

УДК 517.929.2

I.B. Гончар

**Про обмежені та сумовні розв'язки
різницевого рівняння зі стрибком
операторного коефіцієнта**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володи-
мирська, 64.
e-mail: goncharinna@ukr.net

I.V. Gonchar

**On the bounded and summable solutions
of a difference equation with a jump of an
operator coefficient**

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: goncharinna@ukr.net

*Досліджується питання про існування єдиного обмеженого і єдиного сумовного розв'язків
одного різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта у нескінченновимірному ба-
наховому просторі.*

*Ключові слова: різницеве рівняння, нескінченновимірний простір, лінійний оператор, обме-
жений розв'язок, сумовний розв'язок.*

*We consider linear and weakly nonlinear difference equations with a linear operator coefficient jump
in the infinite dimensional complex Banach space X . Such equations often arise in theoretical and
applied problems of physics, mechanics, mathematical physics, biology and mathematical economics.
The results of the research describe existence conditions of the unique solutions for some types of
difference equations. In particular we study summable solution existence and uniqueness for linear
difference equation in the space $l_p(\mathbb{Z}, X)$. Also we address the issue of the bounded solution existence
and uniqueness for linear difference equation in the space X and the explicit form of such a solution is
determined. Furthermore we formulate sufficient conditions of existence and uniqueness of the unique
bounded solution of the weakly nonlinear difference equation in the infinite dimensional complex Banach
space X .*

*Key Words: difference equation, infinite dimensional space, linear operator, bounded solution,
summable solution.*

Статтю представив академік НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, проф. Перестюк М.О.

1 Вступ

Нехай X - нескінченновимірний комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; $L(X)$ - простір лінійних обмежених операторів, що діють із X в X ; A, B - фіксовані оператори з $L(X)$.

Розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + y_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n + y_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

у якому $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ - задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ - шукана послідовність елементів простору X .

Нижче наведемо деякі достатні умови на оператори A, B , при виконанні яких виконується наступна умова.

Умова 1. Для довільної обмеженої в X послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі X .

Про застосування різницевого рівнянь з операторними коефіцієнтами див. [1-3, 5, 6].

2 Обмежені розв'язки рівняння (1).

Припустимо, що спектри $\sigma(A), \sigma(B)$ операторів A, B не перетинаються з одиничним колом $S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. Нехай $\sigma_-(A), \sigma_-(B)$ - частини спектрів операторів A, B , які лежать всередині, а $\sigma_+(A), \sigma_+(B)$ - зовні кола S . Вважатимемо, що множини $\sigma_\pm(A), \sigma_\pm(B)$ непорожні. Зауважимо, що усі отримані нижче результати залишаються справедливими і у випадку, коли серед цих множин є порожні, з очевидними змінами в отриманих формулах.

Скориставшись спектральним розкладом оператора в банаховому просторі (див. [2, с. 8]), робимо висновок, що простір X розкладається в пряму суму інваріантних відносно A підпросторів $X = X_-(A) \dot{+} X_+(A)$ таким чином, що звуження A_-, A_+ оператора A на $X_-(A), X_+(A)$ мають спектри $\sigma_-(A), \sigma_+(A)$. Також $X = X_-(B) \dot{+} X_+(B)$ і звуження B_-, B_+ оператора B на $X_-(B), X_+(B)$ мають такі ж

властивості. Відзначимо, що при цьому збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_+^{-n}\|, \sum_{n=1}^{\infty} \|A_-^n\|, \sum_{n=1}^{\infty} \|B_+^{-n}\|, \sum_{n=1}^{\infty} \|B_-^n\|. \quad (2)$$

Нехай також $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$. Зафіксуємо обмежену послідовність $\bar{y} = \{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ і покладемо $\|\bar{y}\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|$. Тоді елемент y_0 цієї послідовності єдиним чином зображується у вигляді $y_0 = y_0^- + y_0^+$, де $y_0^- \in X_-(A)$, $y_0^+ \in X_+(B)$. Позначимо через P_-^0, P_+^0 проектори в X на підпростори $X_-(A), X_+(B)$, що відповідають зображенню $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$; P_-^A, P_+^A - проектори в X на $X_-(A), X_+(A)$, що відповідають зображенню $X = X_-(A) \dot{+} X_+(A)$, P_-^B, P_+^B - проектори в X на $X_-(B), X_+(B)$, що відповідають зображенню $X = X_-(B) \dot{+} X_+(B)$.

Покладемо для кожного $n \geq 1$

$$P_+^n = A_-^n P_+^0 A_+^{-n} P_+^A, \quad P_-^n = I - P_+^n; \quad (3)$$

$$P_-^{-n} = B_-^{-n} P_-^0 B_-^n P_-^B, \quad P_+^{-n} = I - P_-^{-n}; \quad (4)$$

$$x_1 = P_-^0 y_0 + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} P_-^0 B_-^{|\nu|} P_-^B y_{\nu} - \sum_{\nu=1}^{\infty} P_+^0 A_+^{-\nu} P_+^A y_{\nu}; \quad (5)$$

$$\forall n \geq 2: x_n = \sum_{k=1}^{n-1} A_-^{n-1-k} P_-^k y_k + \sum_{\nu=-\infty}^0 A_-^{n-1} P_-^0 B_-^{|\nu|} P_-^B y_{\nu} - \sum_{\nu=n}^{\infty} P_+^{n-1} A_+^{n-1-\nu} P_+^A y_{\nu}; \quad (6)$$

$$\forall n \leq 0: x_n = P_-^{n-1} y_{n-1} + \sum_{\nu=-\infty}^{n-2} P_-^{n-1} B_-^{|\nu|+n-1} P_-^B y_{\nu} - B_+^{-|n|-1} P_+^0 y_0 - B_+^{-|n|} P_+^{-1} y_{-1} - \dots - B_+^{-1} P_+^{-|n|} y_{-|n|} - \sum_{\nu=1}^{\infty} B_+^{n-1} P_+ A_+^{-\nu} P_+^A y_{\nu}. \quad (7)$$

Теорема 1. Припустимо, що виконуються такі умови:

- i) $\sigma(A) \cap S = \emptyset, \sigma(B) \cap S = \emptyset$;
- ii) $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$.

Тоді ряди з (5-7) абсолютно збігаються за нормою та задають відповідний до обмеженої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1). Цей розв'язок єдиний у класі всіх обмежених в X послідовностей.

Доведення. Спочатку доведемо, що для визначених за допомогою (3) проекторів послідовність $\{\|P_+^n\|, n \geq 1\}$ є обмеженою.

Справді, $P_+^0 + P_-^0 = I$, причому P_-^0 проектує на $X_-(A)$, а отже, для довільного $n \geq 1$

$$P_+^n = A_-^n (I - P_-^0) A_+^{-n} P_+^A = P_+^A - A_-^n P_-^0 A_+^{-n} P_+^A,$$

звідки

$$\|P_+^n\| \leq \|P_+^A\| + \|P_-^0\| \cdot \|P_+^A\| \cdot \sup_{n \geq 1} \|A_-^n\| \cdot \sup_{n \geq 1} \|A_+^{-n}\|.$$

Тут $\sup_{n \geq 1} \|A_-^n\| < \infty, \sup_{n \geq 1} \|A_+^{-n}\| < \infty$ внаслідок збіжності рядів (2). Аналогічно доводиться, що послідовність $\{\|P_-^n\|, n \geq 1\}$ є обмеженою.

Зафіксуємо сталу L , яка обмежує послідовності $\{\|P_-^k\| \|P_-^B\|, k \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\|P_+^k\| \|P_+^A\|, k \in \mathbb{Z}\}$, і послідовність $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Тоді з (5-7) випливає, що

$$\|x_1\| \leq L \left(\|y_0\| + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} \|B_-^{\nu}\| \|y_{\nu}\| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \|A_+^{-\nu}\| \|y_{\nu}\| \right);$$

для кожного $n \geq 2$

$$\|x_n\| \leq L \left(\|y_{n-1}\| + \sum_{\nu=0}^{n-2} \|A_-^{n-1-\nu}\| \|y_{\nu}\| + \|A_-^{n-1}\| \sum_{\nu=-\infty}^{-1} \|B_-^{|\nu|}\| \|y_{\nu}\| + \sum_{\nu=n}^{\infty} \|A_+^{n-1-\nu}\| \|y_{\nu}\| \right);$$

для кожного $n \leq 0$

$$\|x_n\| \leq L \left(\|y_{n-1}\| + \sum_{\nu=-\infty}^{n-2} \|B_-^{|\nu|+n-1}\| \|y_{\nu}\| + \sum_{\nu=n}^0 \|B_+^{n-1-\nu}\| \|y_{\nu}\| + \|B_+^{n-1}\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \|A_+^{-\nu}\| \|y_{\nu}\| \right).$$

Оскільки послідовність $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обмежена, то $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ теж обмежена, причому

$$\|\bar{x}\|_{\infty} \leq \|\bar{y}\|_{\infty} L \max\{M_1, M_2\},$$

де

$$M_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \|A_+^{-k}\| + \sup_{p \geq 0} \left\{ \sum_{k=1}^p \|A_-^k\| + \|A_-^p\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \|B_-^{\nu}\| \right\},$$

$$M_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|B_-^j\| + \sup_{p \geq 1} \left\{ \sum_{k=1}^p \|B_+^{-k}\| + \|B_+^{-p}\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \|A_+^{-\nu}\| \right\}.$$

Таким чином, ряди із (5-7) збігаються абсолютно за нормою, і послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ є обмеженою.

Безпосередньою підстановкою перевіряється, що визначена за допомогою (5-7) послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ є розв'язком рівняння (1), відповідним до обмеженої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Доведемо єдиність цього розв'язку у класі обмежених в X послідовностей. Внаслідок лінійності різницевого рівняння (1) досить переконатися, що однорідне різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (8)$$

має тільки нульовий обмежений розв'язок. Перевіримо це. Нехай $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ - обмежений розв'язок рівняння (8). Доведемо спочатку, що $x_1 = \bar{0}$. Справді, $x_{n+1} = A^n x_1 = A_-^n P_-^A x_1 + A_+^n P_+^A x_1$ для кожного $n \geq 1$, звідки $P_+^A x_1 = A_+^{-n} P_+^A x_{n+1}$ а отже з урахуванням обмеженості послідовності $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ і збіжності рядів (2)

$$\|P_+^A x_1\| \leq \|A_+^{-n}\| \|P_+^A\| \|\bar{x}\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Тому $x_1 \in X_-(A)$. Аналогічно $P_-^B x_1 = B_-^n P_-^B x_{-n+1}$ для кожного $n \geq 1$, звідки

$$\|P_-^B x_1\| \leq \|B_-^n\| \|P_-^B\| \|\bar{x}\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Отже, $x_1 \in X_+(B)$.

Тоді $x_{n+1} = A^n x_1 = \bar{0}$ для кожного $n \geq 1$. Також відзначимо, що як і для x_1 при фіксованому $k \leq 0$ перевіряється включення $x_k \in X_+(B)$. При цьому $\bar{0} = x_1 = Bx_0 = B^2 x_{-1} = \dots = B^{|k|+1} x_k$, звідки $x_k \in X_-(B)$. Тому $x_k \in X_-(B) \cap X_+(B)$, звідки випливає, що $x_k = \bar{0}$. Таким чином, рівняння (8) має лише нульовий обмежений розв'язок. \square

3 Сумовні зі степенем p розв'язки різницевого рівняння (1).

Покладемо

$$l_\infty(\mathbb{Z}, X) = \{\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset X \mid$$

$$\|\bar{x}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty\},$$

$$l_p(\mathbb{Z}, X) = \{\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset X \mid$$

$$\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|^p \right)^{1/p} < \infty\}, 1 \leq p < \infty.$$

Зафіксуємо $p \in [1, \infty]$ і такий набір операторів $\{T_{ij}, i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}\} \subset L(X)$, що оператор T , який визначається за правилом

$$T\bar{x} = \{(T\bar{x})_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} T_{ij} x_j, i \in \mathbb{Z}\},$$

належить до множини лінійних обмежених операторів $L(l_p(\mathbb{Z}, X))$.

Визначимо функцію $d_T : \mathbb{Z} \rightarrow [0, \infty)$ за правилом:

$$d_T(k) = \sup_{i, j \in \mathbb{Z}, i-j=k} \|T_{ij}\|, k \in \mathbb{Z}.$$

Будемо казати, що $T \in \text{End}_1(l_p(\mathbb{Z}, X))$, якщо $\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_T(k) < \infty$ при $p \in [1, \infty)$, а також $T \in L(l_\infty(\mathbb{Z}, X)) \cap \text{End}_1(l_1(\mathbb{Z}, X))$ при $p = \infty$.

Справджується таке твердження.

Лема 1 (див. [4]). *Якщо для деякого $q \in [1, \infty]$ оператор $T \in \text{End}_1(l_q(\mathbb{Z}, X))$ - неперервно оборотний, то він є неперервно оборотним у всіх просторах $l_p(\mathbb{Z}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Визначимо тепер оператор $J : l_\infty(\mathbb{Z}, X) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ за правилом

$$J\bar{x} = \{(Jx)_k = \begin{cases} x_{k+1} - Ax_k, k \geq 1, \\ x_{k+1} - Bx_k, k \leq 0, \end{cases} k \in \mathbb{Z}\}.$$

Неважко переконатися, що $J \in \text{End}_1(l_\infty(\mathbb{Z}, X))$. Тому з теореми 1, леми 1 і теореми Банаха про обернений оператор випливає, що виконується така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1, то для довільного фіксованого $p \in [1, \infty]$ рівняння (1) має єдиний розв'язок $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $l_p(\mathbb{Z}, X)$ для довільної послідовності $\bar{y} = \{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(\mathbb{Z}, X)$.*

4 Обмежені розв'язки слабо нелінійного різницевого рівняння.

Розглянемо нелінійне різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + g(x_n) + y_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n + g(x_n) + y_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (9)$$

де $g : X \rightarrow X$ і задовольняє умову Ліпшиця зі сталою K , тобто

$$\exists K > 0 \forall x, z \in X : \|g(x) - g(z)\| \leq K \|x - z\|.$$

Теорема 3. *Нехай $\sigma(A) \cap S = \emptyset, \sigma(B) \cap S = \emptyset$ і $KL\max\{M_1, M_2\} < 1$. Тоді для довільної обмеженої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ нелінійне різницеве рівняння (9) має єдиний обмежений розв'язок.*

Доведення. У просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ рівняння (9) записується у такому еквівалентному вигляді:

$$J\bar{x} = G(\bar{x}) + \bar{y}, \quad (10)$$

де $G(\bar{x}) = \{(Gx)_k = g(x_k), k \in \mathbb{Z}\}$. Доведемо, що $G(\bar{x}) : l_\infty(\mathbb{Z}, X) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z}, X)$. Дійсно, оскільки $G(\bar{x}) = (G(\bar{x}) - G(\bar{0})) + G(\bar{0})$ і $G(\bar{0}) = (\dots, g(0), g(0), g(0), \dots) \in l_\infty(\mathbb{Z}, X)$, то

$$\begin{aligned} \|G(\bar{x})\|_\infty &= \|G(\bar{x}) - G(\bar{0}) + G(\bar{0})\|_\infty \leq \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|g(\bar{x}) - g(\bar{0})\| + \|G(\bar{0})\|_\infty \leq K\|\bar{x}\|_\infty + \|g(0)\|. \end{aligned}$$

Також $G(\bar{x})$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою K , оскільки

$$\begin{aligned} \forall \bar{x}, \bar{y} \in l_\infty(\mathbb{Z}, X) : \|G(\bar{x}) - G(\bar{y})\|_\infty &= \\ = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|g(x_n) - g(y_n)\| &\leq K\|x_n - y_n\|_\infty. \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. Ким В. С. Об условиях существования ограниченных решений разностного уравнения в банаховом пространстве. / В. С. Ким // Диффер. уравнения. – 1967. – **3**, №12. – С. 2151 – 2160.
2. Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. / А. Я. Дороговцев // К.: Вища шк. – 1992. – 319 с.
3. Городний М. Ф. Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве. / М. Ф. Городний // Укр. матем. журн. – 1991. – **43**, №1. – С. 42 – 46.
4. Баскаков А. Г. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ. / А. Г. Баскаков // Сиб. мат. журнал. – 1997. – **38**, №1. – С. 14 – 28.
5. Слюсарчук В. Е. Обратимость линейных неавтономных разностных операторов в пространстве ограниченных на \mathbb{Z} функций. / В. Е. Слюсарчук // Мат. заметки. – 1985. – **37**, вып. 5. – С. 662 – 666.
6. Хенри Д. Геометрическая теория полунелинейных параболических уравнений. / Д. Хенри // М.: Мир, – 1985. – 376 с.

З теореми 1, теореми Банаха про обернений оператор та умов теореми 3 випливає, що оператор J неперервно оборотний, причому $\|J^{-1}\| \leq L \max\{M_1, M_2\}$. Тому рівняння (10) записується, у вигляді $\bar{x} = J^{-1}G(\bar{x}) + J^{-1}\bar{y}$. Зафіксуємо $\bar{y} \in l_\infty(\mathbb{Z}, X)$. Останнє рівняння можна подати у вигляді $\bar{x} = H(\bar{x})$, де оператор $H : l_\infty(\mathbb{Z}, X) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ діє за правилом $H(\bar{x}) = J^{-1}G(\bar{x}) + J^{-1}\bar{y}$, причому

$$\begin{aligned} \forall \bar{z}, \bar{t} \in l_\infty(\mathbb{Z}, X) : \|H(\bar{z}) - H(\bar{t})\|_\infty &= \\ = \|J^{-1}G(\bar{z}) - J^{-1}G(\bar{t})\|_\infty &\leq \|J^{-1}\| \|G(\bar{z}) - G(\bar{t})\|_\infty \leq \\ &\leq KL \max\{M_1, M_2\} \|\bar{z} - \bar{t}\|_\infty. \end{aligned}$$

Таким чином, виконуються умови теореми Банаха про стискуjące відображення. Звідси випливає, що нелінійне різницеве рівняння (9) має єдиний обмежений розв'язок. \square

References

1. KIM, V. S. (1967) "On existence conditions of bounded solutions of a difference equation in Banach space", Differ. Uravn., Vol. 3, №12, pp. 2151-2160.
2. DOROGOVTSSEV, A. Ya. (1992) "Periodic and stationary regimes of infinite dimensional deterministic and stochastic dynamical systems", Vyshcha Shkola, Kiev, 319 p.
3. GORODNII, M. F. (1991) "Bounded and periodic solutions of a difference equation and its stochastic analogue in Banach space", Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 43, No. 1, pp. 42-46.
4. BASKAKOV, A. G. (1997) "Asymptotic estimates for elements of matrices of inverse operators, and harmonic analysis", Sib. Mat. Zh., Vol. 38, №1, pp. 14-28.
5. SLYUSARCHUK, V. E. (1985) "Invertibility of nonautonomous difference operators in the space of bounded functions on \mathbb{Z} ", Mat. Zametki, Vol. 37, №5, pp. 662-666.
6. HENRY, D. (1985) "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations", Mir, Moscow, 376 p.

Надійшла до редколегії 24.06.2016