

КОЛИВАННЯ СПОЛУЧЕНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ РІЗНИХ ФОРМ

Григоренко Я. М., академік НАНУ, гол. н. с., Беспалова О. І., д. ф.-м. н., п. н. с.,
Урусова Г. П., к. ф.-м. н., с. н. с.

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, м. Київ, 03057, Україна*

metod@inmech.kiev.ua

Проведено дослідження вільних коливань тонкостінних систем зі сполучених між собою співвісних оболонок обертання різних геометричних форм. Для розв'язання відповідних задач на власні значення розроблено чисельно-аналітичну методику, що включає відокремлення змінних за методом Фур'є, метод покрокового пошуку ($\Delta(\lambda)$ -метод) та метод ортогональної прогонки для розв'язання одномерних задач. Тестування методики проведено індуктивно шляхом порівняння з результатами, що одержані іншими методами. На конкретних прикладах показано, що коливання системи оболонок, як єдиного об'єкта, мають якісні відмінності в порівнянні з коливаннями окремих її складових елементів.

Ключові слова: тонкостінні системи, оболонки обертання, власні частоти, класична теорія, чисельно-аналітична методика, особливості коливань.

КОЛЕБАНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ РАЗНЫХ ФОРМ

Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Урусова Г. П.

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина*

metod@inmech.kiev.ua

Проведено исследование свободных колебаний тонкостенных систем из сопряженных соосных оболочек вращения разных геометрических форм. Для решения соответствующих задач на собственные значения разработана численно-аналитическая методика, включающая разделение переменных по методу Фурье, метод пошагового поиска ($\Delta(\lambda)$ -метод) и метод ортогональной прогонки решения одномерных задач. Тестирование методики проведено индуктивно путем сравнения с результатами, полученными другими методами. На конкретных примерах показано, что колебания системы оболочек, как единого объекта, имеет качественные особенности по сравнению с колебаниями отдельных ее составляющих элементов.

Ключевые слова: тонкостенные системы, оболочки вращения, собственные частоты, классическая теория, численно-аналитическая методика, особенности колебаний.

VIBRATIONS OF COMPOUND SHELLS OF REVOLUTION WITH VARIOUS SHAPES

Grigorenko Ya. M., Bepalova E. I., Urusova G. P.

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine,
Nesterova str., 3, Kiev, 03057, Ukraine*

metod@inmech.kiev.ua

Using the ideas of the classical Kirchhoff–Love theory, the free vibrations of thin-walled systems composed of joined coaxial shells of revolution of dissimilar geometrical shapes, including elements with either positive or negative gaussian curvature, are studied. Such shell systems model many structures of modern engineering such ones as rocket airframes and underwater vehicles, high-pressure balloons and adapting pipes, shielding covers of nuclear reactors, land storage tanks for petroleum derivatives, etc. The above shells may be made as one-layer across the thickness or be composed of arbitrary number of isotropic or orthotropic layers that operate without separation and sliding. The shell ends may be subject to the action of arbitrary physically consistent boundary conditions while the equilibrium conditions for static characteristics as well as the continuity conditions for kinematic characteristics of the shell stress-strain state are formulated at the conjugation lines of adjacent shells.

To solve an appropriate two-dimensional eigenvalue problem, a numerical analytical technique was developed applying the Fourier variable separation method, incremental search method ($\Delta(\lambda)$ -method), and the numerical orthogonal sweep method with solving Cauchy's problems by the fifth-order Runge-Kutta scheme in Merson's modification. The technique was tested inductively by comparing with the known results obtained employing different approaches for

certain particular cases of similar systems. Comparison of the values of the lower natural frequencies calculated by the technique proposed and some other methods (differential quadrature method, semi-analytical finite element method, series method with approximation by the first-order Chebyshev polynomials, analytical Fourier solution with the Stokes transform, finite element ANSYS software-based method, etc.) showed good agreement of the results: distinctions between frequency values practically do not exceed 1%.

Vibration futures of the above shell system, which is considered as a single whole, are analyzed, using as an example the conditional dependency $\omega = \omega(k)$ traditional for shells of revolution, in comparison with vibrations of its separate composing members. This dependence characterizes how the minimum natural frequency ω varies depending on the waveformation mode in the circumferential direction k . It is shown that vibrations of the shell systems as a single object reveal qualitatively dissimilar character in comparison with vibrations of its individual components. In particular, in the case of joined shells, we can observe some local minimums in the range of lower frequencies for the dependency $\omega = \omega(k)$. To foresee this feature of compound systems beforehand, practically is impossible.

Key words: thin-walled systems, shells of revolution, natural frequencies, classical theory, numerical analytical technique, vibration features.

ВСТУП

Предметом дослідження роботи є коливання тонкостінних систем, що складаються зі з'єднаних між собою співвісних оболонок обертання різних геометричних форм. Такими системами моделюється, зазвичай, багато конструкцій сучасної техніки, зокрема, корпуси ракет та апарати підводного занурення, балони високого тиску для зберігання нафти та газу, захисні покриття ядерних реакторів тощо.

Знання динамічних характеристик таких об'єктів дає змогу відстежувати резонансні режими їх роботи в умовах дії реальних навантажень і тим самим запобігти виникненню аварійних ситуацій. Запити практики значною мірою сприяли активним дослідженням за цією тематикою, що зумовило широке коло публікацій, присвячених аналізу власних частот спряжених систем та розробці методів розв'язання відповідних задач на власні значення.

Наразі найбільш повне дослідження власних частот складних з'єднаних між собою оболонок проведено для систем нульової гаусової кривизни у вигляді комбінацій з циліндричних, конічних оболонок та кільцевих пластин. Так, у [1] вивчалися резонансні частоти ізотропної системи циліндр–зрізаний конус при різних граничних умовах. Аналогічна система у випадку дискретно неоднорідної за товщиною структури досліджувалася в [2]. Кільцева пластина у з'єднанні з круговим циліндром або конусом розглядалася відповідно в роботах [3, 4]. У [5] проведено аналіз власних частот шаруватої конструкції з трьох елементів – циліндра та двох конусів, що моделює фрагмент космічного корабля.

Значно більший клас конструкцій описується системами, що включають елементи сферичної форми, тобто мають ненульову, але сталу гаусову кривизну. Так, у [6] проведено аналіз коливань системи сфера–циліндр–сфера, що є розрахунковою схемою герметичної капсули, у [7] розглянуто систему конус–циліндр–сфера з кільцевими підкріпленнями, а в [8] досліджено власні частоти спряжених сферичної та циліндричної оболонок при різних граничних умовах.

Теоретичною основою розробок за цією тематикою є здебільшого моделі Доннелла-Муштарі-Флюге, класична модель Кіргофа-Лява та зсувні моделі першого порядку Рейснера-Міндліна-Нагди [1, 2, 8]. Математичний апарат базується на застосуванні метода скінчених елементів у різних його модифікаціях, змішаних рядів з апроксимацією тригонометричними функціями за круговою координатою та ортогональними поліномами за меридіональною, методу Релея-Рітца з вибором різних систем базисних функцій тощо [2, 5, 7, 8]. В окремих статтях розв'язок задачі одержано в аналітичному вигляді [6].

Разом з тим, новітні інженерні рішення сучасної техніки пропонують більш складні форми конструкцій, що відповідають підвищеним вимогам їх експлуатації. Це стимулює дослідження з'єднаних оболонок з елементами ускладненої геометрії, зокрема з елементами тороеліптичної форми, що, як частинний випадок, охоплюють системи нульової та сталої гаусової кривизни.

Виходячи з цього, у роботі проводиться дослідження динамічних характеристик спряжених оболонок обертання з елементами тороеліптичної форми додатної та від'ємної гаусової кривизни. Розрахунок власних частот та форм коливань проводиться в рамках припущень теорії Кіргофа-Лява із застосуванням розробленої чисельно-аналітичної методики. Ця методика ґрунтується на апараті відокремлення змінних Фур'є, зведення вихідної двовимірної задачі на власні значення до послідовності відповідних одновимірних задач, розв'язання їх методом покрокового пошуку в сполученні з чисельним методом ортогональної прогонки. На конкретних прикладах досліджено особливості коливань системи зі сполучених оболонок обертання різних форм порівняно з коливаннями її складових частин.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИКА ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Як об'єкт дослідження, вибрана система, що складається з J з'єднаних між собою співвісних оболонок обертання різної форми. Кожна складова оболонка розглядається як окрема j -та ділянка (елемент) єдиної оболонкової системи, координатна (серединна в частинному випадку) поверхня якої утворена обертанням деякої кусочно гладкої кривої навколо прямолінійної осі Oz (рис. 1). Положення довільної точки цієї поверхні задається в ортогональній спряженій системі координат (α, θ) , де $\alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\}$ ($j = \overline{1, J}$) змінюється за твірною – меридіаном, а θ – є центральним кутом на перерізі $z = \text{const}$. Координатна поверхня $\gamma = 0$, яка є деякою вихідною поверхнею відліку за товщиною оболонок, вибирається неформально, а змінна γ відраховується за нормаллю до цієї поверхні. Оболонки можуть бути одношаровими, або складатися з багатьох шарів змінної за меридіаном товщини, між якими виконуються умови ідеального контакту. Приймається, що матеріали шарів працюють в пружній стадії деформування та можуть бути ізотропними або ортотропними. На торцях оболонкової системи $\alpha = \alpha_{01}$ та $\alpha = \alpha_{1J}$ задаються довільні однорідні фізично несуперечливі граничні умови, а на лініях

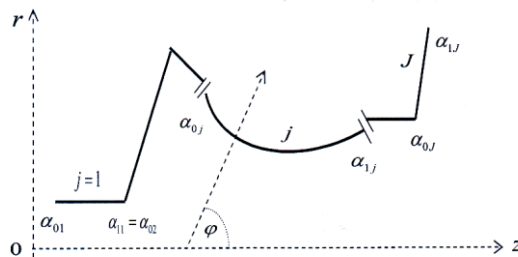


Рис. 1. Загальний вигляд твірної-меридіана оболонкової системи

контакту $\alpha_{1j-1} = \alpha_{0j}$ ($j = \overline{2, J-1}$) двох суміжних $j-1$ -ої та j -ої ділянок у спільній системі координат rOz формулюються умови рівноваги для статичних та умови нерозривності для кінематичних факторів напружено-деформованого стану оболонок. Припускається, що в межах кожної окремої ділянки системи, тобто для кожної складової оболонки, її геометричні параметри, товщина та фізико-механічні властивості матеріалу задаються гладкими функціями змінної α .

Для описаної системи оболонок обертання в роботі проводиться дослідження її малих незатухаючих коливань. Дослідження проводиться в рамках відомих положень класичної теорії Кіргофа-Лява, а для формулювання відповідної двовимірної задачі за основні невідомі

$$\text{приймаються компоненти вектор-функції } \vec{N} = \{N_n(\alpha, \theta, t)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{Q} \\ \vec{U} \end{matrix} \right\} \quad (n = \overline{1, 8})$$

з такими статичними

$$\vec{Q} = \{N_n(\alpha, \theta, t)\} = \{T_r, T_z, \hat{S}_\alpha, M_\alpha\}^T \quad (n = \overline{1, 4}) \quad (1)$$

та кінематичними

$$\vec{U} = \{N_n(\alpha, \theta, t)\} = \{u_r, u_z, v, \vartheta_\alpha\}^T \quad (n = \overline{5, 8}) \quad (2)$$

складовими.

Тут T_r, T_z – радіальне та осьове зусилля, u_r, u_z – радіальне та осьове переміщення довільної точки координатної поверхні системи, що виражаються формулами:

$$\begin{aligned} T_r &= T_\alpha \cos \varphi + \hat{Q}_\alpha \sin \varphi, \quad T_z = T_\alpha \sin \varphi - \hat{Q}_\alpha \cos \varphi, \\ u_r &= u \cos \varphi + w \sin \varphi, \quad u_z = u \sin \varphi - w \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

$T_\alpha, \hat{S}_\alpha = T_{\alpha\theta} + k_2 H, T_{\alpha\theta}, \hat{Q}_\alpha = Q_\alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}, Q_\alpha$ – нормальне, приведенне зсувне, зсувне, приведенне перерізує та перерізує зусилля в перетині $\alpha = \text{const}$; M_α, H – згинний та крутний моменти, ϑ_α – кут повороту нормалі в цьому ж перетині; $k_2 = k_2(\alpha), r = r(\alpha)$ – кривизна кривої меридіану в коловому напрямку та відстань довільної точки меридіана до осі обертання; φ – кут, утворений нормаллю до координатної поверхні та віссю обертання, t – часова змінна.

Відносно вибраних невідомих (1), (2), відповідна двовимірною задачею про вільні коливання з'єднаних між собою оболонок обертання формулюється у векторно-матричному вигляді для такої системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial \alpha_j} = \sum_{s=0}^4 B_s \frac{\partial^s \vec{N}}{\partial \theta^s} + C \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2}, \quad \alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j}), \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (4)$$

при однорідних граничних умовах на торцевих контурах системи

$$R_{01} \vec{N} = 0, \quad \alpha = \alpha_{01}, \quad (5)$$

$$R_{1J} \vec{N} = 0, \quad \alpha = \alpha_{1J}, \quad (6)$$

умовах сумісної роботи на лініях контакту (спряження)

$$\vec{N}|_{\alpha_{1j-1}} = \vec{N}|_{\alpha_{0j}}, \quad \alpha = \alpha_{1j-1} = \alpha_{0j} \quad (7)$$

та умовах періодичності в коловому напрямку

$$\vec{N}(\alpha, \theta + 2\pi) = \vec{N}(\alpha, \theta) \quad (8)$$

(у позначенні точки α_{pj} перший індекс p відповідає початку ($p=0$) і кінцю ($p=1$) j -ї ділянки (або j -ї оболонки), другий індекс $j = \overline{1, J}$ – номеру ділянки оболонкової системи).

Ненульові елементи матриць $B_s = \{b_{mn}^s(\alpha, \theta)\}$ ($s = \overline{0, 4}$) та матриці $C = \{c_{nm}\}$, що характеризують інерційні властивості оболонок, наведені в [9, ст. 23-25].

Слід зауважити, що перевагою вибору невідомих у вигляді (1), (2) перед іншими можливими варіантами (наприклад, вибору в переміщеннях) є зручність формулювання умов спряження суміжних елементів на лініях контакту (7) та граничних умов (5), (6) на торцевих перетинах.

Для розв'язання задачі (4)-(8) відокремимо в компонентах вектор-функції \vec{N} часовий множник $e^{i\omega t}$ і подамо їх у вигляді одинарних тригонометричних рядів за круговою координатою θ :

$$\vec{N} = \left\{ N_n(\alpha, \theta, t) = \sum_{k=0,1,2,\dots} N_{nk}(\alpha) \begin{bmatrix} \sin k\theta \\ \cos k\theta \end{bmatrix} e^{i\omega t} \right\} \quad (n=\overline{1,8}), \quad (9)$$

де ω – шукана власна частота оболонки, k – параметр хвилеутворення в коловому напрямку, вираз у квадратних дужках означає, що частина компонент вектор-функції \vec{N} , а саме \hat{S}_α і v , розкладаються за $\sin k\theta$, а всі інші – за $\cos k\theta$, $i^2 = -1$.

У результаті такого подання вихідна задача (4)-(8) для кожної гармоніки ряду k (9) зводиться до однорідної одновимірної задачі, що містить невідомий числовий параметр $\lambda = \omega^2$ та формулюється відносно функціональних коефіцієнтів $\vec{N}_k = \{N_{nk}(\alpha)\}$:

$$\frac{d\vec{N}_k}{d\alpha_j} = (\tilde{B}_k - \lambda C) \vec{N}_k, \quad \alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j}) \quad (j=\overline{1, J}), \quad (10)$$

$$\vec{N}_k|_{\alpha_{j-1}} = \vec{N}_k|_{\alpha_{0j}}, \quad \alpha = \alpha_{1j-1} = \alpha_{0j} \quad (j=\overline{2, J}) \quad (11)$$

$$R_{01k} \vec{N}_k = 0, \quad \alpha = \alpha_{01}, \quad (12)$$

$$R_{1Jk} \vec{N}_k = 0, \quad \alpha = \alpha_{1J}, \quad (13)$$

Елементи матриці $\tilde{B}_k = \{b_{mn}\}$ ($n, m=\overline{1,8}$) виражаються через елементи матриць $B_s = \{b_{mn}^s(\alpha, \theta)\}$ ($s=\overline{0,4}$) з врахуванням подання (9) (див. [9, с.64]).

Для знаходження невідомого параметра $\lambda = \omega^2$ і відповідного йому розв'язку \vec{N}_k застосовується метод покрокового пошуку ($\Delta(\lambda)$ -метод) [10, ст. 246]. Значення цього методу полягає в знаходженні таких значень $\lambda \neq 0$, при яких однорідна крайова задача (10)-(13) має нетривіальний розв'язок $\vec{N}_k \neq 0$. Для розв'язання одновимірної лінійної крайової задачі в роботі застосовано метод ортогональної прогонки, який базується на зведенні крайової задачі до набору задач Коші, що розв'язуються за схемою Рунге-Кутта 5-го порядку (модифікація Мерсона). При такому підході умова знаходження нетривіального розв'язку задачі (10)-(13) зводиться до визначення нулів характеристичного детермінанту:

$$\Delta(\lambda) = \det(R_{1Jk} Z(\alpha_{1J}, \lambda)) = 0, \quad (14)$$

де $Z(\alpha_{1J}, \lambda)$ – прямокутна матриця розмірності 8×4 , стовбці якої є розв'язками задач Коші для системи (10), що задовольняють умовам спряження (11) та граничним умовам (12).

Алгоритм знаходження нулів виразу (14) реалізовано таким чином: шляхом перебору значень λ відшукується два послідовні значення λ_v і λ_{v+1} , що задовольняють умові $\Delta(\lambda_v) \Delta(\lambda_{v+1}) \leq 0$, а далі за допомогою половинного ділення або інших інтерполяційних прийомів інтервал $(\lambda_v, \lambda_{v+1})$ стягується до одержання $\lambda \in (\lambda_v, \lambda_{v+1})$ з заданою точністю.

2. ТЕСТУВАННЯ МЕТОДИКИ

Тестування описаної чисельно-аналітичної методики, що включає розвинення в ряди Фур'є за коловою координатою, метод покрокового пошуку та чисельний метод ортогональної

прогонки з розв'язанням задач Коші методом Рунге-Кутта 5-го порядку, проводиться індуктивно шляхом порівняння з відомими результатами, що отримані на основі інших підходів. Таке порівняння представлено тут двома прикладами, запозиченими з робіт [7, 11].

Приклад 1. У роботі [11], як елемент складної оболонкової системи тор-циліндр, розглянута циліндрична оболонка з ізотропного матеріалу, що має довжину L , радіус R та сталу товщину h . Для розрахунку її нижчих власних частот у цій роботі було застосовано метод різницевого квадратур (differential quadrature method DQM), у [12] – напіваналітичний метод скінчених елементів (МСЕ), а в роботі [13] отримано аналітичний розв'язок на основі методу Фур'є та перетворення Стокса.

Розрахунок власних частот за розробленою чисельно-аналітичною методикою проведено для консольно закріпленого циліндра і таких значень його геометричних і механічних параметрів, що прийняті в роботах [11-13]:

$$L=0,5112\text{ м}, \quad R=0,216\text{ м}, \quad h=0,015\text{ м}; \quad E=0,183 \cdot 10^{12}\text{ Па}, \quad \mu=0,3, \quad \rho=7492\text{ кг/м}^3.$$

Порівняння значень перших десяти нижчих частот ($f_i, \text{Гц}$) подається в таблиці 1, де параметри k, m визначають форми коливання в коловому і меридіональному напрямках відповідно.

Таблиця 1 – Порівняння значень власних частот за розробленою методикою, DOM[11], МСЕ [12] та одержаних аналітично [13]

$f = \frac{\omega}{2\pi}, \text{Гц}$					
N	$m; k$	чис.-анал. методика	DOM [11]	МСЕ [12]	[13]
1	1;4	173,30	173,24	173,6	171,8
2	1;5	202,23	202,29	202,3	199,2
3	1;3	223,89	223,78	224,4	223,3
4	1;6	273,60	273,76	273,5	268,9
5	1;7	368,47	368,76	370,1	361,9
6	1;2	404,25	404,01	404,7	403,7
7	2;6	445,97	445,81	448,7	447,0
8	2;7	470,98	470,88	471,3	464,6
9	1;8	481,09	481,56	490,3	472,5
10	2;5	496,86	496,62	500,3	494,7

З таблиці видно, що найменші значення частот одержані аналітично в роботі [13] за методом Фур'є та перетворенням Стокса і найбільша їх відмінність від інших результатів (майже 4%) має місце для дев'ятої частоти ($m=1, k=8$). Відмінність між значеннями власних частот за іншими порівнювальними методами не перевищує 1%.

На цьому ж прикладі в таблиці 2 проілюстровано вплив дискретизації кривої меридіану (кількість точок n) на точність знаходження деяких власних частот. Ці дані наведені для 3-х частот, які відповідають параметрам хвилювання k, m .

Таблиця 2 – Залежність розрахункових значень власних частот від дискретизації кривої інтегрування

n	$k = 4; m = 1$	$k = 5; m = 2$	$k = 1; m = 1$
5	6939,6	4101,8	4173,4
10	3489,9	3705,7	3362,2
20	173,30	496,86	856,17
40	173,30	496,86	856,17

Аналізуючи таблицю, доходимо висновку, що для $n \leq 10$ обчислювальний процес за розглянутою методикою дає невірні значення шуканих частот. Це пов'язано з недостатньою кількістю точок інтегрування задач Коші в методі ортогональної прогонки. Збільшення точок інтегрування дає можливість отримати стійкий розв'язок задачі. Вже для $n \geq 20$ значення шуканих частот стає стійким у 5-ти знаках.

Приклад 2. Розглядалася система з трьох ізотропних оболонок обертання однакової товщини h . Ця система, твірна якої представлена на рис. 2, складалась із конуса (кут піврозхилу β , малий радіус R_0), циліндра (радіус R , довжина L) і сферичного пояса (радіус R , кут піврозхилу біля полюса φ_0). Торцеві

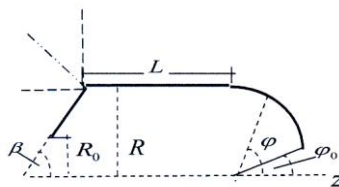


Рис. 2. Твірна оболонкової системи конус-циліндр-сфера

контури оболонок приймалися вільними від навантаження. Знаходження власних частот такої системи проведено в [7] на основі модифікованого варіаційного методу за моделлю Рейсснера-Нагді з апроксимацією шуканого розв'язку поліномами Чебишева 1-го порядку за твірною та рядами Фур'є за прямою. Для кожної гармоніки ряду Фур'є утримувалося 7 членів апроксимації

поліномами Чебишева. У цій же роботі наведені результати, отримані МСЕ за програмою ANSYS. Порівняння цих результатів з результатами за розробленою чисельно-аналітичною методикою представлено в таблиці 3 для $f = \frac{\omega}{2\pi}$, Гц при таких вихідних даних:

$$R = 1\text{м}, \quad R_0 = 0,4\text{м}, \quad L = 2,5\text{м}, \quad \beta = 30^\circ, \quad h = 0,01\text{м}, \quad \varphi_0 = 0^\circ; 45^\circ,$$

$$E = 69,58\text{ГПа}, \quad \mu = 0,31, \quad \rho = 2700\text{кг/м}^3.$$

Таблиця 3 – Порівняння значень власних частот, одержаних за розробленою методикою, методом рядів [7] та MCE (ANSYS)

k	m	$\varphi_0 = 0^\circ$			$\varphi_0 = 45^\circ$		
		чис.-анал. методика	[7]	ANSYS	чис.-анал. методика	[7]	ANSYS
0	1	424,05	423,92	423,95	434,19	434,04	434,04
	2	430,13	429,13	428,44	446,78	446,88	444,82
	3	600,55	601,59	600,67	669,63	669,80	669,28
	4	731,12	731,50	730,76	766,14	766,22	765,90
3	1	67,55	67,69	67,55	47,59	47,78	47,67
	2	91,74	92,07	91,94	60,40	69,57	69,42
	3	249,25	250,08	249,78	99,54	99,63	99,55
	4	365,74	366,15	365,34	256,24	256,34	256,00

Як видно, різниця в значеннях власних частот, які отримані за чисельно-аналітичною методикою і за двома іншими підходами – МСЕ та методу рядів, тільки в окремих випадках перевищувала 1%.

Наведені приклади тестування запропонованої методики розрахунку нижчих частот, сполучених між собою оболонки обертання, ілюструють на індуктивному рівні строгості правомірність її використання в розглянутому класі задач.

3. АНАЛІЗ ОСОБЛИВОСТЕЙ КОЛИВАНЬ ОБОЛОНКОВИХ СИСТЕМ

Результати дослідження вільних коливань тонкостінних систем зі співвісних оболонок обертання різної форми представлено двома задачами, де розглянуто вплив низки геометричних параметрів системи на її власні частоти. Аналіз проведено на прикладі умовної залежності $\omega = \omega(k)$, що характеризує зміну мінімальної власної частоти ω від форми хвилеутворення в коловому напрямку k і є традиційною для оболонок обертання.

Задача 1. Розглянуто систему двох циліндрів з довжинами l_1, l_2 та радіусами r_1, r_2 , що з'єднані елементом тороеліптичної форми з півосями a_i, b_i та відстанню r_{0i} центра тора від осі обертання. Представлені випадки ($i = 1, 2$), коли з'єднувальний елемент має гаусову кривизну різних знаків (рис. 3): I – додатну $K = k_1 \cdot k_2 > 0$ (центр тора та вісь обертання лежать з однієї сторони твірної - меридіану); II – від'ємну $K < 0$ (центр тора та вісь обертання лежать по різні сторони меридіану).

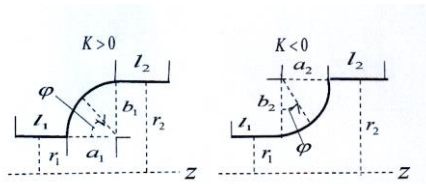


Рис. 3. Твірна системи циліндр-тороеліпс-циліндр додатної ($K > 0$) та від'ємної ($K < 0$) гаусової кривизни

Твірна тороеліптичних оболонок задається в параметричному виді:

I) $r = r_{01} + b_1 \sin \varphi$, $z = -a_1 \cos \varphi$ ($\varphi \in [0, \pi/2]$) (φ – центральний кут еліпса, що відраховується від горизонтальної осі за годинниковою стрілкою, $r_{01} = r_1$);

II) $r = r_{02} - b_2 \cos \varphi$, $z = a_2 \sin \varphi$ ($\varphi \in [0, \pi/2]$) (φ – центральний кут еліпса, що відраховується від вертикальної осі проти годинникової стрілки, $r_{02} = r_2$).

Усі елементи систем циліндр-тороеліпс-циліндр (CL1–TE–CL2) мають сталу товщину h та виготовлені зі скловолокна, що орієнтовано за меридіаном та має такі фізико-механічні характеристики:

$$E_a = 4,4E_0, \quad E_\theta = 1,3E_0, \quad G_{a\theta} = 0,37E_0, \quad \mu = 0,18, \quad \rho = \rho_0.$$

Приймається, що торцеві контури обох циліндрів жорстко закріплені.

Особливості коливань описаних систем I та II порівняно з коливаннями їх окремих складових частин – тороеліпсів та циліндрів – покажемо на умовній залежності $\omega = \omega(k)$ для таких вихідних даних:

$$r_1 = 50l_0, \quad r_{01}/r_1 = 1, \quad a_1/r_1 = 2, \quad b_1/r_1 = 1, \quad l_1/r_1 = 2, \quad h/r_1 = 0,02; \\ r_2/r_1 = 2, \quad a_2 = a_1, \quad b_2 = b_1, \quad l_2 = l_1.$$

Результати розрахунку у вигляді безрозмірного частотного параметра $f^* = f^*(k)$ (

$$f^*(k) = \frac{\omega(k)}{2\pi} \cdot 10^{-3} l_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}), \text{ – як умовної функції параметра } k, \text{ представлені на рис. 4 для}$$

тороеліпсів додатної (TE1) та від'ємної (TE2) гаусової кривизни (рис. 4 а); для циліндрів радіуса r_1 (CY1) та r_2 (CY2) (рис. 4 б); оболонкових систем I та II (рис. 4 в).

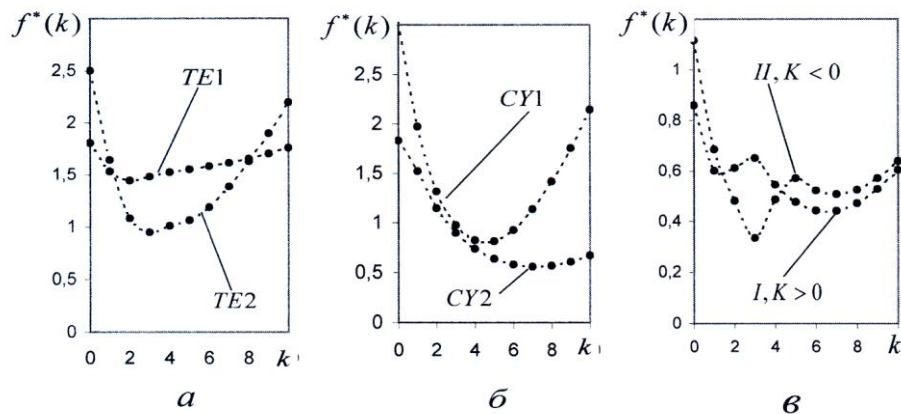


Рис. 4. Залежність безрозмірного частотного параметра $f^* = f^*(k)$ від параметра хвилеутворення k для тороеліпсів додатної (TE1) та від'ємної (TE2) гаусової кривизни (а); циліндрів радіуса r_1 (CY1) та r_2 (CY2) (б); оболонкових систем I і II (в)

Для окремих складових елементів систем (рис. 4 а та рис. 4 б) залежність $f^* = f^*(k)$ має звичний вигляд: це немонотонна функція з одним мінімумом. Для систем I та II (рис. 4 в) ця залежність набуває нової якості: вона має два локальні мінімуми при $k=1, k=7$ (система I) та $k=3, k=7$ (система II). Ця нова якість зумовлена спільними коливаннями всіх складових елементів системи, як єдиного цілого. Простежується, що домінуючий вплив з'єднувального тороеліптичного елемента на коливання системи в цілому має місце для менших k ($k \leq 3$, система I, $k \leq 5$ – система II), а циліндра радіуса r_2 – для більших k . Порівнюючи системи різної гаусової кривизни, видно, що абсолютно мінімальне значення власної частоти має місце при $k=3$ для системи II з додатною гаусовою кривизною.

Задача 2. На прикладі системи з конічної, циліндричної та еліптичної оболонок, частинний випадок якої для сферичного елемента розглянуто в [7] (рис. 2) та використано в п. 2 для тестування розробленої методики, проводився аналіз впливу кута розхилу конічного та довжини циліндричного елементів на власні частоти системи в цілому. На граничних контурах системи приймаються умови жорсткого закріплення та вільного краю.

У першій серії розрахунків при сталій довжині циліндра $L=1,2$ та еліпса з півосями $a=0,5R$, $b=R$ розглянуто залежність власних частот системи для кутів піврозхилу конуса $\beta=0^\circ; 10^\circ; 20^\circ; 45^\circ; 90^\circ$ ($\beta=0^\circ$ – циліндр, $\beta=90^\circ$ – кільцева пластина). Результати дослідження у вигляді залежності $\tilde{f} = \tilde{f}(k)$ ($\tilde{f} = 10^{-3} \frac{\omega}{2\pi}$, Гц) подані на рис. 5 а для $\beta=0^\circ; 45^\circ; 90^\circ$ та на рис. 5 б для $\beta=10^\circ; 20^\circ$.

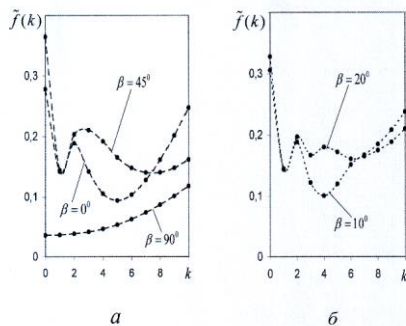


Рис. 5. Залежність частотного параметра $\tilde{f}(k)$ (Гц) для різних кутів піврозхилу конуса β системи конус-циліндр-еліпс: $\beta=0^\circ; 45^\circ; 90^\circ$ (а); $\beta=10^\circ; 20^\circ$ (б)

Як видно з рисунку, тільки у випадку $\beta = 90^\circ$ – (кільцева пластина-циліндр-еліпе) домінуючу роль в коливаннях відіграє саме пластина, для якої залежність $\tilde{f} = \tilde{f}(k)$, як відомо, є монотонно зростаючою функцією і такий характер нав'язується системі в цілому. В усіх інших випадках кожний з елементів системи дає свій внесок у її коливання і вона працює як єдине ціле. Слід виділити досить цікавий випадок при $\beta = 20^\circ$, у якому залежність $\tilde{f} = \tilde{f}(k)$ має три локальні мінімуми при $k=1$, $k=3$, $k=6$.

Друга серія розрахунків для цієї системи при сталому куті $\beta = 45^\circ$ конічної частини і тих же розмірах еліпса пов'язана з аналізом впливу довжини циліндричної оболонки на коливання системи в цілому. На рис. 6 представлена залежність $\tilde{f} = \tilde{f}(k)$ для $\delta = L/R = 0,01; 3; 7,5$. При $\delta = 0,01$ маємо практично систему конус – еліпс, де обидві складові працюють як єдине ціле. З ростом довжини циліндра роль цих елементів у коливаннях системи послаблюється і при $\delta = 7,5$ залежність $\tilde{f} = \tilde{f}(k)$ має один мінімум, що характерно для циліндричних оболонок.

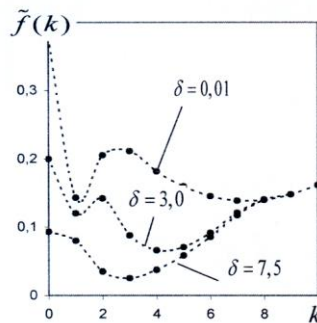


Рис. 6. Залежність частотного параметра $\tilde{f}(k)$ від довжини циліндричної частини системи конус-циліндр-еліпс : $\delta = 0,01; 3,0; 7,5$

4. ВИСНОВКИ

На основі положень класичної теорії тонких оболонок Кіргофа-Лява запропонована чисельно-аналітична методика розрахунку власних частот сполучених між собою співвісних оболонок обертання з елементами змінної гаусової кривизни (додатної та від'ємної). Методика базується на використанні методу відокремлення змінних, покрокового пошуку ($\Delta(\lambda)$ -методу), чисельного методу ортогональної прогонки з розв'язанням задач Коші за схемою Рунге-Кутта 5-го порядку в модифікації Мерсона.

Обґрунтування методики проведено індуктивно шляхом порівняння з відомими результатами, що базуються на інших підходах.

Особливості коливань оболонкової системи як єдиного об'єкту, порівняно з коливаннями її складових частин проілюстровано на традиційній для оболонок обертання залежності $\omega = \omega(k)$, що характеризує зміну мінімальної власної частоти ω від форми хвилеутворення в коловому напрямку k . Показано, що коливання системи в цілому можуть мати якісно інший характер, ніж коливання окремих оболонок. Зокрема, для сполучених між собою оболонок в області нижчих частот може спостерігатися декілька локальних мінімумів, у той час, як для її складових частин – тільки один. Цю особливість сполучених систем передбачити заздалегідь практично неможливо.

ЛІТЕРАТУРА

1. Caresta M. Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical-conical shells / M. Caresta, N.J. Kessissoglou // J. of Sound and Vibration. – 2010. – Vol. 329. – P. 733-751.
2. Patel BP. Free vibration characteristics of laminated composite joined conical-cylindrical shells / BP. Patel, M. Ganapathi, S. Kamat // J. Sound and Vibration. – 2000. – Vol. 237. – P. 920-930.
3. Cheng L. Free vibration analysis of a cylindrical shell–circular plate system with general coupling and various boundary conditions / L. Cheng, J. Nicolas // J. of Sound and Vibration. – 1992. – Vol. 155. – P. 231-247.

4. Liang S. The natural vibration of a conical shell with an annular end plate / S. Liang, H.L. Chen // *J. of Sound and Vibration*. – 2006. – Vol. 294. – P. 927-943.
5. Chronopoulos D. Predicting the broadband response of a layered cone-cylinder-cone shell / D. Chronopoulos, M. Ichchou, B. Troclet, O. Bareille // *Composite Structures*. – 2014. – Vol. 107. – P. 149-159.
6. Shang X. C. Exact analysis for free vibration of a composite shell structure- hermetic capsule / X.C. Shang // *Appl Math Mech (English Edition)*. – 2001. – Vol. 22. – P. 1035-1045.
7. Qu Y. Vibration analysis of ring-stiffened conical–cylindrical–spherical shells based on a modified variational approach / Y. Qu, S. Wu, Y. Chen, H. Hua // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2013. – 69. – P. 72-84.
8. Lee Y. S. A study on the free vibration of the joined cylindrical–spherical shell structures / Y.S. Lee, M.S. Yang, Y.S. Kim, J.H. Kim // *Computers & Structures*. – 2002. – Vol. 80: 27–30. – P. 2405-2414.
9. Григоренко Я. М. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкар. – К. : Наук. думка, 1986. – 172 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1971. – 576 с.
11. Redekop D. Vibration analysis of a torus – cylinder shell assemble / D. Redekop // *J. of Sound and Vibration*. – 2004. – Vol. 277. – P. 919-930.
12. Chung H. Free vibration analysis of circular cylindrical shells / H. Cheng // *J. of Sound and Vibration*. – 1981. – Vol. 74. – P. 331-350.
13. Ganesan N. Free vibration of cantilever circular cylindrical shells with variable thickness / N. Ganesan, K.R. Sivasdas // *Computers and Structures*. – 1990. – *Computers and Structures*. – Vol. 34. – P. 669-677.

REFERENCES

1. Caresta, M. and Kessissoglou, N.J. (2010), “Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical-conical shells”, *J. of Sound and Vibration*, vol. 329, pp. 733-751.
2. Patel, BP, Ganapathi, M. and Kamat, S. (2000), “Free vibration characteristics of laminated composite joined conical-cylindrical shells”, *J. Sound and Vibration*, vol. 237, pp. 920-930.
3. Cheng, L. and Nicolas, J. (1992), “Free vibration analysis of a cylindrical shell–circular plate system with general coupling and various boundary conditions”, *J. of Sound and Vibration*, vol. 155, pp. 231-247.
4. Liang, S. and Chen, H.L. (2006), “The natural vibration of a conical shell with an annular end plate”, *J. of Sound and Vibration*, vol. 294, pp. 927-943.
5. Chronopoulos, D., Ichchou, M., Troclet, B. and Bareille, O. (2014), “Predicting the broadband response of a layered cone-cylinder-cone shell”, *Composite Structures*, vol. 107, pp. 149-159.
6. Shang X.C. (2001), “Exact analysis for free vibration of a composite shell structure-hermetic capsule”, *Appl Math Mech (English Edition)*, vol. 22, pp. 1035-1045.
7. Qu, Y., Wu, S., Chen, Y. and Hua, H. (2013), “Vibration analysis of ring-stiffened conical–cylindrical–spherical shells based on a modified variational approach”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 69, pp. 72-84.
8. Lee, Y.S., Yang, M.S., Kim, Y.S. and Kim, J.H. (2002), “A study on the free vibration of the joined cylindrical–spherical shell structures”, *Computers & Structures*, vol. 80: 27–30, pp. 2405-2414.

9. Grigorenko, Ya.M., Bespalova, E.I., Kitaigorodskiy, A.B. and Shinkar, A.I. (1986), "Svobodnyie kolebaniya elementov obolocheknyih konstruktsiy", Nauk. dumka, Kiev.
10. Kamke, E. (1971), "Spravochnik po obyiknovennym differentsialnyim uravneniyam", Nauka, Moscow.
11. Redekop, D. (2004), "Vibration analysis of a torus – cylinder shell assemble", *J. of Sound and Vibration*, vol. 277, pp. 919-930.
12. Chung, H. (1981), "Free vibration analysis of circular cylindrical shells", *J. of Sound and Vibration*, vol. 74, pp. 331-350.
13. Ganesan, N. and Sivadas, K.R. (1990), "Free vibration of cantilever circular cylindrical shells with variable thickness", *Computers and Structures*, vol. 34, P. 669-677.

УДК 533.9 ; 621.793

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ УПРОЧНЯЮЩЕЙ ИОННО-ПЛАЗМЕННОЙ ОБРАБОТКИ ВНУТРЕННИХ РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПАР ТРЕНИЯ

Гришкевич А. Д., к. т. н., Гринюк С. И.

*Институт технической механики Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, г. Днепрпетровск, Украина*

Gryshkevych.O.D@nas.gov.ua

В статье представлены результаты разработки новых магнетронных технологических устройств для ионно-плазменного упрочнения внутренних рабочих поверхностей пар трения. Разработаны технологические магнетронные устройства интегрированного типа для обработки деталей с внутренним диаметром более 80 мм и магнетронное устройство для обработки неферромагнитных деталей диаметром более 20 мм. Разработано несбалансированное цилиндрическое магнетронное распылительное устройство для нанесения наноструктурированных покрытий на внутренние и наружные рабочие поверхности. Обсуждаются особенности применения разработанных плазменных технологических устройств.

Ключевые слова: внутренняя рабочая поверхность, наноструктурированное покрытие, системы распыливания цилиндрического магнетрона, нестойкое магнетронное напыление, очищение с помощью иона, механические свойства покрытий.

ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ЗМІЦНЮЮЧОЇ ІОННО-ПЛАЗМОВОЇ ОБРОБКИ ВНУТРІШНІХ РОБОЧИХ ПОВЕРХОНЬ ПАР ТЕРТЯ

Гришкевич О. Д., к. т. н., Гринюк С. І.

*Інститут технічної механіки Національної академії наук України
і Державного космічного агентства України,
вул. Лешко-Попеля, 15, м. Дніпропетровськ, Україна*

Gryshkevych.O.D@nas.gov.ua

У статті наведено результати розробки нових магнетронних технологічних пристроїв для іонно-плазмового зміцнення внутрішніх робочих поверхонь пар тертя. Розроблено магнетронні технологічні пристрої інтегрованого типу для обробки деталей з внутрішнім діаметром більше 80 мм і магнетронний пристрій для обробки неферромагнітних деталей діаметром більше 20 мм. Розроблено незбалансований циліндричний магнетронний пристрій для нанесення наноструктурованих покриттів на внутрішні і зовнішні робочі поверхні. Обговорюються особливості використанні розроблених плазмових технологічних пристроїв.

Ключові слова: внутрішня робоча поверхня, наноструктуровані покриття, системи розпилювання циліндричного магнетрону, нестійке магнетронне напылення, очищення за допомогою іону, механічні властивості покриттів.