УДК 517.9

Іванов С. М.[1], асп.,
Яценко В. О.[2], д.т.н., проф.

Виявлення змінювання векторного поля за часовим рядом

[1,2]Інститут космічних досліджень НАНУ та ДКАУ, 03680, м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 40, корп. 4/1,
e-mail: [1]formula87@icloud.com
e-mail: [2]vyatsenko@gmail.com

S. M. Ivanov[1], PhD stud.,
V. O. Yatsenko[2], Dr. Sci., Prof.

Detecting variation of the vector field from a time series

[1,2]Space Research Institute of NASU-SSAU, 03680, Kyiv, Academika Glushkova str., 40, build. 4/1,
e-mail: [1]formula87@icloud.com
e-mail: [2]vyatsenko@gmail.com

Запропоновано декомпозицію експонент Ляпунова, в результаті якої, одна з декомпозиційних границь може бути використана для виявлення змінювання векторного поля за часовим рядом. Приведено доведення лем з впорядкування декомпозиційних границь і лінійності. Представлено алгоритм обчислення декомпозиційних границь за часовим рядом.

Ключові слова: експоненти Ляпунова, векторне поле, декомпозиція, многовид.

The unpredictable behavior of nonlinear dynamical systems has become a very interesting subject in the research of the fluid and geomagnetic systems. The exponential divergence or convergence of nearby trajectories is the most main indicator of detecting variation of the vector field in general. However, it requires an analysis of all Lyapunov exponents. We have applied Lyapunov exponents decomposition to consider one indicator of the vector field variation. The algorithm of computation of this indicator is presented. An autonomous dynamical system of ordinary differential equations is considered. The lemmas of ordered indicators and linearity are proved. To calculate the dimension of the phase space, the Grassberger-Procaccia algorithm is proposed. Takens's theorem about embedding is used. It is supposed that a manifold is locally homeomorphic to a certain domain of Euclidean space. Therefore, we used the Euclidean norm, despite the fact that the Riemannian metric arises. These results are useful for the reconstruction of dynamical systems from a time series. These results are useful for the reconstruction of dynamical systems from a time series.

Key Words: Lyapunov exponents, vector field, decomposition, manifold.

Статтю представив д.т.н. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

При дослідженні різних нелінійних динамічних систем, зокрема рідинних [1], геомагнітних [2], однією з актуальних задач є проведення аналізу їх властивостей за наявним експериментальним часовим рядом. Цьому питанню присвячується багато робіт, які спрямовані на обчислення спектра експонент Ляпунова [1-4]. Однак ми часто не знаємо чи дійсно постійне векторне поле досліджуваної системи, що є важливим при реконструкції динамічних систем, які описуються звичайними диференціальними рівняннями (ЗДР). Також це питання виникає при дослідженні реконструйованої системи на відповідність реальним експериментальним даним [5-7]. Найменші зміни векторного поля, що задає диференціальні рівняння, можуть вплинути на зміну властивостей цієї системи [8-9]. При поширенні таких результатів на реальний процес можливі небажані негативні явища, особливо в задачах прогнозування, управління і т.д. Тому виявлення постійності або змінності векторного поля досліджуваної системи за часовим рядом є актуальною задачею і потребує подальшого розгляду.

Постановка задачі

Нехай M - компактний гладкий многовид розмірності m. Динамічною системою на цьому многовиді M є дифеоморфізм $\varphi: M \to M$ для

© С.М. Іванов, В.О. Яценко, 2018

дискретного часу $t \in N$, або векторне поле f на M з неперервним часом $t \in \Re$ [10]. Многовид M локально гомеоморфний деякій області евклідового простору $\Re^d$, виходячи з означення метричного простору [11].

Для пари (f, y), де f векторне поле гладкості C^2 і $y = M \to \Re$ - гладка функція на M, існує відображення $F_{(f,y)} : M \to \Re^{2m+1}$ (Theorem 2, F. Takens) [10]. Розглянемо деяку автономну динамічну систему ЗДР, яка є реконструкцією, а $t \in \Re$:

$$\dot{x} = f(x), \qquad (1)$$

де f - визначена в області $G \subset \Re^d$, $d \geq 2$, f і $\frac{df}{dt}$ - неперервні в G, а x є вектором. А також припустимо, що система має нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$. Накладені обмеження гарантують існування і єдиність розв'язку $x(t)$, як задачі Коші, при будь-яких початкових умовах. Нехай f є поліноміальна вектор-функція гладкості C^2.

Систему (1) можна розкласти в ряд Маклорена в деякому околі початку координат та записати:

$$\dot{x} = Jx + V(x), \qquad (2)$$

де $J = df/dx|_{x=x_0}$ - матриця Якобі для f, а складові $V(x)$ - описують члени від другого і більш високого порядку малості. Еволюція дотичного вектора r в просторі дотичних на $x(t)$

$$\dot{r} = Jr. \qquad (3)$$

Середній експоненціальний темп дивергенції (конвергенції) дотичного вектора r визначається експонентами Ляпунова, визначеними за наступною формулою:

$$\lambda(x_0, r(0)) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|r(t)\|}{\|r(0)\|}, \qquad (4)$$

де $\|r(t)\|$ і $\|r(0)\|$ позначають норму Ріманової метрики. Однак, виходячи з вищесказаного, ми можемо використати Евклідову норму. Тому розглянемо наступні траєкторії в d - вимірному фазовому просторі, почавши з двох сусідніх початкових умов x_0 та $\tilde{x}_0 = x_0 + \delta x_0$, які еволюціонують у часі за наступними векторами $x(t)$ та $\tilde{x}(t) = x(t) + \delta x(t)$ з Евклідовою нормою $\|r(t)\| = \|\delta x(x_0, t)\| = (\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \ldots + \delta x_d^2)^{1/2}$.

Відмітимо, що є d - вимірний базис $\{e_i\}$ для $r(0)$, тоді $\lambda_i(x_0) = \lambda(x_0, e_i)$, $i = \overline{1,d}$.

Для виявлення локальної постійності або змінності векторного поля досліджуваної системи можна використовувати локальні експоненти Ляпунова, обчислені за часовим рядом, за методом, який представлений в [1], однак тоді необхідно аналізувати кожний з λ_i, $i = \overline{1,d}$.

Але, якщо розглянути дискретний розподіл $p_i^t = \frac{\|r_i(t)\|}{\sum_{i=1}^{d} \|r_i(t)\|}$, $i = \overline{1,d}$, і представити $\|r_i(t)\| = p_i^t \sum_{i=1}^{d} \|r_i(t)\|$, тоді пропонується зробити декомпозицію експонент Ляпунова [12], де з'явиться комплексний показник для локального дослідження векторного поля.

Ставиться задача опису такого критерію виявлення локальної постійності або змінності векторного поля, як одного з декомпозиційних границь, а також впорядкування цих границь.

Декомпозиція експонент Ляпунова

Лема 1. Сума границь: $l_D = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\sum_{i=1}^{d} r_i(t)}{\sum_{i=1}^{d} r_i(0)}$ і $l_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_i^t}{p_i^0}$, $i = \overline{1,d}$, тобто $\lambda_i = l_D + l_i$, $i = \overline{1,d}$, є спектром експонент Ляпунова.

Доведення.

За означенням, характеристичні експоненти Ляпунова [7], представляються формулою (4) і представляють собою границі.

Отже, за означенням границі $\forall \delta > 0$, $\exists N = N(\delta)$, $\forall t > N : \left| \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\|r(t)\|}{\|r(0)\|} \right) - \lambda \right| < \delta$.

Тому

$$\forall \frac{\delta}{2} > 0,\ \exists N_1 = N_1\left(\frac{\delta}{2}\right),$$

$$\forall t > N_1 : \left| \frac{1}{t} \ln \frac{\sum_{i=1}^{d} r_i(t)}{\sum_{i=1}^{d} r_i(0)} - l_D \right| < \frac{\delta}{2};$$

$$\forall \frac{\delta}{2} > 0,\ \exists N_2 = N_2\left(\frac{\delta}{2}\right),$$

$\forall t > N_2 : \left| \frac{1}{t} \ln \frac{p_i^t}{p_i^0} - l_i \right| < \frac{\delta}{2}$, $i = \overline{1,d}$. Таким чином,

$$\left|\left(\frac{1}{t}\ln\frac{\sum_{i=1}^{d} r_i(t)}{\sum_{i=1}^{d} r_i(0)}+\frac{1}{t}\ln\frac{p_i^t}{p_i^0}\right)-\left(l_D+l_i\right)\right|=$$

$$=\left(\left|\frac{1}{t}\ln\frac{\sum_{i=1}^{d} r_i(t)}{\sum_{i=1}^{d} r_i(0)}-l_D\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{1}{t}\ln\frac{p_i^t}{p_i^0}-l_i\right|\right)<\left(\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}\right)=\delta .$$

За $N(\delta)$ оберемо $\max\{N_1;N_2\}$, і отримаємо: $\lambda_i = l_D + l_i$, $i=\overline{1,d}$.

Зауваження 1. При використанні Евклідової норми, $\operatorname{Re}\lambda_i = l_D + l_i$, $i=\overline{1,d}$.

Величина l_D є комплексним показником для локального дослідження зміни векторного поля.

2. Величина l_D є найбільшою серед декомпозиційних границь й існує наступне впорядкування: $l_D \ge l_1 \ge l_2 \ge \ldots \ge l_d$.

Доведення.

Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{\sum_{i=1}^{d} r_i(t)}{\sum_{i=1}^{d} r_i(0)} \ge \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{r_i(t)}{r_i(0)}$ (так як логарифмічна функція монотонно зростає), $i=\overline{1,d}$, то $l_D \ge \lambda_i$, $i=\overline{1,d}$, $\lambda_i - l_D \le 0$, $\Rightarrow \lambda_i - l_D = l_i \le 0$. Так як $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_d$, існує впорядкування $l_D \ge l_1 \ge l_2 \ge \ldots \ge l_d$.

Лема 3. Якщо $l_D = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{\sum_{i=1}^{d} r_i(t)}{\sum_{i=1}^{d} r_i(0)} =$

$=\ln\frac{\sum_{i=1}^{d} r_i(t)}{\sum_{i=1}^{d} r_i(0)}$, $\forall t > N_1$, то система є лінійною з постійними параметрами.

Доведення.

За означенням лінійної системи з постійними параметрами: матриця Якобі $Jac^t \to const$. При наступній декомпозиції Грама-Шмідта: $Jac^t = Q^t R^t$, де R^t - верхньо-трикутна матриця $\Rightarrow R^t(i,i) \to const$, а тому $\sum_i R^t(i,i) = \sum_i r_i(t) \to const$, $i=\overline{1,d}$.

Тому: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{\sum_{i=1}^{d} r_i(t)}{\sum_{i=1}^{d} r_i(0)} = \ln\frac{\sum_{i=1}^{d} r_i(t)}{\sum_{i=1}^{d} r_i(0)}$. Таким чином, для лінійної системи з постійними параметрами, вираз $\frac{\sum_{i=1}^{d} r_i(t)}{\sum_{i=1}^{d} r_i(0)}$ є постійним для кожного моменту t.

Обчислення декомпозиційних границь за часовим рядом

Алгоритм оцінювання матриці Якобі за часовим рядом був представлений в багатьох роботах, зокрема в [1]. В [4] був представлений також алгоритм реортонормалізації Грама-Шмідта, за яким розкладається матриця на ортогональну Q і верхньо-трикутну R: $Jac = QR$.

Тоді найбільша декомпозиційна границя може бути обчислена за формулою (5):

$$l_D = \frac{1}{N\tau}\sum_{k=1}^{N}\ln\sum_{i=1}^{d} R^k(i,i), \qquad (5)$$

де τ - кількість точок, обраних для оцінювання матриці Якобі за 1 ітерацію, а N - відповідно кількість цих ітерацій.

Однак при дослідженні часового ряду, невідома розмірність фазового простору досліджуваної системи d. Але за допомогою алгоритму Грасбергера-Прокаччі отримаємо оцінку розмірності d, попередньо визначивши часову затримку t_d (наприклад, використавши автокореляційну функцію). Тоді відповідно до теореми 1 Такенса [10] можна реконструювати за часовим рядом однієї змінної деякої системи: $y_i = [x(i\tau),\ldots,x(i\tau+(d-1)t_d)]$ і обчислити (5).

Висновки

У статті розглянуто показник виявлення постійності або змінності векторного поля досліджуваної динамічної системи за часовим рядом. Представлена декомпозиція експонент Ляпунова, а також впорядкування декомпозиційних границь.

Список використаних джерел

1. *Sano M.* Measurement of Lyapunov spectrum from a chaotic time series / Sano M. and Sawada Y. // Phys. Rev. Lett. – 1985. – №55, P. 1082-1085.
2. *Іванов С.М.* Прогнозування геомагнітного Кр індексу за допомогою дискретної білінійної моделі / С.М. Іванов, В.О. Яценко // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. – Серія: Фізико-математичні науки. – 2016. – № 3. – С. 65-68.
3. *Wolf A.* Determining lyapunov exponents from time series / Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A. // Phisica 16D. – Amsterdam, Netherlands. – 1985. – P. 285-317.
4. *Eckmann J.-P.* Liapunov exponents from time series / Eckmann J.-P., Oliffson Kamphorst S., Ruelle D., Ciliberto S. // Phys. Rev. A. – 1986. – V. 34. - № 6, P. 4971-4979.
5. *Arnold V.I.* Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations / V.I. Arnold. – NY: Springer, 2011. – pp. 351.
6. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. – Москва: Наука, 1978. – 304 с.
7. *Анищенко В.С.* Лекции по нелинейной динамике / В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова. – Москва: Инст. Комп. Исслед., 2011. – 516 с.
8. *Андронов А.А.* Грубые системы / А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин // Докл. АН СССР. – 1937.– № 5. – С. 247-250.
9. *Никульчев Е.В.* Геометрический метод реконструкции систем по экспериментальным данным / Е.В. Никульчев // Письма в жур. техн. физики. – 2007. – Т.33. – № 6. – С. 83-89.
10. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics. – 1981. – № 989. pp. 366–381.
11. *Андреев Г.Н.* Тензорное исчисление: учебное пособие / Г.И. Андреев. – М.: МГИУ, 2008. – 184 с.
12. *Іванов С.М.* Декомпозиція експонент Ляпунова хаотичних динамічних систем / С.М. Іванов // Dynam. syst. model. and stab. investig.: inter. conf., 24-26 May 2017, Kyiv, Ukraine: abstracts. – Kyiv. – 2017. – P. 87.

References

1. SANO, M. & SAWADA, Y. (1985) Measurement of Lyapunov spectrum from a chaotic time series. *Phys. Rev. Lett*. 55(10), p. 1082-1085.
2. IVANOV, S. & YATSENKO, V. (2016) Prohnozuvannia heomahnitnoho Kp indeksu za dopomohoiu dyskretnoi biliniinoi modeli. *Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu im. Tarasa Shevchenka. Seriia: Fizyko-matematychni nauky*. № 3, p. 65-68.
3. WOLF, A. & SWIFT, J. B. & SWINNEY, H. L. & VASTANO, J. A. (1985) Determining lyapunov exponents from time series. *Phisica 16D*. p. 285-317.
4. ECKMANN, J.-P., OLIFFSON KAMPHORST, S., RUELLE, D., CILIBERTO, S. (1986) Liapunov exponents from time series. *Phys. Rev. A*. 34(6), p. 4971-4979.
5. ARNOLD, V.I. (2011) *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. New York: Springer.
6. ARNOLD, V.I. (1978) *Dopolnitel'nyye glavy teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy*. Moskva: Nauka.
7. ANISHCHENKO, V.S. and VADIVASOVA, T.Ye. (2011) *Lektsii po nelineynoy dinamike*. Moskva: Instit.Komp. issled.
8. ANDRONOV, A.A. & PONTRYAGIN, L.S. (1937) Grubyye sistemy. *Dokl. AN SSSR*. 5. p. 247-250.
9. NIKULCHEV, Ye.V. (2007) Geometricheskiy metod rekonstruktsii sistem po eksperimental'nym dannym. *Pis'ma v zhur. tekhn. fiziki*. 33(6). p. 83 -89.
10. TAKENS, F. (1981) Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics*. 989. p.366–381.
11. ANDREEV, G.N. (2008) *Tenzornoe ischislenie: uchebnoe posobie*. Moskva: MGIU.
12. IVANOV, S.M. (2017) Dekompozytsiya eksponent Lyapunova khaotychnykh dynamichnykh system. In *Dynam. syst. model. and stab. investig.: inter. conf.*, Wednesday 24th to Friday 26th May 2017. Kyiv: DP Inform-analit. agenstvo. pp. 87.

Надійшла до редколегії: 06.03.2018