

ПРО ЗАТУХАННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ДИСИПАТИВНОГО ОСЦИЛЯТОРА ДУФФІНГА

Ольшанський В.П., Бурлака В.В., Сліпченко М.В.

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені
Петра Василенка

Розглянуто вільні затухаючі коливання осцилятора типу Дуффінга при дії лінійного в'язкого опору. Для проведення дослідження використано метод енергетичного балансу. Реалізовано два варіанти методу, який не потребує побудови розв'язку нелінійного диференціального рівняння руху. В першому варіанті складено наближене диференціальне рівняння обвідної графіка коливань. Його розв'язок при жорсткій характеристиці пружності виражено через функцію Ламберта додатного аргументу. При м'якій характеристиці пружності аргумент функції Ламберта від'ємний. Для спрощення використання розв'язку, складено таблицю вказаної спеціальної функції, а також запропоновано компактну апроксимацію її, при малих аргументах, елементарними функціями. При цьому задіяно відому формулу Шенкса для суми повільно збіжного степеневого ряду. В другому варіанті методу енергетичного балансу одержано рекурентне співвідношення для обчислень амплітуд розмахів. Його зведено до кубічного рівняння, що має замкнений аналітичний розв'язок. Проведено порівняння числових результатів, до яких призводить метод енергетичного балансу та числове інтегрування диференціального рівняння руху на комп'ютері. Задовільна збіжність результатів підтвердила прийнятність вибраного наближеного методу для розрахунку вільних затухаючих коливань дисипативних осциляторів типу Дуффінга. Цей метод дає можливість наближено розв'язувати й обернену задачу, а саме ідентифікувати значення коефіцієнта лінійного в'язкого опору при відомому декременту затухання амплітуд коливань. Процедура ідентифікації передбачає використання рівняння енергетичного балансу, складене для одного розмаху коливань.

Ключові слова: затухання коливань, кубічно-нелінійна характеристика пружності, метод енергетичного балансу, обвідна графіка коливань, рекурентне співвідношення.

Вступ

Рівняння руху осцилятора типу Дуффінга, без дисипативного члена, відноситься до найбільш поширених в теорії нелінійних коливань. Воно задіяне в численних технічних розрахунках і його використовували для ілюстрації можливостей різних аналітичних методів. Значно менше розв'язків стосується однорідного рівняння при наявності в ньому дисипативного члена, хоча воно більш адекватно описує динамічний процес, який супроводжується затуханням вільних коливань. Тут для аналізу таких коливань задіяно метод енергетичного балансу, який не потребує розв'язування диференціального рівняння коливань осцилятора. Реалізація вказаного методу проводиться наближено, бо для обчислення роботи сили опору доводиться задавати закон руху таким як і в лінійній системі, але з певною корекцією частоти від амплітуди коливань, чим врахована нелінійність. Отже точність методу енергетичного балансу буде вища при розрахунках коливань систем з малими амплітудами.

Огляд літературних джерел та постановка проблеми

Однорідне рівняння з кубічною нелінійністю, що відповідає двом членам розкладу синуса в ряд Маклорена, при дії в'язкого опору, розв'язували різними способами на фазовій площині в [1]. Розв'язки побудовано трьома методами: степеневих рядів, скінченних різниць і послідовних наближень. Показано, що розбіжність результатів мала у випадку малих значень коефіцієнта опору. В монографії [2], при такій апроксимації відновлюючої сили як в [1], у першому наближенні одержано рівняння обвідної графіка затухаючих коливань. Обвідна є експонентою, яка не залежить від нелінійного доданку в виразі відновлюючої сили, тобто вона така як в лінійній системі. Аналогічний результат одержано в [3], коли сила пружності описується непарним кубічним двохчленом. Метод енергетичного балансу уже давно використовують для розрахунку вільних коливань дисипативних систем [4-6]. Останнім часом його задіяли для розрахунків затухаючих коливань осциляторів при одночасній (спільній) дії сил опору різної природи [7-9]. Ці статті ввійшли параграфами у монографічні видання [10-11], причому розглянуто дві форми методу енергетичного балансу. Але вказані публікації стосуються лінійно пружного осцилятора. Тут поширюємо метод на нелінійно пружні системи.

Мета і постановка задач

Метою статті є вивчення та апробація розрахунками формул для обчислення амплітуд вільних затухаючих коливань осцилятора з пружною характеристикою, поданою непарним кубічним двохчленом, при дії сили лінійного в'язкого опору.

Для досягнення поставленої мети використовуємо метод енергетичного балансу, причому реалізуємо два його варіанти з побудовою розв'язку рівняння обвідної графіка коливань і без побудови. У другому варіанті методу розрахунок амплітуд розмахів зводиться до рекурентного співвідношення в вигляді кубічного рівняння.

Викладення основного матеріалу

Побудова рівняння обвідної коливального процесу та його розв'язок. Вільні затухаючі коливання осцилятора описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + c_1x + c_2x^3 = 0 \quad (1)$$

при початкових умовах:

$$x(0) = -a_0; \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2)$$

В (1), (2) m – маса осцилятора; k – коефіцієнт в'язкості; c_1, c_2 – характеристики жорсткості; $x = x(t)$ – переміщення осцилятора, як функція часу t ; a_0 – початкове відхилення осцилятора від положення рівноваги $x = 0$; крапка над x означає похідну по t .

Розглянемо i -й розмах коливань, який починається з відхилення $x = -a_{i-1}$ і закінчується відхиленням $x = a_i$. На цьому етапі руху зміна потенціальної енергії $\Delta\Pi$ становить:

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2}c_1(a_i^2 - a_{i-1}^2) + \frac{1}{4}c_2(a_i^4 - a_{i-1}^4) \quad (3)$$

Робота сили в'язкого опору A_T наближено дорівнює [6]:

$$A_T \approx -\frac{\pi}{2} k \omega_i a^2 \quad (4)$$

Тут $a = 0,5(a + a_{i-1})$; ω_i – частота коливань на i -му розмісі. Щоб скласти диференціальне рівняння огинаючої, покладемо в (3) $a - a_{i-1} \approx \frac{\pi}{\omega_i} \frac{da}{dt}$. Тоді, при повільній зміні амплітуди в часі:

$$\Delta \Pi \approx (c_1 a_i + c_2 a_{i-1}^3) \frac{\pi}{\omega_i} \frac{da}{dt} \quad (5)$$

Згідно з методом енергетичного балансу $\Delta \Pi = A_T$, що з урахуванням (4) і (5), дає рівняння:

$$\left(\frac{c_1}{a} + c_2 a \right) da = -\frac{k}{2} \omega_i^2 dt \quad (6)$$

Далі розглянемо випадок жорсткої характеристики пружності, коли $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Подальшим інтегруванням виразу (6) отримуємо з точністю до сталої A :

$$c_1 \ln a^2 + c_2 a^2 = -k \omega_i^2 t + A.$$

Сталу A вибираємо так, щоб при $t = 0$ $a = a_{i-1}$. Тоді:

$$c_1 \ln a^2 + c_2 a^2 = c_1 \ln a_{i-1}^2 + c_2 a_{i-1}^2 - k \omega_i^2 t \quad (7)$$

або:

$$\ln \left(\frac{c_2 a_{i-1}^2}{c_1} \frac{a^2}{a_{i-1}^2} \right) + \frac{c_2 a_{i-1}^2}{c_1} \frac{a^2}{a_{i-1}^2} = \ln \left(\frac{c_2 a_{i-1}^2}{c_1} \right) + \frac{c_2 a_{i-1}^2}{c_1} - \frac{k \omega_i^2}{c_1} t.$$

Розв'язок цього рівняння виражається через функцію Лемберта додатного аргументу $W(\exp(\xi))$. Тому:

$$a(t) = a_{i-1} \left[\frac{c_1}{c_2 a_{i-1}^2} W(\exp(\xi)) \right]^{1/2},$$

де

$$\xi = \ln \left(\frac{c_2 a_{i-1}^2}{c_1} \right) + \frac{c_2 a_{i-1}^2}{c_1} - \frac{k \omega_i^2}{c_1} t.$$

Тривалість i -го розмаху дорівнює $t_i = \pi / \omega_i$, причому:

$$\omega_i \approx \sqrt{\frac{c_1}{m} - \left(\frac{k}{2m} \right)^2 + \frac{3}{16} \frac{c_2}{m} (a_{i-1} + a_i)^2}.$$

Амплітуда в кінці i -го розмаху становить:

$$a_i = a_{i-1} \left[\frac{c_1}{c_2 a_{i-1}^2} W(\exp(\xi_i)) \right]^{1/2} \quad (8)$$

$$\text{де } \xi_i = \ln \left(\frac{c_2 a_{i-1}^2}{c_1} \right) + \frac{c_2 a_{i-1}^2}{c_1} - \frac{k \pi \omega_i}{c_1}.$$

Щоб користуватися формулою (8), треба обчислювати значення функції Ламберта. Це досить просто проводити лінійною інтерполяцією числових даних в табл. 1.

Таблиця 1

Значення функції Ламберта $W(\eta)$ додатного аргументу

10η	$10W(\eta)$	10η	$10W(\eta)$	10η	$10W(\eta)$	10η	$10W(\eta)$
0,05	0,0498	1,05	0,9544	2,1	1,7609	4,1	3,0287
0,10	0,0990	1,10	0,9957	2,2	1,8218	4,2	3,0851
0,15	0,1478	1,15	1,0368	2,3	1,9017	4,3	3,1409
0,20	0,1961	1,20	1,0774	2,4	1,9707	4,4	3,1963
0,25	0,2440	1,25	1,1118	2,5	2,0389	4,5	3,2510
0,30	0,2914	1,30	1,1579	2,6	2,1062	4,6	3,3053
0,35	0,3384	1,35	1,1976	2,7	2,1727	4,7	3,3591
0,40	0,3849	1,40	1,2371	2,8	2,2384	4,8	3,4123
0,45	0,4310	1,45	1,2763	2,9	2,3034	4,9	3,4651
0,50	0,4767	1,50	1,3152	3,0	2,3676	5,0	3,5173
0,55	0,5220	1,55	1,3538	3,1	2,4310	5,1	3,5691
0,60	0,5669	1,65	1,3921	3,2	2,4937	5,2	3,6205
0,65	0,6145	1,65	1,4301	3,3	2,5558	5,3	3,6714
0,70	0,6556	1,70	1,4679	3,4	2,6171	5,4	3,7218
0,75	0,6993	1,75	1,5054	3,5	2,6778	5,5	3,7718
0,80	0,7427	1,80	1,5427	3,6	2,7378	5,6	3,8214
0,85	0,7858	1,85	1,5797	3,7	2,7972	5,7	3,8706
0,90	0,8284	1,90	1,6164	3,8	2,8560	5,8	3,9193
0,95	0,8708	1,95	1,6529	3,9	2,9141	5,9	3,9677
1,00	0,9128	2,00	1,6892	4,0	2,9717	6,0	4,0156

Для обчислення $W(\eta)$ при $0 \leq \eta \leq 1/e$, можна також використовувати степеневий ряд [12]:

$$W(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1} \eta^n}{n!}.$$

Його суму зручно виразити в замкнутій формулі за допомогою наближеної формули Шенкса [13]:

$$W(\eta) \approx S_{n-1}(\eta) - \frac{a_n^2}{a_{n+1} - a_n}.$$

Якщо прийняти: $S_{n-1}(\eta) = \eta - \eta^2$; $a_n = \frac{3}{2}\eta^3$; $a_{n+1} = -\frac{8}{3}\eta^4$, то

$$W(\eta) \approx \eta - \eta^2 + \frac{27}{2} \frac{\eta^3}{16\eta + 9} \quad (9)$$

За цією формулою $W(0,35) \approx 0,2671$. В табл. 1 $W(0,35) \approx 0,2678$. Похибка наближення становить 0,26 %. Зі зменшенням η точність формули (9) підвищується.

Розглянемо далі варіант м'якої характеристики пружності, коли $c_1 > 0$, $c_2 < 0$. У цьому випадку наближене рівняння енергетичного балансу має вигляд:

$$c_1 \ln a^2 - |c_2| a^2 = c_1 \ln a_{i-1}^2 - |c_2| a_{i-1}^2 - k \omega_i^2 t$$

або:

$$\ln \left(\frac{|c_2| a_{i-1}^2}{c_1} \frac{a^2}{a_{i-1}^2} \right) - \frac{|c_2| a_{i-1}^2}{c_1} \frac{a^2}{a_{i-1}^2} = \ln \left(\frac{|c_2| a_{i-1}^2}{c_1} \right) - \frac{|c_2| a_{i-1}^2}{c_1} - \frac{k \omega_i^2}{c_1} t.$$

Розв'язок цього рівняння виражається через функцію Ламберта відємного аргументу $W_1(-\eta)$ (першу гілку двозначної функції):

$$a(t) = a_{i-1} \left[-\frac{c_1}{|c_2| a_{i-1}^2} W_1(-\exp(\zeta)) \right]^{1/2} \quad (10)$$

$$\text{Тут } \zeta = \ln \left(\frac{|c_2| a_{i-1}^2}{c_1} \right) - \frac{c_2 a_{i-1}^2}{c_1} - \frac{k \omega_i^2}{c_1} t.$$

Із (10) випливає наступний зв'язок амплітудних відхилень i -го розмаху:

$$a_i = a_{i-1} \left[-\frac{c_1}{|c_2| a_{i-1}^2} W_1(-\exp(\zeta_i)) \right]^{1/2} \quad (11)$$

причому:

$$\zeta_i = \ln \left(\frac{|c_2| a_{i-1}^2}{c_1} \right) - \frac{|c_2| a_{i-1}^2}{c_1} - \frac{k \pi \omega_i}{c_1};$$

$$\omega_i \approx \sqrt{\frac{c_1}{m} - \left(\frac{k}{2m} \right)^2 - \frac{3}{16} \frac{|c_2|}{m} (a_{i-1} + a_i)^2}.$$

При розрахунку амплітуд по формулі (11) можна використовувати таблиці функції $W_1(-\zeta)$, складені з кроком 0,001 і надруковані в [14]. На інтервалі $\eta \in (-0, 25; 0)$ функцію $W_1(\eta)$ з похибкою менше 1 % можна також обчислювати по формулі (9).

Метод енергетичного балансу в вигляді рекурентного співвідношення. Таке співвідношення одержуємо, прирівнявши праві частини виразів (3) і (4). Після елементарних перетворень маємо:

$$\xi_i^3 + a_* \xi_i^2 + b_* \xi_i + c_* = 0 \quad (12)$$

$$\text{Тут } \xi_i = \frac{a_i}{a_{i-1}}; \quad a_* = -\frac{1-3\beta}{1+\beta}; \quad b_* = \frac{1}{1+\beta} \left(1 + \frac{2c_1}{c_2 a_{i-1}^2} + 3\beta + \frac{\alpha}{a_{i-1}^2} \right);$$

$$c_* = -\frac{1}{1+\beta} \left(1 + \frac{2c_1}{c_2 a_{i-1}^2} - \beta - \frac{\alpha}{a_{i-1}^2} \right); \quad \alpha = \frac{\pi k \omega_*}{2c_2}; \quad \beta = \frac{3\pi k}{64m\omega_*}; \quad \omega_* = \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{k}{2m} \right)^2}.$$

Розв'язок рівняння (12) дає наступну формулу для обчислень амплітуд коливань:

$$a_i = \xi_i a_{i-1} \quad (13)$$

в якій при $c_2 > 0$:

$$\xi_i = \sqrt[3]{\sqrt{Q} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{Q} + \frac{q}{2}} + \frac{1-3\beta}{3(1+\beta)} \quad (14)$$

$$Q = \frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2; \quad p = -\frac{1}{3}a_*^2 + b_*; \quad q = \frac{2}{27}a_*^3 - \frac{1}{3}a_*b_* + c_*.$$

Якщо $c_2 < 0$, то:

$$\xi_i = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\gamma + \pi}{3} + \frac{1-3\beta}{3(1+\beta)} \quad (15)$$

$$\text{причому } \gamma = \arccos \left(-\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}} \right).$$

Числові результати та їх аналіз

Розглянемо приклади розрахунку.

Приклад 1. Обчислимо послідовність з десяти амплітуд при коливаннях осцилятора з жорсткою характеристикою пружності, коли $m = 2$ кг; $k = 8$ Нс/м; $c_1 = 800$ Н/м; $c_2 = 160000$ Н/м³; $a_0 = 0,05$ м. Одержані при цих даних трьома способами значення амплітуд записано в табл. 2.

В останній колонці записано значення $x(\sum t_i^*)$, отримані числовим комп'ютерним інтегруванням рівняння (1), при початкових умовах (2). Спостерігається задовільна узгодженість числових результатів. Зазначимо, що для обчислення амплітуд по формулі (8) (множника ω_i), використовували значення a_i , записані в третій колонці. Це дозволило обійтись без проведення ітерацій.

Графік затухаючих коливань, одержаний комп'ютерним інтегруванням рівняння (1), зображено на рис. 1. Маємо повну відповідність результатів на рис. 1 і в табл. 2.

Таблиця 2

Значення a_i при $c_2 > 0$

i	$\sum t_i^*, \text{ с}$	форм. (13), (14)	форм. (8)	числ. інтегр.
		Значення $100 a_i, \text{ м}$		
1	0,13830	3,863	3,871	3,885
2	0,28354	2,928	2,939	2,955
3	0,43376	2,188	2,200	2,212
4	0,58722	1,619	1,631	1,638
5	0,74263	1,190	1,202	1,204
6	0,89916	0,872	0,883	0,882
7	1,05630	0,638	0,647	0,645
8	1,21378	0,466	0,473	0,471
9	1,37145	0,340	0,346	0,344
10	1,52921	0,248	0,253	0,251

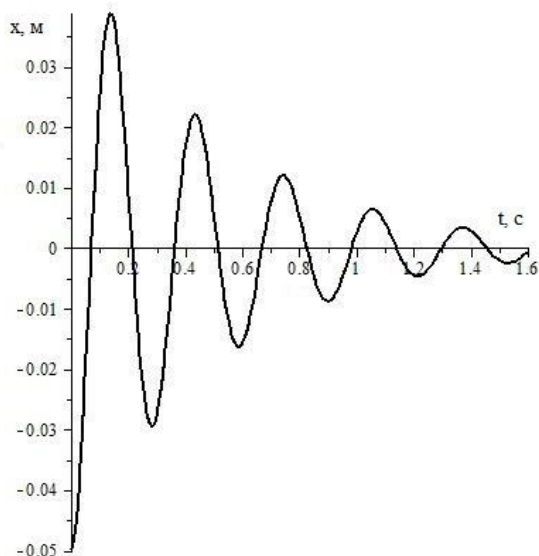


Рис.1. Графік затухаючих коливань осцилятора при $c_2 > 0$

Приклад 2. Знайдемо послідовність амплітуд коливань осцилятора з м'якою характеристикою пружності, коли $m = 2$ кг; $k = 6$ Нс/м; $c_1 = 800$ Н/м; $c_2 = -80000$ Н/м³; $a_0 = 0,05$ м. Розраховані трьома способами значення амплітуд записано в табл. 3.

Тут теж значення a_i , одержані методом енергетичного балансу, близькі до тих, що дає числове інтегрування рівняння руху при $x = x(\sum t_i^*)$. Розрахований цим способом графік коливань подано на рис. 2. Маємо повну узгодженість числових і графічних результатів.

Таблиця 3

Значення a_i при $c_2 < 0$

i	$\sum t_i^*, \text{ с}$	форм. (13), (14)	форм. (8)	числ. інтегр.
		Значення $100 a_i, \text{ м}$		
1	0,17123	3,805	3,820	3,800
2	0,33627	2,947	2,964	2,937
3	0,49817	2,301	2,318	2,292
4	0,65831	1,805	1,821	1,797
5	0,81744	1,420	1,434	1,412
6	0,97594	1,119	1,131	1,112
7	1,13408	0,882	0,893	0,877
8	1,29198	0,696	0,705	0,692
9	1,44973	0,549	0,557	0,546
10	1,60740	0,434	0,440	0,431

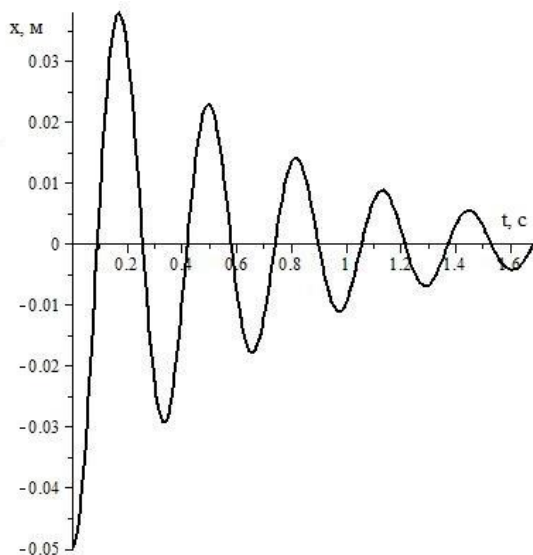


Рис.2. Графік затухаючих коливань осцилятора при $c_2 < 0$

Приклад 3. Використовуючи метод енергетичного балансу, розв'яжемо обернену задачу про визначення коефіцієнта в'язкого опору за результатами виміру амплітуду коливань. Припустимо, що при $m = 2$ кг; $c_1 = 800$ Н/м; $c_2 = 160000$ Н/м³ амплітуди коливань становлять: $a_0 = 0,05$ м, $a_1 = 0,042$ м. Тоді, згідно з (7):

$$k = \frac{1}{\pi \omega_1} \left[c_1 \ln \left(\frac{a_0}{a_1} \right)^2 + c_2 a_0^2 - c_2 a_1^2 \right], \quad \omega_1 \approx \sqrt{\frac{c_1}{m} + \frac{3}{16} \frac{c_2}{m} (a_0 + a_1)^2}.$$

Для вказаних числових даних: $k = 5,501$ Нс/м.

Висновки

Виведені наближені формули дають можливість розраховувати амплітуди затухаючих коливань нелінійно пружного осцилятора з кубічною нелінійністю, без розв'язування диференціального рівняння його руху. При цьому можна також проводити ідентифікацію значення коефіцієнта лінійного в'язкого опору за результатами виміру амплітуд розмахів. Апробація підтвердила вірогідність одержаних теоретичних результатів і придатність методу енергетичного балансу для дослідження вільних затухаючих коливань осциляторів з нелінійною характеристикою пружності.

Список використаних джерел

1. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах / Дж. Стокер. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 258 с.

2. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
3. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т 3. / Под общей редакцией И.А. Бергера, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 568 с.
5. Вибрации в технике. Справочник в шести томах. Т 2. Колебания нелинейных механических систем / Под редакцией И.И. Блехмана. – М. машиностроение, 1979. – 351 с.
6. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Г.Я. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 270 с.
7. Бурлака В.В. До розрахунку коливань механізмів при спільній дії сил сухого та в'язкого тертя / В.В. Бурлака, В.П. Ольшанський, О.М. Малець. // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2014. –Вип. 148. – С. 19-24.
8. Бурлака В.В. До розрахунку коливань механізмів з комбінованим сухим тертям / В.В. Бурлака, В.П. Ольшанський, О.М. Малець. // Проблеми надійності машин та засобів сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2014. –Вип. 151. – С. 384-390.
9. Ольшанський В.П. Енергетичний метод розрахунку коливань механізмів змінної маси з сухим тертям / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський. // Інженерія природокористування, Харків. – 2014. –№ 2. –С. 91-94.
10. Ольшанський В.П. Коливання дисипативних осциляторів. / В.П. Ольшанський, Л.М. Тищенко, С.В. Ольшанський. – Харків: Міськдрук, 2015. – 116 с.
11. Ольшанський В.П. Динаміка дисипативних осциляторів. / В.П. Ольшанський, Л.М. Тищенко, С.В. Ольшанський. – Харків: Міськдрук, 2016. – 264 с.
12. Fariel Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy / Shafee Fariel // IMA Journal of Applied Mathematics. – Vol. 72. – 2007. – P. 785-800.
13. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар / Н.А. Кильчевский. – Киев: Наукова думка, 1976. – 304 с.
14. Ольшанский В.П. Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки. / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харьков: Издатель Савчук А.О., 2013. – 204 с.

Аннотация

О ЗАТУХАНИИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИSSIPАТИВНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА

Ольшанский В. П., Бурлака В. В., Слипченко М. В.

Рассмотрены свободные затухающие колебания осциллятора типа Дуффинга при действии линейного вязкого сопротивления. Для проведения исследования использован метод энергетического баланса. Реализовано два варианта метода, который не требует построения решения нелинейного дифференциального уравнения движения. В первом варианте составлено приближенное дифференциальное уравнение огибающей графика колебаний. Его решение при жесткой характеристике упругости выражено через функцию Ламберта положительного аргумента. При мягкой характеристике упругости аргумент функции Ламберта отрицательный. Для упрощения использования решения, составлена таблица указанной специальной функции, а также предложено компактную аппроксимацию ее, при малых аргументах, элементарными функциями. При этом задействовано известную формулу Шенкса для суммы медленно сходящегося степенного ряда. Во втором варианте метода энергетического баланса получено рекуррентное

соотношение для вычислений амплитуд размахов. Его сведено к кубическому уравнению, которое имеет замкнутое аналитическое решение. Проведено сравнение числовых результатов, к которым приводит метод энергетического баланса и числовое интегрирование дифференциального уравнения движения на компьютере. Удовлетворительная сходимость результатов подтвердила приемлемость выбранного приближенного метода для расчета свободных затухающих колебаний диссипативных осцилляторов типа Дуффинга. Этот метод дает возможность приближенно решать и обратную задачу, а именно идентифицировать значение коэффициента линейного вязкого сопротивления при известном декременте затухания амплитуд колебаний. Процедура идентификации предусматривает использование уравнения энергетического баланса, составленного для одного размаха колебаний.

Ключевые слова: затухание колебаний, кубически-нелинейная характеристика упругости, метод энергетического баланса, огибающая графика колебаний, рекуррентное соотношение.

Abstract

ON THE ATTENUATION OF FREE OSCILLATIONS OF A DISSIPATIVE DUFFING OSCILLATOR

V.Olshanskiy, V.Burlaka, M.Slipchenko

Free damped oscillations of a Duffing-type oscillator under linear viscous resistance are considered. For the study, the energy balance method was used. Two versions of the method have been implemented, which does not require constructing a solution to the nonlinear differential equation of motion. In the first version, an approximate differential equation of the envelope of the oscillation graph is compiled. Its solution with a rigid characteristic of elasticity is expressed in terms of the Lambert function of a positive argument. With a soft characteristic of elasticity, the argument of the Lambert function is negative. To simplify the use of the solution, a table of the indicated special function is compiled, and a compact approximation of it, with small arguments, by elementary functions is proposed. In this case, the well-known Shanks formula for the sum of slowly converging power series is involved. In the second version of the energy balance method, a recurrence relation is obtained for calculating the amplitudes of the ranges. Its reduced to a cubic equation, which has a closed analytical solution. A comparison of numerical results, which leads to the method of energy balance and numerical integration of the differential equation of motion on a computer. Satisfactory convergence of the results confirmed the acceptability of the chosen approximate method for calculating the free damped oscillations of dissipative oscillators of the Duffing type. This method makes it possible to approximately solve the inverse problem, namely, to identify the value of the coefficient of linear viscous resistance with a known decrement of damping of the oscillation amplitudes. The identification procedure involves the use of the energy balance equation, compiled for one swing range.

Keywords: vibration damping, cubic-nonlinear elasticity characteristic, energy balance method, envelope of the vibration graph, recurrence relation.