

АСИМПТОТИЧНІ ДВОФАЗОВІ СОЛІТОНОПОДІБНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПАРНОГО СТЕПЕНЯ ПРИ СТАРШІЙ ПОХІДНІЙ

Розглянуто алгоритм побудови асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами у випадку парного степеня малого параметра при старшій похідній.

The paper deals with algorithm of constructing asymptotic two phase soliton-type solution for singular perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients in the case of even degree of small parameter.

1. Вступ. Як відомо, багато хвильових процесів в однорідних середовищах описується хвильовим рівнянням вигляду [1, 2]

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,$$

де $a = \text{const}$ – швидкість поширення хвиль.

При виведенні цього рівняння припускають амплітуду хвиль достатньо малою та відсутність дисипації і дисперсії. Відсутність дисперсії означає, що швидкість поширення хвиль не залежить від її частоти і довжини [1 – 4].

Врахування дисперсії і дисипації дозволяє описати нові якісні ефекти. Зокрема, дисперсія є причиною розпливання хвиль, а навіть мала дисипація приводить до затухання коливань. Ці явища описуються за допомогою нових (нелінійних) членів у рівняннях хвильового типу. З іншого боку, нелінійні рівняння дозволяють побачити новий якісний ефект – укручення фронту хвилі [3]. Саме врахування малої дисперсії і нелінійних членів при формуванні математичної моделі коливань рідини приводить до сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза

$$\varepsilon^2 u_{xxx} - 6uu_x + u_t = 0. \quad (1)$$

Рівняння Кортевега-де Фріза є одним з найвідоміших нелінійних диференціальних рівнянь сучасної математичної фізики і вивчалася в працях багатьох вчених, зокрема, методом оберненої задачі розсіювання [5, 6].

Рівняння вигляду (1) асимптотичними методами вперше вивчалася в [7], де було запропоновано нелінійний метод ВКБ, за допомогою якого побудовано головний член асимптотичного розкладу для квазіперіодичного розв'язку рівняння (1). Згодом для цього рівняння досліджувалося питання про границю його розв'язку при $\varepsilon \rightarrow 0$, як аналітичними [8 – 10], так і чисельними методами [11, 12].

При врахуванні неоднорідностей середовища виникає рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами і малим параметром [13 – 17], розв'язки якого у загальному випадку (із-за наявності змінних коефіцієнтів) не можна побудувати у явному вигляді, а тому чи не єдиним підходом для його дослідження є асимптотичні методи.

У [14 – 17] розглянуто сингулярно збурене рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^n u_{xxx} = a(x, t, \varepsilon)u_t + b(x, t, \varepsilon)uu_x, \quad (2)$$

де функції $a(x, t, \varepsilon)$, $b(x, t, \varepsilon)$ записуються асимптотичними рядами

$$a(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j a_j(x, t),$$

$$b(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j b_j(x, t)$$

з коефіцієнтами $a_j(x, t)$, $b_j(x, t) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R} \times [0; T])$, $j \geq 0$; $n \in \mathbf{N}$; ε – малий параметр, де показано, що вигляд асимптотичного солітоноподібного розв'язку рівняння (2) залежить від степеня малого параметра при старшій похідній.

Асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки рівняння (2) побудовано у [14] (випадок парного n та випадок, коли n непарне і більше за 1), у [15] (випадок $n = 1$). Цілком природно виникає питання про побудову асимптотичних двофазових солітоноподібних розв'язків рівняння (2) при різних значеннях n . Це питання частково ($n = 1$, $n = 2$) розглядалося в [16, 17].

У даній статті запропоновано алгоритм побудови асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (2) для випадку, коли $n = 2(k + 1)$, $k \in \mathbf{N}$.

2. Основні позначення. Позначимо через $G_1 = G_1(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R})$ лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x, t, \tau)$, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, p, q, r рівномірно щодо (x, t) на кожній компактній множині $K \subset \mathbf{R} \times [0; T]$ виконуються такі дві умови:

$$1^0. \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^n \frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p \partial t^q \partial \tau^r} f(x, t, \tau) = 0,$$

2⁰. існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x, t)$, що

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \tau^n \frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p \partial t^q \partial \tau^r} (f(x, t, \tau) - f^-(x, t)) = 0,$$

а через $G_1^0 = G_1^0(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R}) \subset G_1$ – простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x, t, \tau) \in G_1$, що рівномірно щодо змінних (x, t) на кожному компактні $K \subset \mathbf{R} \times [0; T]$ виконується умова:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} f(x, t, \tau) = 0.$$

Нехай $G_2 = G_2(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ – лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x, t, \tau_1, \tau_2)$, що існують $f_1^\pm = f_1^\pm(x, t, \tau_2)$, $f_2^\pm = f_2^\pm(x, t, \tau_1) \in G_1$ і такі

нескінченно диференційовні функції $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, що для довільних невід'ємних цілих чисел $p_1, p_2, q_1, q_2, \beta_1, \beta_2$ і $(x, t) \in K$ мають місце співвідношення:

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow \pm\infty} \tau_1^{p_1} \frac{\partial^{q_1+q_2+\beta_1+\beta_2}}{\partial x^{q_1} \partial t^{q_2} \partial \tau_1^{\beta_1} \partial \tau_2^{\beta_2}} (f(x, t, \tau_1, \tau_2) - f_1^\pm(x, t, \tau_2) - u_1^\pm(x, t)) = 0,$$

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow \pm\infty} \tau_2^{p_2} \frac{\partial^{q_1+q_2+\beta_1+\beta_2}}{\partial x^{q_1} \partial t^{q_2} \partial \tau_1^{\beta_1} \partial \tau_2^{\beta_2}} (f(x, t, \tau_1, \tau_2) - f_2^\pm(x, t, \tau_1) - u_2^\pm(x, t)) = 0,$$

а $G_2^0 = G_2^0(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ – лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x, t, \tau_1, \tau_2)$, що існують $f_1^\pm = f_1^\pm(x, t, \tau_2)$, $f_2^\pm = f_2^\pm(x, t, \tau_1) \in G_1^0$, і для всіх невід'ємних цілих чисел $p_1, p_2, q_1, q_2, \beta_1, \beta_2$ і $(x, t) \in K$ мають місце співвідношення:

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow \pm\infty} \tau_1^{p_1} \frac{\partial^{q_1+q_2+\beta_1+\beta_2}}{\partial x^{q_1} \partial t^{q_2} \partial \tau_1^{\beta_1} \partial \tau_2^{\beta_2}} (f(x, t, \tau_1, \tau_2) - f_1^\pm(x, t, \tau_2)) = 0,$$

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow \pm\infty} \tau_2^{p_2} \frac{\partial^{q_1+q_2+\beta_1+\beta_2}}{\partial x^{q_1} \partial t^{q_2} \partial \tau_1^{\beta_1} \partial \tau_2^{\beta_2}} (f(x, t, \tau_1, \tau_2) - f_2^\pm(x, t, \tau_1)) = 0.$$

Означення 1. Функція $u(x, t, \varepsilon)$ називається асимптотичною двофазовою солітоноподібною, якщо для довільного цілого числа $N \geq 0$ вона записується у вигляді:

$$u(x, t, \varepsilon) = Y_N(x, t, \tau_1, \tau_2, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (3)$$

де

$$Y_N(x, t, \tau_1, \tau_2, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau_1, \tau_2)], \quad (4)$$

$$\tau_1 = \frac{S_1(x, t)}{\varepsilon}, \quad \tau_2 = \frac{S_2(x, t)}{\varepsilon};$$

$u_j(x, t)$ – нескінченно диференційовні функції; $S_k = S_k(x, t) \in C^\infty(\mathbf{R} \times [0; T])$, причому $\frac{\partial S_k}{\partial x}|_{\Gamma_k} \neq 0$; $\Gamma_k = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T], S_k(x, t) = 0\}$, $k = 1, 2$; $V_0(x, t, \tau_1, \tau_2) \in G_2^0$, $V_j(x, t, \tau_1, \tau_2) \in G_2$, $j = 1, N$.

Криві Γ_k , $k = 1, 2$, називаються кривими розриву.

У подальшому використовується стандартне для асимптотичного аналізу позначення: запис $\Psi(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, означає, що існують такі величини $\varepsilon_0 > 0$ і стала $C > 0$, яка залежить від числа N і від компакта $K \subset \mathbf{R} \times [0; T]$, що $|\Psi(x, t, \varepsilon)| \leq C \varepsilon^N$ для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ і всіх $(x, t) \in K$.

3. Вигляд асимптотичного розв'язку. З урахуванням результатів [14 – 17] асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок рівняння (2) у випадку, коли $n = 2k$, $k = 2, 3, \dots$, шукаємо у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau_1, \tau_2)], \quad (5)$$

$$\tau_s = (x - \varphi_s(t)) \varepsilon^{-n/2}, \quad s = 1, 2.$$

Члени регулярної частини асимптотики (5) є розв'язками системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку вигляду

$$a_0(x, t) \frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x, t) u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$a_0(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x, t) u_j \frac{\partial u_0}{\partial x} + b_0(x, t) u_0 \frac{\partial u_j}{\partial x} = F_j(x, t), \quad (7)$$

де функції $F_j(x, t)$ знаходяться рекурентним чином за функціями $u_0(x, t)$, $u_1(x, t)$, \dots , $u_{j-1}(x, t)$, $j = \overline{1, N}$.

Питання про існування розв'язку системи (6), (7) і алгоритм його побудови розглянуто в [18, 19]. Тому надалі вважаємо, що функції $u_j(x, t)$, $j = \overline{0, N}$, відомі.

Члени сингулярної частини асимптотики (5) є розв'язками системи диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1^3} + 3 \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2} + 3 \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_2^3} + \\ & + [\varphi'_1(t) a_0(x, t) - b_0(x, t) u_0(x, t)] \frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \\ & + [\varphi'_2(t) a_0(x, t) - b_0(x, t) u_0(x, t)] \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2} - \end{aligned}$$

$$-b_0(x, t) V_0 \left(\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1^3} + 3 \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2} + 3 \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_2^3} + \\ & + [\varphi'_1(t) a_0(x, t) - b_0(x, t) u_0(x, t)] \frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + \\ & + [\varphi'_2(t) a_0(x, t) - b_0(x, t) u_0(x, t)] \frac{\partial V_j}{\partial \tau_2} - \\ & - b_0(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial \tau_1} (V_0 V_j) + \frac{\partial}{\partial \tau_2} (V_0 V_j) \right) = \\ & = \mathcal{F}_j(x, t, \tau_1, \tau_2), \end{aligned} \quad (9)$$

де функції $\mathcal{F}_j(x, t, \tau_1, \tau_2)$, $j = \overline{1, N}$, знаходяться рекурентним чином за функціями $V_k(x, t, \tau_1, \tau_2)$, $k = \overline{0, j-1}$.

4. Головний член асимптотики (5).

Для того, щоб отримати розв'язок рівняння (8) у явному вигляді, припустимо, що функції $\varphi = \varphi_s(t)$, $s = 1, 2$, відомі і задовольняють початкову умову $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, а також припустимо, що виконуються умови узгодженості:

$$a_0(\varphi_1(t), t) = a_0(\varphi_2(t), t) := a_0(t),$$

$$b_0(\varphi_1(t), t) = b_0(\varphi_2(t), t) := b_0(t),$$

$$u_0(\varphi_1(t), t) = u_0(\varphi_2(t), t) := u_0(t). \quad (10)$$

Функції $V_{0s}(t, \tau_1, \tau_2) = V_0(\varphi_s(t), t, \tau_1, \tau_2)$, $s = 1, 2$, задовольняють диференціальні рівняння вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1^3} + 3 \frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2} + 3 \frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_2^3} + \\ & + a_0(t) \left[\varphi'_1(t) \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_1} + \varphi'_2(t) \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_2} \right] + \\ & - b_0(t) (u_0(t) + V_{0s}) \left[\frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

і згідно умов (10) для них виконується рівність $V_{01}(t, \tau_1, \tau_2) = V_{02}(t, \tau_1, \tau_2)$.

Позначимо $V_0(t, \tau_1, \tau_2) = V_{01}(t, \tau_1, \tau_2)$. Двосолітонний розв'язок рівняння (11) можна записати у вигляді $V_0(t, \tau_1, \tau_2) = \bar{V}_0(\xi, \eta)$, де

$$\bar{V}_0(\xi, \eta) = 4 \left[\frac{c_1^2 c_2^2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2}{\kappa_1 \kappa_2} e^{-2(\kappa_1 + \kappa_2)\xi} - \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\kappa_1 c_1^2 e^{-2\kappa_1 \xi} - \kappa_2 c_2^2 e^{-2\kappa_2 \xi} + \\
& + \frac{c_1^4 c_2^2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \kappa_2}{4\kappa_1^2 (\kappa_1 + \kappa_2)^2} e^{-(4\kappa_1 + 2\kappa_2)\xi} + \\
& + \frac{c_1^2 c_2^4 (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \kappa_1}{4\kappa_2^2 (\kappa_1 + \kappa_2)^2} e^{-(2\kappa_1 + 4\kappa_2)\xi} \Big] \times \\
& \times \left[1 + \frac{c_1^2}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 \xi} + \frac{c_2^2}{2\kappa_2} e^{-2\kappa_2 \xi} + \right. \\
& \left. + \frac{c_1^2 c_2^2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4\kappa_1 \kappa_2 (\kappa_1 + \kappa_2)^2} e^{-2(\kappa_1 + \kappa_2)\xi} \right]^{-2}, \quad (12)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\xi(t, \tau_1, \tau_2) &= \left(\frac{b_0(t)}{6} \right)^{1/2} \frac{\gamma_2(t)\tau_1 - \gamma_1(t)\tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}, \\
\eta(t, \tau_1, \tau_2) &= \left(\frac{b_0(t)}{6} \right)^{3/2} \frac{\tau_1 - \tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Тут позначено

$$\gamma_s(t) = -\varphi'_s(t)a_0(t) + b_0(t)u_0(t),$$

$$\kappa_s(t) = \left(\frac{b_0(t)}{6} \right)^{-1/2} \sqrt{\gamma_s(t)},$$

$$c_s(\eta) = c_s(0) \exp(\kappa_s^3(t)\eta)$$

і припускається, що $b_0(t) > 0$, $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$, $t \in [0; T]$, $\gamma_s(t) > 0$; $c_s(0) > 0$ – довільні сталі, $s = 1, 2$.

Має місце твердження.

Теорема 1. Нехай $n = 2k$, $k \geq 2$, і виконуються припущення:

1. функції $a_0(x, t)$, $b_0(x, t)$, $u_0(x, t) \in C^\infty(\mathbf{R} \times [0; T])$, причому $a_0(x, t) \neq 0$, $b_0(x, t) \neq 0$ для всіх $(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T]$;

2. мають місце умови (10) з функціями $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t) \in C^\infty([0; T])$, для яких $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$;

3. $b_0(t) > 0$, $\gamma_s(t) > 0$, $s = 1, 2$, і $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$ для всіх $t \in [0; T]$.

Тоді головний член асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (2) має вигляд

$$Y_0(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + V_0(t, \tau_1, \tau_2), \quad (14)$$

$$\tau_s = (x - \varphi_s(t)) \varepsilon^{-n/2}, \quad s = 1, 2,$$

і задовольняє на множині $\mathbf{R} \times [0; T]$ рівняння (2) з точністю $O(\varepsilon^{1-n/2})$, а при $x \rightarrow \pm\infty$ – з точністю $O(\varepsilon)$.

Доведення теореми 1 проводиться шляхом асимптотичного оцінювання виразу, який отримується після підстановки функції (14) у рівняння (2) і врахування властивостей функцій з простору G_2^0 та умов узгодженості (10).

Зауваження 1. У випадку $a(x, t, \varepsilon) = a(x, t)$, $b(x, t, \varepsilon) = b(x, t)$ функція $Y_0(x, t, \varepsilon)$ задовольняє рівняння (2) з точністю $O(1)$.

5. Старші члени асимптотики (5).

Для того, щоб з'ясувати питання про існування розв'язку рівняння (9), розглянемо рівняння для старших членів сингулярної частини асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (2) на кривих розриву $x = \varphi(t)$, $s = 1, 2$, тобто для функцій $V_{js}(t, \tau_1, \tau_2) = V_j(\varphi_s(t), t, \tau_1, \tau_2)$, $j = \overline{1, N}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_1^3} + 3 \frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2} + 3 \frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_2^3} + \\
& + [\varphi'_1(t)a_0(t) - b_0(t)u_0(t)] \frac{\partial V_{js}}{\partial \tau_1} + \\
& + [\varphi'_2(t)a_0(t) - b_0(t)u_0(t)] \frac{\partial V_{js}}{\partial \tau_2} - \\
& - b_0(t) \left[\frac{\partial}{\partial \tau_1} (V_{0s} V_{js}) + \frac{\partial}{\partial \tau_2} (V_{0s} V_{js}) \right] = \\
& = \mathcal{F}_{js}(t, \tau_1, \tau_2), \quad (15)
\end{aligned}$$

де функції $\mathcal{F}_{js}(t, \tau_1, \tau_2)$, $j = \overline{1, N}$, $s = 1, 2$, визначаються рекурентно за функціями $V_{0s}(t, \tau_1, \tau_2)$, $V_{1s}(t, \tau_1, \tau_2)$, \dots , $V_{j-1,s}(t, \tau_1, \tau_2)$. Зокрема, при $j = 1$ за умов (10) маємо

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{1s} &= -a_1(\varphi_s(t), t) \left[\varphi'_1(t) \frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \varphi'_2(t) \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2} \right] + \\
& + [(b_0(t)u_1(\varphi_s(t), t) + b_1(\varphi_s(t), t)u_0(t)) + \\
& + b_1(\varphi_s(t), t)V_0] \left(\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2} \right). \quad (16)
\end{aligned}$$

Припустимо також, що додатково до умов (10) мають місце умови узгодженості вигляду

$$\mathcal{F}_{j1}(t, \tau_1, \tau_2) = \mathcal{F}_{j2}(t, \tau_1, \tau_2), \quad j = \overline{1, N}. \quad (17)$$

Умова (17) при $j = 1$ справджується, наприклад, у випадку, коли для всіх $t \in [0; T]$ маємо:

$$a_1(\varphi_1(t), t) = a_1(\varphi_2(t), t) := a_1(t), \quad (18)$$

$$b_1(\varphi_1(t), t) = b_1(\varphi_2(t), t) := b_1(t), \quad (19)$$

$$u_1(\varphi_1(t), t) = u_1(\varphi_2(t), t) := u_1(t). \quad (20)$$

За умов (10), (17) виконується рівність $V_{j1}(t, \tau_1, \tau_2) = V_{j2}(t, \tau_1, \tau_2)$, $j = \overline{1, N}$, що дозволяє за допомогою переходу від змінних τ_1, τ_2 до змінних ξ, η (див. формули (13)) звести рівняння (15) до рівнянь вигляду:

$$\frac{\partial^3 \bar{V}_j}{\partial \xi^3} - b_0(t) \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{V}_0 \bar{V}_j) + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial \eta} = \bar{\mathcal{F}}_j(t, \xi, \eta), \quad (21)$$

де $\bar{V}_0(t, \xi, \eta)$ визначено формулою (12), а функції $\bar{V}_j(t, \xi, \eta)$, $\bar{\mathcal{F}}_j(t, \xi, \eta)$, $j = \overline{1, N}$, отримано з $V_j(t, \tau_1, \tau_2)$, $\mathcal{F}_j(t, \tau_1, \tau_2)$, $j = \overline{1, N}$, в результаті згаданої вище заміни змінних.

За умови 3 теореми 1 заміна змінних (13) є невивірженою.

Якщо функція $\bar{\mathcal{F}}_j(t, \xi, \eta)$, $j = \overline{1, N}$, при кожному $\eta \geq 0$ належить простору швидко спадних щодо ξ функцій, то рівняння (21) має розв'язок $\bar{V}_j(t, \xi, \eta)$, $(\xi, \eta) \in \mathbf{R} \times [0; T_1]$, $j = \overline{1, N}$, де $T_1 > 0$ – деяке число, який належить простору швидко спадних щодо змінної ξ функцій [20].

Вважаючи функцію $\bar{V}_j(t, \xi, \eta)$, $j = \overline{1, N}$, відомою, враховуючи виконану заміну змінних, від розв'язку задачі (21) повернемося до відповідного розв'язку рівняння (15) – функції $V_j(t, \tau_1, \tau_2)$, $j = \overline{1, N}$, яку можна записати у вигляді

$$V_j(t, \tau_1, \tau_2) = \bar{V}_j(\xi(t, \tau_1, \tau_2), \eta(t, \tau_1, \tau_2)), \quad (22)$$

де функції $\xi(t, \tau_1, \tau_2)$, $\eta(t, \tau_1, \tau_2)$ визначено формулами (13).

Оскільки $\bar{V}_j(t, \xi, \eta)$, $j = \overline{1, N}$, при кожному $\eta \in [0; T_1]$ належить простору швидко спадних щодо змінної ξ функцій, то при $\gamma_2(t)\tau_1 - \gamma_1(t)\tau_2 \neq 0$, $t \in [0; T]$, для всіх $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ маємо

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow \pm\infty} \tau_1^k V_j(t, \tau_1, \tau_2) = 0,$$

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow \pm\infty} \tau_2^k V_j(t, \tau_1, \tau_2) = 0.$$

З умови $\eta \in [0; T_1]$ випливає нерівність

$$0 \leq \left(\frac{b_0(t)}{6} \right)^{3/2} \frac{(\varphi_2(t) - \varphi_1(t))}{a_0(t)(\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t))} < \varepsilon^{n/2} T_1.$$

Ця нерівність має місце для всіх $t \in [0; T_2]$, де $T_2 > 0$ – деяке число, причому, взагалі кажучи, $T_2 = O(\varepsilon^{n/2})$.

Мають місце такі твердження.

Теорема 2. Нехай $n = 2k$, $k \geq 2$, і виконуються такі припущення:

1. мають місце умови 1, 3 теореми 1;
2. функції $a_1(x, t)$, $b_1(x, t)$, $u_1(x, t) \in C^\infty(\mathbf{R} \times [0; T])$;
3. справджуються умови узгодженості (10), (18) – (20) з функціями $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in C^\infty([0; T])$, для яких $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$;
4. рівняння (21) при $j = 1$ має розв'язок $\bar{V}_1(t, \xi, \eta)$, який при $\xi = \xi(t, \tau_1, \tau_2)$, $\eta = \eta(t, \tau_1, \tau_2)$ (згідно формул (13)) належить простору G_2 .

Тоді функція

$$Y_1(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + V_0(t, \tau_1, \tau_2) + \varepsilon (u_1(x, t) + V_1(t, \tau_1, \tau_2)), \quad (23)$$

задовольняє на множині $\mathbf{R} \times [0; T]$ рівняння (2) з точністю $O(\varepsilon^{-n/2+2})$.

Теорема 3. Нехай $n = 2k$, $k \geq 2$, і виконуються такі припущення:

1. мають місце умови 1, 3 теореми 1;
2. функції $a_j(x, t)$, $b_j(x, t)$, $u_j(x, t) \in C^\infty(\mathbf{R} \times [0; T])$, $j = \overline{2, N}$;
3. виконуються умови (10), (17) з функціями $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in C^\infty([0; T])$, для яких $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$;
4. рівняння (21) має розв'язок $\bar{V}_j(t, \xi, \eta)$, $j = \overline{1, N}$, який при $\xi = \xi(t, \tau_1, \tau_2)$, $\eta = \eta(t, \tau_1, \tau_2)$ (згідно формул (13)) належить простору G_2 .

Тоді функція

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j (u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau_1, \tau_2)),$$

$$\tau_s = (x - \varphi_1(t)) \varepsilon^{-n/2}, \quad s = 1, 2, \quad (24)$$

задовольняє рівняння (2) з точністю $O(\varepsilon^{N-n/2+1})$ на множині $\mathbf{R} \times [0; \varepsilon^{n/2} T]$.

Доведення теорем 2, 3 аналогічне доведенню теореми 1 і проводиться шляхом асимптотичного оцінювання виразів, які отримуються після підстановки функцій (23) і (24) у рівняння (2) і врахування властивостей функцій з просторів G_2^0 , G_2 та умов узгодженості (10), (18) – (20).

З теореми 3 випливає, що рівняння (2) має для довільного $N \geq 0$ асимптотичний розв'язок – функцію $Y_N(x, t, \varepsilon)$, яка задовольняє умови означення 2.1, тобто є N -им наближенням для асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (2).

6. Висновки. Побудовано асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами у випадку, коли малий параметр при старшій похідній має парний степінь. Доведено теорему про точність, з якою побудований асимптотичний розв'язок задовольняє вихідне рівняння.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
2. Ablowitz M.J. Nonlinear dispersive waves. Asymptotic analysis and solitons. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2011. – 348 p.
3. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука, 1988. – 368 с.
4. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. – М.: Советское радио, 1977. – 368 с.
5. Korteweg D.J., de Vries G. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Philos. Mag. – 1895. – **39**. – P. 422-433.
6. Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. – 1967. – **19**. – P. 1095-1097.
7. Miura R.M., Kruskal M. Application of nonlinear WKB-method to the KdV equation // SIAM J. Appl. Math. – 1974. – **26**, N 3. – P. 376-395.
8. Lax P.D., Levermore C.D. The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. I // Comm. Pure Appl. Math. – 1983. – **36**, N 3. – P. 253-290.
9. Lax P.D., Levermore C.D. The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. II // Comm. Pure Appl. Math. – 1983. – **36**, N 5. – P. 571-593.
10. Lax P.D., Levermore C.D. The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. III // Comm. Pure Appl. Math. – 1983. – **36**, N 6. – P. 809-829.
11. Grava T., Klein C. Numerical solution of the small dispersion limit of Korteweg-de Vries and Whitham equations // Comm. Pure Appl. Math. – 2007. – **60**, N 11. – P. 1623-1664.
12. Venakides S. The Korteweg-de Vries equation with small dispersion: higher order Lax-Levermore theory // Comm. Pure Appl. Math. – 1990. – **43**, N 3. – P. 335-361.
13. Маслов В.П., Омельянов Г.А. Асимптотические солитонобразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. – 1981. – **36** (219), N 2. – С. 63-124.
14. Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, N 1. – С. 111-124.
15. Samoylenko Yul. Asymptotical expansions for one-phase soliton type solution to perturbed Korteweg-de Vries equation // Proceedings of the Fifth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". – К.: Institute of Mathematics. – 2004. – 3. – P. 1435-1441.
16. Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром першого степеня при старшій похідній // Вісник Київського національного університету. Математика. Механіка. – 2010. – Вип. 23. – С. 19-24.
17. Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, N 3. – С. 378-387.
18. Самойленко Ю.І. Існування розв'язку задачі Коші для рівняння Хопфа зі змінними коефіцієнтами у просторі швидко спадних функцій // Збірник праць Інституту математики НАН України – 2012. – **9**, N 1. – С. 293-300.
19. Самойленко Ю.І. Існування розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами у просторі швидко спадних функцій // Буковинський мат. журн. – 2013. – **1**, N 1 – 2. – С. 118-122.
20. Фаминский А.В. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1988. – **13**. – P. 56-105.