означення 6.** Функція  $B(t, x) = \inf_{\mathfrak{Z}_{t,x}} \varphi(T_1, x(T_1))$

називається функцією Беллмана.

Виявляється, що знайти явний вигляд функції Беллмана досить складно, але вона має ряд властивостей, які дозволяють при певних умовах записати рівняння для її визначення. Справедлива наступна теорема.

**Теорема 3.** (властивості функції Беллмана).

1) Якщо  $u(t) \in \mathfrak{Z}_{T_0, x_0}$ , а  $x(t)$  – відповідна інтегральна крива, що відповідає даному керуванню, тоді функція Беллмана вздовж неї є неспадною на  $[T_0, T_1]$ .

2) Функція Беллмана, обчислена вздовж оптимальної траєкторії є сталою.

**Доведення.** Нехай керування  $u(t)$ , визначене на  $[T_0, T_1]$  є допустимим для  $x_0$ , а  $x(t)$  – відповідна допустима траєкторія. Для доведення властивості 1) потрібно показати, що для довільних точок  $\tau_1$  і  $\tau_2$  таких, що  $T_0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq T_1$  виконується нерівність

$$B(\tau_1, x(\tau_1)) \leq B(\tau_2, x(\tau_2)).$$

Зауважимо спочатку, що для довільного  $t \in [T_0, T_1]$  множина  $\mathfrak{Z}_{t,x}$  є непорожньою. Дійсно, звуження керування  $u$  на  $[t, T_1]$  є допустимим керуванням для  $x(t)$ .

Нехай  $\bar{u}$  – довільне керування з  $\mathfrak{Z}_{\tau_2, x(\tau_2)}$ .

Визначимо керування  $\tilde{u}$  на  $[\tau_1, T_1]$  наступним чином

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \bar{u}(t), & \tau_2 \leq t \leq T_1 \end{cases}, \text{ де } \tilde{u}(t) \in \mathfrak{Z}_{\tau_1, x(\tau_1)}.$$

Це означає, що  $B(\tau_1, x(\tau_1)) \leq \varphi(T_1, x(T_1))$  в силу означення функції Беллмана. Оскільки  $\bar{u} \in \mathfrak{Z}_{\tau_2, x(\tau_2)}$ , тоді, взявши інфімум відносно керування з  $\mathfrak{Z}_{\tau_2, x(\tau_2)}$ , отримаємо нерівність

$B(\tau_1, x(\tau_1)) \leq B(\tau_2, x(\tau_2))$ , яка і доводить властивість 1).

Нехай тепер  $u^*(t)$  – керування, визначене на  $[T_0, T_1]$ , є оптимальним для задачі (2)-(3). За властивістю 1) маємо, що  $B(t, x^*(t))$  є неспадною функцією. Оскільки звуження керування  $u^*$  на  $[t, T_1]$  є допустимим для стану  $x^*(t)$ , тоді  $B(t, x^*(t)) \leq \varphi(T_1, x^*(T_1))$ .

Із оптимальності керування  $u^*$  маємо, що  $B(T_0, x_0) = \varphi(T_1, x^*(T_1))$ . Оскільки  $B(t, x^*(t))$  є неспадною функцією, тоді виконується  $B(T_0, x_0) \leq B(t, x^*(t)) \leq B(T_1, x(T_1)) = \varphi(T_1, x^*(T_1))$ .

Отже,  $B(t, x^*(t)) \equiv \text{const}$ , що і доводить теорему.

Таким чином функція Беллмана дозволяє виділяти оптимальні траєкторії з множини допустимих. Використовуючи встановлені властивості, отримаємо рівняння для визначення функції Беллмана.

Має місце наступна теорема.

**Теорема 4.** Нехай точка  $(t, x)$  – довільна внутрішня точка множини досяжності  $Q_0$ , в якій функція Беллмана  $B(t, x)$  є  $\Delta$ -диференційованою. Тоді для всіх  $v \in U$  функція  $B(t, x)$  задовольняє нерівність:

$$B_t^\Delta(t, x) + \int_0^1 B'_x(\sigma(t), x + \mu(t)f(t, x, u)) dhf(t, x, u) \geq 0. \quad (4)$$

Якщо в  $\mathfrak{I}_{t,x}$  існує оптимальне керування  $u^*$ , тоді функція  $B(t, x)$  задовольняє нелінійне інтегро-диференціальне рівняння в частинних похідних

$$\min_{v \in U} \left\{ B_t^\Delta(t, x) + \int_0^1 B'_x(\sigma(t), x + \mu(t)f(t, x, u)) dhf(t, x, u) \right\} = 0. \quad (5)$$

Мінімум в (5) досягається на правосторонній границі  $u^*(t)^+$ .

**Доведення:** Розглянемо керування  $v \in U$  на інтервалі  $[t, t+k]$ . Оскільки  $(t, x)$  – внутрішня точка множини  $Q_0$ , то для досить малого  $k$  відповідна траєкторія  $x(s)$  буде лежати в  $Q_0$  при  $t \leq s \leq t+k$ . Якщо  $\tilde{u}$  – допустиме для  $x(t+s)$  керування, визначене на  $[t+k, T_1]$ , то керування  $u_k$ , визначене на  $[t, T_1]$  має наступний вигляд

$$u_k(s) = \begin{cases} v, & t \leq s < t+k \\ \tilde{u}(t), & t+k \leq s \leq T_1 \end{cases}, \text{ де } u_k(s) \in \mathfrak{I}_{t,x}.$$

Нехай  $x_k(t)$  – розв'язок рівняння (3), що відповідає керуванню  $u_k$ . Позначимо через  $D^+f(t)$  правосторонню  $\Delta$ -похідну функції  $f(t)$ . Оскільки  $u_k$  – кусково-неперервна функція, тоді  $D^+x_k(t) = f(t, x_k(t), u_k(t)^+)$ , де  $u_k(t)^+$  – границя справа в точці  $t$ . Згідно з властивістю 1) теореми 3 функція  $B(t, x_k(t))$  є неспадною функцією, отже  $D^+B(t, x_k(t)) \geq 0$  [4, зауваження 1.16; стр.5] в довільний момент часу, для якого існує  $\Delta$ -похідна. Використовуючи правило диференціювання складної функції (теорема 2), отримаємо (4).

Якщо в  $\mathfrak{I}_{t,x}$  існує оптимальне керування  $u^*$  і  $x^*$  – відповідна траєкторія, то за властивістю 2) теореми 3 маємо, що  $B(t, x^*(t)) = \varphi(T_1, x(T_1))$  при  $s \leq t \leq T_1$ . Тоді в силу  $\Delta$ -диференційованості функції  $B(t, x)$  в точці  $(t, x)$ , отримаємо

$$D^+B(t, x^*(t)) = B_t^\Delta(t, x^*(t)) + \int_0^1 B'_x(\sigma(t), x^*(t) + \mu(t)f(t, x, u^*(t)^+)) dhf(t, x, u^*(t)^+) = 0 \quad (6)$$

З (4) і (6) маємо (5), причому інфімум в (5) досягається на правосторонній границі оптимального керування  $u^*(t)^+$ , що і доводить теорему.

Співвідношення (5) називається рівнянням Беллмана на часових шкалах. Відносно даного рівняння зробимо наступні зауваження.

**Зауваження 1.** У випадку, коли  $T = \mathbb{R}$  рівняння Беллмана (5) співпадає з класичним рівнянням.

**Зауваження 2.** В роботі [9] методом динамічного програмування розв'язана задача типу (2)-(3) для різницевих рівнянь. Отриманий там основний результат – дискретне рівняння Беллмана, є частинним випадком нашого результату, коли часова шкала  $T = \mathbb{N}$ .

### 3. Лінійний регулятор.

Як приклад застосування методу динамічного програмування Беллмана на часових шкалах розглянемо лінійно-квадратичну задачу.

$$J = (Dx(T_1), x(T_1)) + \int_{T_0}^{T_1} [(F(t)x, x) + (E(t)u, u)] \Delta t \rightarrow \inf \quad (7)$$

$$x^\Delta = A(t)x + B(t)u \quad (8)$$

Тут кінці відрізка  $T_0 \in T, T_1 \in T$  – фіксовані, лівий кінець закріплений  $x(T_0) = x_0$ , а правий кінець вільний  $x(T_1) \in \mathbb{R}^n$ , обмежень на керування немає –  $u \in \mathbb{R}^m$ .

Матриці  $D$  і  $F(t)$  –  $n \times n$ -мірні, симетричні, невід'ємно визначені,  $E(t)$  –  $m \times m$ -мірна, симетрична, додатно визначена матриця,  $A(t)$  –  $n \times n$ -мірна матриця,  $B(t)$  –  $n \times m$ -мірна матриця. Будемо вважати, що компоненти цих матриць – неперервні на  $[T_0, T_1]$  функції.

Зауважимо, що задача (7)-(8) характерна тим, що рівняння Беллмана для неї зводиться до матричного рівняння Ріккати.

Для розв'язання задачі (7)-(8) функціонал Больца (7) зведемо до функціоналу Майєра. Для цього введемо нову фазову змінну  $x_0$  наступним чином

$$x_0 = x_0(t) = \int_{T_0}^t [(F(\tau)x(\tau), x(\tau)) + (E(\tau)u(\tau), u(\tau))] \Delta \tau \quad (9)$$

$$x_0(T_0) = 0.$$

Тоді розширений фазовий вектор

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \text{ а функціонал набуває вигляд}$$

$$J = (Dx(T_1), x(T_1)) + x_0(T_1) = \varphi(\bar{x}(T_1)). \quad (10)$$

Для розв'язання задачі (7)-(8) функцію Беллмана шукаємо у вигляді

$$B(t, \bar{x}) = x_0 - (S(t)x, x), \quad (11)$$

де  $S(t)$  –  $\Delta$ -диференційована на  $[T_0, T_1]$ ,  $n \times n$ -мірна, симетрична матриця і така, що  $S(T_1) = -D$ .

Для функції (11) складемо рівняння Беллмана. Для цього шукаємо  $B^\Delta(t, \bar{x})$ , використовуючи формулу знаходження  $\Delta$ -похідної складної функції.

Отримаємо:

$$\begin{aligned} B^\Delta(t, \bar{x}) &= (F(t)x, x) + (E(t)u, u) - (S^\Delta(t)x, x) - \\ &- \int_0^1 2S^\sigma(t)(x + \mu(t)hx^\Delta)dhx^\Delta = (F(t)x, x) + (E(t)u, u) \\ &- (S^\sigma(t)(2x + \mu(t)(A(t)x + B(t)u)), A(t)x + B(t)u) - \\ &- (S^\Delta(t)x, x). \end{aligned}$$

Тоді рівняння Беллмана для (11) буде мати наступний вигляд

$$\min_{u \in U} \{ (F(t)x, x) + (E(t)u, u) - (S^\Delta(t)x, x) - (S^\sigma(t)(2x + \mu(t)(A(t)x + B(t)u)), A(t)x + B(t)u) \} = 0. \quad (12)$$

Для знаходження мінімуму виразу у фігурних дужках обчислимо похідну Фреше по змінній  $u$ . Маємо, що ця похідна рівна

$$2E(t)u - 2\mu(t)B^T(t)S^\sigma(t)A(t) - 2B^T(t)S^\sigma(t)x - 2\mu(t)B^T(t)S^\sigma(t)B(t)u = 0 \quad (13)$$

Отже, мінімум в (12) досягається при

$$u = \frac{B^T(t)S^\sigma(t)(I + \mu(t)A(t))}{E(t) - \mu(t)B^T(t)S^\sigma(t)B(t)} x =: K(t)x, \quad (14)$$

де  $S(t)$  є розв'язком рівняння Рікатті

$$\begin{aligned} S^\Delta(t) + (A(t) + B(t)K(t))^T S^\sigma(t) - K^T(t)E(t)K(t) - F(t) \\ + (I + \mu(t)(A(t) + B(t)K(t)))^T S^\sigma(t)(A(t) + B(t)K(t)) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Має місце наступна теорема.

**Теорема 5.** Якщо існує розв'язок (15), визначений на  $[T_0, T_1]$  і такий, що

$$2E(t) - 2\mu(t)B^T(t)S^\sigma(t)B(t) - \text{додатно}$$

визначена матриця, тоді лінійно-квадратична задача (7)-(8) має розв'язок.

Відносно рівняння (15) зробимо наступне зауваження.

**З а у в а ж е н н я 3.** В роботі [5] методом варіацій розв'язана задача типу (7)-(8). Рівняння (15) співпадає з результатом роботи [5]. В цій роботі не досліджувались умови існування розв'язку задачі (7)-(8). Нам вдалося встановити умови існування розв'язку рівняння Рікатті, а отже і умови існування розв'язку лінійно-квадратичної задачі.

Справедлива наступна теорема.

**Теорема 6.** Для задачі (7)-(8) існує достатньо мале  $\varepsilon > 0$ , що для всіх часових шкал з функцією зернистості  $\mu(t)$  такою, що  $|\mu(t)| < \varepsilon$  рівняння Рікатті (15) має розв'язок, визначений на  $[T_0, T_1] \cap T$ , він задовольняє умову  $S(T_1) = -D$ . Отже, лінійно-квадратична задача (7)-(8) має розв'язок.

**Доведення:** Згідно з [2, заув.8.22, с.325] рівняння (15) з умовою  $S(T_1) = -D$  буде мати розв'язок на  $[\tau, T_1]$ , де  $\tau$  – момент виходу  $S(t)$  в нескінченність, якщо виконується умова регресивності означення 5.

Введемо наступне позначення

$$\begin{aligned} f(t, s) &= F(t) - (A(t) + B(t)K(t))^T S^\sigma(t) - \\ &- (I + \mu(t)(A(t) + B(t)K(t)))^T S^\sigma(t)(A(t) + B(t)K(t)) + \\ &+ K^T(t)E(t)K(t). \end{aligned}$$

В силу неперервності матриці  $F(t), E(t), A(t), B(t)$  – обмежені на  $[T_0, T_1]$ . Покажемо обмеженість  $S(t)$  на  $[T_0, T_1]$ .

Функція  $B(t, \bar{x})$  з (11) є мінімальним значенням функціоналу для лінійно-квадратичної задачі з початковою умовою  $\bar{x}$  на довільному інтервалі  $[T_0, T_1]$ , де  $S(t)$  існує.

Якщо  $x_0 = 0$ , тоді  $B(t, \bar{x}) = (-S(t)x, x)$ . (16)

Ця функція дає інфімум в (7)-(8). Оскільки  $D, F(t), E(t)$  – невід'ємно визначені, тоді нижня границя для (16) рівна нулю.

При  $u \equiv 0$  значення критерію для (7)-(8) дає верхню границю функціоналу, а значить і верхню границю квадратичної форми (16).

Із обмеженості квадратичної форми (16) зверху і знизу випливає, що  $S(t)$  є обмеженою на кожному скінченному інтервалі часової

шкали. Тоді функція  $f(t,s)$  також є обмеженою. Отже, існує  $\varepsilon > 0$  таке, що якщо  $|\mu(t)| < \varepsilon$  при  $t \in [T_0, T_1]$ , то функція  $f(t,s)$  є регресивною. Отже, розв'язок рівняння (15) існує на  $[T_0, T_1] \cap T$ . Теорема доведена.

**Висновки.** В роботі поширено метод динамічного програмування Беллмана на рівняння на часових шкалах. Це дає змогу одночасного розв'язування задач оптимального керування неперервними та дискретними системами. Останнє дозволяє обґрунтувати застосування до задач оптимального керування чисельних методів.

#### Список використаних джерел

1. Hilger S. Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus. Results Math., Volume 18, 1990. – pp.18 – 56.
2. Bohner M., Peterson A. Dynamic equations on time scales. – Boston: Birkhäuser, 2001. – 369p.
3. Флеминг У., Рішел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – Москва: Мир, 1978. – с. 316.
4. Bohner M. and Peterson A., editors. Advances in dynamic equations on time scales. – Boston: Birkhäuser, 2003. – 361p.
5. Bohner M., Wintz N. The Linear Quadratic Regulator on Time Scales. – International Journal of Difference Equations, Volume 5, Number 2, 2010. – pp. 149 – 174.
6. Bohner M., Stanzhytskyi A., Bratochkina A. Stochastic dynamic equations on general time scales. – Electronic Journal of Differential Equations, 2013. – pp.1-15.
7. Zaidon Z., Wei W., Honglei X. Hamilton–Jacobi–Bellman equations on time scales. – Mathematical and Computer Modelling, 2009. – pp. 2019 – 2028.
8. Jackson B. Partial dynamic equations on time scales. – Journal of Computational and Mathematics, 2006. – pp. 391 – 415.
9. Страхов Є. Метод динамічного програмування в задачі структурно-параметричної оптимізації дискретної системи керувань. – Вісник Одеського національного університету вип.2(18), 2013 – С. 44 – 50.

#### References

1. HILGER, S. (1990) *Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus*. . Results Math., Volume 18, pp.18 – 56.
2. BOHNER, M., PETERSON, A. (2001) *Dynamic equations on time scales*. Boston: Birkhäuser.
3. FLEMING, U., RISHEL, R. (1978) *Optimal'noe upravlenie determinirovannymi i stohasticheskimi sistemami*. Moskva: Mir.
4. BOHNER, M., PETERSON, A. And EDITORS (2003) *Advances in dynamic equations on time scales*. Boston: Birkhäuser.
5. BOHNER, M., WINTZ, N. (2010) *The Linear Quadratic Regulator on Time Scales*. International Journal of Difference Equations, Volume 5, Number 2, pp. 149–174.
6. BOHNER, M., STANZHYTSKYI, A., BRATOCHKINA, A. (2013) *Stochastic dynamic equations on general time scales*. Electronic Journal of Differential Equations.
7. ZAIDON, Z., WEI, W., HONGLEI, X. (2009) *Hamilton–Jacobi–Bellman equations on time scales*. Mathematical and Computer Modelling. pp. 2019–2028.
8. JACKSON, B. (2006) *Partial dynamic equations on time scales*. Journal of Computational and Mathematics. pp. 391-415.
9. STRAKHOV, E. (2013) *Metod dynamichnogo programuvannja v zadachi strukturno-parametrychnoi optymizacii dyskretnoi systemy keruvan*. Visnyk Odes'kogo nacional'nogo universytetu vyp.2(18), 2013– S. 44-50.

Надійшла до редколегії 14.04.14.