

УДК 517.8

Козак В.І.¹, аспірантка

Інтегрування диференціально-різницевих нелінійних рівнянь за допомогою спектральної теорії блочних матриць відповідних двовимірній проблемі моментів

¹Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”, 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37,
e-mail: afina0706@mail.ru

Kozak V.I.¹, graduate student

Integration of nonlinear differential-difference equations by means of the spectral theory of block matrices related to the two-dimensional moment problem

¹ National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”, 03056, Kyiv, pr. Peremohy, 37,
e-mail: afina0706@mail.ru

Раніше для двовимірної дійсної проблеми моментів були розв’язані пряма та обернена спектральні задачі аналогічно як для класичної проблеми моментів Гамбургера. В цій роботі, використовуючи блочні матриці типу Якобі відповідні двовимірній дійсній проблемі моментів, складена система рівнянь типу Лакса та проінтегрована завдяки розвиненій спектральній теорії для таких матриць. Для цього записана функція типу Вейля, яка однозначно визначає міру відповідну двовимірній дійсній проблемі моментів. Для такої функції раніше були доведені певні властивості. Аналогічні результати для комплексної проблеми моментів були наведені в роботах Березанського Ю.М. та Мохонько О.А.

Ключові слова: двовимірна проблема моментів, матриці типу Якобі, функція Вейля, поліноми другого роду, рівняння Лакса

Previously, for the two dimensional real moment problem, direct and inverse spectral problems were solved just as for the classical Hamburger moment problem. The result of the inverse spectral problem is block Jacobi type matrices. Direct problem consists of the recovering measures for a given of Jacobi type matrices. On the other hand, there were integrated Toda chains by spectral theory for the classical Hamburger moment problem using ordinary Jacobi matrix. In this article, using block Jacobi type matrices two-dimensional real moment problem, the system of Lax equations is constructed and integrated due to developed spectral theory for such matrices. For this reason the Weil function was presented there where recorded function that uniquely determined an appropriate measure corresponded to the two-dimensional real moment problem. For such functions there were proved previously certain properties. Similar results for the complex moment problem were given by Berezhansky Y.M. and Mokhonko O.A.

Key Words: two-dimensional moment problem, Jacobi type matrix, Weyl function, second order polynomials, Lax equation.

Статтю представив академік НАН України д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

Вступ. Використовуючи результати [11, 12], Ю.М. Березанський у [3, 7] запропонував метод інтегрування різницевого нелінійного рівняння (напівнескінченного ланцюжка Тоди), ґрунтуючись на спектральній тео-

рії аналога симетричного рівняння Штурма-Ліувіля. Далі в [4] показано, що аналогічна теорія інтегрування відповідних класів нелінійних різницевих рівнянь може бути побудована для спектральної теорії нормаль-

них блочних матриць типу Якобі [8].

Головною метою цієї роботи є продовження попередніх результатів на класи нелінійних різницевих рівнянь, породжених блочними матрицями типу Якобі відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів в [6, 9].

Попередні відомості. Дійсна двовимір-на проблема моментів полягає у пошуку умов для заданої двоіндексної послідовності $\{s_{m,n}\}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$ дійсних чисел так, аби існувала міра $d\rho(x, y)$ на дійсній площині \mathbb{R}^2 , із якою б виконувалися рівності

$$s_{m,n} = \int_{\mathbb{R}^2} x^m y^n d\rho(x, y), \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \quad (1)$$

Побудови відповідних матриць аналогічні до звичайного одновимірного випадку [1]. Але замість звичайного простору l_2 береться простір

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_2 &= \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}, \\ n \in \mathbb{N}_0, \quad \mathbf{l}_2 \ni f &= (f_n)_{n=0}^\infty, \quad \sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 < \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Вектор x_n з простору $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}$ має вигляд $x_n = (x_{n;0}, \dots, x_{n;n})$. Для кожного $\alpha \in \{0, \dots, n\}$, число $x_{n;\alpha}$ є координатою базисного вектора $\delta_{n;\alpha} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{H}_n \in \mathbf{l}_2$ (одиниця знаходиться на α -му місці), $\delta_0 \equiv \delta_{0;0} = (1)$. Узагальнення звичайної матриці Якобі відповідної класичній проблемі моментів Гамбургера набуває вигляду пари блочних матриць:

$$J_A = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, & b_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ c_n &: \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, & n &\in \mathbb{N}_0; \end{aligned}$$

$$J_B = \begin{bmatrix} w_0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ u_0 & w_1 & v_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & u_1 & w_2 & v_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, & w_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ v_n &: \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, & n &\in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Матриці (3) і (4) на фінітних векторах $\mathbf{l}_{\text{fin}} \subset \mathbf{l}_2$ задають два оператори

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\text{fin}} \ni f &\longrightarrow J_A f = ((J_A f)_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbf{l}_2, \\ (J_A f)_n &= a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1}; \\ \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\text{fin}} \ni f &\longrightarrow J_B f = ((J_B f)_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbf{l}_2, \\ (J_B f)_n &= u_{n-1} f_{n-1} + w_n f_n + v_n f_{n+1}, \end{aligned} \quad (5)$$

де для зручності покладається $f_{-1} := 0$. Без втрати загальності, матриці J_A , J_B та відповідні оператори позначимо тими ж самими символами J_A і J_B .

Далі, для цієї роботи, припустимо, що ці матриці мають особливу внутрішню структуру. А саме, матриці a_n і c_n мають певну форму та їх коефіцієнти задовольняють деякі властивості:

$$\begin{aligned} a_n &= \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} a_{n;0,0} & * & * & \dots & * \\ a_{n;1,0} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{n;2,1} & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n;n+1,n} \end{bmatrix}}_{n+1} \right\}_{n+2}; \\ c_n &= \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} c_{n;0,0} & c_{n;0,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & c_{n;1,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \dots & c_{n;n-1,n} & 0 \\ * & * & * & \dots & * & c_{n;n,n+1} \end{bmatrix}}_{n+2} \right\}_{n+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n;1,0}, a_{n;2,1}, \dots, a_{n;n+1,n} &> 0, \\ c_{n;0,1}, c_{n;1,2}, \dots, c_{n;n,n+1} &> 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

(6)

$$u_n = \left\{ \begin{array}{cccccc} u_{n;0,0} & * & * & \dots & * & \\ 0 & u_{n;1,1} & * & \dots & * & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n;n,n} & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \end{array} \right\}_{n+2};$$

$$v_n = \left\{ \begin{array}{cccccc} v_{n;0,0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ * & v_{n;1,1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & v_{n;n-1,n-1} & 0 & 0 \\ * & * & \dots & * & v_{n;n,n} & 0 \end{array} \right\}_{n+1};$$

$$u_{n;0,0}, u_{n;1,1}, \dots, u_{n;n,n} > 0,$$

$$v_{n;0,0}, v_{n;1,1}, \dots, v_{n;n,n} > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (7)$$

У формулах (3) і (4) блоки b_n і w_n є симетричними $(n+1) \times (n+1)$ -матрицями $n \in \mathbb{N}_0$.

Оскільки, взагалі, мова йде про симетричні матриці, то $a_{n;\alpha,\beta} = c_{n;\beta,\alpha}$, $\alpha = 0, 1, \dots, n$, $\beta = 0, 1, \dots, n+1$, $n \in \mathbb{N}$ і $u_{n;\alpha,\beta} = v_{n;\beta,\alpha}$, $\beta = 0, 1, \dots, n$, $\alpha = 0, 1, \dots, n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Для подальших досліджень припустимо, що генеровані виразами (3) і (4) оператори є обмеженими самоспряженими і комутують у строгому резольвентному сенсі.

У такому (двовимірному) випадку, узагальнені власні вектори $P(x, y)$ [2] мають вигляд послідовності $P(x, y) = P_n(x, y)_{n=0}^\infty$, де $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $P_n(x, y) \in \mathcal{H}_n$ є вектор, коефіцієнти якого є поліноми n -го порядку за змінними x та y . А саме:

$$P_n(x, y) = (P_{n;0}(x, y), P_{n;1}(x, y), \dots, P_{n;n}(x, y)), \quad (8)$$

де $P_{n,\alpha}$ – лінійна комбінація елементів

$$\begin{aligned} & x^0 y^0; \quad x^0 y^1, x^1 y^0; \quad x^0 y^2, x^1 y^1, x^2 y^0; \quad \dots; \\ & x^0 y^n, x^1 y^{n-1}, \dots, x^{n-\alpha} y^\alpha, \quad \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

для $\alpha = 0, \dots, n$. Поліноми (8) є розв'язками системи двох різницевих рівнянь

$$J_A P(x, y) = x P(x, y), \quad J_B P(x, y) = y P(x, y). \quad (10)$$

Коротко зауважимо, як утворилися матриці (3) і (4) із властивостями (6) і (7). Вперше такі матриці були побудовані в роботах

[5, 10]. Для побудови $P_n(x, y)$ проводиться ортогоналізація за Шмідтом системи $x^n y^m$, $m, n \in \mathbb{N}_0$ відносно скалярного добутку простору $L_2 = L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x, y))$ функцій інтегрованих із квадратом на \mathbb{R}^2 відносно міри Бореля $d\rho(x, y)$. Припускається, що функції

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^m y^n, \quad m, n \in \mathbb{N}_0, \quad (11)$$

є лінійно незалежними і утворюють тотальну множину в L_2 . Тобто, використовуючи порядок:

$$\begin{aligned} & x^0 y^0; \quad x^0 y^1, x^1 y^0; \quad x^0 y^2, x^1 y^1, x^2 y^0; \quad \dots; \\ & x^0 y^n, x^1 y^{n-1}, \dots, x^n y^0; \quad \dots \end{aligned} \quad (12)$$

у якості результату, отримується система ортогональних поліномів, поданих у вигляді таблиці:

$$\begin{aligned} & P_{0;0}(x, y); \\ & P_{1;0}(x, y), \quad P_{1;1}(x, y); \\ & P_{2;0}(x, y), \quad P_{2;1}(x, y), \quad P_{2;2}(x, y); \quad \dots; \\ & P_{n;0}(x, y), P_{n;1}(x, y), P_{n;2}(x, y), \dots, P_{n;n}(x, y). \end{aligned} \quad (13)$$

Кожний рядок в (13) – це вектор $P_n(x, y)$, який є розв'язком системи (10).

Для подальшого запису перетворення Фур'є, запишемо скалярний добуток: $\forall f_n \in \mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$(f_n, P_n(x, y))_{\mathcal{H}_n} = f_{n;0} P_{n;0}(x, y) + f_{n;1} P_{n;1}(x, y) + \dots + f_{n;n} P_{n;n}(x, y),$$

де $f_{n;\alpha}$ – координати вектора f_n , $\alpha = 0, 1, \dots, n$, $k_{n;\alpha} > 0$.

Теорема 1 [9]. Нехай J_A і J_B дві блочні симетричні матриці (3) і (4) з умовами на блоки (коефіцієнти) (6) і (7) відповідно. Припустимо, що ці матриці породжують обмежені самоспряжені комутуючі оператори після замикання за неперервністю в просторі \mathbf{l}_2 .

Тоді перетворення Фур'є за узагальненими власними векторами операторів J_A і J_B

має вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\text{fin}} \ni f \\ = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto \hat{f}(x, y) = \sum_{n=0}^\infty (f_n, P_n(x, y))_{\mathcal{H}_n} = \\ \sum_{n=0}^\infty \sum_{\alpha=0}^n \overline{P_{n;\alpha}(x, y)} f_{n;\alpha} \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x, y)) = L_2. \end{aligned} \quad (14)$$

де $d\rho(x, y)$ – спектральна міра операторів J_A і J_B . В (14) $P_n(x, y) = (P_n(x, y))_{n=0}^\infty$ є узагальненим власним вектором пари операторів J_A і J_B . Тут $P_n(x, y)$ є вектор, коефіцієнти якого поліноми за змінними x і y вигляду (13).

Після замикання за неперервністю, оператор (14) є унітарним з \mathbf{l}_2 в L_2 . Образи операторів J_A і J_B є операторами множення на x і y в L_2 .

Рівність Парсеваля має вигляд: $\forall f, g \in \mathbf{l}_{\text{fin}}$

$$\begin{aligned} (f, g)_{\mathbf{l}_2} &= \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x, y) \overline{\hat{g}(x, y)} d\rho(x, y), \\ (J_A f, g)_{\mathbf{l}_2} &= \int_{\mathbb{R}^2} x \hat{f}(x, y) \overline{\hat{g}(x, y)} d\rho(x, y), \\ (J_B f, g)_{\mathbf{l}_2} &= \int_{\mathbb{R}^2} y \hat{f}(x, y) \overline{\hat{g}(x, y)} d\rho(x, y). \end{aligned} \quad (15)$$

Поліноми $P_{n;\alpha}(x, y)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, \dots, n$ і $P_{0;0} = 1$ утворюють ортонормовану систему в L_2 у сенсі:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^j \overline{P_{j;i}(x, y)} f_{j;i} \sum_{l=1}^k P_{k;l}(x, y) \overline{f_{k;l}} \\ = \delta_{j,k} (f_j, g_k)_{\mathcal{H}_j}. \end{aligned}$$

де $\forall f_j \in \mathcal{H}_j$, $\forall g_k \in \mathcal{H}_k$, $j, k \in \mathbb{N}_0$. Матриці $J_A = (p_{j,k})_{j,k=0}^\infty$, $p_{j,k} = (p_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$, $J_B = (q_{j,k})_{j,k=0}^\infty$, $q_{j,k} = (q_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$, віднов-

люються за формулами:

$$\begin{aligned} p_{j,k;\alpha,\beta} &= (J_A \delta_{k,\beta}, \delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} x \overline{P_{k;\beta}(x, y)} P_{j;\alpha}(x, y) d\rho(x, y), \\ q_{j,k;\alpha,\beta} &= (J_B \delta_{k,\beta}, \delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} y \overline{P_{k;\beta}(x, y)} P_{j;\alpha}(x, y) d\rho(x, y), \end{aligned} \quad (16)$$

тут перепозначено $b_n = p_{j,j}$, $c_n = p_{j,j+1}$, $a_n = p_{j+1,j}$ і $w_n = q_{j,j}$, $v_n = q_{j,j+1}$, $u_n = q_{j+1,j}$, $j \in \mathbb{N}_0$.

Рівняння Лакса для блочних якобієвих матриць відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів. Нехай L_x та L_y – матриці типу (3) і (4) з умовами (6) і (7) відповідно. Припустимо, що їх елементи неперервно диференційовні залежать від змінної t , $t \in [0, T]$, $T \leq \infty$: $L_x = L_x(t)$ та $L_y = L_y(t)$. Розглянемо також деякі матриці $A = (d_{j,k})_{j,k=0}^\infty$ та $B = (g_{j,k})_{j,k=0}^\infty$, елементи яких теж неперервно залежать від тієї ж змінної t : $d_{j,k} = d_{j,k}(t)$, $g_{j,k} = g_{j,k}(t)$ вигляду (3) і (4) (але які не обов'язково мають властивості (6) і (7) або взагалі не є симетричними). Розглянемо систему рівнянь Лакса:

$$\begin{aligned} L'_x &= [L_x A] = L_x A - A L_x, \\ L'_y &= [L_y B] = L_y B - B L_y. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут добутки блочних матриць $L_x A$, $A L_x$, $L_y B$ та $B L_y$ визначені звичайним чином.

Якщо в рівностях (17) матриці $A(t)$ та $B(t)$ вважати фіксованими матрицями коефіцієнтів, то ці рівності можна вважати як систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку відносно невідомих $L_x(t)$ та $L_y(t)$, $t \in [0, T]$.

Випишемо систему рівнянь Лакса у вигляді системи рівнянь для елементів матриць у випадку, якщо $L_x(t)$ та $L_y(t)$ мають блочну якобієву структуру, подібну до структури матриць (3) та (4).

Перепозначимо:

$$L_x(t) = \begin{bmatrix} \beta_0(t) & \gamma_0(t) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_0(t) & \beta_1(t) & \gamma_1(t) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_1(t) & \beta_2(t) & \gamma_2(t) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) : \mathcal{H}_n &\longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, & \beta_n(t) : \mathcal{H}_n &\longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ \gamma_n(t) : \mathcal{H}_{n+1} &\longrightarrow \mathcal{H}_n, & n &\in \mathbb{N}_0; \end{aligned}$$

$$L_y(t) = \begin{bmatrix} \omega_0(t) & \theta_0(t) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \tau_0(t) & \omega_1(t) & \theta_1(t) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \tau_1(t) & \omega_2(t) & \theta_2(t) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tau_n(t) : \mathcal{H}_n &\longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, & \omega_n(t) : \mathcal{H}_n &\longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ \theta_n(t) : \mathcal{H}_{n+1} &\longrightarrow \mathcal{H}_n, & n &\in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Блоки α_n , β_n , γ_n , τ_n , ω_n , та θ_n задовольняють властивості (6) і (7). Покладемо A та B так, що їх блоки не обов'язково задовольняють умови (6) і (7).

Для підрахунку комутаторів $[A(t), L_x(t)]$ та $[B(t), L_y(t)]$ випишемо відповідні формули (в подальшому всюди елементи з від'ємними індексами вважатимуться рівними нулю):

$$\begin{aligned} (L_x A)_{n-2,n} &= c_{n-2} \gamma_{n-1}, \\ (L_x A)_{n-1,n} &= b_{n-1} \gamma_{n-1} + c_{n-1} \beta_n, \\ (L_x A)_{n,n} &= a_{n-1} \gamma_{n-1} + b_n \beta_n + c_n \alpha_n, \\ (L_x A)_{n+1,n} &= a_n \beta_n + b_{n+1} \alpha_n, \\ (L_x A)_{n+2,n} &= a_{n+1} \alpha_n, \\ (L_y B)_{n-2,n} &= v_{n-2} \theta_{n-2}, \\ (L_y B)_{n-1,n} &= w_{n-1} \theta_{n-1} + v_{n-1} \omega_n, \\ (L_y B)_{n,n} &= u_{n-1} \theta_{n-1} + w_n \omega_n + v_n \tau_n, \\ (L_y B)_{n+1,n} &= u_n \omega_n + w_{n+1} \tau_n, \\ (L_y B)_{n+2,n} &= u_{n+1} \tau_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для (AL_x) та (BL_y) виконуються аналогічні формули з заміною a_j , b_j , c_j на α_j , β_j , γ_j і v_j , w_j , u_j на τ_j , ω_j , θ_j . Порівнюючи елементи в правій та лівій частинах відповідних рівнянь в системі (17) і користуючись формулами (20), отримаємо систему рівнянь Лакса

(17) в “координатному” вигляді:

$$\begin{aligned} 0 &= c_n \gamma_{n+1} - \gamma_n c_{n+1}, \\ \gamma'_n &= b_n \gamma_n + c_n \beta_{n+1} - \beta_n c_n - \gamma_n b_{n+1}, \\ \beta'_n &= a_{n-1} \gamma_{n-1} + b_n \beta_n + c_n \alpha_n - \alpha_{n-1} c_{n-1} \\ &\quad - \beta_n b_n - \gamma_n a_n, \\ \alpha'_n &= a_n \beta_n + b_{n+1} \alpha_n - \alpha_n b_n - \beta_{n+1} a_n, \\ 0 &= a_{n+1} \alpha_n - \alpha_{n+1} a_n \\ 0 &= v_n \theta_{n+1} - \theta_n v_{n+1}, \\ \theta'_n &= w_n \theta_n + v_n \omega_{n+1} - \omega_n v_n - \theta_n w_{n+1}, \\ w'_n &= u_{n-1} \theta_{n-1} + w_n \omega_n + v_n \theta_n - \tau_{n-1} v_{n-1} \\ &\quad - \omega_n w_n - \theta_n u_n, \\ \tau'_n &= u_n \omega_n + w_{n+1} \tau_n - \tau_n w_n - \omega_{n+1} u_n, \\ 0 &= u_{n+1} \tau_n - \tau_{n+1} u_n \end{aligned} \quad (21)$$

Елементи матриць (18) та (19) також будемо вважати рівномірно обмеженими по $n \in \mathbb{N}_0$ та $t \in [0, T]$. Тому вони породжують в \mathbf{l}_2 обмежені оператори, для яких ми збережемо позначення L_x та L_y . Оператори L_x та L_y будуть слабо неперервними по $t \in [0, T]$.

Аналог функції Вейля для двовимірної дійсної проблеми моментів визначимо такою теоремою [9]:

Теорема 2 Нехай J_x і J_y – блочні матриці типу Якобі, які породжують в \mathbf{l}_2 обмежені комутуючі самоспряжені оператори. Нехай $R_x = R_{z_1;x}(t) = (L_x(t) - z_1)^{-1}$ і $R_y = R_{z_2;y}(t) = (L_y(t) - z_2)^{-1}$ – їх резольвенти ($\text{Im} z_i \neq 0$, $i = 1, 2$). Тоді функція

$$\begin{aligned} M &:= M(z_1, z_2; t) = (R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} d\rho(\lambda, \mu). \end{aligned} \quad (22)$$

$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. однозначно визначає спектральну міру цих операторів.

Продиференціюємо M по t . Тоді

$$M' = (R'_x \delta_0, R_y \delta_0)_{\mathbf{l}_2} + (R_x \delta_0, R'_y \delta_0)_{\mathbf{l}_2}. \quad (23)$$

Не важко зрозуміти, що з (17) отримається:

$$\begin{aligned} R'_x &= R_x A - A R_x, \\ R'_y &= R_y B - B R_y. \end{aligned} \quad (24)$$

Підставимо (23) в (24):

$$\begin{aligned} M' &= (R_x A \delta_0, R_y \delta_0)_{1_2} - (A R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{1_2} \\ &+ (R_x \delta_0, R_y B \delta_0)_{1_2} - (R_x \delta_0, B R_y \delta_0)_{1_2} \\ &= (R_x A \delta_0, R_y \delta_0)_{1_2} + (R_x \delta_0, R_y B \delta_0)_{1_2} \\ &- ((A + B^*) R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{1_2}. \end{aligned}$$

Скористаємося комутативними властивостями R_x та R_y та покладемо $A = -B^*$:

$$\begin{aligned} M' &= (R_x(\delta_0 b_0 + \delta_1 c_0), R_y \delta_0)_{1_2} - (R_x \delta_0, \\ &R_y(-b_0 \delta_0 - a_0 \delta_1))_{1_2} = b_0(R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{1_2} \\ &+ (R_x c_0, R_y \delta_0)_{1_2} + (R_x c_0, R_y \delta_0)_{1_2} \\ &- b_0(R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{1_2} - a_0(R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{1_2} \\ &- a_0(R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{1_2} = (c_0, R_y \delta_0)_{1_2} \\ &+ (c_0, R_y \delta_0)_{1_2} + (c_0, R_y \delta_0)_{1_2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Припустимо додатково $c_0, R_y \delta_0 = a_0, R_y \delta_0 = 0$. Тоді

$$M' = (c_0, R_y \delta_0)_{1_2}. \quad (26)$$

Таким чином доведена така лема.

Лема 1 Для функції M вигляду (22) і операторів A і B , таких що $A = -B^*$ і $c_0, R_y \delta_0 = a_0, R_y \delta_0 = 0$, виконується рівність (26).

Запишемо чотири очевидні тотожності, що відповідають кожному рівнянню системи, припускаючи $\alpha_0, \beta_0 = 0$, $\beta_1, \gamma_0 = 0$, $\gamma_1, \theta_0 = 0$, $\gamma_1, \theta_1 = 0$ для матриці L_x та $\omega_1, \theta_1 = 0$, $\omega_1, \theta_1 = 0$ для матриці L_y :

$$\begin{aligned} 1 &= (\delta_0, \delta_0)_{1_2} = (R_x(L_x - z_1)\delta_0, R_y(L_y - z_2)\delta_0)_{1_2} \\ &= (R_x\{(\beta_0, \gamma_0 - z_1)\delta_0 + \gamma_0, \theta_0\}, R_y\{(\omega_0, \theta_0 - z_2)\delta_0 + \theta_0, \delta_0\})_{1_2} = (\beta_0, \gamma_0 - z_1)(\omega_0, \theta_0 - z_2) \\ &(R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{1_2} + (\beta_0, \gamma_0 - z_1)\theta_0(R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{1_2} \\ &+ \gamma_0, \theta_0(\omega_0, \theta_0 - z_2)(R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{1_2} \\ &+ \gamma_0, \theta_0\theta_0(R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{1_2}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta_{10}, \delta_0)_{1_2} = (R_x(L_x - z_1)\delta_{10}, R_y(L_y - z_2)\delta_0)_{1_2} \\ &= (R_x\{(\beta_{10}, \gamma_{10} - z_1)\delta_{10} + \gamma_{10}, \theta_{10}\}, R_y\{(\omega_{10}, \theta_{10} - z_2)\delta_0 + \theta_{10}, \delta_0\})_{1_2} \\ &= (\omega_{10}, \theta_{10} - z_2)(\beta_{10}, \gamma_{10} - z_1) \\ &(R_x \delta_{10}, R_y \delta_0)_{1_2} + (\omega_{10}, \theta_{10} - z_2)\gamma_{10}(R_x \delta_{10}, R_y \delta_0)_{1_2} \\ &+ \theta_{10}(\beta_{10}, \gamma_{10} - z_1)(R_x \delta_{10}, R_y \delta_0)_{1_2} \\ &+ \theta_{10}\gamma_{10}(R_x \delta_{10}, R_y \delta_0)_{1_2}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} 1 &= (\delta_0, \delta_0)_{1_2} = (R_x R_y(L_y - z_2)(L_x - z_1)\delta_0, \delta_0)_{1_2} \\ &= (R_x R_y(L_y - z_2)\{(\beta_0, \gamma_0 - z_1)\delta_0 + \gamma_0, \theta_0\}, \delta_0)_{1_2} \\ &= (R_x R_y((\beta_0, \gamma_0 - z_1)\{(\omega_0, \theta_0 - z_2)\delta_0 + \theta_0, \delta_0\} \\ &+ \gamma_0, \theta_0\{(\omega_{10}, \theta_{10} - z_2)\delta_{10} + \gamma_{10}, \theta_{10}\}), \delta_0)_{1_2} \\ &= (\beta_0, \gamma_0 - z_1)(\omega_{10}, \theta_{10} - z_2)(R_x R_y \delta_0, \delta_0)_{1_2} \\ &+ (\beta_0, \gamma_0 - z_1)\theta_0(R_x R_y \delta_{10}, \delta_0)_{1_2} \\ &+ \gamma_0, \theta_0(\omega_{10}, \theta_{10} - z_2)(R_x R_y \delta_{11}, \delta_0)_{1_2} \\ &+ \gamma_0, \theta_0(\theta_{10}, \delta_{10})(R_x R_y \delta_{21}, \delta_0)_{1_2}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta_0, \delta_{10})_{1_2} = (R_x R_y(L_y - z_2)(L_x - z_1)\delta_0, \delta_{10})_{1_2} \\ &= (R_x R_y(L_y - z_2)\{(\beta_0, \gamma_0 - z_1)\delta_0 + \gamma_0, \theta_0\}, \delta_{10})_{1_2} \\ &= (R_x R_y((\beta_0, \gamma_0 - z_1)\{(\omega_0, \theta_0 - z_2)\delta_0 + \theta_0, \delta_0\} \\ &+ \gamma_0, \theta_0\{(\omega_{10}, \theta_{10} - z_2)\delta_{10} + \gamma_{10}, \theta_{10}\}), \delta_{10})_{1_2} \\ &= (\beta_0, \gamma_0 - z_1)(\omega_{10}, \theta_{10} - z_2)(R_x R_y \delta_0, \delta_{10})_{1_2} \\ &+ (\beta_0, \gamma_0 - z_1)\theta_0(R_x R_y \delta_{10}, \delta_{10})_{1_2} \\ &+ \gamma_0, \theta_0(\omega_0, \theta_0 - z_2)(R_x R_y \delta_{11}, \delta_{10})_{1_2} \\ &+ \gamma_0, \theta_0(\theta_{10}, \delta_{10})(R_x R_y \delta_{21}, \delta_{10})_{1_2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (27)–(30), отримуємо:

$$\begin{aligned} 1 &= (\beta_0, \gamma_0 - z_1)(\omega_0, \theta_0 - z_2)(R_x \delta_0, R_y \delta_0) \\ &+ (\beta_0, \gamma_0 - z_1)\theta_0(R_x \delta_0, R_y \delta_{10}). \end{aligned} \quad (31)$$

При розв'язанні припускалось, що $\beta_1, \gamma_0 = \beta_0, \gamma_0$ та враховано рівність $\gamma_{10}, \theta_{10} = \gamma_0, \theta_0$, яка є наслідком комутативності матриць L_x та L_y .

Виразимо з (31) $(R_x \delta_0, R_y \delta_{10})$ і підставимо його в (25):

$$M' = (c_0, R_y \delta_0 - a_0, R_y \delta_0)(1 - (\beta_0, \gamma_0 - z_1)(\omega_0, \theta_0 - z_2)M). \quad (32)$$

Таким чином доведена така лема.

Лема 2 Припустимо, що у матриць L_x та L_y

$$\begin{aligned} \alpha_{0;0,0} &= \beta_{1;1,0} = \beta_{1;0,1} = \gamma_{0;0,0} = \gamma_{1;0,0} = \gamma_{1;1,0} \\ &= \gamma_{1;1,1} = 0, \\ \omega_{1;1,0} &= \omega_{1;0,1} = \theta_{1;1,0} = 0, \quad \beta_{1;0,0} = \beta_{0;0,0}, \\ \omega_{1;0,0} &\neq \omega_{1;1,1} \end{aligned} \quad (33)$$

а для матриць A і B виконуються такі умови:

$$A = -B^*, \quad c_{0;0,1} = a_{0;0,1} = 0, \quad c_{0;0,0} \neq a_{0;0,1}. \quad (34)$$

Тоді функція M вигляду (22) задовольняє рівняння (32).

Наслідком Лем 1 і Лем 2 є така теорема.

Теорема 3 Нехай задана система (21), де $\alpha_{-1} = \gamma_{-1} = \tau_{-1} = \theta_{-1} = 0$. Нехай також іс-

нує розв'язок $\alpha_n(t)$, $\beta_n(t)$, $\gamma_n(t)$, $\tau_n(t)$, $\omega_n(t)$, $\theta_n(t)$, $n \rightarrow \infty$ задачі Коші для цієї системи такий, що матриці (18) та (19) породжують обмежені самоспряжені комутуючі оператори в просторі \mathbf{l}_2 , для яких виконуються умови (33), з коефіцієнтами A та B , для яких виконуються умови (34). Тоді цей розв'язок відновлюється за допомогою формул типу (16), в яких спектральна міра $d\rho(x, y, t)$ знаходиться за початковою спектральною мірою $d\rho(x, y, 0)$ за такою процедурою:

розв'язати задачу Коші для рівняння (32) із початковими умовами $M(z_1, z_2, 0)$, яке знаходиться за $d\rho(x, y, 0)$ з (22);

знайдена функція $M(z_1, z_2, t)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $t \in [0, T]$ однозначно визначає міру згідно Теорему 2.

Автор вдячна Калюжному О.О. за постановку задачі.

Список використаних джерел

1. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов / Н.И. Ахиезер. – М.: Гос. физ.-мат. лит., 1961. – 312 с.
2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. – Киев: Наук. думка, 1965. – 450 с.
3. Березанский Ю.М. Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи / Ю.М. Березанский // Докл. АН СССР, – 1985. – **281**, №1. – с. 16-19.
4. Березанский Ю.М. Интегрирование некоторых дифференциально-разностных нелинейных уравнений с помощью спектральной теории блочных якобиевых нормальных матриц / Ю. М. Березанский, А.А. Мошонько // Функ. анализ и прилож. – 2008. – **42**, № 1. – С. 1–21.

References

1. AHYEZER, N. (1961) *The Classical Moment Problem*, M:Fizmatgiz.
2. BEREZANSKY, J. (1965) *Eigenfunction expansion of self-adjoint operators*, Kyev: Nauk. dumka.
3. BEREZANSKY, J. (1985) Integration of non-linear difference equations by means of inverse problem technique, Dokl. AN SSSR. 281(1). pp.16-19.
4. BEREZANSKY, J. and MOKHONKO, A. (2008) Integration of some differential-difference nonlinear equations using the spectral theory of normal block Jacobi matrices, Funk. analiz y prylozh. 42(1). pp. 1–21.

5. Гехтман М. И. Спектральная теория ортогональных полиномов нескольких переменных, / М. И. Гехтман, А. А. Калюжный // Укр. мат. журнал, Ин-т математики АН УССР, Киев. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1334–1337.
6. Дудкін М. Є. Блочні матриці типу Якобі відповідні двовимірній проблемі моментів: поліноми другого роду та функція Вейля / М. Є. Дудкін, В. І. Козак // Укр. мат. журнал. – 2016. – **68**, № 4. – С. 495–505.
7. Berezansky Yu. M. The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem / Yu. M. Berezansky // Rep. Math. phys. – 1986. – **24**, №1. – p. 21-47.
8. Berezansky Yu. M. The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. – 2005. – **12**, №1. – P. 1–32.
9. Dudkin M.E. Direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem / M. E. Dudkin, V. I. Kozak // Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. – **21**, № 3. – P. 219–251.
10. Gekhman M.I. On the orthogonal polynomials in several variables / Gekhman M.I., Kalyuzhny A.A. // Integr equ oper theory – 1994. – **19**. – С. 404–418.
11. Kac M., van Morbeke P. On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices / M. Kac, P. van Morbeke // Adv. Math. – 1975. – **16**, №2. – p. 160-169.
12. Moser J. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations / J. Moser // Adv. Math. – 1975. – **16**, №2. – p. 197-220.
5. HEKHTMAN, M. and KALYUZHNYI, A. (1991) Spectral theory of orthogonal polynomials of several variables, Ukrainian Mathematical Journal, 43(10). pp.1334–1337.
6. DUDKIN, M. and KOZAK, V. (2016) The block Jacobi matrix related to type two-dimensional moment problems: second order polynomials and Weyl function, Ukr. Mat. Journal, 68(4). pp.495–505.
7. BEREZANSKY, J. (1986) The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem, Rep.Math.phys., 24(1). pp. 21-47.
8. BEREZANSKY, J. and DUDKYN, M. (2005) The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices, Methods Funct. Anal. Topology, 12(1). pp. 1–32.
9. DUDKYN, M. and KOZAK, V. (2014) Direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem, Methods Funct. Anal. Topology, 21(3). pp. 219–251.
10. HEKHTMAN, M. and KALYUZHNIY, A. (1994) On the orthogonal polynomials in several variables, Integr equ oper theory, 19. pp. 404–418.
11. KAC, M. and VAN MORBEKE, P. (1975) On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices, 16(2). pp. 160-169.
12. MOSER, J. (1975) Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations, Adv. Math., 16(2). pp. 197-220.

Надійшла до редколегії 07.06.2016