

УДК 517.929.7

В. П. ЛЯШЕНКО, Т. А. ГРИГОРОВА

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

ЗАГАЛЬНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСІВ ОБРОБКИ ВИРОБІВ У ПОРОШКОВІЙ МЕТАЛУРГІЇ

С единой точки зрения рассмотрены математические модели тепловых процессов, которые протекают во время спекания, прессования, отжига и производства проволоки методами порошковой металлургии. В основе математических моделей рассматриваются нелинейные начально-краевые задачи для линейного или нелинейного уравнения теплопроводности. При решении задач для определения параметров управления нагревом рассматривается нелокальное интегральное условие. Предложены алгоритмы решения сформулированных задач.

V. P. LYSHENKO, T. A. HRYHOROVA

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

THE GENERAL MODEL OF PROCESSING PRODUCTS IN POWDER METALLURGY

Annotation

From the single point of view the mathematical models of thermal processes, which flow during sintering, pressing, annealing and wire production the methods of powder metallurgy, are considered. In basis of mathematical models nonlinear initially boundary problems are examined for linear or nonlinear equation of heat conductivity. At the problems for determination of actuating error heating a nonlocal integral condition is examined. The algorithms of solution of the formulated problems are offered.

Основні технологічні процеси у порошковій металургії пов'язані зі спіканням, пресуванням та термічною обробкою. Під час формування виробу при підвищених температурах відбувається інтенсивна дифузія домішок та пластифікатора, що значно впливає на фізико-механічні властивості готової продукції. Для багатьох технологічних процесів характерною особливістю є обробка рухомих об'єктів, наприклад виробництво дроту. Термічна обробка у цьому випадку може використовуватися в комплексі з пластичною деформацією [1-5]. Окрім звичайних методів термічної обробки застосовується термоциклічна та імпульсна обробка, яка особливо ефективна під час отримання надтонкого дроту із застосуванням технології електропластичного деформування [4,7]. Одержати повну необхідну інформацію про температурний розподіл та розподіл концентрації речовини за допомогою вимірів під час технологічного процесу буває досить складно, а іноді неможливо. Досліджуючи відповідні математичні моделі, аналізуючи отримані результати та порівнюючи їх з натурними експериментами дозволяє побічно контролювати температурні розподіли і керувати технологічними процесами. У багатьох випадках математичні моделі краще відображають процеси нагрівання та зміну концентрації домішок ніж натурні замірювання температури.

У якості математичних моделей розглядаються початково-крайові задачі для лінійного та квазілінійного рівняння теплопроводності у циліндричній системі координат (r, z, φ, t) . Особливостями таких моделей є те, що задачі, які лежать у їх основі, описують теплові процеси рухомого та нерухомого середовища за допомогою різних видів рівняння теплопроводності.

В основу математичних моделей процесів термодифузії покладені лінійні та нелінійні крайові та нелокальні задачі для рівняння теплопроводності та дифузії з нелінійними крайовими умовами на межах області.

Оскільки більшість температурних розподілів, що виникають під час нагрівання виробів циліндричної форми не залежать від координати φ , то частинною похідною у рівнянні по цій змінній можна знехтувати. Дріт та інші вироби циліндричної форми розглядаються у вигляді рухомого або нерухомого циліндричного ізотропного середовища зі сталими теплофізичними характеристиками та параметрами з довжиною зони нагрівання L . Досліджуються математичні моделі температурних полів у яких діють як зовнішні так і внутрішні джерела тепла. Внутрішні джерела, які відображаються у вигляді фінітної функції тепла $W(z, t, T)$ у рівнянні, спричинені дією електричного струму, що пропускається через середовище або індукується у ньому. Зовнішні спричиняються теплообміном з навколишнім середовищем за законами Ньютона та Стефана-Больцмана і представлені у вигляді граничних умов першого, другого або третього роду.

Метою дослідження є узагальнення математичних моделей, що описують технологічні процеси спікання, пресування та різні види термічної обробки виробів з порошкових матеріалів. Це досягається за рахунок представлення їх у вигляді єдиної моделі термодифузії, яка включає в себе початково-крайові задачі для рівнянь теплопроводності та дифузії з діючими внутрішніми або зовнішніми джерелами тепла

та відповідними крайовими умовами, що дозволить знайти єдиний розв'язок для подальшого комп'ютерного моделювання.

Математична модель теплових процесів та дифузії речовини під час відпалів та спікання виробів із порошкових матеріалів розглянута як розв'язок системи диференціальних рівнянь теплопровідності та дифузії з відповідними крайовими умовами, що пов'язують між собою ці два рівняння [5].

$$\begin{aligned} c_1 \rho_1 T_t - \lambda \Delta T + c_2 \rho_2 \operatorname{div}(T \bar{v}_P) &= W(T, P, t), \quad P \in \Omega, \quad t > 0, \\ m C_t - m D \Delta C + \operatorname{div}(C \bar{v}_P) &= -f(C, P), \quad P \in \Omega, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

У найбільш повній постановці ці задачі пов'язані граничними умовами та співвідношенням між градієнтами концентрації та температури

$$J(C, T) = -D \chi \left(\nabla C + \frac{k_T}{T} \nabla T \right), \quad (2)$$

де $D, m, c_i, \rho_i, \lambda, \chi, k_T$ – сталі величини, зокрема $0 < \chi < 1, 0$, P – координата.

Математична модель термодифузії температурного поля циліндричної області $\Omega \times t: \{0 < r < r_0, 0 < z < L, t > 0\}$, має вигляд однієї із крайових задач для наступного неоднорідного нестационарного нелінійного рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + v(t) \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(T, P, t). \quad (3)$$

У математичних моделях температурного поля нерухомої циліндричної області рівняння (3) $v(t) = 0$. Якщо коефіцієнт теплопровідності $\lambda(T)$ лінійно залежить від температури, то нелінійне рівняння (1) перетворенням Кірхгофа [4] можна звести до лінійного. Подальше спрощення рівняння, шляхом застосування інтегрального перетворення (усереднення по радіусу), можна проводити коли температурне поле не залежить від зміни радіуса r та розглядається друга або третя крайова задача по радіусу [3-7]. Таке інтегральне перетворення дозволяє зменшити розмірність рівняння. Якщо задача стаціонарна або квазістаціонарна, то ми приходимо до лінійної або нелінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку.

В залежності від типу обробки і джерел тепла, які діють на заготовку, змінюється функція джерела тепла $W(T, P, t)$. Якщо розглядаються внутрішнє джерело тепла вона має наступний вигляд $W(T, t) = f_1^i(t) f_2(T)$, якщо зовнішнє $W(T, P, t) = 0$ [3-7]. Для кожного типу обробки змінюється представлення функцій $f_1^i(t)$ та $f_2(T)$. У випадку нерухомої заготовки для процесів пресування,

спікання та відпалу $f_2(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}$, а $f_1^i(t) = 1$. У випадку, якщо у якості заготовки

розглядається надтонкий дріт під час електропластичної обробки [7] $f_1^i(t)$ мають вигляд

$$f_1^1(t) = \begin{cases} m \frac{t}{t_0} - mn, & nt_0 \leq t \leq \left(n + \frac{1}{m}\right) t_0; \\ 0, & \left(n + \frac{1}{m}\right) t_0 \leq t \leq (n+1) t_0, \quad t < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Якщо розглядається термоциклічна обробка нерухомої заготовки [4,7] у пресформі окрім одноциклових відпалів, тоді функції $f_1^i(t)$ мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} f_1^1(t) &= 0,5 \left(1 - \cos \frac{t}{t_0} \right); & f_1^2(t) &= \left| \sin \left(\frac{t}{t_0} \right) \right|; \\ f_1^3(t) &= \begin{cases} \frac{t}{t_0} - 2n, & 2nt_0 < t < (2n+1)t_0; \\ -\frac{t}{t_0} + 2(n+1), & (2n+1)t_0 < t < (2n+2)t_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

де t_0 – час одного термоциклу.

Якщо досліджується температурне поле для нерухомого або рухомого середовища, що розігрівається постійно діючими внутрішніми джерелами тепла, то до рівняння (3) додаються крайові умови, що відображають взаємодію поверхні циліндра з навколишнім середовищем

$$T(r, z, 0) = T_0; \quad (6)$$

$$T(r, 0, t) = T_1(t), \quad T(r, L, t) = T_2(t); \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \lambda(T) \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \pm [\alpha f_1^i(t)(T_c - T) + \varepsilon f_1^i(t)(T_c^4 - T^4)], \quad (8)$$

де $\alpha, \varepsilon, \sigma$ – коефіцієнт тепловіддачі, степінь чорноти та постійна Стефана-Больцмана, r_0 – радіус, $T_c > T_0$. Коли бічна поверхня циліндра втрачає тепло з поверхні, то у правій частині умови (8) слід розглядати перед квадратними дужками знак мінус. Коли циліндрична поверхня розігрівається за рахунок теплообміну через бічну поверхню в умові (8), у правій частині слід поставити знак плюс. Коли середовище розігрівається одночасно постійно діючими внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла, то в умові (8) перед квадратними дужками слід розглядати знак плюс.

Більш ширша математична модель термодифузії температурного поля гарячого пресування та спікання приводить до розв'язання крайової задачі для двошарового циліндра. Зовнішній циліндр це металева або графітова прес-форма, яка може розігріватися як внутрішніми так і зовнішніми джерелами тепла, а внутрішній циліндр – це порошок або холодно спресований виріб, який розігрівається за рахунок передачі тепла теплопровідністю або конвективного теплообміну від зовнішнього циліндра [5]. Для циліндричної області $\Omega \times t: \{0 < r < r_0, 0 < z < L, t > 0\}$, вона має вигляд системи, де перше рівняння описує температурне поле циліндричної прес-форми, а друге – температурне поле холодно спресованого виробу.

$$\lambda_{1,2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1,2}}{\partial r} \right) + \lambda_{1,2} \frac{\partial^2 T_{1,2}}{\partial z^2} - c_{1,2} \rho_{1,2} \frac{\partial T_{1,2}}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T_{1,2})}{S^2}, & r - \Delta \leq r < r_0; \\ 0, & 0 < r < r_0 - \Delta, \end{cases} \quad (9)$$

де S – площа кільця.

Крайові умови визначаються законом теплової взаємодії між навколишнім середовищем та поверхнею прес-форми або виробу

$$0 < z < l, \quad T_{1,2} > 0, \quad (10)$$

$$T_{1,2}(r, z, 0) = T_0, \quad (10)$$

$$T_{1,2}(r, 0, t) = T_0, \quad T_{1,2}(r, l, t) = T_l, \quad (11)$$

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=r_0} + \alpha_1 (T_1 - T_c) + \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_c^4) = 0, \quad (12)$$

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=r_0-\Delta-0} + \alpha_2 (T_1 - T_c) + \varepsilon_2 \sigma (T_1^4 - T_c^4) = 0, \quad (13)$$

$$\lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=r_0-\Delta+0} - \alpha_2 (T_2 - T_{cl}) - \varepsilon_2 \sigma (T_2^4 - T_{cl}^4) = 0, \quad \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (14)$$

Математична модель термодифузії, що описує зміну концентрації пластифікатора і легкоплавких домішок у виробі має вигляд

$$D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) - v_z \frac{\partial C}{\partial z} - v_r \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{\partial C}{\partial t} = f(T, C, P), \quad (15)$$

де $f(T, C, P) = \gamma T(r, z, t)$, $0 < \gamma < 1, 0$.

Крайові умови є умовами зміни концентрації пластифікатора та легкоплавких домішок у виробі, що спікається.

$$D \left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{r=r_0+\Delta-0} = -\chi \cdot \left(\beta C + \frac{k_T D}{T_2} \left(\frac{\alpha_2}{\lambda} (T_2 - T_{cl}) + \frac{\varepsilon_2 \sigma D}{\lambda} (T_2^4 - T_{cl}^4) \right) \right), \quad \left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (16)$$

$$D \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0} - \beta C = 0, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=l} + \beta C = 0. \quad (17)$$

Крайова умова (16) визначає вплив температури на зміну концентрації домішок.

Розв'язки крайових задач, що моделюють процеси термоциклічної обробки, навіть після застосування інтегрального перетворення по одній із координат можна отримати лише чисельними методами. Найбільш ефективним чисельним методом розв'язку таких задач є застосування неявних різницевих схем, зокрема схеми Кранка-Ніколсон і схему змінних напрямів Дугласа-Ганна [8].

Розглянемо розв'язок задачі термодифузії для двошарового циліндра. Він складається з кількох етапів. Спочатку знаходимо температурний розподіл у зовнішньому циліндрі, а далі переходимо до розв'язання задачі у внутрішньому циліндрі. Таким чином маємо дві початково-крайові задачі:

– одновимірну відносно температури $T(z, t)$ для визначення температурного поля на границі зовнішнього і внутрішнього циліндрів

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1 S}{2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - \frac{c_1 \rho_1 S \partial T_1}{2 \partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta}{2S} T_1 + \frac{I^2 \rho_0}{2S} + r_0 \left[\alpha(T_1 - T_c) + \varepsilon \sigma (T_1^4 - T_c^4) \right] + \\ + \frac{\lambda_2 S_1}{2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - \frac{c_2 \rho_2 S_1 \partial T_1}{2 \partial t} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$v(0, t) = v(l, 0) = T_0, \quad v(l, t) = T_l, \quad (19)$$

де $S_1 = \pi(r_0 - \Delta)^2$;

– двовимірну щодо визначення температурного розподілу та концентрації пластифікатора у внутрішньому циліндрі

$$\lambda_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0, \quad (20)$$

$$0 < r < r_0 - \Delta, \quad 0 < z < l, \quad t > 0;$$

$$D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) - v_z \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial t} = f(T, C, P), \quad (21)$$

$$T_2(r, z, 0) = T_0, \quad (22)$$

$$T_2(r, 0, t) = T_0, \quad T_2(r, l, t) = T_l. \quad (23)$$

Крайові задачі (18)-(19) і (20)-(23) є нелінійними завдяки нелінійності у граничних умовах, але початкові функції – є гладкими, тому віддається перевага використанню різницевої схеми Кранка-Ніколсон, яка має другий порядок точності. Але з точки зору комп'ютерного моделювання використання різницевої схеми Кранка-Ніколсон для крайових задач (18)-(19) і (20)-(23) не є доцільним, тому що задача (18)-(19) є одновимірною, а (20)-(23) двовимірною. Для розв'язку задачі (20)-(23) обираємо загальну неявну схему змінних напрямів Дугласа-Ганна, алгоритм якої можна описати за допомогою послідовності рішень, що апроксимуються u^{*n+1} , u^{**n+1} і т.д. рівняння Кранка-Ніколсон [6] та на кожному кроці розщеплювання, задача зводиться до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь з трьохдіагональною матрицею. Лінійаризацію нелінійної граничної умови виконуємо згідно методу Ньютона – Рафсона – Канторовича [9].

Кінцево-різницева схема Кранка-Ніколсон для задачі (18)-(19) в області $\bar{\Omega} \times t \quad \{0 \leq z \leq l, \quad t > 0\}$ з інтервалами: $h = l/M$, $\Delta t = t_0/j_0$ має вигляд

$$a^2 \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{2h^2} + Au_i^{j+1} + C(u_i^{j+1})^4 - B,$$

де

$$A = \left(\frac{I^2 \rho_0 \beta}{S(\lambda_1 S + \lambda_2 S_1)} + \frac{2r_0 \alpha}{(\lambda_1 S + \lambda_2 S_1)} \right), \quad a^2 = \frac{c_1 \rho_1 S + c_2 \rho_2 S_1}{(\lambda_1 S + \lambda_2 S_1)}, \quad C = \frac{2r_0 \varepsilon \sigma}{(\lambda_1 S + \lambda_2 S_1)},$$

$$B = -\frac{I^2 \rho_0}{S(\lambda_1 S + \lambda_2 S_1)} + \frac{2r_0(\alpha T_c + \varepsilon \sigma T_c^4)}{(\lambda_1 S + \lambda_2 S_1)}.$$

Кінцево-різницева схема Дугласа-Ганна для розв'язку задачі (20)-(23) в області $\bar{\Omega} \times t \quad \{0 \leq r \leq r_0 - \Delta, \quad 0 \leq z \leq l, \quad t > 0\}$ з інтервалами $h_1 = (r_0 - \Delta)/N$, $h_2 = l/M$, $\Delta t = t_0/j_0$ має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{u_{n,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^j}{\Delta t/2} &= \frac{\lambda_2}{rc_2\rho_2} \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} + \\ &+ \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n,m-1}^j - 2u_{n,m}^j + u_{n,m+1}^j}{h_2^2}, \\ \frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1/2}}{\Delta t/2} &= \frac{\lambda_2}{rc_2\rho_2} \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} + \\ &+ \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n,m-1}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1} + u_{n,m+1}^{j+1}}{h_2^2} \end{aligned}$$

на границях області $\frac{-u_{2,m}^{j+1} + 4u_{1,m}^{j+1} - 3u_{0,m}^{j+1}}{2h_1} = 0$, для $n = 0$,

для $n = N$ підставляємо значення з матриці температурного розподілу на границі внутрішнього циліндру.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^j}{\Delta t/2} &= D \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + D \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} + \\ &+ D \frac{u_{n,m-1}^j - 2u_{n,m}^j + u_{n,m+1}^j}{h_2^2} - \gamma T_m^{j+1} \\ \frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1/2}}{\Delta t/2} &= \frac{D}{r_0} \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + D \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} + \\ &+ D \frac{u_{n,m-1}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1} + u_{n,m+1}^{j+1}}{h_2^2} - \gamma T_n^{j+1} \end{aligned}$$

на границях області $\frac{-u_{2,m}^{j+1} + 4u_{1,m}^{j+1} - 3u_{0,m}^{j+1}}{2h_1} = 0$ для $n = 0$,

$$\frac{-u_{N,m}^{j+1} + 4u_{N-1,m}^{j+1} - 3u_{N-2,m}^{j+1}}{2h_1} = -\chi \left(\beta C + \frac{k_T D}{T_N^{j+1}} \left(\frac{\alpha_2}{\lambda} (T_n^{j+1} - T_N^{j+1}) + \frac{\varepsilon_2 \sigma D}{\lambda} ((T_n^{j+1})^4 - (T_N^{j+1})^4) \right) \right) \text{ для } n = N.$$

У роботах [4-7] проведені чисельні розрахунки температурних розподілів для одноциклової та термоциклічної обробки виробів циліндричної форми.

Запропонована узагальнена математична модель описує широке коло процесів обробки виробів з порошкових матеріалів і дозволяє знайти єдиний підхід для розв'язку крайових задач, якими вона представлена. Її можна застосовувати для виконання розрахунків у зоні нагрівання рухомих та нерухомих осесиметричних середовищ. Аналіз отриманих моделей дозволяє визначати параметри керування температурними полями та проектувати системи управління ними.

Література

1. Кипарисов С. С. Порошковая металлургия / С. С. Кипарисов, Г. А. Либенсон. – М.: Металлургия, 1972. – 527 с.
2. Федюкин В. К. Термоциклическая обработка металлов и деталей машин / В. К. Федюкин, М. Е. Смагоринский. – Л.: Машиностроение. Ленинград. отд-ние, 1989. – 255 с.
3. Березовский А. А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики Ч.1,2 / А. А. Березовский – К.: Наукова думка, 1976. – 292 с.

4. Ляшенко В. П. Моделювання процесів пресування та спікання порошкових матеріалів / В.П. Ляшенко, Т.А. Григорова // Вісник Запорізького державного університету. Сер. Фіз.-мат. Науки – 2008. – №1. – С. 124-130.
5. Ляшенко В. П. Математична модель високотемпературної дифузії у замкненій області / В. П. Ляшенко, Т. А. Григорова // Вісник Кременчуцького державного університету ім. М. Остроградського. – 2010. – №5/(64), частина 1. – С. 65-68.
6. Григорова Т.А. Комп'ютерне моделювання процесів високотемпературної дифузії / Т.А. Григорова // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2013. – Вип. 2/(79). – С. 46–50.
7. Ляшенко В. П. Математична модель температурного поля рухомого ізотропного середовища / В. П. Ляшенко, О. Б. Кобильська // Вісник Запорізького державного університету. Сер. Фіз.-мат. Науки. – 2008. – №1. – С. 130-136.
8. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2 т. / Д.Андерсон , Дж. Таннехилл, Р. Плетчер ; пер. с англ. С.В. Сенина, Е.Ю. Шальмана – М. : Мир, 1990. – 384 с.
9. Richtmyer R.D. Difference methods for initial value problems. / Richtmyer R.D. – New York: Intercience. – 1957. – 377 p.