

УДК 517.929.7

## Дослідження температурних розподілів рухомого середовища з імпульсними джерелами тепла

О. Б. Кобильська, В. П. Ляшенко

*Кременчуцького державного університету ім. Михайла Остроградського, Україна*

Розглядається задача дослідження температурного поля рухомого ізотропного осесиметричного середовища з імпульсними джерелами тепла. Побудована математична модель квазістаціонарного температурного розподілу. Проведено аналіз температурних полів у рухомій циліндричній області. Розглянуто питання існування єдиного розв'язку різничевої задачі.

**Ключові слова:** *рухоме ізотропне осесиметричне середовище, температурне поле, імпульсні джерела, циліндрична область, крайова задача, різничева задача.*

Рассматривается задача исследования температурного поля подвижной изотропной осесимметричной среды с импульсными источниками тепла. Построена математическая модель квазистационарного температурного распределения. Проведен анализ температурных полей в подвижной цилиндрической области. Рассмотрен вопрос существования единственного решения разностной задачи.

**Ключевые слова:** *подвижная изотропная осесимметричная среда, температурное поле, импульсные источники, цилиндрическая область, краевая задача, разностная задача.*

The problem of temperature field research of mobile isotropic axisymmetric environment with pulse sources of heat is considered. The mathematical model of temperature distribution in a zone of heating mobile isotropic axisymmetric environment under the influence of internal pulse heat sources is made. Temperature distributions in mobile cylindrical area are analyzed. Calculations for tungsten material are made. The question of existence unique difference problem solution is considered.

**Key words:** *mobile isotropic axisymmetric environment, temperature field, pulse sources, cylindrical area, boundary value problem, unique difference problem, uniqueness of solutions.*

### 1. Загальна постановка задачі і її актуальність

Розглядається задача дослідження температурного поля рухомого ізотропного осесиметричного середовища з імпульсними джерелами тепла. Вона виникла при дослідженні температурних полів під час електропластичної обробки металів [1].

### 2. Витоки дослідження авторів

В роботах, що проводились раніше [1-3] досліджувався вплив короточасних імпульсних джерел тепла на пластичність металів, зокрема тугоплавких та міді. Математичні моделі температурних полів в цих роботах не розглядалися.

### 3. Нерозв'язанні проблеми і мета роботи

Основною нерозв'язаною проблемою є відсутність математичної моделі температурного поля рухомого ізотропного середовища з внутрішніми імпульсними джерелами тепла. Метою дослідження є побудова математичної моделі температурного поля у зоні нагрівання та дослідження впливу амплітуди імпульсів на температурний розподіл.

#### 4. Матеріали і результати дослідження

Розглянемо термічно тонке ізотропне осесиметричне середовище зі сталими теплофізичними характеристиками. У найбільш повній постановці, коли джерело тепла є функцією температури і координат, у циліндричній системі координат, температурне поле може бути описано за допомогою крайової задачі для нестационарного рівняння теплопровідності в області  $\Omega = \{0 \leq z \leq l, 0 \leq r \leq r_0, 0 \leq t \leq t_0\}$  з границею  $\partial\Omega$

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \nu c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(z, t, T), (r, z) \in \Omega \quad (4.1)$$

$$T(r, z, 0) = T_0 \quad (z, r) \in \Omega \quad (4.2)$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \alpha(T)(T_c - T) - \varepsilon \sigma (T_c^4 - T^4), \quad \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = \alpha(T)(T - T_c) - \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\alpha(T)(T - T_c) - \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4) \quad (4.4)$$

де  $\lambda(T), \alpha(T)$  – коефіцієнти теплопровідності та конвективної тепловіддачі з поверхні, додатно визначені функції  $\varepsilon, \sigma$  – ступінь чорноти та постійна Стефана-Больцмана  $r_0$  – радіус, функція  $W(z, t, T)$  у випадку залежності джерел тепла від координати та часу має вигляд

$$W(z, t, T) = f_1^1(z) f_2(T), \quad (4.5)$$

$$W(z, t, T) = f^2_1(t) f_2(T), \quad (4.6)$$

де  $f_2(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}$ ,  $\rho_0, \beta$  – питомий опір і температурний коефіцієнт опору.

Функції  $f_1^1(z), f_1^2(t)$  в залежності від технологічних особливостей процесу можуть мати вигляд (4.7)

$$f_1^1(z) = \begin{cases} m \frac{z}{l_0} - mn, n l_0 \leq z \leq \left(n + \frac{1}{m}\right) l_0 \\ 0, \left(n + \frac{1}{m}\right) l_0 \leq z \leq (n+1) l_0, z < 0 \end{cases}$$

$$f_1^2(t) = \begin{cases} m \frac{t}{t_0} - mn, n t_0 \leq t \leq \left(n + \frac{1}{m}\right) t_0 \\ 0, \left(n + \frac{1}{m}\right) t_0 \leq t \leq (n+1) t_0, t < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Тут параметри  $m, n$  визначають характер дії імпульсів.

Розглянемо задачу (4.1)-(4.4). Для термічно тонкого середовища можна провести усереднення температури уздовж радіуса, врахувавши при цьому умову (4.4) [4]. Задача (4.1) – (4.4) трансформується у наступну

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \nu c \rho_n \frac{\partial u}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t} = F_1(u, t), 0 \leq z \leq l, 0 \leq t \leq t_0 \quad (4.8)$$

$$u(z,0) = T_l \quad (4.9)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \alpha(T_c - u) + \varepsilon \sigma(T_c^4 - u^4), \lambda \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=l} = -\alpha(T_c - u) - \varepsilon \sigma(T_c^4 - u^4), \quad (4.10)$$

$$\text{де } F_1(u,t) = -\left(\frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} f_1(t) + \frac{2\alpha T_c}{r_0} + \frac{2\varepsilon \sigma}{r_0} (T_c^4 - u^4) + \left(\frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} f_1(t) - \frac{2\alpha}{r_0}\right) u\right) \quad (4.11)$$

Застосуємо метод Рунге [4]. Уведемо в області  $\Omega: \{0 < z < l, 0 < t < t_0\}$  рівномірну за часом сітку  $\varpi_{\Delta\tau} = \{\tau_j = j\Delta\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$ . Замінюємо похідну за часом різницевою похідною і поставимо у відповідність задачі (4.8)-(4.11) наступну систему диференціально-різницевих задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\lambda \frac{d^2 u^{j+1}}{dz^2} - \nu c \rho_n \frac{du^{j+1}}{dz} = F_2(u^{j+1}, u^j, z), 0 \leq z \leq l \quad (4.12)$$

$$u^0 = T_l \quad (4.13)$$

$$\lambda \frac{du}{dz} \Big|_{z=0} = \alpha(T_c - u) + \varepsilon \sigma(T_c^4 - u^4), \lambda \frac{du}{dz} \Big|_{z=l} = -\alpha(T_c - u) - \varepsilon \sigma(T_c^4 - u^4), \quad (4.14)$$

$$F_2(u,t) = -\left(\frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} f_1(t) + \frac{2\alpha T_c}{r_0} + \frac{2\varepsilon \sigma}{r_0} (T_c^4 - u^{j+4}) + \left(\frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} f_1(t) - \frac{2\alpha}{r_0} - \frac{c\rho_n}{\Delta\tau}\right) u^{j+1} + \frac{c\rho_n}{\Delta\tau} u^j\right) \quad (4.15)$$

Розглядаємо на кожному відрізку нелінійну крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку відносно сіткової функції  $u^j(z)$ .

Розв'язуємо систему квазілінійних задач (4.12)-(4.14) кінцево-різницеvim методом. На відрізку  $[0; l]$  введемо рівномірну сітку  $\varpi = \{z = z_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N\}$ . Для внутрішніх і граничних вузлів задачі (4.12)-(4.14) на кожному часовому шарі визначимо різницеvий оператор  $\Lambda$  у вигляді.

$$Ay = \Lambda = \begin{cases} -(a_1 y_{\bar{z}})_z + a_2 y_{\bar{z}}, z \in \omega \\ \frac{2}{h} (a_1 y_{\bar{z}} + a_3 y) + (-(a_1 y_{\bar{z}})_z + a_2 y_{\bar{z}}), z = 0 \\ \frac{2}{h} (a_1 y_{\bar{z}} - a_3 y_{\bar{z}}) + (-(a_1 y_{\bar{z}})_z + a_2 y_{\bar{z}}), z = l \end{cases} \quad (4.16)$$

Поставимо у відповідність задачі (4.12)-(4.14) на кожному часовому шарі наступну різницеvу схему

$$\Lambda y = F(z, y) \quad z \in \omega \cup \partial\omega \quad (4.17)$$

$$\text{де } F(z, y) = \begin{cases} F_2(z, y), z \in \omega \\ F_2(z, y) + \frac{2}{h} (\alpha T_c + \varepsilon \sigma(T_c^4 - y^4)), z = 0 \\ F_2(z, y) - \frac{2}{h} (\alpha T_c + \varepsilon \sigma(T_c^4 - y^4)), z = l \end{cases} \quad (4.18)$$

Або в операторному вигляді  $Ay = F(z, y)$ . Нове наближення знаходиться із розв'язку різницевого рівняння.

$$\Lambda y_{k+1} - \frac{\partial F}{\partial y}(z, y_k) y_{k+1} = F(z, y_k) - \frac{\partial F}{\partial y}(z, y_k) y_k$$

Розглянемо задачу (4.8)-(4.11) у випадку квазістаціонарного поля коли частинна похідна за часом зникає В такому випадку задача (4.8)-(4.11) приймає вигляд

$$\lambda \frac{d^2 u}{dz^2} - \nu c \rho_n \frac{du}{dz} = F_1(u, z), 0 \leq z \leq l \quad (4.19)$$

$$-\lambda \frac{du}{dz} \Big|_{z=0} = \alpha(u - T_c) + \varepsilon \sigma(u^4 - T_c^4), \lambda \frac{du}{dz} \Big|_{z=l} = \alpha(u - T_c) + \varepsilon \sigma(u^4 - T_c^4), \quad (4.20)$$

$$\text{де } F_1(u, z) = -\left(\frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} f_1(z) + \frac{2\alpha T_c}{r_0} + \frac{2\varepsilon \sigma}{r_0} (T_c^4 - u^4) + \left(\frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} f_1(z) - \frac{2\alpha}{r_0}\right) u\right) \quad (4.21)$$

Розв'язуємо квазілінійну задачу (4.19)-(4.21) [5] кінцево-різницевою методом. Розглянемо питання оцінок розв'язку різницевої задачі в енергетичному просторі. Для внутрішніх і граничних вузлів задачі (4.19)-(4.21) запишемо різницевого оператора  $\Lambda$  у вигляді

$$Ay = \Lambda = \begin{cases} -(a_1 y_{\bar{z}})_z, z \in \omega \\ -\frac{2}{h}((a_1 y_{\bar{z}})_z - a_1 y_{\bar{z}} - a_3 y), z = 0 \\ \frac{2}{h}((a_1 y_{\bar{z}})_z - a_1 y_{\bar{z}} - a_3 y), z = l \end{cases} \quad (4.22)$$

Поставимо у відповідність задачі (4.19)-(4.21) наступну різницеву схему

$$\Lambda y = F(z, y) \quad z \in \omega \cup \partial\omega \quad (4.23)$$

$$\text{де } F(z, y) = \begin{cases} F_1(z, y), z \in \omega \\ F_1(z, y) + \frac{2}{h}(\alpha T_c + \varepsilon \sigma(T_c^4 - y^4)), z = 0 \\ F_1(z, y) - \frac{2}{h}(\alpha T_c + \varepsilon \sigma(T_c^4 - y^4)), z = l \end{cases} \quad (4.24)$$

Або в операторному вигляді  $Ay = F(z, y)$

Апроксимація на розв'язках має другий порядок.

**Лема 1.** Оператор  $A$ , що визначається згідно (4.22) є самоспряженим та додатно визначеним при  $a_3 > 0$ .

Доведення додатної визначеності оператора  $A$  ґрунтується на першій та другій формулах Гріна.

**Теорема 1.** Для різницевої задачі (4.22)-(4.23) при  $a_3 > 0$  справедлива оцінка

$\|y\| \leq M_1 \|F\|_{-1}$ , де  $M_1 = \text{const}$ . Із оцінки випливає, що різницева задача має єдиний розв'язок [6].

Для наближеного розв'язку задачі (4.22)-(4.23) застосовуємо ітераційний метод Ньютона. У цьому випадку нове наближення знаходиться із розв'язку різницевого рівняння.

$$\Delta y_{k+1} - \frac{\partial F}{\partial y}(z, y_k) y_{k+1} = F(z, y_k) - \frac{\partial F}{\partial y}(z, y_k) y_k$$

### 5. Обчислювальний експеримент

На Рисунку 1 зображені графіки температурних розподілів при значеннях параметру  $I = 1A; 10A$  відповідно що є розв'язками задачі (4.19)-(4.20). Розрахунки свідчать, що розподіл температур після кожного із 8 імпульсів майже не змінюється. Проте із збільшенням значення параметра  $I$  температура набуває більших значень.

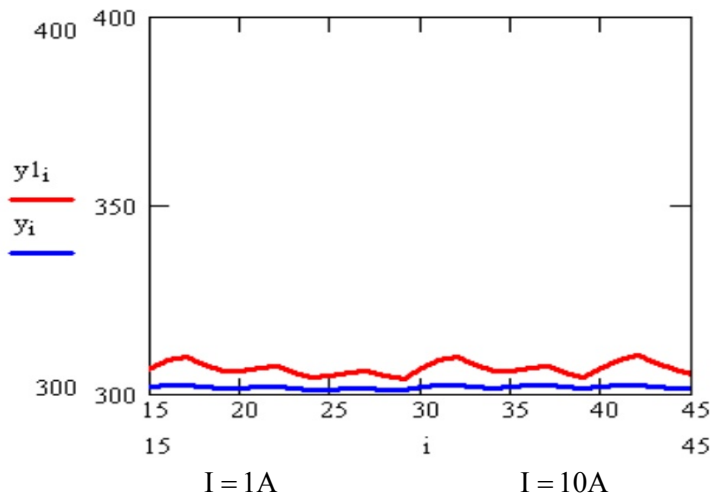


Рис.1 Температурні розподіли отримані в результаті розв'язку задачі (4.11)-(4.13) при наступних значеннях параметрів та при відповідних значеннях струму.

$$T_c = 300K, \alpha = 1 \frac{Bm}{m^2 K}, \rho_n = 19.1 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}, c = 137 \frac{Дж}{kg \cdot K}, \varepsilon = 0.5, r_0 = 10^{-3} m$$

$$\lambda = 124 \frac{Bm}{mK}, \rho_0 = 5.6 \cdot 10^{-8} \frac{Om}{m}$$

На Рисунку 2 зображено графіки температурних розподілів, що отриманні в результаті розв'язку нестационарної задачі (4.8)-(4.10) при значеннях сили струму  $I = 1A$  та  $I = 10A$ . Графіки температурних розподілів побудовані за середніми значеннями температур на кожному імпульсі.

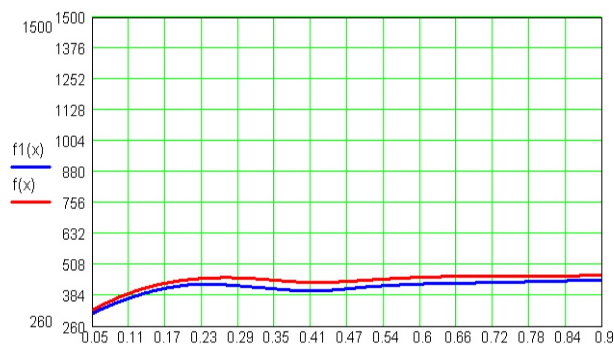


Рис.2 Температурні розподіли отримані при розв'язку задачі (4.17)-(4.20) при наступних значеннях параметрів та при відповідних значеннях сил

$$\text{струму } T_c = 300K, \alpha = 1 \frac{Вт}{м^2 K}, \rho_n = 19.1 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}, c = 137 \frac{Дж}{кг \cdot K}, \varepsilon = 0,5, r_0 = 10^{-3} м$$

$$, \lambda = 124 \frac{Вт}{м K}, \rho_0 = 5,6 \cdot 10^{-8} \frac{Ом}{м}$$

## 6. Висновки

Побудована математична модель температурного розподілу в зоні нагрівання рухомого осесимметричного ізотропного середовища радіусом  $r_0$ . під дією внутрішніх імпульсних джерел тепла. Розв'язана нестационарна та квазістационарна задача. Проведено аналіз температурних розподілів у рухомій циліндричній області.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Электропластическая деформация металлов /Под ред. В.И.Спицына.– М.:Наука, 1985.– 160 с.
2. Троицкий О.А., Моисеенко М.М., Спицин В.И., Ляшенко В.П. и др. Электропластическая деформация вольфрама //М. ДАН СССР– 1987.– т. 295, №5.– С.251-255
3. Троицкий О.А. Ультразвуковое электропластическое плющение металла //Вестник научно-технического развития.–2009.–№ 10 (26).–С.42-49.
4. В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська Моделювання однієї оберненої задачі Стефана.// Вісник Харківського національного університету– 2009.– випуск 11,№ 847.– С.206-212.
5. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных.– М:Мир, 1974.– 205с.
6. Самарский А. А. Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача.—М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.

Надійшла у першій редакції 29.03.2010, в останній - 09.04.2010.

© О. Б. Кобильська, В. П. Ляшенко, 2010