

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 519.6

АПОСТЕРІОРНІ ОЦІНЮВАЧІ ПОХИБКИ СЕРЕНДИПОВИХ КВАДРАТИЧНИХ АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

О. Вовк¹, Г. Квасниця¹, О. Остапов¹, Г. Шинкаренко^{1,2}

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua

²Опольський політехнічний університет,
вул. Прушковська, 76, Ополь, 45-758, e-mail: h.shynkarenko@gmail.com

Побудовано прості апостеріорні оцінювачі похибки апроксимацій методу скінченних елементів, здатних надавати двосторонні оцінки похибок таких наближень до розв'язків еліптичних крайових задач. За допущення, що виконуються умова насиченості та підсилена нерівність Коші, показано існування нижньої та верхньої меж похибок. Подано обчислюваний варіант двосторонніх оцінок, заснований на елементно визначених апостеріорних оцінювачах Діріхле та Неймана для знаходження нижньої і верхньої меж істинної похибки квадратичних серендипових апроксимацій. Особливості, обчислювані характеристики та порівняння цих оцінювачів з побудованими раніше для лінійних і білінійних апроксимацій продемонстровані детальними результатами числових експериментів на прикладі сингулярно збуреної задачі з рівнянням дифузії-адвекції-реакції.

Ключові слова: метод скінченних елементів (МСЕ), двосторонні оцінки похибок, умова насиченості, підсилена нерівність Коші, апостеріорний оцінювач похибки (АОП), елементно визначений АОП, серендипова апроксимація, АОП Діріхле, АОП Неймана.

1. ВСТУП

Апостеріорні оцінки похибок апроксимацій методу скінченних елементів (МСЕ) – важлива складова сучасних наукових досліджень і доповнення самого МСЕ. Оригінальна концепція апостеріорної оцінки похибки Бабушки-Рейнболдта (1978) в останні десятиліття згенерувала велику множину різноманітних апостеріорних оцінювачів похибок (АОП), здатних якісно охарактеризувати похибки знайдених апроксимацій МСЕ, створити основи для локального згущення тріангуляцій та/або локального поліпшення порядків апроксимацій так, щоб знайти наближені розв'язки з наперед гарантованою точністю та мінімальними обчислювальними затратами (див. [4], [5], а також [6]). Продовжуючи дослідження [7]–[13], ми будемо поелементно-визначені апостеріорні оцінювачі похибок Діріхле ε_h^{Dir} та Неймана ε_h^{Neu} для частинами квадратичних серендипових апроксимацій на чотирикутних сітках скінченних елементів. Ці оцінювачі здатні якісніше обчислювати нижню та верхню межі істинної похибки, ніж оцінювачі побудовані для лінійних і білінійних апроксимацій.

Стаття організована так. У п. 2 ми формулюємо варіаційну задачу для еліптичного рівняння дифузії-адвекції-реакції, визначаємо її особливості. Апроксимації МСЕ описано у п. 3. Теоретичне обґрунтування можливості отримання двосторонніх оцінок похибок скінченно-елементних апроксимацій подано в п. 4, 5. У п. 6 детально викладено спосіб побудови апостеріорних оцінювачів Діріхле та Неймана похибок квадратичних серендипових апроксимацій на чотирикутній сітці.

Решта статті присвячена аналізу результатів числових експериментів із модельними крайовими задачами, розв'язування яких ускладнюється наявністю сингулярної збуреності.

2. ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо варіаційну задачу вигляду

$$\begin{cases} \text{знайти } u \in V \text{ такий, що} \\ a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (1)$$

де V – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_V$ і асоційованою з ним нормою $\|v\|_V := (v, v)_V^{1/2}$, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ – білінійна форма і $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ – лінійний функціонал.

Щоб гарантувати коректність формулювання задачі (1), ми припустимо, що її білінійна форма неперервна та V – еліптична, іншими словами, знайдуться сталі $0 < a_0 < M$ такі, що

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \quad (2)$$

$$|a(v, v)| \geq a_0 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (3)$$

На додаток до цього припустимо, що лінійний функціонал l є неперервним на V , іншими словами,

$$\|l\|_* := \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|\langle l, v \rangle|}{\|v\|_V} < +\infty. \quad (4)$$

За виконання умов (2)-(4) теорема Лакса-Мільграма-Вишика гарантує існування єдиного розв'язку $u \in V$, який неперервно залежить від даних задачі, детальніше,

$$\|u\|_V \leq a_0^{-1} \|l\|_*. \quad (5)$$

Нарешті, будемо надалі припускати, що (не обов'язково симетрична) білінійна форма породжує (так звану *енергетичну*) норму

$$\|v\| := a(v, v)^{1/2} \quad \forall v \in V, \quad (6)$$

еквівалентну нормі $\|\cdot\|_V$.

3. АПРОКСИМАЦІЯ МСЕ

З огляду на класичну процедуру дискретизації Гальоркіна введемо $\{V_h\}$ сім'ю скінченновимірних підпросторів $V_h \subset V$, яке характеризується малим параметром $h > 0$, і розглянемо задачу вигляду

$$\begin{cases} \text{знайти } u_h \in V_h \text{ такий, що} \\ a(u_h, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \quad (7)$$

Враховуючи ортогональність похибки апроксимації Гальоркіна

$$a(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h, \quad (8)$$

можна довести, що за наведених вище допущень апроксимація $u_h \in V_h$ буде характеризуватися такою апіорною оцінкою:

$$\|u - u_h\|_V \leq a_0^{-1} M \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V. \quad (9)$$

4. ДВОСТОРОННІ ОЦІНКИ ПОХИБОК

Тепер ми визначимо поповнені скінченновимірні підпростори $W_h := V_h \oplus E_h \subset V$, $\dim E_h < +\infty$ і розглянемо нові апроксимації $\bar{u}_h \in W_h$, які задовольняють рівняння

$$\begin{cases} \text{знайти } \bar{u}_h \in W_h \text{ такий, що} \\ a(\bar{u}_h, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in W_h. \end{cases} \quad (10)$$

Оскільки $V_h \subset W_h$, то будемо припускати, що нові апроксимації $\bar{u}_h \in W_h$ збігаються до розв'язку u швидше, ніж попередні $u_h \in V_h$, точніше, будемо вважати, що існує незалежна від значення h стала $\beta \in (0, 1)$ така, що буде правильною так звана умова насиченості

$$\|u - \bar{u}_h\| \leq \beta \|u - u_h\| \quad \forall h > 0. \quad (11)$$

Скориставшись нерівністю (11) та нерівністю трикутника, одержимо оцінки різниці між апроксимаціями \bar{u}_h і u_h такого гатунку:

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_h - u_h\| &= \|\bar{u}_h - u + u - u_h\| \leq \|\bar{u}_h - u\| + \|u - u_h\| \\ &\leq (1 + \beta) \|u - u_h\|, \\ \|\bar{u}_h - u_h\| &\geq \|u - u_h\| - \|\bar{u}_h - u\| \geq (1 - \beta) \|u - u_h\|. \end{aligned}$$

Склавши їх, прийдемо до такого твердження.

Теорема про двосторонні оцінки похибки апроксимації Гальоркіна.

Нехай $u \in V, u_h \in V_h$ і $\bar{u}_h \in W_h = V_h \oplus E_h$ – розв'язки задач (1), (7) і (10), відповідно. Припустимо також, що простори апроксимацій V_h вибрано так, що виконується умова насиченості (11) зі сталою $0 < \beta < 1$, значення якої не залежить від h .

Тоді будуть правильними двосторонні оцінки похибки апроксимації $e := u - u_h \in V$ такого гатунку:

$$(1 + \beta)^{-1} \|\bar{u}_h - u_h\| \leq \|u - u_h\| \leq (1 - \beta)^{-1} \|\bar{u}_h - u_h\|. \quad (12)$$

5. АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ ПОХИБКИ

З огляду на той факт, що обчислення апроксимації $\bar{u}_h \in W_h$ потребує зазвичай значно більших обчислювальних затрат порівняно із обчисленням $u_h \in V_h$, ми шукатимемо його наближення за допомогою розв'язку задачі про апостеріорний оцінювач похибки

$$\begin{cases} \text{знайти індикатор похибки } e_h \in E_h \text{ такий, що} \\ a(e_h, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle \\ \quad := \langle l, v \rangle - a(u_h, v) \quad \forall v \in E_h. \end{cases} \quad (13)$$

Задача (13) має єдиний розв'язок, причому

$$a(e_h, v) = a(u - u_h, v) = a(\bar{u}_h - u_h, v) \quad \forall v \in E_h; \quad (14)$$

$$\|e_h\| = \|\rho(u_h)\|_* . \quad (15)$$

Теорема про апостеріорний оцінювач похибки.

Нехай $u \in V, u_h \in V_h$ і $\bar{u}_h \in W_h = V_h \oplus E_h$ – розв'язки задач (1), (7) і (10), відповідно. Припустимо також, що простори апроксимацій V_h вибрано так, що виконуються

(i) умова насиченості (11)

та

(ii) підсилена нерівність Коші

$$|a(v, w)| \leq \gamma \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in V \quad (16)$$

зі сталою $0 < \gamma < 1$, значення якої не залежить від h .

Тоді апостеріорний оцінювач похибки $e_h \in E_h$ визначає цілком обчислювані двосторонні оцінки похибки апроксимації $e := u - u_h \in V$ такого гатунку:

$$\|e_h\| \leq \|u - u_h\| \leq C \|e_h\|, \quad (17)$$

де стала $C = (1 - \beta)^{-1} (1 - \gamma^2)^{-1/2}$.

Доведення. З огляду на (14) одержимо $\|e_h\|^2 = a(u - u_h, e_h) \leq \|u - u_h\| \|e_h\|$, звідки приходимо до лівої нерівності в (17). Далі, приймемо довільні $v \in V_h, w \in E_h$ і зауважимо, що

$$\begin{aligned} a(\bar{u}_h - u_h, v + w) &= a(\bar{u}_h - u_h, w) = a(e_h, w) \\ &\leq \|e_h\| \|w\| \quad \forall v \in V_h, \forall w \in E_h. \end{aligned} \quad (18)$$

Скориставшись підсиленою нерівністю Коші (16), одержимо таку оцінку

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= a(v + w, v + w) \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + a(v, w) + a(w, v) \\ &\geq \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\gamma \|v\| \|w\| \\ &= \|w\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 + (\|v\| - \gamma \|w\|)^2 \\ &\geq (1 - \gamma^2) \|w\|^2 \quad \forall v, w \in V. \end{aligned}$$

Повертаючись тепер до нерівності (18), знайдемо, що

$$\begin{aligned} a(\bar{u}_h - u_h, v + w) &\leq \|e_h\| \|v + w\| \\ &\leq (1 - \gamma^2)^{-1/2} \|e_h\| \|v + w\| \quad \forall v \in V_h, \forall w \in E_h \end{aligned} \quad (19)$$

або

$$\|\bar{u}_h - u_h\| = \sup_{v+w \in W_h} \frac{a(\bar{u}_h - u_h, v + w)}{\|v + w\|} \leq (1 - \gamma^2)^{-1/2} \|e_h\|. \quad (20)$$

Застосувавши тепер праву нерівність з (12), приходимо до оцінки

$$(1 - \beta) \|u - u_h\| \leq \|\bar{u}_h - u_h\| \leq (1 - \gamma^2)^{-1/2} \|e_h\|, \quad (21)$$

яка доводить правильність задекларованої в (17) правої нерівності.

6. ПОБУДОВА АПОСТЕРІОРНОГО ОЦІНЮВАЧА ПОХИБОК

Одержані в (17) двосторонні оцінки похибки апроксимації Гальоркіна $u_h \in V_h$ свідчать про *ефективність* цієї процедури (ліва нерівність) та її *надійність* (права нерівність). На відміну від оцінок (12) тепер існує потенціальна можливість економного обчислення індикатора похибки $e_h \in E_h$, а саме, зараз ми запропонуємо алгоритми цих обчислень з використанням специфіки методу скінченних елементів.

Основна ідея економії обчислювальних ресурсів при знаходженні апостеріорної оцінки похибки отриманої апроксимації МСЕ полягає в обчисленні похибки на кожному скінченному елементі, без врахування сусідніх елементів. Фактично задача про похибку (13) зводиться до розв'язування послідовності локально визначених задач на кожному скінченному елементі завдяки специфічному вибору базису підпростору E_h .

Отже, ми запропонували на кожному скінченному елементі Q шукати апостеріорну оцінку похибки у вигляді (див. також [11]–[13])

$$e_h|_Q \approx e_Q(\alpha, \beta) := \lambda_Q \phi_Q(\alpha, \beta), \quad \lambda_Q \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

Зважаючи на (22), задача знаходження апроксимації похибки (13) зводиться до відшукування на кожному скінченному елементі $Q \in \mathfrak{T}_h$ невідомих коефіцієнтів

$$\lambda_Q = \frac{\langle \rho(u_h), \phi_Q \rangle}{a(\phi_Q, \phi_Q)}, \quad \forall Q \in \mathfrak{T}_h. \quad (23)$$

Для побудови апостеріорного оцінювача похибки Діріхле за індикаторну функцію $\phi_Q(\alpha, \beta)$ з (22) вибираємо

$$\phi_Q^{Neu}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \alpha^3 - \beta^3),$$

а для оцінювача Неймана

$$\phi_Q^{Dir}(\alpha, \beta) = (\alpha - \alpha^3)(1 - \beta^2) + (\beta - \beta^3)(1 - \alpha^2) \quad (\text{див. рис. 1}).$$

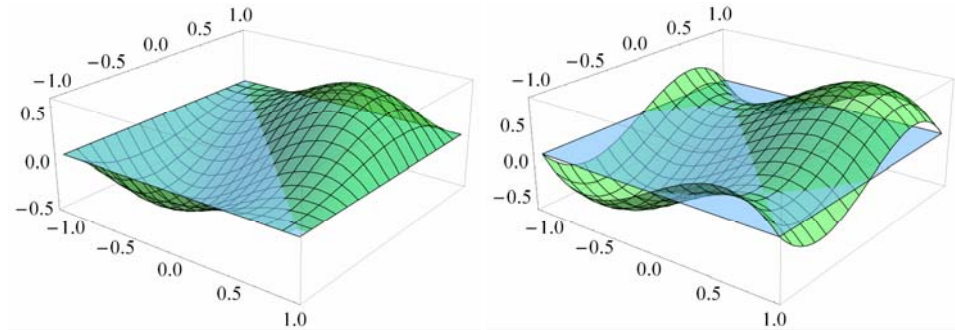


Рис. 1. Індикаторні функції для апостеріорних оцінювачів Діріхле (зліва) та Неймана (справа)

Індикатор похибки η_Q на кожному скінченному елементі $Q \in \mathfrak{T}_h$ і глобальний оцінювач похибки $\|\mathbf{e}_h\|_{1,\Omega}$ визначимо так:

$$\eta_Q = \|e_Q\|_{1,Q} = |\lambda_Q| \|\phi_Q\|_{1,Q} \quad \forall Q \in \mathfrak{T}_h, \quad \|\mathbf{e}_h\|_{1,\Omega}^2 = \sum_{Q \in \mathfrak{T}_h} \eta_Q^2 \quad \forall \mathfrak{T}_h. \quad (24)$$

7. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглянемо таку сингулярно збурену крайову задачу адвекції-дифузії:

$$-\mu \Delta u - (\beta_1, \beta_2) \cdot \nabla u = 0 \quad \text{в } \Omega = (0, 1)^2, \quad u = U \quad \text{на } \Gamma = \partial\Omega \quad (25)$$

з точним розв'язком (див. рис. 2)

$$U(x, y) = G[m\beta_1(x) + v\beta_2(y)]G[m\beta_2(y) - v\beta_1(x)],$$

де $\mu = 10^{-3}$, $\beta_1(x) = x - 0.6$, $\beta_2(y) = y - 0.3$, $G(z) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{erf}(z/\sqrt{2\mu})]$, $m = \cos(\pi/6)$, $v = \sin(\pi/6)$. Ця задача сингулярно збурена з числом Пекле

$$Pe = \mu^{-1} \max_{(x,y) \in \Omega} \sqrt{\beta_1^2(x) + \beta_2^2(y)} \cong 0.8062 \mu^{-1}.$$

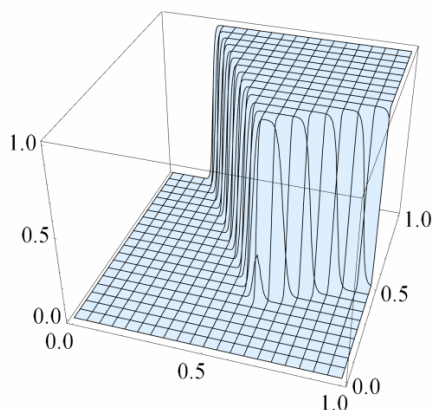


Рис. 2. Точний розв'язок задачі (25)

Перейдемо до аналізу квадратичних серендипових апроксимацій і побудованого для них оцінювача похибки. Спочатку розв'яжемо задачу (25) методом скінченних елементів на рівномірній сітці (див. рис. 3).

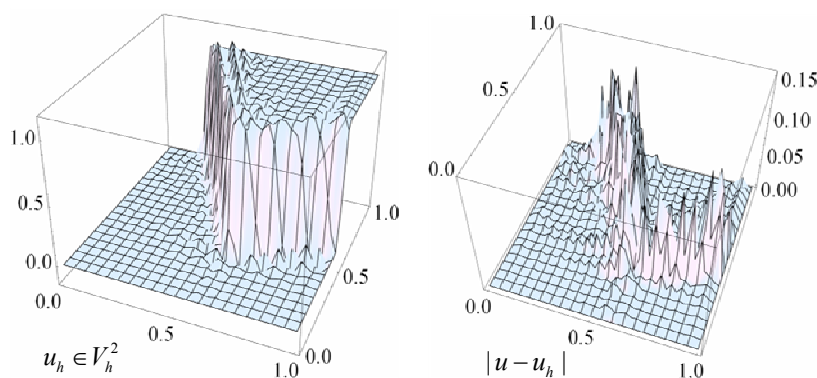


Рис. 3. Ілюстрація результатів розв'язування задачі (25) МСЕ для 20×20 чотирикутних скінченних елементів з квадратичними серендиповими апроксимаціями

На рис. 3. зображено апроксимацію розв'язку u_h та, завдяки наявності точного розв'язку, абсолютну похибку $|u - u_h|$. Похибка скінченно-елементної апроксимації досягає значень в області найвищих найбільших градієнтів, тобто на внутрішньому шарі.

Ми розглядаємо модельну задачу з точним розв'язком для дослідження ефективності та надійності побудованих апостеріорних оцінювачів похибок. З цією метою складаємо таблицю, яка відображає зміну характеристик апроксимації розв'язку та апостеріорної оцінки їхніх похибок при рівномірному згущенні сітки, де k – номер кроку; $Nod \mathfrak{T}_h$ – кількість вузлів сітки; $Card \mathfrak{T}_h$ – кількість скінченних елементів триангуляції \mathfrak{T}_h ; $\varepsilon := \|u - u_h\|_{1,\Omega} \|u\|_{1,\Omega}^{-1} 100\%$ – відносна похибка; $\varepsilon_h := \|e_h\|_{1,\Omega} \|u_h\|_{1,\Omega}^{-1} 100\%$ – апроксимація відносної похибки; $\kappa := \|e_h\|_{1,\Omega} \|u - u_h\|_{1,\Omega}^{-1}$ – індекс ефективності апостеріорного оцінювача похибки та

$p := 2 \ln(\|e_h^k\| \|e_h^{k+1}\|^{-1}) (\ln(N_{k+1} N_k^{-1}))^{-1}$ – порядок збіжності. Відносні похибки, індекси ефективності та порядки збіжності обчислені для апостеріорних оцінювачів Діріхле та Неймана окремо.

Збіжність квадратичних серендипових апроксимацій розв’язку задачі (25) та їхніх апостеріорних оцінок отриманих для рівномірних чотирикутних сіток

k	$Nod \mathfrak{T}_h$	$Card \mathfrak{T}_h$	ε_h^{Dir}	ε	ε_h^{Neu}	κ^{Dir}	κ^{Neu}	p^{Dir}	p^{Neu}
1	96	25	38.429	54.139	50.669	0.7	1.0	–	–
2	341	100	18.814	25.297	25.662	0.8	1.0	1.0	1.0
3	1281	400	4.475	6.229	7.092	0.7	1.1	2.1	1.9
4	4961	1600	1.139	1.536	1.936	0.7	1.3	2.0	1.9
5	19521	6400	0.235	0.356	0.432	0.7	1.2	2.3	2.2
6	77441	25600	0.053	0.086	0.101	0.6	1.2	2.1	2.1
7	308481	102400	0.013	0.021	0.025	0.6	1.2	2.0	2.0
8	1231361	409600	0.003	0.005	0.006	0.6	1.2	2.0	2.0

Як видно з табл., побудовані апостеріорні оцінювачі похибок Діріхле та Неймана забезпечують двосторонні оцінки істинної похибки. Тому індекс ефективності оцінювача Неймана менший, а Діріхле – більший від одиниці, відповідно. В обох випадках індекс ефективності близький до 1.0, що демонструє здатність побудованих апостеріорних оцінювачів похибок добре апроксимувати істинну похибку скінченно-елементної апроксимації. Порядок збіжності дорівнює 2.0, що є теоретично очікуваним. Зауважимо, що лише у випадку, коли порядок збіжності апостеріорного оцінювача похибки близький до порядку збіжності відповідної скінченно-елементної апроксимації, такий оцінювач похибки має практичний сенс. Відомо, що теоретичний порядок збіжності для квадратичних серендипових апроксимацій дорівнює 2.0. Описані властивості апроксимацій та оцінювачів їхніх похибок, як бачимо з результатів перших рядків табл., можуть спотворюватись при значних похибках скінченно-елементних апроксимацій.

Раніше ми побудували апостеріорні оцінювачі похибок для лінійних і білінійних апроксимацій на трикутних та чотирикутних сітках, відповідно. Апостеріорний оцінювач похибки Неймана, який дає змогу отримати верхню оцінку похибки для лінійної апроксимації на трикутній сітці, описано в [11], [13]. За оцінювач Діріхле, відповідно, для нижньої оцінки похибки лінійної апроксимації у цьому випадку вибрано так:

$$e_h|_K \approx 27\lambda_K L_1 L_2 L_3, \quad \lambda_K \in \mathbb{R}, \quad (26)$$

на довільному трикутнику K в барицентричній системі координат (за дет. див. [7]). Також для трикутних сіток реалізовано адаптивний MSE (див. [11], [13]). Оцінювачі Діріхле та Неймана для білінійних апроксимацій на чотирикутній сітці запропоновано в [12]. Так виникає потреба у порівнянні ефективності, надійності, характеристик збіжності та апроксимативності згаданих апостеріорних оцінювачів

похибок з побудованими оцінювачами похибок квадратичних серендипових апроксимацій.

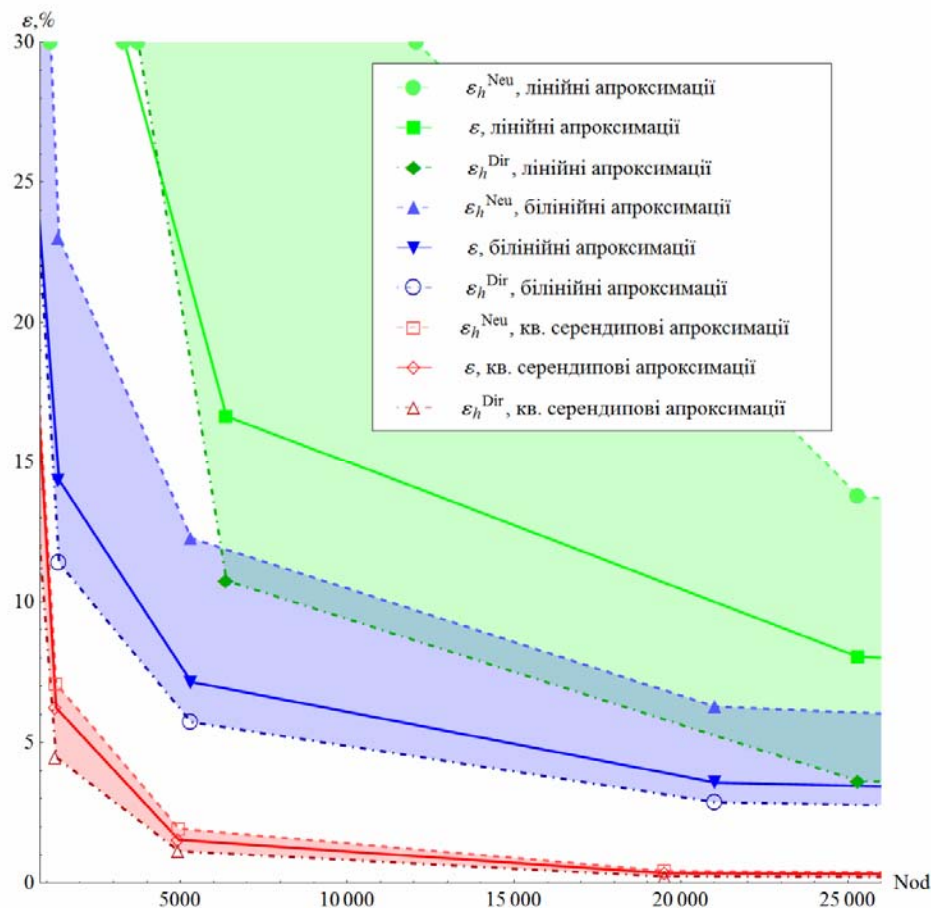


Рис. 4. Характеристики збіжності похибок та їхніх апостеріорних оцінок квадратичних серендипових, білінійних і лінійних апроксимацій на рівномірних сітках

На рис. 4 показана залежність відносних похибок лінійних і квадратичних серендипових апроксимацій від кількості вузлів сітки. Розглядається істинна відносна похибка ϵ та дві відносні похибки ϵ_h^{Dir} та ϵ_h^{Neu} , побудовані на підставі апостеріорних оцінювачів похибок Діріхле та Неймана, відповідно. З рис. 4 видно взаємозв'язок відносної похибки, її апостеріорної оцінки з кількістю ступенів вільності (вузлів сітки). Також у ньому порівнюються точність лінійних, білінійних і серендипових квадратичних апроксимацій на рівномірних сітках та двосторонніх оцінок їхніх похибок. На рис. 4 видно, що серендипові апроксимації та побудовані для них апостеріорні оцінювачі похибок Діріхле і Неймана демонструють значно кращі результати, ніж у випадку лінійних та білінійних апроксимацій.

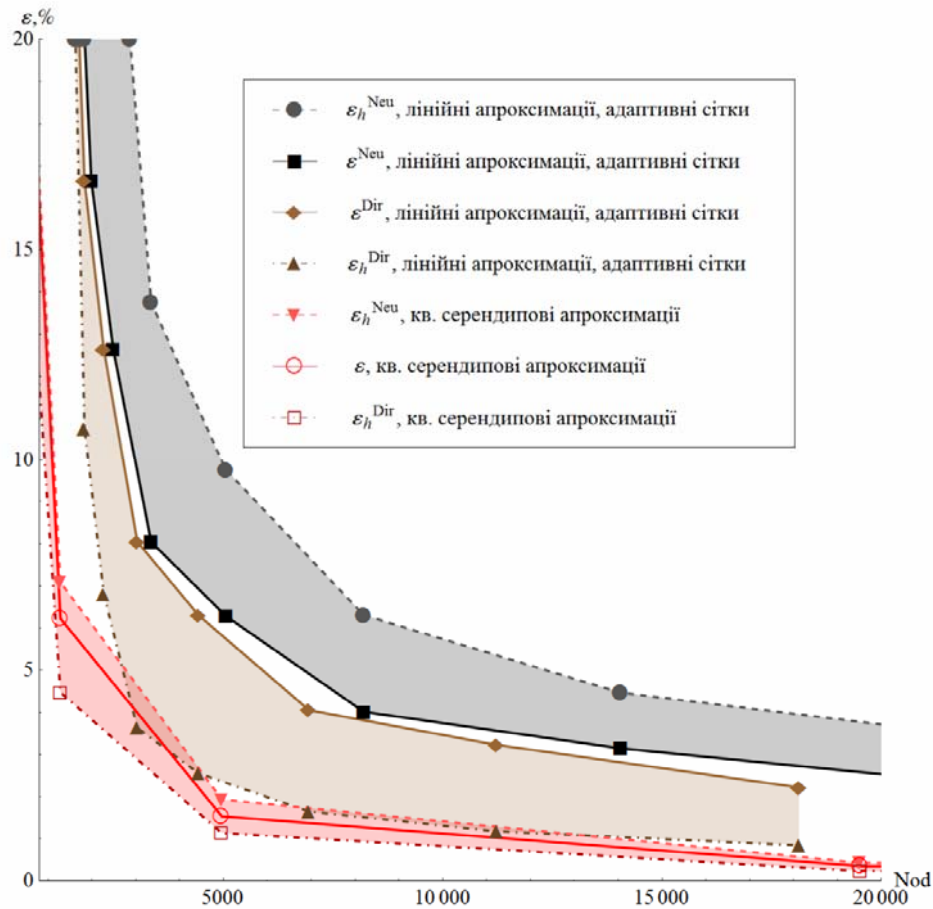


Рис. 5. Характеристики збіжності похибок та їхніх апостеріорних оцінок квадратичних серендипових апроксимацій на рівномірних сітках і лінійних апроксимацій на адаптивних сітках із заданим рівнем точності 1%

На рис. 5 для квадратичних серендипових апроксимацій використано рівномірні чотирикутні сітки, а для лінійних апроксимацій – адаптивні трикутні, побудовані методом бісекції (див. [11], [13]). Адаптування триангуляції відбувається на підставі критерію поділу трикутників, який генерує сітки різної структури для апостеріорних оцінювачів Діріхле та Неймана. Отже, й істинні похибки на різних сітках можуть відрізнятись. На рис. 5 ε^{Dir} та ε^{Neu} відображають значення відносних похибок лінійної апроксимації на адаптивних сітках, згенерованих із використанням оцінювачів Діріхле та Неймана, відповідно. Як видно з рис. 5, значення ε^{Dir} і ε^{Neu} відрізняються, зокрема тим, що ε^{Dir} приймає менші значення, ніж ε^{Neu} . Це означає, що сітки, отримані за використанням оцінювача Діріхле більш якісні в тому сенсі, що забезпечують менші значення похибок за тієї самої кількості вузлів. З рис. 5 видно, що оцінювачі Діріхле та Неймана забезпечують двосторонні оцінки похибок квадратичних серендипових апроксимацій на рівномірних сітках і лінійних апроксимацій на адаптивних сітках. Але навіть на рівномірних сітках квадратичні

серендипові апроксимації та їхні апостеріорні оцінювачі похибок значно виграють в точності порівняно з лінійними апроксимаціями на адаптивних трикутних сітках.

8. ВИСНОВКИ

Ми довели теоретичну можливість отримання двосторонніх оцінок похибок скінченно-елементних апроксимацій. Ця можливість підтверджується числовими експериментами та дослідженнями побудованих апостеріорних оцінювачів Діріхле та Неймана для нижньої та верхньої оцінки похибки. Раніше розроблений механізм отримання двосторонніх оцінок похибок для лінійних та білінійних апроксимацій, поширено і на квадратичні серендипові апроксимації. Цей спосіб дає змогу отримати апостеріорні оцінки похибки апроксимації на кожному скінченному елементі незалежно від сусідніх скінченних елементів, що значно підвищує продуктивність механізму оцінки похибки. Зауважимо, що він є універсальним для розглянутих апроксимацій, різниця полягає лише у виборі відповідних базисних функцій. Зокрема, наслідком цього є можливість легкого поширення побудованого вискоєфективного адаптивного МСЕ [11], [13] для лінійних апроксимацій на трикутних сітках на випадок білінійних і квадратичних серендипових апроксимацій на чотирикутних сітках за наявності реалізованого алгоритму їхнього адаптування.

Наявність двосторонніх оцінок похибки дуже корисна для розв'язування практичних задач, де важливий контроль точності розв'язування. Для адаптивного МСЕ вона дає змогу будувати більш якісні адаптивні сітки за рахунок того, що з двосторонніх оцінок похибки можна отримати уточнене її значення. Детальніше дослідження цієї перспективи двосторонніх оцінок скінченно-елементних апроксимацій є темою майбутніх праць.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вовк О. В.* Ітераційні методи розв'язування нелінійних крайових задач дифузії-конвекції-реакції з гарантованим рівнем похибки / О. В. Вовк, О. Ю. Остапов, Г. А. Шинкаренко // Сучасні проблеми механіки та математики. Інст. прикл. пробл. мех. і матем. ім. Я.С. Підстригача, Львів, 21-25 травня. – 2013. – С. 23-25.
2. *Квасниця Г.* Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики / Г. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2002. – Вип. 5. – С. 95-106.
3. *Квасниця Г.* Порівняння простих апостеріорних оцінювачів похибок методу скінченних елементів для задач еластостатики / Г. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2003. – Вип. 7. – С. 162-174.
4. *Babuška I.* A posteriori error estimates for the finite element method / I. Babuška, W. C. Rheinboldt // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1978. – Vol. 12. – P. 1597-1615.
5. *Babuška I.* Error estimates for adaptive finite element computation / I. Babuška, W. C. Rheinboldt // SIAM J. Numer. Anal. – 1978. – Vol. 15. – P. 736-754.
6. *Babuška I.* Finite Elements: An Introduction to the Method and Error Estimation / I. Babuška, J. R. Whiteman, T. Strouboulis. – Oxford University Press, 2011.
7. *Ostapov O. Yu.* A posteriori error estimator for diffusion-advection-reaction boundary value problems: piecewise linear approximation on triangles / O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko // J. Numer. Appl. Math. – Vol. 2. – 2011. – P. 111-123.
8. *Ostapov O. Yu.* A posteriori error estimations for finite element approximations on quadrilateral meshes / O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // VI Int. conf. named by I. I. Lyashko "Computational and applied mathematics". Taras Shevchenko National University of Kyiv. – 2013. – P. 31-34.

9. *Ostapov O. Yu.* *H*-adaptive finite element method for nonlinear problems with mixed boundary conditions / O. Yu. Ostapov, O. V. Vovk // YSC-2013. Karpenko Physico-Mechanical Institute. – 2013. – P. 349-352.
10. *Ostapov O. Yu.* A posteriori error estimations for serendipity finite element approximations on quadrilateral meshes / O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // XIX Ukrainian science conf., “Modern problems of applied mathematics and computer science”, Ivan Franko National University of Lviv, October 3-4, 2013. – C. 17-18.
11. *Ostapov O. Yu.* A posteriori error estimator and h-adaptive finite element method for diffusion-advection-reaction problems / O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // Recent Advances in Computational Mechanics, Taylor & Francis Group, London. – 2014. – P. 329-337.
12. *Shynkarenko H. A.* A posteriori error estimations for finite element approximations on quadrilateral meshes / H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // Journal of Computational & Applied Mathematics. – 2013. – No 3 (113). – P. 107-118.
13. *Ostapov O. Yu.* Finite element adaptive refinement techniques for diffusion-advection-reaction problems / O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // Manufacturing Processes. Actual Problems-2013. Politechnika Opolska, Opole. – 2013. – Vol. 1. – Basic science applications. – P. 31-46.

Стаття: надійшла до редколегії 26.03.2014

доопрацьована 08.04.2014

прийнята до друку 22.04.2014

АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНИВАТЕЛИ ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ СЕРЕНДИПОВЫХ АППРОКСИМАЦИЙ МКЭ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

О. Вовк¹, Г. Квасниця¹, О. Остапов¹, Г. Шинкаренко^{1,2}

¹Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua

²Опольский политехнический университет,
ул. Пружковская, 76, Ополе, 45-758, e-mail: h.shynkarenko@gmail.com

Построены простые апостериорные оценщики погрешности аппроксимаций метода конечных элементов, способных давать двусторонние оценки погрешности данных приближений к решениям эллиптических краевых задач. В предположении выполнения условий насыщенности и усиленного неравенства Коши доказано существование нижней и верхней границ погрешностей. Дано вычислительный вариант двусторонних оценок, основанный на элементно-определенных апостериорных оценщиках Дирихле и Неймана для определения нижней и верхней границ истинной погрешности квадратичных серендиповых аппроксимаций. Особенности, вычислительные характеристики и сравнение этих оценщиков с построенными ранее для линейных и биквадратичных аппроксимаций продемонстрированы детальными результатами численных экспериментов на примере сингулярно возмущенной задачи для уравнения диффузии-адвекции-реакции.

Ключевые слова: метод конечных элементов (МКЭ), двусторонние оценщики погрешности, условия насыщения, усиленное неравенство Коши, апостериорный оценщик погрешности (АОП), элементно-определенный АОП, серендиповы аппроксимации, АОП Дирихле, АОП Неймана.

**A POSTERIORI ERROR ESTIMATORS OF QUADRATIC SERENDIPITY
FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS FOR ELLIPTIC BOUNDARY VALUE
PROBLEMS****O. Vovk¹, G. Kvasnytzia¹, O. Ostapov¹, H. Shynkarenko^{1,2}**¹*Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska Str, 1, Lviv, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua*²*Opole University of Technology,
Prószkowska Str., 76, Opole, 45-758, e-mail: h.shynkarenko@gmail.com*

The main goal of this paper is to construct simple a posteriori error estimators for finite elements method approximations which are able to provide double-sided error estimates of such approximations of elliptic boundary value problems solutions. Under assumption that saturation condition and strengthened Cauchy inequality are held, we establish the existence lower and upper error boundaries. In addition we present numerical method for double-sided estimates which is based on element-wise Dirichlet and Neumann a posteriori error estimators for calculation lower and upper exact error boundaries of quadratic serendipity approximations. The features, numerical characteristic and comparison of these estimators with the ones devised earlier for linear and bilinear approximations are demonstrated by detailed results of numerical experiments with example of singularly perturbed problem for diffusion-advection-reaction equation.

Key words: finite element method (FEM), double-sided error estimates, saturation condition, strengthened Cauchy inequality, a posteriori error estimator (AEE), element-wise AEE, serendipity approximation, Dirichlet AEE, Neumann AEE.