

---

**Panin V., Krivoshey F., Syomin O., Makarov O.**

**DEFINING OF THE TEMPERATURE OF THERMAL DAMAGE OF THE HEAT-STRESSED SURFACES OF THE ENGINE IN THE APPROXIMATION OF «RUNNING WAVE» WITH VARIDLE VELOCITY**

*In the approximation of «running wave» temperature limits were defined, which cause thermal damage (microcracks – «web» of the heat transfer surfaces of the internal combustion engine.*

**Keywords:** temperature, «running wave», thermal damage.

УДК 539.3

**Левченко В.В., Безверхий А.И., Макиевский А.И.**

**ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ  
ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ КОЛЬЦЕВОЙ ФОРМЫ С  
АЗИМУТАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ ЭЛЕКТРОДОВ**

*Получено общее решение задачи об электромеханических колебаниях пьезокерамической кольцевой пластины. Для пластин с радиальными разрезами электродного покрытия при различных условиях закрепления (свободный край - свободный край, свободный край - жестко заземленный край) численно определены и проанализированы спектры собственных частот колебаний и зависимость форм колебаний от количества и геометрии разрезов.*

**Ключевые слова:** Пьезокерамическая кольцевая пластина, радиальные разрезы покрытия электродов, неосесимметричные электромеханические колебания, спектры собственных частот.

**Анализ современного состояния проблемы.** Круговые тонкие пьезокерамические диски со сплошными и разрезанными электродами используются, как элементы ультразвуковых электромеханических преобразователей для излучения и приёма акустических колебаний, а также в резонаторах и фильтрах частот [4,6,7]. Концентрические электроды у виде разделенных кольцевыми разрезами или неполного электродного покрытия дают возможность выделять выбранные обертоны и гасить нежелательные колебания [4,7]. Возможны множественные варианты как электрического соединения концентрических электродов, так и размещения неполного электродного покрытия. В пьезоэлектрических вибраторах круглой конфигурации (диски и кольца) собственные формы осесимметричных колебаний, начиная со второй собственной частоты ( на обертонах ) имеют узловые концентрические круги [2,4,7]. Вследствие возникновения зон растяжения и сжатия снижается эффективность электромеханической связи. Во избежание такого недостатка предложено [4,7,8] разрезать электродное покрытие по узловым концентрическим кругам. Опубликованные теоретические исследования в этом направлении не дают достаточной информации анализа этого явления, что и повлекло изложенные в данной статье исследования .

**Постановка и общее решение задачи.** Планырные гармонические колебания пьезоэлектрической круглой пластины с электродированными лицевыми плоскостями

$z = \pm h/2$  при плоском напряженном состоянии (  $u_z = u_0 = 0$ ,  $\sigma_{zz} = \sigma_{zr} = \sigma_{z\theta}$ ,  $E_x = E_y = 0$  ) в случае осесимметричной деформации описываются уравнением [1-3]

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = (1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (1)$$

и формулами для механических напряжений и электрической индукции

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} \left( \nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z^a \right), \\ D_z &= d_{31}(\sigma_r + \sigma_\theta) + d_{33} \sigma_z + \varepsilon_{33}^T E_z \end{aligned} \quad (2)$$

В соотношениях (1), (2)  $s_{11}^E, s_{12}^E$  - упругие постоянные при нулевом электрическом поле,  $d_{31}$  - пьезоэлектрическая постоянная,  $\nu_E = -s_{12}^E/s_{11}^E$  - аналог коэффициента Пуассона,  $\rho$  - плотность материала [4,5].

Рассмотрим кольцевую пластину  $r_0 < r < r_N$  с двусторонними разрезами электродного покрытия по кольцевым линиям  $r = r_n$ , где  $(n = 1, \dots, N-1)$ . Решение уравнения (1) при гармонических колебаниях  $f(r, t) = \text{Re } f^a(r) \exp i \omega t$  будет

$$\begin{aligned} u_r^a(r) &= R A_1 J_1(k_E r) + R B_1 Y_1(k_E r), \quad r_0 < r < r_1 \\ u_r^a(r) &= R A_n J_1(k_E r) + R B_n Y_1(k_E r), \quad r_{N-1} < r < r_N \end{aligned} \quad (3)$$

Решению (3) соответствуют механические напряжения  $\sigma_{rr}^a, \sigma_{\theta\theta}^a$  и электрическая индукция

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^a &= \frac{R}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} (A_n a_1(k_E r) + B_n b_1(k_E r) - (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,n}) e^{i \omega t}, \\ \sigma_{\theta\theta}^a &= \frac{R}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} (A_n a_2(k_E r) + B_n b_2(k_E r) - (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,n}) e^{i \omega t}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$r_{n-1} < r < r_n, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Здесь используются обозначения

$$\begin{aligned} a_1(k_E r) &= k_E R J_0(k_E r) - (1 - \nu_E) \frac{R}{r} J_1(k_E r), \\ b_1(k_E r) &= k_E R Y_0(k_E r) - (1 - \nu_E) \frac{R}{r} Y_1(k_E r), \\ a_2(k_E r) &= \nu_E k_E R J_0(k_E r) + (1 - \nu_E) \frac{R}{r} J_1(k_E r), \\ b_2(k_E r) &= \nu_E k_E R Y_0(k_E r) + (1 - \nu_E) \frac{R}{r} Y_1(k_E r) \end{aligned}$$

$$s_E = s_{11}^E (1 - \nu_E^2), \quad E_{za,n} - \text{амплитуды напряженности электрического поля } E_{z,n} = \text{Re } E_{za,n} \exp i \omega t$$

на кольце  $r_{n-1} < r < r_n$ . Принимается допущение, что для всех колец  $r_{n-1} < r < r_n$  остаются справедливыми предположение о плоском напряженном состоянии и во всех них электрический потенциал поля независимый от планарных координат и изменяется по толщине по линейному закону.

Из условий сопряжения по линиям разреза  $r_n$  электродов при совершенном механическом и электрическом контактах

$$u_r(r_n - 0, t) = u_r(r_n + 0, t), \quad \sigma_r(r_n - 0, t) = \sigma_r(r_n + 0, t) \quad n = 1, \dots, N-1$$

(5)

получим систему уравнений

$$\begin{aligned} A_n J_1(k_E r_1) + B_n Y_1(k_E r_1) &= A_{n+1} J_1(k_E r_1) + B_{n+1} Y_1(k_E r_1), \\ A_n a_1(k_E r_1) + B_n b_1(k_E r_1) - (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,n} &= A_{n+1} a_1(k_E r_1) + B_{n+1} b_1(k_E r_1) - (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,n+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$n = 1, \dots, N-1$$

Пользуясь рекуррентными формулами, можно определить  $A_n, B_n$ , через  $A_1, B_1$ ,

$$\begin{aligned} A_n &= A_1 - (1 + \nu_E) d_{13} \sum_{q=1}^{n-1} (E_{za,q+1} - E_{za,q}) \frac{Y_1(k_E r_q)}{\Delta(k_E r_q)}, \\ B_n &= B_1 + (1 + \nu_E) d_{13} \sum_{q=1}^{n-1} (E_{za,q+1} - E_{za,q}) \frac{J_1(k_E r_q)}{\Delta(k_E r_q)}, \\ n &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (7)$$

Из граничных условий при  $r = r_0$  вытекают следующие алгебраические уравнения:

для жестко закрепленного края  $u_r(r_0, t) = 0$

$$A_1 J_1(k_E r_0) + B_1 Y_1(k_E r_0) = 0, \quad (8)$$

а для свободного от напряжений края  $\sigma_r(r_0, t) = 0$ .

$$A_1 a_1(k_E r_0) + B_1 b_1(k_E r_0) = (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,1} \quad (9)$$

Из граничных условий при  $r = r_N$  вытекают алгебраические уравнения:

для жестко закрепленного края  $u_r(r_N, t) = 0$

$$A_N J_1(k_E r_N) + B_N Y_1(k_E r_N) = 0, \quad (10)$$

а для свободного от напряжений края  $\sigma_r(r_N, t) = 0$ .

$$A_N a_1(k_E r_N) + B_N b_1(k_E r_N) = (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,N} \quad (11)$$

Если подставить (7) в (10), то получим

$$A_1 J_1(k_E r_N) + B_1 Y_1(k_E r_N) = J_1(k_E r_N) \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n(k_E r_n) - Y_1(k_E r_N) \sum_{n=1}^{N-1} \beta_n(k_E r_n), \quad (12)$$

причем

$$\alpha_n = (E_{za,q+1} - E_{za,q}) \frac{Y_1(k_E r_q)}{\Delta(k_E r_q)}, \quad \beta_n = (E_{za,q+1} - E_{za,q}) \frac{J_1(k_E r_q)}{\Delta(k_E r_q)}.$$

Если подставить (7) в (11), то получим

$$\begin{aligned} A_1 a_1(k_E r_N) + B_1 b_1(k_E r_N) = \\ (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,N} + a_1(k_E r_N) \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n(k_E r_n) - b_1(k_E r_N) \sum_{n=1}^{N-1} \beta_n(k_E r_n) \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом будем иметь четыре возможные комбинации граничных условий при  $r = r_0$  и  $r = r_N$ , и соответствующие им системы для определения неизвестных постоянных  $A_1, B_1$ , и частотное уравнение для определения частот свободных колебаний:

1. Жестко закреплен край  $r = r_0$  - жестко закреплен край  $r = r_N$

$$A_1 J_1(k_E r_0) + B_1 Y_1(k_E r_0) = 0,$$

$$A_1 J_1(k_E r_N) + B_1 Y_1(k_E r_N) = J_1(k_E r_N) \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n(k_E r_n) - Y_1(k_E r_N) \sum_{n=1}^{N-1} \beta_n(k_E r_n); \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix}
J_1(k_0) & J_1(k_0) & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
J_1(k_1) & Y_1(k_1) & -J_1(k_1) & -Y_1(k_1) & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_1(k_1) & b_1(k_1) & -a_1(k_1) & -b_1(k_1) & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & J_1(k_2) & J_1(k_2) & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -a_1(k_{N-2}) & -b_1(k_{N-2}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & J_1(k_{N-1}) & Y_1(k_{N-1}) & -J_1(k_{N-1}) & -Y_1(k_{N-1}) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a_1(k_{N-1}) & b_1(k_{N-1}) & -a_1(k_{N-1}) & -b_1(k_{N-1}) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & J_1(k_N) & J_1(k_N)
\end{vmatrix} = 0$$

2. Жестко закреплён край  $r = r_0$  - свободный от напряжений край  $r = r_N$

$$A_1 J_1(k_E r_0) + B_1 Y_1(k_E r_0) = 0,$$

$$A_1 a_1(k_E r_N) + B_1 b_1(k_E r_N) =$$

$$(1 + \nu_E) d_{13} E_{za,N} + a_1(k_E r_N) \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n(k_E r_n) - b_1(k_E r_N) \sum_{n=1}^{N-1} \beta_n(k_E r_n); \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix}
J_1(k_0) & J_1(k_0) & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
J_1(k_1) & Y_1(k_1) & -J_1(k_1) & -Y_1(k_1) & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_1(k_1) & b_1(k_1) & -a_1(k_1) & -b_1(k_1) & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & J_1(k_2) & J_1(k_2) & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -a_1(k_{N-2}) & -b_1(k_{N-2}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & J_1(k_{N-1}) & Y_1(k_{N-1}) & -J_1(k_{N-1}) & -Y_1(k_{N-1}) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a_1(k_{N-1}) & b_1(k_{N-1}) & -a_1(k_{N-1}) & -b_1(k_{N-1}) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & a_1(k_N) & b_1(k_N)
\end{vmatrix} = 0$$

3. Свободный от напряжений край  $r = r_0$  - жестко закреплён край  $r = r_N$

$$A_1 a_1(k_E r_0) + B_1 b_1(k_E r_0) = (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,1},$$

$$A_1 J_1(k_E r_N) + B_1 Y_1(k_E r_N) = J_1(k_E r_N) \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n(k_E r_n) - Y_1(k_E r_N) \sum_{n=1}^{N-1} \beta_n(k_E r_n); \quad (16)$$

$$\begin{vmatrix}
a_1(k_0) & b_1(k_0) & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
J_1(k_1) & Y_1(k_1) & -J_1(k_1) & -Y_1(k_1) & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_1(k_1) & b_1(k_1) & -a_1(k_1) & -b_1(k_1) & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & J_1(k_2) & J_1(k_2) & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -a_1(k_{N-2}) & -b_1(k_{N-2}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & J_1(k_{N-1}) & Y_1(k_{N-1}) & -J_1(k_{N-1}) & -Y_1(k_{N-1}) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a_1(k_{N-1}) & b_1(k_{N-1}) & -a_1(k_{N-1}) & -b_1(k_{N-1}) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & J_1(k_N) & J_1(k_N)
\end{vmatrix} = 0$$

4. Свободный от напряжений край  $r = r_0$  - свободный от напряжений край  $r = r_N$

$$A_1 a_1(k_E r_0) + B_1 b_1(k_E r_0) = (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,1},$$

$$A_1 a_1(k_E r_N) + B_1 b_1(k_E r_N) =$$

$$(1 + \nu_E) d_{13} E_{za,N} + a_1(k_E r_N) \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n(k_E r_n) - b_1(k_E r_N) \sum_{n=1}^{N-1} \beta_n(k_E r_n). \quad (17)$$

$$\begin{vmatrix}
a_1(k_0) & b_1(k_0) & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
J_1(k_1) & Y_1(k_1) & -J_1(k_1) & -Y_1(k_1) & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_1(k_1) & b_1(k_1) & -a_1(k_1) & -b_1(k_1) & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & J_1(k_2) & J_1(k_2) & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -a_1(k_{N-2}) & -b_1(k_{N-2}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & J_1(k_{N-1}) & Y_1(k_{N-1}) & -J_1(k_{N-1}) & -Y_1(k_{N-1}) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a_1(k_{N-1}) & b_1(k_{N-1}) & -a_1(k_{N-1}) & -b_1(k_{N-1}) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & a_1(k_N) & b_1(k_N)
\end{vmatrix} = 0$$

Если внутреннее кольцо  $r_0 < r < r_1$  вырождается в круглую пластину  $0 \leq r < r_1$ , то есть  $r_0 = 0$ , то решением для него будет функция

$$U_r(r) = A_1 R J_1(k_E r), \quad 0 \leq r < r_1 \quad (18)$$

т.е. постоянная  $B_1 = 0$ . Тогда в (7) также  $B_1 = 0$ . Граничных условий (8), (9) не будет, а условия (10), (11) перейдут в следующие формулы для определения  $A_1$ :

- при жестком закреплении  $u_r(r_N, t) = 0$

$$A_1 = \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \alpha_n(k_E r_n) - \frac{Y_1(k_E r_N)}{J_1(k_E r_N)} \beta_n(k_E r_n) \right\} \quad (19)$$

- при свободном от напряжений крае  $\sigma_r(r_N, t) = 0$

$$A_1 = (1 + \nu_E) d_{13} \frac{E_{za, N}}{a_1(k_E r_N)} + \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \alpha_n(k_E r_n) - \frac{b_1(k_E r_N)}{a_1(k_E r_N)} \beta_n(k_E r_n) \right\} \quad (20)$$

## 2. Численные результаты и их анализ.

Рассмотрим пьезокерамическую кольцевую пластину со свойствами  $\rho = 7740 \text{ кг/м}^3$ ,  $s_{11}^E = 15,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$ ,  $s_{12}^E = -5,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$ ,  $d_{31} = -125 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/Н}$ ,  $E_{za,1} = E_{za,2} = 2000 \text{ В/м}$ , что соответствует пьезокерамике ЦТС-19 [1,5,6],

Численный анализ проводился для пластины с геометрией  $\bar{r}_0 = r_0/R = 0,4$ ,  $\bar{r}_4 = r_4/R = 1$ . Предполагалось, что разрезы электродного покрытия делят пластину на четыре кольца с шириной колец  $h_1 = h_3$ ,  $h_2 = h_4$  двух слоев шириной соответственно  $h_1$  и  $h_2$ , а ширина пакета  $h = h_1 + h_2 = (r_4 - r_0)/2$ . В нашем случае предполагалось наличие двух пакетов, что обеспечивается тремя разрезами. Ширина пакета равнялась  $h = (\bar{r}_4 - \bar{r}_0)/2$ .

Численные эксперименты показали, что значения собственных частот колебаний не зависят от наличия разрезов электродов.

Рассматриваемые варианты подключения электродов приведены в таблице

$r$	$r_0 < r < r_1$	$r_1 < r < r_2$	$r_2 < r < r_3$	$r_3 < r < R$
Напряженность (1 вид соединения)	$E$	$-E$	$E$	$-E$
Напряженность (2 вид соединения)	$E$	$0$	$E$	$0$
Напряженность (3 вид соединения)	$E$	$0$	$0$	$0$

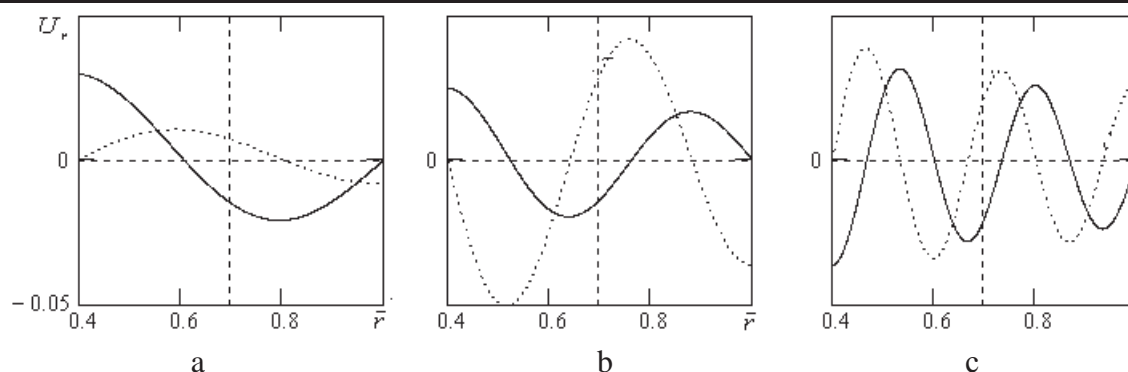


Рис. 1. Формы колебаний для 1<sup>го</sup> вида соединения электродов

Источник: составлено авторами

На рис. 1 для 1<sup>го</sup> вида соединения электродов приведены формы колебаний при  $\bar{h}_2 = h_2/R = 0.15$  второй (а), третьей (б) и пятой (с) моды колебаний, для следующих граничных условий:

2 жестко закрепленный край  $r = r_0$  и свободный от напряжений край  $r = r_4$  (пунктирная кривая), а значение первых пяти безразмерных собственных частот следующие  $\varpi_1 = 2,76583$ ,  $\varpi_2 = 7,93913$ ,  $\varpi_3 = 13,14434$ ,  $\varpi_4 = 18,36553$ ,  $\varpi_5 = 23,59297$  ) и

3 свободный от напряжений край  $r = r_0$  и жестко закрепленный край  $r = r_4$  (сплошная кривая), а значение первых пяти безразмерных собственных частот будут  $\varpi_1 = 3,20884$ ,  $\varpi_2 = 8,04387$ ,  $\varpi_3 = 13,20123$ ,  $\varpi_4 = 18,40479$ ,  $\varpi_5 = 23,62303$  )

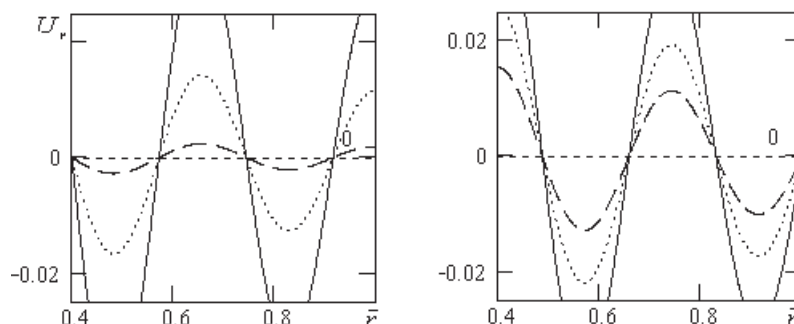


Рис. 2. Формы колебаний для различных видов соединения электродов

Источник: составлено авторами

На рис. 2 приведены формы колебаний для 1<sup>го</sup> вида соединения электродов (сплошная кривая), 2<sup>го</sup> вида (точечная кривая), 3<sup>го</sup> вида (пунктирная кривая) при  $\bar{h}_2 = h_2/R = 0.15$  для тех же граничных условий что и на рис. 1. Из полученных результатов следует: вид соединения электродов влияет на величину амплитуды колебаний.

Проанализируем влияние ширины электродированного кольца на амплитуду колебаний для различных частот, при разных граничных условиях.

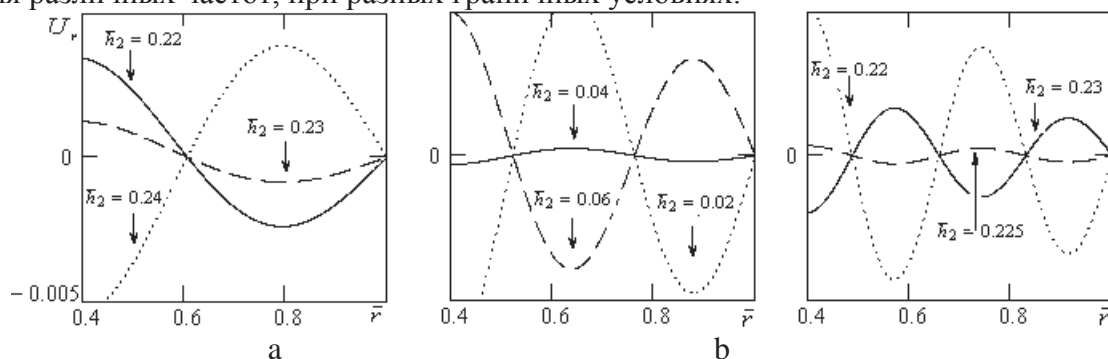


Рис. 3. Формы колебаний для различных мод для граничных условий 2

Источник: составлено авторами

Для граничных условий 2 (жестко закрепленный край  $r = r_0$  и свободный от напряжений край  $r = r_4$ ) на рис.3 представлены формы колебаний для различных мод (второй (а), третьей (б) и пятой (с)).

Для граничных условий 3 (свободный от напряжений край  $r = r_0$  и жестко закрепленный край  $r = r_4$ ) аналогичные результаты представлены на рис.4.

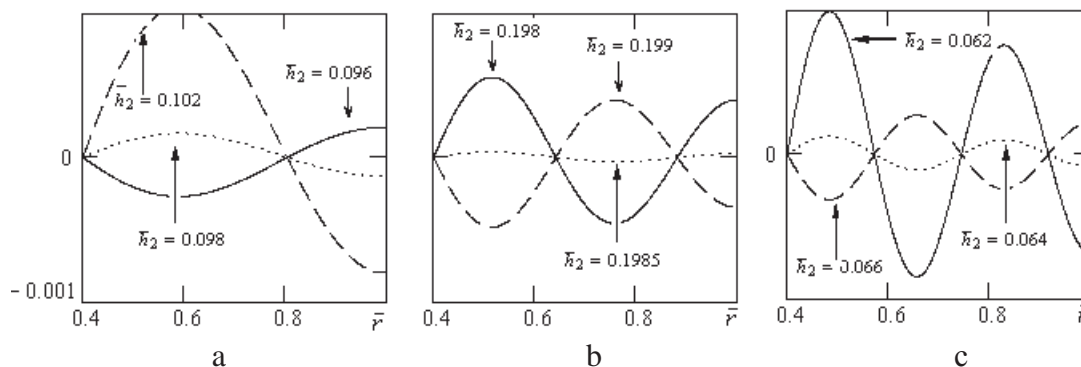


Рис. 4. Формы колебаний для различных мод для граничных условий 3

Источник: составлено авторами

Анализ результатов представленных на рис.3 и рис. 4 показал, что изменением толщины слоев можно изменять амплитуду колебаний и добиться ее нулевого значения.

Узловая точка обусловленная разрезами, как показали численные эксперименты может быть только одна для выбранного типа разрезов. Нулевого значения амплитуды колебаний при первом типе соединений можно добиться изменением ширины одного из слоев в пакете.

**Выводы.** В тонких кольцевых пьезокерамических пластинах с азимутальными разрезами электродов на лицевых плоскостях возбуждаются планарные колебания. В статье получено общее решение соответствующей задачи. Для двух типов альтернативных граничных условий численно проанализирована спектральная задача. В работе показано, что азимутальные двусторонние разрезы электродов не приводит к изменению собственных частот колебаний кольцевой пьезокерамической пластины. Узловые точки колебаний совпадают при всех возможных вариантах соединений электродов и в окрестности узловых точек формы колебаний, как правило, меняют значение амплитуды на противоположное по знаку. Изменением радиуса разреза можно изменять амплитуду формы колебаний, за исключением случая параллельной поляризации всех колец. Показано, что введением разрезов можно существенно изменить форму колебаний. Установлено количество узловых линий собственных форм и зависимость их числа от количества разрезов и типа соединений электродов. по радиальной координате (форма по азимуту определяется количеством радиальных разрезов).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. – М.: Наука. 1982. – 424 с.
2. Механика связанных полей в элементах конструкций. В 6-х т.; Т. 5. Электроупругость / Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. / Отв. ред. А. Н. Гузь. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
3. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел: - М.: Наука, 1988. – 472 с.
4. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин – К.: Наук. думка, 2008. – 272 с.
5. Шульга М. О., Левченко В. В. До теорії неосесиметричних електропружних коливань п'єзокерамічних пластин // Доп. НАН України. – 2012. – № 6. – С. 61-68.



- 
6. Mason W. P. Piezoelectricity, its history and applications // J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – 70, N 6. – P. 1561 – 1566.
7. Munk E. C. The equivalent electrical circuit for radial modes of a piezoelectric ceramic disk with concentric electrodes // Phillips Res. Rep. – 1965. – 20. – P.170-189.
8. Shul'ga N. A., Levchenko V. V., Mekievskii O. I. Non-axisymmetric Electroelastic Vibrations of Piezoceramic of Ring Plates with Radial Cuts of Electrodes // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N4. – P. 94-104.

**Левченко В.В., Безверхий О.І., Макієвський О.І.**

**ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ КІЛЬЦЕВОЇ ФОРМИ З АЗИМУТАЛЬНИМИ РОЗРІЗАМИ ЕЛЕКТРОДІВ**

*Одержано загальний розв'язок задачі про електромеханічні коливання п'єзокерамічної кільцевої пластини. Для пластин з радіальними розрізами електродного покриття при різних умовах закріплення (вільний край – вільний край та жорстке закріплення – жорстке закріплення) чисельно визначено і проаналізовано спектри власних частот коливань і залежність форм коливань від числа і геометрії розрізів.*

**Ключові слова:** п'єзокерамічна кільцева пластина, радіальні розрізи покриття електродів, неосесиметричні електромеханічні коливання, спектри власних частот.

**Levchenko V., Bezverkhyi O., Mekievskiy O.**

**HARMONIC OSCILLATIONS OF PIEZOELECTRIC ELECTROMECHANICAL CONVERTERS OF THE RING FORM WITH AZIMUTHAL SECTIONS OF ELECTRODES**

*The general solution of problem electromechanical vibrations of piezoceramic ring plate is obtained. For the plates with radial cuts of electrode covering and for boundary conditions rigid clamping - free edge, free edge - rigid clamping the spectra of natural frequencies of vibrations are mode shapes for the first harmonics in the circumferential coordinate are identified are numerically determined and analyzed*

**Keywords.** piezoceramic ring plate, radial cuts of electrode covering, non-axisymmetric electromechanical vibrations, spectra of natural frequencies.

УДК 629.05

**Доронін В.В., Алєйніков М.В., Алєйніков В.М.**

**ЗАСТОСУВАННЯ КРИТЕРІЇВ ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ ІНСТРУМЕНТАЛЬНОГО МЕТОДУ НАВІГАЦІЇ НА ВВШ УКРАЇНИ**

*У статті запропоновано метод вибору критеріїв оцінки функціональної стійкості складної системи, що відображає ефект від застосування інструментального методу навігації на базі електронно-картографічних систем Inland ECDIS на ВВШ України. Здійснена математична формалізація критеріальних визначень з використанням моделі неорієнтованого графа, що сприятиме підвищенню безпеки руху водних транспортних засобів з урахуванням специфіки функціонування транспортної системи України.*