

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАИМЕНЬШЕМ ВЕРШИННОМ ПОКРЫТИИ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАФАХ

к.т.н. С.В. Листровой, А.В. Сидоренко, к.т.н. А.Ю. Гуль
(представил д.ф.-м.н., проф. С.В. Смеляков)

В работе показана возможность построения полиномиального алгоритма решения задачи о наименьшем вершинном покрытии в произвольных графах и предложен алгоритм решения этой задачи с временной сложностью, не превышающей $O(n^3)$.

Введение. Задача о наименьшем вершинном покрытии (ЗНВП) имеет широкое прикладное значение в теории построения сложных систем, в системах диагностики вычислительных систем и сетей и при разработке их программного и математического обеспечения [1, 2]. Она является частным случаем задачи о наименьшем покрытии (ЗНП), которую в общем случае можно рассматривать как задачу определения минимального числа столбцов, покрывающих единицами все строки некоторой булевой матрицы B . При этом, если добавляются ограничения на непересекаемость столбцов по единицам, то мы получаем частный случай этой задачи, называемой задачей о наименьшем разбиении (ЗНР).

Анализ литературы. В [1 – 6] описан ряд методов решения этих задач. Некоторые из них сначала разрабатывались для ЗНР, а потом приспособлялись к ЗНП. Простые методы, использующие дерево поиска для решения ЗНР, были предложены Пирсом, Гарфинкелем и Немхаузером [3, 4]. Лемке, Салкин и Шпильберг [1] предложили методы решения ЗНП, в которых используется дерево поиска и линейное программирование. Подходы, базирующиеся на рассмотрении отсекающих плоскостей и подобные в принципе тем, которые применяются в общем 0-1-программировании [5], представлены в работах Хауза, Нелсона и Радо [1], Белмора и Рэтлифа [6]. Сравнение этих методов и исследование их вычислительных характеристик приведено в [1, 7]. В [7] показано, что алгоритмы на основе рангового подхода [8, 9], отличающиеся от методов, основанных на идеях метода ветвей и границ, обладают меньшей временной сложностью и меньшей погрешностью. Для случая, когда матрица содержит в строке ровно 2 единицы и отображает некоторый

произвольный граф, в [10] получен точный алгоритм ЗНВП для произвольных графов, не содержащих висячих вершин, с временной сложностью в худшем случае не превышающей $O(n^3)$. При этом в среднем его временная сложность с доверительной вероятностью 0,95 не превышает $O(n^2)$.

Цель статьи. В [10] отмечается, что наличие висячих вершин в графе может приводить к неточным решениям, в связи с чем представляет интерес разработать точные алгоритмы решения задачи определения минимальных вершинных покрытий в произвольных графах. В [11] предложен алгоритм решения задачи «3-выполнимость» линейной сложности, поэтому цель данной работы – разработка методики сведения ЗНВП к задаче «3-выполнимость», и на основе этого сведения построение точного алгоритма решения ЗНВП.

Постановка задачи. Представим произвольный граф $G(V, E)$ (рис. 1) в виде булевой матрицы B , в которой столбцам i соответствуют вершины графа $\{v_i\}$, а строкам s – ребра $(v_q, v_j) \in E$ графа $G(V, E)$. Элемент (i, s) равен 1, если вершина i принадлежит ребру, соответствующему s -й строке, и равен 0 в противном случае. Матрица B , в соответствии с [10], может быть представлена в конъюнктивной нормальной форме в виде булевой функции $F(v_1, v_2, \dots, v_n)$, содержащей s дизъюнктов. При этом в каждом дизъюнкте содержится по две переменные $(v_i \vee v_j)$, что соответствует теореме о представлении графа $G(V, E)$ в конъюнктивной нормальной форме, приведенной в [10].

Решение задачи. Поставим в соответствие каждому ребру $\{v_i, v_j\} \in E$ графа $G = (V, E)$ с множеством вершин $\{v_i\} \in V$ $i = \overline{(1, n)}$, и ребер E дизъюнкт $(v_i \vee v_j)$ с двумя переменными. В [10] приведена следующая теорема.

Теорема 1. Если f – булева функция, построенная по графу $G = (V, E)$ в виде произведения дизъюнктов $(v_i \vee v_j)$, где $\{v_i\} \in \{0, 1\}$ ($i = \overline{(1, n)}$, $j = \overline{(1, n)}$, $i \neq j$), и при этом каждый дизъюнкт $(v_i \vee v_j)$ соответствует ребру (v_i, v_j) , то все наборы переменных $\{v_i, v_j\}$, на которых она принимает значение «истинно», соответствуют вершинным покрытиям в графе $G = (V, E)$.

Из данной теоремы вытекает следующее важное следствие.

Для перечисления всех вершинных покрытий графа $G = (V, E)$ необходимо определить те системы значений переменных $\{v_i, v_j\}$, при которых высказывание

$$f(V_1, V_2, \dots, V_n) = 1 \quad (1)$$

«истинно».

Чтобы найти эти системы значений переменных $\{v_i, v_j\}$, необходимо привести левую часть (1) к минимальной дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ), раскрывая скобки и пользуясь законом поглощения. Такая форма единственна ввиду отсутствия в (1) логических отрицаний.

Покажем это на примере графа G, приведенного на рис. 1.

Булева функция для графа будет иметь вид

$$\begin{aligned} f &= (V_1 \vee V_2) (V_2 \vee V_3) (V_3 \vee V_4) (V_2 \vee V_4) (V_1 \vee V_4) = \\ &= (V_2 \vee V_1 V_3) (V_4 \vee V_1 V_2 V_3) = (V_2 V_4 \vee V_1 V_2 V_3 \vee V_1 V_3 V_4). \end{aligned} \tag{2}$$

Как видно из (2), в результате раскрытия скобок и приведения подобных, мы получили полный перечень вершинных покрытий графа G (рис. 1). Ими являются подмножества вершин: $\{2, 4\}$; $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 3, 4\}$.

Граф G, приведенный в виде дерева путей (рис. 2), можно представить в виде матрицы B (рис. 3), в которой каждая строка соответствует ребру графа G, а столбец соответствует вершине графа G. Элемент матрицы B равен 1, если вершина i покрывает ребро (i, j) , и равен 0 в противном случае.

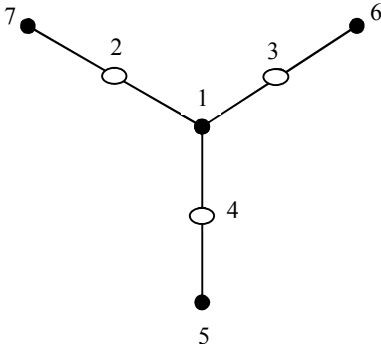


Рис. 2. Граф G

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1-2 \\ 1-3 \\ 1-4 \\ 2-7 \\ 3-6 \\ 4-5 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Рис. 3. Матрица B

Тогда нахождение минимального вершинного покрытия в графе G эквивалентно определению минимального числа столбцов в матрице B, покрывающих единицами все строки матрицы B. В этом случае в матрице число столбцов определяется числом вершин n графа G, а число строк – числом ребер m графа G. При этом если граф связан, то каждый столбец B содержит

равно две единицы, а число строк больше или равно числу столбцов.

Если в матрице B выделить произвольный столбец j , то с ним можно связать некоторое подмножество столбцов $\{q\}$, с которыми данный столбец пересекается. Поскольку столбец j соответствует вершине графа, а число единиц в столбце определяется степенью вершины d_j , то подмножество $\{q\}$ будет всегда содержать d_j таких столбцов. Подмножество столбцов $\{q\}_j$ образует связку столбцов относительно столбца j . Поскольку число столбцов в B равно числу вершин n в графе $G(V, E)$, то и число возможных связок столбцов для матрицы B равно n . Следует отметить, что все столбцы в матрице B пересекаются друг с другом только по одной строке, поскольку в каждой строке матрицы B находится ровно по две единицы. Поэтому, с точки зрения их пересеканости, возможность их принадлежности минимальному покрытию равновелика. Каждая связка столбцов $\{q\}_j$ покрывает определенное число строк l_j . Связку $\{q\}_j^*$, покрывающую максимальное число строк в матрице B , назовем максимальной. Если в графе $G(V, E)$ есть висячие вершины, то это будет означать, что в матрице B есть столбцы P , содержащие только одну единицу, и, следовательно, связки этих столбцов будут содержать только по одному столбцу в каждой. Эти столбцы обладают интересным свойством, которое для произвольных графов $G(V, E)$ определяется следующим утверждением.

Утверждение 1. Если граф $G(V, E)$ содержит некоторое подмножество висячих вершин $Q \in V$, то подмножество вершин $P \in V$, смежных с Q , может быть дополнено до одного из минимальных вершинных покрытий графа $G(V, E)$.

В общем случае, если в графе существует несколько минимальных вершинных покрытий, то могут существовать и минимальные вершинные покрытия без вершины, смежной с висячей вершиной графа $G(V, E)$. Но если оно одно, то эта вершина обязательно в нем присутствует. Из утверждения 1 следует, что если в матрице B есть столбец j , содержащий одну единицу, то связка столбцов относительно столбца j , в данном случае она состоит из одного столбца, принадлежит минимальному покрытию V_{\min} .

В случае представления графа в виде булевой функции $F(V_1, V_2, \dots, V_n)$, данное утверждение эквивалентно тому, что если в дизъюнктах есть переменная V_p , которая в дизъюнктах встречается один раз, то переменная V_p составляющая ей пару в дизъюнкции, входит в покрытие. Следовательно, данную дизъюнкцию можно заменить переменной V_p и при этом исключить из анализа все дизъюнкции, содержащие переменную V_p . В [10] при анализе графов $G(V, E)$, не имеющих висячих вершин, представленных в конъюнктивной нормальной форме в

виде некоторой булевой функции F , для определения наименьшего множества переменных $\{V_i\}$, которые покрывают все дизъюнкты в конъюнктивном представлении графа $G(V, E)$, предложено использовать принцип суперпозиции в булевой алгебре, основанный на следующем равенстве:

$$f(V_1, V_2, \dots, V_n) = f(V_1 = 0, V_2, \dots, V_n) \vee \vee f(V_1, V_2 = 0, \dots, V_n) \vee \dots \vee f(V_1, V_2, \dots, V_n = 0). \quad (3)$$

Особенностью конъюнктивного представления графа $G(V, E)$ в виде булевой функции является то, что она содержит число дизъюнктов, равное числу ребер в графе, число переменных в каждом дизъюнкте равно 2, и каждая переменная соответствует некоторой вершине графа $G(V, E)$. Для разработки алгоритма решения данной задачи введем следующую процедуру А.

Процедура А.

Шаг 1. В функции $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$, представляющей дизъюнктивное представление графа $G(V, E)$, полагаем $V_j = 0$. В результате в выражении для $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$ образуется некоторый сомножитель $V_p * V_h * \dots * V_q$, состоящий из r переменных, находившихся в дизъюнктах совместно с V_j . При этом все дизъюнкты в $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$, содержащие переменные V_p, V_h, \dots, V_q , исключаем из дальнейшего анализа.

Шаг 2. Проверяем, есть ли в дизъюнктах $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$ переменные $\{V_k\}$, встречающиеся по одному разу. Если нет – то выполняем следующий шаг. Если да, то умножаем $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$ на переменные $\{V_k\}$, стоящие совместно в дизъюнктах с переменными $\{V_k\}$, и исключаем из дальнейшего анализа все дизъюнкты в $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$, содержащие переменные $\{V_k\}$.

Шаг 3. Находим в $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$ переменную V_f , встречающуюся в дизъюнктах $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$ чаще всего, и умножаем $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$ на V_f , исключая при этом в $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$ из анализа все дизъюнкты, содержащие переменную V_f . Если таких переменных несколько, то выбираем ту, которая чаще всего встречается в исходном выражении $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$. Если и в исходном выражении частоты появления переменных окажутся одинаковыми, то выбираем произвольную из них.

Шаг 4. Проверяем, есть ли в дизъюнктах функции, повторяющиеся в $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$. Если да, то переходим к выполнению шага 2, иначе – выполняем следующий шаг.

Шаг 5. По преобразованной функции $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$ строим конструкцию вида $Q_j = D_j \cup R_j$, где D_j – конъюнкция дизъюнкций, содержащих по одной переменной X_j , а R_j – конъюнкция, образованная из оставшихся дизъюнктов, содержащих две переменных, встречающихся по

одному разу.

На этом процедура А заканчивает работу.

Для построения алгоритма введем весовую характеристику S_j конструкции $Q_j = D_j \cup R_j$, которую определим как суммарное число переменных, содержащихся в элементе конструкции D_j , и числа дизъюнктов в элементе R_j . Тогда на основе процедуры А можно предложить следующий алгоритм определения минимальных вершинных покрытий в произвольных графах, представленных в конъюнктивной нормальной форме в виде функции $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$.

Алгоритм определения минимального вершинного покрытия.

Шаг 1. Присваиваем j значение 1.

Шаг 2. Выполняем процедуру А преобразования функции $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$, в результате которого строим конструкцию $Q_j = D_j \cup R_j$ и определяем ее весовую характеристику S_j .

Шаг 3. Проверяем: $j = n$? Если нет, то j увеличиваем на 1 и переходим к выполнению шага 2, иначе – выполняем следующий шаг.

Шаг 4. Среди конструкций $\{Q_j\}$ выбираем конструкцию Q_j^* с минимальной весовой характеристикой S_j^{\min} .

На этом алгоритм заканчивает работу, поскольку конструкция Q_j^* определяет минимальное вершинное покрытие.

Следует отметить, что получение точного решения без использования соотношения (3) не представляется возможным. Казалось бы, что можно более быстро получить решение поставленной задачи применяя процедуру А непосредственно к функции $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$, однако при этом можно потерять оптимальное решение задачи. Последнее обусловлено тем, что может существовать некоторое подмножество переменных, частота появления которых больше в дизъюнктах функции $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$, но эти переменные не принадлежат минимальному покрытию всех дизъюнктов функции $f(V_1, V_2, \dots, V_n)$. Поясним это на примере решения задачи о минимальном вершинном покрытии графа на основе предложенного в данной работе алгоритма.

Пример решения ЗНВП.

Пусть требуется определить минимальное вершинное покрытие в графе G (рис. 2). Граф G можно задать матрицей B , в которой каждая строка соответствует ребру графа G , а столбец соответствует вершине графа G . Элемент матрицы B равен 1, если вершина i покрывает ребро (i, j) , и равен 0 – в противном случае. Тогда нахождение минимального вершинного покрытия в графе G эквивалентно определению минимального числа столбцов в матрице B , покрывающих единицами все строки матрицы B . Т.е. мы пришли к рассматриваемой в данной работе задаче, особенностью которой является то, что число единиц в каждой строке

равно 2. Решим данную задачу, используя предложенный алгоритм.

Запишем конъюнктивное представление матрицы В.

$$F = (X_1 \vee X_2) (X_1 \vee X_3) (X_1 \vee X_4) (X_2 \vee X_7) (X_3 \vee X_6) (X_4 \vee X_5). \quad (4)$$

Полагая $X_1 = 0$, получим:

$$F = X_2 X_3 X_4 (X_2 \vee X_7) (X_3 \vee X_6) (X_4 \vee X_5) = X_2 X_3 X_4. \quad (5)$$

В (5) переменные $X_2 X_3 X_4$ поглощают скобки $(X_2 \vee X_7) (X_3 \vee X_6) (X_4 \vee X_5)$. Далее формируем конструкцию

$$Q_1 = D_1 \cup R_1, \text{ где } D_1 = X_2 X_3 X_4, R_1 = \emptyset; S_{J=1} = 3. \quad (6)$$

Полагаем $X_2 = 0$, тогда

$$F = X_1 (X_1 \vee X_3) (X_1 \vee X_4) X_7 (X_3 \vee X_6) (X_4 \vee X_5) = X_1 X_7 (X_3 \vee X_6) (X_4 \vee X_5). \quad (7)$$

В (7) переменная X_1 поглощает скобки $(X_1 \vee X_3) (X_1 \vee X_4)$. Так как в дизъюнктах переменные не повторяются преобразование (7), то прекращаем и формируем соответствующую конструкцию:

$$Q_2 = D_2 \cup R_2, \text{ где } D_2 = X_1 X_7, R_2 = (X_3 \vee X_6) (X_4 \vee X_5); S_{J=2} = 4. \quad (8)$$

Аналогичным образом формируем следующие конструкции:

$$\begin{aligned} Q_3 &= D_3 \cup R_3, \text{ где } D_3 = X_1 X_6, R_3 = (X_2 \vee X_7) (X_4 \vee X_5); S_{J=3} = 4; \\ Q_4 &= D_4 \cup R_4, \text{ где } D_4 = X_1 X_5, R_4 = (X_2 \vee X_7) (X_3 \vee X_6); S_{J=4} = 4; \\ Q_5 &= D_5 \cup R_5, \text{ где } D_5 = X_1 X_4, R_5 = (X_2 \vee X_7) (X_3 \vee X_6); S_{J=5} = 4; \\ Q_6 &= D_6 \cup R_6, \text{ где } D_6 = X_1 X_3, R_6 = (X_2 \vee X_7) (X_4 \vee X_5); S_{J=6} = 4; \\ Q_7 &= D_7 \cup R_7, \text{ где } D_7 = X_1 X_2, R_7 = (X_3 \vee X_6) (X_4 \vee X_5); S_{J=7} = 4. \end{aligned} \quad (9)$$

Как видно из соотношений (6) – (9), минимальное покрытие состоит из трех переменных X_2, X_3, X_4 . В графе G ему соответствуют вершины 2, 3 и 4 (они на рис. 2 выделены более крупными кружками). Если сразу применить преобразование к (4), то, поскольку переменная X_1 чаще всего встречается в дизъюнктах, получим

$$F = X_1 (X_2 \vee X_7) (X_3 \vee X_6) (X_4 \vee X_5).$$

В данном соотношении все переменные встречаются по одному разу, следовательно, дальнейшее преобразование не имеет смысла, но в соответствии с ним покрытие может быть образовано только четырьмя переменными, например X_1, X_2, X_3, X_4 , но, как мы убедились, минимальным является покрытие X_2, X_3, X_4 .

Использование соотношения (3) в алгоритме имеет наглядный физический смысл при определении минимальных вершинных покрытий в полном графе, поскольку полный граф с n вершинами имеет n -минимальных вершинных покрытий, которые включают в себя все вершины без 1-й, все вершины без 2-й, и т.д., все вершины без n -й вершины.

Экспериментальное исследование разработанного алгоритма.

Экспериментальное исследование разработанного алгоритма проводилось для деревьев, содержащих m ярусов и n вершин, где m изменялось от 5 до 20 с шагом 1, а также для произвольных графов с различ-

ными плотностями ребер в графе. Плотность изменялась от 0,1 до 0,5, а число вершин от 4 до 100. Графики зависимости числа элементарных операций от числа вершин в графе приведены на рис. 4 – 5.

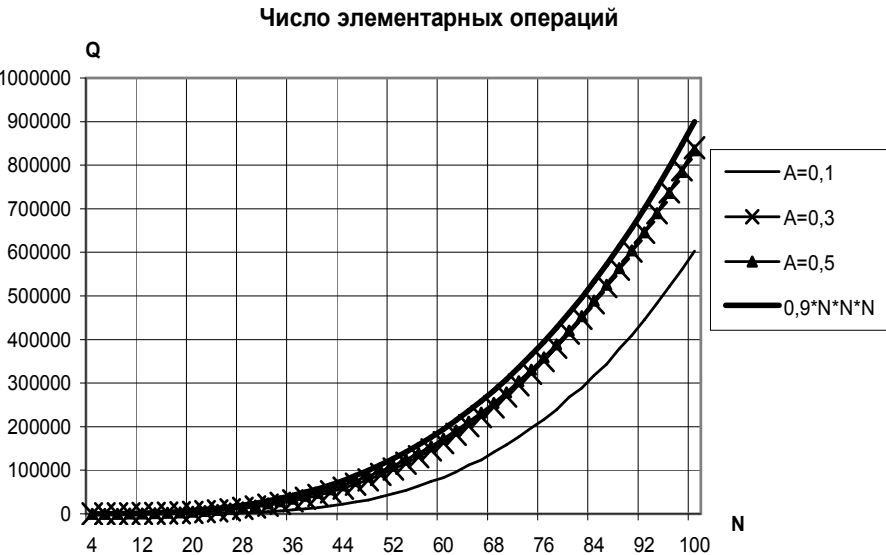


Рис. 4. Зависимость числа ЭО, выполняемых алгоритмом, от размерности графа при различных значениях плотностей ребер в графе

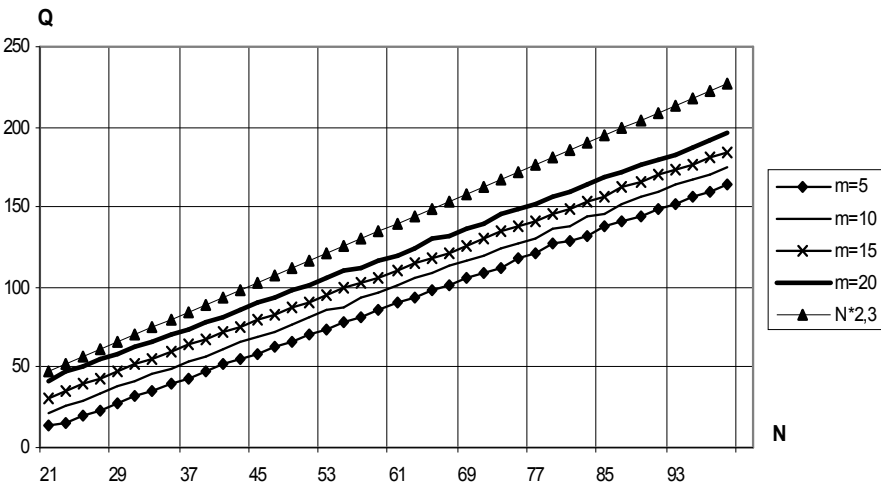


Рис. 5. Зависимость числа ЭО, выполняемых алгоритмом,

от числа вершин в дереве

Выводы. Как видно из графиков, временная сложность алгоритма определения минимальных вершинных покрытий в графе в среднем в худшем случае не превышает $O(0,9n^3)$, а в случае, когда граф представляет собой дерево, $O(2,3n)$. Проверка точности работы алгоритма проводилась в сравнении с точным алгоритмом, приведенным в [8], из 100000 реализаций несовпадений не было обнаружено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 309 с.
2. Balinski M. Integer programming: methods, uses, computation // *Man. Sci.* – 1965. – 12. – P. 253.
3. Garfinkel R.S. Nemhauser G.L. The set partitioning problem: set covering with equality constraints // *Ops.Res.* – 1969. – 17. – P. 848.
4. Pierce J.F. Application of combinatorial programming to a class of all-zero-one integer programming problems // *Man. Sci.* – 1968. – 15. – P. 191.
5. Gomory R. An algorithm for integer solutions to linear programs, *Recent Advances in mathematical Programming*, Graves and Wolfe, Eds., McGraw-Hill, New York, 1963.
6. Bellmore M., Ratliff H.D. Set covering and involuntary bases // *Man. Sci.* – 1971. – 18. – P. 427.
7. Листровой С.В., Симашикевич О.Н. Об использовании гарантированных прогнозов в методах решения задач булевого программирования на основе рангового подхода // *Электронное моделирование*. – 2003. – Т. 25, № 4. – С. 89 – 103.
8. Листровой С.В. Гуль А.Ю. Метод решения задачи о минимальном покрытии на основе рангового подхода. // *Электронное моделирование*. – 1999. – № 1. – С. 58 – 70.
9. Listrovoy S.V. and Gul A.Yu. Method of Minimum Covering Problem Solution on the Basis of Rank Approach // *Engineering Simulation*. – 1999. – Vol. 17. – P. 73 – 89.
10. Листровой С.В Яблочков С.В. Метод решения задачи определения минимальных вершинных покрытий и независимых максимальных множеств // *Электронное моделирование*. – 2003. – Т. 25, №2. – С. 31 – 40.
11. Листровой С.В. Метод решения задачи 3 выполнимость // *Электронное моделирование*. – 2001. – № 6. – С. 66 – 76.

Поступила 22.12.2004

ЛИСТРОВОЙ Сергей Владимирович, канд. техн. наук, доцент Харьковского университета Воздушных Сил. Область научных исследований – дискретная оптимизация.

СИДОРЕНКО Андрей Владимирович, адъюнкт Харьковского университета Воздушных Сил. В 2001 году окончил ХВУ. Область научных исследований – применение задач дискретной оптимизации в радиотехнических системах.

ГУЛЬ Александр Юрьевич, канд. техн. наук, начальник НИЛ Харьковского университета Воздушных Сил. Область научных исследований – применение задач дискретной оптимизации в радиотехнических системах.