УДК 517

С.М. Іванов, аспірант

Виявлення екстремальних властивостей локально дифеоморфних систем

Інститут космічних досліджень НАНУ та ДКАУ, 03680, м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 40, корп. 4/1,
e-mail: formula87@icloud.com

S.M. Ivanov, postgraduate student

Detecting extremal properties of localized diffeomorphic systems

Space Research Institute of NASU-SSAU, 03680, Kyiv, Academika Glushkova str., 40, build. 4/1,
e-mail: formula87@icloud.com

Стаття присвячена проблемі виявлення локальних екстремальних властивостей дифеоморфних систем. Представлена ентропія розподілу норм дотичних векторів для систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Спектр характеристичних показників Ляпунова виводиться з екстремального функціоналу. Доведено необхідну та достатню умову рівності цих функцій розподілу для локально дифеоморфних систем.

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння, експоненти Ляпунова, дифеоморфізм, ентропія, локально дифеоморфні системи

The article deals with the problem of detecting extremal properties of localized diffeomorphic systems. Detecting properties of localized diffeomorphic systems is the important problem for structural stability and the theory of shadowing. The entropy of the distribution of the norms of tangent vectors for systems of ordinary differential equations (ODEs) with dimension more or equal then two is presented. The extremal functional of the entropy is described. The presented functional is the analog of second law of thermodynamics. The spectrum of Lyapunov characteristic exponents is derived from the extremal functional. The exponential divergence or convergence of nearby trajectories (Lyapunov exponents) is the most basic indicator of the system stability and deterministic chaos. The distribution of the norms of the tangent vectors is proved. The topological equivalence of diffeomorphic systems is discussed. A diffeomorphism of smooth manifolds (a differentiable one-to-one mapping, the inverse of which is also differentiable) is considered. The necessary and sufficient condition of equality of the distribution of the norms of tangent vectors for the localized diffeomorphic systems is proved. These results are useful for the reconstruction of dynamical systems from a time series.

Key Words: ordinary differential equations, Lyapunov exponents, diffeomorphism, entropy, localized diffeomorphic systems

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Вступ. При використанні реконструйованих систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) однією з актуальних є проблема відповідності її поведінки дійсності [1-3]. Оскільки найменші зміни векторного поля, що задає диференціальні рівняння, можуть вплинути на зміну властивостей цієї системи [4-5]. Така проблема також стосується реконструкції системи диференціальних рівнянь за наявними експериментальним рядами. Можливі негативні явища при поширенні таких результатів на реальний процес є небажаними, особливо в задачах прогнозування, управління [6] і т.д. Ця проблема вперше була описана в [5] та отримала назву грубості або структурної стійкості систем. Таким чином, виявлення тих властивостей динамічної системи, які мало чутливі до невеликої зміни векторного поля, є необхідним, щоб вони сприймалися як властивості реального процесу. Оскільки при побудові системи часто проводиться деяка ідеалізація і параметри визначаються лише наближено [1-2]. А сучасні обчислювальні методи не позбавлені похибок і заокруглень, що відображається на результаті й отриманні не точної траєкторії, а деякого її наближення. Слід також зазначити, що існують такі системи, з розмірністю фазового простору більше двох, в околі яких немає жодної структурно стійкої системи за Смейлом [1-2]. Особливе місце в теорії структурної стійкості, теорії відстеження [7], а також реконструкції d -вимірних відображень, які є вкладеннями,

© С.М. Іванов, 2017

описаними в теоремах в [8], займає поняття дифеоморфних систем. Однак питання виявлення локально дифеоморфних систем вимагає подальшого розгляду. Оскільки необхідність реконструкції диференціальних рівнянь за наявним експериментальним часовим рядом, наприклад, за допомогою теорем в [8], вимагає знаходження властивостей локально дифеоморфних систем. Тому дана задача є актуальною і затребуваною при виявленні локально дифеоморфних систем ЗДР, які описують процеси різної природи.

Постановка задачі. Нехай M - компактний гладкий многовид з фрактальною розмірністю m. Для пари (φ, y), де $\varphi: M \to M$ - гладкий дифеоморфізм і $y = M \to \Re$ - гладка функція, існує відображення $F_{(\varphi,y)}: M \to \Re^{2m+1}$ [8]. Розглянемо деяку автономну динамічну систему ЗДР, яка є реконструкцією для F та $t \in \Re$:

$$\dot{x} = f(x), \qquad (1)$$

де f - визначена в області $G \subset \Re^d$, $d \geq 2$, f і $\partial f / \partial x$ - неперервні в G [1]. А також припустимо, що система має нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$. Накладені обмеження гарантують існування і єдиність розв'язку $x(t)$ задачі Коші при будь-яких початкових умовах. Нехай f є поліноміальна вектор-функція гладкості C^2. Ставиться задача опису ентропії розподілу норм дотичних векторів для лінеаризованої поліноміальної системи ЗДР і складання екстремального функціоналу для виведення функції розподілу цих норм дотичних векторів, щоб виявити необхідну і достатню умову локально дифеоморфних систем ЗДР.

Екстремальний функціонал лінеаризації. Пропонується скористатися поняттям граничної ентропії, введеному в [9] переважно для лінеаризованої поліноміальної системи ЗДР, щоб вивести функцію розподілу норм дотичних векторів. А також розглянути знайдені взаємозв'язки цієї ентропії в локально дифеоморфних системах ЗДР для їх виявлення. В [9] наводиться, що для деякої нелінійної автономної системи ЗДР, норми дотичних векторів мають розподіл, який відповідає деякому принципу максимуму ентропії (аналог другого закону термодинаміки) при певних обмеженнях, а також показано взаємозв'язок з експонентами Ляпунова і їх декомпозиція.

Розглянемо наступні траєкторії в d - вимірному фазовому просторі, почавши з двох сусідніх початкових умов x_0 та $\tilde{x}_0 = x_0 + \delta x_0$, які еволюціонують у часі за наступними векторами $x(t)$ та $\tilde{x}(t) = x(t) + \delta x(t)$ з Евклідовою нормою $\|r(x_0,t)\| = \|\delta x(x_0,t)\| = (\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + ... + \delta x_d^2)^{1/2}$.

Якщо f - поліноміальна вектор-функція гладкості C^2, то (1) можна розкласти в ряд Маклорена в деякому околі початку координат та записати в матричному вигляді:

$$\dot{X} = JX + V(X), \qquad (2)$$

де $J = \partial f / \partial x|_{x=x_0}$ - матриця Якобі для f, а складові $V(X)$ - описують члени від другого і більш високого порядку малості. Еволюція дотичного вектора r в просторі дотичних на $x(t)$ представляється лінеаризацією рівняння (1):

$$\dot{r} = Jr. \qquad (3)$$

Крім того, є d ортонормальних векторів e_i на r, $i = \overline{1,d}$. Тобто є d норм дотичних векторів $\|r_i(t)\|$, $i = \overline{1,d}$.

Означення 1. Ентропією називається величина $E_p = -\sum_i p_i(*,t) \ln p_i(*,t)$, $i = \overline{1,d}$, де $*$ - це позначення норми дотичних векторів в початковий момент часу $\|r_i(0)\|$, $i = \overline{1,d}$. А $p_i(*,t)$, $i = \overline{1,d}$ - ймовірнісний розподіл цієї норми для будь-якого часу t, який також будемо позначати як p_i.

Лема 1. Якщо J є ненульовою матрицею Якобі та $d \geq 2$, то $\|r_i(t)\|$, $i = \overline{1,d}$ має розподіл, який максимізує наступний функціонал:

$$\Phi_p = E_p + \beta R_p + \mu Con_p + \gamma Nor_p \to \max, \qquad (4)$$

де β, μ, γ - множники Ейлера - Лагранжа, E_p - ентропія, R_p - експоненціальна дивергенція (конвергенція), Con_p - початкові умови, Nor_p - умова нормування.

Доведення. Перепишемо функціонал (4) розширено:

$$\Phi_{\text{p}} = -\sum_i p_i(*,t) \ln p_i(*,t) + \beta \sum_i p_i(*,t) \tilde{l}_i t +$$
$$+ \mu \sum_i p_i(*,t) \ln \|r_i(0)\| + \gamma \sum_i p_i(*,t) \to \max, \qquad (5)$$

Вибір будь-якого дійсного числа як константи нормування в теорії ймовірностей є довільним. Умовою нормування встановлюється $\sum_i p_i = 1$, $p_i \geq 0$. З умови існування екстремуму знаходимо:

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial p} = -\ln p_i - 1 + \beta \tilde{l}_i t + \mu \ln\|r_i(0)\| + \gamma = 0;$$

$$\ln p_i = \beta \tilde{l}_i t + \mu \ln\|r_i(0)\| + \gamma - 1;$$

$$p_i = e^{\beta \tilde{l}_i t} e^{\mu \ln\|r_{ii}(0)\|} e^{\gamma - 1} = e^{\beta \tilde{l}_i t} \|r_i(0)\|^{\mu} e^{\gamma - 1}.$$

Крім того, з умови $\sum_i p_i = 1$ отримуємо

$$\sum_i p_i = \sum_i e^{\beta \tilde{l}_i t} \|r_i(0)\|^{\mu} e^{\gamma - 1} = 1;$$

$$e^{\gamma - 1} = 1 \Big/ \sum_i \|r_i(0)\|^{\mu} e^{\beta \tilde{l}_i t};$$

$$p_i = \frac{\|r_i(0)\|^{\mu} \exp(\beta \tilde{l}_i t)}{\sum_i \|r_i(0)\|^{\mu} \exp(\beta \tilde{l}_i t)}. \qquad (6)$$

Позначимо $\|r_i(0)\|^{\mu} = dv_i^t$, та нехай $\mu = 1$.

Тоді

$$dv_i^t = dv_i^0 \exp(\beta \tilde{l}_i t), \qquad (7)$$

$$\lambda_i = \beta \tilde{l}_i = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_i \sum_{i=1}^{d} dv_i^t}{p_i \sum_{i=1}^{d} dv_i^0} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|r_i(t)\|}{\|r_i(0)\|}. \qquad (8)$$

Виведення з функціоналу спектра Ляпунова, який показує середній експоненціальний темп дивергенції (конвергенції) сусідніх орбіт в фазовому просторі, означає, що, дійсно, вони (експоненти Ляпунова) задають найхарактерніший розподіл p_i, $i = \overline{1, d}$, разом з іншими описаними умовами, при яких досягається максимум функціоналу (4).

Лему 1 доведено.

Означення 2. Дві системи (M_1, f_1) і (M_2, f_2) називаються дифеоморфними, якщо існує дифеоморфізм (диференційоване взаємно однозначне відображення, зворотнє до якого також диференційоване) $h{:}M_1 \to M_2$, який переводить векторне поле f_1 в векторное поле f_2 [1,11]. M_1, M_2 – компактні гладкі многовиди класу принаймні C^2 (якщо M має край, то нехай f не дотикається краю).

Дифеоморфні або орбітально еквівалентні системи є топологічно еквівалентними, однак зворотнє невірне [12].

Означення 3. Дві системи (M_1, f_1) і (M_2, f_2) називаються локально дифеоморфними в нулі, якщо існує такий дифеоморфізм, який переводить лінеаризоване векторне поле f_1 в лінеаризоване векторне поле f_2 в околі початку координат.

Теорема 1. У локально дифеоморфних системах в нулі рівність функції розподілу (6) є необхідною та достатньою умовою.

Доведення. Необхідність. Переведення особливої точки дифеоморфізмом одного векторного поля в особливу точку іншого векторного поля означає, що похідна цього дифеоморфізму переводить оператор лінійної частини першого поля в особливій точці в оператор лінійної частини другого поля в його особливій точці. Тоді одна система з іншої виходить за допомогою зворотної заміни координат: нехай для всіх точок $m^1 \in M_1$:

$$f_1(m^1) = J_h^{-1}(m^1) f_2(h(m^1)), \qquad (9)$$

де $J_h(m^1)$ - матриця Якобі функції $h(m^1)$, обчислена в точці m^1.

Нехай $m_0^1 \in M_1$ та $m_0^2 \in M_2$ такі точки положення рівноваги цих систем (з лінеаризації в околі початку координат), і нехай $A(m_0^1)$ та $B(m_0^2)$ - відповідні їм матриці Якобі. Продиференціювавши рівність (9), отримаємо:

$$A(m_0^1) = J_h^{-1}(m_0^1) B(m_0^2) J_h(m_0^1). \qquad (10)$$

Отже, співпадають характеристичні поліноми матриць $A(m_0^1)$ та $B(m_0^2)$. Тому збігаються розподіли (6) у локально дифеоморфних системах. А рівність розподілів забезпечує також рівність ентропії (означення 1) для цих двох систем.

Достатність. Припустимо, що розподіл (6) співпадає, а системи не дифеоморфні. Тоді рівність (10) не виконується. Нехай для $\forall t$: $A(m_0^1) = Q_1 R_1$, $B(m_0^2) = Q_2 R_2$, де Q – квадратна унітарна матриця, R - верхньо-трикутна матриця. Якщо розподіли (6) для обох систем рівні, то $R_1 = R_2 = R$, тому характеристичні поліноми матриць $A(m_0^1)$ та $B(m_0^2)$ повинні співпадати і виконуватися (10). Отримана суперечність, тому рівність розподілів (6) є достатньою, щоб системи були локально дифеоморфними в нулі.

Теорему 1 доведено.

Висновки. Описується поняття ентропії для лінеаризованих поліноміальних систем ЗДР та виводиться функція розподілу норм дотичних векторів. Доводяться необхідні та достатні умови локально дифеоморфних систем. Ця задача є важливою при реконструкції систем ЗДР, які описують динаміку різної природи.

Список використаних джерел

1. *Arnold V.I.* Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations / V.I. Arnold. – New York: Springer, 2011. – pp. 351.
2. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. – Москва: Наука, 1978. – 304 с.
3. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд, Ю.С. Ильяшенко // Итоги науки и техн. Сер.: Соврем. пробл. мат. – 1985. – №1. – С. 7–140.
4. *Анищенко В.С.* Лекции по нелинейной динамике / В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова. – Москва: Регулярная и хаотическая динамика, 2011. – 516 с.
5. *Андронов А.А.* Грубые системы / А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин // Докл. АН СССР. – 1937.– № 5. – С. 247-250.
6. *Никульчев Е.В.* Геометрический метод реконструкции систем по экспериментальным данным / Е.В. Никульчев // Письма в жур. техн. физики. – 2007. – Т.33. – № 6. – С. 83-89.
7. *Пилюгин С.Ю.* Теорема Мане и теория отслеживания псевдотраекторий / С.Ю. Пилюгин // Дифф. уравн. и процессы управления. – 2014.– №4. – С. 1 -11.
8. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics. – 1981. – № 989. pp. 366–381.
9. *Іванов С.М.* Декомпозиція експонент Ляпунова хаотичних динамічних систем / С.М. Іванов // Dynam. syst. model. and stab. investig.: inter. conf., 24-26 May 2017, Kyiv, Ukraine: abstracts. – Kyiv. – 2017. – P. 87.
10. *Sano M.* Measurement of Lyapunov spectrum from a chaotic time series / Sano M. and Sawada Y. // Phys. Rev. Lett. – 1985. – №55, P. 1082-1085.
11. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. 1: [изд. 2-е, испр. и доп.] / В.А. Зорич. – Москва: ФАЗИС, 1997. – 554 с.
12. *Гукенхеймер Дж.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Холмс Ф. – Москва: ИКИ, 2002. – 560 с.

References

1. ARNOLD, V.I. (2011) *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. New York: Springer.
2. ARNOLD, V.I. (1978) *Dopolnitel'nyye glavy teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy*. Moskva: Nauka.
3. ARNOLD, V.I. & IL'YASHENKO, Yu.S. (1985) Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya *Itogi nauki i tekhn. Ser.: Sovrem. probl. mat.* 1. p. 7–140.
4. ANISHCHENKO, V.S. and VADIVASOVA, T.Ye. (2011) *Lektsii po nelineynoy dinamike*. Moskva: Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika.
5. ANDRONOV, A.A. & PONTRYAGIN, L.S. (1937) Grubyye sistemy. *Dokl. AN SSSR*. 5. p. 247-250.
6. NIKULCHEV, Ye.V. (2007) Geometricheskiy metod rekonstruktsii sistem po eksperimental'nym dannym. *Pis'ma v zhur. tekhn. fiziki*. 33(6). p. 83 -89.
7. PILYUGIN, S.Yu. (2014) Teorema Mane i teoriya otslezhivaniya psevdotrayektoriy. *Diff. uravn. i protsessy upravleniya*. 4. p.1-11.
8. TAKENS, F. (1981) Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics*. 989. p.366–381.
9. IVANOV, S.M. (2017) Dekompozytsiya eksponent Lyapunova khaotychnykh dynamichnykh system. In *Dynam. syst. model. and stab. investig.: inter. conf.*, Wednesday 24th to Friday 26th May 2017. Kyiv: DP Inform-analit. agenstvo. pp. 87.
10. SANO, M. & SAWADA, Y. (1985) Measurement of Lyapunov spectrum from a chaotic time series. *Phys. Rev. Lett*. 55(10), p. 1082-1085.
11. ZORICH, V.A. (1997) *Matematicheskiy analiz*. Moskva: FAZIS.
12. GUKENKHEYMER, Dzh. and KHOLMS, F. (2002) *Nelineynyye kolebaniya, dinamicheskiye sistemy i bifurkatsii vektornykh poley*. Moskva: IKI.

Надійшла до редколегії 12.09.2017