УДК 517.9

Самойленко В. Г.[1], д.ф.-м.н.н., проф.,
Самойленко Ю.І.[2], д.ф.-м.н.н., с.н.с.,
Вовк В.С.[3], аспірант

Асимптотичний аналіз сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, пр-т Глушкова 4е,
e-mail: valsamyul@gmail.com
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, пр-т Глушкова 4е,
e-mail: yusam@univ.kiev.ua
[3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, пр-т Глушкова 4е,
e-mail: vovkvitali@gmail.com

V. H. Samoilenko[1], Dr. Hab. in Phys. and Math.,
Yu. I. Samoilenko[2], Dr. Hab. in Phys. and Math.,
V. S. Vovk[3], Ph.D. student

Asymptotic analysis of the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Glushkova str., 4e,
e-mail: valsamyul@gmail.com
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Glushkova str., 4e,
e-mail: yusam@univ.kiev.ua
[3] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Glushkova str., 4e,
e-mail: vovkvitali@gmail.com

Для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами побудовано асимптотичні розв'язки солітонного типу.

Ключові слова: рівняння Кортевега-де Фріза, сингулярне збурення, асимптотичний розв'язок.

The paper deals with the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. An algorithm for constructing asymptotic one-phase soliton-like solutions of this equation is described. The algorithm is based on the nonlinear WKB technique.

The constructed asymptotic soliton-like solutions contain a regular and singular part. The regular part of this solution is the background function and consists of terms, which are defined as solutions to the system of the first order partial differential equations. The singular part of the asymptotic solution characterizes the soliton properties of the asymptotic solution. These terms are defined as solutions to the system of the third order partial differential equations. Solutions of these equations are obtained in a special way. Firstly, solutions of these equations are considered on the so-called discontinuity curve, and then these solutions are prolongated into a neighborhood of this curve.

The influence of the form of the coefficients of the considered equation on the form of the equation for the discontinuity curve is analyzed. It is noted that for a wide class of such coefficients the equation for the discontinuity curve has solution that is determined for all values of the time variable. In these cases, the constructed asymptotic solutions are determined for all values of the independent variables. Thus, in the case of a zero background, the asymptotic solutions are certain deformations of classical soliton solutions.

Key Words: the Korteweg-de Vries equation, singular perturbation, asymptotic solution.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ. Рівняння Кортевега-де Фріза [1] є одним з фундаментальних рівнянь сучасної математичної фізики і описує різноманітні хвильові процеси в гідродинаміці, фізиці плазми, оптичних, біологічних і телекомунікаційних системах та інш.

Вивчення властивостей розв'язків цього рівняння призвело до створення нового напряму в теорії рівнянь математичної фізики – методу оберненої задачі розсіювання [2], який успішно був застосований для знаходження точних розв'язків низки нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема,

нелінійного рівняння Шредінгера, рівняння *sin*-Гордон, модифікованого рівняння Кортевега-де Фріза, рівняння Кадомцева-Петвіашвілі та багатьох інших.

У даній статті розглядається рівняння Кортевега-де Фріза вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \qquad (1)$$

коефіцієнти якого записуються у вигляді асимптотичних рядів

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,t)\varepsilon^k, \; b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x,t)\varepsilon^k,$$

де $a_k(x,t), b_k(x,t) \in C^\infty(R \times [0;T])$, $k \ge 0$, ε – малий параметр.

Основні позначення. Аналогічно [3 – 5] позначимо через $G_1 = G_1(R\times[0;T]\times R)$ лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau) \in R\times[0;T]\times R$, що для довільних невід'ємних цілих чисел *n, p, q, r* рівномірно щодо *(x,t)* на кожній компактній множині $K \subset R\times[0;T]$ виконуються умови:

1^0. справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x,t,\tau) = 0;$$

2^0. існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial \tau^r}\left(f(x,t,\tau) - f^-(x,t)\right) = 0.$$

Нехай $G_1^0 = G_1^0(R\times[0;T]\times R) \subset G_1$ – простір функцій $f(x,t,\tau) \in G_1$, $(x,t,\tau) \in R\times[0;T]\times R$, для яких рівномірно щодо змінних *(x,t)* на кожному компакті $K \subset R\times[0;T]$ виконується умова:

$$\lim_{\tau\to-\infty} f(x,t,\tau) = 0.$$

Означення. *Функція* $u = u(x,t,\varepsilon)$, *де* ε *– малий параметр, називається однофазовою солітоноподібною, якщо ця функція для довільного цілого* $N \ge 0$ *зображується асимптотичним розкладом вигляду:*

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left(u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right) + O\left(\varepsilon^{N+1}\right), \quad (2)$$

де $u_j(x,t)$ *– нескінченно диференційовні;* $V_0(x,t,\tau) \in G_1^0$, $V_j(x,t,\tau) \in G_1$, $j = \overline{1,N}$; $\tau = \dfrac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}$, $\varphi(t) \in C^\infty([0;T])$ *– деяка скалярна дійсна функція.*

Функція $x-\varphi(t)$ називається *фазою* однофазової солітоноподібної функції $u(x,t,\varepsilon)$.

Побудова асимптотичного розв'язку. Асимптотичний розклад для однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (1) шукається у вигляді (2). Функція

$$U_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t)$$

називається регулярною частиною асимптотики (2), а функція

$$V_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j V_j(x,t,\tau), \; \tau = \frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon},$$

– сингулярною частиною асимптотики (2).

При цьому, очевидно,

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = U_N(x,t,\varepsilon) + V_N(x,t,\varepsilon).$$

Зауважимо, що регулярна частина асимптотичного розв'язку відіграє роль фонової функції, а сингулярна частина характеризує власне солітонні властивості шуканих наближених розв'язків. Члени регулярної частини $u_j(x,t)$, $j = \overline{0,N}$, асимптотики (2) визначається з системи диференціальних рівнянь вигляду

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x,t)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \qquad (3)$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x,t)\left(u_0\frac{\partial u_j}{\partial x} + u_j\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) = f_j(x,t,u_0,u_1,\dots,u_{j-1}), \quad j=\overline{1,N} \qquad (4)$$

де функції $f_j(x,t,u_0,u_1,\dots,u_{j-1})$ визначаються рекурентним чином.

Розв'язки рівнянь (3), (4) знаходяться за допомогою методу характеристик.

Члени сингулярної частини асимптотики (2) визначаються із системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau^3} + a_0(x,t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau}\varphi'(t) - b_0(x,t)\left(V_0+u_0\right)\frac{\partial V_0}{\partial \tau} = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau^3} + a_0(x,t)\frac{\partial V_j}{\partial \tau}\varphi'(t) -$$

$$-b_0(x,t)\left(u_0\frac{\partial V_j}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(V_0V_j\right)\right)=F_j(x,t,\tau),\quad (6)$$

де значення

$$F_j(x,t,\tau,u_0(x,t),\ldots,u_j(x,t),V_0(x,t,\tau),\ldots,V_{j-1}(x,t,\tau))$$

знаходяться рекурентно після визначення функцій $u_0(x,t)$ $u_1(x,t)$,…, $u_j(x,t)$, $V_0(x,t,\tau)$, $V_1(x,t,\tau)$,…, $V_{j-1}(x,t,\tau)$, $j=\overline{1,N}$.

Інтегрування рівнянь (5), (6) потрібно провести в просторах G_1^0, G_1, відповідно. Побудова розв'язків цих рівнянь має певну специфіку, а саме: потрібно не лише знайти невідомі функції, а треба ще визначити функцію $\varphi=\varphi(t)$, яка задає криву розриву $x=\varphi(t)$.

Ця задача розв'язується наступним чином: спочатку ці рівняння розглядаються на апріорі відомій кривій розриву $\varphi=\varphi(t)$ і знаходяться розв'язки рівнянь (5), (6) на кривій розриву. Потім отримується звичайне диференціальне рівняння для функції $\varphi=\varphi(t)$, після чого будується продовження сингулярної частини асимптотики з кривої розриву $x=\varphi(t)$ в деякий окіл цієї кривої – область

$$\Omega_\mu(\Gamma)=\left\{(x,t)\in R\times[0;T]:\left|x-\varphi(t)\right|<\mu\right\}$$

таким чином, щоб члени сингулярної частини асимптотики побудованого розв'язку належали простору G_1. Тут μ – деяка стала.

Підставивши розклад (2) в рівняння (1) та враховуючи рівняння для регулярної частини асимптотики (3), (4), знаходимо, що функції

$$v_j=v_j(t,\tau)=V_j(x,t,\tau)\big|_{x=\varphi(t)},\ j=\overline{0,N},$$

задовольняють диференціальні рівняння вигляду:

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial\tau^3}+a_0(\varphi,t)\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\varphi'(t)-$$
$$-b_0(\varphi,t)\left(V_0+u_0(\varphi,t)\right)\frac{\partial v_0}{\partial\tau}=0,\quad (7)$$
$$\frac{\partial^3 v_j}{\partial\tau^3}+a_0(\varphi,t)\frac{\partial v_j}{\partial\tau}\varphi'(t)-$$
$$-b_0(\varphi,t)\left(u_0(\varphi,t)\frac{\partial v_j}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(v_0v_j\right)\right)=F_j(t,\tau),\quad (8)$$

де

$$F_j(t,\tau)=F_j(x,t,\tau,u_0,\ldots,u_j,V_0,\ldots,V_{j-1})\big|_{x=\varphi(t)},\ j=\overline{1,N}.$$

Розв'язком рівняння (7) в просторі G_1^0 є функція

$$v_0(t,\tau)=-3\frac{A(\varphi,t)}{b_0(\varphi,t)}\cosh^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi,t)}}{2}(\tau+C(t))\right),\quad (9)$$

де $\varphi=\varphi(t)$,

$$A(\varphi,t)=-a_0(\varphi,t)\varphi'(t)+b_0(\varphi,t)u_0(\varphi,t)>0,\quad (10)$$

$C(t)$ – стала інтегрування.

Якщо $F_j\in G_1^0$, $j=\overline{1,N}$, то рівняння (8) мають розв'язки у просторі G_1 тоді і лише тоді, коли виконуються умова ортогональності

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F_j(t,\tau)v_0(t,\tau)d\tau=0.\quad (11)$$

При цьому функція $v_j(t,\tau)$, $j=\overline{1,N}$, записується у вигляді

$$v_j(t,\tau)=v_j(t)\eta_j(t,\tau)+\psi_j(t,\tau),\ j=\overline{1,N},$$

де $\psi_j(t,\tau)\in G_1^0$,

$$v_j(t)=\left[a_0(\varphi,t)\varphi'(t)-b_0(\varphi,t)u_0(\varphi,t)\right]^{-1}\lim_{\tau\to-\infty}\Phi_j(t,\tau),$$
$$\Phi_j(t,\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}F_j(t,\tau)d\tau+E_j(t),$$

причому, для сталої інтегрування $E_j(t)$ виконується співвідношення

$$\lim_{\tau\to+\infty}\Phi_j(t,\tau)=0,$$

а для функції $\eta_j(t,\tau)\in G_1$ – умова $\lim\limits_{\tau\to-\infty}\eta_j(t,\tau)=1$.

З умови ортогональності (11) отримуємо диференціальне рівняння для визначення функції $\varphi=\varphi(t)$

$$15a_0(\varphi,t)b_0(\varphi,t)\frac{d}{dt}A(\varphi,t)+$$
$$+\big[(10a_{0x}(\varphi,t)b_0(\varphi,t)-36b_{0x}(\varphi,t)a_0(\varphi,t))\varphi'(t)+$$
$$+10b_0^2(\varphi,t)u_{0x}(\varphi,t)+3\left(b_0^2(\varphi,t)\right)_x u_0(\varphi,t)-$$
$$-5a_0(\varphi,t)\left(b_0^2(\varphi,t)\right)_t\big]A(\varphi,t)=0.\quad (12)$$

За умови, що $F_j\in G_1^0$, $j=\overline{1,N}$, та умови ортогональності (11) маємо, що $v_j\in G_1^0$, $j=\overline{1,N}$, тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\lim_{\tau \to -\infty} \Phi_j(t,\tau) = 0, \quad j = \overline{1,N}. \qquad (13)$$

У випадку нульового фону, тобто коли $u_0(x,t) \equiv 0$ і умов $a_0(x,t) = a_0(x)$, $b_0(x,t) = b_0(x)$, співвідношення (11), (13) при $j = 1$ будуть сумісними, якщо виконується рівність

$$a_0^5(x) = c\, b_0^{12}(x) \qquad (14)$$

де c – довільна ненульова стала.

У цьому випадку рівняння для $\varphi = \varphi(t)$ спрощується і записується у вигляді

$$\left(a_0(\varphi)\right)^{\frac{2}{3}} \frac{d\varphi}{dt} = c_1, \qquad (15)$$

де c_1 – довільна ненульова стала.

Для досить широкого класу функцій $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$ рівняння (15) має розв'язки для всіх значень *t*. Це дозволяє побудувати асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки для рівняння (1), які будуть визначені для всіх значень незалежних змінних *(x,t)*. Серед таких асимптотичних розв'язків можна виділити розв'язки, сингулярна частина яких містить лише функції, що є швидко спадними за змінною τ. Саме такі розв'язки будуть певними деформаціями класичних солітонних розв'язків.

Висновки. Запропоновано алгоритм побудови асимптотичних однофазових розв'язків солітонного типу для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням.

Список використаних джерел

1. *Korteweg D.J.* On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves / D.J. Korteweg, G. de Vries // Philos. Mag. – 1895. – № 39. – P. 422 – 433.
2. *Gardner C.S.* Method for solving the Korteweg-de Vries equation / C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal, R.M. Miura // Physical Review Lett. – 1967. – V. 19. – P. 1095 – 1097.
3. *Samoilenko V.* Asymptotic expansions for one-phase soliton-type solutions of the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients / V. Samoilenko, Yu. Samoilenko // Ukrainian Mathematical Journal. – 2005. – V. 57, № 1. – P. 132 – 148.
4. *Samoilenko V.* Asymptotic solutions of the Cauchy problem for the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients / V. Samoilenko, Yu. Samoilenko// Ukrainian Mathematical Journal. – 2007. – V. 59, № 1. – P. 126 – 139.
5. *Maslov V.P.* Geometric asymptotics for PDE. I / V.P. Maslov, G.A. Omel'yanov. Providence: American Mathematical Society, 2001. – 243 p.
6. *Miura R.M.* Application of non-linear WKB-method to the KdV equation / Miura R.M., Kruskal M. // SIAM J. Appl. Math. – 1974. – V. 26, № 3. – P. 376 – 395.

References

1. KORTEWEG D.J., DE VRIES G. (1895) On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves. *Philos. Mag.* 39. p. 422-433.
2. GARDNER C.S., GREEN J.M., KRUSCAL M.D., MIURA R.M. (1967) Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Physical Review Lett.* 19. p. 1095-1097.
3. SAMOILENKO V., SAMOILENKO YU. (2005) Asymptotic expansions for one-phase soliton-type solutions of the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal*. 57 (1). p. 132-148.
4. SAMOILENKO V., SAMOILENKO YU. (2007) Asymptotic solutions of the Cauchy problem for the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal*. 59 (1). p. 126-139.
5. MASLOV V.P., OMEL'YANOV G.A. (2001) Geometric asymptotics for PDE. I Providence: American Mathematical Society.
6. MIURA R.M., KRUSCAL M.D. (1974) Application of non-linear WKB-method to the KdV equation. *SIAM J. Appl. Math.* 26 (3). p. 376-395.

Надійшла до редколегії 21.06.19