

О. Берлов

Інженер,
Дніпропетровський
національний університет,
м. Дніпропетровськ

УДК 536.2:539.3

ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ СКЛАДЕНИХ КОНСТРУКЦІЙ ПІД ДІЄЮ ДЖЕРЕЛ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОХОДЖЕННЯ

Запропонована методика математичного моделювання температурних полів складових конструкцій під дією полів різної фізичної природи. Прийнято враховувати теплові дії електромагнітних полів на складові елементи конструкцій окремо у вигляді джерел тепла в рівнянні теплопровідності і в нестационарних, на відміну від відомих у літературі математичних моделей. Усі фізичні параметри матеріалів складових конструкцій залежать від температури.

температурне поле, складена конструкція, електромагнітне поле

Зміна теплового стану елементів конструкцій виникає під дією зовнішніх і внутрішніх впливів, враховувати які потрібно для побудови адекватних математичних моделей задач знаходження теплових режимів у складових елементах конструкцій (СЕК) під впливом електромагнітних полів (ЕМП). Фізична природа теплових впливів може бути різною: зміна в часі температури середовища, в якому знаходиться об'єкт дослідження, або зміна теплового потоку, що поступає до меж об'єкта. Такий тепловий потік може створюватися в результаті поглинання електромагнітного випромінювання від зовнішніх джерел, або аеродинамічного нагрівання, якщо об'єкт знаходиться у високошвидкісному потоці газу. Останнім часом спостерігається значна інтенсифікація сучасних технологічних процесів електромагнітними методами, в яких інтенсифікуючим чинником є енергія ЕМП.

Визначення температурних полів елементів конструкцій за дії на них джерел електромагнітної природи вимагає розв'язання цілого комплексу взаємозв'язаних задач електродинаміки, що характеризують вплив електромагнітних полів, і теорії теплопровідності. Розв'язування задач у такій складній постановці викликає низку проблем

пов'язаних з підходом і особливостями вибраного методу розв'язання, а також створює труднощі з математичної і обчислювальної точок зору [1 — 3].

На сьогодні розв'язок рівнянь, що враховують вплив ЕМП на складові елементи конструкцій, можна отримати за допомогою числових і чисельно-аналітичних методів.

Одним з підходів до розв'язання нелінійних задач теплопровідності є метод послідовних інтервалів [4 — 6]. Ідея методу була застосована для розрахунку температурних полів у задачах металургійної теплотехніки за змінних граничних умов I роду Н. Ю. Тайцем [7]. При такому підході весь час теплового навантаження розбивають на L послідовних інтервалів, у кожному з яких вид граничних функцій конкретизований. Розв'язок крайової задачі в такій постановці зводиться до розв'язування L крайових задач, що відрізняються початковими умовами і видом граничних функцій. Початкові умови на кожному інтервалі приймаються сталими — рівними середньointегральній температурі.

Подальшого розвитку метод послідовних інтервалів отримав у працях [4 — 6]. У них розв'язок лінійних задач нестационарної теплопровідності отримано в уніфікова-

ному вигляді для тіл простої геометричної форми і системи плоских тіл. Основна особливість розв'язків полягає в розбитті часу процесу на скінченні інтервали, в кожному з яких характеристики матеріалу, внутрішні джерела тепла і коефіцієнти тепловіддачі — сталі, а початкові умови на кожному інтервалі задаються функцією, яка визначається з розв'язку задачі для попереднього інтервалу. В такій постановці нелінійна задача теплопровідності зводиться до сукупності розв'язків лінійних задач з різними початковими і граничними умовами для кожного інтервалу часу. Для знаходження розв'язків лінійних задач в аналітичній теорії теплопровідності використовують операційний метод, заснований на застосуванні інтегрального перетворення Лапласа [4, 5, 8].

Серед інтегральних перетворень операційний метод є особливо ефективним при розв'язуванні нестационарних задач з внутрішніми джерелами тепла змінної за часом інтенсивності і неоднорідними нестационарними граничними умовами (ГУ). В результаті застосування операційного методу диференціальне рівняння в частинних похідних зводиться до звичайного диференціального рівняння. З розв'язку останнього виходить залежність зображення температурної функції від просторової координати. За допомогою зворотного інтегрального перетворення здійснюється перехід від зображення до оригінала, який і є шуканою залежністю температури від часу і координати.

У цій статті запропонована методика математичного моделювання температурних полів складових конструкцій під дією полів різної фізичної природи. Прийнято враховувати теплові дії ЕМП на складові елементи конструкцій окремо у вигляді джерел (стоків) тепла в рівнянні теплопровідності і в нестационарних, на відміну від відомих в літературі математичних моделей [2, 3], ГУ [9, 10]. Усі фізичні параметри матеріалів складових конструкцій залежать від температури.

Розв'язок лінійних задач нестационарної теплопровідності для складових елементів конструкцій за дії ЕМП подано у вигляді суми часткових розв'язків (принцип суперпозиції), які формуються під впливом таких компонент дії: зовнішніх ГУ, умов на стику шарів, джерел тепла по перетину кожного шару, початкового розподілу температури і взаємного теплового впливу СЕК.

Постановка задачі. Задача теплопровідності для багатошарового кусково-однорідного тіла (необмежена пластина), що складається з m паралельних плоских шарів, враховуючи що для кожного шару бралася локальна система координат ($0_v \leq x_v \leq R_v$), формулюється так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_v(T_v) \frac{\partial T_v(x_v, \tau)}{\partial x_v} \right] = c_v(T_v) \frac{\partial T_v(x_v, \tau)}{\partial \tau} + W_{v,j,\Sigma}(x_v, T_v, \tau), \quad (1)$$

$$T_v(x_v, 0) = \varphi_v(x), \quad (v = 1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

де $T_v(x_v, \tau)$ — температура v -го шару теплоізоляції, залежна від координати x_v і часу τ ; $c_v(T_v)$ — коефіцієнт питомої об'ємної теплоємності v -го шару; $\varphi_v(x)$ — функції, які характеризують нерівномірний розподіл температури в початковий момент часу.

Потужність внутрішніх джерел тепла є суперпозицією потужності джерел тепла, що є наслідком впливу на конструкцію полів різної фізичної природи. Залежно від впливу функція $W_{v,j,\Sigma}(x_v, T_v, \tau)$, має такий вигляд:

$$W_{v,j,\Sigma}(x_v, T_v, \tau) = \sum_{j=1}^N W_{v,j}(x_v, T_v, \tau), \quad (3)$$

де N — кількість дій.

Наприклад, $W_{v,1}(x_v, T_v, \tau)$ — може характеризувати теплоту фазового перетворення; $W_{v,2}(x_v, T_v, \tau) = I^2 R$, — джоулеве тепловиділення (I — сила струму в провіднику, R — опір провідника електричному струму); $W_{v,3}(x_v, T_v, \tau) = I_c t g \delta U$ — тепло, що виділяється через діелектричні втрати в ізоляції кабелів, де I_c — ємнісна сила струму і $t g \delta$ — тангенс кута діелектричних втрат, U — діюча напруга в кабелі [10]; для радіочастотного коаксіального кабелю джерела тепла визначаються з виразу $W_{v,5} = P_0 e^{-2\alpha z}$, де α — коефіцієнт згасання; z — координата по довжині кабелю [10]. Виділення тепла при надвисокочастотному (НВЧ) впливі визначається за формулою [9]

$$W_{v,6} = 0,287 \cdot E^2 f \cdot \epsilon'' \cdot 10^{-6},$$

де f — частота; E — напруженість електричного поля; ϵ'' — коефіцієнт діелектричних втрат; $W_{v,7}(x_v, T_v, \tau)$ — теплота нагрівання тіла по всьому об'єму при перетворенні енергії ядерного і радіаційного випромінювань [11].

Граничні функції, обумовлені наявністю зовнішніх поверхневих джерел (стоків) тепла, записуються у вигляді

$$\text{сукупності дій: } f_{0,\Sigma}(\tau) = \sum_{i=1}^{N_1} f_{0,i}(\tau), \quad f_{1,\Sigma}(\tau) = \sum_{i=1}^{N_2} f_{1,i}(\tau)$$

$$\text{або на межах шарів: } f_{2,\Sigma}(\tau) = \sum_{i=1}^{N_3} f_{2,i}(\tau), \text{ де } N_1, N_2, N_3$$

— кількість граничних дій.

$$\begin{cases} \alpha_0 \lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1(x_1, \tau)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = \\ = h_0 \alpha_0^*(T, \tau) [f_{0,\Sigma}(\tau) - M T_1(x_1, \tau)] \Big|_{x_1=0}, \\ \alpha_1 \lambda_m(T_m) \frac{\partial T_m(x_m, \tau)}{\partial x_m} \Big|_{x_m=R_m} = \\ = h_1 \alpha_1^*(T, \tau) [f_{1,\Sigma}(\tau) - M T_m(x_m, \tau)] \Big|_{x_m=R_m}, \end{cases} \quad (4)$$

де $f_{0,\Sigma}(\tau)$, $f_{1,\Sigma}(\tau)$ — граничні функції, які, залежно від типу ГУ, є температурою навколишнього середовища (ГУ третього роду); $\alpha_0^*(T, \tau)$, $\alpha_1^*(T, \tau)$ — зведені коефіцієнти теплообміну на зовнішніх поверхнях системи, що включають складові конвективного і променевого теплообміну. Вважаючи в (4) параметри уніфікації $\alpha_0, \alpha_1, h_0, h_1, M_0, M_1$ рівними 0 або ± 1 , матимемо ГУ відповідно першого, другого, третього роду і різні їх поєднання.

Умови теплового контакту мають такий вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_v(T_v) \frac{\partial T_v(x_v, \tau)}{\partial x_v} \Big|_{x_v=R_v} &= \\ &= \frac{1}{R_{v,v+1}(T, \tau)} [T_{v+1}(0, \tau) - T_v(R_v, \tau)]; \\ \lambda_v(T_v) \frac{\partial T_v(x_v, \tau)}{\partial x_v} \Big|_{x_v=R_v} - \\ - \lambda_{v+1}(T_{v+1}) \frac{\partial T_{v+1}(x_v, \tau)}{\partial x_{v+1}} \Big|_{x_{v+1}=0} &= f_{2,\Sigma}(R_v, T_v, \tau), \end{aligned} \right. \quad (5)$$

де $R_{v,v+1}$ — термічний опір на контакті шарів v і $v+1$.

При $f_{2,\Sigma}(R_v, T_v, \tau) = 0$ та $[T_{v+1}(0, \tau) - T_v(R_v, \tau)] = 0$ умови (5) відповідають умовам ідеального теплового контакту на стиках шарів; при

$f_{2,\Sigma}(R_v, T_v, \tau) = \omega_{v,v+1}^*(T_v, \tau) = \frac{R_v}{\lambda_v} \omega_{v,v+1}(R_v, T_v, \tau)$ умо-

ви (5) відповідають умовам неідеального теплового контакту; при

$$f_{2,\Sigma}(R_v, T_v, \tau) = A_{v,v+1} \frac{\partial T_{v+1}(R_v, T_v, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=0},$$

$A_{v,v+1} = \frac{\delta_{v,v+1} R_v}{R_0^2} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_v} \frac{c_{v,v+1}}{c_0}$ умови (5) відповідають

умовам неідеального теплового контакту у вигляді теплової ємності.

Метод розв'язування. Як приклад розглянемо задачу нестационарної теплопровідності для нескінченної плоскопаралельної пластини завтовшки R при лінійній апроксимації граничної функції на $\Delta\tau_j$ інтервалах розбиття. Математичне формулювання задачі має вигляд:

$$a \frac{\partial^2 T_j(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial T_j(x, \tau)}{\partial \tau}, \quad 0 \leq x \leq R, \quad 0_j \leq \tau \leq \Delta\tau_j, \quad (6)$$

$$T_j(x, \tau) \Big|_{\tau=0} = T_{j-1}(x, \Delta\tau_{j-1}), \quad (7)$$

$$T_j(x, \tau) \Big|_{x=R} = T_{j-1}(R, \Delta\tau_{j-1}) + K_j \tau = f_j(\tau), \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_j(x, \tau_{j-1})}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (9)$$

де $j = 1, 2, 3, \mathbf{K}$ — номер часового розбиття; τ, x — час і координата; a — коефіцієнт температуропровідності.

Для $j = 1$ маємо

$$T_1(x, 0_1) = 0. \quad (10)$$

Фактично в такій постановці задача зводиться до розв'язування $j = 1, 2, 3, \mathbf{K}m$ задач для кожного інтервалу $\Delta\tau_j$, які відрізняються видом граничної функції. Застосовуючи інтегральне перетворення Лапласа за змінною τ , отримаємо:

$$T_j(x, p) = A_j ch \sqrt{\frac{p}{a}} x + B_j sh \sqrt{\frac{p}{a}} x + \bar{Z}_j(x, p), \quad (11)$$

де A_j, B_j — константи інтегрування; $\bar{Z}_j(x, p)$ — функція, що враховує нерівномірний розподіл температури в початкові $\tau_j = 0_j$ моменти часу і є частковим розв'язком рівняння (6), записаного в полі зображень. Тоді рівняння (11) можна подати у вигляді:

$$\bar{T}_j(x, p) = [\bar{f}_j(p) - \bar{\chi}_j(p)] \frac{ch \sqrt{\frac{p}{a}} x}{sh \sqrt{\frac{p}{a}} R} + \bar{Z}_j(x, p), \quad (12)$$

$$\bar{\chi}_j(p) = \bar{Z}_j(x, p) \Big|_{x=R}.$$

Оригінал зображення (12), відповідно до [4, 5], можна подати так:

$$T_j(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n(x) \chi_j^{(n)}(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{k,j} \cos \gamma_k \frac{x}{R} \exp(p_k \tau) + Z_j(x, \tau), \quad (13)$$

$$\text{де } \Omega_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{\Phi_0} - \sum_{i=1}^n \Omega_{n-i}(x) \frac{\Phi_i}{\Phi_0},$$

$$\mu_n(x) = \frac{\left(\frac{x^2}{a}\right)^n}{(2n)!}, \quad \Phi_n = \mu_n(x) \Big|_{x=R},$$

$$Z_j(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n \tau^n}{n!} \cdot \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} T_{j-1}(x, \Delta\tau_{j-1}),$$

$$A_{k,j} = \frac{\bar{\chi}_j(p_k)}{\Psi'(p_k)} = \frac{2\gamma_k \frac{a}{R^2}}{(-1)^{k+1}} \cdot \bar{\chi}_j(p_k).$$

Для першого інтервалу

$$T_1(x, \tau) = K_1 \tau + \frac{R^2}{2a} K_1 \left[\left(\frac{x}{R^2} \right) - 1 \right] + \sum_{k=1}^{\infty} A_{k,1} \cos \gamma_k \frac{x}{R} \exp(p_k \tau).$$

Для j -го інтервалу розв'язок записуємо у вигляді

$$\begin{aligned} T_j(x, \tau) &= T_{j-1}(x, \Delta\tau_{j-1}) + K_j \tau + \frac{R^2}{2a} K_j \left[\left(\frac{x}{R^2} \right) - 1 \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} H_{k,j} \cos \gamma_k \frac{x}{R} \exp(p_k \tau), \end{aligned} \quad (14)$$

$$H_{k,j} = \frac{K_j - K_{j-1}}{p_k^2 \Psi'(p_k)} + H_{k,j-1} \exp(p_k \Delta\tau_{j-1}),$$

$$\text{де } \Psi'(p_k) = \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{R^2}{a} \right)}{2\gamma_k}, \quad H_k = (-1)^{k+1} \frac{2 \frac{R^2}{a} K_1}{\gamma_k^3},$$

$$K_j = \frac{T_j(x, \Delta\tau_{j-1}) - T_{j-1}(x, \Delta\tau_{j-1})}{\Delta\tau_j}, \quad \gamma_k = \frac{\pi}{2}(2k+1),$$

$$p_k = \gamma_k^2 \frac{a}{R^2}.$$

Таким чином, розв'язок (14) дає можливість визначити температурне поле необмеженої пластини при складному характері граничних функцій.

Розглянемо математичну постановку задачі для багатопластового плоского тіла (1) — (5) (рис. 1), використовуючи метод послідовних інтервалів. Від інтервалу до інтервалу змінюватимемо східчасто теплофізичні характеристики, параметри неідеального теплового контакту, зведений коефіцієнт теплообміну. Функції, залежні від часу і координати на кожному інтервалі, можуть набувати будь-який конкретний вигляд з класу аналітичних функцій.

Перейдемо від фізичних змінних до узагальнених:

$$\beta_v = \frac{a_v R_0^2}{a_0 R_v^2}, \quad \beta_v^* = \beta_v \frac{R_v^2}{\lambda_v}, \quad \mu_{v+1,v} = \frac{\lambda_{v+1} R_v}{\lambda_v R_{v+1}},$$

$$R_{v,v+1}^* = \frac{R_v}{R_{v,v+1} \lambda_v},$$

з урахуванням безрозмірних параметрів:

$$F_o = \frac{a_0}{R_0^2} \tau, \quad x = \frac{x_v}{R_v}, \quad Bi_0^* = \frac{\alpha_0^*}{\lambda_1} R_1, \quad Bi_1^* = \frac{\alpha_1^*}{\lambda_m} R_m,$$

де a_0, R_0 — деякі довільні параметри: коефіцієнт теплопровідності і лінійний розмір.

Розіб'ємо час процесу $[0, F_{o_k}]$ на низку інтервалів часу ΔF_{o_j} так, що

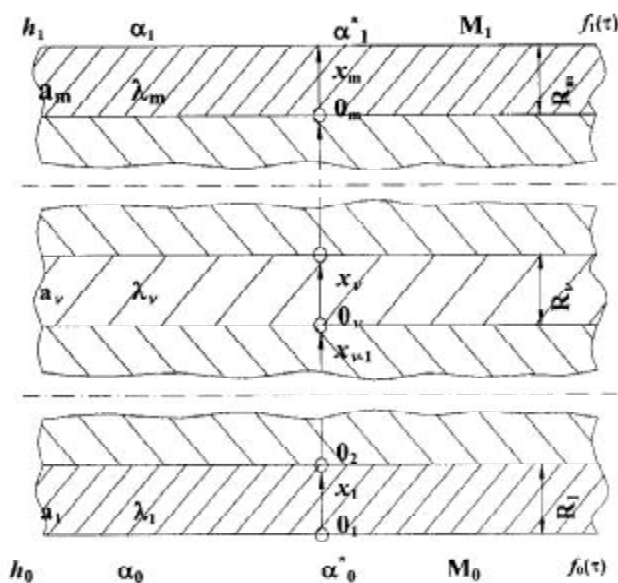


Рис.1

$$0_j \leq F_o \leq \Delta F_{o_j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, 1, \quad \sum_{j=1}^1 \Delta F_{o_j} = F_{o_k}.$$

Тоді задача (1) — (5) зведеться до розв'язування лінійних задач на кожному інтервалі часу:

$$\beta_{v,j} \frac{\partial^2 T_{v,j}(x, F_o)}{\partial x^2} = \frac{\partial T_{v,j}(x, F_o)}{\partial F_o} - \beta_{v,j}^* W_{v,j}(x, F_o), \quad (15)$$

$$T_{v,j}(x, F_o) \Big|_{F_o=0} = \Phi_{v,j}(x), \quad (16)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 \frac{\partial T_{1,j}(x, F_o)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_0 Bi_{0,j} [f_{0,j}(F_o) - M_0 T_{1,j}(x, F_o)] \Big|_{x=0} \\ \alpha_1 \frac{\partial T_{m,j}(x, F_o)}{\partial x} \Big|_{x=1} = h_1 Bi_{1,j} [f_{1,j}(F_o) - M_1 T_{m,j}(x, F_o)] \Big|_{x=1} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 \frac{\partial T_{v,j}(x, F_o)}{\partial x} \Big|_{x=1} = R_{v,v+1}^j [T_{v-1,j}(0, F_o) - T_{v,j}(1, F_o)] \\ \frac{\partial T_{v,j}(x, F_o)}{\partial x} \Big|_{x=1} - \mu_{v-1,v}^j \frac{\partial T_{v+1,j}(x, F_o)}{\partial x} \Big|_{x=0} = f_{2,j}(F_o). \end{cases} \quad (18)$$

При цьому в умові (2)

$$T_{v,1}(x, F_o) \Big|_{F_o=0} = \Phi_{v,1}(x), \quad \Phi_{v,1}(x) = \Phi(x),$$

$$T_{v,j}(x, F_o) \Big|_{F_o=0} = \Phi_{v,j}(x), \quad \Phi_{v,j}(x) = T_{v,j-1}(x, \Delta F_{o_{j-1}}). \quad (19)$$

В умові (5) при $\alpha_2 = 1$, $f_{2,j}(F_o) = W_{v,v+1}^{*j}(F_o)$; при

$$\alpha_2 = 0, \quad f_{2,j}(F_o) = A_{v,v+1}^j \frac{\partial T_{v+1,j}(x, F_o)}{\partial F_o} \Big|_{x=0}.$$

Загальна структура розв'язку задачі (15) — (19) відрізняється від отриманих раніше розв'язків лінійних задач теплопровідності для складових тіл [4, 5] тільки змістом простих структур. Для першого інтервалу

$$T_{v,1}(x, F_o) = \sum_{r=0}^{2m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{n,1} [\mu_{n,r}^v(x), \Phi_n] \cdot g_{r,1}^{(n)}(F_o) + \sum_{k=1}^{\infty} E_{r,1}(x, p_k) \exp(-\gamma_k^2 F_o) \right\} + Z_{v,1}^*(x, F_o), \quad (20)$$

$$E_{r,1}(x, p_k) = \frac{\bar{g}_{r,1}(p_k)}{\Psi_1'(\Phi_n, p_k)} Q_1 [\mu_{n,r}^v(x), p_k],$$

$$Z_{v,1}^*(x, F_o) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{v,1}^n \frac{F_o^n}{n!} \Phi_{1,v}^{(2n)}(x) + \bar{W}_{v,1}(x, F_o).$$

Функція $\Phi_{1,v}(x)$ у (20) характеризує розподіл температури, заданий у початковий момент часу, тобто

$\Phi_{1,v}(x) = \Phi_v(x)$. Для другого інтервалу функція $\Phi_{v,2}(x)$ знаходиться з розв'язку для першого інтервалу (20) при $Fo = \Delta Fo_1$. Отже,

$$\Phi_{v,2}(x) = T_{v,1}(x, \Delta Fo_1). \quad (21)$$

Тоді при $j=2$, після відповідних перетворень, отримаємо:

$$T_{v,2}(x, Fo) = \sum_{r=0}^{2m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{n,2} [\mu_{n,2}^v(x), \Phi_n] \cdot g_{r,2}^{(n)}(Fo) + \sum_{k=1}^{\infty} E_{r,2}(x, p_k) \exp(-\gamma_k^2 Fo) \right\} + Z_{v,2}^*(x, Fo), \quad (22)$$

$$E_{r,2}(x, p_k) = E_{r,1}(x, p_k) \exp(-\gamma_k^2 \Delta Fo_1) + \frac{\bar{g}_{r,2}(p_k)}{\Psi_2'(\Phi_n, p_k)} Q_2 [\mu_{n,r}^v(x), p_k],$$

$$Z_{v,2}^*(x, Fo) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{v,2}^n \frac{Fo^n}{n!} \Phi_{2,v}^{(2n)}(x) + \bar{W}_{v,2}(x, Fo),$$

а $\Phi_{2,v}(x)$ має вигляд

$$\Phi_{2,v}(x) = Z_{v,1}^*(x, \Delta Fo_1) + \sum_{r=0}^{2m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{n,1} [\mu_{n,r}^v(x), \Phi_n] g_{r,1}^{(n)}(Fo) + \sum_{k=1}^{\infty} E_{r,1}(x, p_k) \exp(-\gamma_k^2 Fo) \right\}.$$

Компоненти дії $g_{r,2}(Fo)$ визначаються через функції $\Phi_{v,2}(x)$ (19) і $Z_{v,2}^*(x, Fo)$.

Повторюючи цю процедуру для j -го інтервалу, отримаємо загальний розв'язок.

Загальна структура розв'язку задачі (15) — (19) для j -го інтервалу має вигляд:

$$T_{v,j}(x, Fo) = \sum_{r=0}^{2m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{n,j} [\mu_{n,r}^v(x), \Phi_n] \cdot g_{r,j}^{(n)}(Fo) + \sum_{k=1}^{\infty} E_{r,j}(x, p_k) \exp(-\gamma_k^2 Fo) \right\} + Z_{v,j}^*(x, Fo), \quad (23)$$

$$E_{r,1}(x, p_k) = \frac{\bar{g}_{r,1}(p_k)}{\Psi_1'(\Phi_n, p_k)} Q_1 [\mu_{n,r}^v(x), p_k],$$

$$E_{r,j}(x, p_k) = E_{r,j-1}(x, p_k) \exp(-\gamma_k^2 \Delta Fo_{j-1}) + \frac{\bar{g}_{r,j}(p_k)}{\Psi_j'(\Phi_n, p_k)} Q_j [\mu_{n,r}^v(x), p_k], \quad (24)$$

$$Z_{v,j}^*(x, Fo) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{v,j}^n \frac{Fo^n}{n!} \Phi_{v,j}^{(2n)}(x) + W_{v,j}(x, Fo), \quad (25)$$

де $\Phi_{v,1}(x) = \Phi_v(x)$,

$$\Phi_{v,j}(x) = Z_{v,j-1}^*(x, \Delta Fo_{j-1}) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{2m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{n,j-1} [\mu_{n,r}^v(x), \Phi_n] g_{r,j-1}^{(n)}(Fo) \right\}_{Fo=\Delta Fo_{j-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} E_{r,v-1}(x, p_k) \exp(-\gamma_k^2 Fo) \Bigg\}.$$

Компоненти дії $g_{r,j}(Fo)$ обчислюються з врахуванням (19), (25) і $\Phi_{v,j}(x) \equiv T_{v,j-1}(x, \Delta Fo_{j-1})$.

З математичної постановки задачі (15) — (19) випливає, що вона відрізняється від постановки лінійної [4, 5, 8] тільки початковою умовою (19) і, відповідно, компонентами дії. Отже, загальна структура розв'язку сформульованої задачі має вигляд (23).

Розв'язок (23) відрізняється від структурного розв'язку лінійної задачі тільки індексами j , що характеризують причетність до часових інтервалів. Спрощення розв'язків у (23) відбувається через функції $\Phi_{v,j}(x)$, що входять у початкову умову (19).

Числові параметричні дослідження. Для перевірки вірогідності результатів розрахунку температурних полів систем необмежених пластин були розглянуті тестові приклади.

Приклад 1. Визначити зміну температури в необмеженій пластині в інтервалі часу $0 \leq Fo \leq 1,0$. Теплофізичні характеристики $\lambda = 25$ Вт/м·К, $C = 0,512$ кДж/кг·К, $\rho = 7 \cdot 10^3$ кг/м³. Умови на зовнішніх поверхнях змінні за часом і визначаються залежностями: $Bi_1(Fo) = 2 - 1,5 \exp(-Fo)$; $Bi_2(Fo) = 4 - 3 \exp(-Fo)$; $T_{C1}(Fo) = 90 + 235Fo$; $T_{C2}(Fo) = 50 + 100Fo$.

Початковий розподіл температур рівномірний $T_0 = 20^\circ\text{C}$. У табл. 1 співставленні зміни температури пластини з координатами $x = 0$ і $x = 1$, отримані числовим методом і наближеним аналітичним методом.

Приклад 2. Визначити зміну температури в необмеженій пластині в інтервалі часу $0 \leq Fo \leq 0,5$. Теплофізичні характеристики матеріалу: $\lambda = 33$ Вт/м·К, $C = 0,512$ кДж/кг·К, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³. Умови на межах змінні за часом і визначаються залежностями $Bi(Fo) = 0,75 + 10Fo$, $T_C = 95 + 200Fo$. Початковий розподіл $T_0 = 0^\circ\text{C}$. У табл. 2 порівнянні зміни температури в точці пластини з координатою $x = 1$, отримані числовим методом і наближеним аналітичним.

Таблиця 1

Температурне поле ($^\circ\text{C}$) необмеженої пластини з несиметричними ГУ

Fo	x = 0 / x = 1	
	Числовий метод	Метод послідовних інтервалів
0.1	34/32	36/32
0.2	48/42	50/42
0.3	63/56	67/53
0.4	83/68	85/65
0.5	103/83	105/78
0.6	126/94	126/92

Таблиця 2

Температурне поле необмеженої пластини
з симетричними граничними умовами, °C

Fo	Числовий метод	Метод послідовних інтервалів
0.1	36	40
0.2	65	72
0.3	92	102
0.4	120	130
0.5	156	156

Результати розрахунку температурних полів з урахуванням контактної термічної опору для матеріалів сталь — сталь (клейове — 0,5 і 1,0 мм клею — з'єднання) показано на рис. 2.

Результати розрахунку температурних полів систем пластин, виготовлених зі сталі при клейовому з'єднанні, подані на рис. 2. У залежності від товщини клею (0,5 мм та 1 мм), типу клею та зміни контактної термічної опору від часу температурне поле першої (холодної) пластини істотно змінюється як в часі, так і за тривалістю. Аналіз результатів дає можливість визначити раціональну товщину клейового з'єднання (1 мм) та функцію зміни контактної термічної опору від часу (за законом, близьким до циклічного, рис. 2). Вибір такого термічного опору дає можливість збільшити тривалість менших температур біля 50 с (рис. 2), що зменшує притоки тепла в енергоустановку й покращує її енергоефективність.

Розглянута задача знаходження теплових режимів при виготовленні зварних труб (безперервне зварювання при індукційному нагріванні — рис. 3) [12].

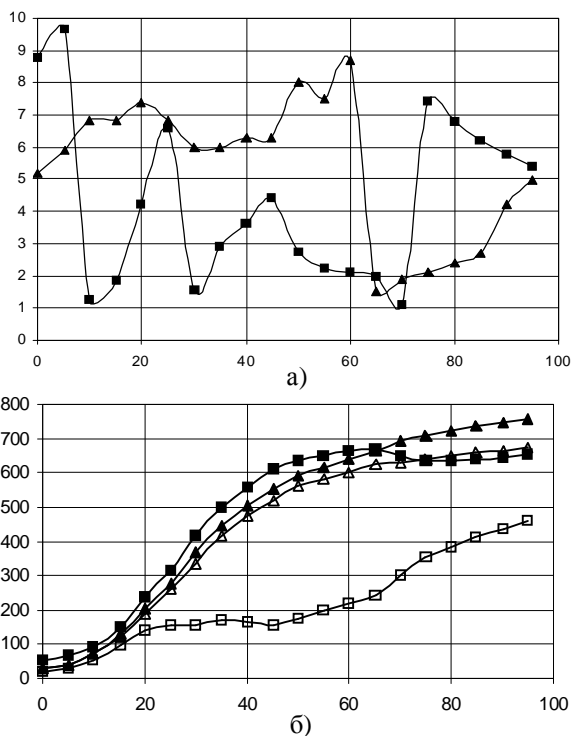


Рис. 2. Вплив контактної термічної опору на температурне поле системи пластин: а — контактний термічний опір (p — клейове — 1,0 мм — клею; r — клейове — 0,5 мм — клею); б — температурне поле з урахуванням контактної термічної опору (p, r — клейове — 1,0 мм; r, r — клейове — 0,5 мм).

При протіканні струму поверхні крайок нагріваються. Найбільша температура буде в точці зустрічі крайок. Ці явища використовуються при височастотному (ВЧ) зварюванні труб, оболонок кабелів та ін. Зварювання при нагріванні струмами високої частоти знайшло своє вживання при виробництві зварних труб через свою економічність. Підвищення надійності зварного з'єднання безпосередньо пов'язано з удосконаленням технології зварювального процесу прямошовних труб способом ВЧ зварювання на стані.

Технологічний процес ВЧ зварювання труб (рис. 3) полягає в проходженні чотирьох послідовних етапів (ділянок) [12]: I — ділянка нагрівання трубної заготовки; II — ділянка оплавлення крайок трубної заготовки; III — ділянка охолодження (кристалізації) зварного шва; IV — ділянка охолодження зварного шва і труби.

Труба заготовка є системою двох необмежених пластин зі щілиною V-образної форми. Таким чином, маємо двохшарову систему пластин з неідеальним тепловим контактом. Термічний контактний опір обумовлений викривленням ліній струму у великому об'ємі металу, прилеглому до зварюваних крайок, і змінюється в широкій межі. У міру просування труби і нагрівання зварюваних крайок контактні ділянки труби швидко нагріваються і пластично деформуються, а струм від більш нагрітих ділянок відтісняється до менш нагрітих, що, за відсутності сильного окислення, сприяє вирівнюванню нагріву. Контактний опір $R_{1,2}$ при протіканні через нього струму є концентратором нагріву. При ВЧ зварюванні контактний опір істотно більший від опору металу труби. Вплив ВЧ ЕМП на трубу заготовку виражений через інтенсивність миттєвих джерел тепла, рівну при нагріванні тіла струмом.

При ВЧ зварюванні контактний опір істотно більший від опору металу труби. Високий опір початкових ділянок контакту при зварюванні обумовлюється плівками окислів і адсорбованого газу на поверхні й скривленням ліній струму. Контактний термічний опір (КТО)

$$R_{1,2} = 1.12 \rho_0 \left[\frac{2\sigma \left(1 - \frac{T_{3B}}{T_{пл}} \right)}{P_{3B} S I_H} - \frac{1}{\sqrt{S I_H}} \right],$$

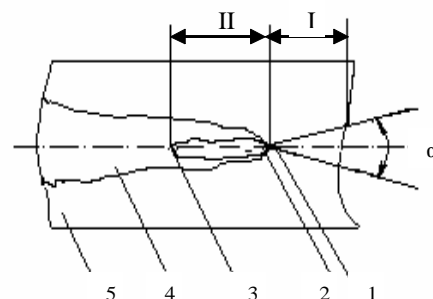


Рис. 3. Схема ділянки височастотного зварювання труби: I — ділянка нагрівання крайок трубної заготовки; II — ділянка оплавлення; 1 — точка прогріву; 2 — перемичка; 3 — точка з'єднання; 4 — грат; 5 — труба; α — кут нахилу крайок трубної заготовки

де $R_{1,2}$ — КТО; σ — межа плинності при кімнатній температурі; $T_{пл}$ — температура плавлення; $T_{зв}$ — температура зварювання; $P_{зв}$ — питомий опір у крайках, що зварюються; S — віддаль між крайками труби, що зварюються; l_H — довжина контакту ділянки шва труби; ρ_0 — питомий електричний опір при $20^\circ C$.

Вплив ВЧ ЕМП на трубну заготовку можна виразити через інтенсивність миттєвих джерел тепла, рівну при нагріванні тіла струмом I :

$$W_{v,8}(x, \tau) = I_v^2 \rho_v \left(\frac{1}{V_v x_v} \right), \quad (26)$$

де I_v — струм; ρ_v — питомий електричний опір; V_v — обсяг погонного метра трубної заготовки.

Враховуючи залежність I від координати x , отримаємо

$$\omega_{1,2}(x) = \left(\frac{I_0^2 \rho}{c \gamma} \right) e^{-2x/\Delta}, \quad (27)$$

де $\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}}$ — параметр, що має розмірність довжини

і назву глибини проникнення струму; $\omega = 2\pi f$, f — частота струму; μ — магнітна проникність матеріалу.

На рис. 4,а показана зміна температури трубної заготовки в точках: $x = L$ — крива 1, $x = L - \Delta$ — крива 2, $x = L - 2\Delta$ — крива 3, де Δ — крок за координатою.

На рис. 4,б показана зміна температури трубної заготовки за координатою в момент часу $\tau = 0,6c$. Аналіз результатів показує, що при височастотному нагріванні, в основному, нагрівається поверхневий шар крайки труби.

Результати розв'язання нелінійної задачі теплопровідності для двошарової системи подані на рис. 4 та рис. 5.

На рис. 5,б показана зміна температури трубної заготовки на ділянці охолодження зварного шва і труби. Криві 1 — 3 на рис. 5,а відповідають кривим на рис. 4.

Як приклад розглянуто прогрівання теплозахисної багатошарової ізоляції при нагріванні високоентальпій-

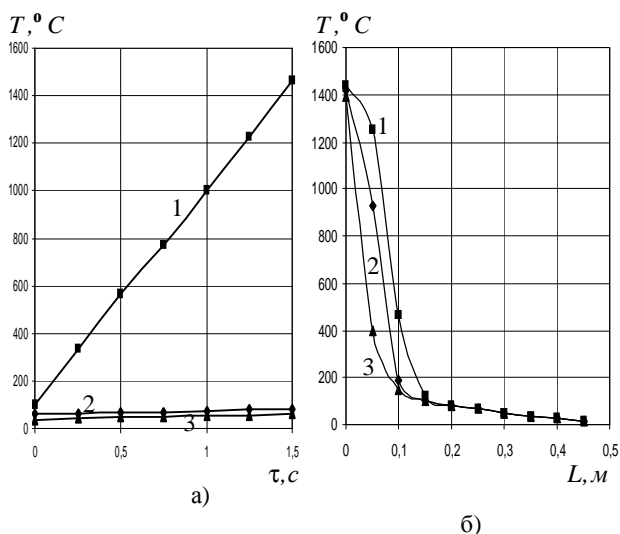


Рис. 4. Температурне поле двошарової системи пластин на ділянці нагрівання

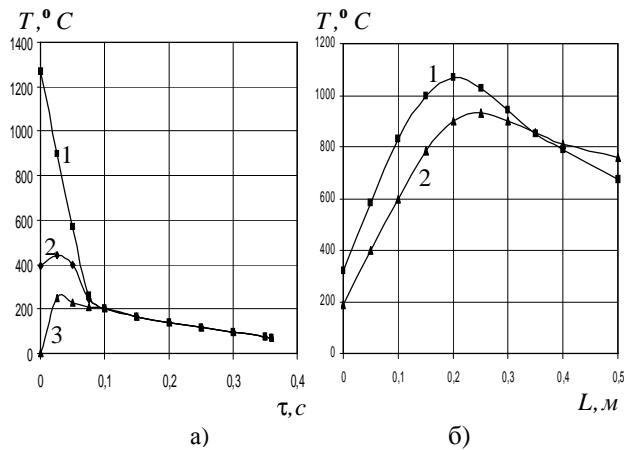


Рис. 5. Температурне поле двошарової системи пластин на ділянці охолодження

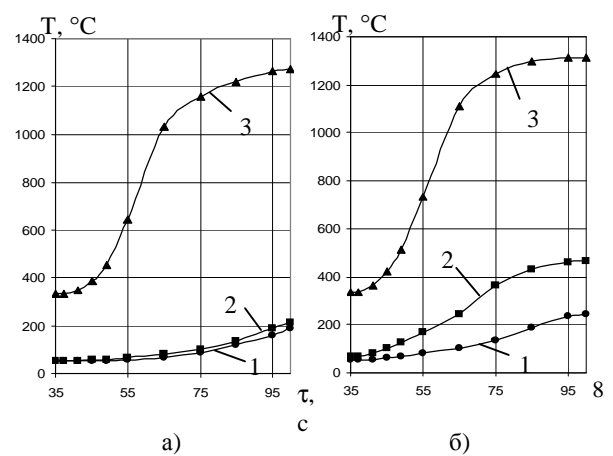


Рис.6. Результати розрахунку температурних полів з комбінованою багатошаровою теплоізоляцією: а — без електромагнітної дії; б — з урахуванням електромагнітної дії

ним потоком газу. Ця задача виникає при відокремленні сходинок ракет-носіїв [5]. У розв'язку нелінійного рівняння, що описує цей процес, були враховані неоднорідні умови. Вони характеризують наявність різних зовнішніх і внутрішніх дій на елементи теплозахисної багатошарової ізоляції конструктивних елементів конструкцій.

Виділення тепла електромагнітними джерелами супроводжується нагріванням елементів конструкцій у процесі експлуатації. Якщо виділене тепло дуже велике, то теплозахисна ізоляція може нагрітися до температур, що перевищують значення, допустимі для матеріалів, з яких зроблені конструктивні елементи.

На рис. 6. криві 1 — 3 характеризують граничні температури шарів ізоляції. Аналіз показує, що додаткова електромагнітна дія викликає істотне підвищення температури саме всередині шарів теплоізоляції (рис. 7), що пояснюється теплофізичними властивостями шарів ізоляції.

Розв'язок (23) дає змогу визначити температурне поле складових елементів конструкцій і через компоненти дії $g_{r,\Sigma}(F_o)$ виділити вплив кожного джерела електромагнітних полів.

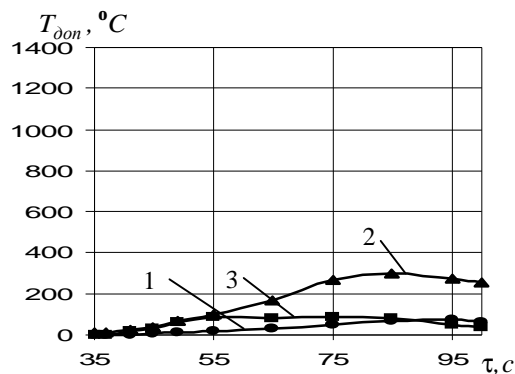


Рис. 7. Результати розрахунку температурного поля теплозахисної ізоляції з урахуванням тільки додаткової електромагнітної дії

Висновки. Показано, що для розв'язання нелінійних задач нестационарної теплопровідності для складових елементів конструкцій з неідеальним тепловим контактом ефективним є метод послідовних інтервалів.

Структурні розв'язки багатопараметричних задач теплопровідності для складових елементів конструкцій володіють одноманітною обчислювальною схемою; дають змогу виділити дії кожного з діючих на конструкцію електромагнітних полів і оцінити їхній вплив на температурне поле в будь-якому шарі в заданий момент часу, а також враховувати вплив зовнішніх ГУ і види неідеального теплового контакту.

Запропоновані схеми розв'язування дають можливість розрахувати нестационарний теплообмін в СЕК незалежно від типу контактів між матеріалами шарів теплоізоляції, виду ГУ на зовнішній межі, кількості шарів теплоізоляції, дії полів різної фізичної природи.

Література

1. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. — К.: Наук. думка, 1976. — 312 с.
2. Бурак Я.Й., Галапац Б.П., Гнідець Б.М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. — К.: Наук. думка, 1978. — 232 с.
3. Дробенко Б.Д. Термомеханическое поведение электропроводных тел при воздействии внешнего электромагнитного поля // Институт прикладных проблем меха-

ники и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины. Прикладная механика и техническая физика, 2005, №5. — С. 14—26.

4. Веселовский В.Б. Метод последовательных интервалов в исследовании теплофизических процессов // Металлургическая теплотехника. — Днепропетровск, 2004. — С. 255—265.

5. Веселовский В.Б. Решение задач нестационарной теплопроводности для многослойных плоских тел с неидеальным тепловым контактом // Прикладные вопросы аэродинамики летательных аппаратов. — К.: Наук. думка, 1984. — С. 140—144.

6. Веселовский В.Б. Сравнение методов решения нелинейных задач нестационарной теплопроводности для стержня // Техническая механика. — 1999. — №1. — С. 99—111.

7. Тайц Н.Ю. Технология нагрева стали. — М.: Металлургиздат, 1962. — 867 с.

8. Веселовський В.Б., Берлов О.В. Розрахунок температурних полів складених конструкцій // Вісник ТДТУ. — Тернопіль. — Вип. №1. — 2008. — С. 161—170.

9. Пюшнер Г. Нагрев энергией сверхвысоких частот / Пер. с англ. — М.: Энергия, 1968. — 230 с.

10. Кранихфельд Л.И., Рязанов И.Б. Теория, расчет и конструирование кабелей и проводов. — М.: Высш. шк., 1972. — 384 с.

11. Педченко К.С. Термічний аналіз у радіаційному матеріалознавстві // Вісник АН УРСР. — 1986. — №5. — С. 49—54.

12. Веселовский В.Б. Математическое моделирование и расчет температурных полей трубы при высокочастотной сварке // Вісник Дніпропетровського університету. — Механіка. — 2000. — Вип. 3. — Т. 1. — С. 102—112.

Отримана 22.10.08

Berlov O.

Temperature fields of fitted constructions being under the impact of electromagnetic sources

Dnipropetrovsk National University, Dnipropetrovsk

The operation method was used to obtain the solution of nonsteady heat conduction problem with unified external boundary conditions and non ideal heat contact under the impact of electric and magnetic fields. The results of parameter investigations are presented.

Ä î â³äîî à àâðîð³ä!

Опублікування статей у журналі “Машинознавство” є безкоштовним. Організаціям-передплатникам, а також спонсорам журналу “Машинознавство” у разі офіційного клопотання надається право позачергового опублікування статей їхніх працівників за умови позитивної рецензії. Аналогічно пільгою користуються автори, які особисто передплатили не менше шести примірників журналу, або посприяли його передплаті для організації.

Журнал “Машинознавство” можна передплатити на будь-який місяць і довільну кількість примірників через видавця журналу.