

УДК 517.9

І. В. Бецко, аспірант

Неперервні обмежені розв'язки систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», 03056, м.
Київ, пр. Перемоги, 37,
e-mail: betskoiv@mail.ru

I. V. Betsko, graduate student

Continuous bounded solutions of nonlinear functional-difference equations systems

National Technical University of Ukraine “Kyiv
Polytechnic Institute”, 03056, Kyiv-56, Av.
Peremogy, 37
e-mail: betskoiv@mail.ru

Встановлено нові умови існування неперервних обмежених розв'язків систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь, запропоновано метод побудови таких розв'язків та досліджено структуру їх множини.

Ключові слова: різницеві рівняння, функціонально-різницеві рівняння, неперервні обмежені розв'язки.

We consider the structure of a set of continuous bounded solutions of difference equations systems and their properties. Under various assumptions, the difference equations have been the object of research of many mathematicians, the development of their theory acquired a number of currents. Today this theory is widely branching and already has a lot of tangible results. Especially it concerns the existence of different kinds of solutions (analytic, continuous and others) and investigation of their properties. Despite this, during the research of numerous theoretical problems connected with them, we have to develop specific methods of solution since methods available do not give desired results.

The objective is to study existence of continuous limited solutions, study the structure of their set and also developing the method of their construction. Performed researches add to already existent works of other mathematicians and facilitate further study of the continuous limited solutions of wider classes of functional-difference equations.

Key words: difference equations, functional -difference equations, continuous limited solutions.

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М. О.

Робота присвячена дослідженню множини неперервних розв'язків системи рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)) \quad (1)$$

де $t \in \mathbb{R}$, A – дійсна стала $(n \times n)$ -матриця, q – дійсна стала, $F(t, x)$ – деяка дійсна неперервна при $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ вектор-функція. Окремі класи таких рівнянь вивчалися багатьма математиками і на сьогодні низка питань їх теорії досить детально вивчена. Особливо це стосується існування різного роду (аналітичних, неперервних тощо) розв'язків і дослідження їх властивостей. У роботі продовжується дослідження аналогічних питань для таких систем рівнянь.

Розглянемо систему рівнянь (1). Відносно матриці A будемо припускати, що її власні значення $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, задовольняють умові

$$|\lambda_i| \neq 0, 1, i = 1, \dots, n.$$

Тоді існує заміна змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де C – деяка неособлива $(n \times n)$ -матриця, яка приводить систему рівнянь (1) до вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \quad (2)$$

де $\tilde{F}(t, y) = F(t, Cy)$, $J = \text{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

$$i = 1, \dots, m, m \leq n.$$

Дослідимо систему рівнянь (2) у випадку, коли виконуються умови:

- $0 < \lambda_i < 1, i = 1, \dots, m, q > 0$;
- $\Delta = \frac{L}{1 - (\lambda^* + \delta_1)} < 1, \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$,
 $\lambda^* = \max \{\lambda_i, i = 1, \dots, m\}$;
- $|\tilde{F}(t, y') - \tilde{F}(t, y'')| \leq L|y' - y''|$, де $t \in \mathbb{R}$,
 $y', y'' \in \mathbb{R}^n, L$ - деяка додатна стала;
- всі елементи вектор-функції $\tilde{F}(t, 0)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями і $\sup_t |\tilde{F}(t, 0)| = M < \infty$.

Має місце теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1 – 4. Тоді система рівнянь (2) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок у вигляді функціонального ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) \quad (3)$$

де $y_i(t), i = 0, 1, \dots$, – деякі неперервні вектор-функції.

Доведення. Якщо $|y_i(t)| \leq M_* \Delta^i$ (що буде доведено пізніше), то

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)) \right) = \\ = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)). \end{aligned}$$

Дійсно, оскільки при всіх $m \geq 1$ виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{m+1} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)) \right) = \\ = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)), \end{aligned}$$

то внаслідок умови 3) теореми отримуємо

$$\begin{aligned} \left| \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)) \right| \leq \\ \leq L \left| \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt) - \sum_{j=0}^m y_j(qt) \right| \leq L \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} y_j(qt) \right| \leq \\ \leq L \sum_{j=m+1}^{\infty} M_* \Delta^j \leq LM_* \frac{\Delta^{m+1}}{1 - \Delta}. \end{aligned}$$

Отже, в силу умови 2) знайдеться таке натуральне число N , що при всіх $m \geq N$ має місце нерівність

$$LM_* \frac{\Delta^{m+1}}{1 - \Delta} \leq \varepsilon.$$

Таким чином, для всіх $m \geq N, t \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\left| \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)) \right| \leq \varepsilon,$$

і, отже, має місце співвідношення

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)) = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)).$$

Цим самим доведено, що ряд

$$\tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)) \right)$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$ і його сума

$$\text{дорівнює } \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)).$$

Далі, підставивши (3) в (2), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = J \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{F}(t, \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t)).$$

Звідси випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t), i = 0, 1, \dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1) = Jy_0(t) + \tilde{F}(t, 0), \quad (4_0)$$

$$y_1(t+1) = Jy_1(t) + \tilde{F}(t, y_0(qt)) - \tilde{F}(t, 0), \quad (4_1)$$

$$y_i(t+1) = Jy_i(t) + \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)), \quad i = 2, 3, \dots, \quad (4_i)$$

то ряд (3) буде формальним розв'язком системи рівнянь (2).

Розглядаючи послідовно системи рівнянь $(4_i), i = 0, 1, \dots$, можна показати, що вони мають розв'язки у вигляді формальних рядів

$$y_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} \tilde{F}(t-j, 0), \quad (5_0)$$

$$y_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} \left[\tilde{F}(t-j, y_0(q(t-j))) - \tilde{F}(t-j, 0) \right] \quad (5_1)$$

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} \left[\tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(q(t-j))) - \tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(q(t-j))) \right], \quad i = 2, 3, \dots \quad (5_i)$$

Для того, щоб (5_i) були розв'язками послідовності систем рівнянь (4_i) достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до

деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t), i = 1, 2, \dots$, для яких виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M_* \Delta^i. \quad (6)$$

Приймаючи до уваги (5₀), отримуємо

$$\begin{aligned} |y_0(t)| &\leq \left| \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} \tilde{F}(t-j, 0) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |J|^{j-1} \sup \tilde{F} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_1)^{j-1} M \leq \frac{M}{1 - (\lambda^* + \delta_1)} = M_*. \quad (7) \end{aligned}$$

Далі, з огляду на (7) та (5₁) отримуємо

$$\begin{aligned} |y_1(t)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |J|^{j-1} \left| \tilde{F}(t-j, y_0(q(t-j))) - \tilde{F}(t-j, 0) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_1)^{j-1} L |y_0(q(t-j))| \leq \\ &\leq M_* \frac{L}{1 - (\lambda^* + \delta_1)} = M_* \Delta. \end{aligned}$$

Таким чином, оцінка (6) має місце при $i = 0, 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що вона доведена уже для деякого k , і покажемо, що вона не зміниться при переході від k до $k+1$. Згідно з (5_{k+1}) і (6) маємо

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(t)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |J|^{j-1} \left| \tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^k y_j(q(t-j))) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^{k-1} y_j(q(t-j))) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_1)^{j-1} L \left| \sum_{j=0}^k y_j(q(t-j)) - \sum_{j=0}^{k-1} y_j(q(t-j)) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_1)^{j-1} L |y_k(q(t-j))| \leq \\ &\leq \frac{L}{1 - (\lambda^* + \delta_1)} M_* \Delta^k \leq M_* \Delta^{k+1}. \end{aligned}$$

Цим самим оцінки (6) повністю доведено і, отже, ряд (3) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної при $t \in \mathbb{R}$ вектор-функції $y(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (2) і задовольняє умові

$$|y(t)| \leq \frac{M_*}{1 - \Delta}.$$

Теорему доведено.

Дослідимо тепер систему рівнянь (2) у випадку, коли виконуються умови:

1. $\lambda_i > 1, i = 1, \dots, m, q > 0$;

$$2. \quad \theta = L \frac{\lambda_*^{-1} + \delta_2}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_2)} < 1, \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\lambda_* = \min \{ \lambda_i, i = 1, \dots, m \};$$

$$3. \quad |\tilde{F}(t, y') - \tilde{F}(t, y'')| \leq L |y' - y''|, \text{ де } t \in \mathbb{R},$$

$$y', y'' \in \mathbb{R}^n, L - \text{деяка додатна стала};$$

$$4. \quad \text{всі елементи вектор-функції } \tilde{F}(t, 0) \text{ є неперервними й обмеженими при всіх } t \in \mathbb{R} \text{ функціями і } \sup_t |\tilde{F}(t, 0)| = M < \infty.$$

Має місце теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1 – 4. Тоді система рівнянь (2) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \quad (8)$$

де $\bar{y}_i(t), i = 0, 1, \dots$, – деякі неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}$ вектор-функції.

Доведення. Як і в попередній теоремі, можна показати, що ряд

$$\tilde{F}(t, \bar{y}_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(qt)) \right)$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$,

$|\bar{y}_i(t)| \leq \bar{M}_* \theta^i, i \geq 0$ і його сума дорівнює

$$\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} \bar{y}_j(qt)).$$

Отже, підставивши (8) в (2), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) = J \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + \tilde{F}(t, \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t)),$$

звідки випливає, що якщо вектор-функції $\bar{y}_i(t), i = 0, 1, \dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\bar{y}_0(t+1) = J \bar{y}_0(t) + \tilde{F}(t, 0), \quad (9_0)$$

$$\bar{y}_1(t+1) = J \bar{y}_1(t) + \tilde{F}(t, \bar{y}_0(qt)) - \tilde{F}(t, 0), \quad (9_1)$$

$$\bar{y}_i(t+1) = J \bar{y}_i(t) + \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(qt)), \quad i = 2, 3, \dots, \quad (9_i)$$

то ряд (8) буде формальним розв'язком системи рівнянь (2).

Згідно з умовами теореми ряд

$$\bar{y}_0(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)} \tilde{F}(t+j, 0) \quad (10)$$

рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$, задовольняє систему (9₀) (в цьому можна переконатися

безпосередньою підстановкою в (9₀) і виконується оцінка

$$\begin{aligned} |\bar{y}_0(t)| &\leq \left| \sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)} \tilde{F}(t+j, 0) \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |J^{-1}|^{j+1} |\sup \tilde{F}| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_2)^{j+1} \bar{M} \leq \frac{\lambda_*^{-1} + \delta_2}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_2)} \bar{M} = \bar{M}_*. \quad (11) \end{aligned}$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (9_i), $i=1, 2, \dots$, можна за індукцією показати, що ряди

$$\begin{aligned} \bar{y}_i(t) = & - \sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)} \left[\tilde{F}(t+j, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(q(t+j))) - \right. \\ & \left. - \tilde{F}(t+j, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(q(t+j))) \right], i=1, 2, \dots \quad (12_i) \end{aligned}$$

рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}$, задовольняють відповідні системи рівнянь (9_i), $i=1, 2, \dots$, і виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(t)| \leq \bar{M}_* \theta^i, i=1, 2, \dots \quad (13)$$

Таким чином, ряд (8) рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$ до деякого неперервного розв'язку $\bar{y}(t)$, який задовольняє умові

$$|\bar{y}(t)| \leq \frac{\bar{M}_*}{1 - \theta}$$

Теорему доведено.

Перепишемо систему рівнянь (2) у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + \tilde{F}^1(t, y^1(qt), y^2(qt)), \\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + \tilde{F}^2(t, y^1(qt), y^2(qt)), \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} J_1 &= \text{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_k(\lambda_k)), \\ J_1 &= \text{diag}(J_{k+1}(\lambda_{k+1}), \dots, J_m(\lambda_m)), m \leq n. \end{aligned}$$

Теорема 3. Нехай виконуються умови:

- $0 < \lambda_q < 1 < \lambda_j, i=1, \dots, k, j=k+1, \dots, m, q > 0$;
- $\theta = \max \left\{ \frac{2L}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_3)}, \frac{2L(\lambda_*^{-1} + \delta_4)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_4)} \right\} < 1$,
 $\lambda_* = \max \{ \lambda_i, i=1, \dots, k \}$,
 $\lambda_* = \min \{ \lambda_j, j=k+1, \dots, m \}$;
- $|\tilde{F}^i(t, y'_1, y'_2) - \tilde{F}^i(t, y''_1, y''_2)| \leq L(|y'_1 - y''_1| + |y'_2 - y''_2|), i=1, 2$, де $t \in \mathbb{R}, y'_1, y'_2, y''_1, y''_2 \in \mathbb{R}^n$,
 L - деяка додатна стала;

4. всі компоненти вектор-функцій $\tilde{F}^i(t, 0, 0), i=1, 2$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями.

Тоді система рівнянь (14) має неперервний і обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок

$$y(t) = (y^1(t), y^2(t)).$$

Доведення. Розв'язок системи (14) шукатимемо у вигляді функціональних рядів

$$\begin{aligned} y^1(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y^1_i(t), \\ y^2(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y^2_i(t), \end{aligned} \quad (15)$$

де $y^1_i(t), y^2_i(t), i=0, 1, \dots$, - деякі неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}$ вектор-функції.

Як і в попередніх теоремах, можна показати, що ряди

$$\begin{aligned} \tilde{F}^1(t, y^1_0(qt), y^2_0(qt)) &+ \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}^1 \left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y^1_j(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y^2_j(qt) \right) - \right. \\ &\left. - \tilde{F}^1 \left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y^1_j(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y^2_j(qt) \right) \right) \\ \tilde{F}^2(t, y^1_0(qt), y^2_0(qt)) &+ \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}^2 \left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y^1_j(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y^2_j(qt) \right) - \right. \\ &\left. - \tilde{F}^2 \left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y^1_j(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y^2_j(qt) \right) \right) \end{aligned}$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, $|y^1_i(t)| \leq M' \theta^i$,

$|y^2_i(t)| \leq M' \theta^i, i \geq 0$ і їх суми дорівнюють

$$\tilde{F}^1(t, \sum_{j=0}^{\infty} y^1_j(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y^2_j(qt)), \tilde{F}^2(t, \sum_{j=0}^{\infty} y^1_j(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y^2_j(qt))$$

відповідно.

Тоді, підставляючи (15) в (14), отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} y^1_i(t+1) &= J_1 \sum_{i=0}^{\infty} y^1_i(t) + \tilde{F}^1(t, \sum_{i=0}^{\infty} y^1_i(qt), \sum_{i=0}^{\infty} y^2_i(qt)), \\ \sum_{i=0}^{\infty} y^2_i(t+1) &= J_2 \sum_{i=0}^{\infty} y^2_i(t) + \tilde{F}^2(t, \sum_{i=0}^{\infty} y^1_i(qt), \sum_{i=0}^{\infty} y^2_i(qt)), \end{aligned}$$

звідки безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y^1_i(t), y^2_i(t), i=0, 1, \dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\begin{aligned} y^1_0(t+1) &= J_1 y^1_0(t) + \tilde{F}^1(t, 0, 0), \\ y^2_0(t+1) &= J_2 y^2_0(t) + \tilde{F}^2(t, 0, 0), \end{aligned} \quad (16_0)$$

$$y^1_i(t+1) = J_1 y^1_i(t) + \tilde{F}^1(t, y^1_0(qt), y^2_0(qt)) - \tilde{F}^1(t, 0, 0), \quad (16_1)$$

$$\begin{aligned} y_1^2(t+1) &= J_2 y_1^2(t) + \tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) - \tilde{F}^2(t, 0, 0), \\ y_i^1(t+1) &= J_1 y_i^1(t) + \tilde{F}^1(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)) - \\ &\quad - \tilde{F}^1(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)), \\ &\quad i = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (16_i)$$

$$\begin{aligned} y_i^2(t+1) &= J_2 y_i^2(t) + \tilde{F}^2(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)) - \\ &\quad - \tilde{F}^2(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)), \end{aligned}$$

то ряди (15) є формальним розв'язком системи рівнянь (14).

Приймаючи до уваги умови теореми, можна переконатися, що ряди

$$\begin{aligned} y_0^1(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} J_1^{j-1} \tilde{F}^1(t-j, 0, 0), \\ y_0^2(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} J_2^{-(j+1)} \tilde{F}^2(t+j, 0, 0). \end{aligned} \quad (17_0)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, задовольняють систему рівнянь (16₀) і виконуються оцінки

$$\begin{aligned} |y_0^1(t)| &\leq \frac{M^1}{1 - (\lambda^* + \delta_3)}, \\ |y_0^2(t)| &\leq \frac{M^2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)}{1 - (\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)}, \end{aligned} \quad (18_0)$$

де $M^1 = \sup_t |\tilde{F}^1(t, 0, 0)|$, $M^2 = \sup_t |\tilde{F}^2(t, 0, 0)|$.

Згідно з (18₀) отримуємо оцінку

$$|y_0(t)| \leq M' = \left\{ \frac{M^1}{1 - (\lambda^* + \delta_3)}, \frac{M^2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)}{1 - (\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)} \right\}. \quad (19_0)$$

Враховуючи (16₀) та (18₀) можна послідовно показати, що ряди

$$y_i^1(t) =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{\infty} J_1^{j-1} \left[\tilde{F}^1 \left(t-j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(q(t-j)) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{F}^1 \left(t-j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(q(t-j)) \right) \right], \\ &\quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (17_i)$$

$$\begin{aligned} y_i^2(t) &= \\ &= -\sum_{j=0}^{\infty} J_2^{-(j+1)} \left[\tilde{F}^2 \left(t+j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(q(t+j)), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(q(t+j)) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{F}^2 \left(t+j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(q(t+j)), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(q(t+j)) \right) \right], \end{aligned}$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, задовольняють систему рівнянь (16_i), $i = 1, 2, \dots$, і виконуються оцінки

$$\begin{aligned} |y_i^1(t)| &\leq M' \theta^i, \\ |y_i^2(t)| &\leq M' \theta^i, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots \quad (18_i)$$

Звідси випливає, що ряди (15) рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, яка є розв'язком системи рівнянь (14) і задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M'}{1 - \theta}.$$

Теорему 3 доведено.

Отже, у статті встановлено нові умови існування неперервних розв'язків систем функціонально-різницевих рівнянь, запропоновано метод побудови таких розв'язків та досліджено структуру їх множини.

Отримані результати доповнюють уже існуючі праці інших математиків і сприятимуть подальшому вивченню неперервних розв'язків більш широких класів таких рівнянь.

Список використаних джерел

1. Birkhoff G.D. General theory of linear difference equations. / Birkhoff G. D. – Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – 12. – P. 243 – 284.
2. Trjitzinsky W. J. Analytic theory of linear q-difference equations. / Trjitzinsky W. J. – Ibid. – 1933. – 61. – P. 1 – 38.

References

1. BIRKHOFF, G. (1911) General theory of linear difference equations. – Trans. Amer. Math. Soc., 12, pp. 243 – 284.
2. TRJITZINSKY, W. (1933) Analytic theory of linear q-difference equations. – Ibid, 61, pp. 1 – 38.

3. *Пелюх Г.П.* Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевого рівняння з лінійно перетвореним аргументом / Пелюх Г. П., Сівак О. А. // Нелінійні коливання. — 2010. — 13, № 1. — С. 75—95.
4. *Пелюх Г.П.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевого рівняння / Пелюх Г. П., Сівак О. А. // Нелінійні коливання. — 2009. — 12, № 3. — С. 307—335.
5. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевого рівняння / Бецко І. В. // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2015. — №4. — С. 7 – 13.
6. *Бецко І. В.* Про існування неперервних розв'язків систем різницевого рівняння / Бецко І. В. // Нелінійні коливання. — 2016. — 19, №1. — С. 3 – 10.
3. *PELYUKH, G., SIVAK, O.* (2010) Pro strukturu mnozhyny neperervnyh rozvyazkiv funktsionalno-riznytsevyh rivnyan z liniyno peretvorenim argumentum. // Neliniyni kolyvannya. — 13, №1. — pp. 75 – 95.
4. *PELYUKH, G., SIVAK, O.* (2009) Doslidzhennya struktury mnozhyny neperervnyh rozvyazkiv system liniynuh funktsionalno-riznytsevyh rivnysn. // Neliniyni kolyvannya. — 12, №3. — pp. 307 – 335.
5. *BETSKO, I.* (2015) Doslidzhennya struktury mnozhyny neperervnyh rozvyazkiv system riznytsevyh rivnysn. // Naukovi visti NTUU “KPI”. — №4. — pp. 7 – 13.
6. *BETSKO, I* (2016) Pro isnuvannya neperervnyh rozvyazkiv system riznytsevyh rivnyan. // Neliniyni kolyvannya. — 19, №1. — pp. 3 – 10.

Надійшла до редколегії 30.03.16