II, №1, 2020
Стор. 6-19 / Page 6-19

УДК 533.6.013.42

О КОЛЕБАНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ЕЕ КОНТУРОВ

Кононов Ю. Н.[1], Шевченко В. П.[2], Лимарь А. А.[3]
[1]*Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины*
[2]*Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса*
[3]*Николаевский аграрный университет*

Аннотация: В линейной постановке рассмотрена плоская гидроупругая задача о колебании тонкой изотропной прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости в прямоугольном канале с жесткими боковыми стенками и жестким верхом и дном. Пластина подвержена растягивающим или сжимающим усилиям в срединной поверхности, а ее контуры могут иметь произвольное закрепление. Уравнения связанных плоских колебаний пластины и жидкости представлены в виде системы интегро-дифференциальных уравнений с условием сохранения объема несжимаемой жидкости и граничными условиями закрепления контуров пластины. При решении краевой задачи на собственные значения форма прогиба пластины представляется в виде суммы произведений четырех неизвестных констант на фундаментальные решения однородного уравнения для пластины без условий закрепления ее контуров и частного решения исходного неоднородного уравнения. Частное решение представляется в виде разложения по собственным функциям колебаний идеальной жидкости в прямоугольном канале. Все неизвестные величины, входящие в искомую форму прогиба пластины, выражаются через четыре неизвестные константы. Из условий закрепления контуров пластины следует однородная система линейных уравнений относительно четырех неизвестных констант. Получено в виде определителя четвертого порядка частотное уравнение свободных связанных колебаний пластины и жидкости и проведено его упрощение для опертых и свободных контуров. Показано, что, как и ранее для защемленных контуров, частотное уравнение распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты свободных колебаний (нечетные и четные частоты), но в отличии от защемленных контуров уже не может быть представлено в единой форме для этих частот. Для смешанных способов закреплений контуров пластины (защемленный – опертый, защемленный – свободный и опертый – свободный) частотное уравнение уже не распадается на нечетные и четные частоты.

Ключевые слова: гидроупругость, упругая изотропная прямоугольная пластина, идеальная несжимаемая жидкость, прямоугольный канал, плоские колебания.

ON THE VIBRATIONS OF A RECTANGULAR PLATE IN AN IDEAL FLUID WITH REFERENCE TO VARIOUS METHODS OF ATTACHMENT OF ITS CONTOURS

Yu. Kononov[1],V. Schevchenko[2], A. Lymar[3]
[1] *Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine*
[2] *Vasyl' Stus Donetsk National University*
[3] *Mykolayiv National Agrarian University*

Abstract: A linear hydroelastic problem of oscillating a thin isotropic rectangular plate separating ideal incompressible fluids in a rectangular channel with rigid side walls and a rigid top and bottom is considered in the linear formulation. The plate is subject to tensile or compressive forces in

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-1-6-19

the middle surface, and its contours may have arbitrary fixing. The equations of plane coupled oscillations of a plate and a liquid are presented in the form of a system of integro-differential equations with boundary conditions for fixing the contours of the plate and the condition for maintaining the volume of an incompressible liquid. When solving the boundary value eigenvalue problem, the shape of the plate deflection is represented as the sum of the products of the four unknown constants by the fundamental solutions of the homogeneous equation for the plate without the conditions for fixing its contours and the particular solution of the original inhomogeneous equation. A particular solution is represented as an expansion in eigenfunctions of the oscillations of an ideal fluid in a rectangular channel. All unknown quantities included in the sought form of plate deflection are expressed through four unknown constants. From the conditions for fixing the contours of the plate, a homogeneous system of linear equations with respect to four unknown constants follows. The frequency equation of free coupled oscillations of a plate and a liquid is obtained in the form of a fourth-order determinant and its simplification is carried out for supported and free contours. It is shown that, as before for a clamped countours, the frequency equation splits into two equations describing asymmetric and symmetric frequencies of free vibrations (odd and even frequencies), but unlike a clamped countours it can no longer be presented in a single form for these frequencies. For mixed methods of fixing the contours of the plate (clamped - supported, clamped - free and supported - free), the frequency equation no longer splits into odd and even frequencies.

Keywords: hydroelasticity, elastic isotropic rectangular plate, ideal incompressible fluid, rectangular channel, flat oscillations.

1 ВВЕДЕНИЕ

Для безопасности транспортировки и хранения жидких грузов большие резервуары разделяют на отсеки. В этой связи возникает задача о влиянии упругих и массовых характеристик пластин, разделяющих жидкости, на частотный спектр и устойчивость колебаний механической системы. Наиболее актуальна эта проблема при работе и охлаждении ядерных реакторов. В статье рассмотрена модельная задача, когда отсек в виде жесткого прямоугольного канала с идеальной несжимаемой жидкостью горизонтально разделяется изотропной прямоугольной пластиной на два отсека. В ранее рассмотренных работах рассмотрен и исследован случай защемленных контуров пластины. Однако в результате сейсмических воздействий или возникновении аварийной или нештатной ситуации края защемленной пластины могут принять произвольное закрепление, например, стать свободными, опертыми, или один контур может быть защемлен, а другой оперт или свободен. В этой связи возникает необходимость в исследовании нового частотного спектра и его влиянии на работу насосных агрегатов. В данной статье на примере двух защемленных, опертых и свободных контуров, а также их различной комбинации выведены и аналитически исследованы полученные частотные уравнения.

2 АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРНЫХ ДАННЫХ И ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В данной работе обобщаются результаты статье [1] на случай произвольного закрепления контуров пластины. В статье [1] в линейной постановке рассмотрена плоская гидроупругая задача о колебании защемленной тонкой изотропной прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости в прямоугольном канале с жесткими боковыми стенками и жестким верхом и дном. Пластина подвержена растягивающим или сжимающим усилиям в срединной поверхности. Получено в виде определителя четвертого порядка частотное уравнение свободных совместных колебаний пластины и жидкости и проведено его упрощение. Показано, что оно распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты свободных колебаний (нечетные и четные частоты) и может быть представлено в единой форме для этих частот. Получены также приближенные и точные условия устойчивости совместных колебаний пластины и жидкости. В этой статье приведен достаточно полный обзор литературных данных по рассматриваемой проблеме. Дополним его только некоторыми основными и последними работами.

В работе [2] рассмотрена задача о колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним жестким, а другим упругим основаниями, а в [3] эта задача была обобщена на случай двух упругих оснований. В этих работах для защемленной пластины получены приближенные условия совместных колебаний пластины и жидкости, а в работе [4] удалось получить точные условия устойчивости, колебаний пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале. Статья [5] посвящена изучению свободных колебаний двухслойной идеальной жидкости в прямоугольном контейнере с упругой боковой стенкой. С использованием нормальных форм проведено исследование двумерной гидроупругой системы.

Большой цикл работ посвящен гидроупругим колебаниям идеальной жидкости в круговых и коаксиальных цилиндрах с жесткими и упругими основаниями. Это работы [6-10] и мн. др. В работе [6] исследованы связанные частот колебаний идеальной жидкости в круговом цилиндре и упругой пластины на свободной поверхности

жидкости. Рассмотрены различные случаи закрепления круговой пластины. Статья [7] посвящена колебаниям защемленной круговой пластины в сжимаемой идеальной жидкости, находящейся в жестком прямом круговом цилиндрическом резервуаре. В этой статье проводится сравнение аналитических результатов с результатами, полученными в системе ANSYS. В работе [8] проводятся исследования несимметричных свободных связанных колебаний защемленной круглой пластины при контакте с несжимаемой идеальной жидкостью. С использованием рядов Фурье – Бесселя и вариационного принципа выведена присоединенная масса жидкости и получено частотное уравнение связанных колебаний пластины и жидкости. Проведено сравнение полученных результатов с результатами работы [7]. В статье [9] выведено частотное уравнение осесимметричных колебаний тяжелой двухслойной идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре с упругими верхним и нижним основаниями в виде защемленных кольцевых пластин. Работа [10] посвящена исследованию частотных уравнений несимметричных и симметричных собственных колебаний тяжелой идеальной двухслойной жидкости в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругими основаниями виде круговых защемленных пластин. На примере однородной жидкости со свободной поверхностью и упругим дном в виде мембраны аналитически и численно исследован частотный спектр.

В данной статье продолжены исследования начатые в работах [1-4]. Получено в виде определителя четвертого порядка частотное уравнение свободных связанных колебаний пластины и жидкости и проведено его упрощение для опертых и свободных контуров. Показано, что для двух опертых или свободных контуров оно распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты, а для смешанных способов закреплений двух контуров (защемленный – опертый, защемленный – свободный, опертый – свободный) частотное уравнение уже не распадается на нечетные и четные частоты.

3 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

В линейной постановке рассмотреть модельную гидроупругую задачу о плоских колебаниях изотропной прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости в жестком прямоугольном канале. Пластина подвержена растягивающим или сжимающим усилиям в срединной поверхности. Вывести уравнения совместных колебаний пластины и жидкости для произвольного закрепления контуров пластины. Провести аналитические исследования частотного уравнения для двух опертых и двух свободных контуров, а также для различной комбинации способов закрепления двух контуров: защемленный – опертый, защемленный – свободный, опертый – свободный.

4 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Рассмотрим плоские колебания упругой прямоугольной пластины горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости плотности ρ в жестком прямоугольном канале шириной b $(b = 2a)$. Пластина обладает постоянной изгибной жесткостью D и подвержена растягивающим $(T > 0)$ или сжимающим $(T < 0)$ усилиям интенсивности T в срединной поверхности. Контуры пластины могут иметь произвольное закрепление. Верхняя жидкость заполняет сосуд до глубин h_1, а нижняя жидкость до глубины h_2.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-1-6-19

Систему координат $Oxyz$ расположим так, чтобы плоскость Oxy находилась на невозмущённой срединной поверхности пластины, ось Oy была направлена вдоль оси канала, а ось Oz – противоположно вектору ускорения силы тяжести $\vec{g}$. Колебания пластины и жидкости будем рассматривать в линейной постановке, считая совместные колебания пластины и жидкости безотрывными, а движения жидкостей потенциальными.

Уравнения плоских колебаний упругой пластины и жидкости имеют вид, аналогичный [1-4]

$$k_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+D\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}-T\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=\rho\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\right)+Q \text{ при } z=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial z^2}=0 \quad (i=1,2) \tag{2}$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \text{ при } z=0; \tag{3}$$

$$(\mathfrak{L}_{jp}[W])\big|_{\gamma_j}=0 \quad (j,p=1,2); \tag{4}$$

$$\int_{-a}^{a} W dx=0; \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right|_{\gamma_j}=0 \quad (i,j=1,2); \tag{6}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=0 \text{ при } z=-h_1,\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}=0 \text{ при } z=-h_2. \tag{7}$$

Здесь $k_0=\rho_0 h_0$; $W(x,t)$, ρ_0, h_0 – соответственно нормальный прогиб, плотность и толщина пластины; $\Phi_i(x,z,t)$ – потенциал скоростей i -ой жид кости $(i=1,2)$; Q – произвольная функция времени. $\mathfrak{L}_{j1}$ и $\mathfrak{L}_{j2}$ – дифференциальные операторы граничных условий закрепления пластины на контуре $\gamma_j(j=1,2)$. Так, например, для наиболее интересного случая жесткого защемления пластины оператор $\mathfrak{L}_{j1}$ будет единичным, а $\mathfrak{L}_{j2}=\mathrm{d}/\mathrm{d}x$. Для удобства записи введено обозначение контуров пластины через γ_j (индекс $j=1$ соответствует контуру $x=-a$, а $j=2-x=a$).

Представим функции $\Phi_i(x,z,t)$ в виде рядов Фурье по собственным функциям $\psi_n(x)$

$$\Phi_i(x,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[A_{in}(t)\mathrm{e}^{k_n z}+B_{in}(t)\mathrm{e}^{-k_n z}]\psi_n(x) \quad (i=1,2), \tag{9}$$

где функции $\psi_n(x)=\cos k_n(x+a)$, а соответствующие им собственные числа $k_n=\pi n/2a$.

Представление функций $\Phi_i(x,z,t)$ в виде (9) позволяет удовлетворить уравнению (2) и граничным условиям (6).

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-1-6-19

Подставив ряды (9) в (3) и (7) и, воспользовавшись ортогональностью функцій ψ_n, получаем линейную систему уравнений относительно неизвестных A_{in}, B_{in} и $\dot{W}_n$, которой имеет решение:

$$A_{1n} = -\frac{\dot{W}_n \mathrm{e}^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh\kappa_{1n}}, \;\; B_{1n} = -\frac{\dot{W}_n \mathrm{e}^{\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh\kappa_{1n}};$$

$$A_{2n} = \frac{\dot{W}_n \mathrm{e}^{\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh\kappa_{2n}}, \;\; B_{2n} = \frac{\dot{W}_n \mathrm{e}^{-\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh\kappa_{2n}}. \tag{10}$$

Здесь $\kappa_{in} = h_i k_n$,

$$W_n = \frac{1}{N_n^2}\int_{-a}^{a} W\psi_n dx, \;\; N_n^2 = \int_{-a}^{a}\psi_n^2 dx = a. \tag{11}$$

С учетом соотношений (9)-(11) уравнение (1) примет вид

$$k_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - T\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \ddot{W}_n}{k_n}\psi_n + Q, \tag{12}$$

где

$$a_n = \rho(\operatorname{coht}\kappa_{1n} + \operatorname{coht}\kappa_{2n}) = \rho\frac{\sinh\kappa_n}{\sinh\kappa_{1n} + \sinh\kappa_{2n}}, \;\; \kappa_n = k_n(h_1 + h_2).$$

Таким образом, совместные колебания упругой пластины и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (11)-(12), граничных условий (4), условий сохранения объема несжимаемой жидкости (5) и заданных начальных условий.

Собственные частоты совместных колебаний упругой пластины и жидкости. Для нахождения собственных частот совместных колебаний упругой пластины и жидкости положим

$$W(x,t) = w(x)\mathrm{e}^{i\omega t}, \; Q = C_0\mathrm{e}^{i\omega t}. \tag{13}$$

Подставив (13) в (11)-(12), в граничные условия (4) и условия (5), получим:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - P\frac{d^2 w}{dx^2} - qw = \frac{\omega^2}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n w_n}{k_n}\psi_n + C; \tag{14}$$

$$w_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} w\psi_n dx; \tag{15}$$

$$\int_{-a}^{a} w dx = 0; \tag{16}$$

$$(\mathfrak{L}_{jp}w)\Big|_{\gamma_j} = 0, \;\; (j, p = 1, 2). \tag{17}$$

Здесь $P = T/D$, $q = k_0\omega^2/D > 0$, $C = C_0/D$.

Решение уравнения (14) будем искать в виде общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$w = \sum_{k=1}^{4} A_k^0 w_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{C}_n\psi_n + w_0, \tag{18}$$

где w_k^0 $(k = \overline{1,4})$ фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\frac{d^4 w_k^0}{dx^4} - P\frac{d^2 w_k^0}{dx^2} - q w_k^0 = 0. \tag{19}$$

Здесь A_k^0 и $\tilde{C}_n$ и w_0 неизвестные константы.

Подставив (18) в уравнение (14) и, воспользовавшись соотношениями

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} = -k_n^2\psi_n,\ \frac{d^4\psi_n}{dx^4} = k_n^4\psi_n,$$

найдем константу $\tilde{C}_n$

$$\tilde{C}_n = \frac{\omega^2 a_n w_n}{k_n d_n}, \tag{20}$$

где $d_n = (Dk_n^2 + T)k_n^2 - k_0\omega^2$.

Подставив (18) в (15) и, принимая во внимание (20), получим выражение для w_n

$$w_n = \frac{k_n d_n}{k_n d_n - \omega^2 a_n}\sum_{k=1}^{4} A_k^0 E_{kn}^0. \tag{21}$$

Здесь

$$E_{kn}^0 = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} w_k^0 \psi_n dx. \tag{22}$$

С учетом (16), (20) и (21) окончательное выражение для формы прогиба пластины примет вид

$$w = \sum_{k=1}^{4}\left(w_k^0 - \tilde{w}_k^0 - \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n E_{kn}^0\psi_n\right)A_k^0, \tag{23}$$

где $\tilde{w}_k^0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} w_k^0 dx,\ \tilde{a}_n = a_n + k_n k_0,\ \tilde{d}_n = (Dk_n^2 + T)k_n^2$,

$$\alpha_n = \frac{a_n}{\omega^2 a_n - k_n d_n} = \frac{a_n}{\omega^2\tilde{a}_n - k_n\tilde{d}_n}.$$

Фундаментальная система решений w_k^0 $(k = \overline{1,4})$ однородного уравнения (19) и коэффициенты E_{kn}^0 запишутся так:

$$w_k^0 = \{\sinh\tilde{p}_1 x,\ \cosh\tilde{p}_1 x,\ \sin\tilde{p}_2 x,\ \cos\tilde{p}_2 x\};$$

$$E_{1n}^0 = \frac{\tilde{p}_1\cosh\tilde{p}_1^*}{a(k_n^2 + \tilde{p}_1^2)}[(-1)^n - 1],\ E_{2n}^0 = \frac{\tilde{p}_1\sinh\tilde{p}_1^*}{a(k_n^2 + \tilde{p}_1^2)}[(-1)^n + 1];$$

$$E_{3n}^0 = \frac{\tilde{p}_2\cos\tilde{p}_2^*}{a(k_n^2 - \tilde{p}_2^2)}[(-1)^n - 1],\ E_{4n}^0 = \frac{\tilde{p}_2\sin\tilde{p}_2^*}{a(k_n^2 - \tilde{p}_2^2)}[(-1)^n + 1]. \tag{24}$$

Здесь $\tilde{p}_{1,2}^2 = \pm P/2 + \sqrt{P^2/4 + q},\ \tilde{p}_i^* = a\tilde{p}_i$.

В формулу (23) входит четыре неизвестные константы A_k^0. Из граничных условий закрепления пластины (17) имеем четыре линейных однородных уравнений относительно A_k^0

$$\sum_{k=1}^{4}\left(\mathfrak{L}^0_{jpk}-\omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n E^0_{kn}\mathfrak{L}_{jpn}\right)A^0_k-0,\ \ (p,j=1,2)\,, \tag{25}$$

где

$$\mathfrak{L}^0_{jpk}=(\mathfrak{L}_{jp}[w^0_k-\tilde{w}^0_k])\big|_{\gamma_j}\,,\ \mathfrak{L}_{jpn}=(\mathfrak{L}_{jp}[\psi_n])\big|_{\gamma_j}\,. \tag{26}$$

Из равенства нулю определителя однородной системы (25) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой пластины и жидкости [1]

$$\left|\left\|C_{qk}\right\|^{4}_{q,k=1}\right|=0\,. \tag{27}$$

Здесь

$$C_{pk}=\mathfrak{L}^0_{jpk}-\omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n E^0_{kn}\mathfrak{L}_{jpn}\ \ (j=1;\ \ p=1,2;\ k=\overline{1,4}),$$

$$C_{p+2,k}=\mathfrak{L}^0_{jpk}-\omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n E^0_{kn}\mathfrak{L}_{jpn}\ \ (j=2;\ \ p=1,2;\ k=\overline{1,4})\,. \tag{28}$$

Собственные формы колебаний будут найдены из формулы (23) и однородной системы (25).

Для проведения дальнейших аналитических исследований частотного уравнения (27) разложим функции w^0_k в ряд по полной и ортогональной системе собственных функций ψ_n, воспользуемся условием $\int_{-a}^{a}\psi_n dx=0$ и обозначением (22). В этом уравнение (27) и коэффициенты (28) примут вид:

$$\left|\left\|C_{qk}\right\|^{4}_{q,k=1}\right|=0\,, \tag{29}$$

где

$$C_{1k}=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n E^0_{kn}\mathfrak{L}_{j1n},\ C_{2k}=\mathfrak{L}^0_{j2k}-\omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n E^0_{kn}\mathfrak{L}_{j2n}\ \ (j=1,\ k=\overline{1,4}),$$

$$C_{3k}=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n E^0_{kn}\mathfrak{L}_{j1n},\ C_{4k}=\mathfrak{L}^0_{j2k}-\omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n E^0_{kn}\mathfrak{L}_{j2n}\ \ (j=2,\ k=\overline{1,4}).$$

Здесь

$$\beta_n=\frac{k_n d_n}{\omega^2\tilde{a}_n-k_n d_n}\,.$$

В случае защемленных контуров коэффициенты частотного уравнения (29) запишутся так

$$C_{1k}=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n E^0_{kn},\ C_{2k}=\mathfrak{L}^0_{12k},\ C_{3k}=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n E^0_{kn}(-1),\ \ C_{4k}=\mathfrak{L}^0_{j2k}\,(k=\overline{1,4})\,, \tag{30}$$

так как величины $\mathfrak{L}_{jpn}$ и $\mathfrak{L}^0_{j2k}$ имеют вид [1]

$$\mathfrak{L}_{11n}=1,\ \mathfrak{L}_{21n}=(-1)^n,\ \mathfrak{L}_{j2n}=0,\ \mathfrak{L}^0_{j2k}[w^0_k]=\left.\frac{\mathrm{d}\,w^0_k}{\mathrm{d}\,x}\right|_{\gamma_i}.$$

В работе [1] показано, что в этом случае уравнение (29) упрощается и может быть записано в единой форме для четных и нечетных частот

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{\omega^2\tilde{a}_n-k_n\tilde{d}_n}=0. \tag{31}$$

Проведем упрощения частотного уравнения (29) для защемленных, опертых, свободных и различных комбинаций этих трех случаев закреплений контуров пластины.

Для опертого края прогиб и изгибающий момент должны обращаться в нуль. Следовательно, операторы $\mathfrak{L}_{jp}$ и значения функций $\mathfrak{L}_{jpn}$, $\mathfrak{L}^0_{j2k}$ для опертого края будут иметь вид:

$$\mathfrak{L}_{j1}\equiv 1,\ \mathfrak{L}_{j2}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2},\ \mathfrak{L}_{11n}=1,\ \mathfrak{L}_{21n}=(-1)^n,$$

$$\mathfrak{L}_{12n}=-k_n^2,\ \mathfrak{L}_{22n}=(-1)^{n+1}k_n^2,\quad \mathfrak{L}^0_{j2k}[w^0_k]=\frac{\mathrm{d}^2\,w^0_k}{\mathrm{d}\,x^2}. \tag{32}$$

Для свободного края необходимо, чтобы момент и перерезывающая сила обращались в нуль. В этом случае будем иметь:

$$\mathfrak{L}_{j1}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2},\ \mathfrak{L}_{j2}=\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,x^3},\ \mathfrak{L}_{11n}=-k_n^2,\ \mathfrak{L}_{21n}=(-1)^{n+1}k_n^2,\ \mathfrak{L}_{12n}=0,\ \mathfrak{L}_{22n}=0,$$

$$\mathfrak{L}^0_{j1k}[w^0_k]=\frac{\mathrm{d}^2\,w^0_k}{\mathrm{d}\,x^2},\ \mathfrak{L}^0_{j2k}[w^0_k]=\left.\frac{\mathrm{d}^3\,w^0_k}{\mathrm{d}\,x^3}\right|_{\gamma_j}. \tag{33}$$

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений ω_m^2, являющихся корнями частотного уравнения (27) или (29) с единственной предельной точкой на бесконечности.

Упрощение частотного уравнения (29) в случае опертых контуров. Проведем упрощение частотного уравнения (29) в случае опертых контуров. Коэффициенты C_{qk} этого уравнения согласно формул (32) запишутся так:

$$\begin{gathered}
C_{11}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E^0_{1,2m-1},\ C_{12}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E^0_{2,2m};\\
C_{13}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E^0_{3,2m-1},\ C_{14}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E^0_{4,2m};\\
C_{21}=-\tilde{p}_1^2\sinh\tilde{p}_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E^0_{1,2m-1},\ C_{22}=\tilde{p}_1^2\cosh\tilde{p}_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E^0_{2,2m};\\
C_{23}=\tilde{p}_2^2\sin\tilde{p}_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E^0_{3,2m-1},\ C_{24}=-\tilde{p}_2^2\cos\tilde{p}_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E^0_{4,2m};\\
C_{31}=-C_{11},\ C_{32}=C_{12},\ C_{33}=-C_{13},\ C_{34}=C_{14};\\
C_{41}=-C_{21},\ C_{42}=-C_{22},\ C_{43}=-C_{23},\ C_{44}=-C_{24},
\end{gathered} \tag{34}$$

где $\gamma_n=\omega^2\alpha_n k_n^2$.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-1-6-19

Проводя преобразования со строками и столбцами определителя уравнения (29) с коэффициентами (34), приводим его к блочному виду с нулевыми двумя блоками. В результате получим уравнение

$$(C_{11}C_{23} - C_{13}C_{21})(C_{12}C_{24} - C_{14}C_{22}) = 0. \qquad (35)$$

Из вида коэффициентами (34) следует, что уравнение (29) распадаются на два уравнения (35), описывающих несимметричные и симметричные частоты.

Упрощение частотного уравнения (29) в случае свободных контуров. Проведем упрощение частотного уравнения (29) в случае свободных контуров. Коэффициенты C_{qk} этого уравнения, согласно формул (33), запишутся так:

$$C_{11} = -\tilde{p}_1^2 \sinh \tilde{p}_1^* - \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \; C_{12} = \tilde{p}_1^2 \cosh \tilde{p}_1^* - \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m} E_{2,2m}^0;$$

$$C_{13} = \tilde{p}_2^2 \sin \tilde{p}_2^* - \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \; C_{14} = \tilde{p}_2^2 \cos \tilde{p}_2^* - \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m} E_{4,2m}^0;$$

$$C_{21} = \tilde{p}_1^3 \cosh \tilde{p}_1^*, \; C_{22} = -\tilde{p}_1^3 \sinh \tilde{p}_1^*; \qquad (36)$$

$$C_{23} = -\tilde{p}_2^3 \cos \tilde{p}_2^*, \; C_{24} = -\tilde{p}_2^3 \sin \tilde{p}_2^*;$$

$$C_{31} = -C_{11}, \; C_{32} = C_{12}, \; C_{33} = -C_{13}, \; C_{34} = C_{14};$$

$$C_{41} = C_{21}, \; C_{42} = -C_{22}, \; C_{43} = C_{23}, \; C_{44} = -C_{24}.$$

Здесь $\delta_n = \beta_n k_n^2$.

Проводя, как и ранее, преобразования со строками и столбцами определителя уравнения (29) с коэффициентами (36), приводим его к блочному виду с нулевыми двумя блоками. В результате получим уравнение

$$(C_{11}C_{23} - C_{13}C_{21})(C_{12}C_{24} - C_{14}C_{22}) = 0. \qquad (37)$$

Уравнение (37) по виду совпадает с уравнением (35) и из него следует, что уравнение (29) в случае двух свободных контуров также распадаются на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты.

Таким образом, как и в случае опертых контуров, так и случае свободных контуров частотное уравнение распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты совместных колебаний пластины и жидкости.

Частотное уравнение (29) в случае одного защемленного, а другого опертого контура. Проведем упрощение частотного уравнения (29) в случае, когда один из контуров будет защемлен, например, контур $x = -a$ $(j = 1)$, а второй контур $x = a$ $(j = 2)$ − оперт. Коэффициенты C_{qk} согласно формул (30) и (32) запишутся так:

$$C_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \; C_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0;$$

$$C_{13} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \; C_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m-1}^0;$$

$$C_{21} = \tilde{p}_1 \cosh \tilde{p}_1^*, \; C_{22} = -\tilde{p}_1 \sinh \tilde{p}_1^*;$$

$$C_{23} = \tilde{p}_2 \cos \tilde{p}_2^*, \; C_{24} = \tilde{p}_2 \sin \tilde{p}_2^*;$$

$$C_{31} = -C_{11}, \; C_{32} = C_{12}, \; C_{33} = -C_{13}, \; C_{34} = C_{14};$$

$$C_{41}=\tilde{p}_1^2\sinh\tilde{p}_1^*-\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{1,2m-1}^0,\ C_{42}=\tilde{p}_1^2\cosh\tilde{p}_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{2,2m}^0;$$

$$C_{43}=-\tilde{p}_2^2\sin\tilde{p}_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{3,2m-1}^0,\ C_{44}=-\tilde{p}_2^2\cos\tilde{p}_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{4,2m}^0.$$

В этом случае определитель частотного уравнения (29) незначительно упрощается, но не распадается на два уравнения, описывающие несимметричные и симметричные частоты, т.е частотный спектр становится более сложным и требует дальнейших численных исследований.

Частотное уравнение (29) в случае одного защемленного, а другого свободного контура. Проведем упрощение частотного уравнения (29) в случае, когда один из контуров будет защемлен, например, контур $x=-a$ $(j=1)$, а второй контур $x=a$ $(j=2)$ − свободен. Коэффициенты C_{qk} согласно формул (30) и (33) запишутся так:

$$C_{11}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{1,2m-1}^0,\ C_{12}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{2,2m}^0;$$

$$C_{13}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{3,2m-1}^0,\ C_{14}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{4,2m}^0;$$

$$C_{21}=\tilde{p}_1\cosh\tilde{p}_1^*,\ C_{22}=-\tilde{p}_1\sinh\tilde{p}_1^*,\ C_{23}=\tilde{p}_2\cos\tilde{p}_2^*,\ C_{24}=\tilde{p}_2\sin\tilde{p}_2^*;$$

$$C_{31}=\tilde{p}_1^2\sinh\tilde{p}_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{2m-1}E_{1,2m-1}^0,\ C_{32}=\tilde{p}_1^2\cosh\tilde{p}_1^*-\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{2m}E_{2,2m}^0;$$

$$C_{33}=-\tilde{p}_2^2\sin\tilde{p}_2^*-\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{2m-1}E_{3,2m-1}^0,\ C_{34}=-\tilde{p}_2^2\cos\tilde{p}_2^*-\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{2m}E_{4,2m}^0;$$

$$C_{41}=\tilde{p}_1^2C_{21},\ C_{42}=-\tilde{p}_1^2C_{22},\ C_{43}=-\tilde{p}_2^2C_{23},\ C_{44}=\tilde{p}_2^2C_{24}.$$

В этом случае определитель частотного уравнения (29) незначительно упрощается, но не распадается на два уравнения, описывающие несимметричные и симметричные частоты, т.е частотный спектр становится более сложным и требует дальнейших численных исследований.

Частотное уравнение в случае одного опертого, а другого свободного контура. Проведем упрощение частотного уравнения (29) в случае, когда один из контуров будет оперт, например, контур $x=-a$ $(j=1)$, а второй контур $x=a$ $(j=2)$ − свободен. Коэффициенты C_{qk} согласно формул (32) и (33) запишутся так:

$$C_{11}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{1,2m-1}^0,\ C_{12}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{2,2m}^0;$$

$$C_{13}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{3,2m-1}^0,\ C_{14}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{4,2m}^0;$$

$$C_{21}=-\tilde{p}_1^2\sinh\tilde{p}_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{1,2m-1}^0,\ C_{22}=\tilde{p}_1^2\cosh\tilde{p}_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{2,2m}^0;$$

$$C_{23}=\tilde{p}_2^2\sin\tilde{p}_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{3,2m-1}^0,\ C_{24}=\tilde{p}_2^2\cos\tilde{p}_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{4,2m}^0;$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-1-6-19

$$C_{31}=\tilde{p}_1^2\sinh\tilde{p}_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{2m-1}E^0_{1,2m-1},\ C_{32}=\tilde{p}_1^2\cosh\tilde{p}_1^*-\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{2m}E^0_{2,2m};$$

$$C_{33}=-\tilde{p}_2^2\sin\tilde{p}_2^*-\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{2m-1}E^0_{3,2m-1},\ C_{34}=-\tilde{p}_2^2\cos\tilde{p}_2^*-\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{2m}E^0_{4,2m};$$

$$C_{41}=\tilde{p}_1^3\cosh\tilde{p}_1^*,\ C_{42}=\tilde{p}_1^3\sinh\tilde{p}_1^*,\ C_{43}=-\tilde{p}_2^3\cos\tilde{p}_2^*,\ C_{44}=\tilde{p}_2^3\sin\tilde{p}_2^*.$$

В этом случае определитель частотного уравнения (29) не упрощается и не распадается на два уравнения, описывающие несимметричные и симметричные частоты, т.е частотный спектр становится еще более сложным, чем в предыдущем случае.

5 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ

Совместные колебания упругой пластины и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (11)-(12), граничных условий (4), условий сохранения объема несжимаемости жидкости (5) и заданных начальных условий.

Частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой пластины и жидкости (27) представлено в виде определителя четвертого порядка. Воспользовавшись разложением фундаментальной системы в ряд по полной и ортогональной системе собственных функций колебаний идеальной жидкости в прямоугольном канале, удалось упростить частотное уравнение и представить его в виде (29) и провести его упрощение для опертых и свободных контуров. Показано, что для двух опертых или свободных контуров частотное уравнение распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты, а для смешанных способов закреплений двух контуров (защемленный – опертый, защемленный – свободный, опертый – свободный) частотное уравнение уже не распадается на нечетные и четные частоты. Наиболее сложный вид для аналитических исследований частотное уравнение имеет в случае, когда один контур опертый, а другой свободный. Во всех смешанных способов закреплений контуров необходимо использовать численные исследования полученных частотных уравнений.

6 ВЫВОДЫ

В линейной постановке рассмотрена гидроупругая задача о плоских колебаниях изотропной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости в жестком прямоугольном канале. Пластина имеет произвольное закрепление контуров и подвержена растягивающим или сжимающим усилиям в срединной поверхности. Выведено интегро-дифференциальное уравнение связанных колебаний пластины и жидкости. Получено в виде определителя четвертого порядка частотное уравнение свободных связанных колебаний пластины и жидкости и проведено его упрощение для опертых и свободных контуров. Показано, что для двух опертых или свободных контуров оно распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты, а для смешанных способов закреплений двух контуров: защемленный – опертый, защемленный – свободный, опертый – свободный частотное уравнение уже не распадается на нечетные и четные частоты.

Исследования выполнены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки, проект № 0119U100042.

Литература

1. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П., Лимарь А. А. Об устойчивости колебаний прямоугольной пластины в идеальной жидкости / Ю. Н. Кононов, В. П. Шевченко, А. А. Лимарь // Механика та математичні методи. – 2019. – Том 1. – Вип. 2. – С. 6–17.
2. Кононов Ю. Н., Лимарь А. А. О колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним упругим основанием / Ю. Н. Кононов, А. А. Лимарь // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій : збірник наукових праць. – 2017. – Вип. 26. – С. 79–96.
3. Кононов Ю. Н., Лимарь А. А. Колебания прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с упругими основаними / Ю. Н. Кононов, А. А. Лимарь // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2017. – № 1. – С. 190–204.
4. Kononov Yu. N., Lymar A. A. On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations / Yu. N. Kononov, A. A. Lymar // Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology. 2018. – Vol. 06, Issue 1. – P. 1755–1760.
5. Amaouche M., Meziani B. Coupled frequencies of a rectangular hydroelastic system with two fluids / M. Amaouche, B. Meziani // Meccanica. – 2012. –47. – P. 71–83. doi.org/10.1007/s11012-010-9419-4
6. Bauer H. F. Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover / H. F. Bauer // J. Sound Vib. – 1995. – 180, № 5. – P. 689–704. doi.org/10.1006/jsvi.1995.0109
7. Jeong K.-H., Kim K.-J. Hydroelastic vibration of circular plate submerged in a bounded compressible fluid / K.-H. Jeong, K.-J. Kim // J. Sound Vib. – 2005. – 283. – P. 153–172. doi.org/10.1016/j.jsv.2004.04.029
8. Tariverdilo S., Shahmardani M., Mirzapour J., Shabani R. Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid / S. Tariverdilo, M. Shahmardani, J. Mirzapour, R. Shaba ni // Appl. Math. Model. – 2013. – 37, № 1-2. – P. 228–239. doi.org/10.1016/j.apm.2012.02.025
9. Kononov Yu. M., Shevchenko V. P., Dzhukha Yu. O. Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel / Yu. M. Kononov, V. P. Shevchenko, Yu. O. Dzhukha // Journal of Mathematical Sciences. – 2019, Vol. 240, №. 1, July. – P. 98–112. doi.org/10.1007/s10958-019-04338-2
10. Kononov Yu. M., Dzhukha Yu. O. Vibrations of two-layer ideal liquid in a rigid cylindrical vessel with elastic bases / Yu. M. Kononov, Yu. O. Dzhukha // Journal of Mathematical Sciences. –2020. – Vol. 246, №. 3, April. – P. 365–383. doi.org/10.1007/s10958-020-04745-w

References

1. Kononov, Yu. N., Shevchenko, V. P., Limar, A. A. (2019). Ob ustojchivosti kolebaniya pryamougol’noj plastiny v ideal’noj zhidkosti. Mekhanika ta matematichi metody. 1 (2), 6–17.
2. Kononov, Yu. N., Limar, A. A. (2017). O kolebanii pryamougol’noy plastiny, razdelyayushchey ideal’nye zhidkosti raznoy plotnosti v pryamougol’nom kanale s odnim uprugim osnovaniem. Problemi obchislyuval’noi mekhaniki i mitsnosti konstruktsiy : zbirnik naukovikh prats’, 26, 79–96.
3. Kononov, Yu. N., Limar, A. A. (2017). Kolebaniya pryamougol’noy plastiny, razdelyayushchey ideal’nye zhidkosti raznoy plotnosti v pryamougol’nom kanale s uprugimi osnovanimi. Visnik Zaporiz’kogo natsional’nogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki, 1, 190–204.
4. Kononov, Yu. N., Lymar, A. A. (2018). On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations. Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology, 06 (1), 1755–1760.
5. Amaouche, M., Meziani, B. (2012). Coupled frequencies of a rectangular hydroelastic system with two fluids. Meccanica, 47, 71–83. doi.org/10.1007/s11012-010-9419-4
6. Bauer, H. F. (1995). Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover. J. Sound Vib.,180 (5), 689–704. doi.org/10.1006/jsvi.1995.0109

7. Jeong, K.-H., Kim, K.-J. (2005). Hydroelastic vibration of circular plate submerged in a bounded compressible fluid. J. Sound Vib., 283, 153–172. doi.org/10.1016/j.jsv.2004.04.029
8. Tariverdilo, S., Shahmardani, M., Mirzapour, J., Shabani, R. (2013). Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid. Appl. Math. Model, 37 (1-2), 228–239. doi.org/10.1016/j.apm.2012.02.025
9. Kononov, Yu. M., Shevchenko, V. P., Dzhukha, Yu. O. (2019). Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel // Journal of Mathematical Sciences, 240 (1), 98–112. doi.org/10.1007/s10958-019-04338-2
10. Kononov, Yu. M., Dzhukha, Yu. O. (2020). Vibrations of two-layer ideal liquid in a rigid cylindrical vessel with elastic bases. Journal of Mathematical Sciences, 246, (3) 365–383. doi.org/10.1007/s10958-020-04745-w

Кононов Юрий Никитович
Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук,
д.ф.-м.н., профессор
ул. Добровольского, 1, Славянск, Україна 84100
kononov,yuriy.nikitovich@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1609-0253
Шевченко Владимир Павлович
Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса,
д.ф.-м.н., академик НАН Украины, профессор
ул. 600-лет, 21, Винница, Україна 21021
v.shevchenko@donnu.edu.ua
ORCID: 0000-0001-7092-0492
Лимарь Александр Александрович
Николаевский аграрный университет, к.ф.-м.н, асистент,
ул. Георгия Гонгадзе, 9, Николаев, Украина 54020
aleksandr1402a@mail.ru,
ORCID: 0000-0002-0301-7313

Для посилань:
Кононов Ю. Н. О колебании прямоугольной пластины в идеальной жидкости с учетом различных способов закрепления ее контуров / Ю. Н. Кононов, В. П. Шевченко, А. А. Лимарь // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 1. – С. 6–19.

For references:
Kononov, Yu., Schevchenko, V, Lymar, A. (2020). On the vibrations of a rectangular plate in an ideal fluid with reference to various methods of attachment of its contours. Mechanics and Mathematical Methods, 2 (1), 6–19.