

УДК 004.942:537.525

## ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ МАТРИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ДЖЕРЕЛ ЕЛЕКТРОНІВ ВИСОКОВОЛЬТНОГО ТЛІЮЧОГО РОЗРЯДУ

DOI 10.36994/2707-4110-2019-2-23-15

**Мельник І.В.**, д.т.н., проф., Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна, факультет електроніки, кафедра електронних приладів та пристроїв. [imelnik@phbme.kpi.ua](mailto:imelnik@phbme.kpi.ua)

**Починок А.В.** к.т.н., Університет державної фіскальної служби України, Учено-науковий інститут інформаційних технологій, кафедра інформаційних систем та технологій, Ірпінь, Київська область, Україна. [alina\\_rochynok@yahoo.com](mailto:alina_rochynok@yahoo.com)

**Анотація.** У статті розглянуто можливості та особливості використання арифметико-логічних виразів у комплексних моделях джерел електронів високовольтного тліючого розряду. Такі джерела електронів знаходять широке застосування в електронній промисловості, приладобудуванні, машинобудуванні та ливарному виробництві для електронно-променевого зварювання, паяння, відпалювання виробів, нанесення композитних керамічних тонких плівок та покриттів та для очищення тугоплавких матеріалів методом їхнього переплавлення в низькому вакуумі. Головна проблема проектування технологічних джерел електронів високовольтного тліючого розряду полягає в тому, що через складності фізичних процесів, які протікають у розрядному проміжку в умовах низького та середнього вакууму, не існує комплексних фізико-математичних моделей джерел електронів високовольтного тліючого розряду. Це певною мірою стримує розробку та впровадження у виробництво цих перспективних джерел електронів. У статті запропонована комплексна фізико-математична модель джерел електронів високовольтного тліючого розряду, основана на використанні арифметико-логічних виразів та методів матричного програмування. Розглянуті головні фізичні процеси, які протікають у джерелах електронів високовольтного тліючого розряду, та математичні засоби, призначені для описання цих процесів та головних вузлів гармати. Математичні співвідношення для комплексної моделі, яка пропонується, записані у вигляді арифметико-логічних виразів. Наведені результати моделювання розподілу електричного поля в електродному проміжку, розподілу густини потужності електронного пучка у фокусі та процесу транспортування пучка в еквіпотенціальному каналі. Показано, що використання арифметико-логічних виразів значно спрощує реалізацію створеної фізико-математичної моделі з використанням сучасних засобів матричного програмування. Проаналізовані можливості проведення паралельних обчислень.

**Ключові слова:** арифметико-логічний вираз, матричне програмування, паралельні алгоритми, джерела електронів високовольтного тліючого розряду, метод скінченних різниць, метод трубок струму, модель магнітної лінзи, модель транспортування електронного пучка.

## **PARTICULARITIES OF USING THREE METHODS OF MATRIX PROGRAMMING IN THE MATHEMATICAL MODELS OF HIGH VOLTAGE GLOW DISCHARGE ELECTRON SOURCES**

**Igor Melnyk**, Dr. habil., Prof., National Technical University of Ukraine «Igor Sikorskiy Kiev Polytechnic Institute», Electronic Faculty, Department of Electronic Instruments and Devices, Kyiv, Ukraine. [imelnik@phbme.kpi.ua](mailto:imelnik@phbme.kpi.ua)

**Alina Pochynok**, P.h. D., University of the State Fiscal Service of Ukraine, Educational and Research Institute of Information Technology, Department of Information Systems and Technology, Irpin, Kyiv Region, Ukraine. [alina\\_pochynok@yahoo.com](mailto:alina_pochynok@yahoo.com)

**Abstract.** Possibilities and particularities of using of arithmetic-logic equations in complex models of high voltage glow discharge electron sources are considered in the article. Such electron sources are find wide application in electronic industry, device production and mechanic engineering for electron beam welding, brazing, annealing of produced items, for deposition of composed ceramics films and coatings, as well as for refining of refractory materials with using of electron-beam refusing in the soft vacuum. Main problem of designing of technological high voltage glow discharge electron sources is absence of complex physical-mathematic models. This fact is caused by complicity of physical processes, taking place in the discharge gap at conditions of low and middle vacuum, and it generally holding back the elaboration and providing in industry such advanced electron sources. Complex physic-mathematic model of high voltage glow discharge electron sources, based on applying of arithmetic-logic relations and methods of matrix programming, is proposed in the article. Main physical processes, taking place in the high voltage glow discharge, as well as mathematic means for describing these processes, and main items of electron gun, are considered. Mathematic relations for proposed model are written in the form of arithmetic-logic equations. The results of simulation of distribution of electric field in the discharge gap, distribution of power density of electron beam in the focus and guiding of electron beam in the equipotential channel, are presented. Its have been shown, that using of arithmetic-logic relations is significantly simplified realization of proposed physic-mathematic model with using the means of matrix programming. Possibilities of providing parallel calculations are also analyzed.

**Keywords:** Arithmetic-Logic Relation, Matrix Programming, Parallel Algorithms, High Voltage Glow Discharge Electron Sources, Finite-Difference Method, Current Tube (Gomel) Method, Model of Magnetic Lens, Model of Beam transporting.

### **Вступ**

Електронні гармати на основі високовольтного тліючого розряду (ВТР) знаходять широке впровадження в різних галузях промисловості, зокрема, в електронній промисловості, приладобудуванні, машинобудуванні та ливарному вироб-

ництві [1–4]. Сьогодні головними галузями застосування таких гармат є високо-продуктивне зварювання виробів із тонкими стінками [1–3], нанесення композитних керамічних плівок та покриттів [5], відпалювання виробів невеликого розміру [1–3], електронно-променевий переплав тугоплавких металів [4]. Широке впровадження електронних гармат ВТР для здійснення перелічених вище технологічних операцій насамперед зумовлено такими несуперечливими перевагами джерел електронів ВТР, як технологічного інструмента над традиційно використовуваними гарматами з розжарюваним катодом та над іншими відомими технологіями зварювання, нанесення покриттів та ливарного виробництва [1–6].

1. Відносна простота конструкції гармати та, відповідно, її невисока вартість.
2. Можливість роботи гармати із різними технологічними газами, зокрема інертними та активними. За таких умов обрання робочого газу зазвичай обумовлюється насамперед вимогами технологічного процесу, який реалізується.
3. Відносна простота вакуумного технологічного обладнання та системи високовольтного живлення гармати.
4. Відносно великий термін служби холодного катоду електронних гармат ВТР.
5. Відносна простота розбирання та збирання електронних гармат ВТР із метою заміни відпрацьованих вузлів, зокрема холодного катоду ВТР.
6. Простота керування струмом електронного пучка газодинамічним способом, через зміну газового потоку в камеру гармати [6], та електричним способом, через запалювання допоміжного розряду в порожнині розрядного проміжку [7].

Проте, незважаючи на вказані переваги, впровадження в промисловість джерел електронів ВТР певною мірою стримується відсутністю їхніх адекватних моделей та відповідних методів автоматизованого проектування. Насамперед це обумовлено складністю та різноманітністю фізичних процесів, які протікають у розрядному проміжку ВТР, серед яких найважливішими є емісія іонів з анодної плазми ВТР, вторинна іонно-електронна емісія з металеві поверхні катоду та елементарні процеси взаємодії заряджених та нейтральних частинок у розрядному проміжку ВТР [1, 2, 7, 8]. Тут головною проблемою є розривність математичних функцій, які описують ці фізичні процеси, та, відповідно, складність використовуваного математичного апарату [7, 8].

Проблема значною мірою спрощується, якщо замість традиційних математичних формул записувати обчислювальні алгоритми через арифметико-логічні вирази, відповідний математичний апарат та засоби його програмної реалізації розглядалися в роботах [9–13].

Отже, метою даної роботи є узагальнений опис запропонованої теорії арифметико-логічних виразів та особливостей її використання для формування математичних моделей джерел електронів високовольтного тліючого розряду.

### **Поняття про рекурентні арифметико-логічні вирази та рекурентні матриці**

У теорії програмування поняття арифметико-логічного виразу є узагальненням поняття логічного виразу, і воно використовується на практиці для розв'язування широкого кола прикладних завдань програмування [9–13]. Насамперед такі вирази широко використовуються для описання аналітичних функцій, кусково-заданих на заздалегідь визначених інтервалах. Надамо відповідне визначення.

Арифметико-логічним виразом називається вираз, який має вигляд [9, 10]:

$$AL(x) = A_1(x) \cdot L_1(x) + A_2(x) \cdot L_2(x) + \dots + A_i(x) \cdot L_i(x) + \dots + A_n(x) \cdot L_n(x), \quad (1)$$

де  $A_i(x)$  — арифметичні вирази,  $L_i(x)$  — логічні вирази. Зрозуміло, що необхідною умовою коректного завдання співвідношення (1) є незалежність числових інтервалів, заданих логічними функціями  $L_1(x)$ ,  $L_2(x)$ , ...,  $L_i(x)$ , ...,  $L_n(x)$ . Ці інтервали не повинні перетинатися. Важливим також є те, що область визначення аргументу арифметико-логічного виразу  $x$  має цілком описуватися сукупністю логічних функцій  $L_1(x)$ ,  $L_2(x)$ , ...,  $L_i(x)$ , ...,  $L_n(x)$ , у противному випадку вираз (3.1) є некоректним із математичної точки зору. Також цілком зрозуміло, що для проведення коректного обчислення виразу (3.1) логічні функції  $L_1(x)$ ,  $L_2(x)$ , ...,  $L_i(x)$ , ...,  $L_n(x)$  повинні мати не булеве, а числове значення. Здебільшого у мовах програмування, зокрема в мові науково-технічних розрахунків MatLab, а також у мовах програмування C та Python, для здійснення ручного перетворення булевого значення логічної змінної на числове може бути використана системна функція **int**, хоча в багатьох випадках таке перетворення проводиться автоматично [9–13].

Наочна графічна інтерпретація наведеного визначення арифметико-логічного виразу (1) показана на рис. 1.

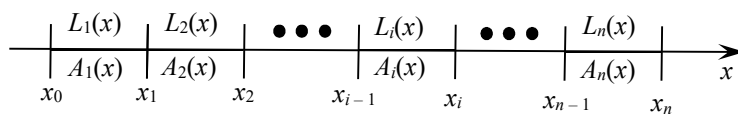


Рис. 1. Наочна ілюстрація загального принципу формування арифметико-логічного виразу (1)

Наведемо деякі приклади арифметико-логічних виразів [9–10]

$$0 \cdot (x < 0) + 1 \cdot (x \geq 0); \quad \exp(-x) \cdot (x < 0) + \exp(x) \cdot (x \geq 0); \\ \sin(x) \cdot (x \leq 0) + \cos(x) \cdot (x > 0); \quad \sin(x) \cdot (x \leq 0) - \sin(x) \cdot (x > 0).$$

Окремим випадком розглянутого поняття арифметико-логічних виразів є рекурентні арифметико-логічні вирази [9–11], які відрізняються тим, що обчислення за співвідношенням (1) проводяться рекурентно. Тобто, значення функції  $AL(x_{n+1})$  обчислюється через значення  $L(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, n, n-1, \dots, n-l)$ . Наприклад, для простого випадку, коли рівень рекурсії дорівнює 1, можна записати наступний рекурентний арифметико-логічний вираз:

$$AL(x_n) = A_1(x_{n-1}) \cdot L_1(x_{n-1}). \quad (2)$$

Приклади формування рекурентних арифметико-логічних виразів типу (2) та їхнього використання для розв'язування прикладних завдань програмування були наведені в роботах [9–11].

Для реалізації більш складних алгоритмів вкладених циклів у роботах [9–11] було введено поняття рекурентної матриці, яка визначається наступним чином. Рекурентною називається матриця, у якій початково задаються один або декілька перших рядків, а кожний наступний рядок обчислюється як функція від

векторів, заданих попередніми рядками. Тобто, у загальному вигляді формулу для визначення рекурентної матриці можна записати наступним чином [9–11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\langle 1 \rangle} &= \mathbf{v}_1, \mathbf{M}_{\langle 2 \rangle} = \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{M}_{\langle n \rangle} = \mathbf{v}_n, \\ \mathbf{M}_{\langle i \rangle} &= \mathbf{F}(i, \mathbf{M}_{\langle i-1 \rangle}, \mathbf{M}_{\langle i-2 \rangle}, \dots, \mathbf{M}_{\langle i-n \rangle})|_{\forall(i > n)}, \end{aligned} \quad (3)$$

де запис  $\mathbf{M}_{\langle i \rangle}$  визначає вектор усіх елементів рядка  $i$  матриці  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{F}$  — функція над векторами  $\mathbf{M}_{\langle i-1 \rangle}, \mathbf{M}_{\langle i-2 \rangle}, \dots, \mathbf{M}_{\langle i-n \rangle}$ , які є попередніми рядками матриці  $\mathbf{M}$ . Така функція в теорії матричного програмування називається вектор-функцією. Надаємо відповідне визначення [9–11].

Вектор-функцією в теорії матричного програмування називається багатовимірна функція, аргументами якої є або попередні рядки матриці, яка формується, або обчислені елементи поточного рядка. Розмірність вектору-функції завжди збігається із кількістю елементів у рядку матриці.

Використання вектор-функцій для запису математичних співвідношень зазвичай значною мірою спрощує постановку та розв'язування завдань логічного програмування та реалізацію чисельних методів для алгоритмів низького та середнього рівня складності [9–11].

### Узагальнена теоретична оцінка ефективності розпаралелювання обчислювальних алгоритмів із використанням їхнього подання через рекурентні матриці та вектор функції

Слід зазначити, що подання рекурентних обчислень у вигляді матриці  $\mathbf{M}$ , заданої рекурентним співвідношенням (3), дозволяє визначити ступінь можливості паралелізації алгоритму. Розглянемо ієрархічні та послідовні зв'язки між елементами матриці, вважаючи, що ієрархічні зв'язки формуються між елементами сусідніх рядків, а послідовні — між елементами поточного рядка [11–13]. Відповідна ієрархічна модель для елемента  $\mathbf{M}(2,2)$ , заданого через функцію  $\mathbf{F}(\mathbf{M}(1,1), \mathbf{M}(1,2), \mathbf{M}(2,1))$ , наведена на рис. 2.

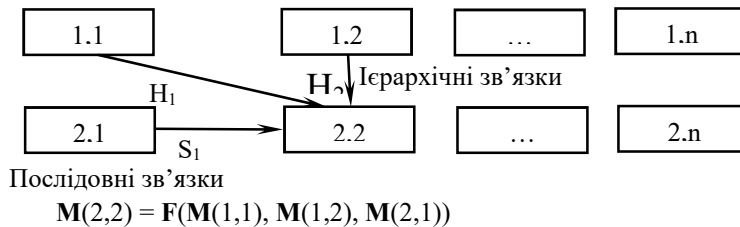


Рис. 2. Ілюстрація ієрархічної моделі матриці  $\mathbf{M}$ , заданої рекурентним співвідношенням

У роботі [11] було показано, що паралелізація обчислених алгоритмів можлива лише для матриць з ієрархічними зв'язками, а також обґрунтований можливий спосіб перетворення послідовних зв'язків до ієрархічних. Для випадку, коли між елементами рекурентної матриці існують лише ієрархічні зв'язки, можна обчислити ступінь паралелізації алгоритму. Припустимо, що між елементами рекурентної матриці  $\mathbf{M}(2, 1)$  та  $\mathbf{M}(2, 2)$  встановлені ієрархічні зв'язки, які формуються в потік  $F$ , який можна розбити на складові частини  $C$ . Будемо

вважати, що час виконання кожної з частин потоку  $C_i$  є відомим та складає  $t_i$ , де  $i = 1 \dots n$ ,  $n$  — кількість складових  $C$  потоку  $F$ . Відповідна ієрархічна модель рекурентної матриці наведена на рис. 3.

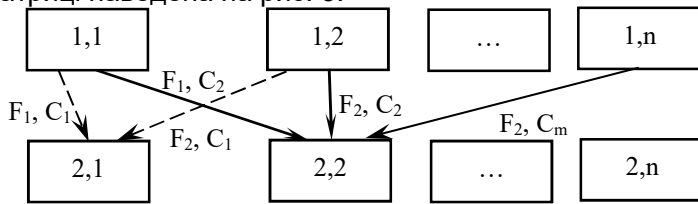


Рис. 3. Ілюстрація ієрархічної моделі рекурентної матриці  $M$  із діленням потоків  $F_1$  та  $F_2$  на складові частини

За умови такого ділення обчислювального потоку на складові частини степінь його паралелізації  $p$  можна обчислити наступним чином [12, 13]:

$$p = \frac{1}{1 - \frac{\max_{i=1 \dots n} N(F_i)t_i}{\sum_{i=1}^n N(F_n)t_i}} \quad (4)$$

У подальших частинах статті розглядатимуться можливості паралелізації алгоритмів фізико-математичної моделі електронних гармат високовольтного тліючого розряду.

### Методологія моделювання джерел електронів високовольтного тліючого розряду

У роботі [8] було показано, що в загальному випадку завдання моделювання джерел електронів високовольтного тліючого розряду можна розглядати як послідовне розв'язування наступних елементарних завдань.

1. Розрахунок геометричної форми та положення плазмової межі в розрядному проміжку.

2. Розрахунок розподілу електричного поля в розрядному проміжку. Під час проведення цього розрахунку плазмова межа розглядається як джерело іонів та як прозорий для електронів електрод із заданим потенціалом [8]. Цей розрахунок проводиться з використанням методу скінченних різниць [12–14].

3. Розрахунок траєкторій заряджених частинок в електричному полі з використанням рівняння електронної оптики [12–14].

4. Розрахунок просторового заряду в розрядному проміжку з урахуванням перезаряджень іонів на атомах залишкового газу. Для розв'язування цього завдання використовується метод трубок струму [12–14].

5. Перерахунок значень потенціалу та траєкторій заряджених часток з урахуванням просторового заряду. Ітераційні розрахунки за пунктами 2–5 проводяться до досягнення необхідної точності за потенціалом [12–14].

6. Розрахунок траєкторій електронів в області анодної плазми та визначення фокальних параметрів електронного пучка з використанням методів дискретної математики та методів розв'язування екстремальних задач [8, 14]. Під час розрахунку траєкторій електронів враховується їх розсіювання на молекулах залишкового газу за моделлю Резерфорда [8, 14].

7. Моделювання транспортування електронного пучка в залишковому газі з урахуванням перепаду тиску між камерою горіння ВТР та технологічною камерою. Розв'язування цього завдання здійснювалося через рішення рівняння траєкторій пучка з урахуванням власного просторового заряду електронів, розкиду швидкостей електронів пучка, іонного фокусування пучка у залишковому газі та розсіювання електронів на молекулах залишкового газу. Для зменшення енергетичних втрат електронного пучка забезпечується його фокусування в полі короткої магнітної лінзи. Головним завданням моделювання на цьому етапі є зменшення енергетичних втрат пучка за умови забезпечення необхідного перепаду тиску між розрядною та технологічною камерою. Алгоритмічні особливості розв'язування цього завдання із наведенням відповідних математичних співвідношень описані в роботі [15].

Особливості використання арифметико-логічних виразів та методів матричного програмування для розв'язування описаних вище завдань, пов'язаних із моделюванням джерел електронів ВТР, будуть розглянуті в подальших частинах статті.

### **Моделювання розподілу електричного поля в електродній системі ВТР та траєкторій заряджених частинок**

Для моделювання розподілу електричного поля в електродній системі ВТР зі сферичним катодом та конічним порожнистим анодом проводилось з використанням методу скінченних різниць. У процесі моделювання положення сферичної межі анодної плазми ВТР відносно катоду визначалось з аналітичних співвідношень, наведених у роботах [8, 12, 14]. Розрахунки положення плазмової межі ґрунтуються на тому, що спочатку воно визначається на основі теорії ВТР для одновимірної моделі розрядного проміжку, а потім перераховується для реальної геометрії електродної системи [8, 14].

Ітераційна формула методу скінченних різниць для циліндричної системи координат з урахуванням особливості граничних умов для електродної системи джерел електронів ВТР може бути записана через арифметико-логічний вираз, визначений співвідношенням (1), наступним чином [12–14]:

$$\begin{aligned}
 m = (l > 0) \cdot (l - 1) + (l = 0) \cdot 1, C_m = 1 + \frac{1}{2m}, D_m = 1 - \frac{1}{2m}, \\
 U_{k,l} = \left( (l > 0) \cdot \frac{\frac{U_{k-1,l} + U_{k+1,l}}{h_r^2} + \frac{D_m U_{k,m} + C_m U_{k,l+1}}{h_z^2}}{\frac{2}{h_r^2} + \frac{2}{h_z^2}} + \right. \\
 \left. + (l = 0) \cdot \frac{\frac{U_{k-1,l} + U_{k+1,l}}{h_r^2} + \frac{4U_{k,l+1}}{h_z^2}}{\frac{2}{h_r^2} + \frac{4}{h_z^2}} \right) \cdot (U_n < U_{k,l} < U_{np.}) + \\
 + (U = U_n) \cdot U_n + (U < U_n) \cdot \left( \frac{kh_r(U_{np.} - U_n)}{r_n - r_a} \right) + (U \geq U_{np.}) \cdot U_{np.},
 \end{aligned} \tag{5}$$

де  $U_{k,l}$  — розраховане значення потенціалу,  $k, l$  — номери вузлів сітки за координатами  $r$  та  $z$  відповідно,  $h_r$  та  $h_z$  — крок дискретизації області

розрахунку значення потенціалу за координатами  $r$  та  $z$  відповідно,  $U_{\text{пр.}}$  — прискорювальна напруга,  $U_{\text{п}}$  — потенціал анодної плазми,  $r_{\text{п}}$  — положення плазмової межі відносно початку системи координат,  $r_{\text{а}}$  — положення основи анода відносно початку системи координат.

Методи розпаралелювання сіткових алгоритмів також існують та розглядаються окремо. Загалом вони ґрунтуються на виділенні окремих підобластей, розташованих біля електродів, які обираються досить далеко одна від одної та, внаслідок, вони не пов'язані між собою. Тоді розподіл потенціалу в таких підобластях можна вважати незалежним та розраховувати його одночасно. Після проведення таких розрахунків в усіх підобластях, розташованих біля електродів, здійснюються алгоритмічні процедури, пов'язані зі згладжуванням та зшиванням отриманих окремих розв'язків. Відповідні алгоритми та математичні співвідношення наведені в роботі [16]. Залежно від форми підобластей, які розглядаються, для таких алгоритмів також можна записати арифметико-логічні вирази, що значно спрощує їхню програмну реалізацію.

Розрахований розподіл електричного поля в електродній системі ВТР із поперечним діаметром катода 180 мм та радіусом сфери катода 80 мм, наведений на рис. 4. Для проведення комп'ютерних розрахунків було використане арифметико-логічне співвідношення (5).

Для розрахунку траєкторій заряджених частинок в електродних системах ВТР було використане електронно-оптичне рівняння траєкторій [8, 12–14]:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{\left( \frac{\partial U(r,z)}{\partial r} - \frac{\partial U(r,z)}{\partial z} \cdot \frac{dr}{dz} \right) \cdot \left( 1 + \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 \right)}{\left( \sqrt{\frac{q_s (U(r,z) - U_{\text{м}})}{2m_s}} + 2(U(r,z) - U_{\text{м}}) \right)}. \quad (6)$$

з початковими умовами [17]

$$\left( \frac{dr}{dz} \right) \Big|_{z=0} = v_0, r \Big|_{z=0} = r_0, \quad (7)$$

де  $m_s$  — маса частинки, яка рухається,  $q_s$  — її заряд,  $U_{\text{м}}$  — потенціал межевої поверхні. Розв'язування системи рівнянь (6, 7) для 500 траєкторій іонів та електронів здійснювалося чисельно з використанням методу Рунге-Кутта четвертого порядку [17], обчислювальна схема для якого наведена в роботі [11]. Отримані в результаті моделювання залежності розподілу густини струму електронного пучка в його фокальній площині наведені на рис. 5.



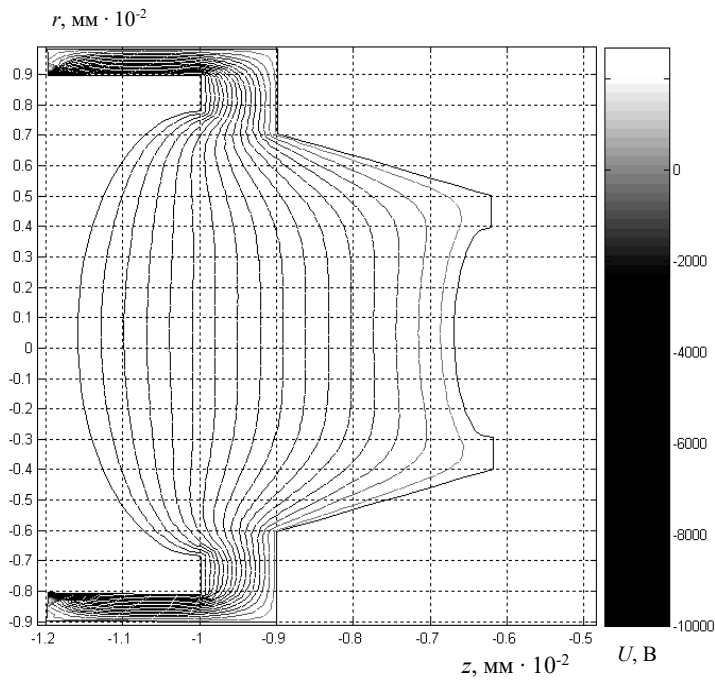


Рис. 4. Результат моделювання розподілу електричного поля в електродній системі ВТР із використанням співвідношення (5)

### Моделювання розподілу магнітного поля короткої фокусувальної лінзи та процесу транспортування електронного пучка

Можливість використання арифметико-логічних виразів для реалізації моделі руху електрона в короткій фокусувальній магнітній лінзі була розглянута в роботах [9, 10, 12]. Відповідна рекурентна матриця має наступний вигляд [9, 10, 12, 18]:

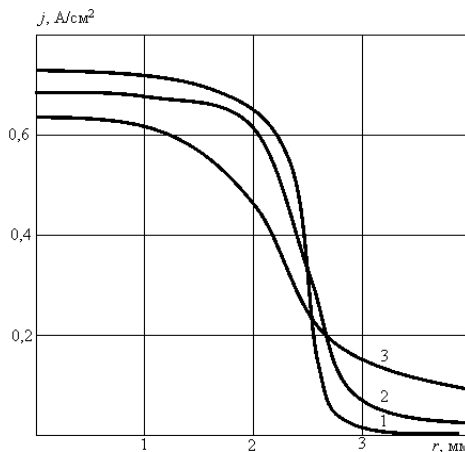


Рис. 5. Розподіл густини струму у фокальній площині електронного пучка  
Тиск у розрядній камері – 3,5 Па, прискорювальна напруга: 1 – 20 кВ; 2 – 15 кВ; 3 – 10 кВ

$$\begin{bmatrix} z_0 & B_{z0}(z_0) & \left(\frac{dr}{dz}\right)_0 & \theta_0 & r_0 \\ z_1 & B_{z0}(z_1) & \left(\frac{dr}{dz}\right)_1 & \theta_1 & r_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & B_{z0}(z_n) & \left(\frac{dr}{dz}\right)_n & \theta_n & r_n \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Вектор-функція для ітераційного розрахунку рядків матриці (8) записується у вигляді [9, 10, 12, 18]:

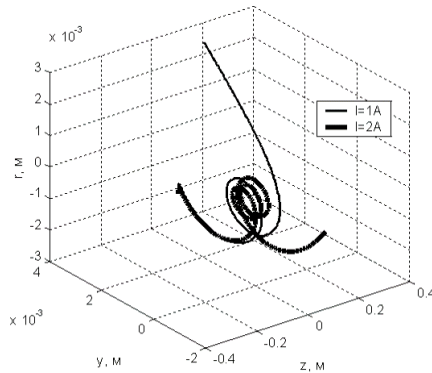
$$\begin{aligned} \left[ z_n, (B_{z0})_n, \left(\frac{dr}{dz}\right)_n, \theta_n, r_n \right] = & \left[ z_{n-1} + dz, \frac{\mu_0 I N R^2}{2\sqrt{(z_{n-1}^2 + R^2)^3}}, \right. \\ & \left. \left(\frac{dr}{dz}\right)_{n-1} - \frac{erB_{z0}^2(z_{n-1})dz}{8mU_{np}}, \theta_{n-1} - \sqrt{\frac{\eta}{2U_0}} \cdot \frac{B_{z0}(z_{n-1})dz}{\cos\left(\frac{dr}{dz}\right)_{n-1}}, \right. \\ & \left. r_{n-1} + dz \left(\frac{dr}{dz}\right)_{n-1} + \frac{erB_{z0}^2(z_{n-1})(dz)^2}{16mU_{np}} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

де  $z$  — поздовжня координата,  $r$  — поперечна координата,  $B_{z0}$  — значення індукції магнітного поля на осі симетрії лінзи,  $U_{np}$  — прискорювальна напруга,  $I$  — струм лінзи,  $N$  — кількість витків,  $R$  — радіус лінзи,  $\mu_0$  — магнітна стала,  $v$  — швидкість руху електрона,  $\alpha$  — кут вльоту електрона в площину дії магнітного поля лінзи,  $\theta$  — кут, який описує положення електрона в циліндричній системі координат,  $n$  — номер поточної ітерації.

На рис. 6 наведені результати моделювання траєкторій електрона, отримані з використанням рекурентних співвідношень (8, 9). Графіки, які представлені на рис. 6, побудовані в тривимірній декартовій системі координат.

Програмний код, який реалізує розрахунки за рекурентним співвідношенням (16), написаний мовою програмування системи науково-технічних розрахунків MatLab, наведений у роботах [10, 18].

У роботі [12] авторами була проведена теоретична оцінка можливості розпаралелювання завдання моделювання процесу транспортування короткофокусного електронного пучка в еквіпотенціальному каналі та мінімізації втрат енергії пучка через пошук оптимальної геометрії каналу. Для розв'язування цієї проблеми поставлене завдання було поділене на 4 окремі задачі [12].



а)

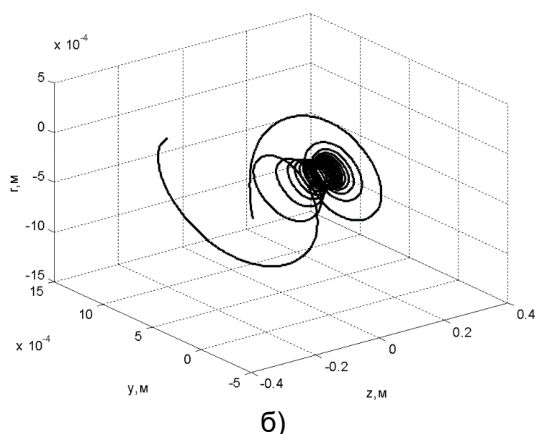


Рис. 6. Результати моделювання траєкторій руху електрона в полі короткої фокусувальної магнітної лінзи для параметрів моделі  $N=1000$ ,  $R = 0,05$  м,  $U_{пр} = 10$  кВ. а –  $I = 1$  А та  $I = 2$  А, б –  $I = 10$  А

1. Розрахунок газового потоку в каналі транспортування, який необхідний для забезпечення заданого перепаду тиску між розрядною та технологічною камерою.

2. Розрахунок магнітного поля фокусувальної лінзи та траєкторій електронів у лінзі. Спосіб розв'язування цієї задачі з використанням арифметико-логічних виразів був описаний вище.

3. Моделювання траєкторій електронів пучка в області дрейфу з урахуванням впливу залишкового газу та розкиду швидкостей електронів пучка. Відповідні аналітичні співвідношення наведені в роботі [15].

4. Розрахунок енергетичних втрат пучка.

У роботі [12] було показано, що потенціально можливий рівень розпаралелювання поставленого завдання, яке розв'язується ітераційно для елементарних ділянок каналу, складає 1,13. Теоретичні оцінки проводились із використанням співвідношення (4). Проте, з урахуванням того, що розв'язування завдання оптимізації потребує перегляду великої кількості варіантів геометрії каналу, можна розпаралелювати розрахунки цих варіантів. Зазвичай для пошуку оптимальної геометрії системи транспортування електронного пучка та параметрів фокусувальних магнітних лінз переглядалися понад 1000 варіантів [12]. Вибір оптимального варіанту здійснювався автоматично з використанням методів розв'язування екстремальних задач. Також були розроблені практичні рекомендації щодо автоматизованого пошуку можливих ефективних способів оптимізації за отриманими результатами розрахунків, які розглядалися в роботі [1].

## Висновки

У статті проаналізовані можливості використання рекурентних арифметико-логічних виразів та матричних співвідношень для формування комплексної моделі джерел електронів ВТР на різних рівнях ієрархії. Такий підхід дозволяє систематизувати математичний апарат, зокрема чисельні методи та методи дискретної математики, та значною мірою спрощує вирішення завдань

програмування з використанням ефективних засобів сучасних мов програмування та комп'ютерних САПР. У багатьох випадках використання засобів матричного програмування спрощує написання програмного коду, особливо якщо він пишеться програмістами-професіоналами, які володіють відповідним математичним апаратом. Це дозволяє писати складні програмні комплекси за невеликий час, тобто, значно підвищується ефективність роботи програмістів. Іншою перевагою арифметико-логічних та матричних способів подання математичних співвідношень є те, що вони записуються у формі, близькій до відповідних лінгвістичних конструкцій багатьох мов програмування, зокрема до оператора присвоєння. Крім цього, подання обчислювальних алгоритмів у матричній формі дозволяє робити попередні теоретичні оцінки можливості їхнього розпаралелювання з використанням співвідношення (4).

Аналіз можливостей застосування методів матричного програмування та рекурентних арифметико-логічних виразів для сформульованих у роботі завдань траєкторного аналізу є предметом для окремого наукового дослідження.

Представлений у статті матеріал може бути вельми цікавим для програмістів, а також для інженерів-технологів, які займаються розробкою та впровадженням у виробництво сучасного електронно-променевого обладнання з використанням засобів комп'ютерного моделювання.

### Література

1. Новиков А.А. Источники электронов высоковольтного тлеющего разряда с анодной плазмой / А.А. Новиков. — М.: Энергоатомиздат, 1983. 96 с.
2. Плазменные процессы в технологических электронных пушках / М.А. Завьялов, Ю.Е.Крейндель, А.А. Новиков, Л.П. Шантурин. — М.: Атомиздат, 1989. 256 с.
3. Denbnovetsky S.V. High voltage glow discharge electron sources and possibilities of its application in industry for realising of different technological operations. / S.V. Denbnovetsky, V.G. Melnyk, I.V. Melnyk. — IEEE Transactions on plasma science. — Vol. 31, #5, October, 2003. — P. 987–993.
4. Ладохин С.В., Электронно-лучевая плавка в литейном производстве / С.В. Ладохин, Н.И. Левицкий, В.Б. Чернявский, Т.В. Лапшук, В.Г. Шмигидин, Л.А. Кравчук, А.С. Гладков — Киев, «Сталь», 2007. — 605 с.
5. Mattausch G. Gas discharge electron sources — proven and novel tools for thin-film technologies. / G. Mattausch, B. Zimmermann, F. Fietzke, J.P. Heinss, B. Graffel, F. Winkler, F.H. Roegner, C. Metzner. — Electrotechnics and Electronics (E+E), Vol. 49, no. 5–6, 2014. — P. 183–195.
6. Denbnovetsky S.V. Model of control of glow discharge electron gun current for microelectronics production applications. / S.V. Denbnovetsky, V.I. Melnyk, I.V. Melnyk, B.A. Tugay. Proceedings of SPIE. Sixth International Conference on «Material Science and Material Properties for Infrared Optoelectronics», 2003, Vol. 5065. — P. 64–76.
7. Мельник И.В. Обобщенная методика моделирования триодных источников электронов высоковольтного тлеющего разряда / И.В. Мельник. — Электронное моделирование, 2013, т. 35, № 4. — С. 93–107.
8. Мельник И.В., Методика моделирования технологических источников электронов высоковольтного тлеющего разряда. / И.В. Мельник, С.Б. Тугай. — Электронное моделирование, 2010, т. 32, №6. — С. 31–43.

9. Мельник І.В. Система науково-технічних розрахунків MatLab та її використання для розв'язання задач із електроніки: навчальний посібник у 2-х томах. Т. 1. Основи роботи та функції системи. / І.В. Мельник. — К.: Університет «Україна», 2009. — 507 с.

10. Мельник І.В. Система науково-технічних розрахунків MatLab та її використання для розв'язання задач із електроніки: навчальний посібник у 2-х томах. Т. 2. Основи програмування та розв'язання прикладних задач. / І.В. Мельник. — К.: Університет «Україна», 2009. — 327 с.

11. Мельник И.В., Анализ алгоритмических особенностей вычисляемых матриц при решении задач программирования средствами матричных макроопераций. / И.В. Мельник, Н.В. Шинкаренко. — Электронное моделирование, 2011, т. 33, №2. — С. 81–92.

12. Luntovskyy A.O. Simulation of Technological Electron Sources with Use of Parallel Computing Methods / A.O. Luntovskyy, I.V. Melnyk. — XXXV IEEE International Scientific Conference «Electronic And Nanotechnology (ELNANO)». Conference Proceedings. — Kyiv, Ukraine, April 21–24, 2015. — P. 454–460.

13. Мельник И.В. Использование параллельных вычислений для моделирования технологических газоразрядных источников электронов. / А.О. Лунтовский, И.В. Мельник. — Электронное моделирование, 2016, т. 38, № 3. — С. 5–21.

14. Мельник И.В. Численное моделирование распределения электрического поля и траекторий частиц в источниках электронов на основе высоковольтного тлеющего разряда. / И.В. Мельник. — Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника, 2005, т. 48, №6. — С. 61–71.

15. Денбновецкий С.В. Моделирование транспортировки короткофокусных электронных пучков из низкого в высокий вакуум с учетом разброса тепловых скоростей электронов. / С.В. Денбновецкий, В.И. Мельник, И.В. Мельник, Б.А.Тугай. — Прикладная физика, 2010, №3. — С. 84–90.

16. Свешников В.М., О распараллеливании решения краевых задач на квазиструктурированных сетках. / В.М. Свешников, Б.Д. Рыбдылов. Вестник уральского государственного университета, 2013, т. 2, 3. — С. 63–72.

17. Бронштейн И.Н. Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов. / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. — М.: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1986. — 723 с.

18. Мельник И.В. Анализ возможностей использования матричных макроопераций системы MatLab при решении прикладных задач. / И.В. Мельник. — Электронное моделирование, 2009, №3. — С. 37–51.

## References

1. Novikov A.A. Istochniki elektronov vysokovoltnogo tleyuschego razryada s anodnoy plasmoy. / A.A. Novikov. — Moscow, Energoatomizdat, 1983. — 96 s.

2. Plazmennyye Protsessy v Technologicheskikh Electronnykh Pushkah / M.A. Zavialov, Yu.E. Kreyndel, A.A. Novikov, L.P. Shanturin. — Moscow, Energoatomizdat, 1989. — 256 s.

3. Denbnovetsky S.V. High voltage glow discharge electron sources and possibilities of its application in industry for realising of different technological

operations. / S.V. Denbnovetsky, V.G. Melnyk, I.V. Melnyk. — IEEE Transactions on plasma science. — Vol. 31, #5, October, 2003. — P. 987–993.

4. Ladokhin, S.V. Elektronno-luchevaya plavka v liteynom proizvodstve / N.I. Levitskiy, V.B. Chernyavsky, et al. — Kiev, Stal, 2007. — 605 s.

5. Mattausch G. Gas discharge electron sources — proven and novel tools for thin-film technologies. / G. Mattausch, B. Zimmermann, F. Fietzke, J.P. Heinss, B. Graffel, F. Winkler, F.H. Roegner, C. Metzner. — Electrotechnics and Electronics (E+E), Vol. 49, no. 5–6, 2014. — P. 183–195.

6. Denbnovetsky S.V. Model of control of glow discharge electron gun current for microelectronics production applications. / S.V. Denbnovetsky, V.I. Melnyk, I.V. Melnyk, B.A. Tugay. Proceedings of SPIE. Sixth International Conference on «Material Science and Material Properties for Infrared Optoelectronics», 2003, Vol. 5065. — P. 64–76.

7. Melnyk I.V. Obobshchennaya metodika modelirovaniya triodnyh istochnikov elektronov vysokovoltного tleischego razryada. / I.V. Melnyk. — Elektronnoe modelirovanie, 2013, t. 35, no. 4. — S. 93–107.

8. Melnyk I.V., Tuhai S.B. Metodika modelirovaniya istochnikov elektronov vysokovoltного tleyushego razryada. / I.V. Melnyk, S.B. Tugay. — Elektronnoe modelirovanie, 2010, t. 32, no. 6. — S. 31–43.

9. Melnyk I.V. Sistema naukovu-technichnyh rozrahunkiv MatLab ta ii vykorastahha dlya rozvyazannya zadach iz elektroniky. Navchalnyy posibnyk u 2-h tomah. Tom 1. Osnovy roboty ta funkciy systemy / I.V. Melnyk. — Kyiv, University «Ukraine», 2009. — 507 s.

10. Melnyk I.V. Sistema naukovu-technichnyh rozrahunkiv MatLab ta ii vykorastahha dlya rozvyazannya zadach iz elektroniky. Navchalnyy posibnyk u 2-h tomah. Tom 2. Osnovy programuvannya ta rozvyazannya prykladnyh zadach / I.V. Melnyk. — Kyiv, University «Ukraine», 2009. — 327 s.

11. Melnyk I.V. Analiz algoritmicheskikh osobennostey vychislaemykh matric pri reshenii zadach programmirovaniya sredstvami matrichnyh makrooperatsiy / I.V. Melnyk, N.V. Shinkarenko. — Elektronnoe modelirovanie, 2011, Vol. 33, no. 2. — S. 31–43.

12. Luntovskyy A.O. Simulation of Technological Electron Sources with Use of Parallel Computing Methods / A.O. Luntovskyy, I.V. Melnyk. — XXXV IEEE International Scientific Conference «Electronic And Nanotechnology (ELNANO)». Conference Proceedings. — Kyiv, Ukraine, April 21–24, 2015. — P. 454–460.

13. Melnyk I.V. Ispolzovanie paralelnykh vychisleniy dlya modelirovaniya technologicheskikh gazorozryadnykh istochnikov elektyronov / I.V. Melnyk, A.O. Luntovskyy. — Elektronnoe modelirovanie, 2015, t. 38, no. 3. — S. 5–21.

14. Melnyk I.V. Numerical simulation of electric field distribution and particles trajectories in the electron sources based on high voltage glow discharge. / I.V. Melnyk. — Radioelectronics and Communication Systems, 2005, vol. 48, no. 6. — P. 61–71.

15. Denbnovetsky S.V. Modelirovanie transportirovki korotkofokusnykh elektronnykh puchkov iz nizkogo v vysokiy vacuum s uchetom razbrosa teplovykh skorostey elektronov. / S.V. Denbnovetsky, V.I. Melnyk, I.V. Melnyk, B.A. Tugay. — Prikladnaya Fizyka, 2010, no. 3. — S. 84–90.

16. Sveshnikov V.M. O rasparaleliavonii resheniya kraevykh zadach na kvazi-strukturirovanykh setkah. / V.M. Sveshnikov, B.D. Rybdylov. — Vestnik Uralskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2013, vol. 2, 3. — S. 63–72.

17. Bronshtein I.N. Spravochnik po matematike. Dlia inzhenerov i uchastihsvya vtuzov. / I.N. Bronshtein, K.A. Semendiaev. — Moscow, Nauka, Glavnaya Redaktsiya Fiziko-Matematicheskoy Literatury, 1986. — 723 s.

18. Melnyk I.V. Analiz vozmozhnostey ispolzovaniya matrichnykh makrooperatsiy sistemy MatLab pri reshenii prikladnykh zadach. / I.V. Melnyk. — Elektronnoe modelirovanie, 2009, t. 31, no. 3. — P. 37–51.