УДК 517.9

Самойленко В.Г.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Вовк В.С.[1], аспірант.

Двосолітонні розв'язки рівняння Кортевега-де Фріза та їх асимптотичні і чисельні наближення

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03022, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова 4-е,
e-mail: valsamyul@gmail.com
e-mail: vovkvitali@gmail.com

V.H. Samoilenko[1], Dr.Sci., (Phys.-Math.),
V. S. Vovk[1], Ph.D. student.

Two-soliton solutions to the Korteweg-de Vries equationand their asymptotical and numerical approximations

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03022, Kyiv, Akademika Glushkova Av., 4-e,
e-mail: valsamyul@gmail.com
e-mail: vovkvitali@gmail.com

Розглянуто асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза. Методом прямих побудовано чисельне наближення двосолітонного розв'язку для задачі Коші та здійснено порівняння отриманого чисельного розв'язку з асимптотичним двофазовим солітоноподібним розв'язком даного рівняння.

Ключові слова: рівняння Кортевега-де Фріза, асимптотичні солітоноподібні розв'язки, чисельні розв'язки, метод прямих.

We consider thesingularly perturbed Korteweg-de Vries equationand its asymptotic two-phasesoliton-like solutions. Korteweg-de Vries equation is a classical nonlinear PDE which was originally stated to model long waves on liquid surface. In the present study, an asymptotic two-phase soliton-like solution of Korteweg-de Vries equation is constructed through applying an algorithm based on the nonlinear WKB method. In general the solution consists of a regular and a singular part. Here we establish that the solution contains only the main term of the singular part and coincides with the exact solution of the Korteweg-de Vries equation. By using the method of lines, in further we construct numerical solutions of the Korteweg-de Vries equation. The numerical scheme is detailed in the paper. Finite difference approximation of the nonlinear term was obtained from its two different representations and the one minimizing the error was used. Calculation results are presented for different values of the small parameter and time variable. A comparative analysis of the obtained numerical and asymptotic solutions is given.

Key Words: Korteweg-de Vries equation, asymptotic soliton-like solution, numerical solution, method of lines.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Серед нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними особливе місце займає рівняння Кортевега-де Фріза.

Своєю популярністю це рівняння завдячує тому, що воно виникає при описі багатьох досить різноманітних фізичних процесів та явищ. Крім цього, це рівняння володіє так званими солітонними розв'язками, які мають особливі властивості. Ці розв'язки описують відокремлені хвилі на поверхні рідини, взаємодія яких відбувається за спеціальним сценарієм, а саме: хвиля з більшою амплітудою, а відповідно і з більшою швидкістю, наздоганяє хвилю з меншою амплітудою; потім ці хвилі утворюють так званий "нелінійний імпульс", з якого через деякий час виділяється дві такі самі хвилі. При цьому нові хвилі мають форму хвиль до взаємодії, але лише зазнають зміни їх порядку розташування і величини фази.

Така взаємодія подібна взаємодії твердих частинок при зіткненні, через що М. Крускал і Н. Забускі [1], які виявили це явище, назвали їх солітонами (від англ. solitary – усамітнений).

Вивчення таких усамітнених хвиль проводилося ще задовго до відкриття рівняння Кортевега-де Фріза. Першим нове явище спостерігав і зафіксував шотландський інженер Джон Скотт Расселл [2], яке було ним названо хвилею трансляції. Зараз такі хвилі називають усамітненими або відокремленими.

Стаття [2], в якій було описано рух хвиль в каналі невеликої глибини, викликала бурхливі

дискусії, що спонукало вчених до активного пошуку аналітичного опису таких хвиль. Саме в якості математичної моделі цього явища голандські дослідники Кортевег Д. і де Фріз В. у 1895 році запропонували рівняння:

$$u_{xxx} + 6uu_x + u_t = 0, \qquad (1)$$

яке згодом було названо їхніми іменами.

У другій половині XX-го століття для відшукання точних (аналітичних) розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза та низки інших було створено метод оберненої задачі розсіювання, що ґрунтується на спектральній теорії і який став одним із потужних та ефективних методів побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь теоретичної і математичної фізики [3].

У той же час також вивчалася низка різних задач для рівняння Кортевега-де Фріза з малим збуренням, при цьому успішно застосовувалися різні асимптотичні методи, зокрема, метод ВКБ та його узагальнення – нелінійний метод ВКБ [4].

Цей метод було розроблено для знаходження асимптотичних наближень для квазі-періодичних розв'язків сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза вигляду:

$$\varepsilon^2 u_{xxx} - 6uu_x + u_t = 0. \qquad (2)$$

Згодом за допомогою нелінійного методу ВКБ було побудовано асимптотичні солітоноподібні розв'язки багатьох рівнянь математичної фізики інтегровного типу з сингулярним збуренням.

Об'єктом дослідження даної статті є рівняння Кортевега-де Фріза (2), для якого знайдено асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок і побудовано його чисельний розв'язок.

Асимптотичний розв'язок

Означення. Функція $u(x,t,\varepsilon)$, де ε – малий параметр, називається асимптотичною двофазовою солітоноподібною, якщо ця функція для довільного цілого $N \geq 0$ зображується асимптотичним розкладом вигляду:

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j (u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)) + O(\varepsilon^{N+1}), \qquad (3)$$

де $\tau_1 = S_1(x,t)/\varepsilon,\ \tau_2 = S_2(x,t)/\varepsilon$;

функції $u_j(x,t),\ S_1(x,t),\ S_2(x,t) \in C^\infty(R\times[0;T])$, де $\left.\frac{\partial S_k}{\partial x}\right|_{\Gamma_k} \neq 0$, $\Gamma_k = \{(x,t)\in R\times[0;T], S_k(x,t)=0\}$,

$k = 1,2$; $V_0(x,t,\tau_1,\tau_2) \in G_2^0$, $V_j(x,t,\tau_1,\tau_2) \in G_2$, $j = \overline{1,N}$. Тут G_2^0, G_2 – деякі функціональні простори нескінченно диференційовних функцій змінних $x,t,\tau_1,\tau_2 \in R\times[0;T]\times R\times R$, означення яких можна знайти в [5].

Функція

$$U_N(x,t,\varepsilon) = \sum\nolimits_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t)$$

називається регулярною частиною, а функція

$$V_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon) = \sum\nolimits_{j=0}^{N} \varepsilon^j V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)$$

– сингулярною частиною асимптотики (3).

За допомогою алгоритму побудови асимптотичних солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза, описаного в [5], можна знайти асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок рівняння (2). З цією метою, підставимо (4) в (3), перейдемо до границі при $\tau_1, \tau_2 \to +\infty$ і скористаємося властивостями функцій з просторів G_2^0, G_2. У результаті отримаємо диференціальні рівняння з частинними похідними для визначення членів регулярної та сингулярної частин асимптотики (4). Зокрема, для головного члена регулярної частини маємо рівняння $\frac{\partial u_0}{\partial t} - 6u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$.

Оскільки регулярна частина асимптотики відповідає за так званий фон і не відображає якісної поведінки розв'язку, то покладемо $u_0(x,t) \equiv 0$.

Для визначення головного члена сингулярної частини асимптотики (4) отримуємо рівняння Кортевега-де Фріза вигляду

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \xi^3} - 6V_0\frac{\partial V_0}{\partial \xi} + \frac{\partial V_0}{\partial \eta} = 0. \qquad (4)$$

Тут величини ξ, η визначено згідно формул $\xi = \frac{a_2\tau_1 - a_1\tau_2}{\sqrt{6}\,(a_2 - a_1)}$, $\eta = \frac{\tau_1 - \tau_2}{6\sqrt{6}\,(a_2 - a_1)}$;змінні τ_1, τ_2 мають вигляд $\tau_s = (x - \varphi_s(t))/\varepsilon,\ s = \overline{1,2}$; функції $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ задають так звані криві розриву і визначаються з диференціальних рівнянь $\varphi_s'(t) = -a_s$, $s = \overline{1,2}$, де a_1, a_2 – різні дійсні додатні числа.

З рівняння (4) знаходимо[4]

$$V_0(\xi,\eta) = -2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\ln\det(E+G), \qquad (5)$$

де E – одинична (2x2)-матриця, матриця G має вигляд:

$$G=\begin{pmatrix} c_1^2(\eta)\dfrac{\exp(-2\kappa_1\xi)}{2\kappa_1} & c_1(\eta)c_2(\eta)\dfrac{\exp(-2(\kappa_1+\kappa_2)\xi)}{\kappa_1+\kappa_2} \\ c_1(\eta)c_2(\eta)\dfrac{\exp(-2(\kappa_1+\kappa_2)\xi)}{\kappa_1+\kappa_2} & c_2^2(\eta)\dfrac{\exp(-2\kappa_2\xi)}{2\kappa_2} \end{pmatrix}$$

$c_s(\eta)=c_s(0)\exp(4\kappa_s^3\eta)$, $\kappa_s=\dfrac{\sqrt{6a_s}}{2}$;

$c_s(0)$, $s=\overline{1,2}$,– довільні дійсні числа.

Розв'язок рівняння (4) можна записати в такому вигляді:

$$V_0(\xi,\eta)=-2\Bigg[2\kappa_1c_1^2e^{-2\kappa_1\xi}+2\kappa_2c_2^2e^{-2\kappa_2\xi}-2c_1^2c_2^2\frac{(\kappa_1-\kappa_2)^2}{\kappa_1\kappa_2}e^{-2(\kappa_1+\kappa_2)\xi}-c_1^4c_2^2\frac{(\kappa_1-\kappa_2)^2\kappa_2}{2\kappa_1^2(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{(-4\kappa_1-2\kappa_2)\xi}-$$
$$-c_1^2c_2^4\frac{(\kappa_1-\kappa_2)^2\kappa_1}{2\kappa_2^2(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{(-2\kappa_1-4\kappa_2)\xi}\Bigg]\times\left[1+\frac{c_1^2}{2\kappa_1}e^{-2\kappa_1\xi}+\frac{c_2^2}{2\kappa_2}e^{-2\kappa_2\xi}+\frac{c_1^2c_2^2(\kappa_1-\kappa_2)^2}{4\kappa_1\kappa_2(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{-2(\kappa_1+\kappa_2)\xi}\right]^{-2}.$$

Тоді, вибравши $a_1=8/3$, $a_2=2/3$, розв'язок рівняння (2) можна записати таким чином:

$$u(x,t,\varepsilon)=-12\frac{4\,\mathrm{ch}\left(2\dfrac{x-4t}{\varepsilon}\right)+\mathrm{ch}\left(4\dfrac{x-16t}{\varepsilon}\right)+3}{\left[3\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{x-28t}{\varepsilon}\right)+\mathrm{ch}\left(3\dfrac{x-12t}{\varepsilon}\right)\right]^2}. \quad (6)$$

Цей розв'язок є найпростішим випадком багатосолітонного розв'язку і називається дублетним розв'язком.

Чисельний розв'язок

Для знаходження чисельного розв'язку рівняння (3) скористаємося методом прямих [6]. Задамо рівномірну сітку за допомогою розбиття вигляду

$$\overline{\Omega_h}=\{x_i=(i-1)h, i=1,2,\ldots,N, h=1/(N-1)\},$$

де значення функції на прямих x_i позначено через $Y_i(t)=u(x_i,t)$.

У результаті такої дискретизації отримуємо системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}&\frac{dY_2}{dt}-6Y_2\frac{Y_3-Y_2}{h}+\varepsilon^2\frac{-2Y_3+Y_4}{2h^3}=0,\\&\frac{dY_i}{dt}-6Y_i\frac{Y_{i+1}-Y_{i-1}}{2h}+\varepsilon^2\frac{-Y_{i-2}+2Y_{i-1}-2Y_{i+1}+Y_{i+2}}{2h^3}=0,\\&i=3,\ldots,N-2; \qquad (7)\\&\frac{dY_{N-1}}{dt}-6Y_{N-1}\frac{Y_{N-1}-Y_{N-2}}{h}+\varepsilon^2\frac{-Y_{N-3}+2Y_{N-2}}{2h^3}=0,\\&Y_1=Y_N=0,\\&Y_i(0)=-6\,\mathrm{sech}^2\frac{x_i}{\varepsilon},\quad i=2,\ldots,N-1.\end{aligned}$$

Якщо рівняння (3) записати у дивергентній формі

$$\frac{\partial u}{\partial t}=3\frac{\partial(u^2)}{\partial x}-\varepsilon^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

то отримаємо різницеву схему вигляду:

$$\begin{aligned}&\frac{dY_2}{dt}-3\frac{Y_3^2-Y_2^2}{h}+\varepsilon^2\frac{-2Y_3+Y_4}{2h^3}=0,\\&\frac{dY_i}{dt}-3\frac{Y_{i+1}^2-Y_{i-1}^2}{2h}+\varepsilon^2\frac{-Y_{i-2}+2Y_{i-1}-2Y_{i+1}+Y_{i+2}}{2h^3}=0,\\&i=3,\ldots,N-2;\\(8)\quad&\frac{dY_{N-1}}{dt}-3\frac{Y_{N-1}^2-Y_{N-2}^2}{h}+\varepsilon^2\frac{-Y_{N-3}+2Y_{N-2}}{2h^3}=0,\\&Y_1=Y_N=0,\\&Y_i(0)=-6\,\mathrm{sech}^2\frac{x_i}{\varepsilon},\ i=2,\ldots,N-1.\end{aligned}$$

Для чисельного аналізу крайові умови на нескінченності замінено умовами на деякій скінченній межі. Значення функції в точках межі вважаються рівним нулеві. Початкова умова отримана з формули (6) при t=0.

Чисельне розв'язання систем (7) і (8)здійснено за допомогою пакету математичних програм MATLAB засобами вбудованих стандартних функцій для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.

На рис. 1, рис. 2 представлено результати обчислень значень функції $u(x,t)$ при різних значеннях часової змінної t. Значення малого параметра ε взято рівним 0,2 та 0,5. На рис. 2 можна спостерігати відокремлення швидшого солітона. На рис. 1 при $\varepsilon=0{,}2$ солітони стають вужчими.

Зауважимо, що обчислення з використанням схеми (8) мають кращу точність.

Висновки

Розглянуто сингулярно збурене рівняння Кортевега-де Фріза зі сталими коефіцієнтами, для якого за допомогою алгоритму побудови асимптотичних розв'язків на основі нелінійного методу ВКБ знайдено його асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок.

Встановлено, що цей розв'язок можна записати у такому вигляді, коли його головний член сингулярної частини співпадає з точним розв'язком розглядуваного рівняння. Розглянуто різницеве наближення даного рівняння і за допомогою методу прямих побудовано його чисельний розв'язок. Проведено порівняльний аналіз отриманих наближених розв'язків.

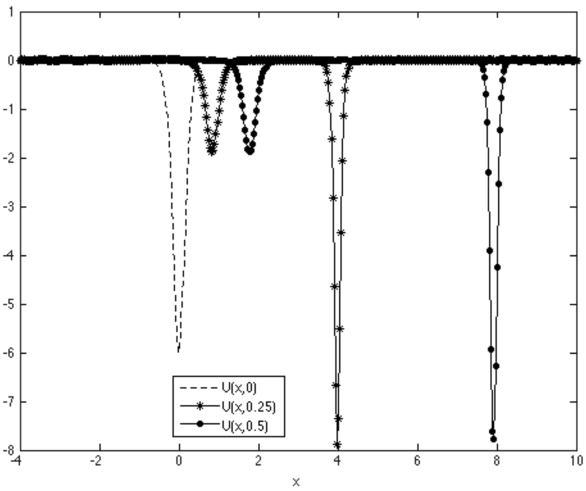

Рис. 1. Часова еволюція розв'язків при $\varepsilon = 0{,}2,\ \Delta t = 0{,}25.$

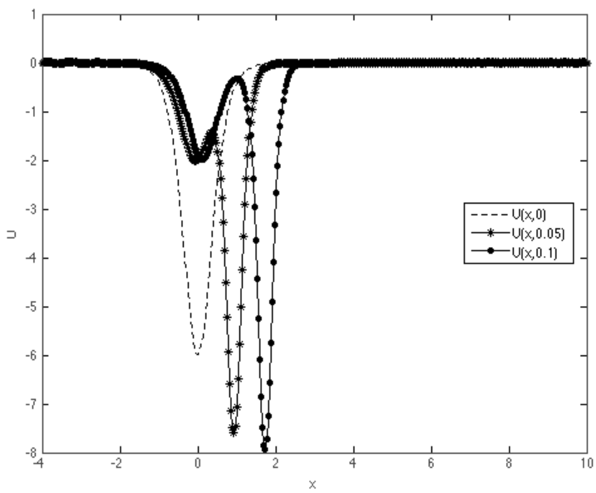

Рис. 2.Часова еволюція розв'язків при $\varepsilon = 0{,}5,\ \Delta t = 0{,}05.$

Список використаних джерел

1. *Zabusky N. J.* Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states / N.J. Zabusky, M.D. Kruskal // Phys. Review Lett. – 1965. – V. 15. – P. 147-154.
2. *Russel J. Scott.* Report on waves / J. Scott Russel // Proc. Roy Soc. Edinb., 1844. – P. 319-320.
3. Захаров В. Е. Теория солитонов: метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л.П. Пита-евский. – Москва: Наука, 1980. – 320 с.
4. Miura R.M. Application of nonlinear WKB method to the Korteweg-de Vries equation / R.M. Miura, M.D. Kruskal // SIAM Appl. Math.– 1974. – V. 26, No 2. – P. 376 – 395.
5. *Samoylenko V.H.* Asymptotic two-phase soliton-like solutions of the singularly pertubed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients / V.H. Samoylenko, Yu. I. Samoylenko // Ukrainian Mathematical Journal – 2008. – V. 60, №3. – P. 449-461.
6. *Ляшко И.И.* Методы вычислений / И.И. Ляшко, А.А. Скоробогатько. – Киев: Вища школа, 1977. – С. 243-245.

References

1. ZABUSKY, N. and KRUSKAL, M. (1965) Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states. *Phys. Review Lett.* 15. p.147-154.
2. RUSSEL, J. SCOTT (1844) Report on waves. *Proc. Roy Soc. Edinb.* p. 319-320.
3. ZAHAROV, V. et al. (1980) *Teoria solitonov: metod obratnoy zadachi.* Moskva:Nauka.
4. MIURA, R. and KRUSKAL, M. (1974) Application of nonlinear WKB method to the Korteweg-de Vries equation. *SIAM Appl. Math.* 26(2). p.376-395.
5. SAMOYLENKO, V. and SAMOYLENKO, Yu. (2008) Asymptotic two-phase soliton-like solutions of the singularly pertubed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal.* 60(3). p. 449-461.
6. LYASHKO, I. and SKOROBOGAT'KO, A. (1977) *Metody vychisleniy.* Kiev: Vyshcha shkola.

Надійшла до редколегії 18.09.17