

УДК 517.9

І. В. Бецко, аспірант

Побудова неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», 03056, м.
Київ, пр. Перемоги, 37,
e-mail: betskoiv@mail.ru

I. V. Betsko, graduate student

Construction of continuous solutions of a class of nonlinear functional-difference equations systems

National Technical University of Ukraine "Kyiv
Polytechnic Institute", 03056, Kyiv-56, Av.
Peremogy, 37
e-mail: betskoiv@mail.ru

Встановлено нові умови існування неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь, запропоновано метод побудови таких розв'язків та досліджено структуру їх множини.

Ключові слова: різницеві рівняння, функціонально-різницеві рівняння, неперервні обмежені розв'язки.

We consider the structure of a set of continuous solutions of a class of nonlinear functional-difference equations systems and their properties. Under various assumptions, the difference equations have been the object of research of many mathematicians, the development of their theory acquired a number of currents. Today this theory is widely branching and already has a lot of tangible results. Especially it concerns the existence of different kinds of solutions (analytic, continuous and others) and investigation of their properties. Despite this, during the research of numerous theoretical problems connected with them, we have to develop specific methods of solution since methods available do not give desired results.

The objective is to study existence of continuous limited solutions, study the structure of their set and also developing the method of their construction. Performed researches add to already existent works of other mathematicians and facilitate further study of the continuous limited solutions of wider classes of functional-difference equations.

Key words: difference equations, functional -difference equations, continuous limited solutions.

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М. О.

Дана робота присвячена дослідженню структури розв'язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)), \quad (1)$$

де $t \in \mathbb{R}$, A – дійсна $(n \times n)$ -матриця, $F(t, x)$ – деяка дійсна неперервна при $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ вектор-функція, $F(t, 0) \equiv 0$, q – деяка дійсна стала. При різних припущеннях відносно матриці A і вектор-функції $F(t, x)$ окремі класи таких систем рівнянь були основним об'єктом дослідження багатьох математиків і в даний час ряд питань їх теорії досить детально вивчено. Особливо це стосується існування різного роду (аналітичних, неперервних та ін.) розв'язків і дослідження їх властивостей.

Метою даної роботи є вивчення питань існування неперервних обмежених при

$t \in \mathbb{R}^+(\mathbb{R}^-)$ розв'язків, дослідження структури їх множини, а також розробка методу їх побудови.

Розглянемо систему рівнянь (1). Відносно матриці A будемо припускати, що її власні значення $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, задовольняють умові

$$|\lambda_i| \neq 0, 1, i = 1, \dots, n.$$

Тоді за допомогою деякої неособливої заміни змінних систему рівнянь (1) можна привести до вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \quad (2)$$

де $\tilde{F}(t, 0) \equiv 0, J = \text{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

$i = 1, \dots, m, m \leq n$.

Дослідимо систему рівнянь (2) у випадку, коли $t \in \mathbb{R}^+$ і виконуються умови:

1. $0 < \lambda_i < 1, i = 1, \dots, m, q > 1$;
2. $|\tilde{F}(t, y') - \tilde{F}(t, y'')| \leq L|y' - y''|$, де $t \in \mathbb{R}^+$,
 $y', y'' \in \mathbb{R}^n, L$ — деяка додатна стала,
 $\tilde{F}(t, 0) \equiv 0$;

$$3. \lambda_* > \tilde{\lambda}^q, \lambda^* < \tilde{\lambda} < 1, \Delta = \frac{L(\lambda_*^{-1} + \delta_1)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_1)\tilde{\lambda}^q} < 1,$$

$$\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \dots, m\}, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Має місце теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (2) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (2) має розв'язки у вигляді функціональних рядів

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \quad (3)$$

де $y_i(t), i = 0, 1, \dots$, — деякі неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функції.

Оскільки

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)\right) - \tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)\right) \right) = \\ = \tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)\right) \end{aligned}$$

(що буде доведено пізніше), то підставивши (3) в (2), отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = J \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{F}(t, y_0(qt)) + \\ + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)\right) - \tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)\right) \right). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t), i = 0, 1, \dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1) = Jy_0(t), \quad (4_0)$$

$$y_1(t+1) = Jy_1(t) + \tilde{F}(t, y_0(qt)), \quad (4_1)$$

$$y_i(t+1) = Jy_i(t) + \tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)\right) - \tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)\right), \quad i = 2, 3, \dots, \quad (4_i)$$

то ряд (3) буде формальним розв'язком системи рівнянь (2).

Розглядаючи послідовно системи рівнянь $(4_i), i = 0, 1, \dots$, можна показати, що вони мають розв'язки у вигляді формальних рядів

$$y_1(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)} \tilde{F}(t+j, y_0(q(t+j))), \quad (5_1)$$

$$y_i(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)} \left[\tilde{F}\left(t+j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(q(t+j))\right) - \right. \\ \left. - \tilde{F}\left(t+j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(q(t+j))\right) \right], \quad i = 2, 3, \dots, \quad (5_i)$$

де $y_0(t)$ є представлення загального розв'язку системи (4_0) .

Для того, щоб (5_i) були розв'язками послідовності систем рівнянь (4_i) достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t), i = 1, 2, \dots$, для яких виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M \Delta^i \tilde{\lambda}^{qt}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Приймаючи до уваги представлення загального розв'язку системи (4_0) , отримуємо

$$|y_0(t)| \leq M \tilde{\lambda}^t, \quad (7)$$

де $M = \max_i |\omega_i(t)|$.

Далі, з огляду на (7) та (5_1) отримуємо

$$\begin{aligned} |y_1(t)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |J^{-1}|^{j+1} |\tilde{F}(t+j, y_0(q(t+j)))| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_1)^{j+1} L |y_0(q(t+j))| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_1)^{j+1} LM \tilde{\lambda}^{q(t+j)} \leq \\ &\leq LM (\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^{qt} \sum_{j=0}^{\infty} ((\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^q)^j \leq \\ &\leq M \frac{L(\lambda_*^{-1} + \delta_1)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^q} \tilde{\lambda}^{qt} \leq M \Delta \tilde{\lambda}^{qt}. \end{aligned}$$

Таким чином, оцінка (6) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що вона доведена уже для деякого k , і покажемо, що вона не зміниться при переході від k до $k+1$.

Згідно з (5_{k+1}) і (6) маємо

$$\begin{aligned}
 |y_{k+1}(t)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |J^{-1}|^{j+1} \left| \tilde{F}(t+j, \sum_{j=0}^k y_j(q(t+j))) - \right. \\
 &\quad \left. - \tilde{F}(t+j, \sum_{j=0}^{k-1} y_j(q(t+j))) \right| \leq \\
 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_1)^{j+1} L |y_k(q(t+j))| \leq \\
 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_1)^{j+1} LM \Delta^k \tilde{\lambda}^{q(t+j)} \leq \\
 &\leq LM \Delta^k (\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^{q^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} \left((\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^{q^2} \right)^j \leq \\
 &\leq LM \Delta^k (\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^{qt} \sum_{j=0}^{\infty} \left((\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^q \right)^j \leq \\
 &\leq M \Delta^k \frac{L(\lambda_*^{-1} + \delta_1)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^q} \tilde{\lambda}^{qt} \leq M \Delta^{k+1} \tilde{\lambda}^{qt}.
 \end{aligned}$$

Отже, оцінки (6) мають місце при всіх $i \geq 1$. Цим самим ми довели, що ряди $(5_i), i=1, 2, \dots$, рівномірно збігаються при $t \geq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t), i=1, 2, \dots$, які задовольняють оцінки (6). Звідси безпосередньо випливає, що ряд (3), в якому вектор-функції $y_i(t), i=0, 1, \dots$, визначаються співвідношеннями $(5_i), i=0, 1, \dots$, рівномірно збігається до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta} \tilde{\lambda}^t.$$

Доведемо тепер, що

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)) \right) = \\
 = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)).
 \end{aligned}$$

Дійсно, оскільки при всіх $m \geq 1$ виконуються співвідношення

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{m+1} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)) \right) = \\
 = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)),
 \end{aligned}$$

то внаслідок умови 2) теореми отримуємо

$$\left| \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)) \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
 \leq L \left| \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt) - \sum_{j=0}^m y_j(qt) \right| \leq L \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} y_j(qt) \right| \leq \\
 \leq L \sum_{j=m+1}^{\infty} M \Delta^j \tilde{\lambda}^{qt} \leq LM \frac{\Delta^{m+1}}{1-\Delta} \tilde{\lambda}^{qt}.
 \end{aligned}$$

Отже, в силу умови 3) знайдеться таке натуральне число N , що при всіх $m \geq N$ і довільному, як завгодно малому, $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$LM \frac{\Delta^{m+1}}{1-\Delta} \tilde{\lambda}^{qt} \leq \varepsilon.$$

Таким чином, для всіх $m \geq N, t \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\left| \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)) \right| \leq \varepsilon,$$

і, отже, має місце співвідношення

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)) = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)).$$

Цим самим доведено, що ряд

$$\tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)) \right)$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^+$ і його сума

$$\text{дорівнює } \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)).$$

Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер систему рівнянь (2) у випадку, коли $t \leq 0$ і виконуються умови:

1. $\lambda_i > 1, i=1, \dots, m, q > 1$;
2. $|\tilde{F}(t, y') - \tilde{F}(t, y'')| \leq L |y' - y''|$, де $t \in \mathbb{R}$, $y', y'' \in \mathbb{R}^n, L$ — деяка додатна стала, $\tilde{F}(t, 0) \equiv 0$;
3. $\bar{\lambda}^q > \lambda^*, 1 < \bar{\lambda} < \lambda_*, \Delta = \frac{L \bar{\lambda}^{-q}}{1 - (\lambda^* + \delta_2) \bar{\lambda}^{-q}} < 1$,

$$\begin{aligned}
 \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i=1, \dots, m\}, \\
 \lambda_* = \min\{\lambda_i, i=1, \dots, m\};
 \end{aligned}$$

Має місце теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (2) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \leq 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (2) має розв'язки у вигляді функціональних рядів

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \quad (8)$$

де $\bar{y}_i(t), i=0,1,\dots$, – деякі неперервні й обмежені при $t \leq 0$ вектор-функції.

Оскільки ряд

$$\tilde{F}(t, \bar{y}_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(qt)) \right)$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^-$ (доведення аналогічне тому, яке було проведене в теоремі 1),

і його сума дорівнює $\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} \bar{y}_j(qt))$, то підставивши (8) в (2), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) = J \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + \tilde{F}(t, \bar{y}_0(t)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(qt)\right) - \tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(qt)\right) \right).$$

Звідки випливає, що якщо вектор-функції $\bar{y}_i(t), i=0,1,\dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\bar{y}_0(t+1) = J\bar{y}_0(t), \quad (9_0)$$

$$\bar{y}_1(t+1) = J\bar{y}_1(t) + \tilde{F}(t, \bar{y}_0(qt)), \quad (9_1)$$

$$\bar{y}_i(t+1) = J\bar{y}_i(t) + \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(qt)), \quad i=2,3,\dots, \quad (9_i)$$

то ряд (8) буде формальним розв'язком системи рівнянь (2).

Згідно умовам теореми і представлення загального розв'язку системи (9₀) виконується оцінка

$$|\bar{y}_0(t)| \leq \bar{M} \bar{\lambda}^t.$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (9_i), $i=1,2,\dots$, можна показати, що ряди

$$\bar{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} \left[\tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(q(t-j))) - \tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(q(t-j))) \right], i=1,2,\dots \quad (10_i)$$

рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $\bar{y}_i(t), i=1,2,\dots$, для яких виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(t)| \leq \bar{M} \Delta^i \bar{\lambda}^{qt}.$$

Звідси випливає, що ряд (8) рівномірно збігається при $t \leq 0$ до деякого неперервного розв'язку $\bar{y}(t)$, який задовольняє умові

$$|\bar{y}(t)| \leq \frac{\bar{M}}{1-\Delta} \bar{\lambda}^t.$$

Теорему 2 доведено.

Список використаних джерел

1. Birkhoff G.D. General theory of linear difference equations. / Birkhoff G. D. – Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – 12. – P. 243 – 284.
2. Пелюх Г.П. Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь / Пелюх Г. П., Сівак О. А. // Нелінійні коливання. — 2009. — 12, № 3. — С. 307—335.
3. Бецко І. В. Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь / Бецко І. В. // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2015. — №4. — С. 7 – 13.
4. Бецко І. В. Про існування неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь / Бецко І. В. // Нелінійні коливання. — 2016. — 19, №1. — С. 3 – 10.

References

1. BIRKHOFF, G. (1911) General theory of linear difference equations. – Trans. Amer. Math. Soc., 12, pp. 243 – 284.
2. PELYUKH, G., SIVAK, O. (2009) Doslidzhennya struktury mnozhyny neperervnyh rozvyazkiv system liniynuh funktsionalno-riznytsevyh rivnysn. // Neliniyni kolyvannya. – 12, №3. – pp. 307 – 335.
3. BETSKO, I. (2015) Doslidzhennya struktury mnozhyny neperervnyh rozvyazkiv system riznytsevyh rivnysn. // Naukovi visti NTUU “KPI”. – №4. – pp. 7 – 13.
4. BETSKO, I (2016) Pro isnuvannya neperervnyh rozvyazkiv system riznytsevyh rivnyan. // Neliniyni kolyvannya. – 19, №1. – pp. 3 – 10.

Надійшла до редколегії 25.10.16