

2. Буда́к В. Д. Вільні коливання еліптичної оболонки змінної товщини / В.Д. Буда́к, А.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, Е.В. Бойчук // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2014. – 2(32). – С. 32-37.
3. Буда́к В. Д. Определение собственных частот эллиптической оболочки постоянной толщины методом конечных элементов / В.Д. Буда́к, А.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, Е.В. Бойчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, №1. – С. 145-152.
4. Григоренко А. Я. Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек с помощью метода сплайн-коллокации / А.Я. Григоренко, С.В. Пузырев, Е.А. Волчек // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, №3. – С. 60-69.
5. Рудаков К. Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций / К.Н. Рудаков. – К. : НТУУ «КПИ», 2011. – 317 с.
6. Papadrakakis M. Solving large-scale problems in mechanics / M. Papadrakakis. – Oxford, UK : Wiley, 1993.

REFERENCES

1. Lekomtsev, S.V. (2012), “Konechno-elementnyie algoritmy rascheta sobstvennyih kolebaniy trekhmernykh obolochek”, *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 5 (2), pp. 233-243.
2. Budak, V.D., Grigorenko, A.Ya., Borisenko, M.Yu., and Boychuk, E.V. (2014), “Vil'ni kolivannia eliptichnoi obolonky zminnoi tovshchini”, *Visnyk Kyivs'koho natsional'noho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Matematyka. Mekhanika*, 2 (32), pp. 32-37.
3. Budak, V.D., Grigorenko, A.Ya., Borisenko, M.Yu., and Boychuk, E.V. (2014), “Opredelenie sobstvennyih chastot ellipticheskoy obolochki postoyannoy tolshchinyi metodom konechnyih elementov”, *Mathematical methods and physicomechanical fields*, 57 (1), pp. 145-152.
4. Grigorenko, A.Ya., Puziriyev, S.V., and Volchek, E.A. (2011), “Issledovanie svobodnyih kolebaniy nekrugovyih tsilindricheskih obolochek s pomoshchyu metoda splayn-kollokatsii”, *Mathematical methods and physicomechanical fields*, 54 (3), pp. 60-69.
5. Rudakov, K.N. (2011), *FEMAP 10.2.0. Geometricheskoe i konechno-elementnoe modelirovanie konstruksiy* [Geometric and finite- element modeling of structures], NTUU «KPI», Kiev, Ukraine.
6. Papadrakakis, M. (1993), *Solving large-scale problems in mechanics*, UK: Wiley, Oxford.

УДК 393.3

ДИНАМИКА ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ДЕМПФИРОВАНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Ветров О. С., ст. преподаватель,
Шевченко В. П., д. ф.-м. н., профессор, академик НАН Украины,
Русаков В. Ф., д. ф.-м. н., профессор

*Донецкий национальный университет,
ул. 600-летия, 21, г. Винница, 21021, Украина*

o.s.vetrov@gmail.com, o.vietrov@donnu.edu.ua

В статье рассмотрена задача о построении фундаментальных решений системы динамических уравнений теории тонких изотропных оболочек с учетом линейного демпфирования. Искомые решения были найдены путем совместного использования интегральных преобразований Фурье и Лапласа и методов теории специальных функций. Фундаментальные решения получены в форме, удобной для дальнейшего использования при решении начально-краевых задач теории тонких оболочек, и записываются в виде двойных

рядов по функциям Мейера. На основании полученных решений была исследована задача о действии на оболочку локальной нагрузки, распределенной по круговой области. Численно исследовано влияние геометрии оболочки на характер прогиба.

Ключевые слова: тонкая оболочка, фундаментальное решение, демпфирование, локальная нагрузка.

ДИНАМІКА ТОНКИХ ОБОЛОНОК З УРАХУВАННЯМ ДЕМПФУВАННЯ ПІД ДІЄЮ ЛОКАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Ветров О. С., ст. викл., Шевченко В. П., д. ф.-м. н., професор, академік НАН України,
Русаков В. Ф., д. ф.-м. н., професор

*Донецький національний університет,
вул. 600-річчя, 21, м. Вінниця, 21021, Україна*

o.s.vetrov@gmail.com, o.vietrov@donnu.edu.ua

Розглянута задача про побудову фундаментальних розв'язків системи динамічних рівнянь теорії тонких ізотропних оболонок з урахуванням лінійного демпфування. Шукані розв'язки були отримані за допомогою спільного використання інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа і методів теорії спеціальних функцій. Фундаментальні розв'язки отримані у формі, що є зручною для подальшого їх використання в початково-крайових задачах теорії оболонок, і виражаються у вигляді подвійних рядів, членами яких є функції Мейера. Використовуючи отримані розв'язки, була досліджена задача про дію на оболочку локального навантаження, розподіленого по круговій області. Чисельно досліджений вплив геометрії оболонки на характер її прогину.

Ключові слова: тонка оболонка, фундаментальний розв'язок, демпфування, локальне навантаження.

DYNAMICS OF THIN SHELLS IN VIEW OF DAMPING UNDER THE ACTION OF LOCAL LOADS

Vetrov O. S., senior lecturer,
Shevchenko V. P., D.Sc. in Physics and Maths, professor, academician of the NAS of Ukraine,
Rusakov V. F., D.Sc. in Physics and Maths, professor

*Donetsk National University,
600-richya str., 21, Vinnytsia, 21021, Ukraine*

o.s.vetrov@gmail.com, o.vietrov@donnu.edu.ua

Study of the behavior of the thin shell under the action of external static and dynamic loads is an actually problem of the applied mechanics. Also control of damping in thin-walled structures is an important mechanics problem. The aim of this paper is to describe the development of the method of fundamental solutions (MFS) for the study of various problems of the dynamic theory of thin shells. Method of fundamental solutions is one of the most effective methods for solving various static and dynamic problems of the theory of thin anisotropic plates and shells as well as initial and boundary. The MFS has been adapted well for the solution of the dynamic equations of the theory of thin isotropic shells with the linear damping. Fundamental solutions are represented in the explicit analytical form. Solutions of the thin shells theory dynamic equations were constructed by using the Fourier and Laplace integral transformations and methods of the theory of special functions. Based on these solutions the problem of action at the local shell load distributed over a circular area was considered. The influence of the geometry of the shell on the dynamic deflection was numerically investigated. Conditions, under which the damping effect cannot be ignored, were obtained.

Key words: thin shell, the fundamental solution, MFS, damping, local load.

ВВЕДЕНИЕ

В прикладных задачах авиастроения, автомобилестроения, строительной механики часто стоит необходимость демпфирования колебаний, возникающих в тонкостенных конструкциях. В инженерной практике могут применяться различные механические методы демпфирования [1]. В частности, для оболочечных конструкций наиболее подробно изучены системы с вязким сопротивлением. Неисследованной, однако, остается задача о действии при этих условиях на оболочку локальной динамической нагрузки, распределенной по произвольной области. Актуальной остается проблема построения фундаментальных решений динамической теории оболочек для соответствующего класса задач.

В [2] представлены фундаментальные решения динамики тонких изотропных оболочек. Соответствующие результаты для случая ортотропии материала были получены авторами в [3, 4]. Позднее была дополнительно рассмотрена модель динамики оболочки с учетом упругого основания Винклера [5]. Фундаментальные решения динамических уравнений,

учитывающих демпфирование, для тонких оболочек отсутствуют. Построить указанные решения представляется возможным, расширив имеющуюся методику [2, 5, 6], как это уже было сделано ранее для частного случая сферической оболочки [7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается тонкая полая оболочка постоянной толщины h , изготовленная из изотропного материала (рис. 1). Будем считать, что граничный контур оболочки существенно удален от начала координат. Краевые условия на границе оболочки заменим нулевыми условиями на бесконечности, т.е., рассматривается модель бесконечной оболочки.

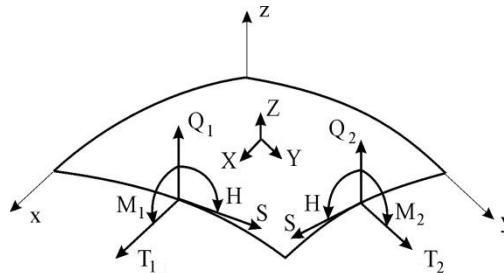


Рис. 1

Ограничимся рассмотрением тех задач, в которых оболочка в пределах рассматриваемой зоны возмущения напряженного состояния может быть корректно отнесена к прямоугольной системе координат (x, y) на плоскости. Коэффициенты Ламе в этом случае $A = B = 1$, а радиусы кривизны оболочки R_1, R_2 являются постоянными величинами.

Введем обозначения: T_1, T_2, S – мембранные усилия; M_1, M_2, H – изгибающие и крутящий моменты; Q_1, Q_2 – перерезывающие силы. На рисунке 1 показаны положительные направления соответствующих внутренних силовых факторов оболочки. Проекции действующей на оболочку внешней нагрузки обозначены соответственно X, Y, Z .

Рассматриваем динамический процесс без учета распространения упругих волн. Система уравнений динамики тонких оболочек в классической постановке с учетом линейного демпфирования будет иметь вид:

$$\begin{cases} \nabla^2 \nabla^2 N - (c^4 D R_2) \nabla_\lambda^2 w = 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 w + R_2^{-1} \nabla_\lambda^2 N = Z - \mu \frac{\partial w}{\partial \tau} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2, \quad \nabla_\lambda^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \lambda \partial^2 / \partial y^2,$$

где N – функция напряжений; τ – время; μ – коэффициент демпфирования; ρ – плотность материала; D – цилиндрическая жесткость; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона. Также обозначено $\lambda = R_2 / R_1$, $c^4 = 12(1 - \nu^2)(R_2 h)^{-2}$. Начальные условия считаем нулевыми.

В (1) функция N введена через соотношения:

$$Eh \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right) - \frac{Eh}{R_1} w, \quad Eh \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - \frac{Eh}{R_2} w,$$

где u, v, w – компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки.

Представим внешнюю нагрузку в (1) в виде $Z(x, y, \tau) = \delta(x, y) \delta(\tau)$, где $\delta(\cdot)$ – обобщенная функция Дирака. Перейдем непосредственно к построению фундаментального решения искомой системы (1).

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Перейдем в системе (1) к безразмерной системе координат (x_1, y_1, t)

$$x = x_1 c^{-1}, \quad y = y_1 c^{-1}, \quad \tau = t c^{-2} \sqrt{\rho h D^{-1}}. \quad (2)$$

Применим к системе (1)-(2) двойное преобразование Фурье $F[\cdot]$ и интегральное преобразование Лапласа $L[\cdot]$ по формулам

$$F[g(x_1, y_1)] = g^F(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, y_1) e^{i(\xi x_1 + \eta y_1)} dx_1 dy_1, \quad L[g(t)] = g^L(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt.$$

Трансформанты функций напряжений и динамического прогиба в пространстве Фурье-Лапласа будут иметь вид:

$$w^{FL} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho h D}} w_1^{FL}, \quad w_1^{FL} = \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2}{\Delta}, \quad (3)$$

$$N^{FL} = -\frac{c^2 R_2}{2\pi\sqrt{\rho h D^{-1}}} N_1^{FL}, \quad N_1^{FL} = \frac{(\xi^2 + \lambda \eta^2)}{\Delta}.$$

где $\Delta = (\xi^2 + \eta^2)^4 + 2\mu's(\xi^2 + \eta^2)^2 + s^2(\xi^2 + \eta^2)^2 + (\xi^2 + \lambda \eta^2)^2$, $2\mu' = \mu c^{-2}(\rho h D)^{-1/2}$. Величины w_1^{FL} и N_1^{FL} введены для сокращения записей.

Знаменатель в (3) отличается от соответствующего [2, 6] наличием дополнительного слагаемого $2\mu's(\xi^2 + \eta^2)^2$, что требует несколько расширить существующую методику построения фундаментальных решений динамики тонких оболочек.

Методику обращения трансформант фундаментальных решений традиционно продемонстрируем на примере функции w_1 . Применим к (3) формулу обратного интегрального преобразования Фурье, и в результате соответствующих преобразований [2, 5, 6] получим:

$$w_1^L = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2 - \delta_n^0) \cos 2n\varphi \int_0^{\pi/2} \cos 2n\theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{J_{2n}(rR)R}{R^4 + K_\lambda^2(\theta) + 2\mu's + s^2} dR, \quad (4)$$

где δ_n^0 – символ Кронекера; $J_{2n}(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода [8]; $K_\lambda(\theta) = (\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta)$. Выражение (4) записано в полярных координатах $x_1 = r \cos \varphi$, $y_1 = r \sin \varphi$.

Применим к (4) формулу обратного преобразования Лапласа. Используя теорему Эфроса, получим:

$$L^{-1} \left[(s^2 + 2\mu's + K_\lambda^2(\theta) + R^4)^{-1} \right] = e^{-\mu't} \int_0^t I_0 \left(\vartheta \sqrt{t^2 - u^2} \right) \cos(R^2 u) du, \quad (5)$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода [8]; $\vartheta = \sqrt{\mu'^2 - K_\lambda^2(\theta)}$.

Подставим (5) в выражение (4) и после некоторых промежуточных вычислений получим:

$$\begin{aligned}
w_1(r, \varphi, t) e^{\mu' t} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2 - \delta_n^0) \cos 2n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{mn}^{01}(\lambda, \mu')}{\Gamma(m+1)} \times \\
&\times r^{2m-1} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{m+1/2} \int_0^{\infty} R^{-m-1/2} J_{2n}(\sqrt{R}) J_{m+1/2}(t \cdot r^{-2} \cdot R) dR, \\
b_{mn}^{01}(\lambda, \mu') &= \int_0^{\pi/2} \left(\mu'^2 - (\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta)^2 \right)^m \cos 2n\theta d\theta.
\end{aligned} \tag{6}$$

Интегралы в соотношениях (6) вычислим по разработанной методике [2], основывающейся на теории специальных функций. Так:

$$\int_0^{\infty} R^{-m-1/2} J_{m+1/2}(t \cdot r^{-2} \cdot R) J_{2n}(\sqrt{R}) dR = \frac{r^{-2m+1}}{2} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{m-1/2} G_{2,4}^{2,1} \left(\frac{r^4}{64t^2} \left[\frac{1}{2}, m+1 \right] \right), \tag{7}$$

где G – функция Мейера [9].

Подставим (7) в (6) и получим окончательное выражение фундаментального решения:

$$w_1(r, \varphi, t) = \frac{e^{-\mu' t}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2 - \delta_n^0) \cos 2n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{mn}^{01}(\lambda, \mu')}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} G_{2,4}^{2,1} \left(\frac{r^4}{64t^2} \left[\frac{1}{2}, m+1 \right] \right), \tag{8}$$

$$b_{mn}^{01}(\lambda, \mu') = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k \Gamma(2k+1)}{\Gamma(2k+n+1)} \binom{m}{k} \lambda^k \mu'^{2m-2k} P_{2k}^n \left(\frac{1+\lambda}{2\sqrt{\lambda}} \right), \tag{9}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, $P_m^n(\cdot)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода [8]. Выделим два важных случая сферической ($\lambda=1$) и цилиндрической ($\lambda=0$) оболочек. Выражения для (9) упростятся и будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
b_{mn}^{01}(0, \mu') &= \pi \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{B^{-1}(2k+n+1, 2k-n+1)}{2^{4k+1} (4k+1)} \mu'^{2m-2k}, \\
b_{mn}^{01}(1, \mu') &= \frac{\pi}{2} (\mu'^2 - 1)^m \delta_n^0,
\end{aligned}$$

где $B(\cdot)$ – бета-функция [8].

Аналогично (8)-(9) получено фундаментальное решение для функции напряжений, которое для N_1 имеет вид:

$$N_1(r, \varphi, t) = \frac{e^{-\mu' t}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2 - \delta_n^0) \cos 2n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_{mn}^{01}(\lambda, \mu')}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+1} G_{2,4}^{2,1} \left(\frac{r^4}{64t^2} \left[\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2} \right] \right), \tag{10}$$

$$d_{mn}^{01}(\lambda, \mu') = \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k \Gamma(2k+2)}{\Gamma(2k+n+2)} \binom{m}{k} \lambda^k \mu'^{2m-2k} P_{2k+1}^n \left(\frac{1+\lambda}{2\sqrt{\lambda}} \right). \tag{11}$$

Для оговоренных ранее частных случаев оболочек справедливо:

$$\begin{aligned}
d_{mn}^{01}(0, \mu') &= \pi \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{B^{-1}(2k+n+2, 2k-n+2)}{2^{4k+3} (4k+3)} \mu'^{2m-2k}, \\
d_{mn}^{01}(1, \mu') &= b_{mn}^{01}(1, \mu').
\end{aligned}$$

Соотношения (8)-(9) и (10)-(11) представляют собой фундаментальные решения искомой системы дифференциальных уравнений (1). Отметим, что при значении $\mu' = 0$ соотношения (8)-(11) совпадут с известными выражениями фундаментальных решений динамики оболочек без учета демпфирования [2]. Используя описанную методику, можно построить соответствующие выражения для перерезывающих сил, а также всех компонент фундаментальных матриц усилий и моментов.

В случае ортотропии материала (при сохранении остальных условий) методика построения фундаментальных решений в целом останется прежней. Дополнительно потребуются операция разделения переменных в специальной функции гипергеометрического вида, для чего была получена соответствующая «формула умножения» [3].

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве примера рассмотрим следующую модельную задачу. Предположим, что на оболочку действует внезапная локальная нагрузка единичной интенсивности вида:

$$q(r, t) = \begin{cases} -\frac{\delta(t)}{\pi R_0^2}, & r^2 \leq R_0^2, \\ 0, & r^2 > R_0^2. \end{cases} \quad (12)$$

Свертка полученного фундаментального решения (8)-(9) с (12) даст искомую функцию динамического прогиба, которая в точке приложения нагрузки будет иметь вид:

$$w_q(R_0, t) = -\frac{e^{-\mu' t}}{4\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{m0}^{01}(\lambda, \mu')}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} G_{2,4}^{2,1} \left(\vartheta^2 \middle|_{0,0.5,0,-0.5}^{0.5,m+1} \right), \quad (13)$$

где $\vartheta = R_0^2 / (8t)$.

В случае импульсной нагрузки указанного вида необходимо (13) проинтегрировать по координате t .

На рисунке 2 показано влияние параметра μ' на значение прогиба $w_q(r, t)$. Прямой 1 соответствует случай $\mu' = 0.5$, прямой 2 – случай $\mu' = 0.25$, прямой 3 отвечает прогиб оболочки без учета демпфирования ($\mu' = 0$). Остальные параметры выбраны $\lambda = 0.25$, $R_0 = 2$. Как видно из рисунка при $t \ll 1$ учет демпфирования практически никак не влияет на результат. Влияние более 5% на прогиб $w_q(r, t)$ начинает проследиваться для прямых 1 и 3 при $t > 1/10$. С увеличением значения параметра μ' существенно уменьшается максимальное значение прогиба по абсолютному значению. Так, на рассматриваемом на рисунке 2 промежутке времени справедливо $\min(w_q)_{\mu'=0} \approx 1.3 \min(w_q)_{\mu'=0.25}$ и $\min(w_q)_{\mu'=0} \approx 1.6 \min(w_q)_{\mu'=0.5}$ соответственно.

Также исследуем влияние, которое отношение кривизн оболочки λ оказывает на величину прогиба. На рисунке 3 показаны случаи поведения прогибов для сферической и цилиндрической оболочек (возможный промежуточный вариант оболочки представлен на рис. 2). Случаю $\lambda = 1$ на рис. 3 соответствуют прямая 1 ($\mu' = 0$) и прямая 3 ($\mu' = 0.5$), а случаю $\lambda = 0$ – прямая 2 ($\mu' = 0$) и прямая 4 ($\mu' = 0.5$) соответственно. До значения $t = 1.5$ темп уменьшения значений прогиба по абсолютной величине практически одинаков для обоих случаев кривизны оболочек. С течением времени картина меняется. Отметим, что в процентном отношении максимальная разница между соответствующими значениями прогиба наблюдается для прямых 1 и 3, тогда как максимальная разница по абсолютному значению $w_q(r, t)$ достигается для случая цилиндрической оболочки (прямые 2 и 4). Из

анализа рисунка 3 видно, что значения $w_q(r, t)$ для прямой 4 всегда по абсолютному значению остается меньше значений прямой 2, тогда как прямые 1 и 3 несколько раз пересекаются при значениях $t > 2$. Таким образом процесс сглаживания колебаний на указанном промежутке t более сложен для случая сферической оболочки. При этом, по абсолютной величине, значения прямой 4 на рисунке 3 всегда превосходят соответствующие значения прямой 3. Таким образом, при одинаковом коэффициенте демпфирования μ' значение прогиба цилиндрической оболочки больше прогиба сферической оболочки для одинаковых моментов времени. Данный результат согласуется с [2].

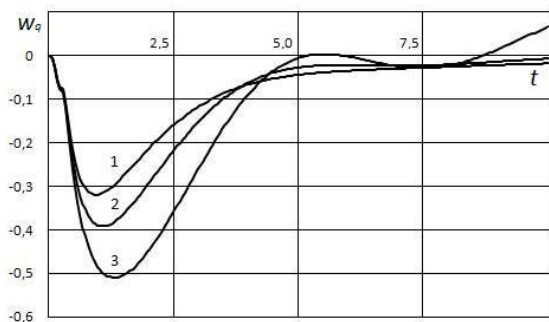


Рис. 2

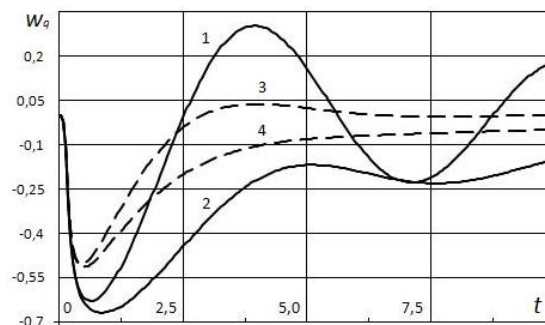


Рис. 3

В заключение сделаем замечание по поводу вычисления значения $w_q(r, t)$ при $t \rightarrow 0$. Системы компьютерной алгебры испытывают серьезные трудности с вычислением значения гипергеометрической функции в моментах времени близких к начальным. Одним способом решения проблемы является использование асимптотических выражений в нерегулярной точке. Другим способом является представление каждой конкретной функции Мейера в (13) через комбинации более простых функций (в том числе и специальных), для которых вычисление значений автоматизированными системами при $t \ll 1$ не представляет существенного труда. Так, например, в (13) для первых двух членов ряда

$$m=0 \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} G_{2,4}^{2,1} \left(\vartheta^2 \middle|_{0,0.5,0,-0.5}^{0.5,1} \right) = \pi - \vartheta - \vartheta \cos(2\vartheta) - 2Si(2\vartheta),$$

$$m=1 \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} G_{2,4}^{2,1} \left(\vartheta^2 \middle|_{0,0.5,0,-0.5}^{0.5,2} \right) = \\ = \frac{2}{3} (1.5\pi + \pi\vartheta^2 - 0.5 \sin(2\vartheta) + \vartheta^{-1} - \vartheta^{-1} (1 + \vartheta^2) \cos(2\vartheta) - (3 + 2\vartheta^2) Si(2\vartheta)),$$

где $Si(\cdot)$ – интегральный синус [8].

ВЫВОДЫ

В статье получила дальнейшее развитие методика построения фундаментальных решений уравнений динамики тонких оболочек. Используя совместно теорию специальных функций и методологию обращения преобразования Лапласа, были получены новые соотношения фундаментальных решений оболочек с учетом демпфирования, которые хорошо согласуются с известными результатами.

На основании полученных решений, была решена задача о действии на оболочку внезапно приложенной локальной распределенной по кругу нагрузки. Проведены численные исследования, которые показали в частности, что при локальной нагрузке в близкие к начальным моменты времени эффект демпфирования можно не учитывать.

Проанализировано также влияние геометрии оболочки на характер процесса демпфирования.

Опираясь на полученные ранее результаты, можно утверждать, что описанная в статье методика в перспективе может получить эффективное развитие. Так, например, дополнительный учет в рассмотренной задаче влияния на прогиб оболочки упругого основания не приведет к изменению методики построения соответствующих фундаментальных решений. Более того, конечные соотношения будут незначительно отличаться от полученных в статье формул. Это позволяет говорить о некоторой «устойчивости» представленной методики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бишоп Р. Е. Колебания / Р.Е. Бишоп. – М. : Наука, 1968. – 161 с.
2. Нагорная Р. М. Фундаментальные решения динамических уравнений теории пологих оболочек / Р.М. Нагорная, В.А. Цванг, В.П. Шевченко // Изв. АН СССР. Мех. твердого тела. – 1994. – № 3. – С. 173-180.
3. Ветров О. С. Динамическое деформирование пологих ортотропных оболочек под действием локальных нагрузок / О.С. Ветров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 89-96.
4. Vetrov O. S. Study of the stress-strain state of orthotropic shells under the action of dynamical impulse loads / O.S. Vetrov, V.P. Shevchenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 183, № 2. – P. 231-240.
5. Ветров О. С. Напряженно-деформированное состояние оболочек на упругом основании под действием локальных динамических нагрузок / О.С. Ветров // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела : Материалы VII международной научной конференции. – 2013. – Т. 1. – С. 84-88.
6. Shevchenko V. P. Fundamental-solution methods in stress-concentration problems for thin elastic shells / V.P. Shevchenko // Int. Applied Mech. – 2007. – Vol. 43, № 7. – P. 707-725.
7. Ветров О. С. Фундаментальные решения динамических уравнений теории сферических оболочек с учетом демпфирования / О.С. Ветров // Fourth International Conference for young mathematicians on Differential Equations and Its Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii. Book of Abstracts. – Donetsk, 2012. – P. 31-32.
8. Kristensson G. Second Order Differential Equations: Special Functions and Their Classification / G. Kristensson. – Springer, 2010. – 216 p.
9. Mathai A. M. The H-function: Theory and Applications / A.M. Mathai, R.K. Saxena, H.J. Haubold. – Springer, 2010. – 270 p.

REFERENCES

1. Bishop, R.E. (1968), *Kolebaniya* [Vibration], Science, Moscow, USSR.
2. Nagornaya, R.M., Tsvang, V.A. and Shevchenko, V.P. (1994), “Fundamental solutions of the theory of shallow shells dynamic equations”, *Izvestiya AN USSR, Mehanika tverdogo tela*, no. 3, pp. 173-180.
3. Vetrov, O.S. (2012), “Dynamic deformation of shallow orthotropic shells under the action of local loads”, *Problemi obchislyvalnoyi mehaniki i mitsnosti konstruktsiy*, iss. 20, pp. 89-96.
4. Vetrov, O.S. and Shevchenko, V.P. (2012), “Study of the stress-strain state of orthotropic shells under the action of dynamical impulse loads”, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 183, no. 2, pp. 231-240.
5. Vetrov, O.S. (2013), “Stress-strain state of shells on elastic foundation under the action of local dynamic loads”, *Aktualnyie problemyi mehaniki deformiruemogo tverdogo tela: Materialy VII mezhdunarodnoy nauchnaya konferentsii*, vol. 1, pp. 84-88.
6. Shevchenko, V.P. (2007), “Fundamental-solution methods in stress-concentration problems for thin elastic shells”, *Int. Applied Mech.*, vol. 43, no. 7, pp.707-725.

7. Vetrov, O.S. (2012), "Fundamental solutions of the dynamic equations of the theory of spherical shells with the damping", *Fourth International Conference for young mathematicians on Differential Equations and Its Applications dedicated to Ya.B. Lopatinskii. Book of abstracts*, pp. 31-32.
8. Kristensson, G. (2010), "Second Order Differential Equations: Special Functions and Their Classification", Springer, Germany.
9. Mathai, A.M., Saxena, R.K. and Haubold, H.J (2010), "The H-function: Theory and Applications", Springer, Germany.

УДК 539.3, 538.54

ПРО ВПЛИВ ПЕРІОДИЧНОГО ЗА ЧАСОМ МАГНІТНОГО ПОЛЯ НА ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ШАРУ

¹Гачкевич О. Р., д. ф.-м. н., професор, ²Солодяк М. Т., к. ф.-м. н., ³Махоркін М. І., к. ф.-м. н.,
²Торський А. Р., к. т. н., ³Станік-Беслер А., Ph. D.

^{1,2,3}*Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3-б, Львів, 79060, Україна*

⁴*Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, Україна*

⁵*Technical University in Opole, Liuboshitska str., 3, Opole, Poland*

1,2dept13@iapmm.lviv.ua; 3mahorkin@ukr.net, 4adrian@cmm.lviv.ua,
5a.stanik-besler@po.opole.pl

Запропоновано розрахункову модель визначення параметрів, які описують магнітне, температурне та фізико-механічні поля в електропровідному шарі, який знаходиться в гармонічному за часом магнітному полі. Отримано критерії, за якими визначають необхідність враховувати коливні складові температури та переміщень
Ключові слова: гармонічне за часом магнітне поле, коливні складові тепловиділень, динамічні члени задачі термопружності, пондеромоторна сила.

О ВЛИЯНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВО ВРЕМЕНИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО СЛОЯ

¹Гачкевич А.Р., д. ф.-м. н., профессор, ²Солодяк М. Т., к. ф.-м. н.,
³Махоркин Н. И., к. ф.-м. н., ⁴Торский А. Р., к. т. н., ⁵Станик-Беслер А., Ph. D.

^{1,2,3}*ИППММ им. Я.С. Подстригача НАН Украины,
ул. Наукова 3-б, Львов, 79060, Украина*

⁴*ЦММ ИППММ им. Я.С. Подстригача НАН Украины,
ул. Дж. Дудаева, 15, Львов, 79005, Украина*

^{1,5}*Technical University in Opole,
Liuboshitska str., 3, Opole, Poland*

1,2dept13@iapmm.lviv.ua; 3mahorkin@ukr.net, 4adrian@cmm.lviv.ua,
5a.stanik-besler@po.opole.pl

Предложена расчетная модель определения параметров, описывающих магнитное, температурное и физико-механические поля в электропроводящем слое, который находится в гармоничном во времени магнитном поле. Получены критерии, при выполнении которых необходимо учитывать колебательные составляющие температуры и перемещений.
Ключевые слова: гармоническое во времени магнитное поле, колебательные составляющие тепловыделений, динамические члены задачи термоупругости, пондеромоторная сила.