

## **ВИЗНАЧЕННЯ ШИРИНИ РОЗКРИТТЯ НОРМАЛЬНИХ ТРИЩИН У ЗАЛІЗОБЕТОННІЙ БАЛЦІ З ПОЗИЦІЙ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ**

**Кінаш Р.І.** , *д.т.н., проф.*

*Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна*

### **1. Вступ**

Розвиток технології бетону привів за останні десятиліття до створення бетонів нової генерації, які є відповідно на необхідність врахування у будівництві додаткових чинників, пов'язаних із підвищеними вимогами до довговічності будівельних конструкцій [19]. Залізобетонні конструкції – це елементи з бетону підсилені стержнями або стрічками з арматурної сталі. У випадку застосування таких конструкцій у спеціальному будівництві виникає необхідність у виборі відповідних методів для виконання розрахунків, які дозволяють враховувати ефекти від несприятливих впливів на конструкції.

Особливістю роботи залізобетонних балок є виникнення тріщин в тих частинах, у яких напруження досягають границі міцності бетону на розтяг у стадії далекій до вичерпання їхньої тримкості. Тріщини, які утворюються під час згинання залізобетонних балок є приблизно перпендикулярні до робочої арматури і виникають на однаковій відстані між собою, розвиваються від крайньої (розтягнутої) грані елемента до нейтральної осі [17]. Одним з важливих параметрів, який характеризує тріщину є ширина її розкриття. Методику розрахунку ширини розкриття тріщин містить Єврокод 2 [16], яка базується на давно відомих теоретичних основах [18], використаних в нормах [1, 2] а також у польському нормативному документі [14].

Усі ці нормативні документи містять рекомендації і формули, щодо знаходження цієї величини, але відомо, що значення ширини розкриття тріщини, обчислені за формулами, наведеними у згаданих документах, можуть суттєво відрізнятись від знайдених експериментально. Застосування положень механіки руйнування для знаходження параметрів напруженого стану залізобетонних елементів з тріщинами і, зокрема, величини ширини розкриття тріщини є перспективним підходом до розв'язання цієї задачі [3]. Тому в цій статті наведено основні положення методики розрахунку ширини розкриття нормальних тріщин з

використанням загальних положень механіки руйнування та методу скінчених елементів.

## 2. Визначення ширини розкриття нормальних тріщин

Ширину розкриття нормальних тріщин розраховують з використанням усереднених значень деформацій бетону й арматури [15]. На рис. 1 наведені основні положення та позначення, які використані у розрахунках.

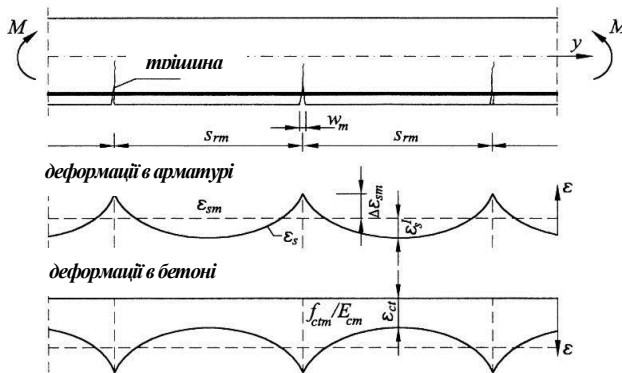


Рис. 1. Схема деформацій у бетоні й арматурі в момент утворення тріщин [15]

Інтегруючи різницю деформацій арматури  $\varepsilon_{sm}$  і бетону  $\varepsilon_{ct}$  на відрізок  $s_{rm}$  між тріщинами, визначаємо середню ширину розкриття тріщини:

$$w_m = \int_{s_{rm}} (\varepsilon_s - \varepsilon_{ct}) dy. \quad (1)$$

Нехтуючи невідомими (по відношенню до  $\varepsilon_s$ ) деформаціями розтягнутого бетону  $\varepsilon_{ct}$  дозволяє визначити середню величину розкриття тріщин, як різницю середньої відстані між тріщинами  $s_{rm}$  і середньою деформацією арматури  $\varepsilon_{sm}$  в перерізі з тріщиною (рис. 1):

$$w_m \cong s_{rm} \cdot \varepsilon_{sm} \cong (\varepsilon_{sm} - \Delta \varepsilon_{sm}) \quad (2)$$

У свою чергу деформації арматури  $\varepsilon_{sm}$  визначають за функцією напружень в перерізі з тріщиною [15].

## 3. Математична модель залізобетонної балки

У розглядуваному напружено-деформованому стані залізобетонної балки прямокутного поперечного перерізу, в якій під дією згинального моменту  $M$  в зоні чистого згину утворилась система нормальних кра-

йових тріщин, математична модель передбачає розташування в розтягнутій зоні тріщин однакової довжини  $L$  на однаковій віддалі  $l_{cre}$  одна від одної. Балка розглядається як нескінченний стержень, з стрічковим армуванням у розтягнутій зоні бетону (також відноситься до сталобетонних конструкцій з зовнішнім армуванням [11], або прийняті спрощення для обчислень звичайних залізобетонних балок зі стержневою арматурою). В умовах плоскої задачі площу поперечного перерізу стержневої арматури вважаємо рівномірно розподіленою по ширині поперечного перерізу балки у вигляді пружного шару [3]. Крім того, нехтуємо захисним шаром арматури, що рівнозначно припущенню про розташування арматури в крайніх волокнах поперечного перерізу.

Сумісна робота бетону й арматури залізобетонної балки здійснюється завдяки зчепленню між ними. Моделювання цього процесу здійснюється поділом залізобетонної балки на три частини: арматура, контактний шар (КШ) і основна частина. Через  $h_1$ ,  $h_2$  і  $h$  позначимо відповідно висоту армування, КШ і основної частини балки (рис.2).

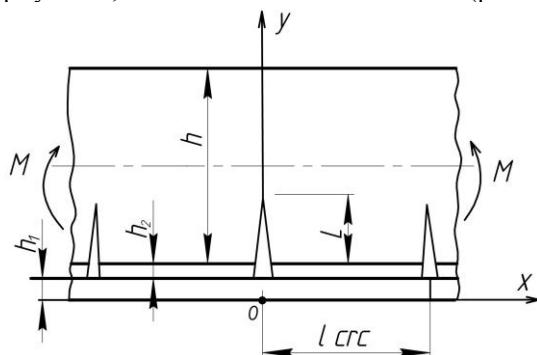


Рис. 2. Схема представлення залізобетонної балки з тріщинами, підкріпленою смугою з контактним шаром

Необхідність введення КШ обумовлена властивостями бетону, який знаходиться в зоні контакту, оскільки експериментально встановлено [4], що виступи рифлення арматури викликають деструктивні явища, зокрема, концентрацію напружень в зоні взаємодії арматури з бетоном. В ряді робіт [3-5] пропонується не досліджувати детально ці явища, а обмежитися положеннями технічної теорії зчеплення, згідно з якою залежність між напруженнями та деформаціями в КШ відрізняється від відповідної залежності для основного матеріалу. З огляду на цю теорію напруження зчеплення  $\tau$  і залежить від зміщення арматури  $g$  відносно пограничних волокон КШ. Нелінійний зв'язок в КШ між дотичними напруженнями зчеплення  $\tau$  та величиною  $g$  представимо у вигляді [5]:

$$\tau = \begin{cases} \frac{G_2}{h_2} \cdot g & g < g_k, \\ \beta \frac{\ln(1 + \alpha \cdot g)}{1 + \alpha \cdot g} & g_k \leq g < g_{kr}, \\ \tau_{\max} & g \geq g_{kr}, \end{cases} \quad (3)$$

де  $G_2$  - модуль зсуву КІП,  $a$  та  $b$  - константи зчеплення, які знаходять експериментально і залежать від профілю арматури, міцності та виду бетону,  $g_{kr} = (e-1)/\alpha$ ,  $\tau_{\max} = \beta/e$  ( $e$  - основа натурального логарифма).

Величину  $g_k$  знаходять, як розв'язок рівняння

$$0,5\tau_{\max} = \beta \frac{\ln(1 + \alpha \cdot g_k)}{1 + \alpha \cdot g_k}, \quad \text{при } 0 \leq g_k < g_{kr}. \quad (4)$$

Залежність між  $g$  та деформацією зсуву  $\square_{xy}$  виражається співвідношенням [5]

$$g = h_2 |\gamma_{xy}|. \quad (5)$$

У математичній моделі армування і основну (бетонну) частину балки будемо розглядати як пружні тіла, які характеризуються початковими модулями пружності відповідно  $E_1$  і  $E$  та коефіцієнтами Пуассона відповідно  $\nu_1$  і  $\nu$ .

Оскільки залежність між величинами дотичних напружень та деформацією зсуву в КІП нелінійна, то для знаходження компонентів напружено-деформованого стану застосуємо метод змінних параметрів пружності [6]. При цьому залежності між компонентами напружень  $\square_{ij}$  та деформацій  $\varepsilon_{ij}$  в КІП можна представити у вигляді закону Гука, але із змінними параметрами і у випадку плоского напруженого стану вони мають вигляд:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E^*} (\sigma_{xx} - \nu^* \sigma_{yy}), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E^*} (\sigma_{yy} - \nu^* \sigma_{xx}), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G^*} \tau_{xy}. \quad (6)$$

Значення величин  $E^*$ ,  $\nu^*$ ,  $G^*$  визначають за формулами:

$$E^* = \frac{G_i}{1 + m \cdot G_i}, \quad \nu^* = \frac{0,5 - m \cdot G_i}{1 + m \cdot G_i}, \quad G^* = \frac{1}{3} G_i \quad (7)$$

$$\text{де } G_i = \frac{3\tau_i}{\gamma_i}, \quad m = \frac{1 - 2\nu_2}{3E_2},$$

$E_2$ ,  $\nu_2$  - модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу КІП,  $\tau_i$ ;  $\gamma_i$  - інтенсивності дотичних напружень та деформацій зсуву.

Враховуючи те, що зона контакту бетону з арматурою в залізобетонних балках є зоною високих дотичних напружень, вважаємо, що в

КШ величини  $\tau_i$  та  $\gamma_i$  залежать лише від  $\tau_{xy}$  і  $\gamma_{xy}$  відповідно дорівнюють

$$\tau_i = |\tau_{xy}|, \quad \gamma_i = |\gamma_{xy}|, \quad (8)$$

Визначення напружено-деформованого стану балки проводили за допомогою методу скінченних елементів. Балку моделювали арматурною смугою, в якій армування і КШ приймають висотою в один скінченний елемент. Невідомими величинами є переміщення вузлів скінченноелементної сітки цієї смуги, які визначали з відомої системи лінійних алгебраїчних рівнянь [7]

$$[K]\{Q\}=\{F\}, \quad (9)$$

де  $[K]$  - глобальна матриця жорсткості всій системи,  $\{Q\}$  - вектор переміщення вузлів,  $\{F\}$  - вектор вузлових сил, в якому підсумовані зовнішні навантаження, які приведені до вузлів.

Глобальна матриця жорсткості  $[K]$  отримана з матриць жорсткості окремих елементів підкріплення, КШ та основної частини балки. У вказані матриці увійшли модулі пружності  $E$ ,  $E_1$  і коефіцієнти Пуассона  $\nu$ ,  $\nu_1$  а також визначені із формул (5) -  $E^*$  та  $\nu^*$  для КШ.

Враховуючи формули (4), (5) пружнопластична задача з нелінійним КШ для сталевих смуг з системою крайових тріщин зводиться до розв'язання послідовності пружних задач. При цьому організовано ітераційний процес, в першому наближенні якого приймемо в КШ  $G_1=3G$ , тоді змінні параметри пружності будуть постійними  $E^*=E_2$ ,  $\nu^*=\nu_2$ ,  $G^*=G_2$ . Далі для розв'язання задачі використовуємо алгоритм методу змінних параметрів пружності [6].

Відстань між тріщинами визначаємо за формулою [8]

$$l_{crc} = k_1 n_1 u_1 \eta_1, \quad (10)$$

$$\text{де } k_1 = \frac{W_{pl}}{n_1 W_s} - 2, \quad u_1 = \frac{A_s}{p_1}, \quad n_1 = \frac{E_1}{E}.$$

Тут  $W_{pl}$  і  $W_s$  - пружно-пластичні моменти опору перерізу по розтягнутій зоні відповідно перед та після утворення тріщин,  $A_s$  та  $p_1$  відповідно площа та периметр поперечного перерізу арматури, коефіцієнт  $\eta_1$  враховує вид та профіль арматури і для стержневої арматури періодичного профілю приймається рівним 0,7.

При збільшенні величини згинального моменту тріщина розпочинає поширюватися в тому випадку, коли коефіцієнт інтенсивності напружень  $K_I$  досягає критичної величини  $K_{IC}$  для даного матеріалу. Коефіцієнт інтенсивності напружень визначають за формулою [7]:

$$K_1^2 = EJ, \quad (11)$$

$$\text{де: } J = \int_C \left( W \cdot n_x - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} n_j \right) ds, \quad (i=1, 2; \quad j=1, 2),$$

$J$  – незалежний від периметру інтеграл Черепанова-Райса,  $C$  – периметр, який обходимо в напрямку проти годинникової стрілки навколо вершини тріщини, відносно осі  $Oy$ ,  $W$  – густина енергії деформування,  $n_j$  – складова одиничного вектора зовнішнього перпендикуляра до периметра,  $u_i$  – складова вектора переміщень.

Інтеграл  $J$  обчислюємо за допомогою відомих параметрів напружено-деформованого стану. Значення  $K_{IC}$  обчислюємо за відомою емпіричною залежністю [9], в якій модуль зчеплення  $K$  ( $K = K_{IC} \sqrt{\pi/2}$ ) виражений через кубикову міцність бетону  $R$  ( $R_{20}$ ), а саме

$$\begin{aligned} K &= 2\sqrt{R\sqrt{R}} \quad \text{для } R \leq 350, \\ K &= 38\sqrt[4]{R} \quad \text{для } R > 350, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $R$  приймають в  $KG/cm^2$ ,  $K$  в  $KG/cm^{3/2}$ .

Для відомої наперед значення висоти тріщини, обчислюють значення  $K_I$ , яку порівнюють з  $K_{IC}$ . У випадку їх відмінності, висоту тріщини змінюють, а процедуру повторюють до одержання задовільного сходження. У цьому випадку приймають, що висоту тріщини визначено.

Розрахунок параметрів тріщин в залізобетонних балках армованою сталевією стрічковою арматурою можна також виконати з використанням методу скінченних елементів. Прийнято модель висотою  $h$ , шириною  $b$  і довжиною  $6h$ . Систему декількох тріщин у балці замінено на систему з трьома тріщинами (рис. 2). Обчислення виконано для середньої тріщини. Враховуючи симетрію балки з тріщинами, розглядаємо її половину, для якої була збудована сітка з скінченних елементів, яка налічує 400 лінійних чотирикутних елементарних комірок. Початок системи координат  $XU$  прийнято в нижній частині сітки. Вісь  $OY$  направлено вздовж тріщини,  $OX$  – вздовж нижніх волокон арматури. Шар арматури і КШ прийнято висотою в один скінченний елемент. Числову сітку згущували біля вершини, а також осі тріщини. Значення ширини розкриття тріщини визначали подвоєнням значення переміщення вузла (оскільки розглядалась половина балки), який знаходився на межі КШ і основної частини перерізу балки.

#### 4. Числові розрахунки та результати розрахунків

З метою перевірки запропонованої методики визначення ширини розкриття нормальних тріщин, одержані результати порівнювали з даними експериментальних досліджень [10], а також з результатами розрахунків ширини розкриття тріщин в зоні чистого згину залізобетонної балки за нормами [1, 2] і Єврокод 2 [13, 15-17]. Усі позначення в розрахункових формулах залишено відповідно до прийнятих в оригіналах використаних Норм.

У нормі СНИП 1989 [1] розрахунки значення ширини розкриття нормальних тріщин  $a_{crc}$  виконують за формулою

$$a_{crc} = \delta \rho_l \frac{\sigma_s}{E_s} 20 \cdot (3,5 - 100 \bar{\mu})^3 \sqrt{d}, \quad (13)$$

Згідно з Єврокодом 2 [15] ширину тріщин можна обчислити за формулою

$$w_k = s_{r,max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}), \quad (14)$$

де  $s_{r,max}$  – максимальна відстань між тріщинами,  $\varepsilon_{sm}$  – середні деформації арматури,  $\varepsilon_{cm}$  – середні деформації бетону між тріщинами.

Значення  $\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$  можна одержати з залежності:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_1 \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s}, \quad (15)$$

де  $\sigma_s$  – напруження в розтягнутій арматурі, визначене в перерізі з тріщиною,  $\alpha_e$  – відношення  $E_s / E_{cm}$

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s + \xi_1^2 A_p}{A_{c,eff}}, \quad (16)$$

$A_p, A_{c,eff}, \xi_1$  – як прийнято в [16].

Числовий розрахунок проведено для балки з параметрами наведеними в [10] (балка ВІ-3), а саме:

$h = 0,365$  м,  $b = 0,144$  м,  $E_1 = 190000$  МПа,  $R = 54,9$  МПа,  $M_{crc} = 12,7$  кНм,  $\rho = 0,94\%$ ,  $A_s = 4,94 \times 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,

де:  $b$  – ширина балки,  $\rho$  – процент армування,  $M_{crc}$  – момент тріщиноутворення,  $A_s$  – площа поперечного перерізу арматури.

Висоту арматури  $h_u$  сітці скінченних елементів прийнято, як відношення величини  $A_s$  до ширини балки  $b$ . Висота КШ прийнята рівною висоті стрічки ( $h_2 = h_1$ ). Коефіцієнт Пуассона для сталі  $\nu_1$  прийнято 0,3; для бетону та КШ (початковий) – 0,2. Модуль пружності бетону і межу пластичності арматури сталі класу А-IV наведено в [8].

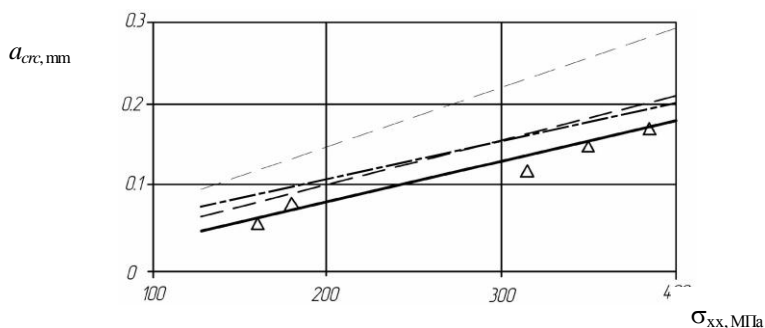


Рис. 3. Залежності ширини розкриття тріщин від напружень в арматурі  $\sigma_{xx}$

————— за методикою [12]      - · - · - за методикою [16]  
 - - - - - за методикою [1]      Δ- за даними [10]  
 - - - - - за методикою [2]

Обчислення виконано до моменту досягнення в арматурі, в перерізі з тріщиною нормальних напружень  $\sigma_{xx}$  рівних межі пластичності (400 МПа). На графіках (рис.3) наведено залежності ширини розкриття тріщин від напружень в перерізі з тріщиною рівних  $\sigma_{xx}$ .

### Висновки

1. Використання представленої методики розрахунку ширини розкриття нормальних тріщин у залізобетонних згинаних елементах дозволить досягнути вищої точності результатів обчислень у порівнянні з прийнятими методами в чинних нормах проектування.

2. Результати розрахунків виконаних за наведеною методикою задовільно збігаються з результатами експериментальних досліджень. Максимальні відхилення між результатами експериментальних досліджень і результатами розрахунків за методикою [12] складає 13,9%, 108,1% - для формули наведеної у [1], 48,7 % - для формули наведеної у [2], а також 32,4% - для формули наведеної у [16]. Максимальні відхилення складають відповідно – 1,6%, 15,8% , 62,1% і 12,0%.

### Summary

The width calculation of opening normal cracks method is presented in a reinforced concrete beam from positions of destruction mechanics with using the finite-element method. The analysis of received results demonstrates fine precision in compare to conducted calculations according to existent normative documents.



1. СНиП 2.03.01-84\*. Бетонные и железобетонные конструкции/ Госстрой СССР - М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. - 80 с.
2. Нормоконтроль. Изменение № 1 к СНиП 2.03.01-84 (изд. 1989 г.) //Будівництво України, 1995, № 6.
3. Пересыпкин Е.Н. Расчет стержневых железобетонных элементов. М.: Стройиздат, 1988. - 168с.
4. Холмянский М. М. Контакт арматуры с бетоном. М.: Стройиздат, 1981. - 184 с.
5. Русинко К., Павленко П. Дослідження процесу розвитку системи нормальних тріщин в армованій балці // Машинознавство, 1998. - № 9/10. - С. 6-9.
6. Писаренко Г.С., Можаровский НС. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1981- 493 с.
7. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980. - 254 с.
8. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. М.: Стройиздат, 1985. - 727 с.
9. Митрофанов В.П., Жовнир А.С. Экспериментальное исследование характеристики сопротивления распространению трещин обычного тяжелого бетона // Известия вузов. Строительство и архитектура. - 1976.- №3 - С. 19-23.
10. Немировский Я.М., Кочетков О.И. Влияние работы растянутой и сжатой зон бетона на деформации обычных изгибаемых железобетонных элементов после возникновения в них трещин // Особенности деформаций бетона и железобетона и использование ЭВМ для оценки их влияния на поведение конструкций / НИИЖБ. М.: Стройиздат, 1969. - С. 106-156.
11. Кінаш Р.І. Витривалість сталевобетонних балок із зовнішньою стрічковою арматурою. Дис. к.т.н., Полтава, 1992. – 220с.
12. Кінаш Р.І., Павленко П.В. Визначення ширини розкриття нормальних тріщин в залізобетонній балці з позицій механіки руйнування / Зб. наук. праць, вип.5, Рівне, 2000. – С.178-184.
13. Starosolski W. Konstrukcje żelbetowe: według PN-B-03264:2002 i Eurokodu 2. T. 1, 2 , 3
14. PN-B-03264: Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie. PKN, 2002.
15. Łapko A. Projektowanie konstrukcji żelbetowych: wg Eurokodu 2 i PN-B-03264: 1999 / Arkady, Warszawa, 2000. – 552s.
16. Eurokod 2. Projektowania konstrukcji z betonu. Cz. 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków, PKN, Warszawa, 2008. – 205s.
17. Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych i sprężonych: według Eurokodu 2. / zespół aut. Michał Knauff [et al.] ; Sekcja Konstrukcji Betonowych KILiW PAN. 2006.- 976s.
18. Мурашов В.И. Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона. Машгостройиздат, Москва. 1950.
19. Czaja P., Hydzik J, Wałach D. Ekonomiczne aspekty stosowania betonu wysokowartościowego w budownictwie podziemnym // Górnictwo i Geoinżynieria / Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica, Kraków. 2009 R. 33 z. 3/1 s. 121–130.