

УДК 517.929.7

Дослідження температурного поля двошарового циліндра з різними теплофізичними характеристиками

Т. А. Григорова, В. П. Ляшенко

Кременчуцький державний університет імені Михайла Остроградського, Україна

В статье проведены исследования математических моделей температурных полей во время нагрева изделий индукционным способом в контейнере. Найдены численные решения задач в конечномерном сепарабельном пространстве с применением алгоритма Кранка – Николсон и Дугласа – Ганна. Выполнены численные расчеты и построены температурные распределения.

Ключевые слова: математические модели, алгоритмы, численные расчеты.

В статі проведені дослідження математичних моделей температурних полів під час нагрівання індукційним виробів способом у контейнері. Знайдено чисельні розв'язки задач у сепарабельному скінченномірному просторі на основі алгоритмів Кранка – Ніколсон та Дугласа – Ганна. Проведено чисельні розрахунки та побудовано температурні розподіли.

Ключові слова: математична модель, алгоритми, чисельні розрахунки.

In the paper we are conducted researches of mathematical models of the temperature fields during heating of wares an induction method in a container. The numerical solutions of problems are found in space of finite-dimensional separable space based on algorithms of Crank – Nicholson and Douglas – Gunn. Numerical calculations are executed and temperature distributions are built.

Key words: mathematical model, algorithms, numerical calculations.

1. Загальна постановка питання і його актуальність

Процес спікання виробів із порошкових матеріалів у контейнері має складну природу. Він зазвичай відбувається у металевій або графітовій прес-формі, яка розігрівається під дією електричного струму, що пропускається через неї. Найбільш ефективно підводити електричний струм індукційним способом [1]. В процесі спікання спресована заготовка змінює свої фізико-механічні властивості та геометричні розміри. Основний вплив на це має температура нагрівання. Розподіл температур у виробі впливає на його основні характеристики. Одночасно тут відбуваються складні дифузійні процеси. Тому актуальним є побудова комплексної математичної моделі температурного поля прес-форми та виробу, що спікається. Математична модель дозволяє визначити основні параметри керування температурним полем.

2. Витоки дослідження авторів

У роботах, зокрема [2] проведені дослідження температурних розподілів, що відбуваються під час відпалів металевих виробів циліндричної форми індукційним способом. Побудовані математичні моделі, у вигляді початково-крайових задач для лінійного рівняння теплопровідності, та отримані аналітичні розв'язки. Циліндр, що розігрівається розглядається у вигляді двошарового циліндра, один шар якого розігрівається внутрішніми джерелами тепла, а другий за рахунок передачі тепла від нього. Моделюється область з однорідними

фізичними характеристиками. Розглядається умова теплової взаємодії на межі зовнішнього та внутрішнього циліндрів.

3. Не розв'язані питання і мета роботи

В роботах [1,2] не враховувалась умова спряження між двома неоднорідними середовищами, а саме прес-форми на яку безпосередньо діє електричний струм, та виробу, що спікається в ній. Метою даних досліджень є побудова та аналіз комплексної математичної моделі температурного поля двошарової циліндричної області з різними фізичними характеристиками та з урахуванням умови теплової взаємодії між двома областями.

4. Загальна постановка задачі та її розв'язок

Під час нагрівання виробів циліндричної форми скінченної довжини у контейнері тіло контейнера розігрівається індукційним способом, джерела тепла зосереджені у поверхневому шарі - товщиною Δ [1]. При цьому внутрішніми джерелами тепла розігрівається шар товщиною Δ , а далі уздовж радіусу r нагрівання порошку або спресованого виробу відбувається шляхом передачі тепла теплопровідністю або шляхом передачі тепла за законом Ньютона та Стефана - Больцмана. Не зменшуючи узагальнення, можна вважати, що у прес-формі сила струму стала та дорівнює I . Тому під час моделювання температурного поля зони нагріву прес-форми та виробу у ній індукційним способом природно припустити, що нагрівання відбувається одночасно внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла. При цьому теплофізичні характеристики зовнішнього та внутрішнього шарів різні.

Для визначення температурного розподілу $T(r, z)$ у такому складеному циліндрі приходимо до наступної крайової задачі на спряження

$$\lambda_{1,2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1,2}}{\partial r} \right) + \lambda_{1,2} \frac{\partial^2 T_{1,2}}{\partial z^2} - c_{1,2} \rho_{1,2} \frac{\partial T_{1,2}}{\partial t} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T_{1,2})}{S^2}, & r - \Delta \leq r < r_0, \\ 0, & 0 < r < r_0 - \Delta \end{cases} \quad (1)$$

$$0 < z < l, \quad T_{1,2} > 0,$$

$$T_{1,2}(r, z, 0) = T_0, \quad (2)$$

$$T_{1,2}(r, 0, t) = T_0, \quad T_{1,2}(r, l, t) = T_l \quad (3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r_0 - \Delta - 0, z, t)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(r_0 - \Delta + 0, z, t)}{\partial r}, \quad (4)$$

$$T_1(r_0 - \Delta - 0, z, t) = T_2(r_0 - \Delta + 0, z, t), \quad (5)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r_0, z, t)}{\partial r} = -\alpha_1 (T_1 - T_c) - \varepsilon \sigma (T_1^4 - T_c^4), \quad \frac{\partial T_2(0, z, t)}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

де $\lambda_{1,2}$, $c_{1,2}$, $\rho_{1,2}$, $\alpha_{1,2}$ – відповідні теплофізичні характеристики та параметри матеріалів тіла контейнера та виробу, ε, σ – степінь чорноти та постійна

Стефана-Больцмана, ρ_0 , β – питомий опір і температурний коефіцієнт опору.

Якщо припустити, що у прес-формі виріб розігрівається передачею тепла за законом Ньютона та Стефана – Больцмана то тепловий потік на внутрішній поверхні полого циліндра можна задати у вигляді

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r_0 - \Delta - 0, z, t)}{\partial r} = \alpha_1(T_1 - T_c) + \varepsilon\sigma(T_1^4 - T_c^4), \quad (7)$$

У такому випадку після усереднення $u(z, t) = \frac{2}{S} \int_{r_0 - \Delta - 0}^{r_0} T_1(r, z, t) r dr$ приходимо

до задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + A_1 u + C_1 u^4 = B_1, \quad 0 < z < l, \quad t > 0 \quad (8)$$

$$u(z, 0) = T_0, \quad u(0, t) = T_0, \quad u(r, z, l) = T_l, \quad (9)$$

$$\text{де } A_1 = \left(\frac{I^2 \rho_0 \beta}{\lambda_1 S^2} + \frac{2\alpha_1 \Delta - 4r_0 \alpha_1}{\lambda_1 S} \right), \quad a_1 = \frac{c_1 \rho_1}{\lambda_1},$$

$$B_1 = -\frac{I^2 \rho_0}{\lambda_1 S} - \frac{2(2r_0 \alpha_1 T_c - \Delta \alpha_1 T_c + 2r_0 \varepsilon \sigma T_c^4 - \varepsilon \sigma \Delta T_c^4)}{\lambda_1 S}, \quad C_1 = \frac{2\Delta \varepsilon \sigma - 4r_0 \varepsilon \sigma}{\lambda_1 S}$$

Далі переходимо до розв'язання задачі у внутрішньому циліндрі. Так як внутрішній циліндр розігрівається за допомогою зовнішніх джерел тепла та сприймає тепловий потік, то на його поверхні тепловий потік має вигляд (6) з коефіцієнтом теплопровідності λ_2 , та тепловіддачі α_1

$$\lambda_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

$$0 < r < r_0 - \Delta, \quad 0 < z < l, \quad t > 0$$

$$T_2(r, z, 0) = T_0, \quad (11)$$

$$T_2(r, 0, t) = T_0, \quad T_2(r, l, t) = T_l \quad (12)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2(r_0 - \Delta + 0, z, t)}{\partial r} = \alpha_1(T_1 - T_c) + \varepsilon\sigma(T_1^4 - T_c^4), \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (14)$$

Якщо і у цьому циліндрі температурним розподілом уздовж радіусу можна знехтувати та провівши усереднення

$$v(z, t) = \frac{2}{S_1} \int_0^{r_0 - \Delta + 0} T_2(r, z, t) r dr, \quad S_1 = \pi(r_0 - \Delta)^2 \text{ приходимо до крайової задачі для}$$

диференціального рівняння другого порядку з умовами (11)-(13)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - a_2 \frac{\partial v}{\partial t} + A v + C v^4 = B, \quad 0 < z < l, \quad t > 0 \quad (18)$$

$$v(z, 0) = T_0, \quad v(0, t) = T_0, \quad v(l, t) = T_l, \quad (19)$$

$$\text{де } a_2 = \frac{c_2 \rho_2}{\lambda_2}, \quad A = -\frac{2\alpha_2(r_0 - \Delta)}{\lambda_2 S_1}, \quad B = -\frac{2(r_0 - \Delta)(\alpha_2 T_c + \varepsilon \sigma T_c^4)}{\lambda_2 S_1},$$

$$C = -\frac{2(r_0 - \Delta)\varepsilon \sigma}{\lambda_2 S_1}$$

Інший підхід до задачі (10)-(14) про температурне поле внутрішнього циліндра приводить до заміни умови (13) на функцію $T = T(r_0 - \Delta, z, t)$, що є розв'язком задачі (8)-(9) на поверхні зовнішнього циліндра.

Отримані крайові задачі розв'язуємо чисельними методами. Спочатку розв'язуємо задачу (8)-(9) для отримання температурного розподілу на границі зовнішнього та внутрішнього циліндрів.

Будуємо кінцево-різницьку схему Кранка - Ніколсона [3] для рівняння теплопровідності.

В області $\bar{\Omega} \{0 \leq z \leq l, t > 0\}$ вводимо рівномірні сітки по довжині (координата z) заготовки $\bar{\omega}_h = \{z_m = mh, m = 0, 1 \dots M\}$; часову сітку (координата t) $\bar{\omega}_{\Delta t} = \{t_j = j\Delta t, j = 0, 1 \dots j_0\}$ з інтервалами: $h = l/M$, $\Delta t = t_0/j_0$.

Розв'язок задачі в області Ω шукаємо у вигляді розв'язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для сіткової функції u_{z_m, t_j} , яку позначимо як $u_{i,j}$.

$$a_1 \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{2h^2} + A_1 u_i^j + C_1 u_i^{j^4} - B_1$$

Отриману матрицю значень температур використовуємо для розв'язання задачі (10)-(14), як граничну умову.

Для цього будуємо кінцево-різницьку схему Дугласа-Ганна для розв'язку методом змінних напрямів [3] в області $\bar{\Omega} \{0 \leq r \leq r_0 - \Delta, 0 \leq z \leq l, t > 0\}$ з інтервалами $h_1 = (r_0 - \Delta)/N$, $h_2 = l/M$, $\Delta t = t_0/j_0$, яка має вигляд

$$\frac{u_{n,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^j}{\Delta t/2} = \frac{\lambda_2}{rc_2\rho_2} \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} +$$

$$+ \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n,m-1}^j - 2u_{n,m}^j + u_{n,m+1}^j}{h_2^2}$$

$$\frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{\lambda_2}{rc_2\rho_2} \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} +$$

$$+ \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n,m-1}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1} + u_{n,m+1}^{j+1}}{h_2^2}$$

на границях області

$$\frac{-u_{2,m}^{j+1} + 4u_{1,m}^{j+1} - 3u_{0,m}^{j+1}}{2h_1} = 0, \quad \text{для } n = 0,$$

для $n = N$ підставляємо значення з матриці температурного розподілу на границі внутрішнього циліндру.

Якщо покласти $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$, $0 < z < l$ будемо мати задачу Коші, яку можна розглядати як тестову для тестування алгоритму чисельного розв'язку

$$a^2 \frac{dv}{dt} - Av - Cv^4 = -B, \quad t > 0, \quad v(0) = T_0, \quad (20)$$

Для $C = 0$ її розв'язок має вигляд

$$v(t) = \frac{AT - B}{A} e^{\frac{A}{a^2} t} + \frac{B}{A} \quad (21)$$

Параметр I вибираємо із умови $\frac{I^2 \rho_0 \beta}{S} > 2\alpha r_0$.

Порівняння результатів чисельних розрахунків, виконаних за розв'язком задач (18)-(19) та (21) показали, що температурні розподіли суттєво відрізняються між собою. Коли відношення $l/r_0 \gg 1$ тоді різниця абсолютних значень температур зростає. Це свідчить про вплив граничних умов $T(r, 0, t)$ та $T(r, l, t)$ на загальний температурний розподіл. Щоб з'ясувати повністю їх вплив розглянемо спрощену задачу визначення температурного поля по перетину внутрішнього циліндра

$$a_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) \quad (22)$$

$$0 < r < r_0 - \Delta, \quad t > 0$$

$$T(r, 0) = T_0 \quad (23)$$

$$T_2(r_0 - \Delta + 0, t) = T_1(r_0 - \Delta - 0, t) = T_1, \quad |T_2(0, t)| < \infty \quad (24)$$

Її розв'язок знаходимо методом Фур'є [4].

$$T(r, t) = T_1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_0 - T_1}{\mu_k^2 I_1(\mu_k)} I_0 \left(\frac{\mu_k}{r_0 - \Delta} r \right) e^{-\frac{\mu_k^2 a_2}{(r_0 - \Delta)^2} t} \quad (25)$$

де $I_0(\frac{\mu_k}{r_0 - \Delta} r)$ – функції Бесселя першого роду нульового порядку.

5. Обчислювальний експеримент: обґрунтування алгоритмів і реалізація

Запропонована математична модель та алгоритм розв'язку задачі з достатньою точністю описують процес спікання виробів у контейнері. Проведені чисельні розрахунки та побудовані температурні розподіли під час спікання виробів рис. 1-4 для крайових задач (8)-(9), (10)-(13), (18)-(19) та (20), тут T_0, T_l, T_c – співпадають. Розв'язки (21) та (25) спрощених задач з досить високою точністю погоджуються з розв'язками крайової задачі (10)-(13).

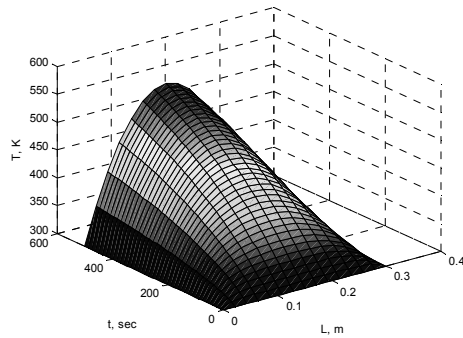


Рис.1 Температурний розподіл на границі внутрішнього циліндру

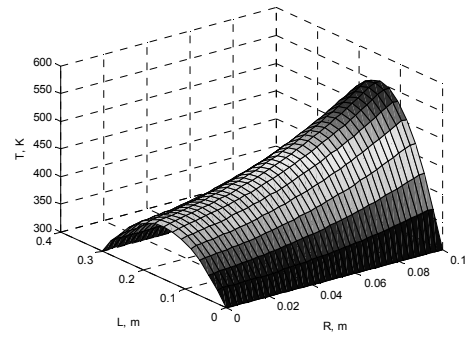


Рис.2 Температурний розподіл у внутрішньому циліндрі

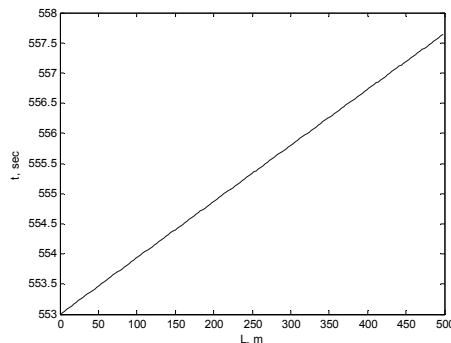


Рис.3 Температурний розподіл у внутрішньому циліндрі задача (21)

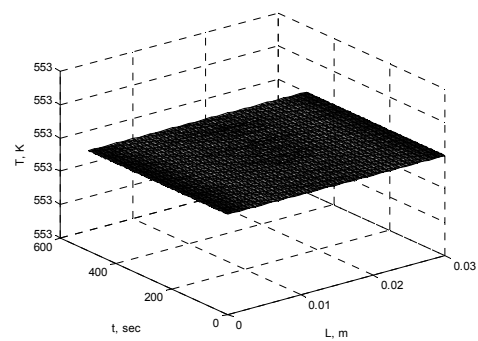


Рис.4 Температурний розподіл задача у внутрішньому циліндрі (18)-(19)

6. Висновки за результатами і напрями подальших досліджень

Отримані результати можуть бути застосовані під час проектування систем контролю спікання виробів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бабат Г.И. Индукционный нагрев металлов и его промышленное применение. 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Энергия, 1965. – 522 с.
2. Безменов Ф.В. Некоторые особенности протекания процесса нагрева цилиндрических деталей при заданных значениях температуры на поверхности и глубине заковки // Индукционный нагрев. – 2008. – №5 – С. 48-56.
3. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т., т. 1, пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 384 с.
4. Перестук М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики.- К.:Либідь, 2006.– 424с.

Надійшла 10.04.2010

© Т. А. Григорова, В. П. Ляшенко, 2010