

Л. Й. Глухівський

Нелінійні коливання: чисельне полігармонічне моделювання

Київ
Видавництво "Альфа ПіК"
2008

УДК 534 : 621.3.021: 681.3.068:004.4
ББК 22.32 + 32.973.26 - 018
Г 55

Глухівський Л.Й. Нелінійні коливання: чисельне полігармонічне моделювання. – К.: “Альфа ПіК”, 2008. - 204 с.: іл.
ISBN 978-966-96613-7-1

Викладено основи диференційного гармонічного методу – чисельного методу полігармонічного моделювання (розрахунку) нелінійних коливань у системах різної фізичної природи з пошуком періодичних розв'язків нелінійних систем диференційних рівнянь, що описують ці коливання.

Детально описано базове програмне забезпечення методу. Наведені приклади моделювання цим методом із використанням його програмного забезпечення вимушених, параметричних і вільних коливань у низці нелінійних систем.

Наведені приклади написаних мовою FORTRAN-90 програм, що реалізують комп'ютерне моделювання нелінійних коливань, і результати моделювань.

Для фахівців з комп'ютерного аналізу й проектування нелінійних пристроїв механіки, електротехніки, радіофізики, акустики, автоматичного регулювання тощо, студентів старших курсів (магістерка), аспірантів і докторантів відповідних спеціальностей технічних університетів.

Книжка може також слугувати посібником із розробки спеціального програмного забезпечення для наукових і інженерних розрахунків, зокрема – алгоритмічною мовою FORTRAN-90.

Рецензенти -

Кузьо І.В., доктор техн. наук, професор
Маляр В.С., доктор техн. наук, професор

ISBN 978-966-96613-7-1

© Глухівський Л.Й, 2008

© Оформлення, видавництво “Альфа ПіК”, 2008

П е р е д м о в а

Одним із розділів теорії коливань, що вивчає загальні закономірності коливних процесів у різноманітних системах різної фізичної природи, є теорія нелінійних коливань – коливань у системах із нелінійними зв'язками. Її роль в останні десятиліття стає все важливішою, внаслідок зумовленої прискоренням науково-технічного прогресу інтенсифікацією навантажень в елементах і вузлах систем, яка породжує чи робить більш явними нелінійні зв'язки у них. Моделювання процесів у таких системах за цих умов вимагає все повнішого врахування їхніх нелінійностей.

Розвиток усяких теорій, у т.ч. й теорії нелінійних коливань, завжди стимулювався необхідністю розв'язання конкретних прикладних задач у тій чи іншій науково-технічній сфері. Автор цієї книжки упродовж достатньо тривалого часу працював над розв'язанням задач розрахунку періодичних процесів в нелінійних електротехніці і електромеханіці. Для розрахунку нелінійних коливань у системах і пристроях цієї області ним був розроблений спеціальний чисельний метод, названий диференційним гармонічним. Його основою послужили відомий у теорії коливань метод гармонічного балансу і деякі чисельні методи розв'язання нелінійних систем скінченних (алгебричних, трансцендентних) рівнянь, що використовують апарат диференційного числення. Певним підсумком цієї роботи можна вважати дві монографії автора [17, 20].

Ця книжка є спробою узагальнення одержаних результатів і представлення розробленого методу разом з його програмним забезпеченням як достатньо універсального інструменту для розрахунку нелінійних коливань у системах різної фізичної природи, не тільки із області електротехніки чи електромеханіки.

За стилем книжка є спробою викладу матеріалу як навчального посібника для студентів старших курсів технічних університетів (магістерка) і аспірантів та докторантів широкого спектру спеціальностей: електротехніки, електромеханіки, електроенергетики, радіофізики, електроніки, механіки, акустики, оптики та інших, де виникають задачі моделювання нелінійних коливань. Автор має надію, що нею будуть користуватися й фахівці з розрахунку і комп'ютерного проектування у цих галузях при проектуванні нелінійних пристроїв і систем.

Книжка може також слугувати посібником із розробки спеціального програмного забезпечення для наукових і інженерних розрахунків, зокрема – алгоритмічною мовою FORTRAN-90.

Рукопис книжки ретельно переглянули рецензенти – працівники Національного університету "Львівська політехніка" доктор технічних наук, професор Кузьо І.В. і доктор технічних наук, професор Маляр В.С. Вони висловили ряд пропозицій щодо поліпшення викладу матеріалу, і за це автор їм вельми вдячний.

Автор буде вдячний усім, хто надішле свої відгуки про книжку чи побажання щодо її вдосконалення.

ВСТУП

Узагальнені координати елементів технічних систем тієї чи іншої фізичної природи (механічної, акустичної, гідравлічної, електричної, радіоелектронної тощо) можуть бути змінними у часі. До таких координат належать: механічні лінійні чи кутові переміщення, швидкості й прискорення; електричні заряди, струми й напруги; магнітні індукції, напруження, потоки, потокозчеплення тощо. Якщо зміна координат системи у часі є немонотонною, то кажуть, що у системі здійснюється коливний процес.

Коливні процеси у фізичних системах є або усталеними (стаціонарними), або перехідними від одних усталених коливних процесів до інших. Окремим випадком стаціонарного коливного процесу є періодичний коливний процес (періодичне коливання). Періодичним коливанням називають таке коливання, у якому залежності від часу координат системи є періодичними функціями.

Найпростішим випадком періодичних коливань є просте гармонічне коливання (або просто – гармонічне коливання)

$$a[t] = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t \quad (\text{B.1a})$$

або

$$a[t] = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (\text{B.1б})$$

де

a - змінна координата; A_c , A_s , A - амплітуди гармонічного коливання цієї координати; t - час; ω - кругова частота; φ - початкова фаза.

У виразах (B.1) запис зліва від знаку рівності змінної t у квадратних дужках означає, що a є залежною змінною від іншої змінної – аргументу t . Тут і скрізь далі у цій книжці у формулах квадратні дужки застосовуються тільки з цією метою: для зазначення після назви змінної, у разі необхідності, її аргументу (чи аргументів). Запис пропонується читати, на прикладі формул (B.1), як " a від t ". Якщо змінна залежить від двох і більше аргументів, то вони записуються у квадратних дужках і розділяються комами.

Амплітуду і початкову фазу у виразі (B.1б) і амплітуди у виразі (B.1а) зв'язують залежності

$$A = \sqrt{A_c^2 + A_s^2}; \quad \varphi = \text{arctg}(A_s/A_c). \quad (\text{B.2})$$

Залежність вигляду (B.1) є, як відомо, загальним розв'язком диференційного рівняння

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \omega^2 a = 0, \quad (\text{B.3})$$

яке описує вільні (ще кажуть - власні) коливання лінійних консервативних (тобто без розсіяння енергії) систем. Наприклад, це може бути: механічна коливна система – розташована горизонтально і закріплена з однієї сторони пружина з кулькою; механічний математичний маятник - підвішена на нерозтяжній нитці кулька; електричний коливний контур, утворений послідовно з'єднаними індуктивністю і ємністю тощо.

На кульку - елемент системи, наведеної як перший приклад, діють дві сили: сила інерції

$$F_1 = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (\text{B.4})$$

яка є добутком маси кульки m на її прискорення (другу похідну за часом відхилення x кульки від положення рівноваги), і потенціальна сила пружності

$$F_2 = s x, \quad (\text{B.5})$$

яка є добутком жорсткості пружини s на відхилення x . За другим законом Ньютона сума цих двох сил дорівнює нулеві:

$$F_1 + F_2 = m \frac{d^2 x}{dt^2} + s x = 0. \quad (\text{B.6})$$

Позначивши

$$x = a ; \quad s/m = \omega^2, \quad (\text{B.7})$$

приходимо до рівняння вигляду (B.3).

У другому прикладі сила інерції, що діє на кульку з масою m при довжині нитки l і її відхиленні від вертикалі на кут θ (ця сила дотична до дуги, яку описує кулька), дорівнює

$$F_1 = ml \frac{d^2 \theta}{dt^2}. \quad (\text{B.8})$$

Відновлювальна потенціальна сила, що намагається повернути кульку до стану рівноваги, дорівнює

$$F_2 = m g \sin \theta, \quad (\text{B.9})$$

де g – прискорення вільного падіння.

Врахувавши, як і у попередньому випадку, що сума цих двох сил, за другим законом Ньютона, дорівнює нулеві, а також те, що при малих кутах відхилення нитки від вертикалі можна прийняти $\sin \theta \approx \theta$, і позначивши

$$\theta = a ; \quad g/l = \omega^2, \quad (\text{B.10})$$

знову приходимо до рівняння вигляду (В.3).

У третьому прикладі (електричний коливний контур, утворений конденсатором із зарядом q і індуктивною котушкою із поточозчепленням ϕ) струм i контуру і напругу конденсатора u_c зв'язують два рівняння: записане за другим законом Кірхгофа рівняння

$$\frac{d\phi}{dt} + u_c = 0 \quad (\text{В.11})$$

і рівняння зв'язку струму і заряду конденсатора

$$\frac{dq}{dt} = i. \quad (\text{В.12})$$

Нехай конденсатор і індуктивна котушка цього контуру в електромагнітному відношенні є лінійними, і тоді

$$\phi = Li; \quad q = Cu_c, \quad (\text{В.13 а,б})$$

де L - індуктивність котушки і C - ємність конденсатора (постійні величини). Продиференціювавши ліву і праву частини (В.12) за незалежною змінною t , одержимо

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}. \quad (\text{В.14})$$

З урахуванням (В.13а) і (В.14)

$$\frac{d\phi}{dt} = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}. \quad (\text{В.15})$$

Підставивши у (В.11) вираз для похідної $d\phi/dt$ із (В.15) і вираз для напруги u_c із (В.13б) та прийнявши позначення

$$q = a; \quad \frac{1}{LC} = \omega^2, \quad (\text{В.16})$$

теж приходимо до рівняння вигляду (В.3).

Доречно зауважити, що по відношенню до електричних кіл (розглянутий вище коливний контур є найпростішим електричним колом) у спеціальній літературі термін "коливання" струмів, напруг, зарядів, поточозчеплень як правило не вживається, а використовують терміни "змінний струм", "змінна напруга" тощо.

Розглянуті вище приклади коливань є коливаннями у консервативних системах, тобто системах без розсіяння енергії (перебувають під дією тільки потенціальних сил). Коливання у таких системах не загасають, їх розмах залежить лише від початкових умов.

У коливній дисипативній системі, тобто системі, процеси у якій супроводжується розсіянням енергії, усталені коливання її координат вигляду (В.1) можуть існувати лише за наявності зовнішньої періодичної у часі змушувальної сили, робота якої компенсує це розсіяння енергії.

Якщо розсіяння енергії у системі зумовлюється в'язким демпфуванням, то при розгляді коливань у ній до уваги треба приймати силу в'язкого демпфування, яка є пропорційною до швидкості, тобто до першої похідної часової залежності координати a . Таким демпфуванням у механічних системах є, наприклад, тертя у гідравлічному амортизаторі, коли рідина у ньому перетікає ламінарно. Рівняння руху у таких системах має вигляд [27]

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + 2h \frac{da}{dt} + \omega^2 a = p[t], \quad (\text{B.17})$$

де h – коефіцієнт демпфування.

Цим рівнянням також можна описати зміну у часі заряду конденсатора електричного коливного контуру, який крім індуктивності і ємності має ще послідовно з'єднаний з ними активний опір r , у якому й розсіюється енергія. Це стає очевидним, якщо крім позначень (B.16) прийняти також позначення

$$r / L = 2h \quad (\text{B.18})$$

і вважати $p[t]$ змінною електрорушійною силою введеного у коло зовнішнього джерела.

Якщо у (B.17) зовнішня змущувальна сила $p[t]$ є простим гармонічним коливанням, то (B.1) є періодичним розв'язком цього диференційного рівняння.

Записуючи рівняння руху, надалі будемо диференційні рівняння вищих порядків зводити до системи диференційних рівнянь першого порядку. Для прикладу приведемо диференційне рівняння (B.17) другого порядку до системи двох диференційних рівнянь першого порядку :

$$\frac{da}{dt} - b = 0; \quad \frac{db}{dt} + 2hb + \omega^2 a = p \quad (\text{B.19})$$

і запишемо цю систему у матрично-векторному вигляді

$$\frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{z} = \vec{e}, \quad (\text{B.20})$$

де

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \quad (\text{B.21})$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ 2hb + \omega^2 a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2hx_2 + \omega^2 x_1 \end{pmatrix}; \quad (\text{B.22})$$

$$\vec{e} = \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ p[t] \end{vmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

Оскільки диференціальне рівняння (B.17) є лінійним, то у векторному диференціальному рівнянні (B.20) вектор \vec{z} є лінійною функцією вектора \vec{x} :

$$\vec{z} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \omega^2 & 2h \end{vmatrix} \cdot \vec{x}. \quad (\text{B.24})$$

Складнішим випадком періодичних коливань є полігармонічне коливання, тобто таке коливання, яке може бути описане сумою двох або більше простих гармонічних коливань із різними частотами. У загальному випадку таке коливання описується рядом Фур'є у вигляді

$$a[t] = A_0 + \sum_{v=1}^n (A_{cv} \cos v\omega t + A_{sv} \sin v\omega t) \quad (\text{B.25a})$$

або

$$a[t] = A_0 + \sum_{v=1}^n A_v \cos(v\omega t + \varphi_v). \quad (\text{B.25b})$$

У лінійних системах, тобто системах, всі зв'язки в яких описуються лінійними залежностями, полігармонічні коливання є можливими тільки тоді, коли зовнішні змущувальні сили, що зумовлюють ці коливання, теж є полігармонічними. У цьому випадку у рівнянні (B.19) зовнішня змущувальна сила повинна мати вигляд

$$p[t] = P_0 + \sum_{v=1}^n (P_{cv} \cos v\omega t + P_{sv} \sin v\omega t), \quad (\text{B.26})$$

і тоді залежності вигляду (B.25) є періодичним розв'язком диференціального рівняння (B.20).

Для лінійних коливних систем, як відомо, є справедливим принцип накладання (суперпозиції), згідно із яким гармоніки різних порядків коливного процесу (із різними значеннями v) є незалежними одна від одної, і у (B.25) як розв'язку рівняння (B.20) відмінними від нулів будуть амплітуди гармонік тільки тих порядків, які присутні у змущувальній силі (B.26).

У нелінійних системах, тобто системах, зв'язки між параметрами яких (чи хоч би один зв'язок) є нелінійними, періодичні коливання координат є полігармонічними навіть тоді, коли зовнішні збурення (змущувальні сили) є простими гармонічними коливаннями: нелінійності системи є генераторами вищих гармонік. У цьому випадку для того, щоб формула вигляду (B.25) точно описувала коливний процес, потрібно прийняти у ній $n = \infty$ (безконечність). У практичних розрахунках коливань у нелінійних системах (коливання у нелінійних системах ще називають *нелінійними коливаннями*, і цей термін став загальноживаним) значення n намагаються брати

якого меншим, але не меншим від такого значення, при якому задовольняється необхідна точність апроксимації коливань рядами (B.25).

Якщо у рівнянні вигляду (B.20) залежність вектора \vec{z} від вектора \vec{x} є нелінійною, то кажемо, що це диференційне рівняння є нелінійним. Надалі у цій книжці предметом розгляду будуть нелінійні векторні диференційні рівняння і алгоритми пошуку їх періодичних розв'язків.

Оскільки нелінійне рівняння вигляду (B.20) – (B.23) містить змушувальну силу $p[t]$, яка є функцією тільки часу, воно є неавтономним. Нелінійні коливання у системах, які описуються такими рівняннями, є *вимушеними коливаннями*.

Рівняння вигляду (B.20), що описує коливання у деяких системах, може не містити змушувальних сил, які є функціями тільки часу, зате час є серед аргументів векторної функції \vec{z} . Тоді рівняння руху у системі набуває вигляду

$$\frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{z}[\vec{x}, t] = 0. \quad (B.27)$$

Нелінійні коливання у системах, що описуються рівнянням вигляду (B.27), можуть виникати тільки при періодичній зміні у часі параметрів жорсткості, інерції чи дисипації систем та певному їх співвідношенні і мають назву *параметричних коливань*.

Якщо у рівнянні вигляду (B.27) серед аргументів векторної функції \vec{z} час відсутній

$$\frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{z}[\vec{x}] = 0, \quad (B.28)$$

то це рівняння є автономним, і коливання як періодичний розв'язок цього рівняння, називають *автоколиваннями*. Дисипативні системи, у яких можуть виникати такі коливання, мусять мати механізми періодичного поповнення енергії, яка розсіюється впродовж кожного періоду коливань.

Не завжди диференційні рівняння руху систем записують так, що координати, залежності від часу яких шукаються, фігурують під знаками похідних. У таких випадках під знаками похідним записують інші змінні, які функціонально зв'язані з цими координатами.

Як приклад розглянемо нелінійне одноконтурне електричне коло, утворене послідовно з'єднаними: індуктивністю, потокозчеплення якого ϕ є нелінійною функцією (внаслідок насичення магнітопроводу) струму i кола

$$\phi = \phi[i]; \quad (B.29)$$

активним опором, спад напруги u_r , на якому є нелінійною функцією струму кола

$$u_r = u_r[i]; \quad (B.30)$$

ємністю, заряд q якої є нелінійною функцією спаду напруги u_c на ємності

$$q = q[u_c] \quad (B.31)$$

та електрорушійною силою e , що є періодичною функцією часу. Для цього кола диференціальне рівняння вигляду (B.20) є таким:

$$\frac{d}{dt} \bar{y}[\bar{x}] + \bar{z}[\bar{x}] - \bar{e}[t] = 0, \quad (B.32)$$

де

$$\bar{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i \\ u_c \end{Bmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi \\ q \end{Bmatrix}; \quad (B.33 \text{ а, б})$$

$$\bar{z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_r[i] + u_c \\ -i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_r[x_1] + x_2 \\ -x_1 \end{Bmatrix}. \quad (B.33 \text{ в})$$

Тут вектор \bar{z} є нелінійною функцією вектора \bar{x} (нелінійна функція $u_r[x_1]$ є складовою частиною змінної z_1). Для більш загального випадку вектор \bar{z} може бути функцією ще й вектора \bar{y} :

$$\bar{z} = \bar{z}[\bar{x}, \bar{y}]. \quad (B.34)$$

Рівняння виглядів (B.20) і (B.32) записані у нормальній формі Коші, тобто вони є розв'язаними відносно похідних. Більш загальною формою запису векторного диференціального рівняння є наступна

$$B \frac{d}{dt} \bar{y} + \bar{z} - \bar{e} = 0, \quad (B.35)$$

де B - деяка постійна матриця. Якщо вона є одиничною, то це рівноцінне запису рівнянь у нормальній формі Коші. У окремих випадках може бути $\bar{y} = \bar{x}$, тоді $\bar{z} = \bar{z}[\bar{x}]$, і рівняння набуває вигляду (B.20), (B.27) чи (B.28).

Окремі рядки матриці B можуть бути нульовими, у такому разі рівняння вигляду (B.35) представляє собою систему алгебро-диференціальних рівнянь.

З математичного погляду розрахунок нелінійних коливань у будь-якій системі тієї чи іншої фізичної природи зводиться до пошуку періодичного розв'язку (чи періодичних розв'язків) нелінійних систем диференціальних (чи алгебро-диференціальних) рівнянь, що описують систему.

Розробкою методів розрахунку й аналізу нелінійних коливань - пошуку періодичних розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь, що описують ці коливання - впродовж тривалого часу займались, ще починаючи з кінця 18-го століття, багато відомих вчених: А. Пуанкаре, А. Ляпунов, Ван дер Поль, Дж. Стрет, А. Крилов, А. Андронон, Л. Мандельштам, М. Боголюбов, Ю. Митропольський,

Дж. Хейл, Т. Хаясі та ін. Вони розробили низку аналітичних методів, що дали змогу осмислити суть нелінійних коливань.

Початок комп'ютерної епохи дав сильний поштовх до розвитку чисельних методів пошуку періодичних розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь. У цьому напрямку, зокрема - у області нелінійної електротехніки, слід відзначити праці Т. Ейпріла і Т. Тріка і вагомий внесок українських вчених Г. Пухова, А. Самойленка, В. Бондаренка, А. Петренка, Л. Синицького, Р. Фільца та ін.

Розгляд методів розрахунку нелінійних коливань можна знайти у низці монографій і навчальних посібників, зокрема - в [2, 8, 10, 27, 29, 32, 37- 40, 42, 45, 46, 51, 53, 55, 56, 60, 62, 65, 66] .

Серед методів розрахунку нелінійних коливань, тобто - пошуку періодичних розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь, окреме місце займають методи, що базуються на використанні рядів Фур'є. Найвідомішими із них є [4-7, 27, 32, 46, 51]: метод гармонічної лінеаризації, метод малого параметру, асимптотичні методи Крилова – Боголюбова і метод гармонічного балансу. Коротко охарактеризуємо їх суть.

У методі гармонічної лінеаризації припускається, що вхідні і вихідні змінні для кожної нелінійності системи є моногармонічними (вищими гармоніками нехтують). Амплітуди гармонік вихідних змінних визначаються через амплітуди вхідних величин за допомогою формул для визначення коефіцієнтів ряду Фур'є, при цьому реальні нелінійні зв'язки у системі замінюються розрахунковими лінійними зв'язками між першими гармоніками вхідних і вихідних величин.

Згідно із методом малого параметру у розв'язуваних диференціальних рівняннях виділяють окремо нелінійну частину із множником, що є малим параметром. Так, якщо у автономному рівнянні вигляду (В.17) другий доданок замість постійного множника

$2h$ містить нелінійність $F [a, \frac{da}{dt}]$, то рівняння приводиться до вигляду

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \varepsilon F \frac{da}{dt} + \omega^2 a = 0 . \quad (B.36)$$

Коли параметр ε має нульове значення, то коливна система, що відповідає цьому рівнянню, стає лінійною консервативною. Періодичний розв'язок для останньої приймається як наближення, до якого при деякому ненульовому значенні ε шукають поправки у вигляді рядів за степенями цього малого параметру. Метод є застосовним лише до квазілінійних систем, для яких параметр ε є малим.

За асимптотичними методами Крилова - Боголюбова, зокрема – за методом усереднення (інша назва - метод повільно змінних амплітуд), періодичний розв'язок для квазілінійних систем з малим згасанням шукається як моногармонічне коливання вигляду (В.1), амплітуди якого (чи амплітуди і фази) є повільнозмінними функціями часу. Розв'язувані нелінійні диференціальні рівняння шляхом усереднення на періоді значень амплітуд приводяться до більш простих, так званих *укорочених*, рівнянь.

Метод гармонічного балансу серед вищезгаданих методів вирізняється тим, що може бути застосований як до квазілінійних, так і до суттєво нелінійних систем, і не обмежується для наближення руху кожної із координат системи лише однією гармонікою, а дозволяє шукати розв'язок у вигляді полігармонічного наближення. Суть методу полягає у підстановці у диференційні рівняння, що описують коливання, наближення періодичних рішень у вигляді рядів Фур'є. При цьому задача пошуку періодичного розв'язку диференційних рівнянь зводиться до розв'язання системи нелінійних скінченних (тобто не диференційних – алгебричних, трансцендентних тощо) рівнянь, невідомими якої виступають амплітуди гармонік. Методи, що базуються на такому підході, у [27] іменуються частотними методами побудови періодичних розв'язків.

Від самого початку дослідниками метод гармонічного балансу трактувався як аналітичний: за його допомогою при аналізі нелінійних коливних систем шукали аналітичні залежності, що зв'язують амплітуди гармонік змінних координат з параметрами системи і амплітудами гармонік змушувальної сили. Це відкривало можливості для аналізу знайдених залежностей і визначення умов існування коливань. Однак при спробах одержання таких залежностей, коли крім врахування основної гармоніки ставиться завдання врахування й вищих гармонік, це призводить до настільки складних аналітичних перетворень і формул (особливо при наявності нелінійностей у функціональних залежностях, які зв'язують більше двох змінних), що вони втрачають "прозорість" і практичну придатність для аналізу. Тому лише у небагатьох випадках при аналізі реальних нелінійних коливних систем, за винятком найпростіших, цим методом удається враховувати крім основної гармоніки ще бодай одну із вищих [7].

Якщо ж метод гармонічного балансу трактувати як чисельний, тобто ставити метою при його використанні у кожному конкретному випадку одержання не аналітичних залежностей для амплітуд гармонік змінних координат, а тільки чисельних значень амплітуд, то це дозволяє уникнути ускладнень, що прогресивно зростають із введенням у розгляд кожної наступної вищої гармоніки. Таке застосування методу гармонічного балансу у органічному поєднанні його з деякими чисельними методами розв'язання систем нелінійних скінченних рівнянь було запропоновано автором цієї книжки при розв'язанні ряду важливих прикладних задач із області нелінійної електротехніки і електромеханіки [9, 11 – 26, 68]. Запропонована модифікація методу гармонічного балансу як універсального чисельного методу визначення періодичних розв'язків нелінійних систем диференційних рівнянь була названа *диференційним гармонічним методом*. При його розробці найважливішими завданнями були досягнення високих рівнів формалізації і алгоритмізації та мінімізація обсягів підготовчих робіт при його застосуванні до розрахунку нелінійних коливань у кожному конкретному випадку.

Систематичний виклад цього методу і приклади його застосування наводяться у наступних розділах книжки.

Глава 1

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО ГАРМОНІЧНОГО МЕТОДУ

1.1. Гармонічна алгебризація диференціальних рівнянь

Отже, диференціальний гармонічний метод розпочинається з методу гармонічного балансу.

Перша дія, яку необхідно виконати при застосуванні методу гармонічного балансу, є перетворення диференціальних рівнянь, періодичний розв'язок яких шукається, до скінченних (не диференціальних – алгебричних, трансцедентних) рівнянь, невідомими яких виступають амплітуди гармонік рядів Фур'є, що ними наближують розв'язок. Назвемо таке перетворення диференціальних рівнянь до скінченних їх гармонічною алгебризацією.

Для простоти викладу гармонічну алгебризацію і алгоритм пошуку періодичного розв'язку розглянемо спочатку на прикладі одного нелінійного диференціального рівняння першого порядку. Очевидно, що це може бути тільки неавтономне рівняння, тому що одним рівнянням першого порядку можна описати лише вимушене коливання. Гармонічна алгебризація нелінійних систем диференціальних рівнянь першого порядку, як неавтономних, так і автономних, а також алгоритми пошуку їх періодичних розв'язків будуть розглянуті далі.

Розглядається диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dt} + z = e, \quad (1.1)$$

де

$$e = e[t] = e[t + T] \quad (1.2)$$

– задана зовнішня змушувальна сила (збурення), що є T -періодичною функцією часу (тут T – період);

$$y = y[x]; \quad (1.3)$$

$$z = z[x, y] \quad (1.4)$$

– деякі нелінійні функціональні залежності.

Як було уже зазначено у Вступі, квадратні дужки у цій книжці застосовуються у формулах виключно для запису у них аргументу (аргументів) функціональних залежностей (не у формулах квадратні дужки традиційно застосовуються для посилань на літературу).

Періодичним розв'язком нелінійного скалярного диференціального рівняння (1.1) є коливання з періодом T координати x

$$x = x[t] = x[t + T], \quad (1.5)$$

що є аргументом нелінійних залежностей (1.3), (1.4). При цьому періодично залежними від часу з таким же періодом є також змінні y і z , що входять до рівняння (1.1):

$$y = y[t] = y[t + T]; \quad (1.6)$$

$$z = z[t] = z[t + T]. \quad (1.7)$$

Апроксимуємо залежності (1.2), (1.5) – (1.7) тригонометричними рядами

$$a[t] = A_0 + \sum_{v=1}^n (A_{cv} \cos v\omega t + A_{sv} \sin v\omega t); \quad (1.8)$$

$$a = x, y, z, e; \quad A = X, Y, Z, E,$$

де

$$\omega = 2\pi / T \quad (1.9)$$

– основна кругова частота (кругова частота першої гармоніки).

Після підстановки в (1.1) апроксимацій залежностей від часу змінних y , z і e рядами вигляду (1.8) і виконання операції диференціювання одержуємо трансцендентне рівняння

$$\begin{aligned} & -\omega Y_{c1} \sin \omega t + \omega Y_{s1} \cos \omega t - \dots - v\omega Y_{cv} \sin v\omega t + v\omega Y_{sv} \cos v\omega t - \dots \\ & \dots - n\omega Y_{cn} \sin n\omega t + n\omega Y_{sn} \cos n\omega t + Z_0 + Z_{c1} \cos \omega t + Z_{s1} \sin \omega t + \dots \\ & \dots + Z_{cv} \cos v\omega t + Z_{sv} \sin v\omega t + \dots + Z_{cn} \cos n\omega t + Z_{sn} \sin n\omega t = \quad (1.10) \\ & E_0 + E_{c1} \cos \omega t + E_{s1} \sin \omega t + \dots + E_{cv} \cos v\omega t + E_{sv} \sin v\omega t + \dots \\ & \dots + E_{cn} \cos n\omega t + E_{sn} \sin n\omega t. \end{aligned}$$

Рівняння (1.10) задовольняється для всіх значень t тільки у випадку, якщо

$$\begin{aligned} Z_0 &= E_0; \\ (\omega Y_{s1} + Z_{c1}) \cos \omega t &= E_{c1} \cos \omega t; \\ (-\omega Y_{c1} + Z_{s1}) \sin \omega t &= E_{s1} \sin \omega t; \\ &\dots\dots\dots \\ (v\omega Y_{sv} + Z_{cv}) \cos v\omega t &= E_{cv} \cos v\omega t; \\ (-v\omega Y_{cv} + Z_{sv}) \sin v\omega t &= E_{sv} \sin v\omega t; \\ &\dots\dots\dots \\ (n\omega Y_{sn} + Z_{cn}) \cos n\omega t &= E_{cn} \cos n\omega t; \\ (-n\omega Y_{cn} + Z_{sn}) \sin n\omega t &= E_{sn} \sin n\omega t. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Із (1.11) одержуємо систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned}
 Z_0 &= E_0; \\
 \omega Y_{s1} + Z_{c1} &= E_{c1}; \\
 -\omega Y_{c1} + Z_{s1} &= E_{s1}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 v\omega Y_{sv} + Z_{cv} &= E_{cv}; \\
 -v\omega Y_{cv} + Z_{sv} &= E_{sv}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 n\omega Y_{sn} + Z_{cn} &= E_{cn}; \\
 -n\omega Y_{cn} + Z_{sn} &= E_{sn}
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

З метою компактності запишемо систему рівнянь (1.12) у матрично-векторній формі. Для цього із коефіцієнтів тригонометричних рядів (1.8), тобто із постійних складових і косинусних та синусних амплітуд гармонік, утворимо матриці-стовпці (ще кажуть - вектори-стовпці чи просто вектори) вигляду

$$\vec{X}_\Gamma = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_{c1} \\ X_{s1} \\ \vdots \\ X_{cn} \\ X_{sn} \end{pmatrix}; \quad \vec{Y}_\Gamma = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_{c1} \\ Y_{s1} \\ \vdots \\ Y_{cn} \\ Y_{sn} \end{pmatrix}; \quad \vec{Z}_\Gamma = \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_{c1} \\ Z_{s1} \\ \vdots \\ Z_{cn} \\ Z_{sn} \end{pmatrix}; \quad \vec{E}_\Gamma = \begin{pmatrix} E_0 \\ E_{c1} \\ E_{s1} \\ \vdots \\ E_{cn} \\ E_{sn} \end{pmatrix}. \tag{1.13а, б, в, г}$$

Назвемо ці вектори-стовпці *векторами амплітуд*. Вони мають розмір (кількість елементів) $N_g = 1 + 2n$.

Вектори-стовпці далі ще можуть позначатися так:

$$\vec{A}_\Gamma = \text{colon}(A_0, A_{c1}, A_{s1}, \dots, A_{cn}, A_{sn}). \tag{1.13д}$$

Нерідко ще до проведення розрахунку нелінійного коливання можна дійти висновку, що у координатах аналізованої системи гармоніки деяких порядків завжди є нульовими. Наприклад, якщо у електричних колах нелінійні елементи мають характеристики непарного типу, то при синусоїдальному живленні цих кіл струми і напруги гілок не мають постійних складових і можуть мати гармоніки тільки непарних порядків [41]. У трифазних електричних колах, з'єднаних у "зірку" без нульового провідника, струми фаз не можуть мати гармонік, порядок яких є кратним числу 3, і

Порядок цієї матриці $N_g = 1 + n$.

Алгебричне векторне рівняння (1.15) можна розглядати як гармонічне відображення диференційного рівняння (1.1). Перехід від (1.1) до (1.15) - це і є гармонічна алгебризація диференційного рівняння (1.1).

Зауважимо, що при виконанні гармонічної алгебризації диференційних рівнянь, що мають періодичні розв'язки, необов'язково кожний раз виконувати операції (1.10) – (1.12). Це перетворення з метою одержання уже завершеного вигляду алгебричного векторного рівняння вигляду (1.14) можна формалізувати:

1) змінні величини диференційного рівняння (у рівнянні (1.1) це - змінні y, z, e) необхідно замінити відповідними їм векторами амплітуд (тут – це вектори амплітуд $\vec{Y}_\Gamma, \vec{Z}_\Gamma$ і \vec{E}_Γ);

2) операцію диференціювання замінити множенням зліва на кругову частоту ω і матрицю D .

До рівняння (1.15) явно входять вектори амплітуд \vec{Y}_Γ і \vec{Z}_Γ і неявно - вектор амплітуд \vec{X}_Γ , який є коренем цього рівняння. Вектори амплітуд $\vec{Y}_\Gamma, \vec{Z}_\Gamma$ і \vec{X}_Γ взаємно зв'язані. Прослідкуємо цей зв'язок.

Припустимо, що значення вектора \vec{X}_Γ є відомим. Тоді, з урахуванням (1.8) при $a = x$, відомою (наближено) є й функція (1.5). Використавши її як аргумент нелінійних функцій (1.3) і (1.4), можемо одержати наближення T -періодичних залежностей (1.6) і (1.7). Останні можемо розкласти у ряди Фур'є вигляду (1.8) при $a = y$ і $a = z$ з визначенням коефіцієнтів рядів за відомими формулами

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_\eta d\eta; \quad A_{cv} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a_\eta \cos v\eta d\eta; \quad (1.18)$$

$$A_{sv} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a_\eta \sin v\eta d\eta,$$

де a_η – значення функції $a = a[\eta]$ при значенні кутової координати $\eta = \omega t$.

Оскільки із цих коефіцієнтів і формують за формулами (1.13) чи (1.14) вектори амплітуд \vec{Y}_Γ і \vec{Z}_Γ , то якщо значення цих коефіцієнтів стали відомими, значить - стали відомими і значення векторів амплітуд \vec{Y}_Γ і \vec{Z}_Γ .

Як бачимо, кожному заданому значенню вектора \vec{X}_Γ можна знайти відповідні їм значення векторів \vec{Y}_Γ і \vec{Z}_Γ . Отже, існують такі залежності

$$\vec{Y}_\Gamma = \vec{Y}_\Gamma[\vec{X}_\Gamma]; \quad \vec{Z}_\Gamma = \vec{Z}_\Gamma[\vec{X}_\Gamma]. \quad (1.19a, б)$$

Назвемо ці залежності *гармонічними характеристиками*. Їх можна розглядати як гармонічні відображення функцій (1.3) і (1.4).

Гармонічні характеристики (1.19) є нелінійними, внаслідок нелінійності залежностей (1.3) і (1.4).

Алгоритм розрахунку гармонічних характеристик (1.19) тут описаний схематично, детальніше він розглядається далі.

Вище процедура гармонічної алгебризації розглянута на прикладі диференційного рівняння вигляду (1.1), у якому під знаком похідної знаходиться не координата x , періодична залежність від часу (1.5) якої є розв'язком цього рівняння, а змінна y , що є функцією змінної x . Такий запис диференційного рівняння є більш загальним, він зустрічається, наприклад, при аналізі електричних кіл, коли у диференційних рівняннях, які їх описують, фігурують похідні за часом не струмів, а поточозчеплень, що є функціями цих струмів. Якщо ж у диференційному рівнянні проміжна змінна y відсутня і під знаком похідної знаходиться безпосередньо змінна x , періодична залежність від часу якої і є відшукуваним розв'язком, тобто якщо диференційне рівняння має вигляд

$$\frac{dx}{dt} + z[x] = e[t], \quad (1.20)$$

то його гармонічним відображенням є скінченне рівняння вигляду

$$\omega D \vec{X}_r + \vec{Z}_r = \vec{E}_r. \quad (1.21)$$

1.2. Визначення періодичного розв'язку

Після виконання гармонічної алгебризації диференційного рівняння (1.1) чи (1.20) визначення їх періодичних розв'язків зводиться до розв'язання нелінійних векторних скінченних рівнянь (1.15) чи (1.21). Розглянемо спочатку розв'язання рівняння (1.15).

Хоч вектор амплітуд \vec{X}_r у рівнянні (1.15) явно не фігурує, проте саме він є коренем цього рівняння. Для його пошуку застосуємо один із найефективніших чисельних методів розв'язання нелінійних алгебричних (скінченних) рівнянь – ітераційний метод Ньютона [44, 48]. Він характеризується достатньо високою – квадратичною – швидкістю збіжності. Однак для забезпечення самої збіжності при його застосуванні необхідно задавати, як відомо, “гарне” нульове наближення, яке знаходиться усередині так званої області притягання кореня.

Для отримання такого “гарного” наближення будемо використовувати запропонований у [64] метод, названий методом h -характеристики.

Згідно із методом h -характеристики помножимо у рівнянні (1.15) вектор змушувальних сил \vec{E}_r на скалярний параметр h і одержимо нове рівняння

$$\omega D \vec{Y}_\Gamma + \vec{Z}_\Gamma = h \vec{E}_\Gamma . \quad (1.22)$$

При $h = 0$ у (1.22) змушувальна сила відсутня, і тоді це векторне рівняння має тривіальний (тобто – нульовий) розв’язок $\vec{X}_\Gamma = 0$. При $h = 1$ рівняння (1.22) і (1.15) є тотожними. Залежність вектора амплітуд \vec{X}_Γ від параметра h

$$\vec{X}_\Gamma = \vec{X}_\Gamma [h] \quad (1.23)$$

є h -характеристикою рівняння (1.22). При $h = 0$ вона проходить через нульовий розв’язок, а при $h = 1$ – через корінь рівняння (1.15).

Залежність (1.23) можна одержати шляхом інтегрування деякого векторного диференційного рівняння, по відношенню до якого ця функція є розв’язком. Щоб одержати таке диференційне рівняння, продиференціюємо рівняння (1.22) за параметром h :

$$\omega D \frac{d\vec{Y}_\Gamma}{dh} + \frac{d\vec{Z}_\Gamma}{dh} = \vec{E}_\Gamma . \quad (1.24)$$

Тут похідні векторів амплітуд \vec{Y}_Γ і \vec{Z}_Γ за параметром h необхідно розкрити за правилом диференціювання складних функцій, з урахуванням існування гармонічних характеристик (1.19):

$$\omega D \frac{d\vec{Y}_\Gamma}{d\vec{X}_\Gamma} \frac{d\vec{X}_\Gamma}{dh} + \frac{d\vec{Z}_\Gamma}{d\vec{X}_\Gamma} \frac{d\vec{X}_\Gamma}{dh} = \vec{E}_\Gamma . \quad (1.25)$$

Тоді, прийнявши позначення

$$\frac{d\vec{Y}_\Gamma}{d\vec{X}_\Gamma} = S_{Y\Gamma}; \quad \frac{d\vec{Z}_\Gamma}{d\vec{X}_\Gamma} = S_{Z\Gamma} , \quad (1.26a, б)$$

диференційне рівняння (1.25) приводимо до вигляду

$$(\omega D S_{Y\Gamma} + S_{Z\Gamma}) \frac{d\vec{X}_\Gamma}{dh} = \vec{E}_\Gamma . \quad (1.27)$$

Тут $S_{Y\Gamma}$ і $S_{Z\Gamma}$ – квадратні матриці порядку N_g диференційних параметрів гармонічних характеристик (1.19). Назвемо ці матриці *матрицями диференційних гармонічних параметрів* (МДГП).

МДГП (1.26) зв'язують значення безконечно малих приростів компонент векторів \vec{Y}_Γ , \vec{Z}_Γ і \vec{X}_Γ , тобто безконечно малих приростів амплітуд всіх враховуваних гармонік залежностей (1.5) – (1.7). Якщо функції (1.3) і (1.4) нелінійні, то матриці (1.26) є змінними і є функціями вектора \vec{X}_Γ . Алгоритм обчислення МДГП викладено далі.

Щоб одержати у табличному вигляді залежність (1.23), диференціальне рівняння (1.27) необхідно інтегрувати одним із чисельних методів за параметром h від $h = 0$ при нульових початкових умовах $\vec{X}_\Gamma = 0$ до $h = 1$. Одержане при $h = 1$ значення вектора \vec{X}_Γ можна розглядати як наближений розв'язок скінченного рівняння (1.15) і як "гарне" нульове наближення для уточнення розв'язку за методом Ньютона.

Формула для уточнення розв'язку рівняння (1.15) за методом Ньютона має вигляд [44, 48]

$$\vec{X}_{\Gamma(l+1)} = \vec{X}_{\Gamma(l)} - W_{(l)}^{-1} \vec{H}_{(l)}, \quad (1.28)$$

де l – номер ітерації;

$$W_{(l)} = \omega D S_{Y\Gamma(l)} + S_{Z\Gamma(l)} \quad (1.29)$$

– значення матриці Якобі лівої частини рівняння (1.15) при $\vec{X}_\Gamma = \vec{X}_{\Gamma(l)}$;

$$\vec{H}_{(l)} = \omega D \vec{Y}_{\Gamma(l)} + \vec{Z}_{\Gamma(l)} - \vec{E}_\Gamma \quad (1.30)$$

– значення вектора нев'язок рівняння (1.15) при $\vec{X}_\Gamma = \vec{X}_{\Gamma(l)}$.

Для того щоб при уточненні розв'язку рівняння (1.15) за ітераційною схемою (1.28) не обертати матрицю, а розв'язувати систему лінійних рівнянь, цю схему можна записати так:

$$\begin{aligned} W_{(l)} \cdot \Delta \vec{X}_{\Gamma(l)} &= \vec{H}_{(l)}; \\ \vec{X}_{\Gamma(l+1)} &= \vec{X}_{\Gamma(l)} - \Delta \vec{X}_{\Gamma(l)}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

У (1.31) перший рядок є системою лінійних рівнянь відносно векторної невідомої $\Delta \vec{X}_{\Gamma(l)}$ - вектора поправок.

Ітерації за схемами (1.28) чи (1.31) необхідно виконувати до тих пір, аж поки не буде досягнута необхідна точність розв'язку рівняння (1.15).

Якщо диференціальне рівняння, періодичний розв'язок якого шукається, має вигляд (1.20) і його гармонічне відображення – вигляд (1.21), то необхідне для одержання h -характеристики диференціальне рівняння має вигляд

$$(\omega D + S_{Z\Gamma}) \frac{d\vec{X}_\Gamma}{dh} = \vec{E}_\Gamma \quad (1.32)$$

і необхідні для уточнення розв'язку за методом Ньютона вектор нев'язок і матриця Якобі на l -ій ітерації мають вигляд

$$\vec{H}_{(l)} = \omega D \vec{X}_{\Gamma(l)} + \vec{Z}_{\Gamma(l)} - \vec{E}_\Gamma ; \quad (1.33)$$

$$W_{(l)} = \omega D + S_{Z\Gamma(l)} . \quad (1.34)$$

Як бачимо, для одержання значення кореня рівняння (1.15) чи (1.21) описаним способом необхідно для біжучого значення вектора амплітуд \vec{X}_Γ при одержанні нульового наближення шляхом розрахунку h -характеристики і на кожній ітерації при уточненні розв'язку за методом Ньютона обчислювати значення векторів амплітуд $\vec{Y}_\Gamma, \vec{Z}_\Gamma$ і матриць $S_{Y\Gamma}, S_{Z\Gamma}$.

1.3. Алгоритм розрахунку гармонічних характеристик

У попередньому розділі розрахунок значень векторів амплітуд \vec{Y}_Γ і \vec{Z}_Γ за заданим значенням вектора амплітуд \vec{X}_Γ , тобто розрахунок гармонічних характеристик (1.19), описаний схематично. Розглянемо його детальніше з метою одержання алгоритму, придатного для комп'ютерної реалізації.

Якщо є заданим значення вектора амплітуд \vec{X}_Γ , то значення змінної x для будь-якого значення кутової координати $\eta = \omega t$ визначаємо, з урахуванням (1.8), за формулою

$$x = X_0 + \sum_{v=1}^n (X_{c_v} \cos v\eta + X_{s_v} \sin v\eta). \quad (1.35)$$

З використанням нелінійної залежності (1.3), яка зв'язує змінні x і y , і множини значень змінної x , обчислених за формулою (1.35) для множини значень кута η від нуля до 2π , можна визначити у вигляді таблиці 2π -періодичну залежність $y = y[\eta]$ як функцію кута η . Далі, аналогічно, з використанням залежності (1.4), яка зв'язує змінні z, x і y , і щойно одержаної у вигляді таблиці залежності $y = y[\eta]$ можна визначити у табличному вигляді залежність $z = z[\eta]$, що теж є 2π -періодичною функцією кута η . Щоб знайти значення компонент векторів амплітуд \vec{Y}_Γ і \vec{Z}_Γ , необхідно одержані у чисельному вигляді залежності $y = y[\eta]$ і $z = z[\eta]$ розкласти у ряди Фур'є за формулами вигляду (1.18):

$$Y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y[\eta] d\eta; \quad Y_{cv} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y[\eta] \cos v\eta d\eta; \quad (1.36a)$$

$$Y_{sv} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y[\eta] \sin v\eta d\eta;$$

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z[\eta] d\eta; \quad Z_{cv} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} z[\eta] \cos v\eta d\eta; \quad (1.36b)$$

$$Z_{sv} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} z[\eta] \sin v\eta d\eta; \quad v = 1, \dots, n.$$

Інтеграли у формулах (1.36) будемо обчислювати одним із відомих чисельних методів. Для цього нанесемо на період $\omega T = 2\pi$ (див. рис. 1.1) одновимірну сітку із m рівновіддалених вузлів, кількість яких має бути достатньою для забезпечення необхідної точності обчислення значень інтегралів.

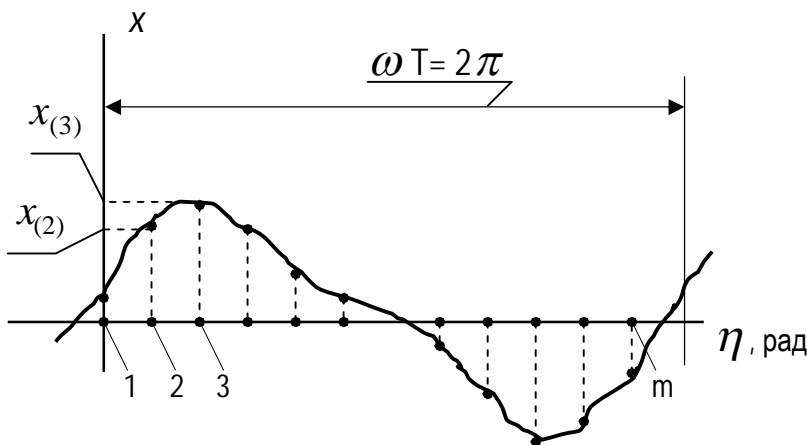


Рис. 1.1. Залежність змінної x від кутової координати η на періоді

Якщо у залежностях $x = x[\eta]$, $y = y[\eta]$ і $z = z[\eta]$ містяться тільки непарні гармоніки і вектори амплітуд мають вигляд (1.14), то в інтегралах (1.36) верхні границі інтегрування необхідно змінити із 2π на π , перед інтегралами поставити коефіцієнт 2 і одновимірну сітку із m вузлів накласти на півперіод.

Із значень функцій $x = x[\eta]$, $y = y[\eta]$ і $z = z[\eta]$ у m рівновіддалених вузлах сітки на періоді (півперіоді, якщо відшукувані функції містять тільки непарні гармоніки) утворимо вектори-стовпці

$$\vec{x}_e = \text{colon}(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(m)}); \quad (1.37a)$$

$$\vec{y}_e = \text{colon}(y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(m)}); \quad (1.37b)$$

$$\vec{z}_g = \text{colon}(z_{(1)}, z_{(2)}, \dots, z_{(m)}), \quad (1.37\text{в})$$

які назвемо *вузловими* векторами.

Значення вузлового вектора \vec{x}_g (тобто – сукупність значень змінної x у вузлах періоду) можна одержати за значенням вектора амплітуд \vec{X}_g , виконавши матричну операцію

$$\vec{x}_g = F \vec{X}_g, \quad (1.38)$$

де

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \cos \eta_{(1)} & \sin \eta_{(1)} & \cos 2\eta_{(1)} & \sin 2\eta_{(1)} & \cdots & \cos n\eta_{(1)} & \sin n\eta_{(1)} \\ 1 & \cos \eta_{(2)} & \sin \eta_{(2)} & \cos 2\eta_{(2)} & \sin 2\eta_{(2)} & \cdots & \cos n\eta_{(2)} & \sin n\eta_{(2)} \\ \vdots & & & & & & & \\ 1 & \cos \eta_{(j)} & \sin \eta_{(j)} & \cos 2\eta_{(j)} & \sin 2\eta_{(j)} & \cdots & \cos n\eta_{(j)} & \sin n\eta_{(j)} \\ \vdots & & & & & & & \\ 1 & \cos \eta_{(m)} & \sin \eta_{(m)} & \cos 2\eta_{(m)} & \sin 2\eta_{(m)} & \cdots & \cos n\eta_{(m)} & \sin n\eta_{(m)} \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

– матриця із розмірами $m \times N_g$, елементами якої є одиниці у першому стовпцю і у інших стовпцях – чисельні значення тригонометричних функцій $\cos v\eta$, $\sin v\eta$ ($v = 1, \dots, n$) у m вузлах сітки на періоді.

Маючи обчислене за формулою (1.38) значення вузлового вектора \vec{x}_g , структура якого задається формулою (1.37а), визначаємо значення вузлових векторів \vec{y}_g і \vec{z}_g , структури яких задаються формулами (1.37б) і (1.37в), у такому порядку :

1) за значеннями 1-ої, 2-ої, ..., m -ої компонент вектора \vec{x}_g і за залежністю (1.3) визначаємо значення 1-ої, 2-ої, ..., m -ої компонент вектора \vec{y}_g ;

2) за значеннями 1-ої, 2-ої, ..., m -ої компонент векторів \vec{x}_g і \vec{y}_g і за залежністю (1.4) визначаємо значення 1-ої, 2-ої, ..., m -ої компонент вектора \vec{z}_g .

Обчислення значень векторів \vec{y}_g і \vec{z}_g за значенням вектора \vec{x}_g є реалізацією так званої “миттєвої” моделі процесу на періоді (півперіоді): за миттєвими значеннями незалежної змінної x у вузлах періоду (півперіоду) визначаються миттєві значення у цих же вузлах залежних змінних y і z .

За знайденими описаним способом значеннями вузлових векторів \vec{y}_g і \vec{z}_g можна обчислити значення відповідних їм векторів амплітуд \vec{Y}_g і \vec{Z}_g . Кожну із компонент цих векторів слід визначати за формулами (1.36), застосовуючи котрийсь

із відомих чисельних методів обчислення значень визначених інтегралів. Так, для компонент вектора \vec{Y}_Γ запишемо

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y d\eta \approx \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{m} (\xi_{(1)} y_{(1)} + \xi_{(2)} y_{(2)} + \dots \\
 &\quad \dots + \xi_{(m)} y_{(m)}) = \frac{1}{m} (\xi_{(1)} y_{(1)} + \xi_{(2)} y_{(2)} + \dots + \xi_{(m)} y_{(m)}); \\
 Y_{cv} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos v\eta d\eta \approx \frac{1}{\pi} \frac{2\pi}{m} (\xi_{(1)} y_{(1)} \cos v\eta_{(1)} + \\
 &\quad + \xi_{(2)} y_{(2)} \cos v\eta_{(2)} + \dots + \xi_{(m)} y_{(m)} \cos v\eta_{(m)}) = \\
 &= \frac{2}{m} (\xi_{(1)} y_{(1)} \cos v\eta_{(1)} + \xi_{(2)} y_{(2)} \cos v\eta_{(2)} + \dots \\
 &\quad \dots + \xi_{(m)} y_{(m)} \cos v\eta_{(m)}); \\
 Y_{sv} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin v\eta d\eta \approx \frac{1}{\pi} \frac{2\pi}{m} (\xi_{(1)} y_{(1)} \sin v\eta_{(1)} + \\
 &\quad + \xi_{(2)} y_{(2)} \sin v\eta_{(2)} + \dots + \xi_{(m)} y_{(m)} \sin v\eta_{(m)}) = \\
 &= \frac{2}{m} (\xi_{(1)} y_{(1)} \sin v\eta_{(1)} + \xi_{(2)} y_{(2)} \sin v\eta_{(2)} + \dots \\
 &\quad \dots + \xi_{(m)} y_{(m)} \sin v\eta_{(m)}), \tag{1.40}
 \end{aligned}$$

де $\eta_{(1)}, \eta_{(2)}, \dots, \eta_{(m)}$ - значення кута η в $1, 2, \dots, m$ вузлах періоду (півперіоду);

$\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(m)}$ - вагові коефіцієнти вибраної квадратурної формули (формули обчислення значення визначеного інтегралу). При використанні квадратурної формули прямокутників чи трапецій $\xi_{(1)} = \xi_{(2)} = \dots = \xi_{(m)} = 1$; якщо застосувати квадратурну формулу Сімпсона, то число вузлів m на періоді (півперіоді) має бути парним і $\xi_{(1)} = 2/3, \xi_{(2)} = 4/3, \dots, \xi_{(m-1)} = 2/3, \xi_{(m)} = 4/3$.

Обчислення за формулами вигляду (1.40) значень всіх компонент векторів \vec{Y}_Γ і \vec{Z}_Γ можна здійснити шляхом виконання таких матричних операцій:

$$\vec{Y}_\Gamma = G \vec{y}_\epsilon; \quad \vec{Z}_\Gamma = G \vec{z}_\epsilon, \tag{1.41 а, б}$$

де

$$G = \frac{2}{m} \Theta F^T \xi_\eta \tag{1.42}$$

– матриця із розмірами $N_g \times m$;

$$\Theta = \text{diag} \left(\frac{1}{2}, 1, 1, \dots, 1 \right) \quad (1.43)$$

– діагональна матриця із розміром N_g ;

F^T – матриця, транспонована по відношенню до матриці (1.39);

ξ_η – діагональна матриця порядку m , елементами діагоналі якої є вагові коефіцієнти вибраної квадратурної формули.

Матриці F і G назвемо *матрицями гармонічних перетворень*, зокрема G - *матрицею прямого гармонічного перетворення* (від значень у вузлах періоду чи півперіоду до значень амплітуд гармонік) і F - *матрицею оберненого гармонічного перетворення* (від значень амплітуд гармонік до значень у вузлах). Ці матриці є постійними, при розв'язанні кожної конкретної задачі для заданих значень n і m значення цих матриць обчислюють тільки один раз і зберігають незмінними до кінця обчислень при цих значеннях n і m .

Вирази (1.39) і (1.42) для матриць гармонічних перетворень відповідають випадкові, коли амплітуди гармонік мають постійні складові і всі гармоніки до n -ої включно. Якщо ж у обчисленнях використовуються скорочені вектори амплітуд, то замість матриць F і G у формулах (1.39) і (1.42) мають бути скорочені матриці гармонічних перетворень $F_{ск}$ і $G_{ск}$. Матрицю $F_{ск}$ можна одержати із матриці F шляхом вилучення із неї тих стовпців, які відповідають компонентам вектора амплітуд, які вилучаються при утворенні скороченого вектора амплітуд. Так, якщо скорочений вектор амплітуд має вигляд (1.14), тобто має у своєму складі гармоніки тільки непарних порядків, то матриця $F_{ск}$ приймає вигляд

$$F_{ск} = \begin{pmatrix} \cos \eta_{(1)} & \sin \eta_{(1)} & \cos 3\eta_{(1)} & \sin 3\eta_{(1)} & \cdots & \cos n\eta_{(1)} & \sin n\eta_{(1)} \\ \cos \eta_{(2)} & \sin \eta_{(2)} & \cos 3\eta_{(2)} & \sin 3\eta_{(2)} & \cdots & \cos n\eta_{(2)} & \sin n\eta_{(2)} \\ \vdots & & & & & & \\ \cos \eta_{(j)} & \sin \eta_{(j)} & \cos 3\eta_{(j)} & \sin 3\eta_{(j)} & \cdots & \cos n\eta_{(j)} & \sin n\eta_{(j)} \\ \vdots & & & & & & \\ \cos \eta_{(m)} & \sin \eta_{(m)} & \cos 3\eta_{(m)} & \sin 3\eta_{(m)} & \cdots & \cos n\eta_{(m)} & \sin n\eta_{(m)} \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

При обчисленні значення цієї матриці треба пам'ятати, що кутова координата m – го вузла $\eta_{(m)} = \pi(m-1)/m$, тобто сітка із m вузлів наноситься на півперіод, і що n - число непарне.

Матрицю $G_{ск}$ можна одержати за формулою (1.42), якщо у ній замість матриці F^T підставити матрицю $F_{ск}^T$ і замість матриці Θ - матрицю $\Theta_{ск}$, яка утворюється із матриці Θ шляхом вилучення із неї рядків і стовпців з номерами

елементів, що вилучаються із вектора амплітуд при утворенні скороченого вектора амплітуд. У випадку, коли скорочені вектори амплітуд мають амплітуди гармонік тільки непарних порядків, матриця Θ є одиничною матрицею.

Описаний вище алгоритм обчислення значень векторів амплітуд \vec{Y}_Γ і \vec{Z}_Γ за заданим значенням вектора амплітуд \vec{X}_Γ , тобто розрахунку однієї "точки" гармонічної характеристики (1.19), назовемо *алгоритмом 1.1*. Його операції можна описати такою послідовністю директив:

а) для заданого значення вектора амплітуд \vec{X}_Γ за формулою (1.38) визначити значення вузлового вектора \vec{x}_ϵ ;

б) за значеннями компонент вектора \vec{x}_ϵ і формулами (1.3) і (1.4), які можуть бути задані як аналітично, так і у табличному вигляді, обчислити значення всіх компонент вузлових векторів \vec{y}_ϵ і \vec{z}_ϵ (ця директива - обчислення значень вузлових векторів \vec{y}_ϵ і \vec{z}_ϵ за значенням вузлового вектора \vec{x}_ϵ - є реалізацією миттєвої на періоді (чи півперіоді) моделі процесу);

в) за формулами (1.41) і значеннями обчислених згідно із п. "б" цього алгоритму векторів \vec{y}_ϵ і \vec{z}_ϵ обчислити значення векторів амплітуд \vec{Y}_Γ і \vec{Z}_Γ .

1.4. Алгоритм обчислення значень матриць диференційних гармонічних параметрів

Спочатку виведемо формули для обчислення значень диференційних параметрів гармонічних характеристик (1.19) – матриць $S_{Y\Gamma}$ і $S_{Z\Gamma}$.

Згідно із формулами (1.26), (1.38) і (1.41) маємо

$$S_{Y\Gamma} = \frac{d\vec{Y}_\Gamma}{d\vec{X}_\Gamma} = \frac{d\vec{Y}_\Gamma}{d\vec{y}_\epsilon} \frac{d\vec{y}_\epsilon}{d\vec{x}_\epsilon} \frac{d\vec{x}_\epsilon}{d\vec{X}_\Gamma} = G S_{y\epsilon} F ; \quad (1.45 \text{ а,б})$$

$$S_{Z\Gamma} = \frac{d\vec{Z}_\Gamma}{d\vec{X}_\Gamma} = \frac{d\vec{Z}_\Gamma}{d\vec{z}_\epsilon} \frac{d\vec{z}_\epsilon}{d\vec{x}_\epsilon} \frac{d\vec{x}_\epsilon}{d\vec{X}_\Gamma} = G S_{z\epsilon} F ,$$

де

$$S_{y\epsilon} = \frac{d\vec{y}_\epsilon}{d\vec{x}_\epsilon} ; \quad S_{z\epsilon} = \frac{d\vec{z}_\epsilon}{d\vec{x}_\epsilon} \quad (1.46 \text{ а,б})$$

– квадратні матриці порядку m . Вони є діагональними, тому що у вузлових векторах \vec{y}_ϵ , \vec{z}_ϵ і \vec{x}_ϵ взаємно зв'язаними є тільки їх однойменні компоненти (тобто компоненти із однаковими індексами, для одних і тих же значень кутової координати на періоді чи півперіоді). Діагональні елементи матриць (1.46) – це значення повних похідних функцій (1.3) і (1.4) за змінною x у вузлах сітки на періоді (півперіоді).

У загальному випадку, коли змінна z є функцією двох аргументів - x і y , маємо

$$S_{z\epsilon} = \frac{d\bar{z}_\epsilon}{d\bar{x}_\epsilon} = \frac{\partial \bar{z}_\epsilon}{\partial \bar{y}_\epsilon} \frac{d\bar{y}_\epsilon}{d\bar{x}_\epsilon} + \frac{\partial \bar{z}_\epsilon}{\partial \bar{x}_\epsilon} = S_{zy\epsilon} S_{y\epsilon} + S_{zx\epsilon}, \quad (1.47)$$

де

$$S_{zy\epsilon} = \frac{\partial \bar{z}_\epsilon}{\partial \bar{y}_\epsilon}; \quad S_{zx\epsilon} = \frac{\partial \bar{z}_\epsilon}{\partial \bar{x}_\epsilon} \quad (1.48 \text{ а,б})$$

– діагональні матриці порядку m , їх елементи дорівнюють відповідно значенням у вузлах сітки частинних похідних функції z за її аргументами y і x .

Отже, для обчислення за формулою (1.45) значень МДГП $S_{Y\Gamma}$ і $S_{Z\Gamma}$ необхідно спочатку обчислити значення матриць

$$S_{y\epsilon} = \text{diag} \left(\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1)}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2)}, \dots, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(m)} \right); \quad (1.49\text{а})$$

$$S_{zy\epsilon} = \text{diag} \left(\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1)}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2)}, \dots, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(m)} \right); \quad (1.49\text{б})$$

$$S_{zx\epsilon} = \text{diag} \left(\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1)}, \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2)}, \dots, \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(m)} \right). \quad (1.49\text{в})$$

Елементи цих матриць обчислюють з використанням залежностей

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}[x]; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}[x, y]; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}[x, y], \quad (1.50)$$

які отримуються шляхом диференціювання (аналітичного або чисельного) залежностей (1.3) і (1.4).

Обчислення значень діагональних елементів матриць $S_{y\epsilon}$, $S_{zy\epsilon}$ і $S_{zx\epsilon}$ за значеннями елементів вектора \bar{x}_ϵ , разом із обчисленням значень вузлових векторів \bar{y}_ϵ і \bar{z}_ϵ , є реалізацією миттєвої на періоді (півперіоді) моделі процесу

Матриці $S_{y\epsilon}$, $S_{z\epsilon}$, $S_{zy\epsilon}$ і $S_{zx\epsilon}$ назвемо матрицями диференційних параметрів характеристик (1.3) і (1.4) у вузлах сітки або *матрицями вузлових диференційних параметрів* (МВДП).

Алгоритм обчислення значення МДГП за описаним вище способом (назвемо його *алгоритмом 1.2*) може бути виражений такою послідовністю директив:

а) за заданим значенням вектора амплітуд \bar{X}_Γ і формулою (1.38) обчислити значення вузлового вектора \bar{x}_ϵ ;

б) за значенням вектора \vec{x}_e і залежністю (1.3) обчислити значення вектора \vec{y}_e (миттєва на періоді (півперіоді) модель процесу);

в) за значеннями векторів \vec{x}_e і \vec{y}_e і формулами чи алгоритмами, що апроксимують залежності (1.50), обчислити значення МВДП S_{y_e} , S_{zy_e} і S_{zx_e} (миттєва на періоді (півперіоді) модель процесу);

г) за формулами (1.47) обчислити значення МВДП S_{ze} ;

д) за формулами (1.45) обчислити значення МДГП S_{Yr} і S_{Zr} .

Розглянемо другий спосіб обчислення значень МДГП, більш економний при його чисельній реалізації – він вимагає виконання меншої кількості необхідних арифметичних операцій.

Матриця S_{Yr} , що є похідною векторної функції \vec{Y}_r за векторним аргументом \vec{X}_r , у розгорнутій формі запису має вигляд

$$S_{Yr} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_0}{\partial X_0} & \frac{\partial Y_0}{\partial X_{c1}} & \frac{\partial Y_0}{\partial X_{s1}} & \dots & \frac{\partial Y_0}{\partial X_{c\mu}} & \dots & \frac{\partial Y_0}{\partial X_{sn}} \\ \frac{\partial Y_{c1}}{\partial X_0} & \frac{\partial Y_{c1}}{\partial X_{c1}} & \frac{\partial Y_{c1}}{\partial X_{s1}} & \dots & \frac{\partial Y_{c1}}{\partial X_{c\mu}} & \dots & \frac{\partial Y_{c1}}{\partial X_{sn}} \\ \frac{\partial Y_{s1}}{\partial X_0} & \frac{\partial Y_{s1}}{\partial X_{c1}} & \frac{\partial Y_{s1}}{\partial X_{s1}} & \dots & \frac{\partial Y_{s1}}{\partial X_{c\mu}} & \dots & \frac{\partial Y_{s1}}{\partial X_{sn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Y_{sv}}{\partial X_0} & \frac{\partial Y_{sv}}{\partial X_{c1}} & \frac{\partial Y_{sv}}{\partial X_{s1}} & \dots & \frac{\partial Y_{sv}}{\partial X_{c\mu}} & \dots & \frac{\partial Y_{sv}}{\partial X_{sn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Y_{sn}}{\partial X_0} & \frac{\partial Y_{sn}}{\partial X_{c1}} & \frac{\partial Y_{sn}}{\partial X_{s1}} & \dots & \frac{\partial Y_{sn}}{\partial X_{c\mu}} & \dots & \frac{\partial Y_{sn}}{\partial X_{sn}} \end{pmatrix}. \quad (1.51)$$

Виведемо вираз для одного із елементів матриці (1.51) - частинної похідної $\partial Y_{sv} / \partial X_{c\mu}$. З урахуванням (1.36а) і (1.35) одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{sv}}{\partial X_{c\mu}} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial y}{\partial X_{c\mu}} \sin v \eta d\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{dx} \frac{\partial x}{\partial X_{c\mu}} \sin v \eta d\eta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{dx} \cos \mu \eta \sin v \eta d\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi \cos \mu \eta \sin v \eta d\eta, \end{aligned} \quad (1.52)$$

де

$$\chi = \frac{dy}{dx} = \chi[\eta] \quad (1.53)$$

– залежність від кутової координати η похідної dy/dx .

Вирази для інших елементів виводяться аналогічно. Наведемо їх тут без виведення (недовірливому читачу рекомендується їх вивести самостійно):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Y_0}{\partial X_0} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \chi d\eta; & \frac{\partial Y_0}{\partial X_{c1}} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \chi \cos \eta d\eta; \\
 \frac{\partial Y_0}{\partial X_{s1}} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \chi \sin \eta d\eta; & \frac{\partial Y_0}{\partial X_{sn}} &= \int_0^{2\pi} \chi \sin n\eta d\eta; \\
 \frac{\partial Y_{c1}}{\partial X_0} &= \int_0^{2\pi} \chi \cos \eta d\eta; & \frac{\partial Y_{c1}}{\partial X_{c1}} &= \int_0^{2\pi} \chi \cos^2 \eta d\eta; \\
 \frac{\partial Y_{c1}}{\partial X_{s1}} &= \int_0^{2\pi} \chi \cos \eta \sin \eta d\eta; & \frac{\partial Y_{c1}}{\partial X_{sn}} &= \int_0^{2\pi} \chi \cos \eta \sin n\eta d\eta; \\
 \frac{\partial Y_{s1}}{\partial X_0} &= \int_0^{2\pi} \chi \sin \eta d\eta; & \frac{\partial Y_{s1}}{\partial X_{c1}} &= \int_0^{2\pi} \chi \sin \eta \cos \eta d\eta; \\
 \frac{\partial Y_{s1}}{\partial X_{s1}} &= \int_0^{2\pi} \chi \sin^2 \eta d\eta; & \frac{\partial Y_{s1}}{\partial X_{sn}} &= \int_0^{2\pi} \chi \sin \eta \sin n\eta d\eta; \\
 \frac{\partial Y_{cv}}{\partial X_0} &= \int_0^{2\pi} \chi \cos v\eta d\eta; & \frac{\partial Y_{cv}}{\partial X_{c1}} &= \int_0^{2\pi} \chi \cos v\eta \cos \eta d\eta; \\
 \frac{\partial Y_{cv}}{\partial X_{s1}} &= \int_0^{2\pi} \chi \cos v\eta \sin \eta d\eta; & \frac{\partial Y_{cv}}{\partial X_{sn}} &= \int_0^{2\pi} \chi \cos v\eta \sin n\eta; \\
 \frac{\partial Y_{sn}}{\partial X_0} &= \int_0^{2\pi} \chi \sin n\eta d\eta; & \frac{\partial Y_{sn}}{\partial X_{c1}} &= \int_0^{2\pi} \chi \sin n\eta \cos \eta d\eta; \\
 \frac{\partial Y_{sn}}{\partial X_{s1}} &= \int_0^{2\pi} \chi \sin n\eta \sin \eta d\eta; & \frac{\partial Y_{sn}}{\partial X_{sn}} &= \int_0^{2\pi} \chi \sin^2 n\eta d\eta.
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

Апроксимуємо залежність $\chi = \chi[\eta]$ рядом Фур'є:

$$\chi[\eta] = R + \sum_{v=1}^{2n} (P_v \cos v\eta + Q_v \sin v\eta). \tag{1.55}$$

Після підстановки (1.55) у формули (1.54), виконання тригонометричних перетворень і інтегрування з використанням табличних інтегралів вирази (1.54) визначаються коефіцієнтами ряду (1.55), і матриця (1.51) приймає вигляд:

$$S_{YI} = \frac{1}{2} \times \quad (1.56)$$

$2R$	P_1	Q_1	..	P_v	Q_v	..	P_n	Q_n
$2P_1$	$2R + P_2$	Q_2	..	$P_{v-1} + P_{v+1}$	$Q_{v-1} + Q_{v+1}$..	$P_{n-1} + P_{n+1}$	$Q_{n-1} + Q_{n+1}$
$2Q_1$	Q_2	$2R - P_2$..	$-Q_{v-1} + Q_{v+1}$	$P_{v-1} - P_{v+1}$..	$-Q_{n-1} + Q_{n+1}$	$P_{n-1} - P_{n+1}$
...
$2P_v$	$P_{v-1} + P_{v+1}$	$-Q_{v-1} + Q_{v+1}$..	$2R + P_{2v}$	Q_{2v}	..	$P_{n-v} + P_{n+v}$	$Q_{n-v} + Q_{n+v}$
$2Q_v$	$Q_{v-1} + Q_{v+1}$	$P_{v-1} - P_{v+1}$..	Q_{2v}	$2R - P_{2v}$..	$-Q_{n-v} + Q_{n+v}$	$P_{n-v} - P_{n+v}$
...
$2P_n$	$P_{n-1} + P_{n+1}$	$-Q_{n-1} + Q_{n+1}$..	$P_{n-v} + P_{n+v}$	$-Q_{n-v} + Q_{n+v}$..	$2R + P_{2n}$	Q_{2n}
$2Q_n$	$Q_{n-1} + Q_{n+1}$	$P_{n-1} - P_{n+1}$..	$Q_{n-v} + Q_{n+v}$	$P_{n-v} - P_{n+v}$..	Q_{2n}	$2R - P_{2n}$

Усі коефіцієнти ряду (1.55) до $2n$ -ої гармоніки можна обчислити, за аналогією з формулами (1.41), шляхом виконання такої матричної операції

$$\vec{V}_{YI} = G_{2n} \vec{v}_{y\theta}, \quad (1.57)$$

де

$$\vec{V}_{YI} = colon(R, P_1, Q_1, \dots, P_v, Q_v, \dots, P_{2n}, Q_{2n}) \quad (1.58)$$

– вектор амплітуд розмірності $1 + 4n$, утворений із коефіцієнтів ряду (1.55);

$$\vec{v}_{y\theta} = colon\left(\frac{dy}{dx} \Big|_{(1)}, \frac{dy}{dx} \Big|_{(2)}, \dots, \frac{dy}{dx} \Big|_{(m)}\right) \quad (1.59)$$

– вектор-стовпець, компонентами якого є діагональні елементи матриці (1.49 а);

G_{2n} – матриця прямого гармонічного перетворення вигляду (1.42), але яка має не $N_g = 1 + 2n$, а $N_{g1} = 1 + 4n$ рядків.

Формули для обчислення значень матриці S_{ZI} одержуємо аналогічно, тільки при обчисленні значення вектора \vec{V}_{ZI} вигляду (1.58) за формулою, аналогічною до формули (1.57), вектор $\vec{v}_{z\theta}$ утворюють за правилом

$$\vec{V}_{ze} = \text{colon} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1)} \cdot \frac{dy}{dx} \Big|_{(1)} + \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1)}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(m)} \cdot \frac{dy}{dx} \Big|_{(m)} + \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(m)} \right). \quad (1.60)$$

Алгоритм обчислення значення МДГП описаним вище способом (алгоритм 1.3) можна виразити такою послідовністю директив:

а) за заданим значенням вектора амплітуд \vec{X}_r і за формулою (1.38) обчислюють значення вузлового вектора \vec{x}_e ;

б) за значенням вектора \vec{x}_e і з використанням залежності (1.3) обчислюють значення вузлового вектора \vec{y}_e (миттєва модель процесу);

в) за значеннями векторів \vec{x}_e , \vec{y}_e і виразами для похідних (1.50) обчислюють значення векторів (1.59) і (1.60) (миттєва модель процесу);

г) за формулою вигляду (1.57) обчислюють значення векторів \vec{V}_{Yr} і \vec{V}_{Zr} ;

д) за компонентами векторів \vec{V}_{Yr} і \vec{V}_{Zr} і формулою (1.56) обчислюють значення всіх елементів матриць S_{Yr} і S_{Zr} .

Алгоритм 1.3 обчислення значення МДГП порівняно з алгоритмом 1.2 реалізується більш об'ємною комп'ютерною програмою, проте він економніший щодо витрат машинного часу. Дійсно, кількість множень при виконанні матричних операцій за формулою (1.45) пропорційна до $(1 + 2n)^2$, тоді як при визначенні за формулою (1.57) коефіцієнтів ряду (1.55) у вигляді векторів (1.58) кількість множень є пропорційною до $1 + 4n$.

Якщо у задачі фігурують тільки скорочені вектори амплітуд, то і МДГП, які їм відповідають, є теж скороченими. Скорочена МДГП

$$S_{Yr} = \frac{d\vec{Y}_{rc}}{d\vec{X}_{rc}}$$

може бути отримана із (1.51) шляхом вилучення у ній тих рядків і стовпців, які відповідають вилученим амплітудам гармонік при утворенні скорочених векторів амплітуд.

Відзначимо деякі властивості МДГП.

Важлива властивість МДГП – її симетрія. Так, якщо матрицю S_{Yr} розділити на чотири блоки S_{11} , S_{12} , S_{21} , S_{22} (в формулі (1.56) це зроблено подвійними лініями)

$$S_{Yr} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{array}{cc} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{array} \right\|, \quad (1.61)$$

то S_{22} є квадратною симетричною матрицею і $S_{21} = S_{12}^T$. Цю властивість симетрії слід враховувати при обчисленні матриці S_{YF} : обчислювати тільки елементи матриці, що розташовані на її діагоналі і зверху (чи знизу) від діагоналі, а інші елементи – шляхом простого присвоєння значення відповідного елемента з іншої половини матриці.

Симетрія матриці S_{22} є наслідком симетрії взаємних зв'язків безконечно малих приростів гармонік різних порядків залежностей (1.7) і (1.5). Той факт, що є однаковими елементи $\partial Y_{s\mu} / \partial X_{cv}$ і $\partial Y_{cv} / \partial X_{s\mu}$ матриці (1.51), означає, що при однакових малих приростах амплітуд X_{cv} і $X_{s\mu}$ залежності $x = x[\eta]$ малі прирости амплітуд $Y_{s\mu}$ і Y_{cv} залежності $y = y[\eta]$ також будуть однаковими.

У загальному випадку всі елементи МДГП є ненульовими, і тоді це свідчить про повний зв'язок між гармоніками усіх порядків функції і аргументу. В окремому випадку, коли залежності (1.3) і (1.4) є лінійними функціями, то у матрицях S_{YF} і S_{ZF} відмінними від нуля є тільки діагональні елементи, і при цьому всі вони однакові: лінійна залежність змінних y і z від змінної x зумовлює однаковий зв'язок усіх гармонік функції і аргументу однакових порядків.

Аналізуючи одержані формули для обчислення значень елементів МДГП, слід також відзначити дуже цікаву закономірність: елементи матриці МДГП визначаються коефіцієнтами ряду (1.55) тільки до $2n$ -ої гармоніки включно, а кожен із елементів визначається одним із цих коефіцієнтів або сумою чи різницею тільки двох із них.

У першому наближенні МДГП S_{YF} зв'язує вектори малих приростів $\Delta \vec{X}_F$ і $\Delta \vec{Y}_F$ векторів амплітуд \vec{X}_F і \vec{Y}_F :

$$\Delta \vec{Y}_F = S_{YF} \Delta \vec{X}_F . \quad (1.62)$$

Отже, малий приріст амплітуди будь-якої гармоніки змінної y (як функції) складається із доданків, кожен із яких – це внесок малого приросту амплітуди відповідної гармоніки змінної x (аргументу). Так, малий приріст ΔY_{c1} (приріст косинусної амплітуди першої гармоніки змінної y) визначається за формулою (нехай враховуються гармоніки тільки по 3-тю включно):

$$\begin{aligned} \Delta Y_{c1} &= \Delta Y_{c1,0} + \Delta Y_{c1,c1} + \Delta Y_{c1,s1} + \Delta Y_{c1,c2} + \Delta Y_{c1,s2} + \Delta Y_{c1,c3} + \Delta Y_{c1,s3} = \\ &= S_{YF(c1,0)} \Delta X_0 + S_{YF(c1,c1)} \Delta X_{c1} + S_{YF(c1,s1)} \Delta X_{s1} + S_{YF(c1,c2)} \Delta X_{c2} + \\ &\quad + S_{YF(c1,s2)} \Delta X_{s2} + S_{YF(c1,c3)} \Delta X_{c3} + S_{YF(c1,s3)} \Delta X_{s3} = \\ &= 2P_1 \Delta X_0 + (2R + P_2) \Delta X_{c1} + Q_2 \Delta X_{s1} + (P_1 + P_3) \Delta X_{c2} + \\ &\quad + (Q_1 + Q_3) \Delta X_{s2} + (P_2 + P_4) \Delta X_{c3} + (Q_2 + Q_4) \Delta X_{s3} , \end{aligned} \quad (1.63)$$

де

$S_{Y_{\Gamma}(c1, j)}$ ($j = 0, c1, s1, c2, s2, c3, s3$) – відповідний елемент другого рядка матриці $S_{Y_{\Gamma}}$; ΔX_j ($j = 0, c1, s1, c2, s2, c3, s3$) – прирости постійної складової і косинусних та синусних амплітуд гармонік залежності $x = x[\eta]$.

За формулою (1.63), перший доданок приросту ΔY_{c1} , що формується приростом постійної складової залежності $x = x[\eta]$, визначається тільки косинусною амплітудою першої гармоніки залежності (1.55). Другий доданок, що формується приростом косинусної амплітуди першої гармоніки залежності $x = x[\eta]$, визначається тільки постійною складовою і косинусною амплітудою другої гармоніки залежності (1.55). Третій доданок, що формується приростом синусної амплітуди першої гармоніки залежності $x = x[\eta]$, визначається тільки синусною амплітудою другої гармоніки залежності (1.55). Четвертий доданок, що формується приростом косинусної амплітуди другої гармоніки залежності $x = x[\eta]$, визначається тільки косинусними амплітудами першої і третьої гармонік залежності (1.55). П'ятий доданок, що формується приростом синусної амплітуди другої гармоніки залежності $x = x[\eta]$, визначається тільки синусними амплітудами першої і третьої гармонік залежності (1.55) і т.д.

Отже, у доданках формули (1.63) малі прирости косинусних амплітуд гармонік залежності $x = x[\eta]$ множаться тільки на косинусну амплітуду гармоніки залежності (1.55) з найближчим порядком справа або на суму косинусних амплітуд гармонік залежності (1.55) з найближчими порядками зліва і справа щодо порядку амплітуди малого приросту косинусної гармоніки залежності $x = x[\eta]$. Малі прирости синусних амплітуд гармонік залежності $x = x[\eta]$ множаться тільки синусну амплітуду гармоніки залежності (1.55) з найближчим порядком справа або на суму синусних амплітуд гармонік залежності (1.55) з найближчими порядками зліва і справа щодо порядку амплітуди малого приросту синусної гармоніки залежності $x = x[\eta]$.

Це спостереження щодо зв'язку між приростами амплітуд гармонік змінних x і y (аналогічний зв'язок є і між приростами амплітуд гармонік змінних x і z) є новим, на нього вартує звернути увагу фахівцям із проектування нелінійних пристроїв коливних систем: формування характеристик нелінійностей може дати можливість впливати на зв'язок між потрібними гармоніками змінної-аргументу і змінної-функції.

1.5. Періодичні розв'язки нелінійних систем диференційних рівнянь

У попередніх розділах ми розглянули сутність чисельного полігармонічного моделювання вимушених коливань на простому прикладі – розгляді алгоритму пошуку періодичного розв'язку нелінійного скалярного диференційного рівняння. Тепер уже можемо приступити до завдання складнішого – розгляду алгоритмів пошуку періодичних розв'язків нелінійних систем диференційних рівнянь.

1.5.1. Форма запису нелінійної системи диференціальних рівнянь

Як відзначалося у Вступі, коливання, що описуються нелінійними системами диференціальних рівнянь, можуть бути вимушеними, параметричними чи автоколиваннями. Щоб забезпечити однаковий підхід до чисельного моделювання усіх цих видів коливань з використанням уніфікованого програмного забезпечення, систему диференціальних рівнянь, що описує коливання, будемо приводити до вигляду

$$\frac{d \vec{y}}{dt} + \vec{z} - \vec{e} = 0, \quad (1.64)$$

або

$$\frac{d \vec{x}}{dt} + \vec{z} - \vec{e} = 0, \quad (1.65)$$

або

$$B \frac{d \vec{y}}{dt} + \vec{z} - \vec{e} = 0, \quad (1.66)$$

або

$$B \frac{d \vec{x}}{dt} + \vec{z} - \vec{e} = 0, \quad (1.67)$$

де

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}; \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix}; \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_k \end{pmatrix} \quad (1.68 \text{ а, б, в, г})$$

- матриці-стовпці (вектори-стовпці), кожен з яких має по k елементів, і вектор \vec{e} є вектором зовнішніх змушувальних сил;

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & & & \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{ik} \\ \vdots & & & & \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

- постійна квадратна матриця k -го порядку.

Кожне з векторних диференційних рівнянь у формах запису (1.64) – (1.67) є системою k скалярних диференційних рівнянь першого порядку.

Якщо існує періодична залежність від часу

$$\vec{x} = \vec{x}[t] = \vec{x}[t + T], \quad (1.70)$$

що задовольняє диференційне рівняння у одній із форм запису (1.64) – (1.67), то вона є його шуканим періодичним розв'язком.

У формах запису (1.64) і (1.66) під знаком похідної є не вектор \vec{x} , періодична залежність якого (1.70) є шуканим періодичним розв'язком векторного диференційного рівняння, а деякий вектор \vec{y} , який є нелінійною функцією вектора \vec{x}

$$\vec{y} = \vec{y}[\vec{x}] \quad (1.71)$$

або, у розгорнутому вигляді,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1[x_1, \dots, x_j, \dots, x_k]; \\ &\vdots \\ y_k &= y_k[x_1, \dots, x_j, \dots, x_k]. \end{aligned} \quad (1.71a)$$

Якщо у рівнянні у одній із форм запису (1.64) – (1.67) вектор зовнішніх змущувальних сил \vec{e} ненульовий і є T – періодичною функцією часу

$$\vec{e} = \vec{e}[t] = \vec{e}[t + T], \quad (1.72)$$

а вектор \vec{z} є деякою нелінійною функцією вектора \vec{x}

$$\vec{z} = \vec{z}[\vec{x}] \quad (1.73)$$

або векторів \vec{x} і \vec{y}

$$\vec{z} = \vec{z}[\vec{x}, \vec{y}], \quad (1.74)$$

то рівняння описує *вимушені коливання*.

Векторна функціональна залежність (1.73), якщо її записати у розгорнутій формі, має вигляд

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1[x_1, \dots, x_j, \dots, x_k]; \\ &\vdots \\ z_k &= z_k[x_1, \dots, x_j, \dots, x_k]. \end{aligned} \quad (1.73a)$$

і залежність (1.74) – вигляд

$$\begin{aligned}
z_1 &= z_1[x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, y_1, \dots, y_j, \dots, y_k]; \\
&\vdots \\
z_k &= z_k[x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, y_1, \dots, y_j, \dots, y_k].
\end{aligned}
\tag{1.74a}$$

Якщо у рівнянні однієї із форм запису (1.64) – (1.67) вектор \vec{e} нульовий і серед аргументів вектора \vec{z} є час t

$$\vec{z} = \vec{z}[\vec{x}, t] \tag{1.75}$$

або

$$\vec{z} = \vec{z}[\vec{x}, \vec{y}, t], \tag{1.76}$$

то таке рівняння може описувати *параметричні коливання*.

Розгорнута форма функціональної залежності (1.75) є такою

$$\begin{aligned}
z_1 &= z_1[x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, t]; \\
&\vdots \\
z_k &= z_k[x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, t]
\end{aligned}
\tag{1.75a}$$

і розгорнута форма залежності (1.76) – такою

$$\begin{aligned}
z_1 &= z_1[x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, y_1, \dots, y_j, \dots, y_k, t]; \\
&\vdots \\
z_k &= z_k[x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, y_1, \dots, y_j, \dots, y_k, t].
\end{aligned}
\tag{1.76a}$$

І, нарешті, якщо у рівнянні однієї із форм запису (1.64) – (1.67) вектор \vec{e} нульовий, а вектор \vec{z} серед своїх аргументів часу t не містить, тобто є функцією тільки вектора \vec{x} , як зазначено в (1.73), або векторів \vec{x} і \vec{y} , як зазначено в (1.74), то таке рівняння може описувати *автоколивання*.

1.5.2. Гармонічна алгебризація векторного диференційного рівняння

Першим етапом визначення періодичного розв'язку векторного диференційного рівняння у одній із форм запису (1.64) – (1.67) є його гармонічна алгебризація – запис алгебричного нелінійного векторного рівняння, що є гармонічним відображенням векторного диференційного рівняння.

Виконання гармонічної алгебризації скалярного диференційного рівняння викладено у розділі 1.1. Гармонічна алгебризація векторного диференційного рівнян-

ня, або ж – системи диференційних рівнянь першого порядку, проводиться аналогічно. Періодичні залежності від часу змінних x_1, \dots, x_k (вектор \vec{x}), y_1, \dots, y_k (вектор \vec{y}), z_1, \dots, z_k (вектор \vec{z}), e_1, \dots, e_k (вектор \vec{e}) апроксимуємо тригонометричними рядами вигляду (1.8) і підставляємо ці апроксимації у систему диференційних рівнянь. Після виконання операції диференціювання ця система перетворюється у систему алгебричних рівнянь, невідомими якої є амплітуди гармонік тригонометричних рядів.

Таку алгебризацію, за аналогією з викладеним у розділі 1.1 формальним правилом, можна виконати наступним чином: кожен вектор змінних у векторному диференційному рівнянні необхідно замінити вектором амплітуд і операцію диференціювання – замінити множенням зліва на кругову частоту першої гармоніки і матрицю диференціювання.

У результаті гармонічної алгебризації векторного диференційного рівняння (1.64) одержуємо векторне алгебричне рівняння

$$\omega D^* \vec{Y}_\Gamma^* + \vec{Z}_\Gamma^* - \vec{E}_\Gamma^* = 0, \quad (1.77)$$

де

$$D^* = \text{diag}(D, \dots, D, \dots, D); \quad (1.78)$$

$$\vec{Y}_\Gamma^* = \text{colon}(\vec{Y}_{1\Gamma}, \dots, \vec{Y}_{j\Gamma}, \dots, \vec{Y}_{k\Gamma}); \quad (1.79)$$

$$\vec{Z}_\Gamma^* = \text{colon}(\vec{Z}_{1\Gamma}, \dots, \vec{Z}_{j\Gamma}, \dots, \vec{Z}_{k\Gamma}); \quad (1.80)$$

$$\vec{E}_\Gamma^* = \text{colon}(\vec{E}_{1\Gamma}, \dots, \vec{E}_{j\Gamma}, \dots, \vec{E}_{k\Gamma}). \quad (1.81)$$

Коренем векторного алгебричного рівняння (1.77) є вектор

$$\vec{X}_\Gamma^* = \text{colon}(\vec{X}_{1\Gamma}, \dots, \vec{X}_{j\Gamma}, \dots, \vec{X}_{k\Gamma}). \quad (1.82)$$

Оскільки у диференційних рівняннях вигляду (1.64) – (1.67) змінні є k -компонентними векторами вигляду (1.68), то й кожен із векторів (1.79) – (1.82) складається із k компонент, кожна із яких – це вектор амплітуд вигляду (1.13). Назвемо вектори (1.79) – (1.82) *складеними векторами амплітуд*.

Формування складених векторів амплітуд із простих векторів амплітуд вигляду (1.13) способом їх послідовного запису один після одного назвемо послідовним способом формування складеного вектора амплітуд. При такому способі формування складених векторів амплітуд матриця (1.78) є блочно-діагональною, вона має по діагоналі k однакових блоків – матриць диференціювання вигляду (1.16) чи (1.17). Матрицю (1.78) назвемо *складеною матрицею диференціювання*.

Результатом гармонічної алгебризації диференційного рівняння (1.65) є алгебричне рівняння

$$\omega D^* \vec{X}_\Gamma^* + \vec{Z}_\Gamma^* - \vec{E}_\Gamma^* = 0. \quad (1.83)$$

Результатом гармонічної алгебризації диференційних рівнянь (1.66) і (1.67) є рівняння

$$\omega B_{\Gamma}^* D^* \vec{Y}_{\Gamma}^* + \vec{Z}_{\Gamma}^* - \vec{E}_{\Gamma}^* = 0 \quad (1.84)$$

і

$$\omega B_{\Gamma}^* D^* \vec{X}_{\Gamma}^* + \vec{Z}_{\Gamma}^* - \vec{E}_{\Gamma}^* = 0, \quad (1.85)$$

де

$$B_{\Gamma}^* = \begin{pmatrix} B_{11\Gamma} & \cdots & B_{1j\Gamma} & \cdots & B_{1k\Gamma} \\ \vdots & & & & \\ B_{i1\Gamma} & \cdots & B_{ij\Gamma} & \cdots & B_{ik\Gamma} \\ \vdots & & & & \\ B_{k1\Gamma} & \cdots & B_{kj\Gamma} & \cdots & B_{kk\Gamma} \end{pmatrix} \quad (1.86)$$

- постійна квадратна блочна матриця порядку kN_g . Її компонентами є блоки - діагональні матриці порядку N_g і вигляду

$$B_{ij\Gamma} = \text{diag}(b_{ij}, b_{ij}, \dots, b_{ij}), \quad (1.87)$$

що мають своїми елементами відповідні елементи матриці (1.69).

Записи нелінійних векторних алгебричних рівнянь (1.77), (1.83) – (1.85) узагальнимо одним записом

$$\vec{U}_{\Gamma}^*[\vec{X}_{\Gamma}^*] = 0. \quad (1.88)$$

У цьому розділі і у всіх наступних розділах присутність у назвах векторів амплітуд чи відповідних матриць верхнього правого індексу "*" (зірочка) несе інформацію про те, що ці вектори амплітуд чи матриці відносяться до векторного алгебричного рівняння, одержаного шляхом гармонічної алгебризації системи диференційних рівнянь, тобто є складеними.

Описану у цьому розділі гармонічну алгебризацію систем диференційних рівнянь користувачеві методу при моделюванні коливань виконувати не доводиться, якщо, як це буде показано далі:

- 1) використовується описне у главі 2 програмне забезпечення;
- 2) система диференційних рівнянь приводиться до однієї із форм (1.64) - (1.67).

У інших випадках і при необхідності детального аналізу програмних компонент наведеного у главі 2 програмного забезпечення у користувача може виникнути необхідність проведення гармонічної алгебризації розглядуваної нелінійної системи диференційних рівнянь.

1.5.3. Визначення періодичного розв'язку нелінійної системи диференційних рівнянь

Якщо векторне диференціальне рівняння описує вимушені чи параметричні коливання, то кругова частота ω основної гармоніки його періодичного розв'язку є наперед відомою. У випадку автоколивань вона є невідомою і визначається разом із амплітудами гармонік. З метою уніфікації алгоритму пошуку розв'язку, щоб він був придатний як для вимушених чи параметричних коливань, так і для автоколивань, будемо вважати ω величиною змінною і введемо вектор

$$\vec{X}^* = \begin{pmatrix} \vec{X}_\Gamma^* \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (1.89)$$

Будемо його розглядати як корінь деякого нелінійного векторного скінченного рівняння

$$\vec{U}_\omega^*[\vec{X}^*] = 0. \quad (1.90)$$

Оскільки кількість його невідомих є на одиницю більша від кількості невідомих рівняння (1.88), то при його утворенні потрібно до рівняння (1.88) додати ще одне скалярне рівняння.

Для випадку, коли остання компонента вектора (1.89) є наперед відомою і рівною заданому значенню ω_3 (вимушені чи параметричні коливання), це додаткове рівняння можна записати так

$$\omega - \omega_3 = 0 \quad (1.91)$$

або ж, у матричній формі,

$$C_{e,n} \vec{X}^* - \omega_3 = 0, \quad (1.91a)$$

де

$$C_{e,n} = \parallel 0, 0, \dots, 0, 1 \parallel \quad (1.92)$$

- матриця-рядок розміру $kN_g + 1$, утворена із нулів і однієї одиниці, яка займає останню позицію.

Якщо ж значення ω є відшукованим (автоколивання), то цим додатковим рівнянням може бути рівняння

$$C_a \vec{X}^* = 0, \quad (1.93)$$

де

$$C_a = \parallel 0, 1, 0, 0, \dots, 0 \parallel \quad (1.94)$$

- матриця-рядок розміру $kN_g + 1$, утворена із нулів і однієї одиниці, яка займає другу позицію. Вигляд цієї матриці зумовлений наступними міркуваннями.

Нелінійні автономні системи диференціальних рівнянь, що описують автоколивання, є неізохронними, тобто частота автоколивань не є заданою, а визначається внутрішніми параметрами системи, які залежать від амплітуд гармонік режимних величин коливного процесу. Оскільки такі коливання не прив'язані до будь-яких зовнішніх змушуючих сил, то часову координату початку періоду коливань можна вибрати довільно. Так, за початок періоду можна прийняти таке значення часу, при якому одна із гармонік однієї із змінних процесу проходить через нуль, і для цього потрібно косинусну амплітуду цієї гармоніки прийняти рівною нулю. Те, що у матриці-рядку (1.92) одиниця займає другу позицію, означає, що рівнянням (1.93) задається рівною нулю косинусна складова амплітуди 1-ої гармоніки X_{1c1} залежності $x_1 = x_1 [t]$, у випадку, коли враховуються постійні складові і гармоніки усіх порядків, і синусна складова амплітуди 1-ої гармоніки X_{1s1} , якщо враховуються гармоніки тільки непарних порядків.

Отже, ліва частина рівняння (1.90) при моделюванні вимушених чи параметричних нелінійних коливань має вигляд

$$\vec{U}_\omega^* [\vec{X}^*] = \left\| \begin{array}{c} \vec{U}_\Gamma^* [\vec{X}_\Gamma^*] \\ C_{\epsilon.n} \vec{X}^* - \omega_3 \end{array} \right\| \quad (1.95)$$

і при моделюванні автоколивань – вигляд

$$\vec{U}_\omega^* [\vec{X}^*] = \left\| \begin{array}{c} \vec{U}_\Gamma^* [\vec{X}_\Gamma^*] \\ C_a \vec{X}^* \end{array} \right\|. \quad (1.96)$$

Пошук періодичного розв'язку нелінійного векторного диференціального рівняння у одній із форм запису (1.64) – (1.67) зводиться до визначення кореня \vec{X}^* нелінійного векторного скінченного рівняння (1.90). Спочатку будемо шукати наближене значення цього кореня і потім проведемо його уточнення.

Для одержання наближеного значення кореня рівняння (1.90) використаємо метод продовження за параметром у наступній модифікації [48]. Задаємося довільним початковим значенням $\vec{X}^* = \vec{X}_0^*$ і обчислюємо значення лівої частини рівняння (1.90), тобто – вектора нев'язок

$$\vec{H}_0^* = \vec{U}_\omega^* [\vec{X}^* = \vec{X}_0^*]. \quad (1.97)$$

При цьому будемо вважати, що алгоритм обчислення значень складених векторів амплітуд \vec{Y}_Γ^* і \vec{Z}_Γ^* , необхідних для обчислення $\vec{U}_\Gamma^* [\vec{X}_\Gamma^*]$, тобто лівої частини рівняння у одній із форм запису (1.77), (1.83) – (1.85), за значенням складеного вектора амплітуд \vec{X}_Γ^* , тобто розрахунку гармонічних характеристик

$$\vec{Y}_\Gamma^* = \vec{Y}_\Gamma^*[\vec{X}_\Gamma^*]; \quad \vec{Z}_\Gamma^* = \vec{Z}_\Gamma^*[\vec{X}_\Gamma^*], \quad (1.98)$$

є відомим (він буде розглянутий далі). З використанням вектора нев'язок \vec{H}_0^* утворимо нове рівняння

$$\vec{U}_\omega^*[\vec{X}^*] - (1-h)\vec{H}_0^* = 0, \quad (1.99)$$

у якому h - скалярний параметр. При $h=0$ розв'язок рівняння (1.99) відомий, це задане значення $\vec{X}^* = \vec{X}_0^*$, а при $h=1$ рівняння (1.99) стає тотожним до рівняння (1.90) і, отже, їх розв'язки співпадають. При неперервній зміні параметра h існує залежність

$$\vec{X}^* = \vec{X}^*[h], \quad (1.100)$$

яка при $h=0$ проходить через $\vec{X}^* = \vec{X}_0^*$ і при $h=1$ проходить через відшуканий корінь рівняння (1.90). Залежність (1.100) є інтегральною по відношенню до деякого векторного диференційного рівняння, яке можна одержати шляхом диференціювання за параметром h рівняння (1.99). Виконаємо це диференціювання, врахувавши, що у цьому рівнянні вектор \vec{H}_0^* є константою:

$$\frac{d\vec{U}_\omega^*}{dh} + \vec{H}_0^* = \frac{d\vec{U}_\omega^*}{d\vec{X}^*} \frac{d\vec{X}^*}{dh} + \vec{H}_0^* = 0 \quad (1.101)$$

або ж

$$W^* \frac{d\vec{X}^*}{dh} = -\vec{H}_0^*, \quad (1.102)$$

де W^* - матриця Якобі рівняння (1.90). Ця матриця має таку структуру

$$W^* = \begin{array}{|c|c|} \hline W_\Gamma^* & W_\omega^* \\ \hline \hline C & \\ \hline \end{array}, \quad (1.103)$$

де C - матриця-рядок розміру $kN_g + 1$, у випадку моделювання вимушених чи параметричних коливань це матриця $C_{g,n}$ вигляду (1.92) і у випадку моделювання автоколивань - матриця C_a вигляду (1.94);

$$W_{\Gamma}^* = \frac{\partial \vec{U}_{\Gamma}^*}{\partial \vec{X}_{\Gamma}^*} \quad (1.104)$$

– квадратна матриця розміру $kN_g \times kN_g$;

$$W_{\omega}^* = \frac{\partial \vec{U}_{\Gamma}^*}{\partial \omega} \quad (1.105)$$

– матриця-стовпець розміру kN_g .

Розкриємо зміст матриць W_{Γ}^* і W_{ω}^* .

Якщо рівняння (1.88) має вигляд (1.77), то, з урахуванням, що вектор \vec{E}_{Γ}^* є незмінним, одержимо

$$W_{\Gamma}^* = \frac{d}{d \vec{X}_{\Gamma}^*} (\omega D^* \vec{Y}_{\Gamma}^* + \vec{Z}_{\Gamma}^* - \vec{E}_{\Gamma}^*) = \omega D^* S_{Y\Gamma}^* + S_{Z\Gamma}^* , \quad (1.106)$$

де

$$S_{Y\Gamma}^* = \frac{d \vec{Y}_{\Gamma}^*}{d \vec{X}_{\Gamma}^*}; \quad S_{Z\Gamma}^* = \frac{d \vec{Z}_{\Gamma}^*}{d \vec{X}_{\Gamma}^*} \quad (1.107)$$

– матриці, що являють собою диференційні параметри гармонічних характеристик (1.98) ;

$$W_{\omega}^* = \frac{d}{d \omega} (\omega D^* \vec{Y}_{\Gamma}^* + \vec{Z}_{\Gamma}^* - \vec{E}_{\Gamma}^*) = D^* \vec{Y}_{\Gamma}^* . \quad (1.108)$$

Якщо рівняння (1.88) має вигляд (1.83), то

$$W_{\Gamma}^* = \omega D^* + S_{Z\Gamma}^*; \quad W_{\omega}^* = D^* \vec{X}_{\Gamma}^* . \quad (1.109)$$

Якщо рівняння (1.88) має вигляд (1.84), то

$$W_{\Gamma}^* = \omega B_{\Gamma}^* D^* S_{Y\Gamma}^* + S_{Z\Gamma}^*; \quad W_{\omega}^* = B_{\Gamma}^* D^* \vec{Y}_{\Gamma}^* . \quad (1.110)$$

Якщо рівняння (1.88) має вигляд (1.85), то

$$W_{\Gamma}^* = \omega B_{\Gamma}^* D^* + S_{Z\Gamma}^*; \quad W_{\omega}^* = B_{\Gamma}^* D^* \vec{X}_{\Gamma}^* . \quad (1.111)$$

Диференційне рівняння (1.102) інтегруємо одним із чисельних методів від значення $h = 0$ і початкових умов $\vec{X}^* = \vec{X}_0^*$ до $h = 1$. Одержане при

$h = 1$ значення \vec{X}^* приймаємо як "гарне" початкове наближення для уточнення рішення рівняння (1.90) ітераційним методом Ньютона за формулами

$$\begin{aligned} W_{(l)}^* \Delta \vec{X}_{(l)}^* &= \vec{H}_{(l)}^*; \\ \vec{X}_{(l+1)}^* &= \vec{X}_{(l)}^* - \Delta \vec{X}_{(l)}^*, \end{aligned} \quad (1.112 \text{ а,б})$$

де l – номер ітерації; $\vec{H}_{(l)}^*$ - нев'язка рівняння (1.90) при $\vec{X}^* = \vec{X}_{(l)}^*$.

У залежності від того, який вигляд має рівняння (1.88): (1.77), (1.83), (1.84) чи (1.85), елементи W_{Γ}^* і W_{ω}^* матриці Якобі W^* обчислюються за формулами відповідно (1.106), (1.108), (1.109), (1.110) і (1.111), а вектор нев'язок – відповідно за формулами

$$\vec{H}_{(l)}^* = \left\| \begin{array}{c} \omega D^* \vec{Y}_{\Gamma(l)}^* + \vec{Z}_{\Gamma(l)}^* - \vec{E}_{\Gamma}^* \\ C \vec{X}^* \end{array} \right\|; \quad (1.113\text{а})$$

$$\vec{H}_{(l)}^* = \left\| \begin{array}{c} \omega D^* \vec{X}_{\Gamma(l)}^* + \vec{Z}_{\Gamma(l)}^* - \vec{E}_{\Gamma}^* \\ C \vec{X}^* \end{array} \right\|; \quad (1.113\text{б})$$

$$\vec{H}_{(l)}^* = \left\| \begin{array}{c} \omega B_{\Gamma}^* D^* \vec{Y}_{\Gamma(l)}^* + \vec{Z}_{\Gamma(l)}^* - \vec{E}_{\Gamma}^* \\ C \vec{X}^* \end{array} \right\|; \quad (1.113\text{в})$$

$$\vec{H}_{(l)}^* = \left\| \begin{array}{c} \omega B_{\Gamma}^* D^* \vec{X}_{\Gamma(l)}^* + \vec{Z}_{\Gamma(l)}^* - \vec{E}_{\Gamma}^* \\ C \vec{X}^* \end{array} \right\|. \quad (1.113\text{г})$$

Відзначимо, що у випадку розрахунку вимушених коливань і якщо при розв'язанні рівняння (1.90) задатися початковими значеннями $\vec{X}_{\Gamma}^* = 0$ і $\omega = \omega_3$ (при цьому складені вектори амплітуд \vec{Y}_{Γ}^* і \vec{Z}_{Γ}^* будуть нульовими і вектор \vec{X}^* матиме значення $\vec{X}^* = \text{colon}(\vec{0}^*, \omega_3)$, де $\vec{0}^*$ - нульовий складений вектор амплітуд), то вектор нев'язок прийме значення $\vec{H}_0^* = -\text{colon}(\vec{E}_{\Gamma}^*, 0)$ і рівняння (1.102) – вигляд

$$W^* \frac{d\vec{X}^*}{dh} = \left\| \begin{array}{c} \vec{E}_{\Gamma}^* \\ 0 \end{array} \right\|. \quad (1.102\text{а})$$

У цьому випадку залежність (1.100) буде представляти собою h -характеристику (див. розділ 1.2), яка при $h=0$ проходить через значення вектора $\vec{X}^* = colon(\vec{0}^*, \omega_3)$ і при $h=1$ – через корінь рівняння (1.90).

1.5.4. Гармонічні характеристики і їх диференційні параметри

Для обчислення за формулами (1.113) значень векторів нев'язок при уточненні розв'язків рівняння (1.88) методом Ньютона, а також при обчисленні значення вектора нев'язок (1.97) при чисельному інтегруванні диференційного рівняння (1.102) потрібно за значенням вектора \vec{X}_Γ^* обчислювати значення векторів \vec{Y}_Γ^* і \vec{Z}_Γ^* . Вектори \vec{X}_Γ^* , \vec{Y}_Γ^* і \vec{Z}_Γ^* зв'язують гармонічні характеристики (1.98). Їх розрахунок виконується у послідовності, яку задають наступні формули:

$$\vec{x}_e^* = F^* \vec{X}_\Gamma^*; \quad \vec{y}_e^* = \vec{y}_e^*[\vec{x}_e^*]; \quad \vec{z}_e^* = \vec{z}_e^*[\vec{x}_e^*, \vec{y}_e^*]; \quad (1.114 \text{ а, б, в})$$

$$\vec{Y}_\Gamma^* = G^* \vec{y}_e^*; \quad \vec{Z}_\Gamma^* = G^* \vec{z}_e^*, \quad (1.115 \text{ а, б})$$

де G^*, F^* - складені матриці прямого і оберненого гармонічних перетворень;

$\vec{x}_e^*, \vec{y}_e^*, \vec{z}_e^*$ - вектори, утворені із значень компонент функцій $\vec{x} = \vec{x}[\eta]$, $\vec{y} = \vec{y}[\eta]$, $\vec{z} = \vec{z}[\eta]$ у вузлах сітки на періоді (а якщо враховуються тільки непарні гармоніки – то на півперіоді), тобто із значень компонент векторів (1.68).

Назвемо вектори $\vec{x}_e^*, \vec{y}_e^*, \vec{z}_e^*$ складеними вузловими векторами. Їх можна утворювати із значень компонент векторів (1.68) різними способами. Можливим способом формування складених вузлових векторів є послідовний спосіб:

$$\begin{aligned} \vec{a}_e^* &= colon(\vec{a}_{1e}, \dots, \vec{a}_{je}, \dots, \vec{a}_{ke}); \\ \vec{a}_{je} &= colon(a_{j(1)}, a_{j(2)}, \dots, a_{j(m)}); \end{aligned} \quad (1.116)$$

$$a = x, y, z.$$

За таким способом складений вузловий вектор утворюється із простих вузлових векторів вигляду (1.37), що відносяться відповідно до 1-ої, 2-ої, ..., k -ої компоненти вектора \vec{a} . При такому формуванні складених вузлових векторів складені матриці гармонічних перетворень F^* і G^* , що використовуються у формулах (1.114) і (1.115), мають вигляд

$$F^* = diag(F, \dots, F, \dots, F); \quad (1.117a)$$

$$G^* = diag(G, \dots, G, \dots, G). \quad (1.117b)$$

При цьому матриця F^* має k однакових блоків, якими є матриця F вигляду (1.39) чи (1.44), а матриця G^* має k однакових блоків, якими є матриця G вигляду (1.42), як показано на рисунках 1.2 і 1.3.

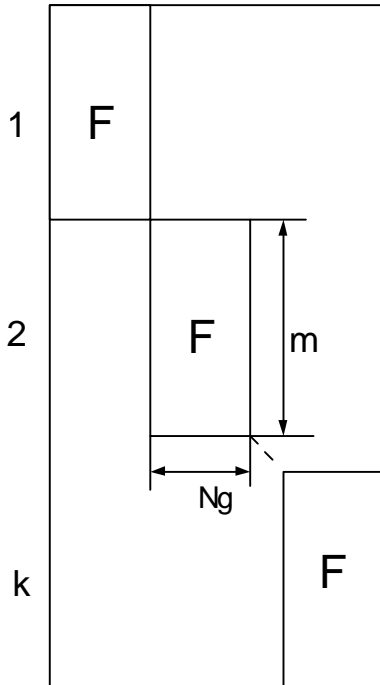


Рис. 1.2. Структура матриці вигляду(1.117а)

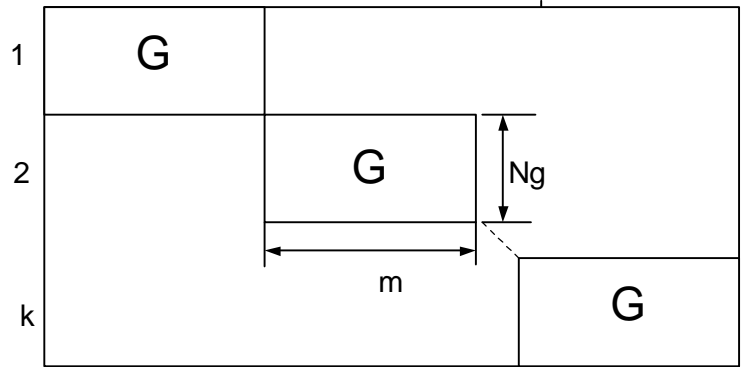


Рис. 1.3. Структура матриці вигляду (1.117б)

Другим можливим способом формування складених вузлових векторів є паралельний спосіб:

$$\vec{a}_e^* = colon(a_{1(1)}, a_{2(1)}, \dots, a_{k(1)}, a_{1(2)}, a_{2(2)}, \dots, a_{k(2)}, \dots, a_{1(m)}, a_{2(m)}, \dots, a_{k(m)}), \quad a = x, y, z. \quad (1.118)$$

При такому формуванні складеного вузлового вектора у якості його складових спочатку йдуть значення 1-ої, 2-ої, ..., k -ої компонент вектора \vec{a} у першому вузлі періоду (чи півперіоду, якщо враховуються тільки непарні гармоніки), далі у такому ж порядку значення цих компонент у другому, третьому і всіх інших вузлах аж до останнього – m -го вузла. Як показала практика, при програмній реалізації алгоритмів диференційного гармонічного методу доцільнішим способом утворення складених вузлових векторів є паралельний спосіб. При його використанні є дещо простішою програмна реалізація миттєвих на періоді (чи півперіоді) моделей процесів.

Для паралельного способу формування складених вузлових векторів матриця F^* має вигляд (див. рис. 1.4)

$$F^* = colon(F_1, \dots, F_\chi, \dots, F_m), \quad (1.119)$$

де F_x – блочно-діагональна матриця розмірності $k \times kN_g$, яка має k однакових блоків, кожен з яких – це матриця-рядок вигляду

$$\|1 \cos \eta_{(x)} \sin \eta_{(x)} \cos 2\eta_{(x)} \sin 2\eta_{(x)} \dots \cos n\eta_{(x)} \sin n\eta_{(x)}\|,$$

якщо у кожній змінній враховуються постійна складова і гармоніки усіх порядків, або ж вигляду

$$\|\cos \eta_{(x)} \sin \eta_{(x)} \cos 3\eta_{(x)} \sin 3\eta_{(x)} \dots \cos n\eta_{(x)} \sin n\eta_{(x)}\|,$$

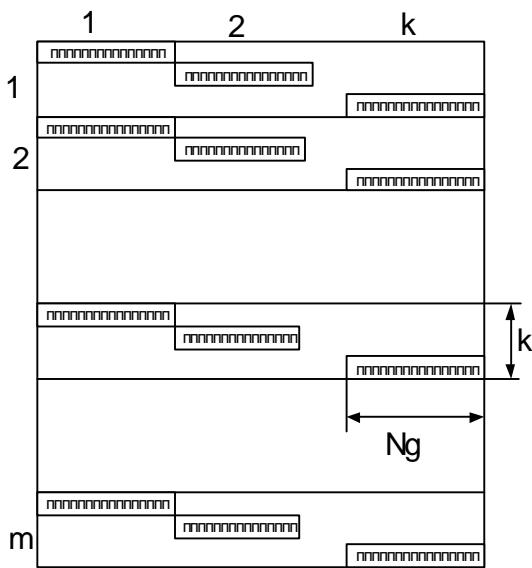


Рис. 1.4. Структура матриці вигляду (1.119).

якщо враховуються гармоніки тільки непарних порядків.

Матриця G^* для випадку, коли складені вузлові вектори мають вигляд (1.118), обчислюється за формулою

$$G^* = \frac{2}{m} \Theta^* F^{*T} \xi_\eta^*, \quad (1.120)$$

де Θ^* – блочно-діагональна матриця, складена із k однакових блоків, кожен з яких – це матриця (1.43); F^{*T} – матриця, транспонована по підношенню до матриці (1.119а);

ξ_η^* – діагональна матриця розмірності km , яка є одиничною, якщо для обчислення визначених інтегралів застосовуються чисельні методи на основі квадратурних формул прямокутників чи трапецій, і яка при використанні формули Сімпсона має вигляд

причому по діагоналі групи з однаковими числами мають по N_g елементів.

Алгоритм розрахунку гармонічних характеристик (1.98) може бути виражений такою послідовністю директив (алгоритм 1.4):

а) для заданого значення \vec{X}_r^* за формулою (1.114а) обчислити значення складеного вузлового вектора \vec{x}_g^* ;

б) за значеннями компонент вектора \vec{x}_g^* з використанням залежностей

б) за значеннями компонент вектора \vec{x}_g^* з використанням залежностей

(1.71) чи (1.74) обчислити значення компонент складених вузлових векторів \vec{y}_g^* і \vec{z}_g^* (миттєва на періоді чи півперіоді модель процесу);

в) за формулами (1.115а, б) обчислити значення векторів \vec{Y}_Γ^* і \vec{Z}_Γ^* .

При обчисленні за формулами (1.106), (1.109), (1.110) чи (1.111) значення основного блоку W_Γ^* матриці Якобі необхідно за заданим значенням вектора \vec{X}_Γ^* обчислювати значення матриць (1.107). Ці матриці складаються із k^2 блоків, кожен із яких є квадратною матрицею розмірності N_g , і мають вигляд:

$$S_{Y\Gamma}^* = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vec{Y}_{1\Gamma}}{\partial \vec{X}_{1\Gamma}} & \dots & \frac{\partial \vec{Y}_{1\Gamma}}{\partial \vec{X}_{j\Gamma}} & \dots & \frac{\partial \vec{Y}_{1\Gamma}}{\partial \vec{X}_{k\Gamma}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \vec{Y}_{j\Gamma}}{\partial \vec{X}_{1\Gamma}} & \dots & \frac{\partial \vec{Y}_{j\Gamma}}{\partial \vec{X}_{j\Gamma}} & \dots & \frac{\partial \vec{Y}_{j\Gamma}}{\partial \vec{X}_{k\Gamma}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \vec{Y}_{k\Gamma}}{\partial \vec{X}_{1\Gamma}} & \dots & \frac{\partial \vec{Y}_{k\Gamma}}{\partial \vec{X}_{j\Gamma}} & \dots & \frac{\partial \vec{Y}_{k\Gamma}}{\partial \vec{X}_{k\Gamma}} \end{vmatrix}; \quad (1.121)$$

$$S_{Z\Gamma}^* = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vec{Z}_{1\Gamma}}{\partial \vec{X}_{1\Gamma}} & \dots & \frac{\partial \vec{Z}_{1\Gamma}}{\partial \vec{X}_{j\Gamma}} & \dots & \frac{\partial \vec{Z}_{1\Gamma}}{\partial \vec{X}_{k\Gamma}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \vec{Z}_{j\Gamma}}{\partial \vec{X}_{1\Gamma}} & \dots & \frac{\partial \vec{Z}_{j\Gamma}}{\partial \vec{X}_{j\Gamma}} & \dots & \frac{\partial \vec{Z}_{j\Gamma}}{\partial \vec{X}_{k\Gamma}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \vec{Z}_{k\Gamma}}{\partial \vec{X}_{1\Gamma}} & \dots & \frac{\partial \vec{Z}_{k\Gamma}}{\partial \vec{X}_{j\Gamma}} & \dots & \frac{\partial \vec{Z}_{k\Gamma}}{\partial \vec{X}_{k\Gamma}} \end{vmatrix}. \quad (1.122)$$

Вони за визначенням є повними похідними складених векторів амплітуд \vec{Y}_Γ^* і \vec{Z}_Γ^* за складеним вектором амплітуд \vec{X}_Γ^* , тобто – диференційними параметрами гармонічних характеристик (1.98), тому назвемо їх *складеними матрицями диференційних гармонічних параметрів*.

По аналогії із формулою (1.45) значення матриць (1.121) і (1.122) можна обчислювати за формулами

$$S_{Y\Gamma}^* = G^* S_{y_g}^* F^*; \quad S_{Z\Gamma}^* = G^* S_{z_g}^* F^*, \quad (1.123)$$

де $S_{y\theta}^*$, $S_{z\theta}^*$ – складені матриці вузлових диференціальних параметрів.

Якщо складені вузлові вектори формуються за правилом (1.116), то у (1.123) матриці F^* і G^* мають вигляд (1.117), а складені матриці вузлових диференціальних параметрів $S_{y\theta}^*$, $S_{z\theta}^*$ складаються із k^2 блоків і мають вигляд

$$S_{y\theta}^* = \begin{vmatrix} S_{y\theta 1,1} & \cdots & S_{y\theta 1,j} & \cdots & S_{y\theta 1,k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_{y\theta i,1} & \cdots & S_{y\theta i,j} & \cdots & S_{y\theta i,k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_{y\theta k,1} & \cdots & S_{y\theta k,j} & \cdots & S_{y\theta k,k} \end{vmatrix}; \quad (1.124a)$$

$$S_{z\theta}^* = \begin{vmatrix} S_{z\theta 1,1} & \cdots & S_{z\theta 1,j} & \cdots & S_{z\theta 1,k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_{z\theta i,1} & \cdots & S_{z\theta i,j} & \cdots & S_{z\theta i,k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_{z\theta k,1} & \cdots & S_{z\theta k,j} & \cdots & S_{z\theta k,k} \end{vmatrix}, \quad (1.124b)$$

а їхні внутрішні блоки є діагональними матрицями такого вигляду:

$$s_{y\theta i,j} = \text{diag} \left(\left. \frac{dy_i}{dx_j} \right|_{(1)}, \left. \frac{dy_i}{dx_j} \right|_{(2)}, \dots, \left. \frac{dy_i}{dx_j} \right|_{(m)} \right); \quad (1.125 \text{ a,б})$$

$$s_{z\theta i,j} = \text{diag} \left(\left. \frac{dz_i}{dx_j} \right|_{(1)}, \left. \frac{dz_i}{dx_j} \right|_{(2)}, \dots, \left. \frac{dz_i}{dx_j} \right|_{(m)} \right).$$

Треба мати на увазі, що у загальному випадку елемент $\frac{dz_i}{dx_j}$ матриці (1.125б)

визначається за формулою

$$\frac{dz_i}{dx_j} = \frac{\partial z_i}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx_j} + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \frac{dy_j}{dx_j} + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dx_j} + \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \Big|_{\bar{y}=\text{const}}. \quad (1.126)$$

Якщо ж складені вузлові вектори формуються за правилом (1.118), то у (1.123) матриці F^* і G^* мають вигляд (1.119) і (1.120), а матриці $S_{y\theta}^*$, $S_{z\theta}^*$ є

блочно-діагональними і містять по m діагональних блоків – матриць розмірності k (див. рис. 1.5):

$$S_{y\theta}^* = \text{diag} \left(\left. \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right|_{(1)}, \left. \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right|_{(2)}, \dots, \left. \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right|_{(m)} \right); \quad (1.127a)$$

$$S_{z\theta}^* = \text{diag} \left(\left. \frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} \right|_{(1)}, \left. \frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} \right|_{(2)}, \dots, \left. \frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} \right|_{(m)} \right). \quad (1.127b)$$

У (1.127b) діагональний блок – матрицю $d\bar{z}/d\bar{x}$ – визначають за формулою

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}}. \quad (1.128)$$

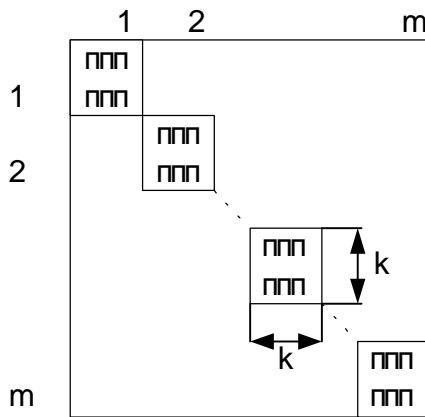


Рис. 1.5. Структура матриці вигляду (1.127)

Вигляд складеної матриці вузлових параметрів (1.127), у якій зв'язки між змінними у кожному із вузлів на періоді (чи півперіоді) компактно відображає її діагональний блок (у матрицях вигляду (1.124), структура яких відповідає послідовному способу формування складених вузлових векторів, цей зв'язок “розмазується” по її всіх блоках) і робить привабливим паралельний спосіб формування складених вузлових векторів вигляду (1.118). Саме цей спосіб вибраний при розробці відповідних процедур програмного забезпечення ДГМ, викладеного у главі 2.

Значення блоків матриць (1.121) і (1.122) можна обчислювати за алгоритмами 1.2 або 1.3. Якщо використовується алгоритм 1.2, то обчислення значення ij -го блоку матриці $S_{y\Gamma}^*$ виконується за формулою

$$S_{y\Gamma i,j} = \frac{\partial \bar{Y}_{i\Gamma}}{\partial \bar{X}_{j\Gamma}} = G S_{y\theta i,j} F. \quad (1.129)$$

Якщо ж використовувати алгоритм 1.3, то обчислення значень блоків матриць (1.121) і (1.122) здійснюємо за формулами (1.56). При цьому для обчислення значень блоків цих матриць необхідно попередньо знаходити за формулою (1.57) коефіцієнти розкладів у ряд Фур'є до $2n$ -ої гармоніки залежностей, числові значення яких у m вузлах сітки задані діагональними елементами матриць (1.125).

Алгоритм розрахунку за значенням складеного вектора амплітуд \bar{X}_Γ^* значення складеної матриці диференційних гармонічних параметрів (1.121) чи (1.122) для випадку, коли значення її внутрішніх блоків обчислюються за формулою (1.56), виразимо послідовністю таких директив (алгоритм 1.5):

а) за заданим значенням вектора \bar{X}_Γ^* за директивами а) і б) алгоритму

1.4 обчислити значення складених вузлових векторів \vec{x}_ϵ^* і \vec{y}_ϵ^* ;

б) із залежностей

$$\begin{aligned}\frac{dy_i}{dx_j} &= \frac{dy_i}{dx_j} [x_1, \dots, x_j, \dots, x_k]; \\ \frac{dz_i}{dx_j} &= \frac{dz_i}{dx_j} [x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, y_1, \dots, y_j, \dots, y_k]; \\ i, j &= 1, \dots, k,\end{aligned}\tag{1.130}$$

одержаних шляхом аналітичного чи чисельного диференціювання функцій (1.71) і (1.73) чи (1.74) і які є складовою частиною миттєвої на періоді (півперіоді) моделі процесу, обчислити значення складеної матриці вузлових диференціальних параметрів $S_{y\epsilon}^*$ (чи $S_{z\epsilon}^*$) вигляду (1.124) або (1.127);

в) із елементів внутрішніх блоків матриці $S_{y\epsilon}^*$ (чи $S_{z\epsilon}^*$) вигляду (1.124), які є діагональними матрицями, чи із елементів діагональних блоків цієї матриці, якщо вона має вигляд (1.127), сформувані вектори виглядів (1.59) і (1.60);

г) з використанням директив г) і д) алгоритму 1.3 за формулою (1.57) обчислити значення векторів $\vec{V}_{Y\Gamma}$ і $\vec{V}_{Z\Gamma}$ вигляду (1.58) для всіх значень індексів i і j ;

д) за значеннями векторів $\vec{V}_{Y\Gamma}$ і $\vec{V}_{Z\Gamma}$ вигляду (1.58) для всіх значень індексів i і j за формулою (1.56) сформувані значення всіх елементів всіх внутрішніх блоків складеної матриці диференціальних гармонічних параметрів $S_{Y\Gamma}^*$ (чи $S_{Z\Gamma}^*$).

1.5.5. Алгоритми пошуку періодичного розв'язку

Розглянемо алгоритм пошуку розв'язку рівняння вигляду (1.90). Його першою складовою є алгоритм чисельного інтегрування векторного диференціального рівняння (1.102) за початкових умов $\vec{X}^* = \vec{X}_0^*$ від $h = 0$ до $h = 1$.

Послідовність операцій на кожному кроці (підкроці) при чисельному інтегруванні диференціального рівняння (1.102) для одержання наближеного розв'язку рівняння (1.90) назвемо *алгоритмом 1.6*. Опишемо його послідовністю наступних директив:

а) для відомого із попереднього кроку значення вектора \vec{X}^* (а, отже, і \vec{X}_Γ^*) за директивами а) і б) алгоритму 1.4 обчислюють значення векторів \vec{x}_ϵ^* і \vec{y}_ϵ^* ;

в) за алгоритмом 1.5 обчислюють значення складених матриць диференціальних гармонічних параметрів $S_{Y\Gamma}^*$ і $S_{Z\Gamma}^*$;

г) за формулою (1.103) обчислюють значення матриці W^* ;

д) шляхом розв'язання (1.102) як системи лінійних рівнянь відносно похідних визначають значення вектора $d\vec{X}^*/dh$;

е) за формулою, що відповідає вибраному методів чисельного інтегрування векторного диференціального рівняння, обчислюють значення приросту $\Delta\vec{X}^*$ і нове значення (у кінці кроку) вектора \vec{X}^* .

Уточнення одержаного за алгоритмом 1.6 наближеного значення розв'язку рівняння (1.90) шукаємо ітераційним методом Ньютона за схемою (1.112). Послідовність операцій на одній ітерації є такою (алгоритм 1.7):

а) для відомого із попередньої ітерації значення вектора \vec{X}^* (а, отже, і \vec{X}_r^*) за алгоритмом 1.4 обчислити значення векторів \vec{Y}_r^* і \vec{Z}_r^* ;

б) за формулою (1.113) обчислити значення вектора нев'язок \vec{H}^* ;

в) за директивами а) – г) алгоритму 1.6 обчислити значення матриці W^* ;

г) шляхом розв'язання (1.112а) як системи лінійних рівнянь обчислити значення вектора поправок $\Delta\vec{X}^*$ і за формулою (1.112б) – поліпшене значення вектора \vec{X}^* .

Алгоритм обчислення миттєвих (для заданих моментів часу у вузлах на періоді чи півперіоді) значень змінних \vec{y} , \vec{z} і матриць $\frac{d\vec{y}}{d\vec{x}}$, $\frac{d\vec{z}}{d\vec{x}}$ за миттєвими

значеннями вектора \vec{x} у цих вузлах реалізує миттєву математичну модель на періоді чи півперіоді досліджуваного об'єкта – *миттєву модель*. Директива б) алгоритму 1.4 і директива б) алгоритму 1.5 (розділ 1.5.4) реалізують звернення до цієї моделі для обчислення значень компонент вузлових векторів \vec{y}_ϵ^* , \vec{z}_ϵ^* і матриць вузлових диференціальних параметрів $S_{y_\epsilon}^*$, $S_{z_\epsilon}^*$ у $1, \dots, m$ часових вузлах сітки на періоді (чи півперіоді) за значенням вузлового вектора \vec{x}_ϵ^* .

Алгоритм обчислення значень векторів амплітуд \vec{Y}_r^* і \vec{Z}_r^* і матриць S_{Yr}^* і S_{Zr}^* за значенням вектора амплітуд \vec{X}_r^* є математичною моделлю досліджуваного об'єкта для амплітуд гармонік його координат режиму або, коротше, його *гармонічною моделлю*. Звернення до неї здійснюють описані вище алгоритми 1.6 і 1.7.

При комп'ютерній реалізації миттєвої на періоді (чи півперіоді) моделі процесу, яка обчислює значення компонент векторів \vec{y} , \vec{z} і матриць $d\vec{y}/d\vec{x}$, $d\vec{z}/d\vec{x}$ за значенням вектора \vec{x} у всіх вузлах періоду (півперіоду), треба пам'ятати про наступне. Для більшості видів нелінійностей, які може мати коливна система, порядок обходу вузлів при виконанні цих обчислень не має значення, і вузли періоду (півперіоду) обходять у порядку від першого до останнього. Проте є такі види нелінійностей, коли необхідно починати обхід вузлів від деякого внутрішнього вузла до останнього, і потім – від першого до цього внутрішнього. Прикладами із області нелінійної електротехніки можуть слугувати миттєва модель на періоді керованого вентиля (тиристора) чи нелінійної індуктивності з характеристикою намагнічування

гістерезисного вигляду. Задачі з такими нелінійностями розглядаються далі у главах 3 і 4.

1.5.6. Дослідження стійкості нелінійних коливань

Колівання фізичної системи вважається стійким, якщо внаслідок будь-якого одиничного випадкового збурення воно відновлюється, тобто повертається до попереднього стану. Дослідження стійкості нелінійного коливання з математичного погляду – це дослідження стійкості періодичного розв'язку нелінійного векторного диференційного рівняння (тобто – системи нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку), що описує це коливання. Для цього нелінійне векторне диференціальне рівняння лінеаризують в області періодичного розв'язку і для одержаного таким чином лінійного диференційного рівняння записують відповідне йому характеристичне рівняння. Корені останнього містять у собі інформацію про досліджувану стійкість [2, 7, 8, 30, 37, 48, 52, 56, 60, 64, 66].

Розраховуючи нелінійні коливання диференціальним гармонічним методом (як і методом гармонічного балансу), періодичні розв'язки диференціальних рівнянь апроксимують рядами Фур'є – сумами гармонік різних частот, кратних до частоти основної гармоніки. Внаслідок випадкового збурення коливного процесу амплітуди гармонік цих апроксимацій стають змінними у часі. У разі стійкості періодичного процесу через певний час після збурення значення амплітуд гармонік мають усталитися і стати такими, якими вони були до збурення.

Операція гармонічної алгебризації диференціальних рівнянь (див. розділи 1.1 і 1.5.2) виконується з передумовою, що коефіцієнти рядів Фур'є (амплітуди гармонік), якими апроксимуються залежності від часу змінних величин, є сталими. І тому після диференціювання цих апроксимацій у ході алгебризації в отриманих виразах похідні не фігурують. Якщо ж вважати коефіцієнти рядів Фур'є змінними, то внаслідок диференціювання виразу (1.8) одержимо

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = \frac{dA_0}{dt} + \sum_{v=1}^n \left(\frac{dA_{cv}}{dt} \cos v\omega t - A_{cv} v\omega \sin v\omega t + \right. \\ \left. + \frac{dA_{sv}}{dt} \sin v\omega t + A_{sv} v\omega \cos v\omega t \right). \end{aligned} \quad (1.131)$$

Тоді диференціальне рівняння (1.65) перетворюється не до скінченного рівняння (1.83), а до нового диференційного рівняння

$$\frac{d\vec{X}_\Gamma^*}{dt} + \omega D \vec{X}_\Gamma^* + \vec{Z}_\Gamma^* = \vec{E}_\Gamma^* . \quad (1.132)$$

В усталеному періодичному режимі амплітуди гармонік є незмінними, тоді $d\vec{X}_\Gamma^*/dt = 0$ і рівняння (1.132) зводиться до рівняння (1.83).

З метою дослідження стійкості нелінійного коливання - усталеного періодичного режиму як розв'язку рівняння (1.132) - необхідно це рівняння у точці розв'язку

лінеаризувати. Для цього замінимо змінну \vec{X}_Γ^* її малим приростом $\Delta\vec{X}_\Gamma^*$ і порівняємо повні диференціали лівої і правої частин [64]:

$$\frac{d \Delta\vec{X}_\Gamma^*}{dt} + \omega D^* \Delta\vec{X}_\Gamma^* + \frac{d\vec{Z}_\Gamma^*}{d\vec{X}_\Gamma^*} \Delta\vec{X}_\Gamma^* = 0 . \quad (1.133)$$

З врахуванням позначень (1.107) це лінеаризоване рівняння приймає вигляд

$$\frac{d \Delta\vec{X}_\Gamma^*}{dt} + (\omega D^* + S_{Z\Gamma}^*) \Delta\vec{X}_\Gamma^* = 0 . \quad (1.133a)$$

Характеристичне рівняння, що йому відповідає, можна одержати за формулою [48]

$$\det(p \check{E} + \omega D^* + S_{Z\Gamma}^*) = 0, \quad (1.134)$$

де p - змінна характеристичного рівняння і \check{E} - одинична матриця такого ж розміру, як і матриця D^* .

Якщо розв'язуване диференційне рівняння має вигляд (1.64), то лінеаризоване рівняння для малих приростів компонент векторів амплітуд є таким

$$S_{Y\Gamma}^* \frac{d \Delta\vec{X}_\Gamma^*}{dt} + (\omega D^* S_{Y\Gamma}^* + S_{Z\Gamma}^*) \Delta\vec{X}_\Gamma^* = 0 \quad (1.135)$$

і його характеристичне рівняння можна одержати за формулою

$$\det(p S_{Y\Gamma}^* + \omega D^* S_{Y\Gamma}^* + S_{Z\Gamma}^*) = 0. \quad (1.136)$$

Шляхом розкриття детермінантів у формулах (1.134) чи (1.136) характеристичні рівняння зводяться до традиційного вигляду алгебричного рівняння

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (1.137)$$

і одержуються вирази для його коефіцієнтів a_0, a_1, \dots, a_n .

Як відомо [2, 7, 8, 30, 48, 52, 56], необхідна умова асимптотичної стійкості розв'язку задовольняється, коли усі коефіцієнти характеристичного рівняння вигляду (1.137) є дійсними і більшими від нуля (невід'ємними). При цьому аперіодичне порушення стійкості є неможливим, порушення стійкості може мати тільки коливний характер у формі так званого саморозхитування.

Достатні умови стійкості формулюють, наприклад, критерії Гурвіца (відомі ще як критерії Рауса-Гурвіца): потрібно, щоб значення всіх визначників Гурвіца (визнач-

ника матриці Гурвіца, утвореної за спеціальним правилом із коефіцієнтів характеристичного рівняння, і її діагональних (головних) мінорів) були більшими від нуля.

Із аналізу критеріїв Гурвіца відомо [48], що коли, починаючи від деякої стійкої області, змінювати параметри системи, то, у разі погіршення стійкості режиму, першими змінюють свої знаки остання (n) або передостання ($n-1$) нерівності Гурвіца. У першому випадку це відбувається, коли змінює знак вільний член характеристичного рівняння, і це означає аперіодичне порушення стійкості. Якщо ж змінює знак передостання ($n-1$) нерівність Гурвіца, тоді відбувається зміна знаку дійсної частини комплексно-спряженої пари коренів характеристичного рівняння, і це означає порушення стійкості у формі саморозхитування.

Вільний член характеристичного рівняння (1.134) виражається формулою

$$a_n = \det(\omega D^* + S_{ZT}^*) \quad (1.138)$$

і для характеристичного рівняння (1.136) - формулою

$$a_n = \det(\omega D^* S_{YT}^* + S_{ZT}^*) . \quad (1.139)$$

При розрахунку вимушених коливань і одержанні наближеного значення періодичного розв'язку методом h -характеристики, тобто числовому інтегруванні диференційного рівняння (1.102) від початкових умов при нульовому значенні складеного вектора амплітуд змінних системи, для аналізу аперіодичної стійкості потрібно на кожному кроці інтегрування тільки відстежувати знак вільного члена характеристичного рівняння. Оскільки h -характеристика починається з початкового стійкого розв'язку (відсутність коливань), то при русі вздовж неї (змушувальна сила при цьому зростає) зміна знаку вільного члена a_n з плюса на мінус означає перехід до аперіодично нестійкої частини характеристики, а наступна зміна знаку з мінуса на плюс – на відновлення аперіодичної стійкості.

Для аналізу інших видів втрати стійкості (наприклад - саморозхитування) при чисельному інтегруванні диференційного рівняння (1.102) потрібно відстежувати не тільки знак вільного члена (1.138) чи (1.139) характеристичного рівняння, а й аналізувати інші нерівності Гурвіца щодо характеристичного рівняння (1.134) чи (1.136).

Як бачимо, для аналізу стійкості нелінійних коливань, що розраховуються диференційним гармонічним методом, використовуються значення матриць диференційних гармонічних параметрів S_{YT}^* і S_{ZT}^* . При аналізі стійкості їх застосування є органічним, адже вони, за визначенням, зв'язують між собою безконечно малі прирости амплітуд гармонік. Їх значення, особливо пораховані на останній ітерації уточнення розв'язку, достатньо точно відображають зв'язки між гармоніками в околиці розв'язку, де й аналізується стійкість. При цьому також важливо, що додатково обчислювати значення матриць диференційних гармонічних параметрів для аналізу стійкості розв'язку не потрібно, бо вони обчислюються у процесі пошуку розв'язку.

1.5.7. Якщо періодичних розв'язків є більше як один

Серед множини нелінійних векторних диференціальних рівнянь вигляду (1.64) - (1.67), періодичні розв'язки яких шукаються, зустрічаються рівняння, які при певних значеннях їх параметрів можуть мати декілька періодичних розв'язків. Якщо при цьому їх відшукувати описаними вище алгоритмами, розв'язуючи нелінійні системи скінченних рівнянь, невідомими яких є амплітуди гармонік, то при отриманні першого

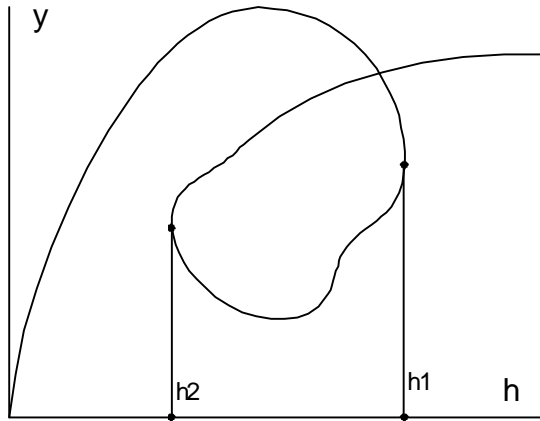


Рис. 1.6. Залежність $y = y[h]$ петлеподібного характеру

наближення шляхом розрахунку h – характеристики – чисельному інтегруванні диференціального рівняння вигляду (1.102) – виникають труднощі. Вони зумовлені тим, що для таких випадків залежності від параметру h компонент вектора \vec{X}^* , якщо їх зобразити графічно, є неоднозначними, зокрема – петлеподібними (див. рис. 1.6, там y – одна із компонент вектора \vec{X}^*). Вони проходять через точки, які є особливими: у цих точках абсолютні значення компонент похідної $d\vec{X}^*/dh$ є безконечно великими. Внаслідок цього чисельне інтегрування для одержання залежності (1.100) при підході до таких точок (наприклад – до точок $h=h_1$ чи $h=h_2$ на рис. 1.6) стає неможливим. Уникнути таких труднощів при чисельному інтегруванні можна, якщо використати спосіб, описаний у [64] і названий інвертуванням системи диференціальних рівнянь.

Суть інвертування полягає у тому, що у ході чисельного інтегрування при підході до особливої точки, коли абсолютні значення похідних за незалежною змінною h всіх інших змінних величин (тобто – всіх компонент вектора \vec{X}^*) сильно ростуть (у особливій точці вони дорівнюють безконечності), незалежну змінну h необхідно зробити залежною, а незалежною прийняти будь-яку із компонент вектора \vec{X}^* . У цій особливої точці похідні за новою незалежною змінною всіх інших величин будуть дорівнювати нулеві, і по відношенню до цієї нової незалежної змінної точка уже не є особливою.

Інвертування – заміну незалежної змінної – виконують не у самій особливої точці, а при підході до неї. Після інвертування чисельне інтегрування продовжується, але уже за цією новою незалежною змінною. При цьому початкове значення кроку можна взяти таким, що дорівнює значенню приросту, яке ця змінна одержала на попередньому кроці, коли ще була залежною змінною. Нова незалежна змінна утримує цей статус до тих пір, доки абсолютні значення похідних інших змінних за нею зменшуються. Як тільки вони починають зростати, то це вказує на можливу наявність попереду особливої точки щодо цієї змінної, і тому необхідно знову статус незалежної змінної повернути параметру h . Такий почерговий обмін статусом незалежної змінної

між параметром h і однією із компонент вектора \vec{X}^* усуває проблему проходження особливих точок.

Розглянемо, котру із компонент вектора \vec{X}^* доцільно обирати тією, що їй при інвертуванні надається статус незалежної змінної. Теоретично це може бути будь-яка компонента вектора \vec{X}^* . Однак якщо говорити про розв'язання нелінійного векторного скінченного рівняння вигляду (1.90), що є гармонічним відображенням нелінійного векторного диференційного рівняння одного з виглядів (1.64) – (1.67), то у векторах амплітуд $\vec{X}_{\Gamma_1}, \dots, \vec{X}_{\Gamma_k}$ як компонентах вектора \vec{X}^* найточніше обчислюються амплітуди гармонік першого порядку, адже при заміні визначених інтегралів сумами на їхні півхвилі приходиться найбільше вузлів (див. розділ 1.3). Тому доцільно обрати косинусну чи синусну складову першої гармоніки будь-якого із векторів амплітуд, що входять до вектора \vec{X}^* . Нехай це буде перший вектор амплітуд, що відповідає змінній x_1 . У ньому доцільно взяти другу компоненту, тоді у випадку врахування постійних складових і гармонік усіх порядків це буде косинусна складова амплітуди першої гармоніки і у випадку врахування тільки непарних гармонік – синусна складова амплітуди першої гармоніки.

Алгоритм інвертування векторного диференційного рівняння (1.102) суттєво спрощується, якщо незалежну змінну h долучити до вектора змінних \vec{X}^* у якості його додаткової компоненти. При цьому до рівняння (1.102) необхідно додати рівняння

$$dh/dh = 1. \quad (1.140)$$

На кожному кроці чисельного інтегрування значення похідних елементів вектора \vec{X}^* за змінною h обчислюються шляхом розв'язання (1.102) як системи лінійних рівнянь відносно $d\vec{X}^*/dh$ і значення похідної dh/dh – за рівнянням (1.140). Нехай при деякому значенні h вони є такими:

$$dX_{10}/dh = a; dX_{1c1}/dh = b; dX_{1s1}/dh = c; \dots; dh/dh = 1. \quad (1.141)$$

Якщо відбулося інвертування (параметр h став залежною змінною, а новою незалежною змінною – амплітуда X_{1c1}), то необхідно обчислити значення похідних усіх змінних за цією новою незалежною змінною. Їх можна обчислити за значеннями (1.141) з урахуванням формул

$$\frac{dX_{10}}{dX_{1c1}} = \frac{dX_{10}}{dh} \cdot \frac{dh}{dX_{1c1}} = \frac{dX_{10}}{dh} \Big/ \frac{dX_{1c1}}{dh};$$

$$\frac{dX_{1c1}}{dX_{1c1}} = 1;$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{1s1}}{dX_{1c1}} &= \frac{dX_{1s1}}{dh} \cdot \frac{dh}{dX_{1c1}} = \frac{dX_{1s1}}{dh} \Big/ \frac{dX_{1c1}}{dh}; \\ &\vdots \\ \frac{dh}{dX_{1c1}} &= \frac{dh}{dh} \cdot \frac{dh}{dX_{1c1}} = 1 \Big/ \frac{dX_{1c1}}{dh}. \end{aligned} \quad (1.142)$$

Ці значення будуть такими:

$$\frac{dX_{10}}{dX_{1c1}} = \frac{a}{b}; \quad \frac{dX_{1c1}}{dX_{1c1}} = 1; \quad \frac{dX_{1s1}}{dX_{1c1}} = \frac{c}{b}; \quad \dots; \quad \frac{dh}{dX_{1c1}} = \frac{1}{b}. \quad (1.143)$$

Алгоритм інвертування дозволяє при чисельному інтегруванні диференційних рівнянь одержувати залежності вигляду (1.100) незалежно від того, скільки петель мають графіки, що ілюструють ці залежності, і скільки на них є особливих точок. Таким чином, просуваючись вздовж h — характеристики (тобто – вздовж залежності $\vec{X}^* = \vec{X}^*[h]$), ми проходимо через усі періодичні розв'язки, які існують на цій траєкторії, незалежно від того, котрі із них є стійкими і котрі нестійкими.

Завершуючи розгляд алгоритму інвертування, що дозволяє виявляти періодичні розв'язки, якщо їх є більше ніж один, слід зробити такі два зауваження.

1. Якщо система диференційних рівнянь має періодичних розв'язків більше ніж один, то щоб їх виявити запропонованим методом, необхідно задати "правильне" максимальне значення параметра h при розрахунку h — характеристики. Глянемо ще раз на рис. 1.6: h — характеристика стає явною тільки після завершення чисельного інтегрування диференційного рівняння вигляду (1.102). У ході інтегрування вона проявляється поступово – крок за кроком, і якби при її одержанні такою, як вона показана на рис. 1.6, було задано максимальне значення параметру $h_{\max} \langle h_1$, то отримали б тільки верхню частину кривої і не виявили б, що вона далі поверне назад і закрутиться у вигляді петлі і що при всіх значеннях h у проміжку $h_2 \langle h \langle h_1$ система диференційних рівнянь має три періодичні розв'язки.

2. Очевидно, що просування вздовж h — характеристики з використанням алгоритму інвертування дозволяє виявляти всі періодичні розв'язки розглядуваного векторного диференційного рівняння тільки за умови, що ця характеристика є неперервною. У всіх технічних задачах, які доводилось розглядати автору цієї книжки, неперервність h — характеристик підтверджувалася.

Якби при розв'язанні деяких задач розрахунку нелінійних коливань все ж виявилось, що h — характеристика не є неперервною, то для таких випадків слід шукати інші способи пошуку усіх коренів (якщо корінь не один) векторного скінченного рівняння, яке є гармонічним відображенням розв'язуваного векторного диференційного рівняння.

Глава 2

ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО ГАРМОНІЧНОГО МЕТОДУ

2.1. Структура програмного забезпечення диференційного гармонічного методу

Читачеві, який ознайомився з попередньою главою цієї книжки, має бути очевидним, що диференційний гармонічний метод (ДГМ) як інструмент для розрахунку нелінійних коливань (тобто пошуку періодичних розв'язків нелінійних систем диференційних рівнянь, що описують ці коливання) не призначений для використання у "ручних" (неавтоматизованих) обчисленнях. Його ніша – комп'ютерне моделювання нелінійних коливань, тобто із застосуванням ЕОМ, зокрема - персонального комп'ютера (ПК) чи ноут-бука.

Обсяг підготовчих робіт до моделювання суттєво мінімізується, якщо можна користуватися заздалегідь підготовленим спеціальним програмним забезпеченням. Таке забезпечення для ДГМ є розробленим, і його основні елементи наводяться у цій і наступній главах. Використання програмного забезпечення диференційного гармонічного методу (ПЗ ДГМ) дає можливість будь-яку програму для моделювання і розрахунку пропонованим методом нелінійних коливань у тій чи іншій нелінійній системі утворювати із двох блоків програмних компонент, як це показано на рис. 2.1 :

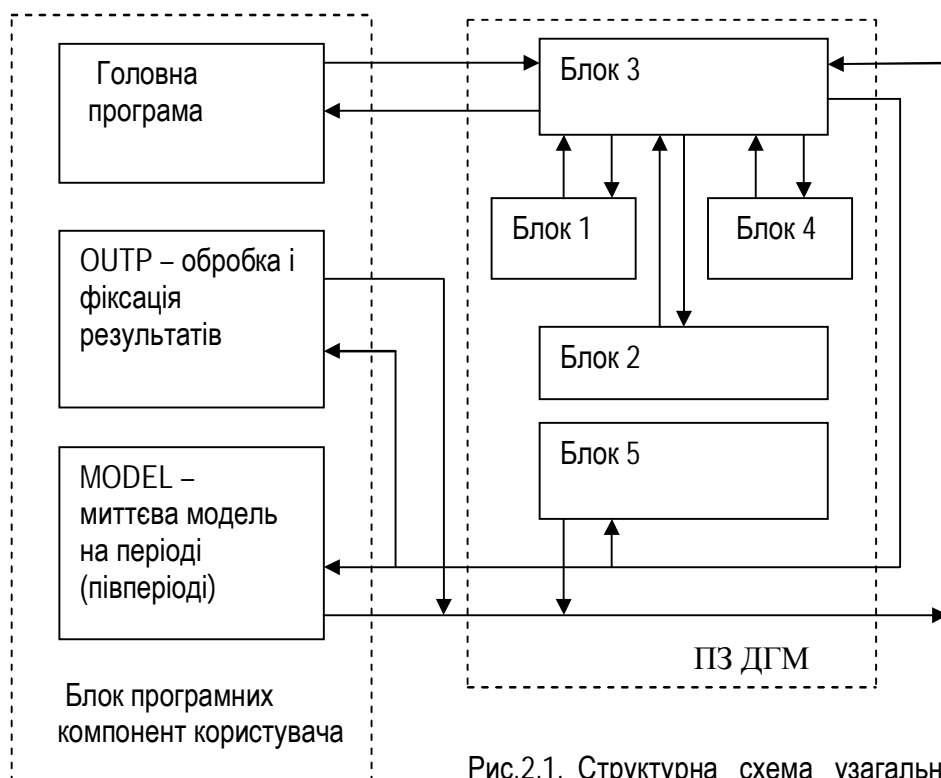


Рис.2.1. Структурна схема узагальненої програми розрахунку нелінійних коливань з використанням ПЗ ДГМ.

а) суперблоку готових програмних компонент (зовнішніх підпрограм, процедур) ПЗ ДГМ, до якого входять Блоки 1 - 5;

б) блоку програмних компонент користувача, які він створює виключно для даної конкретної задачі.

У процедурах блоків 1 – 5 ПЗ ДГМ реалізовано всі основні операції методу (їх можна розглядати як макрооперації - обчислення значень векторів амплітуд за значеннями вузлових векторів, значень вузлових векторів за значеннями векторів амплітуд, значень матриць диференційних гармонічних параметрів, інтегрування системи диференційних рівнянь, змінними яких є вектори амплітуд, як розрахунок h – характеристики тощо).

Програмні компоненти користувача реалізують те, що індивідуалізує кожну конкретну задачу із області моделювання нелінійних коливань.

У цій главі ми розглянемо програмні компоненти, що входять до Блоків 1 - 4 ПЗ ДГМ. Програмні компоненти Блоку 5 ПЗ ДГМ розглядаються у главі 3.

Всі наведені у книжці програмні компоненти ПЗ ДГМ і ілюстраційні програми написані алгоритмічною мовою Фортран-90 [43, 69]. Вони можуть транслюватися будь-яким компілятором, що налаштований на цю версію Фортрану і всі його молодші версії, наприклад – компілятором програмного комплексу *Microsoft Fortran Power Station 4.0*.

Вибір мови програмування при розробці ПЗ ДГМ був зумовлений досвідом і уподобаннями автора. Версія Фортран-90 алгоритмічної мови Фортран набула широкої популярності серед наукових і науково-технічних фахівців наприкінці минулого століття. Хоч у останні роки сімейство алгоритмічних мов поповнилося новими ефективними мовами, Фортран із ужитку не відійшов, він далі розвивається: відомі його версії Фортран-95 і Фортран-2003 [43]. Остання версія, зокрема, підтримує об'єктно-орієнтоване програмування і сумісне використання Фортрану і алгоритмічних мов C/C++.

Якщо ж симпатії читача скеровані у напрямку до інших алгоритмічних мов (Паскаль, Сі++ тощо), то зовсім нескладно перекласти записані мовою Фортран програмні компоненти ПЗ ДГМ на цю іншу алгоритмічну мову.

У ПЗ ДГМ можуть бути використані і деякі підпрограми із спеціальних бібліотек, наприклад – підпрограма для розв'язування систем лінійних рівнянь із бібліотеки NAG Mark 20 для Фортрану-90 [43] чи з будь-якої іншої подібної бібліотеки. Однак ПЗ ДГМ є достатньо автономним: при розв'язуванні багатьох задач із області нелінійних коливань, по крайній мірі тих, які розглянуті у цій книжці, удалося обійтись і без використання сторонніх підпрограм.

У цій главі наводяться повні лістинги (роздруки) програмних компонент ПЗ ДГМ, а у наступних главах – роздруки програмних компонент користувача в ілюстраційних програмах тестових задач і прикладів з їх вхідними числовими файлами. Втомливої праці введення цих текстів і даних за допомогою клавіатури у пам'ять свого ПК і пошуку можливих помилок при їх ручному введенні користувач може й уникнути: тексти записані на дискету і CD-ROM. Копії цих програмних продуктів (дискета чи CD-ROM) можуть бути надіслані читачеві, якщо їх замовити за електронною адресою видавництва alfa-pik@nbi.com.ua.

2.2. Програмні компоненти ПЗ ДГМ

Подані нижче у цій главі програмні компоненти ПЗ ДГМ згруповані у п'яти програмних блоках, як показано на рис. 2.1. Це групування є, звичайно ж, умовним – компоненти ПЗ ДГМ можна згрупувати й по іншому. За необхідності користувач може самостійно створювати й комплектувати власні блоки програмного забезпечення методу.

2.2.1. Перший програмний блок

Перший блок програмних компонент ПЗ ДГМ (назвемо його Блок 1) містить ті процедури, які реалізують операції з використанням матриць гармонічних перетворень. Це - шість процедур: *sncs*, *vgvs*, *vsvg*, *vsvgp*, *kvgvs* і *kvsVG*. Можливість доступу цих процедур до матриць гармонічних перетворень реалізована тут з використанням функції модуля алгоритмічної мови Фортран-90. Для цього у складі блоку є модуль *array*, який і робить масиви *F*, *G* і *GNP*, що зберігають значення матриць гармонічних перетворень, доступними цим процедурам.

Для компіляції програмних компонент цього блоку доцільно завантажувати їх всіх разом (у вигляді, наприклад, єдиного файлу *block1.for*), щоб не спричинювати, у разі окремої компіляції кожної програмної компоненти блоку, повідомлень компілятора на зразок "Cannot find module Array".

2.2.1.1. Модуль ARRAY

Текст модуля:

```
Module Array
!-----
! Модуль з описом масивів F, G і GNP, що зберігають
! матриці гармонічних перетворень і які мають бути
! доступними всім процедурам цього блоку
!-----
    implicit none
    real,dimension(25,150)::F,G
    real,dimension(49,150)::GNP
!-----
! Установлені тут розміри масивів дозволяють задавати
! при зверненні до процедури SNCS параметру N - номеру
! найвищої гармоніки - максимальне значення 12 (якщо
! враховуються постійні складові і всі гармоніки) чи
! значення 23 (якщо враховуються тільки непарні гармоніки).
!-----
End module Array
!--- © Copyright, 2005, Л. Глухівський
!-----
```

Модуль складається лише з описової частини. У ній описані три масиви - *F*, *G* і *GNP*, призначені для зберігання значень матриць гармонічних перетворень виглядів (1.39) чи (1.44) і (1.42). Їх значення обчислює процедура *sncs*, що входить до

Блоку 1. Значення цих матриць є доступними всім іншим процедурам цього блоку, внаслідок присутності у кожній із них оператора `Use Array`.

Розміри масивів `F`, `G` і `GNP` у цьому блоці задані такими, щоб можна було у розрахунках, при врахуванні постійних складових і гармонік всіх непарних та парних порядків, задавати максимальний порядок гармонік до 12, а при врахуванні гармонік тільки непарних порядків – до 23. У разі необхідності врахування гармонік з більш високими порядками розміри цих матриць у модулі `ARRAY` необхідно збільшувати.

Ці розміри можуть бути й зменшені, але при цьому стануть меншими від 12 чи 23, відповідно, максимальні порядки гармонік, які можна задавати.

2.2.1.2. Процедура SNCS

Текст процедури:

```

Subroutine SNCS(IG,N,NG,NG1,M)
!-----
!  Процедура обчислення розмірів M,NG,NG1 і значень
!  матриць гармонічних перетворень F, G і GNP,
!  які зберігаються у модулі Array
!-----
Use Array
!-----
implicit none
real::SM,DE,ETA,E
real,parameter::PI=3.14159
integer,intent(in)::IG,N
integer,intent(out)::NG,NG1,M
integer::i,j
!-----
! IG - кер. змінна: якщо =0, то врах. пост. складова і всі гарм.
!                якщо =1, то врах. тільки непарні гармоніки
! N - найвищий порядок гармоніки, що враховується
!-----
! NG= 2*N+1 (при IG=0) і N+1 (при IG=1)- кількість рядків
!                матриць F і G
! NG1= 4*N+1(при IG=0) і 2*N+1 (при IG=1)- кількість рядків
!                матриці GNP
! M - кількість вузлів на періоді (при IG=0) чи напівперіоді
!     (при IG=1), вона ж - кількість стовпців матриць F, G і GNP
!-----
if(IG.eq.1.or.IG.eq.0) goto 1; goto 5
1 if(IG.eq.0.and.N.gt.12) goto 10
if(IG.eq.1.and.N.gt.23) goto 20
if(IG.eq.0) then
NG=2*N+1; NG1=4*N+1
else
NG=N+1; NG1=2*N+1
end if
M=6*NG; if(M.le.24)M=24; SM=2./M
DE=PI/M; if(IG.eq.0) DE=2.*DE
if(IG.eq.1) goto 2

```

```

!-----
!--- Для врахування постійних складових і усіх гармонік
Do j=1,M
    ETA=DE*(j-1); F(1,j)=1.; G(1,j)=.5*SM
    GNP(1,j)=.5*SM
    do i=2,NG,2
        E=ETA*i/2.; F(i,j)=cos(E); F(i+1,j)=sin(E)
        G(i,j)=cos(E)*SM; G(i+1,j)=sin(E)*SM
    end do
    do i=2,NG1,2
        E=ETA*i/2.
        GNP(i,j)=cos(E)*SM; GNP(i+1,j)=sin(E)*SM
    end do
end do; goto 3
!-----
!---- Для врахування тільки непарних гармонік
2 Do j=1,M
    E=DE*(j-1); GNP(1,j)=.5*SM
    do i=1,NG,2
        F(i,j)=cos(E*i); F(i+1,j)=sin(E*i)
        G(i,j)=F(i,j)*SM; G(i+1,j)=F(i+1,j)*SM
    end do
    do i=2,NG1,2
        GNP(i,j)=cos(E*i)*SM; GNP(i+1,j)=sin(E*i)*SM
    end do
end do
3 return
!-----
!--- Повідомлення на монітор при ненормальному закінченні
5 write(*,*)' Задане Вами IG відмінне від 0 чи 1'
stop
10 write(*,*)' При IG=0 Ви задали N>12'
write(*,*)' При N>12 потрібно змінити розміри'
goto 30
20 write(*,*)' При IG=1 Ви задали N>23'
write(*,*)' При N>23 потрібно змінити розміри'
30 write(*,*)' матриць F, G і GNP'
write(*,*)' у описовій частині модуля Array'
stop
end Subroutine SNCS
! © Copyright, 2005, Л. Глухівський
!-----

```

Процедура `sncs` призначена для обчислення розмірів і значень матриць гармонічних перетворень F вигляду (1.39) чи (1.44), G вигляду (1.42) і G_{2n} (див. формулу (1.57)), які зберігаються масивами `F`, `G` і `GNP`, що описані у модулі `Array`. Для доступу до цих масивів у процедурі є оператор `use Array`.

Процедура має два вхідних параметри – `IG` і `N`.

Перший вхідний параметр `IG` є керуючою змінною, яка може мати значення 0 або 1. Присвоєння їй значення 0 означає, що у розрахунках для всіх координат модельованої системи враховуються постійні складові і гармоніки парних та непарних

порядків, а присвоєння значення 1 – що враховуються гармоніки тільки непарних порядків. Другим вхідним параметром процедури є змінна n – найвищий порядок гармоніки, що враховується; при $IG=1$ її значенням може бути тільки непарне ціле число.

Вихідними параметрами процедури є масиви F , G і G_{2n} , які зберігають значення матриць гармонічних перетворень, та розміри N_g , N_{g1} і M цих матриць.

При $IG = 0$ кількість N_g рядків матриць F вигляду (1.39) чи (1.44) і матриці G вигляду (1.42), тобто використовуваних рядків масивів F і G , визначається за формулою

$$N_g = 2n + 1, \quad (2.1)$$

і кількість рядків матриці G_{2n} , що входить до формули (1.57), тобто використовуваних рядків масиву G_{2n} , – за формулою

$$N_{g1} = 4n + 1. \quad (2.2)$$

У цих формулах n – найвищий порядок враховуваної гармоніки.

Відзначимо, що матриця F у пам'яті зберігається (масив F) у транспонованому вигляді.

При $IG = 1$ кількість рядків матриць F і G (використовуваних рядків масивів F і G) визначається за формулою

$$N_g = n + 1 \quad (2.3)$$

і кількість рядків матриці G_{2n} (використовуваних рядків масиву G_{2n}) – за формулою

$$N_{g1} = 2n + 1. \quad (2.4)$$

Кількість стовпців масивів F , G і G_{2n} , зайнятих для зберігання матриць гармонічних перетворень F , G і G_{2n} (те саме - кількість вузлів на періоді при $IG = 0$ чи кількість вузлів на півперіоді при $IG = 1$), визначається за формулою

$$M = 6N_g. \quad (2.5)$$

При цьому на півхвилю гармоніки найвищого порядку приходиться не менше від шести вузлів.

Зрозуміло, що обчислені за формулами (2.1) – (2.5) кількості рядків і стовпців не повинні виходити за межі розмірів масивів F , G і G_{2n} , визначених у модулі `Array`. Тому задане значення змінної n процедурою контролюється, і при значенні n , що перевищує максимально допустиме (12 при $IG = 0$ і 23 при $IG = 1$), обчислення припиняються з відповідним повідомленням на моніторі.

Дальше процедура `snCs` обчислює значення матриць F , G і G_{2n} , які описані у модулі `Array` як масиви F , G і G_{2n} та доступні цій процедурі завдяки оператору `Use Array`.

Значення матриць F і G обчислюються при $IG = 0$ за формулами (1.39) і (1.42) і при $IG = 1$ за формулою (1.44) і модифікованою формулою (1.42).

Значення матриці G_{2n} (масив `GNP`) обчислюється за тими ж формулами, що й матриці G . Від матриці G вона відрізняється тільки тим, що має не `NG`, а `NG1` рядків, тому що при обчисленні значень матриць диференційних гармонічних параметрів (див. далі процедури `VSVGP` і `GRPAR`) необхідно розкласти у ряд Фур'є функцію розподілу диференційних параметрів до $2 \cdot n$ -ої гармоніки.

Процедура `SNCS` має викликатися для виконання на початку розрахунку, і обчислені нею значення матриць `F`, `G` і `GNP` залишаються незмінними до кінця розрахунку, якщо у ньому не змінюється кількість враховуваних гармонік. Якщо ж кількість враховуваних гармонік змінюється, то при кожній її зміні процедура `SNCS` знову повинна викликатися для виконання.

2.2.1.3. Процедура VGVS

Текст процедури:

```

Subroutine VGVS(VG,VS,NG,M)
!-----
!  Процедура обчислення значення вузлового вектора VS
!  із розміром M за значенням вектора амплітд VG розміру NG
!  M - кількість вузлів на періоді (при IG=0) чи напівперіоді
!  (при IG=1), а також кількість стовпців матриць F, G і GNP
!-----
      Use Array
!-----
      implicit none
      integer,intent(in)::NG,M
      real,dimension(NG),intent(in)::VG
      real,dimension(M),intent(out)::VS
      integer::i,j
!-----
      Do j=1,M
         VS(j)=0.
         do i=1,NG
            VS(j)=VS(j)+VG(i)*F(i,j)
         end do
      end do
      return
end subroutine VGVS
!-- © Copyright, 2005, Л. Глухівський
!-----

```

Процедура `VGVS` призначена для виконання обчислень за формулою (1.38) – обчислення значення вузлового вектора за значенням вектора амплітуд. Необхідне для виконання операції значення матриці `F` є доступним із модуля `ARRAY`.

Перед викликом процедури формальний параметр `VG` (вектор амплітуд) повинен мати чисельне значення і повинна перед тим відпрацювати процедура `SNCS` (щоб матриця F , значення якої зберігає масив `F`, отримала значення).

2.2.1.4. Процедура VSVG

Текст процедури:

```
Subroutine VSVG(VS,VG,NG,M)
!-----
! Процедура обчислення вектора амплітуд VG розміру NG
! за значенням вузлового вектора VS розміру M
! M - число вузлів на періоді (при IG=0) і напівперіоді
! (при IG=1), а також кількість стовпців матриць F, G і GNP
!-----
Use Array
!-----
implicit none
integer,intent(in)::NG,M
real,dimension(NG),intent(out)::VG
real,dimension(M),intent(in)::VS
integer::i,j
!-----
Do i=1,NG
  VG(i)=0.
  do j=1,M
    VG(i)=VG(i)+VS(j)*G(i,j)
  end do
end do
return
end subroutine VSVG
!-- © Copyright, 2005, Л. Глухівський
!-----
```

Процедура `vsvg` призначена для виконання обчислень за формулою (1.41) – за значенням вузлового вектора обчислюється значення вектора амплітуд. Необхідне для виконання операції значення матриці `G` є доступним із модуля `ARRAY`.

Перед викликом процедури формальний параметр `vs` (вузловий вектор) повинен мати чисельне значення і повинна перед тим відпрацювати процедура `SNCS`.

2.2.1.5. Процедура VSVGP

Текст процедури:

```
Subroutine VSVGP(VS,VG,NG1,M)
!-----
! Процедура розкладання у ряд Фур'є
! функції розподілу параметрів VS(M)
! для обчислення матриці диференційних гарм. параметрів
! M - кількість вузлів на періоді (при IG=0) і напівперіоді
! (при IG=1), вона ж - кількість стовпців матриць F, G і GNP
!-----
Use Array
!-----
implicit none
integer,intent(in)::NG1,M
```

```

    real,dimension(NG1),intent(out)::VG
    real,dimension(M),intent(in)::VS
    integer::i,j
!-----
    Do i=1,NG1
      VG(i)=0.
      do j=1,M
        VG(i)=VG(i)+VS(j)*GNP(i,j)
      end do
    end do
  return
end subroutine VSVG

```

!-- © Copyright, 2005, Л. Глухівський

Процедура `vsvg` використовується при обчисленні значень матриць диференційних гармонічних параметрів і виконує обчислення за формулою (1.57) – розкладає у ряд Фур'є функцію розподілу на періоді (чи півперіоді, коли враховуються тільки непарні гармоніки) диференційних параметрів. Необхідне для виконання операції значення матриці `GNP` є доступним із модуля `ARRAY` завдяки використанню оператора `Use Array`.

Перед викликом процедури формальний параметр `vs` (вузловий вектор, яким задається розподіл на періоді чи півперіоді диференційного параметру) повинен мати чисельне значення і повинна відпрацювати процедура `sncs`.

2.2.1.6. Процедура KVGVS

Текст процедури:

```

Subroutine KVGVS(K,VG,NG,NK,VS,M,MK)
!-----
!   Процедура перетворення складеного K-кратного
!   вектора амплітуд VG розміру NK
!   в складений K-кратний вузловий вектор VS розміру MK
!   M - кількість вузлів на періоді (при IG=0) і напівперіоді
!   (при IG=1), вона ж - кількість стовпців матриць F, G і GNP
!   NG - розмірність простого вектора амплітуд
!-----
  Use Array
!-----
  implicit none
  integer,intent(in)::K,NG,NK,M,MK
  real,dimension(NK),intent(in)::VG
  real,dimension(MK),intent(out)::VS
  integer::i,j,iN,jM,L
!-----
  Do i=1,K
    iN=(i-1)*NG
    do j=1,M
      jM=(j-1)*K+i; VS(jM)=0.
      do L=1,NG
        VS(jM)=VS(jM)+VG(L+iN)*F(L,j)
      end do
    end do
  end do

```

```

        end do
    end do
end do
Return
End subroutine KVGVS
!-- © Copyright, 2005, Л. Глухівський
!-----

```

Процедура `kvgvs` виконує обчислення за формулою (1.114а) – за значенням складеного вектора амплітуд обчислює значення складеного вузлового вектора. Необхідне для виконання операції значення матриці `F` є доступним із модуля `ARRAY` завдяки використанню оператора `Use Array`.

Перед викликом процедури формальний параметр `VG` (складений вектор амплітуд) повинен мати чисельне значення і повинна відпрацювати процедура `snscs` (тобто є порахованими значення матриць гармонічних перетворень).

2.2.1.7. Процедура KVSVG

Текст процедури:

```

Subroutine KVSVG(K,VS,M,MK,VG,NG,NK)
!-----
!   Процедура перетворення складеного K-кратного
!   вузлового вектора VS розміру MK=M*K
!   у складений K-кратний вектор амплітуд VG розміру NK=N*K
!   M - кількість вузлів на періоді (при IG=0) і напівперіоді
!   (при IG=1), вона ж - кількість стовпців матриць F, G і GNP
!   NG - розмірність простого вектора амплітуд
!-----
Use Array
!-----
implicit none
integer,intent(in)::K,NG,NK,M,MK
real,dimension(NK),intent(out)::VG
real,dimension(MK),intent(in)::VS
integer::i,j,iN,iK,L,LN
!-----
Do i=1,K
    iN=(i-1)*NG; iK=K-i
    do L=1,NG
        LN=L+iN; VG(LN)=0.
        do j=1,M
            VG(LN)=VG(LN)+VS(j*K-iK)*G(L,j)
        end do
    end do
end do
Return
End subroutine KVSVG
!-- © Copyright, 2005, Л. Глухівський
!-----

```

Процедура `kvsvg` виконує обчислення за формулою (1.115а) чи (1.115б) – за значенням складеного вузлового вектора обчислює значення складеного вектора амплітуд. Необхідне для виконання операції значення матриці G є доступним із модуля `ARRAY` завдяки використанню оператора `use Array`.

Перед викликом процедури формальний параметр `vs` (складений вузловий вектор) повинен мати чисельне значення і повинна відпрацювати процедура `sncs`.

2.2.2. Другий програмний блок

Другий блок програмних компонент ПЗ ДГМ (Блок 2) містить шість процедур: `OMA`, `OMV`, `OMAV`, `OMVB`, `GRPAR` і `GRMAT`. Це процедури, які реалізують операції з матрицею диференціювання D вигляду (1.16) чи (1.17) і виконують обчислення значень матриць диференційних гармонічних параметрів (1.56) і (1.107).

Процедури цього блоку не потребують доступу до матриць гармонічних перетворень.

2.2.2.1. Процедура OMA

Текст процедури:

```

Subroutine OMA(IG,A,B,NG,OM)
!-----
! Процедура множення кутової частоти OM
! і матриці D порядку NG на матрицю A порядку NG
! IG - кер.змінна: якщо =0, то врах. пост. складова і всі гарм.
!                якщо =1, то врах. тільки непарні гармоніки
!-----
  Implicit none
  integer,intent(in)::IG,NG
  real,intent(in)::OM
  real,dimension(NG,NG),intent(in)::A
  real,dimension(NG,NG),intent(out)::B
  integer::i,j
  real::C
!-----
  If(IG.eq.1) goto 1
!-----
!--- При врахуванні пост. складової і усіх гармонік
  Do j=1,NG
    B(1,j)=0.
    do i=2,NG,2
      C=A(i,j)
      B(i,j)=A(i+1,j)*OM*i*.5; B(i+1,j)=-C*OM*i*.5
    end do
  end do; goto 2
!-----
!--- При врахуванні тільки непарних гармонік
  1 Do j=1,NG
    Do i=1,NG,2
      C=A(i,j)*OM*i

```

```

        B(i,j)=A(i+1,j)*OM*i;  B(i+1,j)=-C
    end do
end do
2 Return
End subroutine OMA

```

!-- © Copyright, 2005, Л. Глухівський

!-----

Процедура *ома* призначена для виконання операції множення добутку кругової частоти ω і матриці диференціювання D вигляду (1.16) чи (1.17) на квадратну матрицю, подібно як це виконується у формулі (1.27).

При зверненні до цієї процедури параметри *ом*, *нг* і *а* повинні мати числові значення. Результатом виконання цієї операції є присвоєння матриці v добутку ωDA .

2.2.2.2. Процедура *омв*

Текст процедури:

```

        Subroutine OMV(IG,V,V1,NG,OM)
!-----
! Процедура множення кутової частоти OM
! і матриці D порядку NG на вектор
! амплітуд V із розміром NG
! IG - кер. змінна: якщо =0, то врах. пост. складова і всі гарм.
!
!                   якщо =1, то врах. тільки непарні гармоніки
!-----
        Implicit none
        integer,intent(in)::IG,NG
        real,intent(in)::OM
        real,dimension(NG),intent(in)::V
        real,dimension(NG),intent(out)::V1
        integer::i
        real::C
!-----
        If(IG.eq.1) goto 1
!-----
!--- При врахуванні пост. складових і усіх гармонік
        V1(1)=0.
        Do i=2,NG,2
            C=OM*V(i)*i*.5
            V1(i)=OM*V(i+1)*i*.5;  V1(i+1)=-C
        end do;  goto 2
!-----
!--- При врахуванні тільки непарних гармонік
        1 Do i=1,NG,2
            C=OM*V(i)*i
            V1(i)=OM*V(i+1)*i;  V1(i+1)=-C
        end do
        2 Return
        End subroutine OMV
!-- © Copyright, 2005, Л. Глухівський
!-----

```

Процедура `omv` призначена для виконання операції множення добутку кругової частоти ω і матриці диференціювання D вигляду (1.16) чи (1.17) на вектор амплітуд вигляду (1.13), подібно як це виконується у формулі (1.15). При зверненні до цієї процедури параметри `om`, `ng` і `v` повинні мати числові значення. Результатом виконання цієї операції є присвоєння вектору `v1` добутку $\omega D \vec{V}$.

2.2.2.3. Процедура `OMAB`

Текст процедури:

```

Subroutine OMAB(IG,A,B,NG,K,NK,OM)
!-----
! Процедура множення матриці A
! порядку NK=NG*K на кутову частоту OM і
! складену матрицю DC зліва (B=OM*DC*A)
! NG - розмірність простого вектора амплітуд
! IG - кер.змінна: якщо =0, то врах. пост. складова і всі гарм.
!                якщо =1, то врах. тільки непарні гармоніки
!-----
Implicit none
integer,intent(in)::IG,NG,K,NK
real,intent(in)::OM
real,dimension(NK,NK),intent(in)::A
real,dimension(NK,NK),intent(out)::B
integer::i,j,jK,iK,i1,j1
real::C
!-----
If(IG.eq.1) goto 1
!-----
!--- При врахуванні пос. складових і усіх гармонік
Do i1=1,K
  iK=(i1-1)*NG
  Do j1=1,K
    jK=(j1-1)*NG
    Do j=1,NG
      B(1+iK,j+jK)=0.
      Do i=2,NG,2
        C=A(i+iK,j+jK)
        B(i+iK,j+jK)=OM*A(i+iK+1,j+jK)*i/2.
        B(i+iK+1,j+jK)=-C*OM*i/2.
      end do
    end do
  end do
end do; goto 2
!-----
!--- При врахуванні тільки непарних гармонік
1 Do i1=1,K
  iK=(i1-1)*NG
  do j1=1,K

```

```

        jK=(j1-1)*NG
        do j=1,NG
            do i=1,NG,2
                C=A(i+iK,j+jK)*OM*i
                B(i+iK,j+jK)=A(i+iK+1,j+jK)*OM*i
                B(i+iK+1,j+jK)=-C
            end do
        end do
    end do
2 Return
End subroutine OMAB
!-- © Copyright, 2005, Л. Глухівський
!-----

```

Процедура **омав** призначена для виконання операції множення добутку кругової частоти ω і складеної матриці диференціювання D вигляду (1.78) на квадратну матрицю, подібно як це виконується за формулою (1.106).

При зверненні до цієї процедури параметри **ом**, **ng**, **к**, **нк** і **а** повинні мати числові значення. Результатом виконання цієї операції є присвоєння матриці $\omega D^* A^*$ в добутку $\omega D^* A^*$.

2.2.2.4. Процедура OMVB

Текст процедури:

```

Subroutine OMVB(IG,V,V1,NG,K,NK,OM)
!-----
! Процедура множення кутової частоти OM
! і складеної матриці D порядку NK=NG*K
! на складений K-кратний вектор амплітуд V
! розмірності NK=NG*K (V1=OM*V*D)
! IG - кер. змінна: якщо =0, то врах. пост. складова і всі
! гарм.; якщо =1, то врах. тільки непарні гармоніки
!-----
Implicit none
integer,intent(in)::IG,NG,K,NK
real,intent(in)::OM
real,dimension(NK),intent(in)::V
real,dimension(NK),intent(out)::V1
integer::i,j,iK
real::C
!-----
If(IG.eq.1) goto 1
!-----
!--- При врахуванні пост. складових і усіх гармонік
Do i=1,K
iK=(i-1)*NG; V1(1+iK)=0.
Do j=2,NG,2
C=V(j+iK)*j*OM*.5
V1(j+iK)=V(j+iK+1)*j*OM*.5
V1(j+iK+1)=-C

```

```

        end do
    end do; goto 2
!-----
!--- При врахуванні тільки непарних гармонік
1 Do i=1,K
    iK=(i-1)*NG
    do j=1,NG,2
        C=V(j+iK)*j*OM
        V1(j+iK)=V(j+iK+1)*j*OM
        V1(j+iK+1)=-C
    end do
end do
2 Return
End subroutine OMVB

```

!-- © Copyright, 2005, Л. Глухівський

Процедура `omvb` призначена для виконання операції множення добутку кругової частоти ω і складеної матриці диференціювання D вигляду (1.78) на складений вектор амплітуд вигляду (1.79), подібно як це виконується за формулою (1.77).

При зверненні до цієї процедури параметри `om`, `ng`, `k`, `nk` і `v` повинні мати числові значення. Результатом виконання цієї операції є присвоєння вектору `v1` добутку $\omega D^* \vec{V}^*$.

2.2.2.5. Процедура GRPAR

Текст процедури:

```

Subroutine GRPAR(IG,SY,NG,SYC,M,NG1)
!-----
! Процедура обчислення значення матриці SY
! порядку NG диференційних гармонічних параметрів
! за значенням діагональної матриці параметрів у вузлах,
! заданої вектором SYC порядку M
! IG - кер.змінна: якщо =0, то врах. пост. складова і всі гарм.
!                якщо =1, то врах. тільки непарні гармоніки
! M - кількість вузлів на періоді (при IG=0) і напівперіоді
!     (при IG=1), вона ж - кількість стовпців матриць F, G і GNP
! NG - розмірність простого вектора амплітуд
!-----
Implicit none
integer,intent(in)::IG,NG,M,NG1
real,dimension(M),intent(in)::SYC
real,dimension(NG,NG),intent(out)::SY
real,dimension(NG1)::GL
integer::i,j,i1,i2,ij,ji,j1,jk,jk1,jk2,j11,
& jii,ji1,ji2
!-----
! GL- робочий вектор розмірності NG1
! NG1=2*N+1 (при IG=1) і 4*N+1 (при IG=0)
!-----
Call VSVGPF(SYC,GL,NG1,M)

```



```

        if(IG.eq.1) goto 1
!-----
!--- При врахуванні пост. складових і усіх гармонік
        jK=NG-1; jK1=jK-2
        Do j=1,NG
            SY(1,j)=GL(j)*.5
        end do
        SY(1,1)=2.*SY(1,1)
        Do i=2,jK1,2
            i2=i*2; i1=i+1; SY(i,i)=GL(1)+GL(i2)*.5
            SY(i,i1)=GL(i2+1)*.5; SY(i1,i1)=GL(1)-GL(i2)*.5
            j1=i+2
            Do j=j1,jK,2
                j11=j+1; ji=j-i; jii=j+i; jil=ji+1; ji2=jii+1
                SY(i,j)=(GL(ji)+GL(jii))* .5
                SY(i,j11)=(GL(jil)+GL(ji2))* .5
                SY(i1,j)=(-GL(jil)+GL(ji2))* .5
                SY(i1,j11)=(GL(ji)-GL(jii))* .5
            end do
        end do
        SY(jK,jK)=GL(1)+GL(2*jK)*.5
        SY(jK,NG)=GL(2*jK+1)*.5
        SY(NG,NG)=GL(1)-GL(2*jK)*.5
        Do j=1,jK
            i1=j+1
            do i=i1,NG
                SY(i,j)=SY(j,i)
            end do
        end do
        Do i=2,NG
            SY(i,1)=2.*SY(i,1)
        end do; goto 3
!-----
!--- При врахуванні тільки непарних гармонік
1 jK=NG-1; if(jK.EQ.1) goto 2; jK1=jK-2
    Do i=1,jK1,2
        i2=i*2; SY(i,i)=GL(1)+GL(i2)*.5
        SY(i,i+1)=GL(i2+1)*.5
        SY(i+1,i+1)=GL(1)-GL(i2)*.5
        j1=i+2
        Do j=j1,jK,2
            ij=i+j; ji=j-i
            SY(i,j)=(GL(ji)+GL(ij))* .5
            SY(i,j+1)=(GL(ji+1)+GL(ij+1))* .5
            SY(i+1,j)=(-GL(ji+1)+GL(ij+1))* .5
            SY(i+1,j+1)=(GL(ji)-GL(ij))* .5
        end do
    end do
2 jK2=2*jK
    SY(jK,jK)=GL(1)+GL(jK2)*.5
    SY(jK,NG)=GL(jK2+1)*.5
    SY(NG,NG)=GL(1)-GL(jK2)*.5
    Do j=1,jK

```

```

        i1=j+1
        Do i=i1,NG
            SY(i,j)=SY(j,i)
        end do
    end do
3 Return
End subroutine GRPAR

```

! © Copyright, 2005, Л. Глухівський

!-----

Процедура **GRPAR** призначена для обчислення значення матриці диференціальних гармонічних параметрів (МДГП) s_y вигляду (1.45). Вона реалізує описаний у розділі 1.4 алгоритм 1.3, за яким значення МДГП обчислюється за формулою (1.56).

Перед зверненням до процедури параметри **NG**, **NG1**, **m** і **SYC** мають одержати числові значення. Тут **SYC** – це вектор розміру **m**, елементам якого присвоєно значення діагональної матриці диференційних параметрів вигляду (1.49) у **m** вузлах на періоді чи півперіоді.

2.2.2.6. Процедура GRMAT

Текст процедури:

```

Subroutine GRMAT(IG,SG,NK,SC,MK,K,M,NG,NG1)
!-----
! Процедура обчислення значення складеної матриці SG
! гармонічних параметрів порядку NK (NK=NG*K)
! за значенням складеної матриці SC
! вузлових параметрів розмірності МК на К (МК=M*K)
! IG - кер.змінна: якщо =0, то врах. пост. складова і всі гарм.
!                якщо =1, то врах. тільки непарні гармоніки
! NG - розмір простого вектора амплітуд
! NG1=2*N+1 (при IG=1) і 4*N+1 (при IG=0)
! M - кількість вузлів на періоді(півперіоді)
! SYC - робочий вектор розміру M
! S - робочий масив порядку NG
!-----
Implicit none
integer,intent(in)::IG,NG,NG1,K,NK,M,MK
real,dimension(MK,K),intent(in)::SC
real,dimension(NK,NK),intent(out)::SG
real,dimension(NG,NG)::S
real,dimension(M)::SYC
integer::i,j,iN,jN,jM,ii,jj
!-----
Do i=1,K
    iN=(i-1)*NG
    do j=1,K
        jN=(j-1)*NG
        do jM=1,M

```

```

        SYC(jM)=SC((jM-1)*K+i,j)
    end do
    Call GRPAR(IG,S,NG,SYC,M,NG1)
do ii=1,NG
    do jj=1,NG
        SG(ii+iN,jj+jN)=S(ii,jj)
    end do
end do
end do
end do
Return
End subroutine GRMAT

```

! © Copyright, 2005, Л. Глухівський

!-----

Процедура **GRMAT** призначена для обчислення значення складеної матриці sx диференціальних гармонічних параметрів вигляду (1.121), (1.122). Вона реалізує описаний у розділі 1.5.4 алгоритм 1.5. При обчисленні значення матриці sx процедура k^2 разів (у циклі) викликає для виконання процедуру **GRPAR**.

Перед зверненням до процедури **GRMAT** параметри $k, m, nk, mk, ng, ng1$ і sc мають одержати числові значення. Тут sc – матриця розміру mk на k , яка містить m блоків – квадратних матриць k -го порядку. Кожна із цих матриць має значення матриці диференційних параметрів у $1, \dots, M$ вузлах на періоді (півперіоді), які є діагональними блоками матриць вигляду (1.127).

2.2.3. Третій програмний блок

Третій блок програмних компонент ПЗ ДГМ із назвою Блок 3 містить три процедури: **HARMOSC**, **CALCULU** і **IMPROVE**, які реалізують алгоритми визначення періодичних розв'язків нелінійних систем диференційних рівнянь – числових значень складених векторів амплітуд, що репрезентують ці розв'язки, а також, у випадках розрахунку автоколивань, кругову частоту основної гармоніки.

2.2.3.1. Процедура HARMOSC

Текст процедури:

```

Subroutine HARMOSC(K,Y0,E,NK,NM,N1,EPS1,EPS2,KER)
!-----
! Процедура розрахунку нелінійних коливань - визначення
! періодичного розв'язку (розв'язків) нелінійної системи
! звичайних диференційних рівнянь. Перше наближення розв'язку
! отримується шляхом розрахунку h-характеристики
! (чисельне інтегрування методом Кутта-Мерсона зі змінним
! кроком і інвертуванням при підході до особливих точок).
! Уточнення кореня у точці h=N1 виконується за методом Ньютона.
!-----
Implicit none

```

```

integer,intent(in)::K,NK
integer,dimension(10),intent(in)::KER
real,intent(in)::HM,H1,EPS1,EPS2
real,dimension(NK)::E
real,dimension(NK+2)::Y0,Y1,Y2,F0,F1,F2
real,dimension((KER(9)/KER(8)+1)*NK+2)::Y22
real,dimension(NK+1)::U
real::S,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,S1,SN,E1,E2,
& PX0,PH0,PX1,PH1,Y0N,Y2N,AL,AI,AKER
integer::NG,NG1,M,MK,KH,L,NN,KI,ID,i,ij,KK,INEV,NI,NIT

```

!-----

! *Параметри процедури:*

! *K - порядок системи диф. рівнянь, що розв'язується;*
! *Y0- вектор змінних розміру NK+2, його елементи від 1-го до NK-го належать складеному вектору амплітуд, його NK+1 компонента - кругова частота першої гармоніки і остання компонента - параметр h;*

! *E - складений вектор амплітуд змушувальної сили;*

! *NK - розмірність складених векторів амплітуд;*

! *HM - максимальне значення параметра h;*

! *H1 - значення параметра h, при якому необхідно уточнити розв'язок за методом Ньютона*

! *EPS1 - відносна точність розрахунку h-характеристики;*

! *EPS2 - відносна точність при уточненні методом Ньютона*

! *KER - масив керуючих змінних:*

! *KER(1)=0 - враховуються пост. складові і всі гармоніки*

! *KER(1)=1 - враховуються тільки непарні гармоніки;*

! *KER(2)=1 - диф. рівняня у формі запису (1.65) чи (1.67);*

! *KER(2)=0 - у формі запису (1.64) чи (1.66);*

! *KER(3)=0 - диф. рівняня у формі запису (1.64) чи (1.65)*

! *KER(3)=1 - у формі запису (1.66) чи (1.67);*

! *KER(4)=0 - вимушені коливання;*

! *KER(4)=1 - параметричні коливання;*

! *KER(4)=2 - автоколивання;*

! *KER(5)=1 - потрібно друкувати значення вектора змінних у всіх точках h-характеристики;*

! *KER(6)=1 - потрібно припинити рух по h-характеристиці після проходження її першої особливої точки;*

! *KER(7) - якщо =0 - у задачі відсутні гістерезисні*

! *характеристики; якщо рівне цілому додатньому числу, то*

! *це означає, що у задачі є гістерезисні характеристики і*

! *це ціле число - кількість кроків для розширення петлі*

! *характеристики гістерезисного вигляду до реальної*

! *KER(8)- номер найвищої гармоніки*

! *KER(9)- максим. номер найвищої гармоніки при нарощуванні кількості враховуваних гармонік; якщо KER(9)=0, то*

! *нарощування не виконується*

! *KER(10)- якщо =0, то після кожного нарощування кількості гармонік роздруки відсутні, результати друкуються*

! *тільки після досягнення максимального номера найвищої*

! *гармоніки; якщо =1, то роздруки присутні після кожного*

! *нарощування*

!-----

```

write(1,5) KER(8)
5 format(2X,'Номер найвищої гармоніки=',i2)
Call SNCS(KER(1),KER(8),NG,NG1,M) !-- обчислили значення
                                !-- матриць гармонічних
                                !-- перетворень

if(KER(4).ne.0)E=0.
MK=M*K      !-- МК - розмірність складених вузлових векторів
KH=NK+2     !-- КН -н-р ком-ти вектора Y0, що є незал. змінною
AL=0.       !-- AL - коефіцієнт звуження петель характеристик
            !-- гістерезисного вигляду (якщо вони є)
KI=0        !-- KI - керуюча змінна, при KI=0 - розрах. h-х-ки
            !-- при KI=1 - уточ. розв'язку за методом Ньютона
INEV=1      !-- INEV - керуюча змінна
            !-- при INEV=0 - розрахунок коливань;
            !-- при INEV=1 - обчислення нев'язок для
            !-- початкового значення Y0
Call CALCULU(KER,KI,INEV,AL,Y0,F0,U,NK,K,NG,NG1,M,MK,E,KH)
!-- процедура CALCULU обчислила нев'язки F0 для початк. знач. Y0
if(KER(4).eq.0)goto 4
write(1,1)
1 format(3X,'Початкове значення вектора амплітуд:')
write(1,3)Y0
write(1,2)
2 format(3X,'Нев'язки для початкового значення в.а.:')
write(1,3)F0
3 format(3X,4E12.4)
4 do i=1,NK+1
    U(i)=F0(i)
end do          !--- U - вектор нев'язок
INEV=0; L=0     !-- L - номер кореня у точці h=H1
if(KER(5).ne.1)goto 31
Write(1,30)
30 Format(/10X,'Рахується h-характеристика')
!-----
!--- Два перші малі кроки за Ейлером:
31 Do i=1,2
    Call CALCULU(KER,KI,INEV,AL,Y0,F0,U,NK,K,NG,NG1,M,MK,E,KH)
!--- процедура CALCULU обчислює вектор похідних F0
    Y0=Y0+.0005*F0
end do
!-----
S=.05 !-- S - довжина кроку інтегрування
!-----
!-- Початок кроку (метод Кутта-Мерсона)
40 NN=0 !-- обнулення зм. NN, що фіксує факт дроблення кроку
!-----
!-- початок кроку (якщо було зменшення довжини кроку)
50 C1=S/3.; C2=S/6.; C3=S/8.; C4=3.*C3
    C5=S/2.; C6=3.*C5; C7=2.*S; C8=2.*C1
    KI=0          !-- поновлення значення KI
    Call CALCULU(KER,KI,INEV,AL,Y0,F0,U,NK,K,NG,NG1,M,MK,E,KH)
    PX0=F0(2); PH0=F0(NK+2)
!-- PX0, PH0 - похідні 2-ої і NK+2-ої компонент на початку кроку

```

```

        Y1=Y0+C1*F0
    Call CALCULU(KER,KI,INEV,AL,Y1,F1,U,NK,K,NG,NG1,M,MK,E,KH)
        Y1=Y0+C2*(F0+F1)
    Call CALCULU(KER,KI,INEV,AL,Y1,F1,U,NK,K,NG,NG1,M,MK,E,KH)
        Y1=Y0+C3*F0+C4*F1
    Call CALCULU(KER,KI,INEV,AL,Y1,F2,U,NK,K,NG,NG1,M,MK,E,KH)
        Y1=Y0+C5*F0-C6*F1+C7*F2
    Call CALCULU(KER,KI,INEV,AL,Y1,F1,U,NK,K,NG,NG1,M,MK,E,KH)
    PX1=F1(2); PH1=F1(NK+2)
!-- PX1,PH1 - похідні 2-ої і NK+2-ої компонент наприкінці кроку
        Y2=Y0+C2*(F0+F1)+C8*F2
!-- кінець обчислень на кроці інтегрування
!-- Y2 - значення вектора змінних у кінці кроку
!-----
!-- оцінка точності на кроці
        ID=0; E1=0.; E2=0.
        Do i=1,NG
            E1=E1+Y2(i)**2; E2=E2+(0.2*(Y1(i)-Y2(i)))**2
        end do
        E1=sqrt(E1)*EPS1; E2=sqrt(E2)
        If(E2.lt.E1) goto 60
        S=S/2.; NN=1; goto 50
!-- Точність EPS1 не досягнута, крок зменшено вдвоє,
!-- повернення на початок кроку (на мітку 50)
!-- із фіксацією, що відбулося дроблення кроку (NN=1)
!-----
!-- Точність EPS1 досягнута
    60 If(E2*10..gt.E1) ID=1
!-- оцінили одержану точність:
!-- задовільна (ID=1), хороша (ID=0)
!-----
        S1=Y2(2)-Y0(2)
        Y0N=Y0(NK+2); Y2N=Y2(NK+2);
        SN=Y2N-Y0N; IJ=0; IF(SN.gt.0.) IJ=1
!-- Y0N - значення параметра h на початку кроку
!-- Y2N - значення параметра h в кінці кроку
!-- SN - приріст параметра h на кроці
!-- S1 - приріст 2-ї компоненти вектора амплітуд на кроці
!-- IJ=1, коли йде рух по h-характеристиці у сторону
!-- збільшення h і IJ=0, якщо йде у сторону зменшення
!-----
!-- Приймається рішення щодо необхідності уточнення кореня,
!-- (перевірка, чи H1 є у межах останнього кроку)
        if(Y0N.gt.H1.and.Y2N.gt.H1.
& or.Y0N.lt.H1.and.Y2N.lt.H1) goto 72
        if(abs((H1-Y0N)/SN).gt.0.2) goto 61
        Y1=Y0; goto 63
    61 if(abs((H1-Y2N)/SN).gt.0.2) goto 62
        Y1=Y2; goto 63
    62 S=S*abs((Y0N-H1)/SN)*1.1; goto 50
    63 L=L+1; Y1(NK+2)=H1; KI=1
        Write(1,64)
    64 Format(5X,40(' '))

```

```

call NEWT(KI, EPS2, NIT)      !-- уточнення кореня при h=H1
                               !-- методом Ньютона
Write(1, 65) L, H1, NIT
65 Format(1X, 'Уточнене значення', I2, ' кореня для h=', F5.3/
& 2X, '(розв'язок одержано після', I3, '-ої ітерації)')
KK=1; if(KER(7).eq.0) KK=0
Call OUTP(KER(1), Y1, NK+2, K, NG, M, MK, KK)
!-- Y1 - уточнене значення змінних у точці h=H1
!-----
if(H1.ne.HM) goto 70
if(KER(7).eq.0) goto 68
write(1, 67)
67 format(/5X, 'Враховуємо гістерезис')
AKER=KER(7)
do NI=1, KER(7)
    AI=NI; AL=AI/AKER; call NEWT(KI, EPS2, NIT)
end do
Call OUTP(KER(1), Y1, NK+2, K, NG, M, MK, 0)
68 if(KER(9).ne.0) goto 69
return      !-- вихід при врахуванні гістерезису
!-----
!-- нарощуємо кількість враховуваних гармонік
69 call IMPROVE(KER, K, KH, Y1, NK+2, NG, E, U, Y22,
& (KER(9)/KER(8)+1)*NK+2, EPS2, AL)
return      !-- вихід після завершення нарощування
70 write(1, 64)
if(Y2N.gt.HM) goto 250
!-----
72 If(KER(5).ne.1) goto 74
write(1, 73) Y2(NK+2), KH
73 format(/2X, 'Параметр h=', F8.5,
& ', незалежною на кроці є змінна', I3)
KK=1; Call OUTP(KER(1), Y2, NK+2, K, NG, M, MK, KK)
!----- Процедура OUTP виводить на друк (якщо KER(5)=1)
!----- в кінці кроку значення вектора Y2
74 Y0=Y2
!-- кінець кроку = початок наступного кроку
!-----
!-- Приймається рішення щодо необхідності інвертування
if(KER(4).ne.0) goto 140
If(KH.ne.NK+2) goto 130
if(abs(PX1).le.abs(PX0)) goto 140
    KH=2; S=S1; goto 140
!-- похідна 2-ої компоненти вектора змінних за парам. h
!-- зростає, тому робимо 2-гу компоненту незалежною змінною
!-- і переходимо на інтегрування за 2-ою змінною з кроком S1
!-----
130 if(abs(PH1).le.abs(PH0)) goto 140
    KH=NK+2; S=SN
!-- похідна параметра h за 2-ою компонентою вектора змінних
!-- зростає, тому робимо параметр h незалежною змінною
!-- і повертаємося до інтегрування за парам. h з кроком SN
!-----

```

```

!-- Приймається рішення щодо завершення інтегрування
140 continue
    if(Y0(NK+2).ge.HM) goto 250
    if(KER(6).EQ.1.and.IJ.EQ.0) goto 230
    if(Y0(NK+2).lt.0.) goto 210
!-- виходимо з процедури, якщо параметр h перевищує HM,
!-- або було завдання припинити розрахунок при
!-- проходженні першої особливої точки (KER(6)=1, h падає),
!-- або параметр h став від'ємним
!-----
    If(NN.eq.1.or.ID.eq.1) goto 40
    S=S*2.5; goto 40
!-- Продовжуємо обчислювати h-х-ку (перехід до мітки 40):
!   а) із тим же кроком (якщо на попередньому кроці було
!       дроблення кроку (NN=1) або точність інтегрування
!       на кроці задовільна (ID=1));
!   б) із збільшенням кроку у протилежному випадку.
!-----
210 Write(1,220)
220 Format(5X,'Параметр h перейшов до від'ємної області')
    write(*,*) 'Параметр h став від'ємним'
    return
230 write(1,240)
240 format(10X,'Пройдено першу особливу точку',
    & ' h-характеристики',
    & /10X, 'і тому передбачена зупинка (KER(6)=1)')
    write(*,*) 'пройшли першу особливу точку'
250 return
!-----
    Contains
        Subroutine NEWT(KI, EPS, NIT)
!-----
!-- Внутрішня процедура NEWT реалізує алгоритм Ньютона
!-- розв'язання нелінійної системи скінченних рівнянь
!-----
        integer, intent(in)::KI
        real, intent(in)::EPS
        integer::NIT
!-----
        NIT=0
        1 Call CALCULU(KER, KI, INEV, AL, Y1, F1, U, NK, K, NG, NG1, M, MK, E, KH)
!-- Тут CALCULU за знач. вектора Y1 визначає вектор поправок F1
!-----
        E1=0.; E2=0.; NIT=NIT+1; Y1=Y1-F1
        do i=1,NG
            E1=E1+Y1(i)**2; E2=E2+F1(i)**2
        end do
        E1=sqrt(E1)*EPS; E2=sqrt(E2)
        If(NIT.gt.20) goto 2
        If(E2.gt.E1) goto 1
!-----
!-- точність EPS досягнута
!-----
        return

```



```

2 Write(1,3)
3 Format(10X,'Кількість ітерацій при уточненні',
& /10X,'кореня у точці h=H1 перевищила 20')
write(*,*) 'зациклення при уточненні методом Ньютона'
stop
End subroutine NEWT
End subroutine HARMOSC
!-- © Copyright, 2008, Л. Глухівський
!-----

```

Процедура `HARMOSC` є вдосконаленим варіантом описаної у [20] процедури `HINVTNEWT`, вона стала більш універсальною і передбачає:

- розрахунок не тільки вимушених коливань, але й параметричних коливань та автоколивань;
- можливість розрахунків при наявності у системі елементів з нелінійними характеристиками гістерезисного вигляду;
- можливість нарощування у процесі розрахунку кількості враховуваних гармонік.

Процедура `HARMOSC` викликається для виконання головною програмою пакету програмних компонент користувача. Вона реалізує алгоритм розв'язання нелінійної системи скінченних рівнянь, що є гармонічним відображенням системи диференціальних рівнянь, періодичний розв'язок якої шукається.

Всі параметри процедури є вхідними, і перед викликом процедури вони мають одержати значення, відповідно до її інтерфейсу, визначеного оператором

```
Subroutine HARMOSC(K,Y0,E,NK,HN,H1,EPS1,EPS2,KER).
```

Перший формальний параметр – змінна k цілого типу, їй необхідно задати значення порядку системи диференціальних рівнянь, періодичний розв'язок якої шукається, це значення змінної k останньої компоненти вектора вигляду (1.68).

Другий формальний параметр – одновимірний реальний масив змінних y_0 , утворений із k простих векторів амплітуд, кругової частоти ω основної гармоніки і параметру h . Значення, яке йому надається, є початковим значенням масиву змінних y_0 . При моделюванні вимушених коливань прості вектори амплітуд обнулюються (тому що при $h = 0$ h – характеристика починається з нульових значень амплітуд гармонік) і задається значення ω . При моделюванні автоколивань чи параметричних коливань потрібно задати початкові значення простим векторам амплітуд і частоті ω , значення яких можна обчислити з використанням одного із методів наближеного розв'язку, наприклад – методу гармонічної лінеаризації тощо.

Третій формальний параметр – складений вектор амплітуд e змущувальної сили. Йому надається значення тільки при розрахунку вимушених коливань. Для випадку параметричних коливань і автоколивань цей вектор процедурою `HARMOSC` обнулюється.

Четвертий формальний параметр – змінна nk цілого типу, їй необхідно присвоїти значення розміру складеного вектора амплітуд вигляду (1.79) – (1.82).

П'ятий формальний параметр – реальна змінна h , якій необхідно присвоїти максимальне значення параметру h , до якого потрібно розраховувати h -характеристику.

Шостий формальний параметр – реальна змінна h_1 , якій необхідно присвоїти те значення параметру h , при якому розв'язок має бути уточнений ітераційним методом Ньютона (при моделюванні автоколивань і параметричних коливань параметрам h і h_1 потрібно задати одне і те ж значення 1.0).

Сьомий формальний параметр – реальна змінна $eps1$, якій необхідно надати значення відносної точності розрахунку h -характеристики.

Восьмий формальний параметр – реальна змінна $eps2$, якій необхідно присвоїти значення відносної точності, до якої має виконуватися уточнення розв'язку ітераційним методом Ньютона.

Дев'ятий формальний параметр – цілочисловий вектор ker , що має 10 елементів. Вони мають наступний зміст.

$ker(1)$ – цією змінною задають спектр простого вектора амплітуд: якщо до його складу входять постійна складова і гармоніки як парних, так і непарних порядків, то цій змінній необхідно присвоїти число 0; якщо ж простий вектор амплітуд утворений амплітудами гармонік тільки непарних порядків, то цій змінній необхідно присвоїти число 1. Потрібно мати на увазі, що у тих випадках, коли ще до проведення розрахунку достеменно не відомо, який із цих двох видів спектрів очікується, то краще задати число 0, і у разі, якщо у коливному процесі присутні тільки непарні гармоніки, то у розв'язку амплітуди інших гармонік і постійні складові будуть нульовими (близькими до нуля). Це дасть підстави розрахунок повторити, задавши змінній $ker(1)$ число 1.

$ker(2)$ і $ker(3)$ – цими двома змінними задають, який вигляд із передбачених чотирьох варіантів (1.64) – (1.67) має система диференціальних рівнянь, періодичний розв'язок якої шукається. Якщо вона вписується у варіант (1.65) чи (1.67), тобто коли під знаками похідних є безпосередньо ті змінні, періодичні залежності яких шукаються, то змінній $ker(2)$ необхідно присвоїти число 1, а якщо під знаками похідних є інші змінні, що є нелінійними функціями від тих, періодичні залежності яких шукаються, то присвоюється число 0. Якщо система диференціальних рівнянь вписується у варіант (1.64) чи (1.65), тобто вона розв'язана відносно похідних (у нормальній формі Коші), то змінній $ker(3)$ необхідно присвоїти число 0, і число 1, якщо перед вектором похідних є квадратна матриця коефіцієнтів (система диференціальних рівнянь не розв'язана відносно похідних).

$ker(4)$ – значення цієї змінної визначає, який вид коливань шукається: вимушені коливання – число 0; параметричні коливання – число 1; автоколивання – число 2.

$ker(5)$ – ця змінна керує запам'ятовуванням даних при розрахунку h -характеристики: якщо їй задати значення 0, то запам'ятовуватися (записуватися до вихідного файлу) процедурою OUPR будуть тільки результати, що відповідають $h = h_1$, і якщо задати 1, то запам'ятовуватися будуть результати у кожній точці h -характеристики. В окремих випадках доцільно запам'ятати всю h -характеристику, бо саме вона представляє інтерес (див. далі розділ 4.1.3 – розрахунок характеристики

ферорезонансного контуру). Запам'ятати її може бути також доцільно при ненормальному завершенні розрахунку і необхідності аналізу його причин.

KEY(6) – ця змінна визначає, чи потрібно продовжувати вести розрахунок h -характеристики, якщо уже пройдена її перша особлива точка (див. розділ 1.5.7): якщо цій змінній присвоєно число 0, то після проходження першої особливої точки обчислення будуть продовжуватися.

KEY(7) – ця змінна задає особливості розрахунку при наявності у задачі нелінійних характеристик гістерезисного вигляду. Якщо ця змінна має значення 0, то це означає що таких характеристик у задачі не має. Якщо ж ця змінна має значення цілого додатного числа (наприклад – 5), то це буде означати, що у задачі такі характеристики є, і це ціле число визначає кількість кроків для розширення петель гістерезису при уточненні розв'язку від нульової площі до реальної.

KEY(8) – значення цієї змінної визначає номер найвищої враховуваної гармоніки, це значення n у формулі (1.8).

KEY(9) – ця змінна задає особливості розрахунку, у якому нарощується кількість враховуваних гармонік. Якщо **KEY(9)** присвоєно число 0, то нарощування цієї кількості не відбувається, і якщо йому присвоєно число, відмінне від нуля і більше від присвоєного змінній **KEY(8)**, то нарощування відбувається від значення змінної **KEY(8)** до значення змінної **KEY(9)** із кроком 1.

KEY(10) – змінна, що керує при нарощуванні кількості враховуваних гармонік записом результатів до вихідного файлу. Якщо її значення 0, то записуються тільки результати при досягненні номером гармоніки значення змінної **KEY(9)**, і якщо її значення 1, то результати записуються після кожного нарощування.

Процедурою реалізований алгоритм розв'язання нелінійної системи скінченних рівнянь вигляду (1.77) чи (1.83) чи (1.84) чи (1.85), що є гармонічним відображенням системи диференційних рівнянь, періодичний розв'язок якої шукається.

Зауважимо, що обмеження форм запису розглядуваних систем диференційних рівнянь виглядами (1.64) - (1.67) позбавляє користувача цієї процедури необхідності виконання операції гармонічної алгебризації, тому що вона закладена у реалізований процедурою алгоритм.

Коротко опишемо цей алгоритм.

Насамперед за заданим початковим значенням вектора змінних \vec{X}^* вигляду (1.89), що зберігається одномірним масивом x_0 , обчислюється значення вектора нев'язок (1.97) – його обчислює викликана для виконання процедура `SALCULU` (вона описується далі), значення вектора нев'язок запам'ятовує одномірний масив u .

Далі йде розрахунок h -характеристики – виконується інтегрування векторного диференційного рівняння вигляду (1.102) чисельним методом Кутта-Мерсона [48] з автоматичним вибором розміру кроку. При цьому розмір кроку змінюється так, щоб задовольнялася відносна точність розрахунку ϵ_{PS1} . Інтегрування виконується при зміні параметру h від нуля до значення, яке має змінна **hm**.

Перед початком роботи алгоритму Кутта-Мерсона у цій процедурі передбачені перші два малі кроки зі значенням довжини кроку $\Delta h = 0,0005$, які виконуються за методом Ейлера без контролю точності. Це зумовлено тим, що у деяких задачах, зокрема при розрахунках періодичних процесів у нелінійних електричних колах з

вентиллями, на першому кроці розрахунку h -характеристики, коли визначається, у яких вузлах на періоді вентиля є відкритими, а у яких закритими, алгоритм Кутта-Мерсона з контролем точності без такого вступу може привести до неоправданого дроблення кроку.

При розрахунку параметричних коливань чи автоколивань значення змінних n_1 і n_m задається, як уже було сказано, однаковим і рівним одиниці, тоді за ітераційним методом Ньютона [44, 48] уточнюється остання точка h -характеристики. При розрахунку вимушених коливань значення змінних n_1 і n_m теж можуть бути однаковими і рівними одиниці, тоді уточнюється розв'язок при повному значенні змушувальної сили. Однак вони можуть бути і різними, при цьому значення змінної n_1 має бути меншим від значення змінної n_m . Наприклад, якщо параметру n_1 присвоєно значення 0.4 і параметру n_m - значення 0.9, то процедура розрахує h -характеристику у діапазоні від $h=0$ до $h=0.9$ і при $h=0.4$ уточнить розв'язок (чи розв'язки, якщо їх у цьому діапазоні є більше, ніж один) за методом Ньютона.

Ще раз акцентуємо увагу на можливостях процедури.

1) Алгоритм процедури `harmosc` передбачає при розрахунку вимушених коливань можливість інвертування розв'язуваної системи диференціальних рівнянь (1.102), щоб забезпечити при чисельному інтегруванні проходження особливих точок h -характеристики, якщо вони є. Алгоритм інвертування описаний у розділі 1.5.7. При інвертуванні незалежна змінна – параметр h – стає залежною змінною, а незалежною змінною стає друга компонента вектора змінних \vec{X}^* .

2) Процедура `harmosc` передбачає можливу наявність у задачі нелінійних характеристик гістерезисного вигляду. Якщо вони є (при цьому елемент `кер(7)` відмінний від нуля), спочатку одержується розв'язок при допущенні, що всі характеристики гістерезисного вигляду замінені однозначними усередненими характеристиками, які проходять посередині петель гістерезису. Після одержання цього початкового розв'язку петлі гістерезису поступово розширюються до своїх повних значень – кількість кроків розширення задає `кер(7)`. Після кожного розширення розв'язок уточнюється методом Ньютона, при цьому за нульове наближення приймається значення кореня попереднього етапу розширення.

3) Процедура `harmosc` також передбачає можливість уточнення одержаного розв'язку шляхом нарощування кількості враховуваних гармонік. Якщо вибирається ця можливість, то значення елементу `кер(9)` має бути відмінним від нуля. Тоді значення `кер(9)` сприймається як максимальне значення номера найвищої гармоніки при нарощуванні кількості враховуваних гармонік (до початку нарощування кількості враховуваних гармонік було одержано розв'язок, у якому номер найвищої гармоніки був заданий значенням елемента `кер(8)`).

Процедура `harmosc` при своїй роботі викликає для виконання чотири зовнішні процедури: `snchs` (належить до Блоку 1 ПЗ ДГМ), `calcslu` (обчислює значення вектора нев'язок, похідних чи поправок, описується далі), `improve` (здійснює алгоритм нарощування кількості враховуваних гармонік, описується далі) і `outp` (здійснює обробку результатів і записує їх до окремого файлу, з метою наступного роздруку, належить до блоку програмних компонент користувача чи до

Блоку 5 ПЗ ДГМ) і одну внутрішню процедуру `NEWT`, яка реалізує ітераційний алгоритм Ньютона уточнення розв'язку.

2.2.3.2. Процедура CALCULU

Текст процедури:

```

Subroutine CALCULU(KER,KI,INEV,AL,X,DX,
&      U,NK,K,NG,NG1,M,MK,E,KH)
!-----
! Процедура CALCULU:
! при INEV=1 за значенням вектора X розміру NK+2 визначає
! вектор нев'язок і його значення присвоює вектору DX;
! при INEV=0 і KI=0 обчислює за значенням вектора X
! вектор похідних DX розміру NK+2 і ділить всі компоненти
! цього вектора на його KH-ту компоненту;
! при INEV=0 і KI=1 за значенням вектора X визначає
! вектор поправок DX для уточнення розв'язку
! за методом Ньютона.
!-----
      Implicit none
      integer,intent(in)::KI,INEV,K,NG,NG1,M,NK,MK,KH
      real,intent(in)::AL
      integer,dimension(10),intent(in)::KER
      real,dimension(NK+2),intent(in)::X
      real,dimension(NK),intent(in)::E
      real,dimension(NK+1)::U,Y1
      real,dimension(NK+2),intent(out)::DX
      real,dimension(NK)::XG,Y,Z,Y11,Y2
      real,dimension(NK,NK)::SY,SZ,SY1,SY2
      real,dimension(NK+1,NK+2)::A
      real,dimension(MK)::XC,YC,ZC
      real,dimension(MK,K)::ZXC,YXC
      real,dimension(K,K)::B
      real::CC,OM,H
      integer::i,j,IG,INFK,IA
!-----
!   Параметри процедури:
!   KER - масив керуючих змінних
!   KI,INEV - керуючі змінні
!   AL - коефіцієнт звуження петлі характеристики
!         гістерезисного вигляду
!   X - вектор змінних
!   DX - вектор приростів чи поправок
!   U - вектор нев'язок для початкового наближення X
!   NK - розмірність складених векторів амплітуд;
!   K - порядок системи диф. рівнянь, що розв'язується;
!   NG - розмірність простих векторів амплітуд;
!   NG1 - кількість амплітуд до 2n-ої гармоніки;
!   M - розмірність простих вузлових векторів (кількість
!        вузлів на періоді чи півперіоді);
!   MK - розмірність складених вузлових векторів;

```

```

! E - складений вектор амплітуд змушувальних сил;
! KH - номер незалежної змінної у векторі змінних
!-----
      IG=KER(1);INFK=KER(2);IA=KER(3); OM=X(NK+1)
!----- OM - кругова частота основної гармоніки
      Do i=1,NK
          XG(i)=X(i)
      end do      !-- XG - складений вектор амплітуд
      Call KVGVS(K,XG,NG,NK,XC,M,MK)
!--- обчислили значення складеного вузлового вектора XC
      Call Model(AL,M,K,MK,XC,YC,ZC,YXC,ZXC,B)
!--- обчислили складені вузлові вектори YC,ZC і матриці YXC,ZXC
          if(INFK.eq.1) goto 50
      Call GRMAT(IG,SY,NK,YXC,MK,K,M,NG,NG1)
      50 Call GRMAT(IG,SZ,NK,ZXC,MK,K,M,NG,NG1)
!-- обчислили матриці диф.гарм.параметрів SY,SZ
!-----
      if(INEV.eq.1) goto 70
      A=0.;          !-- обнулили матрицю A
          if(INFK.ne.1) goto 60
          SY=0.
          Do i=1,NK
              SY(i,i)=1.
          end do
      60 Call OMAB(IG,SY,SY1,NG,K,NK,OM)
          if(IA.ne.1) goto 61
          SY2=SY1;    Call MBDMM(B,K,SY2,SY1,NG,NK)
      61 Do i=1,NK
          do j=1,NK
              A(i,j)=SY1(i,j)+SZ(i,j)
          end do
          end do
!--- сформовано основний блок матриці A
!-----
!--- обчислюємо нев'язки
      70 if(INFK.eq.1) goto 71
          call KVSVG(K,YC,M,MK,Y,NG,NK)
      71 call KVSVG(K,ZC,M,MK,Z,NG,NK)
!--- обчислили значення векторів амплітуд Y і Z
          Y11=Y;    if(INFK.eq.1) Y11=X
!--- обчислено значення векторів амплітуд:
!----- Y11 - складений вектор амплітуд Yг або Xг
!----- Z - складений вектор амплітуд Zг
          call OMVB(IG,Y11,Y,NG,K,NK,OM)
!----- Y - добуток OM*D*Y1
          if(IA.ne.1) goto 72
          Y11=Y; call MBDMV(B,K,Y11,Y,NG,NK)
      72 continue
!----- Y - добуток OM*D*Y1 або Bг*OM*D*Y1
          H=X(NK+2); if(INEV.eq.1) H=1.
          do i=1,NK
              Y1(i)=Y(i)+Z(i)-E(i)*H
              Y2(i)=Y(i)/OM

```

```

        end do
        Y1(NK+1)=0.; if(KER(4).eq.2) Y1(NK+1)=X(2)
!----- Y1 - вектор нев'язок
!----- Y2 - вектор D*Y1
        if(INEV.ne.1) goto 800
        do i=1,NK+1
            DX(i)=Y1(i)
        end do
        Return
!----- нев'язки обчислили
!-----
        800 do i=1,NK
            A(i,NK+1)=Y2(i)
        end do
        if(KER(4).eq.2) goto 801
        A(NK+1,NK+1)=1.; goto 802
        801 A(NK+1,2)=1.
        802 if(KI.eq.1) goto 803
!-----
!--- для обчислення приростів
        do i=1,NK+1
            A(i,NK+2)=-U(i)
        end do; goto 804
!-----
!--- для обчислення поправок
        803 do i=1,NK+1
            A(i,NK+2)=Y1(i)
        end do
!-----
        804 Call SYS(A,NK+1,NK+2)
! розв'язано систему лінійних рівнянь
!-----
        Do i=1,NK+1
            DX(i)=A(i,NK+2)
        end do
        If(KI.eq.1) goto 44
        DX(NK+2)=1.
!--- ділимо на KN-ту компоненту (інвертування):
        CC=DX(KN); DX=DX/CC
        Return
!-----
        44 DX(NK+2)=0.
        Return
        Contains
            Subroutine MBDMV(B,K,X,Y,N,KN)
!-----
! Процедура множення блочної матриці
! вигляду (1.86) на складений вектор амплітуд X
!-----
        integer,intent(in)::K,N,KN
        real,dimension(K,K),intent(in)::B
        real,dimension(KN),intent(in)::X
        real,dimension(KN),intent(out)::Y

```

```

integer::i,j,L,iNL,LjK
!-----
! Вхідні величини:
!   B(K,K) - квадратна матриця коефіцієнтів
!   X(KN) - складений K-кратний вектор амплітуд
! Вихідна величина:
!   Y(KN) - складений вектор амплітуд - результат
!-----
      Do i=1,K
        do L=1,N
          iNL=(i-1)*N+L; Y(iNL)=0.
          do j=1,K
            LjK=L+(j-1)*N
            Y(iNL)=Y(iNL)+B(i,j)*X(LjK)
          end do
        end do
      end do
      return
    end Subroutine MBDMV
!-----
      Subroutine MBDMM(B,K,X,Y,N,KN)
!-----
! Процедура множення блочної матриці
! вигляду (1.86) - на складену матрицю X
!-----
      integer,intent(in)::K,N,KN
      real,dimension(K,K),intent(in)::B
      real,dimension(KN,KN),intent(in)::X
      real,dimension(KN,KN),intent(out)::Y
      integer::i,ig,j,L,Lg,iNL,jNL,LjK
!-----
! Вхідні величини:
!   B(K,K) - квадратна матриця коефіцієнтів
!   X(KN,KN) - складена блочна матриця із K*K блоків,
!             кожен блок - матриця розмірності N
! Вихідна величина:
!   Y(KN,KN) - матриця - результат
!-----
      Do ig=1,K
        Do i=1,K
          do Lg=1,N
            jNL=(ig-1)*N+Lg
            do L=1,N
              iNL=(i-1)*N+L; Y(iNL,jNL)=0.
              do j=1,K
                LjK=L+(j-1)*N
                Y(iNL,jNL)=Y(iNL,jNL)+B(i,j)*X(LjK,jNL)
              end do
            end do
          end do
        end do
      end do
      return

```



```

    end Subroutine MBDMM
  End Subroutine CALCULU
!-- © Copyright, 2008, Л. Глужівський
!-----

```

Процедуру `CALCULU` викликають для виконання описана у попередньому розділі процедура `HARMOSC` і процедура `IMPROVE`, яка описується даліше.

Процедура `CALCULU` реалізує описані у розділі 1.5.5 алгоритми 1.6 і 1.7 – за заданим значенням вектора \mathbf{x} (складеного вектора амплітуд відшукуваної невідомої \bar{x} і кругової частоти ω) з використанням миттєвої на періоді (чи на півперіоді) моделі процесу обчислює:

- 1) значення вектора нев'язок (1.97), якщо керуюча змінна `INEV` має значення 1, або ж
- 2) значення похідних за параметром h компонент вектора невідомих на кроці чисельного інтегрування, якщо керуючі змінні `INEV` і `KI` мають значення 0, або ж
- 3) значення поправок для уточнення розв'язку за методом Ньютона, якщо керуюча змінна `INEV` має значення 0 і керуюча змінна `KI` - значення 1.

Ця процедура орієнтована на системи диференційних рівнянь виключно у формах запису (1.64) - (1.67).

Процедура `CALCULU` при виконанні викликає описані у попередніх розділах процедури `KVGSV`, `KVSVG`, `OMAB`, `OMVB` і `GRMAT` із відповідного блоку стандартних програмних компонент ПЗ ДГМ, процедуру `SYS` розв'язання систем лінійних рівнянь (вона наводиться нижче у цій главі) і процедуру `MODEL` із блоку програмних компонент користувача (вона задає миттєву на періоді чи півперіоді модель процесу).

Якщо процедура працює за другим варіантом, то обчислені на кроці інтегрування значення похідних компонент вектора невідомих діляться на компоненту похідної тієї змінної, що на даному кроці є незалежною змінною. Саме так здійснюється описане у розділі 1.5.7 інвертування системи диференційних рівнянь.

Процедура `CALCULU` містить дві внутрішні підпрограми - підпрограму `MBDMV`, яка виконує операцію множення блочної матриці вигляду (1.86) на складений вектор амплітуд - див. формули (1.84) і (1.85), і підпрограму `MBDMM`, яка виконує операцію множення блочної матриці вигляду (1.86) на складену матрицю – див. формули (1.110) і (1.111). Підпрограми `MBDMV` і `MBDMM` викликаються для виконання тільки тоді, коли керуюча змінна `KER(3)` має значення 1, тобто коли шукається періодичний розв'язок (чи періодичні розв'язки) диференційних рівнянь у формі запису (1.66) чи (1.67).

На завершення опису процедури `CALCULU` необхідно ще раз звернути увагу, що вона орієнтована на систему диференційних рівнянь виключно у одній із форм запису (1.64) - (1.67). У ній є уже закладеною гармонічна алгебризація диференційних рівнянь цих виглядів. Саме тому при використанні даної процедури обсяг підготовчої роботи користувача є мінімальним – йому необхідно розробляти тільки свою процедуру `MODEL` для конкретного вигляду системи диференційних рівнянь. Якщо ж ця система рівнянь не вписується в жодну із форм запису (1.64) - (1.67), то процедуру `CALCULU` користувач мусить розробляти свою, виконавши перед цим гармонічну алгебризацію системи диференційних рівнянь, періодичний розв'язок якої шукається, і

тоді ця процедура із Блоку 3 ПЗ ДГМ переноситься до блоку програмних компонент користувача.

Необхідність розробки свого варіанту процедури `calcslu` може виникнути і тоді, коли користувач хоче використати деякі додаткові можливості методу, наприклад – врахування симетрії періодичного процесу у багатофазній електричній схемі [15, 17, 20] чи такої ж симетрії у інших коливаннях, якщо вони там є, - для зменшення кількості невідомих векторів амплітуд гармонік з метою мінімізації необхідного обсягу обчислювальних ресурсів.

2.2.3.3. Процедура IMPROVE

Для того щоб відтворені за знайденим вектором \vec{X}^* тригонометричні ряди вигляду (1.8) апроксимували часові залежності змінних у періодичному розв'язку нелінійної системи диференціальних рівнянь з необхідною точністю, треба враховувати належну кількість гармонік. Здебільше, при інженерних розрахунках нелінійних коливань у системах і пристроях ця кількість гармонік не є надто великою.

Практично встановлення потрібної розмірності векторів амплітуд (іншими словами – кількості гармонік, що їх треба враховувати) можна здійснити шляхом чисельного експерименту, збільшуючи кількість враховуваних гармонік. Це збільшення можна виконувати по різному, наприклад – наступним чином.

Перше наближення для ітераційного процесу за схемою (1.112), розраховане методом h -характеристики, доцільно шукати при врахуванні невеликої кількості гармонік. Так, нехай для одержання першого наближення відшукуваного періодичного розв'язку системи диференціальних рівнянь було прийнято $n = 3$ і після уточнення за схемою (1.112) вектор амплітуд \vec{X}_r , що відповідає одній зі змінних, для заданого значення n має вигляд

$$\vec{X}_r^{(3)} = \text{colon}(X_0^{(3)}, X_{c1}^{(3)}, X_{s1}^{(3)}, X_{c2}^{(3)}, X_{s2}^{(3)}, X_{c3}^{(3)}, X_{s3}^{(3)}). \quad (2.6)$$

Збільшуємо кількість гармонік, що враховуються, на одиницю, тобто приймаємо $n = 4$, і як перше наближення для ітераційної схеми (1.112) беремо значення вектора амплітуд

$$\vec{X}_r^{(4)} = \text{colon}(X_0^{(3)}, X_{c1}^{(3)}, X_{s1}^{(3)}, X_{c2}^{(3)}, X_{s2}^{(3)}, X_{c3}^{(3)}, X_{s3}^{(3)}, 0, 0), \quad (2.7)$$

що має кількість компонент на дві більше і дві останні додані компоненти мають нульові значення. Після належної кількості ітерацій алгоритму уточнення розв'язку за методом Ньютона дві останні компоненти отримують чисельні значення і дещо змінюють свої значення інші компоненти.

Після цього знову нарощуємо кількість компонент вектора амплітуд \vec{X}_r на дві компоненти і уточнюємо значення вектора. Збільшення таким способом кількості

гармонік, які враховуються, продовжуємо до тих пір, поки не буде досягнуто наперед заданого максимального номера враховуваної гармоніки.

Цей алгоритм нарощування кількості враховуваних гармонік реалізує процедура IMPROVE, текст якої наводиться нижче.

```

      Subroutine IMPROVE(KER,K,KH,Y1,N11,NGP,E1,U,
&   Y2,N12,EPS,AL)
!-----
! Процедура нарощування кількості враховуваних гармонік
! у відшукуваному періодичному розв'язку
! нелінійної системи диференційних рівнянь
!-----
      Implicit none
      integer,intent(in)::K,NGP,N11,N12,KH
      integer,dimension(10),intent(in)::KER
      real,intent(in)::EPS,AL
      real,dimension(K*NGP),intent(in)::E1
      real,dimension(N11),intent(in)::Y1,U
      real,dimension(N12),intent(out)::Y2
      real,dimension(N12)::Y20
      real,dimension(N12-2)::E2,E20
      real,dimension(N12)::F2
      real::S1,S2,H1,OM
      integer::M,MK,i,j,NIT,NB,NBP,
&   NG,NG1,NG0,NK,NKR,IG,N1,KK
!-----
!   Параметри процедури:
!   KER - масив керуючих змінних, у ньому:
!   KER(8) - номер найвищої гармоніки до нарощування;
!   KER(9) - номер найвищої гармоніки, до якого слід
!   нарощувати гармоніки;
!   K - порядок розв'язуваної системи диференційних рівнянь;
!   KH - номер незалежної змінної у векторі змінних
!   Y1 - складений вектор амплітуд розв'язку до нарощування
!   N11 - кількість елементів вектора Y1
!   NGP - початкове значення розміру простого вектора амплітуд;
!   E1 - складений вектор амплітуд змушувальної сили;
!   U - вектор нев'язок
!   Y2 - вихідний (уточнений) складений вектор амплітуд розв'язку;
!   N12 - кількість елементів вектора Y2
!   EPS - відносна точність для уточнення
!   AL - коефіцієнт звуження петлі гістерезису
!-----
      Write(1,110) KER(8),KER(9)
110 Format(1X,'Уточнення значення кореня шляхом',
& ' нарощення кількості гармонік від N=',I2,' до N=',I2)
      NG0=NGP; IG=KER(1)
      Y20=0.; E20=0.
      do i=1,N11
         Y20(i)=Y1(i)
      end do
      do i=1,N11-2

```

```

        E20(i)=E1(i)
    end do
    H1=Y1(N11); OM=Y1(N11-1)
    NKR=1; if(IG.eq.1)NKR=2
    NBP=KER(8)+1; if(IG.eq.1)NBP=KER(8)+2
!-----
! цикл, у якому нарощують кількість враховуваних гармонік
!-----
    do NB=NBP,KER(9),NKR
        call SNCS(IG,NB,NG,NG1,M)
!-- обчислили нові значення матриць гармонічних перетворень
        NK=K*NG; N1=NK+2; МК=M*K
        Y2=0.; E2=0.
        do i=1,K
            do j=1,NG0
                Y2((i-1)*NG+j)=Y20((i-1)*NG0+j)
                E2((i-1)*NG+j)=E20((i-1)*NG0+j)
            end do
        end do
        Y2(N1)=H1; Y2(N1-1)=OM; NIT=0
    300 Call CALCULU(KER,1,0,AL,Y2,F2,U,NK,K,NG,NG1,M,МК,E2,КН)
!-- Процедура CALCULU за значенням вектора Y2
!-- визначає вектор поправок F2 для уточнення
!-- розв'язку за методом Ньютона
!-----
        S1=0.; S2=0.
        NIT=NIT+1;
        do i=1,N1
            Y2(i)=Y2(i)-F2(i)
        end do
        S1=Y2(NG-1)**2+Y2(NG)**2
        S2=F2(NG-1)**2+F2(NG)**2
        S1=sqrt(S1)*EPS; S2=sqrt(S2)
        If(NIT.gt.20) goto 320
!-- якщо зациклення, то аварійний вихід (на мітку 320)
        If(S2.gt.S1) goto 300
!-- якщо точність гірша від EPS, то йти на наступну ітерацію
!-- (на мітку 300)
        do j=1,N1
            Y20(j)=Y2(j)
        end do;
        do j=1,NK
            E20(j)=E2(j)
        end do
        NG0=NG
        if(KER(10).eq.0.and.NB.ne.KER(9)) goto 310
        write(1,305)NB
    305 format(1X,'додано ',i2,'-у гармоніку')
        KK=1; if(NB.eq.KER(9))KK=0
        call OUTP(KER(1),Y2,N1,K,NG,M,МК,KK)
    310 continue
        end do
!-- кінець циклу нарощування кількості гармонік

```

```

!-----
      return
320 Write(1,321)NB
321 Format(10X,'Кількість ітерацій при долученні', I2,
& '-ої гармоніки перевищила 20')
      write(*,*)'зациклення у процедурі IMPROVE'
      stop
      End subroutine IMPROVE
!-- © Copyright, 2008, Л. Глухівський
!-----

```

Формальні параметри процедури описані у коментарях.

Процедура `IMPROVE` при виконанні викликає процедури `SNCs` (викликається після кожної зміни значення n), `CALCULU` і `OUTP`.

* * *

Збільшувати кількість враховуваних гармонік можна й більшими порціями, ніж це закладено у процедуру `IMPROVE`, наприклад – по дві відразу.

Нарощувати кількість враховуваних гармонік можна і у напрямі зменшення номерів їх порядків, тобто вводити у розгляд і субгармоніки. Так, якщо ввести у розгляд першу субгармоніку з частотою $\omega/2$, то тоді її треба розглядати як нову першу, задавши при цьому у рівняннях (1.77), (1.83), (1.84) чи (1.85) нове значення кругової частоти, що дорівнює $\omega/2$, і при цьому колишні перші гармоніки всіх змінних величин і змушувальних сил вважати другими гармоніками, другі третіми і т.д.

Необхідно зазначити, що при нарощуванні кількості враховуваних гармонік змінних величин важливо, щоб не випали ті гармоніки, на яких можливе виникнення явища резонансу. Неврахування резонансних гармонік може суттєво знизити точність одержаного періодичного розв'язку.

Зауваження, викладені вище після зірочок, у процедурі `IMPROVE` не реалізовані. Якщо користувач задасться ціллю цю процедуру модифікувати, то може використати зазначені зауваження.

2.2.4. Четвертий програмний блок

До цього блоку (Блок 4 ПЗ ДГМ) будемо відносити процедури, які реалізують операції, що не є операціями диференційного гармонічного методу, а є загальними і можуть використовуватися у інших задачах. У цьому сенсі блок хоч і введений до складу ПЗ ДГМ, фактично до нього не належить.

Для початку введемо до цього блоку дві процедури: `SYS` для розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь і `INTLIN` для лінійної інтерполяції із таблиць, якими задаються безгістерезисні криві намагнічування феромагнітних матеріалів.

Пропонується, щоб користувач у своїй роботі теж відносив до цього блоку власні процедури загального характеру і застосування.

2.2.4.1. Процедура SYS

Текст процедури:

```
Subroutine SYS(B,KY,KV)
!-----
! Процедура для розв'язання системи лінійних рівнянь
! методом Гауса з вибором головного елемента.
! В - розширена матриця коефіцієнтів
! з розмірами KY*KV. Результат розташовується
! у крайньому правому стовпці на місце вільних членів
!-----
integer,intent(in)::KY,KV
real,dimension(KY,KV)::B
real::C1,C4
integer::L,i,j,K,L1
!-----
Do L=1,KY
  C1=0.0
  do i=L,KY
    C4=ABS(B(i,L))
    if(C4.GT.C1) goto 2
    goto 3;
2   K=i; C1=C4
3   end do
      do j=L,KV
        C1=B(K,j); B(K,j)=B(L,j); B(L,j)=C1
      end do
      K=L+1
      do j=K,KV
        B(L,j)=B(L,j)/B(L,L)
      end do
      if(K.GT.KY) goto 7
      do i=K,KY
        do j=K,KV
          B(i,j)=B(i,j)-B(i,L)*B(L,j)
        end do
      end do
    end do
7 do L=2,KY
  j=KY-L+2; K=j-1
  do L1=1,K
    i=K-L1+1
    B(i,KV)=B(i,KV)-B(i,j)*B(j,KV)
  end do
end do
Return
End subroutine SYS
!-----
```

Процедурою `sys` реалізовано відомий алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь за схемою Гауса з вибором головного елемента [48].

Цю процедуру можна було б не включати до ПЗ ДГМ і у програмах визначення періодичних розв'язків нелінійних диференційних рівнянь використовувати аналогічну процедуру із пакету стандартних підпрограм тієї чи іншої бібліотеки. Її присутність у ПЗ ДГМ передбачає випадок, коли користувачеві з тих чи інших причин такий пакет стандартних підпрограм є недоступним. Присутність у Блоці 4 цієї процедури підвищує автономність ПЗ ДГМ.

Перед звернення до цієї процедури всім її формальним параметрам необхідно надати значення, зокрема параметру v – значення розширеної матриці коефіцієнтів (вільні члени рівнянь – у крайньому правому стовпці), ku – порядок системи (кількість скалярних рівнянь у системі), kv – кількість стовпців матриці v ($kv=ku+1$). Процедура розташовує розв'язок (значення невідомих системи лінійних рівнянь) у крайньому правому стовпці, на місця вільних членів (правих частин рівнянь).

2.2.4.2. Процедура для лінійної інтерполяції кривої намагнічування

Текст процедури:

```

Subroutine INTLIN(X,Y,YX,X1,DX,XT,M)
!-----
! Процедура лінійної інтерполяції кривої намагнічування
! X - абсциса; Y - ордината; YX - похідна
! XT(M) - таблиця для нелінійної частини
! X1 - початкова абсциса нелінійної частини
! DX - крок таблиці
!-----
Implicit none
integer,intent(in)::M
real,intent(in)::X,X1,DX
real,dimension(M),intent(in)::XT
real,intent(out)::Y,YX
integer::j
real::AX,ZX,XM
!-----
ZX=sign(1.,X); AX=abs(X)
If(AX.GT.X1) goto 1
!-----
! Початкова лінійна частина
!-----
YX=XT(1)/X1; Y=ZX*YX*AX
Return
1 XM=X1+(M-1)*DX
if(AX.ge.XM)goto 2
!-----
! Нелінійна частина
!-----

```

```

      j=(AX-X1)/DX+1
      YX=(XT(j+1)-XT(j))/DX
      Y=ZX*(XT(j)+YX*(AX-(X1+(j-1)*DX)))
      return
!-----
! Кінцева лінійна частина
!-----
2 YX=(XT(M)-XT(M-1))/DX
  Y=ZX*(XT(M)+YX*(AX-XM))
  Return
End subroutine INTLIN

```

Ця процедура призначена для інтерполяції із таблиці, якою задається безгістерезисна характеристика намагнічування – наприклад, залежність індукції магнітного поля у феромагнетик від його напруження або залежність потокозчеплення котушки з феромагнітним осердям від її струму. Передбачається, що ця крива задається тільки для додатніх значень абсциси (крива є симетричною непарною) і розбивається на три частини: початкову лінійну, яка проходить через початок координат, криволінійну (коліно) і заключну лінійну (після коліна насичення). При такій розбивці чисельно відображається тільки нелінійна частина: необхідно задати значення абсциси (напруження чи струму) початку нелінійної частини – x_1 , крок між вузлами (вузли рівновіддалені) – Δx , кількість вузлів таблиці – m і таблицю значень ординат (індукція чи потокозчеплення) у вузлах – x_t . При цьому перший вузол таблиці – це точка стикування початкової лінійної частини і нелінійної частини (коліна), передостанній вузол – точка стикування нелінійної частини із кінцевою лінійною частиною; останній вузол також лежить на кінцевій лінійній частині.

Алгоритм, за яким працює процедура, є наступним.

Якщо задане значення абсциси x (за абсолютною величиною) є меншим від x_1 , то екстраполяція здійснюється за прямою лінією, що проходить через початок координат і перший вузол нелінійної частини кривої намагнічування. Якщо задане значення абсциси x виходить справа за межі нелінійної частини, то екстраполяція здійснюється за прямою лінією, проведеною через два останні вузли таблиці (передостанній вузол завершує нелінійну частину і останній лежить на лінійній частині). Якщо задане значення абсциси x є у межах нелінійної частини кривої намагнічування, то визначаються два найближчі вузи, через них проводиться пряма лінія і за нею здійснюється інтерполяція.

Знайденому значенню ординати y присвоюється знак абсциси x . Обчислюється значення похідної як тангенс кута нахилу відповідного відрізка ломаної лінії, що наближує криву намагнічування, і його значення присвоюється формальному параметру y_x .

Глава 3

МЕТОДИКА ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

У цій главі розглянемо методику створення чисельної моделі нелінійного коливання з використанням теоретичних положень глави 1 і описаного у главі 2 ПЗ ДГМ.

Насамперед наголосимо, що мова йтиме про моделі, які відповідають системам диференційних рівнянь виключно виглядів (1.64) – (1.67).

Створення чисельної моделі нелінійних коливань передбачає виконання наступних етапів.

1. Запис системи диференційних рівнянь, що описують коливну систему, і приведення її до одного із виглядів (1.64) – (1.67).

2. Аналіз нелінійностей системи під кутом зору класифікації, описаної далі у розділі 3.2.1. Якщо серед нелінійностей є такі, що відносяться до другої і/або третьої груп, і вони відрізняються від тих, що розглянуті далі у розділах 3.2.1.1 і 3.2.1.2, то для цих нелінійностей необхідно розробити миттєві моделі на періоді (півперіоді) на зразок тих, що наведені у розділах 3.2.1.1 і 3.2.1.2, і здійснити їх програмну реалізацію, а розроблені процедури долучити до Блоку 5 ПЗ ДГМ.

3. Розробка блоку програмних компонент користувача для даної задачі (див. рис. 2.1). До цього блоку належать:

головна програма;

процедура `MODEL`, що реалізує миттєву математичну модель процесу на періоді (півперіоді);

процедура `OUTP`, що реалізує алгоритм обробки результатів і їх запис до вихідного файлу.

Щодо останньої процедури. Якщо користувача задовольняє рівень обробки результатів, реалізований стандартною процедурою `OUTP`, описаною нижче у розділі 3.3 (вона віднесена до Блоку 5 ПЗ ДГМ), то створювати свій варіант цієї процедури користувач не мусить. Необхідність у його розробці виникає тоді, коли потрібна масштабніша обробка результатів, наприклад – аналіз стійкості отриманого розв'язку, побудова графіків та таблиць тощо.

3.1. Структура головної програми

Призначення головної програми – введення вхідних даних, їх первинна переробка і організація передачі процедурам `HARMOSC` і `MODEL` та виклик для виконання процедури `HARMOSC`.

В описовій частині програми необхідно описати:

а) реальний одномірний масив, що зберігає значення вектора змінних вигляду (1.89), а останній елемент масиву – значення параметра h ;

б) реальний одномірний масив для складеного вектора амплітуд змушувальної сили вигляду (1.81);

в) цілий одномірний масив для вектора керування, що має 10 елементів;

г) сукупність реальних і цілих простих змінних і масивів, що необхідні для передачі інформації процедурам **HARMOSC** і **MODEL**.

Завершується описова частина описом спільної ділянки пам'яті, що має забезпечити передачу частини даних від головної програми до процедури **MODEL**.

Вхідні дані, які вводяться головною програмою із вхідного файлу, розділяються на дві частини:

1) дані, які потрібно передати процедурі **HARMOSC** (передаються через формальні параметри);

2) дані, яку потрібно передати процедурі **MODEL** (сюди входить у т.ч. інформація про нелінійні зв'язки у системі) способами, відмінними від способу передачі через формальні параметри. У всіх наведених далі прикладах – це передача за допомогою спільних ділянок пам'яті (**Common**).

У тій частині програми, де виконується первинна переробка введених даних, необхідно викликати для виконання процедуру **sizesv** (описана далі у цьому розділі, входить до Блоку 5 ПЗ ДГМ), що визначає розміри простого і складеного векторів амплітуд, значення яких необхідні при формуванні складеного вектора амплітуд змушувальної сили і початкового значення вектора змінних, та долучаються до інформації, що має бути передана процедурі **HARMOSC**. Там же надається початкове значення \vec{X}_0^* (див. формулу (1.97)) відшукуваному вектору змінних (його складові – складений вектор амплітуд вигляду (1.82), кругова частота основної гармоніки ω і параметр h) і надається значення складеному вектору амплітуд \vec{E}_r^* вигляду (1.81) змушувальної сили (у випадку вимушених коливань).

У завершальній частині головної програми, після того як всім формальним параметрам процедури **HARMOSC** уже присвоєні потрібні значення (опис її формальних параметрів - див. розділ 2.2.3.1), ця процедура викликається для виконання.

Приклад тексту головної програми:

```
Program Main
!-----
! Програма розрахунку нелінійних коливань
!-----
!--- Описова частина програми
  Implicit none
  real,dimension(14)::X
  real,dimension(12)::E
  integer,dimension(10)::KER
  real::A,B,C,OM,EPS1,EPS2,H1,HM
  integer::K,NG,NK
  Common/MP/A,B,C !--- спільна ділянка із процедурою MODEL
!-----
!--- Введення даних із вхідного файлу
  Open(1,File='DaniIn.dat',status='old')
  Read(1,*)A,B,C,Eс
```

```

      Read(1,*)OM, EPS1, EPS2, H1, HM
!-----  A,B,C - дані для передачі процедури  MODEL
!-----  Ec - амплітуда змушувальної сили
!-----  OM - кругова частота
!-----  H1 - значення парам. h, при якому необх. уточ. корінь
!-----  HM - максимальне значення параметру h
!-----  EPS1 - точність розрахунку h-характеристики
!-----  EPS2 - точність для методу Ньютона
      Read(1,*)KER  !---  KER - масив керуючих змінних
      Read(1,*)K    !---  K - порядок системи диф. рівнянь
      Close(1)
!-----
!--- Виведення у вихідний файл введених даних
      Open(1,file='DaniOut.dat')
      write(1,1)
      1 format(4X,'Введені дані:')
      write(1,2)A,B,C,Ec
      2 format(2X,' A = ',E10.4,' B = ',E10.4,
      & ' C = ',E10.4, ' Ec = ',E10.4)
      write(1,3)OM, EPS1, EPS2, H1, HM
      3 format(2X,' OM=',E10.4,' EPS1=',E10.4,
      & ' EPS2=',E10.4,' H1=',E10.4,' HM=',E10.4)
      write(1,5)KER
      Write(1,4)K
      4 format(2X,' K=',i2)
      5 Format(2X,10I5)
!-----
      Call SizesV(KER(1),K,KER(8),NG,NK)
      Write(1,3)NG,NK
!-----  NG - розмір простого вектора амплітуд
!-----  NK - розмір складеного вектора амплітуд
      E=0.; E(NG+1)=Ec
      X=0; X(NK+1)=OM
!--- сформували вектор амплітуд E змушувальних сил
!--- і початкове значення вектора X
      write(1,6)
      6 format(/2X,'Р о з р а х у н о к :')
      Call HARMOSC(K,X,E,NK,HM,H1, EPS1, EPS2, KER)
      Close(1)
      Stop
      End Program Main

```

В описовій частині наведеної вище головної програми:
 реальному одномірному масиву, що зберігає значення вектора змінних вигляду (1.89) і параметра h , надано ім'я x ;
 реальному одномірному масиву для складеного вектора амплітуд змушувальної сили надано ім'я E ;
 цілому одномірному масиву (вектору керування) надано ім'я KER ;
 реальним і цілим простим змінним, за допомогою яких передаються дані процедурам HARMOSC і MODEL, надані імена $A, B, C, OM, EPS1, EPS2, H1, HM, K, NG, NK$.

Розглянутий вище приклад головної програми можна використовувати як зразок при розробці блоків програмних компонент користувача у всіх випадках моделювання нелінійних коливань. Як зразок він і використаний у всіх тестах і прикладах глави 4.

Наведемо текст процедури `sizesv`, яку викликає для виконання головна програма. Ця процедура за заданими значеннями формального параметру `IG` (якщо `IG=0`, то враховуються постійні складові і всі гармоніки, і якщо `IG=1`, то враховуються гармоніки тільки непарних порядків; формальному параметру `IG` відповідає фактичний параметр `KER(4)`), формального параметру `K` (порядок системи диференціальних рівнянь, періодичний розв'язок якої шукається) і формального параметру `N` (номер найвищої враховуваної гармоніки, йому відповідає фактичний параметр `KER(8)`) визначає значення `NG` (кількість елементів простого вектора амплітуд) і `NK` (кількість елементів складеного вектора амплітуд).

Процедуру `sizesv` віднесемо до Блоку 5 ПЗ ДГМ. Її текст наступний:

```

Subroutine SizesV(IG,K,N,NG,NK)
!-----
! Процедура визначення розміру NK складеного вектора
! амплітуд змушувальної сили і вектора невідомих
! і розміру NG простого вектора амплітуд
!-----
  implicit none
  integer,intent(in)::IG,K,N
  integer,intent(out)::NG,NK
!-----
! IG - якщо =0, то врахов. усі гармоніки і пост. складові;
!       якщо =1, то врахов. тільки непарні гармоніки
! K - порядок системи диф. рівнянь, що розв'язується
! N - номер найвищої враховуваної гармоніки
!-----
  NG=2*N+1; if(IG.eq.1)NG=N+1
  NK=K*NG
  Return
End subroutine SizesV
! © Copyright, 2008, Л. Глухівський
!-----

```

3.2. Програмування миттєвої на періоді (півперіоді) моделі процесу

При чисельному моделюванні нелінійних коливань (визначенні періодичного розв'язку нелінійної системи диференціальних рівнянь) розрахунки виконуються на одному періоді (чи півперіоді, якщо у періодичних залежностях змінних присутні тільки непарні гармоніки), що містить m рівновіддалених вузлів. Значення змінних процесу у цих вузлах взаємозв'язані накладеними зв'язками, лінійними чи нелінійними. Під миттєвою математичною моделлю періодичного процесу на періоді (півперіоді) будемо розуміти алгоритм визначення у всіх вузлах періоду (чи півперіоду) значень одних змінних за значеннями інших змінних, при цьому другі виступають аргументами і перші – функціями. По відношенню до рівнянь виглядів (1.64) – (1.67) аргументом є векторна змінна \vec{x} і функціями – векторні змінні \vec{y} і \vec{z} . Цю математичну модель

реалізує процедура `MODEL`, яку викликає для виконання процедура `CALCULU` (див. розділ 2.2.3.2).

Здебільше процедурою `MODEL` значення функцій \bar{y} і \bar{z} можуть визначатися у кожному із вузлів періоду (півперіоду) незалежно від того, якими є ці значення у інших вузлах. Тоді порядок обходу вузлів при обчисленні за значенням \bar{x} значень \bar{y} і \bar{z} у цих вузлах може бути довільним, найпростіше – від першого до останнього з номером m . Однак при певних обставинах порядок обходу вузлів для обчислення в них значень \bar{y} і \bar{z} чи їх окремих складових частин мусить бути іншим, наприклад, починаючи від деякого внутрішнього вузла і до останнього, і потім – від першого до цього, від котрого починався обхід. Такими обставинами може бути специфічність нелінійних зв'язків між змінними.

Отже, перед тим, як розглядати типову структуру процедури `MODEL`, доцільно спочатку розглянути види нелінійностей, що можуть бути присутні у задачах розрахунку нелінійних коливань.

3.2.1. Види нелінійностей

Нелінійності у зв'язках між параметрами системи, коливання у якій моделюються, можуть бути найрізноманітнішими. Окремі види нелінійностей можуть мати особливості, що впливають на спосіб їх представлення і використання у алгоритмах ДГМ. Тому необхідно їх класифікувати під цим кутом зору.

У різних авторів можна зустріти різні підходи до класифікації нелінійностей [45, 52, 56]. Тут її проведемо виключно з огляду на специфіку врахування нелінійних зв'язків при чисельному моделюванні нелінійних коливань пропонованим методом.

Нелінійності, з якими будемо далі оперувати, тобто функціональні залежності вигляду

$$y = y[x], \quad (3.1)$$

де x - аргумент і y - функція і ці дві змінні зв'язані між собою нелінійно, розділимо на такі три групи :

а) група 1, до якої віднесемо однозначні нелінійності - всі види неперервних функцій, як гладких (тут під ними будемо розуміти функції, перші похідні яких не мають розривів), так і негладких, тобто таких, графіки яких при деяких значеннях аргументу мають зломи, а графіки їх перших похідних – конечні розриви. Приклади таких нелінійностей ілюструються рисунками 3.1 – 3.6 .

На рис. 3.1 зображено графік нелінійної залежності сили пружності конічної пружини як функції відхилення x від стану рівноваги, яка аналітично може бути представлена формулою [56]

$$F_{np} = a x + b x^2 + c x^3. \quad (3.2)$$

На рис. 3.2 зображено типову безгістерезисну криву намагнічування феромагнітного матеріалу, тут змінна x може позначати напруженість магнітного поля або струм котушки, осердя якої виготовлене із феромагнітного матеріалу, і

змінна y - індукцію магнітного поля або потокозчеплення котушки. Найчастіше цю криву задають у вигляді таблиці, із якої значення вибираються шляхом інтерполяції.

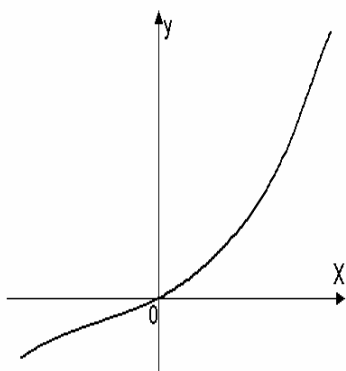


Рис. 3.1. Пружна характеристика кінчної пружини

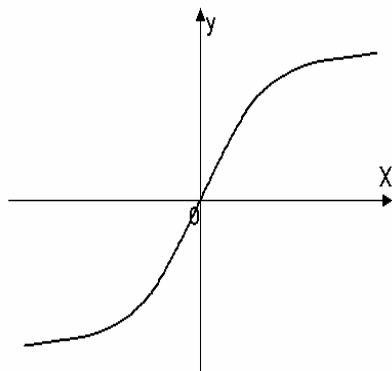


Рис. 3.2. Крива намагнічування

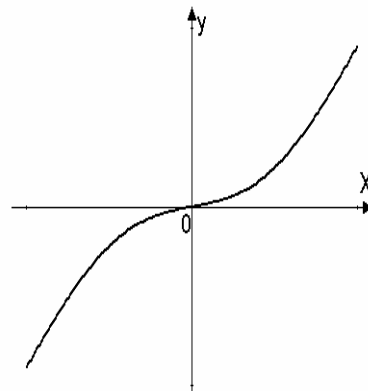


Рис. 3.3. Сила опору рухові тіла в газовому середовищі

На рис. 3.3 зображено криву залежності сили опору рухові твердого тіла у газовому середовищі у залежності від швидкості руху X . При певній ідеалізації цю залежність можна задати виразом [56]

$$F_{on} = \alpha |\dot{x}| \dot{x}, \quad (3.3)$$

де \dot{x} - похідна відхилення x тіла за часом, тобто швидкість руху тіла.

На рис. 3.4 показано залежність сили пружності пружини з підресорником [56]. На рисунку вона показана як ломана лінія, що має точку злому і утворена двома прямими лініями. Точка злому відповідає відхиленню, при якому починає навантажуватися підресорник. Це могла б бути й неперервна лінія, утворена двома кривими лініями, що стикаються у точці злому.

На рис. 3.5 зображена функція обмеження [56], яка реалізується, наприклад,

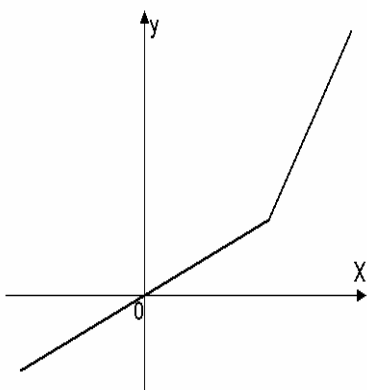


Рис. 3.4. Характеристика пружини з підресорником

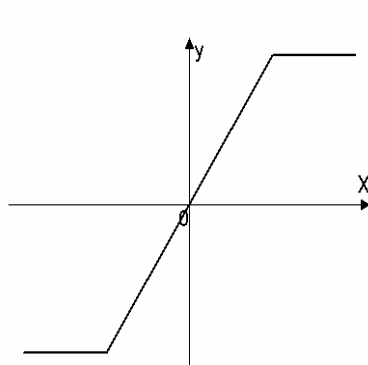


Рис. 3.5. Функція обмеження

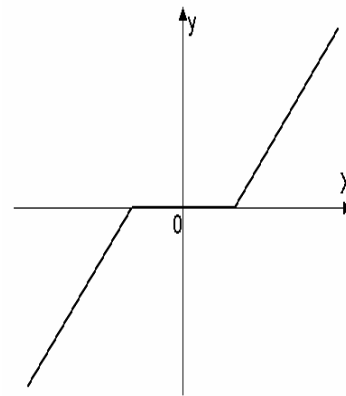


Рис. 3.6. Характеристика зони нечутливості

гідралічним сервомотором з керувальним золотником. У [45, 52] вона іменується характеристикою зони насичення. Це теж ломана лінія, що має дві точки злому і утворена трьома прямими лініями.

На рис. 3.6 показано характеристику зони нечутливості. Це може бути, наприклад [52], залежність швидкості електричного двигуна постійного струму із незалежним збудженням від напруги на якорі при наявності на валу моменту статичного навантаження.

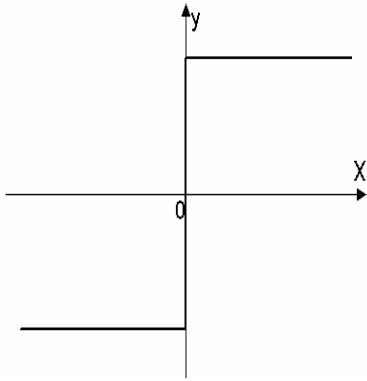


Рис. 3.7. Релейна функція

До першої групи нелінійностей віднесемо також функції, що мають конечні розриви. Прикладом такої функції є зображена на рис. 3.7 релейна характеристика (характеристика ідеального реле) [45, 52]. Вона ж відображає силу кулонівського (сухого) тертя [56], якщо аргументом залежності є не відхилення x , а похідна відхилення за часом \dot{x} , тобто швидкість, і тоді їй відповідає формула

$$F_{\kappa}[\dot{x}] = R \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}, \quad (3.4)$$

де R - модуль сили тертя.

Якщо віднесені до першої групи залежності мають конечні розриви, то необхідно визначитись із їх значеннями (і значеннями їх похідних) у точках розривів, щоб це не призводило до проблем при моделюванні. Так, можемо прийняти, що функція (3.4) у точці розриву (при $\dot{x} = 0$) має таке ж значення, як і у точці, віддаленій від неї на безконечно малу віддаль (зліва чи справа), і тоді цим значенням є R або $-R$;

б) група 2, до якої віднесемо однозначні нелінійності з умовами. У цій групі функціональний зв'язок між змінними x і y задають дві або більше залежностей

$$\begin{aligned} y &= y_1[x]; \\ &\vdots \\ y &= y_k[x], \end{aligned} \quad (3.5)$$

кожна з яких може бути вигляду (3.1), і для визначення зв'язку між аргументом і функцією у тому чи іншому вузлі періоду (півперіоду) вибирається одна із них у залежності від виконання деякої умови. Прикладом тут може бути вольт-амперна характеристика керованого діода (тиристора), яка утворюється двома залежностями: одна описує роботу тиристора, коли він працює як діод (його опір при додатній прикладеній напрузі є суттєво меншим, ніж при від'ємній), і друга, коли опір тиристора є великим і незмінним, незалежно від знаку прикладеної напруги. За цими залежностями опір тиристора визначається не тільки як функція аргументу (напруги чи струму), але й додаткової умови – наявності чи відсутності імпульсу на відкриття і чи цей імпульс подається тоді, коли прикладена напруга є додатньою. Розгляд цих характеристик детальніше проведений у розділі 3.2.1.1;

в) група 3, до якої віднесемо багатозначні нелінійності гістерезисного вигляду. На рисунках 3.8 – 3.10 показані зразки таких залежностей [45, 52]. На рис. 3.8 зображена реальна релейна характеристика, що має вигляд гістерезисної петлі. На рис. 3.9 зображена неоднозначна (гістерезисна) характеристика із зоною насичення. На рис. 3.10 зображена гістерезисна характеристика елементів систем, що мають люфти (зазори) чи мертві ходи.

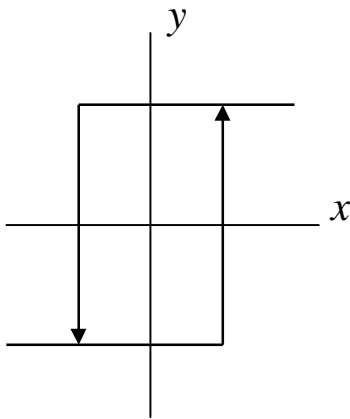


Рис. 3.8. Гістерезисна релейна характеристика

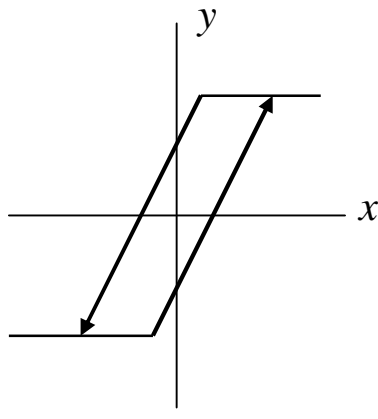


Рис. 3.9. Гістерезисна характеристика зони насичення

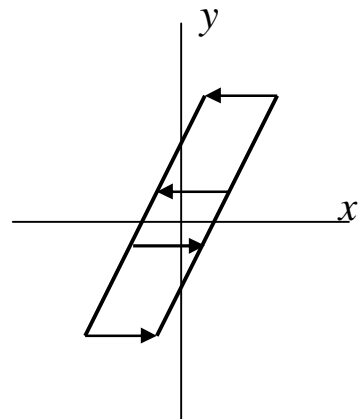


Рис. 3.10. Гістерезисна характеристика люфта (зазору)

Дальше, у розділі 3.2.1.2, розглянуто математичну модель на періоді феромагнітного елемента з гістерезисною кривою намагнічування.

Залежності (3.1), (3.5) у нелінійностях першої і другої груп і окремі гілки гістерезисних петель (нелінійностей третьої групи) можуть задаватися як аналітично, так і в табличному вигляді з використанням того чи іншого інтерполяційного алгоритму.

3.2.1.1. Миттєва модель на періоді керованого вентиля

Характерним прикладом нелінійності другої групи вигляду (3.5) є функціональний зв'язок між напругою u і струмом i керованого вентиля (тиристора), тобто його вольт-амперна характеристика

$$u = u[i] \quad (3.6)$$

і диференціальна (ом-амперна) характеристика, тобто залежність диференціального опору r_{∂} вентиля від його струму

$$r_{\partial} = du/di = r_{\partial}[i]. \quad (3.7)$$

Для діода (некерованого вентиля) характеристики (3.6) і (3.7) показані на рис. 3.11 і 3.12 суцільними лініями (це нелінійності першої групи). Коли струм вентиля має знак "+", то він є відкритим, і тоді його активний опір має деяке мінімальне значення r_{\min} , а коли струм стає від'ємним, то діод переходить до

закритого стану, і його активний опір отримує деяке максимальне значення r_{\max} . За такими характеристиками при заданому значенні струму i напруга і опір вентиля визначається у будь-якому вузлі періоду періодичного режиму незалежно від значень струму цього вентиля у інших вузлах періоду.

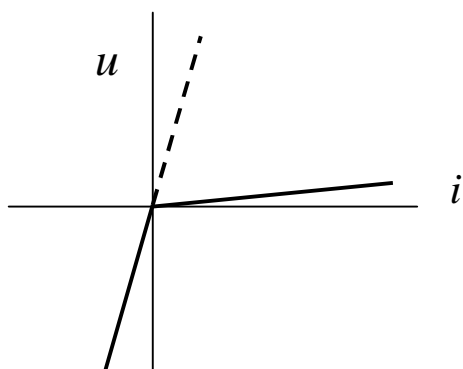


Рис. 3.11. Вольт-амперна характеристика вентиля

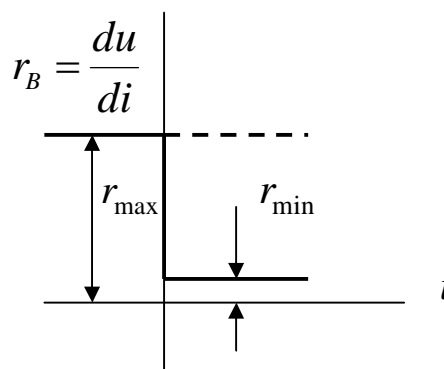


Рис. 3.12. Залежність від струму диференційного опору вентиля

Характеристики керованого вентиля (тиристора), на відміну від характеристик діода, є характеристиками з умовами. Щоб тиристор перейшов від непровідного стану до провідного, для цього недостатньо прикладеній напрузі і його струмові змінити знак з мінуса на плюс, додатковою умовою є наявність на спеціальному керуючому електроді імпульса. Отже, є дві умови переходу тиристора від непровідного стану до провідного: знак "+" його струму і одночасна наявність на його керуючому електроді імпульсу на відкриття. Якщо будь-яка з цих двох умов не виконується, то тиристор перейти від непровідного стану до провідного не може.

Тому для тиристора у періодичному процесі характеристики (3.6) і (3.7) є такими ж, як і для діода, тільки для тієї частини періоду, яка розпочинається відразу після імпульсу на відкриття (за умови, що на час його дії напруга на тиристорі і його струм є позитивними) і аж до моменту переходу струму тиристора через нуль у від'ємну область. У інші частини періоду ці характеристики зображаються прямими лініями на рис. 3.11 без злому і на рис. 3.12 - без розриву (на цих рисунках суцільні лінії з продовженнями пунктирними лініями).

Така особливість характеристик керованого вентиля приводить до того, що для визначення у вузлі значень спаду напруги на ньому і його опору недостатньо тільки інформації про знак його струму у цьому вузлі. Якщо струм вентиля у деякому вузлі має знак "+", то вважати його відкритим, як уже вище зазначалося, можна тільки за таких умов:

- а) область дії імпульсу на відкриття покриває розглядуваний вузол (перший із таких вузлів у області дії імпульсу при їх розгляді зліва направо відкриває зону провідності тиристора; зона провідності завершується вузлом, у якому струм ще є додатнім і змінюється на від'ємний у наступному вузлі, що відкриває зону непровідності);
- б) область дії імпульсу не покриває розглядуваного вузла, але у попередньому вузлі вентиль був відкритим, тобто зона провідності ще триває.

Перевірку виконання цих умов окремо для будь-якого вузла на періоді зробити неможливо, при цьому мають братися також до уваги значення струму у попередніх вузлах і часова координата імпульсу.

При створенні миттєвої моделі на періоді керованого вентиля потрібно врахувати, що розташування імпульсу на відкриття можливе за двома варіантами, показаними на рис. 3.13. У варіанті "а" дія імпульсу з кутовою тривалістю $\Delta\alpha_3$ і віддаллю α_3 від початку періоду завершується ще до кінця періоду. У варіанті "б" кутова координата α_3 моменту виникнення імпульсу близька до кінця періоду, і дія імпульсу з тією самою тривалістю $\Delta\alpha_3$ завершується вже на наступному періоді, або ж, що є тим самим, після початку розглядуваного періоду.

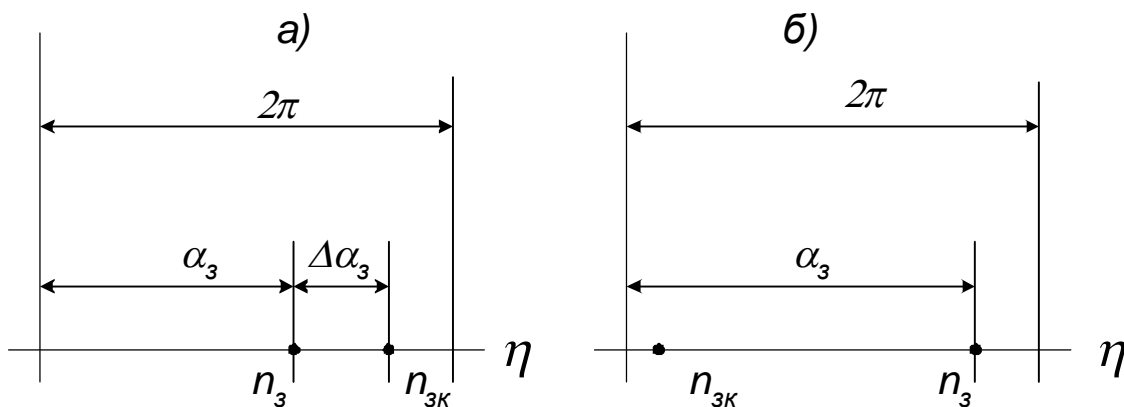


Рис. 3.13. Два варіанти розташування імпульсу запалювання на періоді

Алгоритм функціонування миттєвої на періоді моделі тиристора є наступним.

Будемо вважати значення вузлового вектора \vec{i}_g вигляду (1.37) струму вентиля заданим.

У всіх вузлах періоду опір вентиля r_v задамо максимальним r_{\max} . Далше за заданими значеннями координати α_3 і ширини $\Delta\alpha_3$ імпульса запалювання визначимо: номер вузла n_3 на періоді, який відповідає початку (фронтові) імпульса і відкриває область дії імпульса; номер вузла n_{3k} , який відповідає кінцевій координаті імпульса і замикає область дії імпульса. Після цього шляхом сканування вузлів від n_3 до n_{3k} визначимо перший вузол, у якому компонента вектора \vec{i}_g має знак "+". Порядковий номер цього вузла n_z є початковою координатою зони провідності вентиля. Далше скануємо всі вузли, починаючи від n_z , у порядку зростання номера, і у всіх вузлах, де значення компонент вектора \vec{i}_g мають знак "+", опір вентиля змінюють на r_{\min} . Сканування завершується у разі виявлення вузла, у якому значення компоненти вектора \vec{i}_g стає від'ємним, що означає вихід за межі зони провідності вентиля.

У результаті виконання цих операцій обчислюється значення вузлового вектора \vec{r}_e опорів вентиля. Знаючи у всіх вузлах періоду миттєві значення струму вентиля і його опору, тобто – значення векторів \vec{i}_e і \vec{r}_e , обчислюємо, шляхом множення їх однойменних компонент, значення вузлового вектора \vec{u}_e напруги вентиля.

Алгоритм обчислення значень вузлових векторів \vec{r}_e і \vec{u}_e за значенням вузлового вектора \vec{i}_e і значеннями координат α_3 і $\Delta\alpha_3$ імпульсу запалювання реалізовано наведеною нижче процедурою VENPER (віднесемо її до Блоку 5 ПЗ ДГМ).

```

      Subroutine VENPER(STR,M,AZ,DAZ,RMAX,RMIN,UC,RV)
!-----
! Процедура обчислення вузлового вектора UC напруги вентиля
! і вузлового вектора RV його опорів
! за заданим вузловим вектором струму STR
!-----
      Implicit none
      integer,intent(in)::M
      real,intent(in)::DAZ,RMAX,RMIN
      real,dimension(M),intent(in)::STR
      real,dimension(M),intent(out)::UC,RV
      integer::i,IZ,NZ,NZD
      real::AZ,AM,SM,AZDAZ
      real,parameter::PI2=6.2832
!-----
! Вхідні величини:
!   STR - вузловий вектор струму вентиля
!   M - кількість точок на періоді
!   AZ - кут запалювання вентиля, рад.
!   DAZ - ширина імпульса запалювання, рад.
!   RMAX - опір закритого вентиля
!   RMIN - опір відкритого вентиля
! Вихідні величини:
!   UC - вузловий вектор напруг вентиля
!   RV - вузловий вектор опорів вентиля
!-----
      AM=M/PI2
      10 if(AZ.le.PI2) goto 11
      AZ=AZ-PI2; goto 10
      11 AZDAZ=AZ+DAZ; if(AZDAZ.le.PI2) goto 20
      AZDAZ=AZDAZ-PI2; goto 11
!---- значення кутів запалювання привели до <= PI2
!-----
      20 NZ=AZ*AM+1.5; NZD=AZDAZ*AM+1.5
      If(NZ.gt.M) NZ=NZ-M
      If(NZD.gt.M) NZD=NZD-M
!-- NZ - номер вузла включення запалювання
!-- NZD - номер вузла виключення запалювання
      RV=RMAX
!-- Опір вентиля у всіх вузлах задали максимальним

```

```

!-----
      SM=0.
      If(NZD.lt.NZ) goto 30
!-----
!  Шукаємо вузол ввімкнення за варіантом "а"
      Do i=NZ,NZD
          if(STR(i).gt.SM) goto 40
      end do; goto 50
!-----
!  Шукаємо вузол ввімкнення за варіантом "б"
      30 do i=NZ,M
          if(STR(i).gt.SM) goto 40
      end do
      Do i=1,NZD
          if(STR(i).gt.SM) goto 40
      end do; goto 50
      40      IZ=i
!-- знайшли IZ - номер вузла ввімкнення вентиля
      Do i=IZ,M
          if(STR(i).gt.SM) RV(i)=RMIN
          if(STR(i).le.SM) goto 50
      end do
      Do i=1,IZ
          if(STR(i).gt.SM) RV(i)=RMIN
          if(STR(i).le.SM) goto 50
      end do
!-- у всіх вузлах зони провідності вентиля
!-- його опір зробили рівним RMIN
      50 UC=STR*RV
!-- обчислили вузловий вектор UC напруги вентиля
      Return
      End subroutine VENPER
!-- © Copyright, 2005, Л. Глухівський
!-----

```

Додаткових пояснень ця процедура не потребує, оскільки коментарів у її тексті цілком достатньо для відстеження логіки і реалізації алгоритму.

3.2.1.2. Миттєва на періоді модель нелінійності гістерезисного вигляду

Розглянемо одну із нелінійностей третьої групи – гістерезисного вигляду, зокрема - індуктивний елемент з феромагнітним осердям, вебер-амперна характеристика якого показана на рис. 3.14 .

На цьому рисунку зображено основну криву намагнічування, що проходить через початок координат, і дві гілки – верхню і нижню, що утворюють граничну петлю гістерезису [4, 38]. Абсцису лівої точки злиття верхньої і нижньої гілок позначимо i_L і абсцису правої точки злиття цих гілок позначимо i_R . Так званих частинних симетричних і несиметричних петель гістерезису до уваги приймати не будемо і будемо вважати, що зв'язок між потокозчепленням і струмом індуктивного елемента у

періодичному процесі виражає або основна крива намагнічування, якщо мінімальне і максимальне значення струму на періоді не виходять за межі значень i_L і i_R , або ж цей зв'язок виражає гранична петля гістерезису, якщо мінімальне і максимальне значення струму на періоді виходять за ці межі.

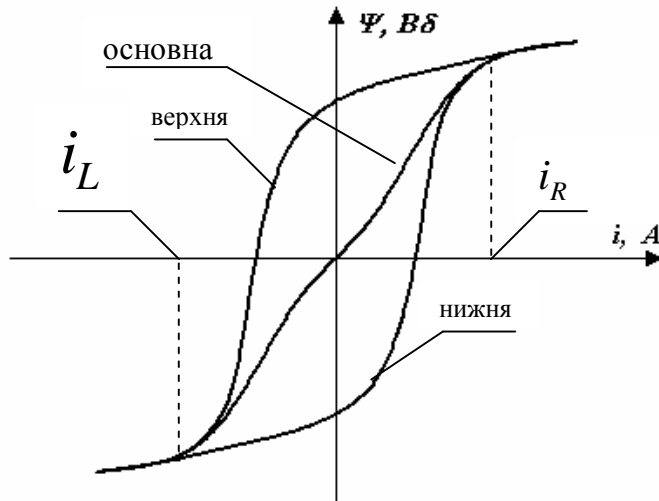


Рис. 3.14. Петля гістерезису

Під миттєвою математичною моделлю на періоді (півперіоді) гістерезисного індуктивного елемента [26] будемо розуміти алгоритм обчислення на сукупності m вузлів періоду (півперіоду) періодичного процесу значень потокозчеплення ψ і диференційної індуктивності $L = d\psi/di$ індуктивного елемента за значеннями його струму i у цих же вузлах періоду.

Вхідною величиною моделі є значення вузлового вектора струму \vec{i}_e індуктивного елемента. Алгоритм миттєвої моделі на

періоді (півперіоді) гістерезисного індуктивного елемента є наступним.

Серед усіх компонент вузлового вектора струму \vec{i}_e шукаємо максимальну i_{\max} і мінімальну i_{\min} його компоненти, а також номер n_{\min} , який у векторі має мінімальна компонента. При цьому можливі такі варіанти:

1) i_{\min} є меншим від i_L і одночасно i_{\max} є більшим від i_R , тоді значення елементів вузлового вектора потокозчеплення шукаємо з використанням граничної петлі гістерезису. При цьому обхід вузлів періоду починаємо із вузла з номером n_{\min} . У наступному вузлі ($n_{\min} + 1$) значення струму уже буде більшим від i_{\min} (струм зростає), і отже у цих двох точках періоду зв'язок між ψ та i задає нижня гілка петлі. Просуваючись вузлами періоду від n_{\min} вправо і використовуючи в якості функції зв'язку між ψ та i нижню гілку, у кожному з вузлів визначаємо значення ψ і L та порівнюємо значення струму i із i_{\max} , і як тільки i стане більшим від i_{\max} , функцією зв'язку між ψ та i призначається верхня гілка. Просуваючись вузлами далі вправо і визначаючи у кожному вузлі значення ψ і L з використанням верхньої гілки, у кожному із вузлів порівнюємо значення струму i із i_{\min} . Як тільки i стане меншим від i_{\min} , функцією зв'язку між ψ та i знову призначається нижня гілка. Ці дії в вищеописаному порядку повторюються у всіх вузлах до кінця періоду і потім від першого вузла до вузла з номером $n_{\min} - 1$.

2) i_{\min} не є меншим від i_L або ж i_{\max} не є більшим від i_R , тоді функцією зв'язку між ψ та i у всіх вузлах періоду призначається основна гілка, і з її використанням у всіх вузлах періоду (тут вузли періоду можна обходити у порядку від першого до останнього) за значеннями струму i визначаються значення ψ і L .

Цей алгоритм реалізується наступною процедурою (віднесемо її до Блоку 5 ПЗ ДГМ):

```

Subroutine HISTPER(AL,STR,M,PS,LH,PST,XL,XP,DS,NH)
!-----
! Процедура обчислення вузлового вектора PS поточкозчеплення
! і вузлового вектора LH диференційних індуктивностей
! за заданим вузловим вектором струму STR
!-----
! AL - коефіцієнт звуження петлі гістерезису
! M - кількість елементів у вузлових векторах STR,PS,LH
! PST - таблиця, що задає петлю гістерезису
! XL,XP - ліва і права координати точок сходження гілок
! DS - крок таблиці
! NH - кількість вузлів таблиці
!-----
Implicit none
integer,intent(in)::M,NH
real,intent(in)::AL,XL,XP,DS
real,dimension(M),intent(in)::STR
real,dimension(3,NH),intent(in)::PST
real,dimension(3,NH)::PST1
real,dimension(M),intent(out)::PS,LH
integer::i,iN,NK
real::SN,SX
!-----
NK=2 ! NK - номер гілки петлі
!-----
if(AL.eq.0.) goto 3
SN=STR(1); SX=STR(1); iN=1
do i=2,M
  if(STR(i).gt.SN) goto 1
  SN=STR(i); iN=i
1  if(STR(i).lt.SX) goto 2
  SX=STR(i)
2  continue
end do
!-- визначили мінімальне SN і максимальне SX значення
!-- компонент вектора STR і номер iN мінімального
!-----
if(SN.lt.XL.and.SX.gt.XP) goto 4
!-----
!-- тільки за середньою гілкою
3 do i=1,M
  call INTLIST(NK,STR(i),PS(i),LH(i),PST,XL,XP,DS,NH)
end do
return
!-----

```

```

!-- одержання таблиці PST1 для звуженої петлі
4 do i=1,NH
    PST1(2,i)=PST(2,i)
    PST1(1,i)=PST(2,i)+AL*(PST(1,i)-PST(2,i))
    PST1(3,i)=PST(2,i)-AL*(PST(2,i)-PST(3,i))
end do

!-----
!-- за верхньою і нижньою гілками петлі
NK=3
do i=iN,M
    call INT HIST(NK,STR(i),PS(i),LH(i),PST1,XL,XP,DS,NH)
    if(NK.eq.3.and.STR(i).gt.XP) NK=1
    if(NK.eq.1.and.STR(i).lt.XL) NK=3
end do

!-- пройшли вправо по нижній гілці
!-----
do i=1,iN-1
    call INT HIST(NK,STR(i),PS(i),LH(i),PST1,XL,XP,DS,NH)
    if(NK.eq.3.and.STR(i).gt.XP) NK=1
    if(NK.eq.1.and.STR(i).lt.XL) NK=3
end do

!-- повернулися по верхній гілці
!-----
return
Contains
Subroutine INT HIST(NK,X,Y,YX,YT,XL,XP,DX,M)
!-----
!----- Процедура лінійної інтерполяції заданої
!----- таблицею петлі гістерезису
!-----
!-- NK - номер гілки пелі:
!--     1 - верхня
!--     2 - основна
!--     3 - нижня
!-- X - абсциса
!-- Y - ордината
!-- YX - похідна
!-- YT - таблиця, якою задана петля
!-- XL,XP - ліва і права координати точок сходження гілок
!-- DX - крок таблиці
!-- M - кількість вузлів таблиці
!-----
Implicit none
integer,intent(in)::M,NK
real,intent(in)::X,XL,XP,DX
real,dimension(3,M),intent(in)::YT
real,intent(out)::Y,YX
integer::j
!-----
If(X.LT.XL) goto 1
if(X.GT.XP) goto 2
!-----
!----- Інтерполяція у межах петлі

```

```

j=(X-XL)/DX+2
YX=(YT(NK,j+1)-YT(NK,j))/DX
Y=YT(NK,j)+YX*(X-(XL+DX*(j-2)))
Return
!-----
!----  Екстраполяція зліва
1 YX=(YT(NK,2)-YT(NK,1))/DX
Y=YT(NK,2)+(X-XL)*YX
return
!-----
!----  Екстраполяція справа
2 YX=(YT(NK,M)-YT(NK,M-1))/DX
Y=YT(NK,M-1)+(X-XP)*YX
return
End subroutine INTHIST
End subroutine HISTPER
!-- © Copyright, 2008, Л. Глухівський
!-----

```

Формальні параметри процедури `HISTPER` описані у коментарях, розташованих відразу після заголовку процедури. Все ж декілька із них потребують додаткових роз'яснень.

Про формальний параметр `AL`. Практика розрахунків показала, що чисельне моделювання періодичних процесів у системах, які містять нелінійні елементи гістерезисного вигляду, доцільно здійснювати у такому порядку.

Спочатку виконується розрахунок періодичного процесу за умови, що характеристиками всіх гістерезисних елементів є їх основні гілки, які проходять через початок координат (площі петель зводяться до нуля). Для цього формальному параметру `AL` присвоюється нульове значення, і цим самим верхні і нижні гілки петель суміщаються з основними гілками. Після цього розпочинається процес врахування гістерезису (див. відповідну частину процедури `HARMOSC`, розділ 2.2.2.1): у циклі, параметр якого приймає значення від одиниці до значення, заданого елементом `KEP(7)` формального параметра `KEP` процедури `HARMOSC`, змінюється значення `AL` від нуля до одиниці, і при цьому верхні і нижні гілки відступають від основної гілки і наближаються до своїх дійсних значень. При кожній зміні `AL` відбувається уточнення розв'язку ітераційним методом Ньютона. Розв'язок, одержаний при значенні `AL`, рівному одиниці, і є тим, що відповідає періодичному процесу у схемі з врахуванням гістерезису.

Саме для того, щоб реалізувати такий алгоритм, і введений до списку формальних параметрів процедури `HISTPER` формальний параметр `AL`.

Формальні параметри `PST`, `XL`, `XP`, `DS`, `NH` цієї процедури задають петлю гістерезису і мають наступний зміст:

`DS` – крок таблиць, якими задаються гілки петлі;

`XL` – координата лівої точки сходження гілок петлі;

`XP` – координата правої точки сходження гілок петлі;

`PST(3,NH)` – масив, що зберігає три таблиці значень ординат внутрішніх вузлів трьох гілок петлі (у масиві `PST` перший рядок – таблиця для верхньої гілки, другий рядок – для основної гілки і третій рядок – нижньої гілки);

n_n – кількість вузлів кожної таблиці.

Значення x_L і x_R є початками лінійних частинах гілок, що зійшлися, і при цьому x_L є абсцисою другого вузла таблиць зліва і x_R – другого вузла таблиць справа. Таке розташування цих точок дозволяє за двома крайніми вузлами здійснювати лінійну екстраполяцію зліва і справа від таблиць.

Процедура `INTSTR` має свою внутрішню процедуру `INTNIST`, призначення якої – лінійна інтерполяція з таблиці, що задає одну із гілок петлі. Додаткових пояснень ця процедура не потребує, оскільки всі вони достатньо детально описані у коментарях.

3.2.2. Допоміжні процедури для спрощення розробки процедури MODEL

Призначення процедур, які розглядаються у цьому розділі, – використання їх при розробці процедури `MODEL`, з метою спрощення останньої, у кожному конкретному випадку чисельного моделювання нелінійного коливання. Кожна із цих допоміжних процедур запроваджує певного виду макрооперацію методу.

Розглянемо ці процедури (всіх їх віднесемо до Блоку 5 ПЗ ДГМ).

3.2.2.1. Процедура DRAWOUTV

Ця процедура дозволяє виділяти зі складеного вузлового вектора вигляду (1.118), сформованого паралельним способом, вектор вигляду (1.68) миттєвих значень усіх змінних процесу у потрібному вузлі на періоді (півперіоді).

Текст процедури:

```
Subroutine DRAWOUTV(K,XC,MK,X,iM)
!-----
! Процедура, яка копіює зі складеного вузлового
! вектора фрагмент, що відповідає iM-тому вузлу
! на періоді (півперіоді)
!-----
  implicit none
  integer,intent(in)::K,MK,iM
  real,dimension(MK),intent(in)::XC
  real,dimension(K),intent(out)::X
  integer::i
!-----
!-----  Параметри процедури:
!--- K - порядок системи диф. рівнянь, він же -
!       кількість елементів вектора X
!--- XC - складений вузловий вектор вигляду (1.118)
!--- MK - кількість елементів вектора XC
!--- X - вектор значень змінних вигляду (1.68)
!--- iM - вказаний номер вузла на періоді (півперіоді)
!-----
  do i=1,K
```

```

        X(i)=XC((iM-1)*K+i)
    end do
    return
end subroutine DRAWOUTV
!-- © Copyright, 2008, Л. Глухівський
!-----

```

Формальні параметри процедури достатньо повно описані у коментарях.

3.2.2.2. Процедура DRAWOUTXV

Ця процедура дозволяє виділяти зі складеного вузлового вектора вигляду (1.118) простий вузловий вектор вигляду (1.37) миттєвих значень однієї зі змінних у всіх m вузлах періоду (півперіоду).

Текст процедури:

```

    Subroutine DRAWOUTXV(K,XC,MK,M,XV,iK)
!-----
! Процедура, яка виділяє зі складеного вузлового вектора
! простий вузловий вектор для iK-ої змінної
!-----
    implicit none
    integer,intent(in)::K,MK,M,iK
    real,dimension(MK),intent(in)::XC
    real,dimension(M),intent(out)::XV
    integer::i
!-----
!----- Параметри процедури:
!--- K - порядок системи диференційних рівнянь
!--- XC - складений вузловий вектор вигляду (1.118)
!--- MK - кількість елементів вектора XC
!--- M - кількість вузлів на періоді (півперіоді)
!--- XV - простий вузловий вектор вигляду (1.37)
!--- iK - вказаний номер змінної (iK менше або рівне K)
!-----
    do i=1,M
        XV(i)=XC((i-1)*K+iK)
    end do
    return
end subroutine DRAWOUTXV
!-- © Copyright, 2008, Л. Глухівський
!-----

```

Формальні параметри процедури достатньо повно описані у коментарях.

3.2.2.2. Процедура DRAWUPV

Ця процедура виконує дію, протилежну до дії процедури `DRAWOUTV`: вона формує відповідний фрагмент складеного вузлового вектора із значень усіх змінних в одному вузлі періоду (півперіоду).

Тест процедури:

```
Subroutine DRAWUPV(K,XV,XC,MK,iM)
!-----
! Процедура, яка "вставляє" у складений вузловий вектор
! фрагмент, що відповідає iM-тому вузлу
!-----
    implicit none
    integer,intent(in)::K,MK,iM
    real,dimension(K),intent(in)::XV
    real,dimension(MK)::XC
    integer::i
!-----
!----- Параметри процедури:
!--- K - порядок системи диф. рівнянь і кількість елементів
!       вектора XV
!--- XV - вектор змінних вигляду (1.68)
!--- XC - складений вузловий вектор вигляду (1.118)
!--- MK - кількість елементів вектора XC
!--- iM - вказаний номер вузла
!-----
    do i=1,K
        XC((iM-1)*K+i)=XV(i)
    end do
    return
end subroutine DRAWUPV
!-- © Copyright, 2008, Л. Глухівський
!-----
```

Формальні параметри процедури достатньо повно описані у коментарях.

3.2.2.4. Процедура DRAWUPM

Результатом дії цієї процедури є формування фрагмента складеної матриці вузлових параметрів вигляду (1.127) - її діагонального блоку, що відповідає одному із вузлів періоду (півперіоду).

Текст процедури:

```
Subroutine DRAWUPM(K,SX,SC,MK,iM)
!-----
! Процедура, яка "вставляє" у складену
! матрицю вузлових параметрів
! фрагмент, що відповідає iM-тому вузлу
!-----
    implicit none
    integer,intent(in)::K,MK,iM
    real,dimension(MK,K)::SC
    real,dimension(K,K)::SX
    integer::i,j
!-----
!----- Параметри процедури:
```

```

!--- K - порядок системи диф. рівнянь і матриці SX
!--- SX - матриця миттєвих параметрів вигляду (1.128)
!--- SC - складена матриця вузлових параметрів вигляду (1.127)
!--- МК - кількість рядків матриці SC
!--- іМ - номер вузла на періоді (півперіоді)
!-----
      do i=1,K
        do j=1,K
          SC((iM-1)*K+i,j)=SX(i,j)
        end do
      end do
      return
    end subroutine DRAWUPM
!-- © Copyright, 2008, Л. Глухівський
!-----

```

Тут треба мати на увазі, що масив `sc` містить у собі всі діагональні блоки складеної матриці вузлових диференційних параметрів вигляду (1.127), зсунуті вліво, так що вони "стоять" один на одному. Саме тому масив `sc` має `k` (а не `mk`) стовпців. Масив `sc` містить у собі складену матрицю вузлових диференційних параметрів вигляду (1.127) в упакованому вигляді.

Формальні параметри процедури достатньо повно описані у коментарях.

3.2.2.5. Процедура ADDV

Призначення цієї процедури - додавати значення елементів простого вузлового вектора вигляду (1.37) для однієї із змінних до значень відповідних елементів складеного вузлового вектора вигляду (1.118).

Така операція є необхідною у випадку, коли у коливній системі є нелінійності другої і/або третьої груп (див. розділ 3.2.1). Значення вузлових векторів змінних, що містять нелінійності цих груп, необхідно обчислювати, як показано у попередніх розділах 3.2.1.1 і 3.2.1.2, окремо від значень складених вузлових векторів для групи змінних, які пов'язані лінійними залежностями і/або нелінійностями першої групи. Після їх окремого обчислення виникає необхідність додавати значення елементів цих вузлових векторів до значень відповідних елементів обчислених раніше складених вузлових векторів і отримувати остаточні значення складених вузлових векторів.

Текст процедури є таким:

```

      Subroutine ADDV(K,XV,M,XC,MK,iK)
!-----
! Процедура, яка додає до елементів складеного вузлового
! вектора елементи простого вузлового вектора іК-ої змінної
!-----
      implicit none
      integer,intent(in)::K,MK,M,iK
      real,dimension(MK)::XC
      real,dimension(M)::XV
      integer::i

```

```

!-----
!----- Параметри процедури:
!--- K - порядок системи диф. рівнянь
!--- XV - простий вузловий вектор
!--- M - кількість елементів вектора XV
!--- XC - складений вузловий вектор
!--- МК - кількість елементів вектора XC
!--- іК - номер змінної
!-----
      do i=1,M
            XC((i-1)*K+iK)=XC((i-1)*K+iK)+XV(i)
      end do
      return
      end subroutine ADDV
!-- © Copyright, 2008, Л. Глухівський
!-----

```

Формальні параметри процедури достатньо повно описані у коментарях.

3.2.2.6. Процедура ADDM

Призначення цієї процедури - додавати значення елементів матриці вузлових параметрів вигляду (1.49) для однієї із змінних до значень відповідних елементів складеної матриці вузлових параметрів вигляду (1.127).

Така операція є необхідною у випадку, коли у коливній системі є нелінійності другої і /або третьої груп. Значення матриць вузлових параметрів для змінних, що містять нелінійності цих груп, необхідно обчислювати, як показано у попередніх розділах, окремо від значень складених матриць вузлових параметрів для групи змінних, які пов'язані лінійними залежностями і/або нелінійностями першої групи. Після їх окремого обчислення виникає необхідність додавати значення елементів цих матриць вузлових параметрів до значень відповідних елементів обчислених раніше складених матриць вузлових параметрів.

Текст процедури:

```

      Subroutine ADDM(K,XM,M,XMC,МК,іК)
!-----
! Процедура, яка додає до складеної вузлової матриці
! параметрів просту вузлову діагональну матрицю
! параметрів для іК-ої змінної
!-----
      implicit none
      integer,intent(in)::K,M,МК,іК
      real,dimension(M)::XM
      real,dimension(МК,K)::XMC
      integer::i
!-----
!----- Параметри процедури:
!--- K - порядок системи диф. рівнянь
!--- XM - проста вузлова діагональна матриця
!--- M - кількість елементів матриці XM

```

```

!--- XMC - складена матриця вузлових параметрів
!--- МК - кількість рядків матриці XMC
!--- іК - номер змінної
!-----
do i=1,M
    XMC((i-1)*K+iK,iK)=XMC((i-1)*K+iK,iK)+XM(i)
end do
return
end subroutine ADDM

```

!-- © Copyright, 2008, Л. Глухівський

Формальні параметри процедури достатньо повно описані у коментарях.

3.2.3. Зразок процедури MODEL

Тепер уже можемо розглянути структуру процедури MODEL, що слугуватиме зразком при її розробці у кожному конкретному випадку моделювання.

Текст зразка цієї процедури є наступним.

```

Subroutine Model(AL,M,K,MK,XC,YC,ZC,YXC,ZXC,VM)
!-----
! Підпрограма реалізує миттєву модель процесу
!-----
Implicit none
Real,intent(in)::AL
integer,intent(in)::M,K,MK
real,dimension(MK),intent(in)::XC
real,dimension(MK),intent(out)::YC,ZC
real,dimension(MK,K),intent(out)::YXC,ZXC
real,dimension(K)::X,Y,Z
real,dimension(K,K)::YX,ZX,VM
real,dimension(M)::XV,UV,RV,UV1,RV1
real,dimension(3,3)::B
real::C1,C2,C3
integer::i
!-----
Common/MPM/C1,C2,C3,B
!-- через Common/MPM/ передаються дані із головної програми
!-----
VM=B
do i=1,M
    call DRAWOUTV(K,XC,MK,X,i)
    Y(1)= ; Y(2)= ; Y(3)=
    call DRAWUPV(K,Y,YC,MK,i)
    Z(1)= ; Z(2) ; Z(3)=
    call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,I)
    YX(1,1)= ; YX(1,2)= ; YX(1,3)=
    YX(2,1)= ; YX(2,2)= ; YX(2,3)=
    YX(3,1)= ; YX(3,2)= ; YX(3,3)=
    call DRAWUPM(K,YX,YXC,MK,i)
    ZX(1,1)= ; ZX(1,2)= ; ZX(1,3)=

```

```

      ZX(2,1)=   ; ZX(2,2)=   ;   ZX(2,3)=
      ZX(3,1)=   ; ZX(3,2)=   ;   ZX(3,3)=
      call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,i)
    end do
    call DRAWOUTXV(K,XC,MK,M,XV,3)
    Call TIMEMOD(XV,M,...,UV,RV)
    call ADDV(K,UV,M,ZC,MK,3)
    call ADDM(K,RV,M,ZXC,MK,3)
    Return
  End subroutine Model

```

!-- © Copyright, 2008, Л. Глухівський

!-----

Передовсім зауважимо, що заголовок процедури (її ім'я і кількість формальних параметрів та їх типи) змінювати не можна, бо він задається операторами виклику процедур `HARMOSC` і `IMPROVE` (див. розділи 2.2.2.1 і 2.2.2.3).

Формальними параметрами цієї процедури є:

`AL` – реальна змінна, коефіцієнт звуження петлі гістерезису (на випадок, якщо у задачі присутні нелінійності гістерезисного вигляду);

`M` – ціла змінна, кількість вузлів на періоді (півперіоді) процесу, вона ж - розмір простого вузлового вектора;

`K` – ціла змінна, порядок системи диференційних рівнянь, що описує коливання;

`MK` – ціла змінна, розмір складеного вузлового вектора;

`XC` – реальний одномірний масив, складений вузловий вектор для векторної змінної \vec{x} , часова залежність якої є шуканим періодичним розв'язком системи диференційних рівнянь виглядів (1.64) – (1.67);

`UC` – реальний одномірний масив, складений вузловий вектор для векторної змінної \vec{y} у рівняннях виглядів (1.64) чи (1.66);

`ZC` – реальний одномірний масив, складений вузловий вектор для векторної змінної \vec{z} у рівняннях виглядів (1.64) - (1.67);

`UXC` – реальний двомірний масив, зберігає складену матрицю вузлових диференційних параметрів вигляду (1.127а), діагональні блоки якої розташовані один під одним – з метою щільнішої упаковки;

`ZXC` – реальний двомірний масив, зберігає складену матрицю вузлових диференційних параметрів вигляду (1.127б), діагональні блоки якої розташовані один під одним;

`VM` – реальний двомірний масив, для матриці вигляду (1.69).

Набір описаних вище формальних параметрів передбачає випадок, коли розв'язувана система диференційних рівнянь має найбільш загальний вигляд (1.66). Для випадків, коли вигляд системи диференційних рівнянь є іншим – (1.64), (1.65) чи (1.67) – деякі із формальних параметрів будуть такими, що не використовуються.

Процедура `MODEL` отримує також дані із головної програми за допомогою спільної ділянки пам'яті, ім'я цієї ділянки (тут `MRM`) має бути таким же, як і у головній програмі. Вона задається оператором `COMMON/MRM/C1,C2,C3,V`. У цій спільній ділянці пам'яті три реальних змінних `C1,C2,C3` і реальний двомірний масив `V(3,3)`, що містить матрицю вигляду (1.69) для випадку, коли розв'язувана система диференційних рівнянь є третього порядку.

Перший виконуваний оператор $vm=v$ присвоює значення матриці v формальному параметру vm .

Дальше у процедурі є цикл (назвемо його головним циклом процедури `MODEL`), параметр якого i змінюється від 1 до m . У цьому циклі:

оператором `call DRAWOUTV(k,xс,МК,х,i)` викликається процедура `DRAWOUTV` (див. розділ 3.2.2.1), яка із масиву $xс$ копіює фрагмент, що відповідає i -му вузлу на періоді (півперіоді) і присвоює його масиву x , що призначений для зберігання вектора (1.68a);

оператори $y(1)=$; $y(2)=$; $y(3)=$ обчислюють значення масиву y , що зберігає значення вектора (1.68б);

оператором `call DRAWUPV(k,y,ус,МК,i)` (див. розділ 3.2.2.3) значення масиву y вставляється як фрагмент у масив $ус$;

дальше аналогічні дії виконуються щодо масивів z і $zс$;

оператори $yx(1,1)=$; $yx(1,2)=$... ; $yx(3,3)=$ обчислюють значення елементів діагонального блоку, що відповідає i -му вузлу на періоді (півперіоді), матриці (1.127a);

оператором `call DRAWUPM(k,yx,yхс,МК,i)` (див. розділ 3.2.2.4) значення масиву yx вставляється як фрагмент у масив $yхс$;

дальше аналогічні дії виконуються щодо масивів zx і $zхс$.

Описаний вище цикл формує масиви $ус$, $zс$, $yхс$ і $zхс$ у тій частині, що відповідає всім лінійним елементам системи і нелінійним, крім тих, що містять нелінійності другої і третьої груп.

Завершується процедура групою операторів, які доформовують масиви $ус$, $zс$, $yхс$ і $zхс$ у тій частині, що відповідає нелінійним елементам системи, що містять нелінійності другої і третьої груп. Це оператори:

- оператор `call DRAWOUTXV(k,xс,МК,м,xv,z)` (див. розділ 3.2.2.2), який копіює фрагмент масиву $xс$ і формує масив xv (простий вузловий вектор вигляду (1.37), що відповідає третьому елементу вектора \vec{x} ; вважається, що у цій задачі саме він пов'язаний з нелінійністю другої чи третьої групи);

- оператор `call TIMEMOD(xv,м,...,uv,rv)`, який викликає деяку процедуру `TIMEMOD` (тут назва процедури умовна), що реалізує миттєву модель на періоді цієї нелінійності із другої чи третьої групи;

- оператори

```
call ADDV(k,uv,м,zс,МК,3);  
call ADDM(k,rv,м,zхс,МК,3)
```

(див. розділи 3.2.2.5 і 3.2.2.6), які додають до елементів складеного вузлового вектора $zс$ і складеної матриці вузлових параметрів $zхс$ відповідні елементи простого вузлового вектора uv і матриці вузлових параметрів rv (вважається, що у цій задачі доформовувати масиви $ус$ і $yхс$ не потрібно).

У разі, якщо коливна система не містить нелінійностей другої чи третьої груп, то між кінцем головного циклу процедури `MODEL` і її оператором `Return` інших операторів немає.

Описаний у цьому розділі зразок процедури `MODEL` є достатньо стереотипним. У ньому індивідуалізуються у кожному конкретному випадку моделювання тільки тіло головного циклу (оператори між "do i=1,m" і "end do"), і, у випадку наявності нелінійностей другої і/або третьої груп, оператори між "end do" і "Return". Це ілюструється всіма прикладами глави 4.

3.3. Процедура OUTP

Як уже зазначалося у розділі 2.1 і у вступній частині цієї глави, до блоку програмних компонент користувача належить процедура `OUTP` обробки і запам'ятовування результатів моделювання. Цю процедуру можна розробляти індивідуально для кожного випадку моделювання. Однак можна розробити типову програму `OUTP` і віднести її до Блоку 5 ПЗ ДГМ. І тільки у тому випадку, коли закладені у типову процедуру `OUTP` операції не задовольняють користувача, він буде змушений розробити свій варіант цієї процедури. Однак при цьому заголовок процедури (назва, перелік формальних параметрів і їх типи) змінювати не можна, бо він визначається операторами виклику у процедурах `HARMOSC` і `IMPROVE`

Текст типової (стандартної) процедури `OUTP` є таким.

```

Subroutine OUTP(IG,Y,N,K,NG,M,MK,KK)
!-----
! Процедура обробки і запам'ятовування (запису) результатів
! (При KK=1 обсяг запису мінімальний)
!-----
Implicit none
integer,intent(in)::IG,N,K,NG,M,MK,KK
real,dimension(N),intent(in)::Y
real,dimension(MK)::XC
real,dimension(M)::XV
integer::i,j,KG,N1,N2,N3
real::AC,AS,AA
!-----
KG=(NG-1)/2
If (IG.eq.0) then
    N1=KG; N2=1; N3=2
else
    N1=NG; N2=2; N3=1
end if
call KVGVS(K,Y,NG,K*NG,XC,M,MK)
do i=1,K
write(1,10)i
if(IG.ne.0) goto 1
write(1,11) Y((i-1)*NG+1)
1 do j=1,N1,N2
    AC=Y((i-1)*NG+N3*j); AS=Y((i-1)*NG+N3*j+1)
    AA=sqrt(AC**2+AS**2)
    write(1,12)i,j,AC,i,j,AS,i,j,AA
end do
if(KK.eq.1)goto 2
if (IG.eq.0) then

```

```

        write(1,13)M
    else
        write(1,14)M
    end if
    call DRAWOUTXV(K,XC,MK,M,XV,i)
    write(1,15)XV
2   continue
    end do
    write(1,16)Y(K*NG+1)
    return
10  format(/2X,'Амплітуди гармонік ',i2,'-ої змінної:')
11  format(2X,'постійна складова = ',E11.4)
12  format(2X,'X',i1,'(c',i2,')=',E11.4,' X',i1,'(s',i2,
    & ')=',E11.4,' X',i1,'(',i2,')=',E11.4)
13  format(2X,'значення змінної у М =',i3,'вузлах періоду')
14  format(2X,'значення змінної у М =',i3,'вузлах півперіоду')
15  format(2X,6E11.4)
16  format(/2X,'кругова частота основної гармоніки =',E11.4)
    End Subroutine OUTP

```

!-- © Copyright, 2008, Л. Глухівський

!-----

Формальними параметрами процедури є:

IG – змінна цілого типу; якщо її значенням є нуль, то вважається, що змінні задачі мають постійні складові і гармоніки як парних порядків, так і непарних; якщо її значенням є одиниця, то вважається, що змінні задачі мають тільки непарні гармоніки;

Y – реальний одномірний масив, утворений із складеного вектора амплітуд змінних вигляду (1.82), кругової частоти основної гармоніки і параметру h ;

N – змінна цілого типу, розмір масиву **Y**;

K – змінна цілого типу, порядок системи диференціальних рівнянь, періодичний розв'язок якої шукається;

NG – змінна цілого типу, розмір простого вектора амплітуд;

M – змінна цілого типу, кількість вузлів на періоді (півперіоді), розмір простого вузлового вектора;

MK – змінна цілого типу, розмір складеного вузлового вектора;

KK – змінна цілого типу; якщо її значенням є одиниця, то запам'ятовуються (записуються до вихідного файлу) не всі дані, а тільки їх частина.

* * *

Головна програма блоку програмних компонент користувача і процедура **OUTP** можуть містити оператори, що реалізують діалогові (при введенні даних) і мультимедійні (при виведенні даних у вигляді графіків, діаграм, таблиць тощо) можливості останніх версій Фортрану (чи інших мов – шляхом сумісного програмування чи під'єднання об'єктних модулів як продуктів компіляції із цих мов). Ці можливості автор залишає користувачу, який володіє такими програмними засобами.

Глава 4

ТЕСТИ І ПРИКЛАДИ

У цій главі розглядається низка тестів і прикладів, призначення яких – проілюструвати застосування ДГМ і його програмного забезпечення, а також виконати їхню перевірку. Серед них є як задачі, що мають наближені розв'язання аналітичними методами, і тоді такі задачі виконують роль тестів, так і задачі, що не піддаються розв'язанню аналітичними методами.

4.1. Тести і приклади розрахунків вимушених коливань

У цьому розділі наводяться декілька прикладів чисельного моделювання вимушених коливань у нелінійних системах з різними видами нелінійних зв'язків у них. Це приклади В.1 – В.5. У кожному прикладі цієї групи у головній програмі блоку програмних компонент користувача перед зверненням до процедури `HARMOSC` четвертому елементу `KEY(4)` керуючого масиву `KEY` присвоюється значення 0.

4.1.1. Приклад В.1

У якості тестового розрахунку для випадку, коли нелінійність у системі є однозначною безумовною (відноситься до першої групи нелінійностей) і вона задана аналітично, розглянемо розрахунок вимушених коливань тіла в газовому середовищі. Аналогічний приклад наводиться у [56] під номером 4.2.1.

При певній ідеалізації можна вважати, що сила опору рухові тіла в газовому середовищі пропорційна квадратові швидкості і має такий же знак, як швидкість тіла (див. формулу (3.3) і рис. 3.3). З урахуванням цього рівняння руху тіла має вигляд

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha |\dot{x}| \dot{x} = h \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.1)$$

У [56] при розгляді цього прикладу і визначенні параметрів коливання використовується метод гармонічного балансу (як аналітичний) і розв'язок шукається у вигляді

$$x = a \sin \omega t. \quad (4.2)$$

Внаслідок підстановки (4.2) в (4.1) і низки аналітичних перетворень значення амплітуди a коливань отримано як корінь біквадратного рівняння

$$\frac{64\alpha^2 \omega^4}{9\pi^2} a^4 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 a^2 - h^2 = 0 \quad (4.3)$$

і виражається формулою (при $\omega < \omega_0$)

$$a = \sqrt{\frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 + 4b_1h^2}}{2b_1}}, \quad (4.4)$$

де

$$b_1 = \frac{64\alpha^2\omega^4}{9\pi^2}; \quad (4.5)$$

$$b_2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2, \quad (4.6)$$

а початкова фаза - формулою

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{8\alpha a\omega^2}{3\pi(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (4.7)$$

У формулах (4.1) – (4.7) прийнято такі ж позначення, як і у [56] при розгляді прикладу 4.2.1. Зокрема, у записі диференційного рівняння (4.1), як і раніше – у формулі (3.4), одна крапка над змінною означає, що це перша похідна цієї змінної за часом, і дві крапки над змінною – що це друга похідна.

Якщо задатися числовими значеннями $\omega = 10.0 \text{ 1/с};$

$$\omega_0 = 25.0 \text{ 1/с}; \quad \alpha = 12.0 \text{ 1/м}; \quad h = 100.0 \text{ м/с}^2,$$

то за формулами (4.4) і (4.7) одержимо $a = 0,1797 \text{ м}; \quad \varphi = 0,335 \text{ рад}.$

Ці ж коливання розрахуємо шляхом чисельного полігармонічного моделювання з використанням програмного забезпечення ДГМ.

Підготовка задачі до моделювання.

Записуємо рівняння (4.1) у вигляді

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 x_1 + \alpha|x_2|x_2 = h_c \cos \omega t + h_s \sin \omega t \quad (4.8)$$

з урахуванням, що

$$h \sin(\omega t + \varphi) = h_c \cos \omega t + h_s \sin \omega t. \quad (4.9)$$

Обчислюємо значення амплітуд змушувальної сили

$$\begin{aligned} h_c &= h \sin \varphi = 100.0 \sin(0.335) = 32.9 \text{ м/с}^2; \\ h_s &= h \cos \varphi = 100.0 \cos(0.335) = 94.4 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Систему рівнянь (4.8) приводимо до вигляду (1.65)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{z} - \vec{e} = 0 \quad (4.11)$$

при позначеннях

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ \omega_0^2 x_1 + \alpha |x_2| x_2 \end{pmatrix}; \quad (4.12a, б)$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h_c \cos \omega t + h_s \sin \omega t \end{pmatrix}. \quad (4.12в)$$

Значення похідної $d\vec{z}/d\vec{x}$, яка є діагональним блоком складеної матриці вузлових диференціальних параметрів $S_{z\delta}^*$ вигляду (1.127б) і використовується при формуванні миттєвої математичної моделі процесу на півперіоді (внаслідок непарності нелінійної залежності сили опору від швидкості руху тіла у задачі присутні гармоніки тільки непарних порядків), є таким

$$\frac{d\vec{z}}{d\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & 2\alpha |x_2| \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Блок програмних компонент користувача для цього випадку складається із: головної програми **Program Gaz** і процедури **MODEL** миттєвої моделі процесу.

Для обробки результатів і їх запису до вихідного файлу (з метою наступного роздруку) застосовується стандартна процедура **OUTP** із Блоку 5 ПЗ ДГМ, тому у блоці користувача немає окремої процедури обробки результатів.

Головна програма блоку користувача є такою.

```

Program Gaz
!-----
! Програма визначення періодичного розв'язку
! диференційного рівняння, що описує вимушені
! коливання тіла в газовому середовищі
! dx/dt+Z=E
! X=colon(x1,x2)
! Z=colon(z1,z2)
! E=colon(e1,e2)
! z1=-x2; z2=c*x1+Alfa*x2*abs(x2)
! e1=hc*cos(om*t); e2=hs*sin(om*t).
! (змінні містять тільки непарні гармоніки)
!-----
Implicit none
real,dimension(18)::Y0
real,dimension(16)::E
integer,dimension(10)::KER
real::C,Alfa,OM,EPS1,EPS2,H1,HM,Hc,Hs
integer::K,NG,NK

```

```

!-----
      Common/MP/C,Alfa
!----- спільна ділянка із процедурою MODEL
!-----
      Open(1,File='DaniGaz.dat',status='old')
      Read(1,*)C,Alfa,Hc,Hs
      Read(1,*)OM,EPS1,EPS2,H1,HM
!-----  OM - кругова частота основної гармоніки
!-----  EPS1 - точність інтегрування
!-----  EPS2 - точність для методу Ньютона
!-----  H1 - значення h, при якому необх. уточнити корінь
!-----  HM - максимальне значення h
!-----
      Read(1,*)KER
      Read(1,*)K
!-----  KER - масив керуючих змінних
!-----  K - порядок системи диф. рівнянь
!-----  ввели всі дані
      Close(1)
!-----
      Open(1,file='RezGaz.dat')
      write(1,5)
      5 format(4X,'Періодичний розв'язок рівняння коливань',
      & ' тіла в газі'/10X,'Введені дані:')
      write(1,14)C,Alfa,Hc,Hs
      14 format(2X,' C = ',E10.4,' Alfa = ',E10.4,
      & ' Hc = ',E10.4,' Hs = ',E10.4)
      write(1,15)OM,EPS1,EPS2,H1,HM
      15 format(2X,' OM=',E10.4,' EPS1=',E10.4,
      & ' EPS2=',E10.4,' H1=',E10.4,' HM=',E10.4)
      write(1,16)KER
      16 Format(2X,'KER =',10i5)
      Write(1,17)K
      17 format(2X,' K=',i2)
!-----  надрукували введені дані
      Call SizesV(KER(1),K,KER(8),NG,NK)
      Write(1,3)NG,NK
      3 format(2X,2i5)
!-----  NG - розмір простого вектора амплітуд
!-----  NK - розмір складеного вектора амплітуд
!-----
      E=0.; E(NG+1)=Hc; E(NG+2)=Hs
      Y0=0; Y0(NK+1)=OM
!-- сформували складений вектор амплітуд E змушувальних
!-- сил і початкове значення вектора Y0.
!-----
      write(1,18)
      18 format(/2X,'Р о з р а х у н о к :')
      Call HARMOSC(K,Y0,E,NK,HM,H1,EPS1,EPS2,KER)
      Close(1)
      Stop
      End Program Gaz

```

В описовій частині головної програми описуються такі об'єкти:

- реальний одновимірний масив x_0 , призначений для зберігання вектора-стовпця, утвореного із двох простих векторів амплітуд $\vec{X}_{1\Gamma}$ і $\vec{X}_{2\Gamma}$ вигляду (1.13а), кругової частоти ω основної гармоніки і параметра h ;
- реальний одновимірний масив ϵ , призначений для зберігання складеного вектора амплітуд вигляду (1.81), утвореного із двох простих векторів амплітуд $\vec{E}_{1\Gamma}$ і $\vec{E}_{2\Gamma}$ вигляду (1.13г);
- цілий одновимірний масив `кер` керуючих змінних, що має 10 елементів;
- реальні змінні `c, Alfa, om` - відповідно, коефіцієнти ω_0^2 , α і частота ω із рівняння (4.1);
- реальні змінні `eps1, eps2` – відносні точності розрахунку h – характеристики і уточнення розв'язку ітераційним методом Ньютона;
- реальні змінні `h1, hm` – значення h , при якому розв'язок має уточнюватися, і максимальне значення h ;
- реальні змінні `nc, ns` – косинусна і синусна амплітуди із формули (4.9);
- цілі змінні `k, ng, nk` – порядок системи диференціальних рівнянь (4.8), кількість елементів простого вектора амплітуд і кількість елементів складеного вектора амплітуд, відповідно.

Дальше описана спільна ділянка пам'яті з ім'ям `mp`, за допомогою якої передаються значення `c` і `Alfa` від головної програми до процедури `MODEL`.

Операторна частина програми розпочинається відкриттям файлу `DaniGaz.dat`, у якому розташовані вхідні дані (роздрук цього файлу наведено далі). Із цього файлу операторами `read` читаються вхідні дані, і потім вхідний файл закривається.

Після цього відкривається вихідний файл `RezGaz.dat`, і до нього записуються щойно введені вхідні дані. Потім шляхом звернення до процедури `sizesv` (див. розділ 3.1) визначаються значення `ng` і `nk`, вони записуються до вихідного файлу.

Дальше присвоюються значення складеному вектору амплітуд змушувальної сили ϵ і початкове значення вектора змінних x_0 – амплітудам гармонік надається нульове значення і $NK+1$ -ому елементу присвоюється значення кругової частоти ω .

Прокоментуємо значення, які присвоєні елементам масиву `кер` (див. далі роздрук файлу `DaniGaz.dat` і розділ 3.1):

- `кер(1)=1` (тому що змінні x_1 і x_2 містять тільки непарні гармоніки);
- `кер(2)=1` і `кер(3)=0` (тому що рівняння (4.8) відповідає формі запису (1.65));
- `кер(4)=0` (тому що коливання є вимушеним);
- `кер(5)=0` (передбачає, що роздруковувати результати у кожній точці h – характеристики не потрібно);
- `кер(6)=0` (передбачає, що якби h – характеристика мала особливі точки, то після проходження першої особливої точки слід розрахунок продовжувати);

$KER(7) = 0$ (тому що нелінійність задачі є безгістерезисною);
 $KER(8) = 1$ (передбачає врахування на першому етапі розрахунку тільки першої гармоніку);

$KER(9) = 7$ (передбачає, що після одержання розв'язку з врахуванням тільки першої гармоніки кількість враховуваних гармонік має нарощуватися від 1 до 7);

$KER(10) = 1$ (передбачає, що результати мають друкуватися після кожного нарощування кількості враховуваних гармонік).

Значеннями 8-го і 9-го елементів масиву KER вибрана наступна стратегія пошуку розв'язку (вона закладена у процедуру $HARMOSC$): коливання у першому наближенні має шукатися як гармонічне (враховується тільки перша гармоніка), і потім розв'язок необхідно уточнити шляхом нарощування кількості враховуваних гармонік.

Завершується головна програма викликом для виконання процедури $HARMOSC$.

Процедура $MODEL$, яка реалізує миттєву модель процесу на півперіоді, має наступний вигляд.

```
Subroutine Model(AL,M,K,MK,XC,YC,ZC,YXC,ZXC,VM)
!-----
! Процедура миттєвої (на півперіоді) моделі процесу
!-----
  Implicit none
  real::AL
  integer,intent(in)::M,K,MK
  real,dimension(MK)::XC,YC,ZC
  real,dimension(MK,K)::YXC,ZXC
  real,dimension(K)::X,Z
  real,dimension(K,K)::ZX,VM
  real::C,Alfa
  integer::i
!-----
  Common/MP/C,Alfa
! Спільна ділянка пам'яті із головною програмою
!-----
  VM(1,1)=0.; AL=0.      !-- оператори для блокування
  YC(1)=0.;  YXC(1,1)=0. !-- зауважень компілятора
  Do i=1,M
    call DRAWOUTV(K,XC,MK,X,i)
    Z(1)=-X(2)
    Z(2)=C*X(1)+Alfa*X(2)*abs(X(2))
    ZX(1,1)=0.
    ZX(1,2)=-1.
    ZX(2,1)=C
    ZX(2,2)=2.*Alfa*abs(X(2))
    call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,i)
    call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,i)
  end do
  Return
End Subroutine Model
```


Інтерфейс процедури (назва і список формальних параметрів) визначений процедурою `SALUSLU` (див. розділ 2.2.3.2). Вона має такі формальні параметри:

- реальна змінна `AL` – коефіцієнт розширення петлі гістерезису; у цій задачі не використовується, бо у задачі немає гістерезисних нелінійностей третьої групи;
- ціла змінна `m` – кількість вузлів на півперіоді;
- ціла змінна `k` – порядок системи рівнянь (4.8);
- ціла змінна `mk` – розмір складеного вузлового вектора;
- реальні одновимірні масиви `xs, ys, zs` – відповідно, складені вузлові вектори \vec{x}_g^* , \vec{y}_g^* і \vec{z}_g^* вигляду (1.118); у цій задачі масив `ys` не використовується, бо рівняння (4.11) має вигляд (1.65) і не містить змінної `y`;
- реальні двовимірні масиви `yxс, zxc` – складені матриці вузлових диференціальних параметрів $S_{yг}^*$ і $S_{zг}^*$ вигляду (1.127); у цій задачі матриця `yxс` не використовується, бо, як уже вище зазначено, рівняння (4.11) має вигляд (1.65);
- двовимірний масив `vm` – матриця коефіцієнтів системи диференціальних рівнянь, якщо вони вигляду (1.66) чи (1.67); у цій задачі ця матриця не використовується, бо рівняння (4.11) має вигляд (1.65).

За допомогою цих формальних параметрів передаються дані від процедури `SALUSLU` до процедури `MODEL`. Деякі дані також передаються до процедури `MODEL` від головної програми за допомогою спільної ділянки пам'яті із ім'ям `mp`.

Всі ці змінні описані у описовій частині процедури.

Операторна частина процедури відкривається двома операторами

$$VM(1,1)=0.; \quad AL=0. .$$

Ці оператори виконують непотрібні присвоєння. Їхнє призначення – заблокувати повідомлення компілятора при компіляції процедури, що формальні параметри `vm` і `al` у тілі процедури не використовуються. Вище уже зазначалося, що параметр `al` передбачений для використання тільки у випадку, коли у задачі є нелінійності гістерезисного вигляду. У даній задачі їх немає, тому цей параметр не використовується. Параметр `vm` передбачений для використання у випадку, коли система диференціальних рівнянь не записана у нормальній формі Коші. У записі (4.11) система рівнянь (4.8) має нормальну форма Коші, тому параметр `vm` тут не використовується.

Таке ж призначення (заблокувати повідомлення компілятора) і двох наступних операторів

$$YS(1)=0.; \quad YXS(1,1)=0.$$

У даному випадку рівняння (4.11) не містить вектора \vec{y} , тому передбачений процедурою складений вузловий вектор `ys` і матриця вузлових параметрів `yxс` не використовуються.

Оскільки нелінійність задачі належить до першої групи - є безумовною однозначною (див. розділ 3.2.1), то обчислення значень елементів складеного вузлового вектора `zs` і складеної матриці вузлових параметрів `zxc` може

відбуватися у довільній послідовності. Цю послідовність задає оператор циклу, у якому параметр циклу (змінна i – номер вузла на півперіоді) змінюється від 1 до m . У циклі при кожному значенні i виконуються такі дії:

Оператором `call DRAWOUTV(K,XS,MK,X,I)` викликається для виконання процедура `DRAWOUTV` (вона входить до Блоку 5 ПЗ ДГМ), яка із складеного вузлового вектора x_s , що має mk елементів, витягає значення змінних x_1 і x_2 в i -тому вузлі у вигляді вектора x , що має k елементів (тут – два). Далі обчислюються і присвоюються значення елементам вектора z (4.126) і матриці похідних zx (4.13). Після цього операторами

```
call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,I);
call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,I)
```

викликаються для виконання процедури `DRAWUPV` і `DRAWUPM` (вони входять до Блоку 5 ПЗ ДГМ), які значення елементів матриць z і zx присвоюють відповідним елементам матриць z_c і zxc (див. розділи 3.2.2.1, 3.2.2.3 і 3.2.2.4).

Файл вхідних даних `DaniGaz.dat` має вигляд:

```
625.    12.    32.9    94.4
10.     0.001   0.0001   1.0     1.0
1  1  0  0  0  0  0  1  7  1
2
```

Файл вихідних даних `RezGaz.dat` – результатів розрахунку після відпрацювання програми є таким:

Періодичний розв'язок рівняння коливань тіла в газі

Введені дані:

```
C = .6250E+03 Alfa = .1200E+02 Hc = .3290E+02 Hs = .9440E+02
OM= .1000E+02 EPS1= .1000E-02 EPS2= .1000E-03 H1= .1000E+01
HM = .1000E+01
KER = 1    1    0    0    0    0    0    1    7    1
K= 2
    2    4
```

Р о з р а ж у н о к :

Номер найвищої гармоніки = 1

Уточнене значення 1 кореня для $h=1.000$

(розв'язок одержано після 3-ої ітерації)

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

```
X1(c1)= -.5008E-04 X1(s1)= .1798E+00 X1(1)= .1798E+00
значення змінної у M = 24 вузлах півперіоду
-.5008E-04 .2342E-01 .4649E-01 .6876E-01 .8985E-01 .1094E+00
.1271E+00 .1426E+00 .1557E+00 .1661E+00 .1737E+00 .1782E+00
.1798E+00 .1783E+00 .1737E+00 .1661E+00 .1557E+00 .1427E+00
.1272E+00 .1095E+00 .8994E-01 .6885E-01 .4658E-01 .2352E-01
```

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

```
X2(c1)= .1798E+01 X2(s1)= .5005E-03 X2(1)= .1798E+01
```

значення змінної у M = 24 вузлах півперіоду
 .1798E+01 .1783E+01 .1737E+01 .1661E+01 .1557E+01 .1427E+01
 .1272E+01 .1095E+01 .8994E+00 .6885E+00 .4658E+00 .2352E+00
 .5028E-03-.2342E+00-.4649E+00 -.6876E+00 -.8985E+00 -.1094E+01
 -.1271E+01-.1426E+01-.1557E+01 -.1661E+01 -.1737E+01 -.1782E+01

Уточнення значення кореня шляхом нарощення кількості гармонік
 від N= 1 до N= 7

додано 3-у гармоніку

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c 1)= .9549E-03 X1(s1)= .1815E+00 X1(1)= .1815E+00
 X1(c 3)= .2189E-02 X1(s3)= -.6959E-02 X1(3)= .7296E-02

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c 1)= .1815E+01 X2(s1)= -.9549E-02 X2(1)= .1815E+01
 X2(c 3)= -.2088E+00 X2(s3)= -.6567E-01 X2(3)= .2189E+00

додано 5-у гармоніку

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .6234E-03 X1(s1)= .1821E+00 X1(1)= .1821E+00
 X1(c3)= .2712E-02 X1(s3)= -.6942E-02 X1(3)= .7453E-02
 X1(c5)= -.1029E-02 X1(s5)= .4554E-03 X1(5)= .1126E-02

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= .1821E+01 X2(s1)= -.6234E-02 X2(1)= .1821E+01
 X2(c3)= -.2083E+00 X2(s3)= -.8136E-01 X2(3)= .2236E+00
 X2(c5)= .2278E-01 X2(s5)= .5147E-01 X2(5)= .5628E-01

додано 7-у гармоніку

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .5420E-03 X1(s1)= .1822E+00 X1(1)= .1822E+00
 X1(c3)= .2783E-02 X1(s3)= -.6892E-02 X1(3)= .7433E-02
 X1(c5)= -.1051E-02 X1(s5)= .3961E-03 X1(5)= .1123E-02
 X1(c7)= .2339E-03 X1(s7)= .4659E-04 X1(7)= .2385E-03

значення змінної у M = 48 вузлах півперіоду

.2508E-02 .1320E-01 .2383E-01 .3439E-01 .4486E-01 .5523E-01
 .6548E-01 .7559E-01 .8554E-01 .9529E-01 .1048E+00 .1140E+00
 .1229E+00 .1315E+00 .1396E+00 .1473E+00 .1545E+00 .1612E+00
 .1674E+00 .1730E+00 .1779E+00 .1821E+00 .1854E+00 .1879E+00
 .1894E+00 .1898E+00 .1891E+00 .1872E+00 .1840E+00 .1797E+00
 .1743E+00 .1678E+00 .1604E+00 .1522E+00 .1434E+00 .1340E+00
 .1243E+00 .1143E+00 .1041E+00 .9368E-01 .8319E-01 .7262E-01
 .6198E-01 .5128E-01 .4054E-01 .2978E-01 .1900E-01 .8233E-02

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= .1822E+01 X2(s1)= -.5420E-02 X2(1)= .1822E+01
 X2(c3)= -.2068E+00 X2(s3)= -.8349E-01 X2(3)= .2230E+00
 X2(c5)= .1981E-01 X2(s5)= .5257E-01 X2(5)= .5617E-01
 X2(c7)= .3263E-02 X2(s7)= -.1638E-01 X2(7)= .1670E-01

значення змінної у M = 48 вузлах півперіоду

.1638E+01 .1630E+01 .1619E+01 .1607E+01 .1592E+01 .1576E+01
 .1556E+01 .1533E+01 .1506E+01 .1473E+01 .1433E+01 .1387E+01
 .1334E+01 .1275E+01 .1210E+01 .1140E+01 .1065E+01 .9840E+00

.8969E+00 .8018E+00 .6968E+00 .5800E+00 .4498E+00 .3053E+00
 .1470E+00-.2346E-01-.2029E+00 -.3870E+00 -.5705E+00 -.7478E+00
 -.9135E+00-.1063E+01-.1194E+01 -.1303E+01 -.1391E+01 -.1460E+01
 -.1511E+01-.1548E+01-.1575E+01 -.1595E+01 -.1609E+01 -.1621E+01
 -.1630E+01-.1638E+01-.1643E+01 -.1646E+01 -.1646E+01 -.1644E+01

Результати розрахунків зведені у таблицю 4.1.

Таблиця 4.1. Результати розрахунку коливань тіла у газовому середовищі

n	$X_{1(1)}$	$X_{1(3)}$	$X_{1(5)}$	$X_{1(7)}$	$X_{2(1)}$	$X_{2(3)}$	$X_{2(5)}$	$X_{2(7)}$
1	0,1798				1,798			
3	0,1815	0,0073			1,815	0,2188		
5	0,1821	0,0074	0,0011		1,821	0,2236	0,0563	
7	0,1822	0,0074	0,0011	0,0002	1,822	0,2230	0,0562	0,0167

Як бачимо із таблиці 4.1, при врахуванні тільки першої гармоніки одержане значення амплітуди до третього знаку співпадає із одержаним за формулою (4.4). При врахуванні вищих гармонік до сьомої включно амплітуда першої гармоніки зростає незначно – на 1.3%. Вищі гармоніки тут проявляються сильніше у змінній x_2 , тобто у швидкості руху: амплітуда третьої гармоніки швидкості руху становить 12% від значення амплітуди першої гармоніки. Таблиця ілюструє, що у цій задачі гармоніками з порядками, більшими від 7, при розрахунках можна нехтувати.

4.1.2. Приклад В.2

Цей приклад ілюструє розрахунок вимушених коливань, коли нелінійність у системі задається аналітично і є однозначною безумовною (належить до першої групи нелінійностей, див. розділ 3.2.1), а диференціальне рівняння, що описує коливання, має не один періодичний розв'язок, а три періодичні розв'язки. Це рівняння

$$\ddot{x} + b_1\dot{x} + b_2x^3 = h \cos \omega t, \quad (4.14)$$

що у літературі відоме як одне із рівнянь Дурфінга [65]. Приведемо його до вигляду (1.65):

$$\frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{z} - \vec{e} = 0$$

при позначеннях

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ b_1x_2 + b_2x_1^3 \end{pmatrix}; \quad (4.15a,б)$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \cos \omega t \end{pmatrix}. \quad (4.15в)$$

Значення похідної $d\vec{z}/d\vec{x}$, яка необхідна при формуванні миттєвої (на півперіоді) математичної моделі, є таким

$$\frac{d\vec{z}}{d\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3b_2x_1^2 & b_1 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Заданося такими значеннями коефіцієнтів і кругової частоти:

$$b_1 = 0.2; \quad b_2 = 1.0; \quad \omega = 1.0$$

і одержимо розв'язок шляхом чисельного моделювання з використанням ПЗ ДГМ.

Головна програма `Program Duffing` і процедура `МОДЕЛ` із блоку програмних компонент користувача для цього випадку мають вигляд:

```

      Program Duffing
!-----
!   Програма визначення періодичних розв'язків
!   рівняння Дуффінга
!   dx/dt+Z=E
!   X=colon(x1,x2)
!   Z=colon(z1,z2)
!   E=colon(e1,e2)
!   z1=-x2;   z2=b1*x2+b2*x1**3
!   e1=0;   e2=h*cos t.
!   (змінні містять тільки непарні гармоніки)
!-----
      Implicit none
      real,dimension(14)::Y0
      real,dimension(12)::E
      integer,dimension(10)::KER
      real::B1,B2,OM,EPS1,EPS2,H1,HM
      integer::K,NG,NK
!-----
      Common/MP/B1,B2
!----- спільна ділянка із процедурою MODEL
!-----
      Open(1,File='DaniDuf.dat',status='old')
      Read(1,*)B1,B2
      Read(1,*)OM,EPS1,EPS2,H1,HM
!----- OM - кругова частота основної гармоніки
!----- EPS1 - точність інтегрування
!----- EPS2 - точність для метода Ньютона
!----- H1 - значення h, при якому необх. уточ. корінь
!----- HM - максимальне значення h
      Read(1,*)KER
      Read(1,*)K
!----- KER - масив керуючих змінних

```

```

!----- K - порядок системи диф. рівнянь
!----- ввели всі дані
      Close(1)
!-----
      Open(1,file='RezDuf.dat')
      write(1,5)
      5 format(4X,'Періодичні розв'язкт рівняння Дуффінга'
      & /10X,'Введені дані:')
      write(1,14)B1,B2
      14 format(2X,' B1=',E10.4,' B2=',E10.4)
      write(1,15)OM,EPS1,EPS2,H1,HM
      15 format(2X,' OM=',E10.4,' EPS1=',E10.4,
      & ' EPS2=',E10.4,' H1=',E10.4,' HM=',E10.4)
      write(1,16)KER
      16 format(2X,'KER=',10i5)
      Write(1,17)K
      17 format(2X,' K=',i2)
      3 Format(2X,10I5)
!----- записали до вихідного файлу введені дані
!-----
      Call SizesV(KER(1),K,KER(8),NG,NK)
      Write(1,3)NG,NK
!----- NG - порядок простого вектора амплітуд
!----- NK - порядок складеного вектора амплітуд
!-----
      E=0.; E(NG+1)=1.0
      Y0=0; Y0(NK+1)=OM
!-- Сформували вектор амплітуд E змушувальних сил
!-- і початкове значення вектора Y0
!-----
      write(1,13)
      13 format(/2X,'Р о з р а х у н о к :')
      Call HARMOSC(K,Y0,E,NK,HM,H1,EPS1,EPS2,KER)
      Close(1)
      Stop
      End Program Duffing
!-----

!-----
      Subroutine Model(AL,M,K,MK,XC,YC,ZC,YXC,ZXC,VM)
!-----
! Процедура миттєвої на півперіоді моделі процесу
!-----
      Implicit none
      real::AL
      integer,intent(in)::M,K,MK
      real,dimension(MK)::XC,YC,ZC
      real,dimension(MK,K)::YXC,ZXC
      real,dimension(K)::X,Z
      real,dimension(K,K)::ZX,VM
      real::B1,B2
      integer::i
!-----

```

```

Common/MP/B1,B2
! Спільна ділянка пам'яті із головною програмою
!-----
BM(1,1)=0.; AL=0.
YC(1)=0.; YXC(1,1)=0.
Do i=1,M
  call DRAWOUTV(K,XC,MK,X,i)
  Z(1)=-X(2)
  Z(2)=B1*X(2)+B2*X(1)**3
  ZX(1,1)=0.; ZX(1,2)=-1.
  ZX(2,1)=3.*B2*X(1)**2; ZX(2,2)=B1
  call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,i)
  call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,i)
end do
Return
End Subroutine Model

```

Файл RezDuf.dat , призначений для збереження результатів, отримує після відпрацювання програми такі дані:

Періодичні розв'язки рівняння Дуффінга

Введені дані:

```

B1= .2000E+00 B2= .1000E+01
OM= .1000E+01 EPS1= .1000E-02 EPS2= .1000E-03
H1= .3000E+00 HM= .6000E+00
KER = 1 1 0 0 0 0 0 5 0 0
K = 2
6 12

```

Р о з р а х у н о к :

Номер найвищої гармоніки = 5

Уточнене значення 1 кореня для h= .300
(розв'язок одержано після 3-ої ітерації)

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

```

X1(c1)= -.3100E+00 X1(s1)= .6709E-01 X1(1)= .3172E+00
X1(c3)= -.6841E-03 X1(s3)= .5845E-03 X1(3)= .8998E-03
X1(c5)= -.1062E-05 X1(s5)= .2510E-05 X1(5)= .2725E-05

```

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

```

X2(c1)= .6709E-01 X2(s1)= .3100E+00 X2(1)= .3172E+00
X2(c3)= .1753E-02 X2(s3)= .2052E-02 X2(3)= .2699E-02
X2(c5)= .1262E-04 X2(s5)= .5290E-05 X2(5)= .1369E-04

```

Уточнене значення 2 кореня для h= .300
(розв'язок одержано після 2-ої ітерації)

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

```

X1(c1)= -.7394E+00 X1(s1)= .6751E+00 X1(1)= .1001E+01
X1(c3)= .2232E-01 X1(s3)= .2497E-01 X1(3)= .3349E-01
X1(c5)= .8579E-03 X1(s5)= -.6993E-03 X1(5)= .1107E-02

```

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:		
X2(c1)= .6751E+00	X2(s1)= .7394E+00	X2(1)= .1001E+01
X2(c3)= .7491E-01	X2(s3)= -.6696E-01	X2(3)= .1005E+00
X2(c5)= -.3495E-02	X2(s5)= -.4290E-02	X2(5)= .5533E-02

Уточнене значення 3 кореня для $h = .300$
(розв'язок одержано після 3-ої ітерації)

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:		
X1(c1)= .6864E+00	X1(s1)= .9841E+00	X1(1)= .1200E+01
X1(c3)= -.5973E-01	X1(s3)= .2146E-01	X1(3)= .6347E-01
X1(c5)= -.1277E-03	X1(s5)= -.3154E-02	X1(5)= .3157E-02

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:		
X2(c1)= .9841E+00	X2(s1)= -.6864E+00	X2(1)= .1200E+01
X2(c3)= .6438E-01	X2(s3)= .1792E+00	X2(3)= .1904E+00
X2(c5)= -.1577E-01	X2(s5)= .6382E-03	X2(5)= .1578E-01

Потрібно відзначити, що у цьому випадку елементу $кер(5)$ керуючого масиву $кер$ було присвоєно нульове значення, і тому всі точки h – характеристики, за винятком при $h = h_1$, не записувалися до масиву $rezDuf.dat$. Якщо б задати елементу $кер(5)$ значення 1, то тоді можна було б відстежити, що h – характеристика при зміні h від нуля до 0.6 має петлеподібний характер і дві особливі точки, які алгоритм процедури $harmosc$ успішно пройшов, використавши прийом інвертування диференційних рівнянь (див. розділ 1.5.7). Через точку $h = h_1 = 0.3$ h – характеристика пройшла тричі, і тим самим знайдено всі три періодичні розв'язки рівняння (4.14). Кожний із розв'язків уточнений ітераційним методом Ньютона.

При розв'язанні цієї задачі елементу $кер(9)$ керуючого масиву $кер$ було присвоєно нульове значення і елементу $кер(8)$ – значення 5, тобто була задана така стратегія пошуку розв'язку: відразу як полігармонічне коливання з гармоніками першою, третьою і п'ятою без наступного нарощування кількості враховуваних гармонік.

4.1.3. Приклад В.3

У попередньому розділі розглянуто чисельне моделювання вимушених коливань, коли нелінійність у системі задається аналітично і є однозначною безумовною (належить до першої групи), а розв'язуване диференційне рівняння має три періодичні розв'язки.

У прикладі, який розглядається у цьому розділі, теж моделюються вимушені нелінійні коливання у об'єкті з однозначною безумовною нелінійністю, проте тут вона задається не аналітично, а таблицею. Диференційні рівняння, що описують розглядувані коливання, при певних значеннях параметрів також мають, як і у попередньому прикладі, три періодичних розв'язки. Цей приклад - розрахунок

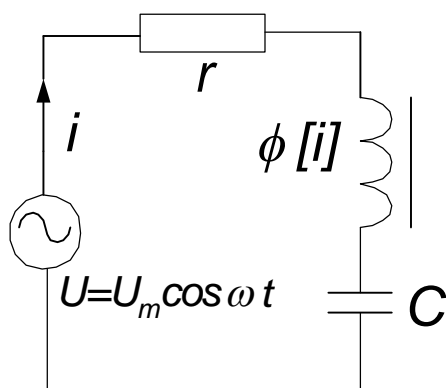


Рис. 4.1. Послідовний ферорезонансний контур

характеристики простого послідовного ферорезонансного контуру, показаного на рис. 4.1, який утворено із лінійного активного опору r , нелінійної індуктивності (дроселя насичення) з характеристикою намагнічування $\phi = \phi [i]$ і ємності C [11]. Шукана характеристика контуру – це залежність діючого значення його струму I від амплітуди прикладеної напруги U_m .

Процеси у цьому контурі описуються такими рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} + r i + u_c &= h U_m \cos \omega t; \\ \frac{d u_c}{dt} - \frac{1}{C} i &= 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

де i – струм контуру; ϕ – потокозчеплення дроселя; u_c – напруга конденсатора.

Ця система диференційних рівнянь приводиться до форми запису векторного диференційного рівняння (1.64), якщо прийняти

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ u_c \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ u_c \end{pmatrix}; \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h U_m \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \vec{z} &= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r i + u_c \\ -\frac{1}{C} i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r x_1 + x_2 \\ -\frac{1}{C} x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Матриці “миттєвих” диференційних параметрів для цього випадку мають вигляд

$$\frac{d \vec{y}}{d \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{d\phi}{di} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{d \vec{z}}{d \vec{x}} = \begin{pmatrix} r & 1 \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

У [39] наведено розрахунок нелінійних коливань у зображеному на рис. 4.1 контурі (у [39] це – рис. 3.29) аналітичним методом повільно змінних амплітуд при апроксимації характеристики намагнічування дроселя формулою

$$\phi [i] = L_0 (i - \gamma_0 i^3), \quad (4.20)$$

де L_0, γ_0 – константи. Там же зазначається, що при такій апроксимації кривої намагнічування результат можна вважати адекватним процесові у контурі тільки при зміні струму у тому інтервалі його значень, на якому залежність (4.20) задовільно апроксимує реальну криву намагнічування. Однак до розрахунку коливань інтервал можливих значень струму є наперед невідомим. Труднощі з підбором аналітичних апроксимацій нелінійностей кривих намагнічування прогресивно зростають при ускладненні схеми, яка може бути багатоконтурною і містити декілька дроселів.

При чисельному моделюванні періодичних процесів у схемі рис. 4.1 з використанням ПЗ ДГМ нелінійність схеми – залежність поточкозчеплення ϕ дроселя від струму i контуру – задається таблицею з використанням інтерполяції.

Треба відзначити, що алгоритми розрахунку періодичних процесів диференціальним гармонічним методом не є чутливими до гладкості функцій, за допомогою яких здійснюється інтерполяція таблично заданих характеристик нелінійних елементів. І якщо при чисельному інтегруванні у часі нелінійних диференціальних рівнянь (розрахунку перехідних процесів) доводиться використовувати для інтерполяції характеристик елементів схеми достатньо гладкі інтерполяційні поліноми другого і вищих степенів, у тому числі квадратичні і кубічні сплайни [48], то при розрахунках періодичних процесів диференціальним гармонічним методом цілком допустимо здійснювати лінійну інтерполяцію таблично заданих функцій, тобто наближувати їх ломаною лінією (див. розділ 2.2.4.2).

Блок програмних компонент користувача для розрахунку характеристики ферорезонансного контуру складається із: головної програми **Program Ferorez** і процедури **МОДЕЛЬ** миттєвої моделі процесу на півперіоді.

Для обробки результатів і їх запам'ятовування застосовується стандартна процедура **OUTP** (вона входить до Блоку 5 ПЗ ДГМ), тому у блоці програмних компонент користувача її немає.

Дальше наводиться роздрук головної програми **Program Ferorez** блоку програмних компонент користувача.

```

Program Ferorez
!-----
! Програма розрахунку характеристики
! ферорезонансного контура
! шляхом визначення періодичних розв'язків  $X=X(t)$ 
! векторного нелінійного диференціального рівняння
! стану ферорезонансного контура
!  $dY/dt+Z=E$ 
!  $X=colon(x1,x2)$ 
!  $Y=colon(y1,y2)$ 
!  $Z=colon(z1,z2)$ 
!  $E=colon(e1,e2)$ 
!  $x1=i$  (струм);  $x2=Uc$  (напруга конденсатора)
!  $y1=Psi$  (поточкозчеплення);  $y2=Uc$ 
!  $z1=R*i+Uc$ ;  $z2=-i/C$ ,  $C$  - ємність,  $R$  - опір
!  $e1=h*Um*sin(OM*t)$ ;  $e2=0$ .
! (струм контура містить тільки непарні гармоніки)

```

```

!-----
Implicit none
real,dimension(14)::Y0
real,dimension(12)::E
integer,dimension(10)::KER
real,dimension(30)::H
real::B0,STEP,Um,R,C,OM,H1,HM,EPS1,EPS2
integer::NT,K,NG,NK,i
!-----
Common/MP/H,NT,B0,STEP,R,C
!----- спільна ділянка із процедурою MODEL
!-----
Open(1,File='DaniFer.dat',status='old')
Read(1,*)NT
Read(1,*)B0,STEP
Read(1,*)(H(i),i=1,NT)
!----- ввели вебер-амперну характеристику дроселя
!-----
Read(1,*)Um,R,C,OM
Read(1,*)H1,HM,EPS1,EPS2
Read(1,*)KER
Read(1,*)K
Close(1)
!-----
Open(1,file='RezFer.dat')
write(1,5)
5 format(4X,'Введені дані:')
write(1,10)
10 format(2X,'Вебер-амперна характеристика дроселя:')
write(1,3)NT
write(1,4)B0,STEP
write(1,4)(H(i),i=1,NT)
write(1,11)
11 format(2X,'Інші параметри кола:')
write(1,14)Um,R,C,OM
14 format(2X,'Um=',E10.4,' R=',E10.4,' C=',E10.4,'OM=',E10.4)
write(1,12)
12 format(2X,'Інші дані:')
write(1,15)H1,HM,EPS1,EPS2
15 format(2X,' H1=',E10.4,' HM=',E10.4
& /2X,'EPS1=',E10.4,' EPS2=',E10.4)
write(1,3)KER
Write(1,17)K
17 format(2X,' K=',i2)
3 Format(2X,10I5)
4 Format(2X,4E12.4)
!----- надрукували введені дані
!-----
Call SizesV(KER(1),K,KER(8),NG,NK)
Write(1,3)NG,NK
!----- NG - порядок простого вектора амплітуд
!----- NK - порядок складеного вектора амплітуд
E=0.; E(1)=Um

```

```

      Y0=0;  Y0(NK+1)=OM
!-- Сформували вектор амплітуд E вимушувальних сил
!-- і початкове значення вектора Y0.
      write(1,13)
13 format(/2X,'Р о з р а х у н о к :')
      Call HARMOSC(K,Y0,E,NK,НМ,Н1,EPS1,EPS2,KER)
      Close(1)
      Stop
      End Program Ferorez

```

Головна програма цього пакету здійснює:

- опис змінних, у тому числі опис і оголошення розмірів двох масивів: $y_0(14)$ і $E(12)$. y_0 – це матриця-стовпець, утворена із вектора амплітуд струму, вектора амплітуд напруги на ємності, кругової частоти ω і параметру h . Задані розміри цих масивів дозволяють задавати максимальний порядок враховуваної гармоніки не більшим від 5 (враховуються гармоніки тільки непарних порядків). У разі задання більшого значення максимального порядку гармоніки розміри цих масивів необхідно збільшити;

- опис спільної ділянки пам'яті /MP/, за допомогою якої передаються дані до процедури MODEL: таблиця кривої намагнічування дроселя (Н – таблиця нелінійної частини характеристики, NT – кількість вузлів таблиці, во – перше значення абсциси нелінійної частини, STEP – крок таблиці), активний опір R і ємність C;

- введення вхідних даних із файла DaniFer.dat;
- виведення до вихідного файлу RezFer.dat введених вхідних даних;
- звернення до процедури sizesV;
- формування вектора E змушувальних сил;
- присвоєння початкового значення масиву y_0 ;
- звернення до процедури HARMOSC для розрахунку h-характеристики і уточнення розв'язку при заданому значенні h .

Дальше наводиться роздрук процедури MODEL, яка реалізує миттєву (на півперіоді) модель періодичного процесу у схемі.

```

      Subroutine Model(AL,M,K,MK,XC,YC,ZC,YXC,ZXC,VM)
!-----
! Процедура миттєвої моделі процесу (на півперіоді)
!-----
      Implicit none
      real::AL
      integer,intent(in)::M,K,MK
      real,dimension(MK)::XC,YC,ZC
      real,dimension(MK,K)::YXC,ZXC
      real,dimension(K)::X,Y,Z
      real,dimension(K,K)::YX,ZX,VM
      real,dimension(30)::H
      integer::NT,i
      real::B0,STEP,R,C,LD
      Common/MP/H,NT,B0,STEP,R,C
!-- Спільна ділянка пам"яті із головною програмою

```

```

!-----
  VM(1,1)=0.; AL=0.
  Do i=1,M
    call DRAWOUTV(K,XC,MK,X,i)
    call INTLIN(X(1),Y(1),LD,B0,СТЕР,Н,NT)
!----- шляхом інтерполяції із таблиці (крива намагн. дроселя)
!----- обчислили Y(1)=Psi і похідну LD=dPsi/di
    Y(2)=X(2)
    Z(1)=R*X(1)+X(2)
    Z(2)=-X(1)/C
    YX(1,1)=LD
    YX(1,2)=0.
    YX(2,1)=0.
    YX(2,2)=1.
    ZX(1,1)=R
    ZX(1,2)=1.
    ZX(2,1)=-1./C
    ZX(2,2)=0.
    call DRAWUPV(K,Y,YC,MK,i)
    call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,i)
    call DRAWUPM(K,YX,YXC,MK,i)
    call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,i)
  end do
  Return
End Subroutine Model

```

Перші два виконувані оператори процедури $VM(1,1)=0.$ і $AL=0.$ виконують непотрібні операції і присутні тільки для того, щоб не провокувати зауваження компілятора, тому що формальні параметри VM і AL не використовуються. Параметр VM не використовується тому, що рівняння (4.17) не має матриці коефіцієнтів, тобто не є вигляду (1.66) чи (1.67), і параметр AL не використовується, бо у задачі немає елементів з характеристиками гістерезисного вигляду.

Основним оператором моделі є оператор циклу, у якому змінна i – номер вузла на півперіоді. У цьому циклі виконується таке:

- оператором `call DRAWOUTV(K,XC,MK,X,i)` викликається для виконання процедура `DRAWOUTV` (вона входить до Блоку 5 ПЗ ДГМ), яка “витає” із складеного вузлового вектора значення змінних x_1 (струм контуру) і x_2 (напруга конденсатора) в i -тому вузлі півперіоду і формує із них вектор \vec{x} ;

- оператором

```
call INTLIN(X(1),Y(1),LD,B0,СТЕР,Н,NT)
```

викликається для виконання процедура `INTLIN` (вона входить до Блоку 4 ПЗ ДГМ), яка шляхом лінійної інтерполяції визначає із таблиці, що нею задається крива намагнічування дроселя, значення потокозчеплення дроселя і диференційної індуктивності;

- групою операторів присвоєння надаються значення масивам Y , Z , YX і ZX , відповідно до формул (4.18) і (4.19);

- операторами

```
call DRAWUPV(K,Y,YC,MK,i);
```

```
call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,i)
```

“вставляються” елементи масивів y і z у масиви yc і zc (останні зберігають значення складених вузлових векторів вигляду (1.118)) на місця, що відповідають i -тому вузлу півперіоду;

– операторами

```
call DRAWUPM(K,YX,YXC,MK,i);
call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,i)
```

“вставляються” елементи масивів yx і zx у масиви $yxс$ і $zxс$ (останні зберігають значення складених матриць вузлових диференційних параметрів вигляду (1.127)) на місця, що відповідають i -тому вузлу півперіоду.

Роздрук файлу `DaniFer.dat` із вхідними даними:

```
11
1.0 0.2
0.1 0.115 0.126 0.135 0.142 0.148 0.153 0.157
0.16 0.162 0.1635
100. 0.3 0.001 314.16
0.32 0.5 0.01 0.001
 1 0 0 0 1 0 0 5 0 0
 2
```

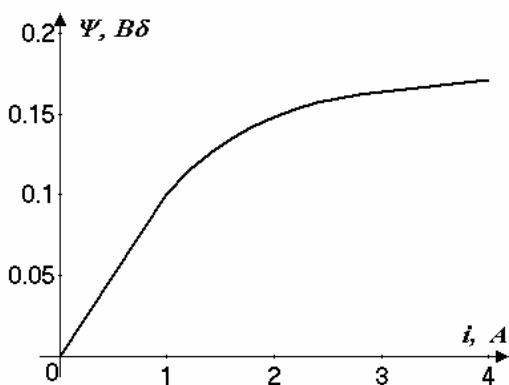


Рис. 4.2. Крива намагнічування дроселя

Перші чотири рядки цього файлу – це числові дані таблично заданої кривої намагнічування дроселя, показаної на рис. 4.2. Число 11 у першому рядку – кількість вузлів таблиці. Два числа у другому рядку: 1.0 – значення струму, з якого починається нелінійна частина; 0.2 – крок таблиці (таблиця з рівновіддаленими вузлами). Наступних 11 чисел у третьому і четвертому рядках – значення поточозчеплення дроселя у вузлах таблиці. П’ятий рядок: 100.0 - для U_m ; 0.3 – для r ; 0.001 – для C ; 314.16 – для ω .

Шостий рядок: 0.32 – для $H1$ (значення параметра h , при якому розв’язок належить уточнити методом Ньютона); 0.5 – для НМ (максимальне значення параметра h); 0.01 - для точності ε_1 розрахунку h –характеристики; 0.001 – для точності ε_2 при уточненні методом Ньютона. Сьомий рядок – значення елементів керуючого масиву `KEX`: перше число 1 – змінні містять тільки непарні гармоніки; друге і третє числа 0 і 0 – система рівнянь (4.17) приведена до вигляду (1.64); четверте число 0 – коливання вимушені; п’яте число 1 - необхідно друкувати дані для всіх точок h –характеристики; шосте число 0 – не потрібно зупиняти розрахунок при досягненні першої особливої точки; сьоме число 0 – у задачі немає гістерезисних характеристик; восьме число 5 – номер найвищої враховуваної гармоніки; дев’яте і десяте числа 0 і 0 – нарощування кількості враховуваних гармонік не передбачається, розв’язок відразу шукається як полігар-

монічне коливання з гармоніками від першої до п'ятої без наступного нарощування кількості враховуваних гармонік.

Далі наводиться роздрук файлу RezFer.dat із вихідними даними (результатом):

Введені дані:

Вебер-амперна характеристика дроселя:

11

.1000E+01	.2000E+00		
.1000E+00	.1150E+00	.1260E+00	.1350E+00
.1420E+00	.1480E+00	.1530E+00	.1570E+00
.1600E+00	.1620E+00	.1635E+00	

Інші параметри кола:

Um = .1000E+03 R = .3000E+00 C = .1000E-02 OM = .3142E+03

Інші дані:

H1 = .3200E+00 HM = .5000E+00

EPS1 = .1000E-01 EPS2 = .1000E-02

KER = 1 0 0 0 1 0 0 5 0 0

K = 2

NG = 6 NK = 12

Р о з р а х у н о к :

Номер найвищої гармоніки = 5

Рахується h-характеристика

Параметр h= .05100, незалежною на кроці є змінна 14

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .1919E-02 X1(s1)= .1806E+00 X1(1)= .1806E+00

X1(c3)= -.1000E-07 X1(s3)= -.1282E-07 X1(3)= .1626E-07

X1(c5)= -.9916E-08 X1(s5)= .6184E-08 X1(5)= .1169E-07

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= -.5748E+00 X2(s1)= .6106E-02 X2(1)= .5748E+00

X2(c3)= -.8978E-06 X2(s3)= .1498E-06 X2(3)= .9102E-06

X2(c5)= -.8929E-06 X2(s5)= .2132E-06 X2(5)= .9180E-06

Параметр h= .17600, незалежною на кроці є змінна 14

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .6621E-02 X1(s1)= .6232E+00 X1(1)= .6233E+00

X1(c3)= -.3453E-07 X1(s3)= -.4424E-07 X1(3)= .5612E-07

X1(c5)= -.3422E-07 X1(s5)= .2134E-07 X1(5)= .4033E-07

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= -.1984E+01 X2(s1)= .2107E-01 X2(1)= .1984E+01

X2(c3)= -.3098E-05 X2(s3)= .5171E-06 X2(3)= .3141E-05

X2(c5)= -.3081E-05 X2(s5)= .7359E-06 X2(5)= .3168E-05

Уточнене значення 1 кореня для h= .320

(розв'язок одержано після 3-ої ітерації)

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .1244E-01 X1(s1)= .1154E+01 X1(1)= .1154E+01

X1(c3)= -.4680E-03 X1(s3)= -.1506E-01 X1(3)= .1506E-01

X1(c5)= .4823E-03 X1(s5)= .9395E-02 X1(5)= .9407E-02

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)=	-.3671E+01	X2(s1)=	.3959E-01	X2(1)=	.3672E+01
X2(c3)=	.1597E-01	X2(s3)=	-.4957E-03	X2(3)=	.1597E-01
X2(c5)=	-.5986E-02	X2(s5)=	.3083E-03	X2(5)=	.5994E-02

Параметр h= .33225, незалежною на кроці є змінна 14

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)=	.1277E-01	X1(s1)=	.1199E+01	X1(1)=	.1199E+01
X1(c3)=	-.1131E-03	X1(s3)=	-.1322E-01	X1(3)=	.1322E-01
X1(c5)=	.7192E-04	X1(s5)=	.3720E-02	X1(5)=	.3720E-02

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)=	-.3815E+01	X2(s1)=	.4064E-01	X2(1)=	.3816E+01
X2(c3)=	.1402E-01	X2(s3)=	-.1189E-03	X2(3)=	.1402E-01
X2(c5)=	-.2374E-02	X2(s5)=	.4723E-04	X2(5)=	.2374E-02

Параметр h= .41790, незалежною на кроці є змінна 2

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)=	.2017E-01	X1(s1)=	.1774E+01	X1(1)=	.1775E+01
X1(c3)=	-.2506E-02	X1(s3)=	-.1671E+00	X1(3)=	.1671E+00
X1(c5)=	.8612E-03	X1(s5)=	.4959E-01	X1(5)=	.4959E-01

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)=	-.5647E+01	X2(s1)=	.6419E-01	X2(1)=	.5648E+01
X2(c3)=	.1773E+00	X2(s3)=	-.2657E-02	X2(3)=	.1773E+00
X2(c5)=	-.3157E-01	X2(s5)=	.5502E-03	X2(5)=	.3158E-01

Параметр h= .45149, незалежною на кроці є змінна 2

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)=	.3560E-01	X1(s1)=	.2350E+01	X1(1)=	.2350E+01
X1(c3)=	-.2027E-01	X1(s3)=	-.4279E+00	X1(3)=	.4284E+00
X1(c5)=	.1296E-01	X1(s5)=	.1409E+00	X1(5)=	.1415E+00

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)=	-.7479E+01	X2(s1)=	.1133E+00	X2(1)=	.7480E+01
X2(c3)=	.4539E+00	X2(s3)=	-.2150E-01	X2(3)=	.4544E+00
X2(c5)=	-.8968E-01	X2(s5)=	.8255E-02	X2(5)=	.9006E-01

Параметр h= .46160, незалежною на кроці є змінна 2

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)=	.2130E+00	X1(s1)=	.5228E+01	X1(1)=	.5232E+01
X1(c3)=	-.2734E+00	X1(s3)=	-.1986E+01	X1(3)=	.2005E+01
X1(c5)=	.1482E+00	X1(s5)=	.6047E+00	X1(5)=	.6225E+00

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)=	-.1664E+02	X2(s1)=	.6778E+00	X2(1)=	.1665E+02
X2(c3)=	.2107E+01	X2(s3)=	-.2901E+00	X2(3)=	.2127E+01
X2(c5)=	-.3849E+00	X2(s5)=	.9433E-01	X2(5)=	.3963E+00

Параметр h= .45161, незалежною на кроці є змінна 2

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)=	.6507E+00	X1(s1)=	.8826E+01	X1(1)=	.8849E+01
X1(c3)=	-.8147E+00	X1(s3)=	-.3381E+01	X1(3)=	.3477E+01
X1(c5)=	.2731E+00	X1(s5)=	.6126E+00	X1(5)=	.6708E+00

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)=	-.2809E+02	X2(s1)=	.2071E+01	X2(1)=	.2817E+02
X2(c3)=	.3586E+01	X2(s3)=	-.8643E+00	X2(3)=	.3689E+01

X2(c5)= -.3900E+00 X2(s5)= .1739E+00 X2(5)= .4270E+00

Параметр h= .34430, незалежною на кроці є змінна 14

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .6777E+01 X1(s1)= .2530E+02 X1(1)= .2619E+02

X1(c3)= -.4689E+01 X1(s3)= -.4414E+01 X1(3)= .6440E+01

X1(c5)= -.1396E+01 X1(s5)= -.5603E+00 X1(5)= .1504E+01

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= -.8052E+02 X2(s1)= .2157E+02 X2(1)= .8336E+02

X2(c3)= .4683E+01 X2(s3)= -.4975E+01 X2(3)= .6832E+01

X2(c5)= .3566E+00 X2(s5)= -.8885E+00 X2(5)= .9574E+00

Уточнене значення 2 кореня для h= .320

(розв'язок одержано після 3-ої ітерації)

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .8393E+01 X1(s1)= .2787E+02 X1(1)= .2910E+02

X1(c3)= -.5414E+01 X1(s3)= -.4329E+01 X1(3)= .6932E+01

X1(c5)= -.1726E+01 X1(s5)= -.2838E+00 X1(5)= .1749E+01

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= -.8870E+02 X2(s1)= .2671E+02 X2(1)= .9263E+02

X2(c3)= .4592E+01 X2(s3)= -.5744E+01 X2(3)= .7354E+01

X2(c5)= .1805E+00 X2(s)= -.1099E+01 X2(5)= .1114E+01

Параметр h= .31757, незалежною на кроці є змінна 14

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .9745E+01 X1(s1)= .2882E+02 X1(1)= .3043E+02

X1(c3)= -.5887E+01 X1(s3)= -.3668E+01 X1(3)= .6936E+01

X1(c5)= -.2023E+01 X1(s5)= -.1108E+00 X1(5)= .2026E+01

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= -.9174E+02 X2(s1)= .3102E+02 X2(1)= .9684E+02

X2(c3)= .3891E+01 X2(s3)= -.6246E+01 X2(3)= .7359E+01

X2(c5)= .7037E-01 X2(s5)= -.1287E+01 X2(5)= .1289E+01

Параметр h= .25073, незалежною на кроці є змінна 14

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .2195E+02 X1(s1)= .3566E+02 X1(1)= .4187E+02

X1(c3)= -.8121E+01 X1(s3)= .1117E+01 X1(3)= .8198E+01

X1(c5)= -.1599E+01 X1(s5)= .2856E+01 X1(5)= .3273E+01

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= -.1135E+03 X2(s1)= .6986E+02 X2(1)= .1333E+03

X2(c3)= -.1185E+01 X2(s3)= -.8616E+01 X2(3)= .8697E+01

X2(c5)= -.1818E+01 X2(s5)= -.1018E+01 X2(5)= .2084E+01

Параметр h= .20046, незалежною на кроці є змінна 2

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .4593E+02 X1(s1)= .3062E+02 X1(1)= .5520E+02

X1(c3)= -.1614E+01 X1(s3)= .9243E+01 X1(3)= .9383E+01

X1(c5)= .3957E+01 X1(s5)= -.7017E+00 X1(5)= .4018E+01

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= -.9745E+02 X2(s1)= .1462E+03 X2(1)= .1757E+03

X2(c3)= -.9806E+01 X2(s3)= -.1713E+01 X2(3)= .9954E+01

X2(c5)= .4465E+00 X2(s5)= .2519E+01 X2(5)= .2558E+01

Параметр h= .19796, незалежною на кроці є змінна 2

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .5010E+02	X1(s1)= .2761E+02	X1(1)= .5720E+02
X1(c3)= .6282E+00	X1(s3)= .9425E+01	X1(3)= .9446E+01
X1(c5)= .3361E+01	X1(s5)= -.2444E+01	X1(5)= .4156E+01

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= -.8787E+02	X2(s1)= .1594E+03	X2(1)= .1821E+03
X2(c3)= -.9999E+01	X2(s3)= .6664E+00	X2(3)= .1002E+02
X2(c5)= .1555E+01	X2(s5)= .2139E+01	X2(5)= .2645E+01

Параметр h= .19628, незалежною на кроці є змінна 2

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .5770E+02	X1(s1)= .2008E+02	X1(1)= .6109E+02
X1(c3)= .4950E+01	X1(s3)= .8005E+01	X1(3)= .9412E+01
X1(c5)= .2322E+00	X1(s5)= -.4465E+01	X1(5)= .4471E+01

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= -.6392E+02	X2(s1)= .1836E+03	X2(1)= .1944E+03
X2(c3)= -.8493E+01	X2(s3)= .5251E+01	X2(3)= .9985E+01
X2(c5)= .2842E+01	X2(s5)= .1478E+00	X2(5)= .2846E+01

Параметр h= .24834, незалежною на кроці є змінна 2

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .7383E+02	X1(s1)= -.1923E+02	X1(1)= .7629E+02
X1(c3)= .6192E+01	X1(s3)= -.5864E+01	X1(3)= .8528E+01
X1(c5)= -.1529E+01	X1(s5)= .4633E+01	X1(5)= .4879E+01

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= .6121E+02	X2(s1)= .2350E+03	X2(1)= .2428E+03
X2(c3)= .6222E+01	X2(s3)= .6568E+01	X2(3)= .9047E+01
X2(c5)= -.2949E+01	X2(s5)= -.9731E+00	X2(5)= .3106E+01

Параметр h= .30532, незалежною на кроці є змінна 14

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .7583E+02	X1(s1)= -.3982E+02	X1(1)= .8565E+02
X1(c3)= .5660E+00	X1(s3)= -.8466E+01	X1(3)= .8485E+01
X1(c5)= .3588E+01	X1(s5)= .3239E+01	X1(5)= .4833E+01

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= .1267E+03	X2(s1)= .2413E+03	X2(1)= .2726E+03
X2(c3)= .8982E+01	X2(s3)= .6002E+00	X2(3)= .9002E+01
X2(c5)= -.2061E+01	X2(s5)= .2284E+01	X2(5)= .3076E+01

Уточнене значення 3 кореня для h= .320

(розв'язок одержано після 3-ої ітерації)

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .7516E+02	X1(s1)= -.4765E+02	X1(1)= .8899E+02
X1(c3)= -.1461E+01	X1(s3)= -.9241E+01	X1(3)= .9355E+01
X1(c5)= .4776E+01	X1(s5)= .1572E+01	X1(5)= .5028E+01

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= .1517E+03	X2(s1)= .2392E+03	X2(1)= .2832E+03
X2(c3)= .9803E+01	X2(s3)= -.1550E+01	X2(3)= .9925E+01
X2(c5)= -.1001E+01	X2(s5)= .3040E+01	X2(5)= .3201E+01

Параметр h= .35726, незалежною на кроці є змінна 14

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

$X1(c1) = .7658E+02$ $X1(s1) = -.5233E+02$ $X1(1) = .9275E+02$
 $X1(c3) = -.2501E+01$ $X1(s3) = -.8261E+01$ $X1(3) = .8631E+01$
 $X1(c5) = .4818E+01$ $X1(s5) = .8092E+00$ $X1(5) = .4885E+01$
 Амплітуди гармонік 2-ої змінної:
 $X2(c1) = .1665E+03$ $X2(s1) = .2437E+03$ $X2(1) = .2952E+03$
 $X2(c3) = .8764E+01$ $X2(s3) = -.2653E+01$ $X2(3) = .9157E+01$
 $X2(c5) = -.5149E+00$ $X2(s5) = .3067E+01$ $X2(5) = .3110E+01$

Параметр $h = .43297$, незалежною на кроці є змінна 2

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:
 $X1(c1) = .7764E+02$ $X1(s1) = -.6656E+02$ $X1(1) = .1023E+03$
 $X1(c3) = -.5058E+01$ $X1(s3) = -.7139E+01$ $X1(3) = .8749E+01$
 $X1(c5) = .4549E+01$ $X1(s5) = -.1651E+01$ $X1(5) = .4840E+01$
 Амплітуди гармонік 2-ої змінної:
 $X2(c1) = .2118E+03$ $X2(s1) = .2471E+03$ $X2(1) = .3255E+03$
 $X2(c3) = .7574E+01$ $X2(s3) = -.5366E+01$ $X2(3) = .9282E+01$
 $X2(c5) = .1051E+01$ $X2(s5) = .2896E+01$ $X2(5) = .3081E+01$

Параметр $h = .50740$, незалежною на кроці є змінна 14

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:
 $X1(c1) = .7908E+02$ $X1(s1) = -.7798E+02$ $X1(1) = .1111E+03$
 $X1(c3) = -.6292E+01$ $X1(s3) = -.6074E+01$ $X1(3) = .8746E+01$
 $X1(c5) = .3726E+01$ $X1(s5) = -.2837E+01$ $X1(5) = .4683E+01$
 Амплітуди гармонік 2-ої змінної:
 $X2(c1) = .2482E+03$ $X2(s1) = .2517E+03$ $X2(1) = .3535E+03$
 $X2(c3) = .6444E+01$ $X2(s3) = -.6676E+01$ $X2(3) = .9279E+01$
 $X2(c5) = .1806E+01$ $X2(s5) = .2372E+01$ $X2(5) = .2981E+01$

Процедура `HARMOSC` забезпечила запис до вихідного файлу усієї h -характеристики (бо було задано `KEP(5)=1`), адже вона якраз і відображає характеристику ферорезонансного контуру. Ця характеристика показана на рис. 4.3 суцільною лінією.

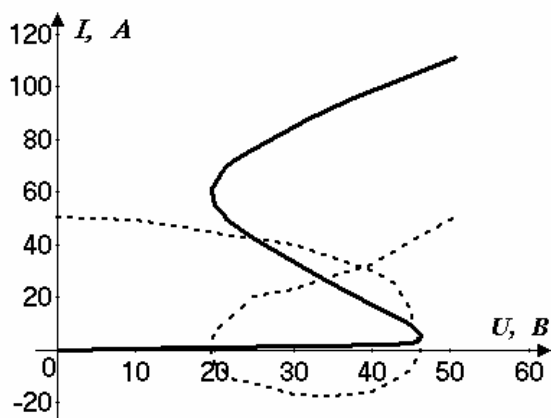


Рис. 4.3. Характеристика контуру

Тут треба прийняти до уваги, що на рисунку зображено залежність від амплітуди прикладеної напруги не діючого значення струму, а амплітуди його першої гармоніки. Це зумовлено тим, що було використано стандартну процедуру `OUTP` із Блоку 5 ПЗ ДГМ, у якій не передбачено обчислення діючих значень змінних величин. При необхідності подібних додаткових обчислень і роздруків процедуру `OUTP` користувачеві необхідно розробляти самостійно.

На рис. 4.3 показана також залежність від амплітуди прикладеної напруги величини, пропорційної до значення вільного члена характеристичного рівняння вигляду (1.138). Ця крива (вона показана пунктиром) ілюструє, що всі усталені режими (нелінійні коливання), які лежать на

першій частині характеристики (зміна параметру h від нуля до 0.4616), є аперіодично стійкими, тому що вільний член характеристичного рівняння має знак плюс. Усталені режими, що належать другій частині характеристики (параметр h зменшується від 0.4616 до 0.196), є аперіодично нестійкими, бо при переході на цю частину вільний член характеристичного рівняння змінює знак з плюса на мінус і утримує цей знак на всій цій частині. Усталені режими, що належать третій частині характеристики, є аперіодично стійкими, тому що при переході на цю частину вільний член знову змінює знак з мінуса на плюс.

Обчислення значення вільного члена характеристичного рівняння можна передбачити у процедурі `OUTP`, для цього користувачеві необхідно цю процедуру модифікувати.

Показана на рис. 4.3 залежність від параметру h амплітуди першої гармоніки струму має дві особливі точки $h \approx 0.4616$ і $h \approx 0.196$. Їх проходження у процесі розрахунку h – характеристики процедура `HARMOSC` здійснила з використанням алгоритму інвертування, описаного у розділі 1.5.7. Це можна відстежити, аналізуючи роздрук вихідного файлу: там видно, коли незалежною змінною при русі вздовж характеристики є параметр h , а коли – синусна амплітуда першої гармоніки струму (тут це 2-а компонента вектора змінних).

Три періодичних розв'язки системи рівнянь (4.17) процедурою `HARMOSC` при $h = 0.32$ були уточнені ітераційним методом Ньютона (цьому значенню h відповідає $U_m = 32.0 \text{ В}$). В уточненому першому періодичному розв'язку вміст у кривій струму вищих гармонік незначний: третя гармоніка – 1.3%; п'ята гармоніка – 0.8% (у цьому усталеному режимі насичення дроселя незначне). В уточненому другому періодичному розв'язку (аперіодично нестійкому) вміст вищих гармонік такий: третя – 23.8% і п'ята – 5.8%. В уточненому третьому періодичному розв'язку вміст вищих гармонік наступний: третя – 10.5% і п'ята – 5.6%.

4.1.4. Приклад В.4

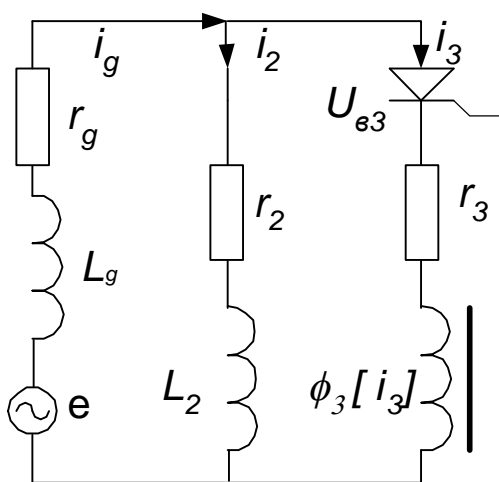


Рис. 4.4. Схема з дроселем і тиристором

У цьому прикладі розглядається розрахунок періодичного процесу в електричній схемі, що містить керований вентиль (див. рис. 4.4). У задачі використовується описана у розділі 3.2.1.1 миттєва модель на періоді керованого вентиля, вольт-амперна характеристика якого належить до другої групи – є однозначною з умовою.

Розглядувана схема рис. 4.4 – нелінійна, оскільки її третя гілка містить два нелінійні елементи: керований вентиль і дросель насичення.

Ця схема описується такою системою алгебро-диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
i_g - i_2 - i_3 &= 0; \\
\frac{d\phi_g}{dt} + r_g i_g + \frac{d\phi_2}{dt} + r_2 i_2 &= e; \\
\frac{d\phi_2}{dt} + r_2 i_2 - \frac{d\phi_3}{dt} + r_3 i_3 - u_{e3} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

де i_g, i_2, i_3 - струми гілок схеми; u_{e3} - напруга вентиля, є нелінійною функцією струму i_3 ; L_g, L_2 - індуктивності перших двох гілок; ϕ_g, ϕ_2, ϕ_3 - потокозчеплення індуктивних елементів гілок, при цьому

$$\phi_g = L_g i_g; \quad \phi_2 = L_2 i_2; \tag{4.22}$$

$$\phi_3 = \phi_3 [i_3] \tag{4.23}$$

- крива намагнічування дроселя третьої гілки;

$$e = E_m \sin \omega t \tag{4.24}$$

- е.р.с. у першій гілці.

Рівняння (4.21) приводиться до вигляду (1.66), якщо позначити:

$$\begin{aligned}
\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i_g \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_g \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ 0 \end{pmatrix}; \\
\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i_g - i_2 - i_3 \\ r_g i_g + r_2 i_2 \\ r_2 i_2 - r_3 i_3 - u_{e3}[i_3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ r_g x_1 + r_2 x_2 \\ r_2 x_2 - r_3 x_3 - u_{e3}[x_3] \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

При цьому матриця B вигляду (1.69) є такою:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

Необхідні для побудови миттєвої моделі процесу (на періоді) матриці диференціальних параметрів мають вигляд

$$d\vec{y}/d\vec{x} = \text{diag}(L_g, L_2, L_3^0[i_3]); \quad (4.27)$$

$$\frac{d\vec{z}}{d\vec{x}} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ r_g & r_2 & 0 \\ 0 & r_2 & -r_3 - r_g \end{array} \right\|, \quad (4.28)$$

де $L_3^0 = d\phi_3/di_3 = L_3^0[i_3]$ – диференційна індуктивність дроселя третьої гілки, вона є нелінійною функцією струму i_3 ; $r_g = du_{g3}/di_3 = r_g[i_3]$ – диференційний активний опір вентиля, він є нелінійною функцією струму i_3 .

Текст головної програми `Program ven` блоку програмних компонент користувача:

```

Program Ven
!-----
! Програма розрахунку періодичного процесу
! у схемі із вентилям (рис.4.4)
!-----
Implicit none
real,dimension(53)::X
real,dimension(51)::E
integer,dimension(10)::KER
real,dimension(3,3)::B
real,dimension(20)::PS3
real::ALG,AL2,RG,R2,R3,ST31,DS3,Rmax,Rmin,AZ3,DAZ3
real::Em,OM,EPS1,EPS2,H1,HM
integer::i,NT3,K,NG,NK
!-----
Common/MPM/B,ALG,AL2,RG,R2,R3,
& NT3,ST31,DS3,PS3,Rmax,Rmin,AZ3,DAZ3
!----- Common/MPM/ передає дані процедурі Model
!-----
!--- введення даних
Open(1,File='DaniV.dat',status='old')
Read(1,1)Em,OM,EPS1,EPS2,H1,HM
Read(1,1)B
!--- Em,OM - амплітуда прикл. напруги і її частота
!--- B - матриця коефіцієнтів системи диф. рівнянь
Read(1,1)ALG,AL2,RG,R2,R3
!--- ALG,AL2,RG, R2, R3 - індуктивності і акт. опори схеми
Read(1,2)NT3
Read(1,1)ST31,DS3
Read(1,1) (PS3(i),i=1,NT3)
!--- крива намагнічування дроселя третьої гілки
Read(1,1)Rmax,Rmin,AZ3,DAZ3
!--- параметри вентиля
Read(1,2)KER !-- KER- масив керуючих змінних
Read(1,2)K !-- K - порядок системи диф. рівнянь

```

```

1 Format(4E10.4)
2 Format(10I3)
Close(1)
!-----
!--- запис вхідних даних до вихідного файлу
Open(1,FILE='RezV.DAT')
Write(1,10)
10 Format(/5X, 'Вхідні дані задачі:')
Write(1,4)Em,OM,EPS1,EPS2,H1,HM
Write(1,4)B
Write(1,4)ALG,AL2,RG,R2,R3
Write(1,3)NT3
Write(1,4)ST31,DS3
Write(1,4)(PS3(i),i=1,NT3)
Write(1,4)Rmax,Rmin,AZ3,DAZ3
Write(1,3)KER
Write(1,3)K
3 Format(2X,10I5)
4 Format(2X,4E12.4)
!-----
Write(1,20)
20 Format(/5X, 'Р е з у л ь т а т и :')
Call SizesV(KER(1),K,KER(8),NG,NK)
Write(1,3)NG,NK
!-----
!--- формується складений вектор амплітуд змушувальної
!--- сили (синусоїда з амплітудою Em)
!--- і початкове значення вектора X
E=0.; E(NG+3)=Em
X=0.; X(NK+1)=OM
!-----
Call HARMOSC(K,X,E,NK,HM,H1,EPS1,EPS2,KER)
Close(1)
Stop
End Program Ven

```

Головна програма цього пакету здійснює:

- опис змінних, у тому числі:

а) опис і оголошення розміру масивів $x(53)$, $e(51)$. Тут x - це матриця-стовпець, утворена із складеного вектора амплітуд струмів трьох гілок, кругової частоти і параметру h ; e - складений вектор амплітуд змушувальної сили. Встановлені розміри цих двох масивів дозволяють задавати максимальний порядок враховуваної гармоніки не більшим від 6 (у задачі враховуються постійні складові і гармоніки всіх - парних і непарних - порядків);

б) опис масиву $ker(10)$ - керуючих змінних цілого типу;

в) опис масиву $v(3,3)$ - для матриці (4.26) коефіцієнтів алгебро-диференційної системи рівнянь (4.21), приведеної до вигляду (1.66);

г) опис масиву $psn(20)$ - для таблиці, якою задається нелінійна частина кривої намагнічування дроселя (очевидно, що кількість вузлів таблиці при цьому не повинна бути більшою від 20);

- д) опис скалярних змінних цілого і реального типів;
- опис спільної ділянки пам'яті із назвою `МРМ`, за її допомогою передаються дані до процедури `model`,
 - введення вхідних даних із файлу `Daniv.dat`;
 - виведення цих даних до вихідного файлу `RezV.dat`;
 - звернення до процедури `sizesv` (входить до Блоку 5 ПЗ ДГМ);
 - присвоєння значення складеному вектору амплітуд `Е`;
 - звернення до процедури `нармос` (входить до Блоку 3 ПЗ ДГМ).

Текст процедури миттєвої (на періоді) моделі процесу у схемі рис. 4.4 :

```

Subroutine Model(AL,M,K,MK,XC,YC,ZC,YXC,ZXC,VM)
!-----
! Підпрограма реалізує миттєву (на періоді) модель схеми:
!-----
  Implicit none
  integer,intent(in)::M,K,MK
  real,dimension(MK)::XC,YC,ZC
  real,dimension(MK,K)::YXC,ZXC
  real,dimension(K)::X,Y,Z
  real,dimension(K,K)::YX,ZX,VM
  real,dimension(M)::XV,UV,RV,UV1,RV1
  real,dimension(3,3)::B
  real,dimension(20)::PS3
  real::ALG,AL2,RG,R2,R3,ST31,DS3,YX3,
& Rmax,Rmin,AZ3,DAZ3,AL
  integer::NT3,i
!-----
  Common/MPM/B,ALG,AL2,RG,R2,R3,
& NT3,ST31,DS3,PS3,Rmax,Rmin,AZ3,DAZ3
!-- через Common/MPM/ передаються дані із головної програми
!-----
  VM=B; AL=0.
  do i=1,M
    call DRAWOUTV(K,XC,MK,X,i)
    Y(1)=ALG*X(1); Y(2)=AL2*X(2)
    Call INTLIN(X(3),Y(3),YX3,ST31,DS3,PS3,NT3)
    Z(1)=X(1)-X(2)-X(3)
    Z(2)=RG*X(1)+R2*X(2)
    Z(3)=R2*X(2)-R3*X(3)
    ZX(1,1)=1.; ZX(1,2)=-1.; ZX(1,3)=-1.
    ZX(2,1)=RG; ZX(2,2)=R2; ZX(2,3)=0.
    ZX(3,1)=0.; ZX(3,2)=R2; ZX(3,3)=-R3
    YX(1,1)=ALG; YX(1,2)=0.; YX(1,3)=0.
    YX(2,1)=0.; YX(2,2)=AL2; YX(2,3)=0.
    YX(3,1)=0.; YX(3,2)=0.; YX(3,3)=YX3
    call DRAWUPV(K,Y,YC,MK,i)
    call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,i)
    call DRAWUPM(K,YX,YXC,MK,i)
    call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,i)
  end do

```



```

call DRAWOUTXV(K,XC,MK,M,XV,3)
Call Venper(XV,M,AZ3,DAZ3,Rmax,Rmin,UV,RV)
UV1=-UV; RV1=-RV
call ADDV(K,UV1,M,ZC,MK,3)
call ADDM(K,RV1,M,ZXC,MK,3)
Return
End subroutine Model

```

Процедура `model` за значенням вектора \bar{x} миттєвих значень незалежних змінних – струмів гілок схеми – обчислює у циклі у всіх вузлах періоду значення векторів \vec{y}, \vec{z} і матриць $d\vec{y}/d\vec{x}$ (yx) і $d\vec{z}/d\vec{x}$ (zx) за формулами (4.25), (4.27) і (4.28). Однак при цьому до елемента $z(3)$ не додається значення “ $-u_{e3}$ ” і до елемента $zx(3,3)$ не додається значення “ $-r_3$ ”, як цього вимагає формула (4.25), бо ці дані належать керованому вентилю – нелінійності другої групи. Ці додаткові дані визначаються уже після завершення роботи циклу шляхом звернення до процедури `venper` із Блоку 5 ПЗ ДГМ, яка реалізує миттєву на періоді модель керованого вентиля. Для цього спочатку викликається для виконання процедура `drawoutxv`, яка із складеного вузлового вектора струмів x_c виділяє простий вузловий вектор x_v (значення струмів третьої гілки у вузлах періоду). Потім запускається процедура `venper`, яка обчислює значення простих вузових векторів uv (напруга вентиля у вузлах періоду) і rv (опір вентиля у вузлах періоду). І, наприкінці, вносить ці дані за допомогою процедур `addv` і `addm` (див. розділи 3.2.2.5 і 3.2.2.6) до масивів zc і zxc .

Вхідні дані (файл `Daniv.dat`):

```

+.2000E 01+.3142E 03+.1000E-01+.3000E-02
+.1000E 01+.1000E 01
+.0000E 00+.1000E 01+.0000E 00+.0000E 00
+.1000E 01+.1000E 01+.0000E 00+.0000E 00
-.1000E 01
+.3000E-03+.9000E-03+.1000E 00+.3000E 00
+.4000E 00
011
+.1000E 01+.2000E 00
+.1500E-02+.1730E-02+.1890E-02+.2025E-02
+.2130E-02+.2220E-02+.2295E-02+.2355E-02
+.2400E-02+.2430E-02+.2445E-02
+.1000E 04+.1000E-03+.5000E 00+.3000E 00
0000000010000000000000008000000
003

```

У цьому файлі:

Перший рядок – дані для присвоєння змінним E_m , ω , ε_1 (точність розрахунку h – характеристики) і ε_2 (точність для ітерацій при уточненні рів’язку).

Другий рядок – для присвоєння значень змінним Δh (початкове значення кроку), h_1 (значення параметру h , при якому має уточнюватися розв'язок), h_{\max} (кінцеве значення параметру h).

Третій, четвертий і п'ятий рядки – матриця B за формулою (4.26), читається по стовпцях.

Шостий і сьомий рядки – для змінних L_g, L_2, r_g, r_2, r_3 .

Наступних п'ять рядків – крива намагнічування дроселя: кількість точок, координата початку нелінійної частини, крок таблиці і таблиця.

Тринадцятий рядок – для змінних $r_{\max}, r_{\min}, \alpha_3$ (кут запалювання), $\Delta \alpha_3$ (ширина імпульса запалювання, її значення не повинно бути меншим від кутової віддалі між сусідніми вузлами на періоді).

Останні два рядки – числа цілого типу: для масиву $кЕР$ і для змінної k - порядку системи рівнянь (4.21).

Результати розрахунку (файл rezv.dat):

Вхідні дані задачі:

```
.2000E+01   .3142E+03   .1000E-01   .3000E-02
.1000E+01   .1000E+01
.0000E+00   .1000E+01   .0000E+00   .0000E+00
.1000E+01   .1000E+01   .0000E+00   .0000E+00
-.1000E+01
.3000E-03   .9000E-03   .1000E+00   .3000E+00
.4000E+00
11
.1000E+01   .2000E+00
.1500E-02   .1730E-02   .1890E-02   .2025E-02
.2130E-02   .2220E-02   .2295E-02   .2355E-02
.2400E-02   .2430E-02   .2445E-02
.1000E+04   .1000E-03   .5000E+00   .3000E+00
0  0  1  0  0  0  0  8  0  0
3
```

Результати:

17 51

Номер найвищої гармоніки = 8

Уточнене значення 1 кореня для h=1.000
(розв'язок одержано після 12-ої ітерації)

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

```
постійна складова = .5783E+00
X1(c1)= -.3057E+01   X1(s1)= .3380E+01   X1(1)= .4558E+01
X1(c2)= -.1332E+00   X1(s2)= -.4176E+00   X1(2)= .4384E+00
X1(c3)= .9837E-01    X1(s3)= -.1036E-01   X1(3)= .9891E-01
X1(c4)= .2848E-01    X1(s4)= .4142E-01    X1(4)= .5027E-01
```

X1(c5)=	-.2363E-01	X1(s5)=	-.2090E-01	X1(5)=	.3155E-01
X1(c6)=	.1114E-01	X1(s6)=	.1083E-01	X1(6)=	.1554E-01
X1(c7)=	.4702E-02	X1(s7)=	-.9364E-02	X1(7)=	.1048E-01
X1(c8)=	-.2168E-03	X1(s8)=	.9578E-02	X1(8)=	.9581E-02

значення змінної у M =102 вузлах періоду

-.2493E+01	-.2326E+01	-.2151E+01	-.1968E+01	-.1778E+01	-.1579E+01
-.1371E+01	-.1153E+01	-.9237E+00	-.6828E+00	-.4305E+00	-.1675E+00
.1048E+00	.3850E+00	.6713E+00	.9622E+00	.1257E+01	.1554E+01
.1854E+01	.2156E+01	.2460E+01	.2766E+01	.3072E+01	.3377E+01
.3676E+01	.3967E+01	.4245E+01	.4506E+01	.4745E+01	.4960E+01
.5147E+01	.5306E+01	.5435E+01	.5535E+01	.5605E+01	.5647E+01
.5661E+01	.5648E+01	.5608E+01	.5542E+01	.5451E+01	.5336E+01
.5201E+01	.5047E+01	.4878E+01	.4697E+01	.4507E+01	.4310E+01
.4108E+01	.3900E+01	.3685E+01	.3462E+01	.3228E+01	.2981E+01
.2721E+01	.2446E+01	.2160E+01	.1864E+01	.1562E+01	.1260E+01
.9606E+00	.6692E+00	.3886E+00	.1205E+00	-.1346E+00	-.3773E+00
-.6093E+00	-.8324E+00	-.1048E+01	-.1259E+01	-.1465E+01	-.1666E+01
-.1863E+01	-.2053E+01	-.2235E+01	-.2409E+01	-.2573E+01	-.2726E+01
-.2868E+01	-.3000E+01	-.3120E+01	-.3229E+01	-.3326E+01	-.3411E+01
-.3484E+01	-.3543E+01	-.3588E+01	-.3619E+01	-.3636E+01	-.3639E+01
-.3628E+01	-.3603E+01	-.3566E+01	-.3515E+01	-.3451E+01	-.3375E+01
-.3286E+01	-.3183E+01	-.3068E+01	-.2941E+01	-.2802E+01	-.2652E+01

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

постійна складова = -.1928E+00

X2(c1)=	-.2308E+01	X2(s1)=	.2403E+01	X2(1)=	.3332E+01
X2(c2)=	.4440E-01	X2(s2)=	.1392E+00	X2(2)=	.1461E+00
X2(c3)=	-.3280E-01	X2(s3)=	.3455E-02	X2(3)=	.3298E-01
X2(c4)=	-.9498E-02	X2(s4)=	-.1381E-01	X2(4)=	.1676E-01
X2(c5)=	.7872E-02	X2(s5)=	.6966E-02	X2(5)=	.1051E-01
X2(c6)=	-.3719E-02	X2(s6)=	-.3610E-02	X2(6)=	.5183E-02
X2(c7)=	-.1573E-02	X2(s7)=	.3123E-02	X2(7)=	.3496E-02
X2(c8)=	.6675E-04	X2(s8)=	-.3191E-02	X2(8)=	.3192E-02

значення змінної у M =102 вузлах періоду

-.2497E+01	-.2329E+01	-.2152E+01	-.1966E+01	-.1773E+01	-.1574E+01
-.1371E+01	-.1163E+01	-.9536E+00	-.7431E+00	-.5328E+00	-.3234E+00
-.1158E+00	.8959E-01	.2921E+00	.4911E+00	.6859E+00	.8755E+00
.1059E+01	.1235E+01	.1404E+01	.1563E+01	.1713E+01	.1852E+01
.1983E+01	.2104E+01	.2216E+01	.2320E+01	.2417E+01	.2507E+01
.2590E+01	.2667E+01	.2736E+01	.2798E+01	.2853E+01	.2898E+01
.2935E+01	.2963E+01	.2981E+01	.2990E+01	.2989E+01	.2977E+01
.2954E+01	.2919E+01	.2873E+01	.2812E+01	.2739E+01	.2651E+01
.2550E+01	.2436E+01	.2310E+01	.2173E+01	.2028E+01	.1875E+01
.1715E+01	.1551E+01	.1381E+01	.1206E+01	.1027E+01	.8416E+00
.6505E+00	.4532E+00	.2498E+00	.4067E-01	-.1731E+00	-.3901E+00
-.6087E+00	-.8273E+00	-.1044E+01	-.1257E+01	-.1466E+01	-.1668E+01
-.1864E+01	-.2052E+01	-.2233E+01	-.2405E+01	-.2568E+01	-.2722E+01
-.2866E+01	-.2999E+01	-.3120E+01	-.3230E+01	-.3327E+01	-.3411E+01
-.3482E+01	-.3540E+01	-.3585E+01	-.3616E+01	-.3634E+01	-.3638E+01
-.3628E+01	-.3604E+01	-.3567E+01	-.3516E+01	-.3451E+01	-.3373E+01
-.3283E+01	-.3180E+01	-.3065E+01	-.2939E+01	-.2802E+01	-.2655E+01

Амплітуди гармонік 3-ої змінної:
 постійна складова = .7711E+00

X3(c1)= -.7486E+00	X3(s1)= .9771E+00	X3(1)= .1231E+01
X3(c2)= -.1776E+00	X3(s2)= -.5568E+00	X3(2)= .5845E+00
X3(c3)= .1312E+00	X3(s3)= -.1382E-01	X3(3)= .1319E+00
X3(c4)= .3798E-01	X3(s4)= .5523E-01	X3(4)= .6703E-01
X3(c5)= -.3150E-01	X3(s5)= -.2786E-01	X3(5)= .4206E-01
X3(c6)= .1486E-01	X3(s6)= .1444E-01	X3(6)= .2073E-01
X3(c7)= .6274E-02	X3(s7)= -.1249E-01	X3(7)= .1397E-01
X3(c8)= -.2835E-03	X3(s8)= .1277E-01	X3(8)= .1277E-01

значення змінної у М =102 вузлах періоду

.3340E-02	.2912E-02	.1035E-02	-.1773E-02	-.4301E-02	-.4705E-02
-.7083E-03	.1009E-01	.2987E-01	.6029E-01	.1022E+00	.1559E+00
.2206E+00	.2954E+00	.3792E+00	.4711E+00	.5708E+00	.6783E+00
.7945E+00	.9202E+00	.1056E+01	.1203E+01	.1360E+01	.1524E+01
.1693E+01	.1863E+01	.2029E+01	.2186E+01	.2328E+01	.2453E+01
.2557E+01	.2639E+01	.2699E+01	.2736E+01	.2752E+01	.2749E+01
.2726E+01	.2685E+01	.2626E+01	.2552E+01	.2462E+01	.2359E+01
.2247E+01	.2127E+01	.2005E+01	.1884E+01	.1768E+01	.1659E+01
.1558E+01	.1464E+01	.1375E+01	.1289E+01	.1200E+01	.1107E+01
.1005E+01	.8959E+00	.7790E+00	.6574E+00	.5354E+00	.4179E+00
.3100E+00	.2160E+00	.1388E+00	.7980E-01	.3846E-01	.1274E-01
-.5431E-03	-.5090E-02	-.4538E-02	-.1953E-02	.5018E-03	.1672E-02
.1313E-02	-.1600E-03	-.2006E-02	-.3483E-02	-.4090E-02	-.3696E-02
-.2524E-02	-.1040E-02	.2268E-03	.8600E-03	.6805E-03	-.2104E-03
-.1479E-02	-.2676E-02	-.3385E-02	-.3357E-02	-.2585E-02	-.1307E-02
.6975E-04	.1102E-02	.1452E-02	.1001E-02	-.1008E-03	-.1474E-02
-.2620E-02	-.3080E-02	-.2595E-02	-.1219E-02	.6630E-03	.2416E-02

Коментар до файлу rezv.dat з результатами:

Після завершення розрахунку h – характеристики одержане значення скла-

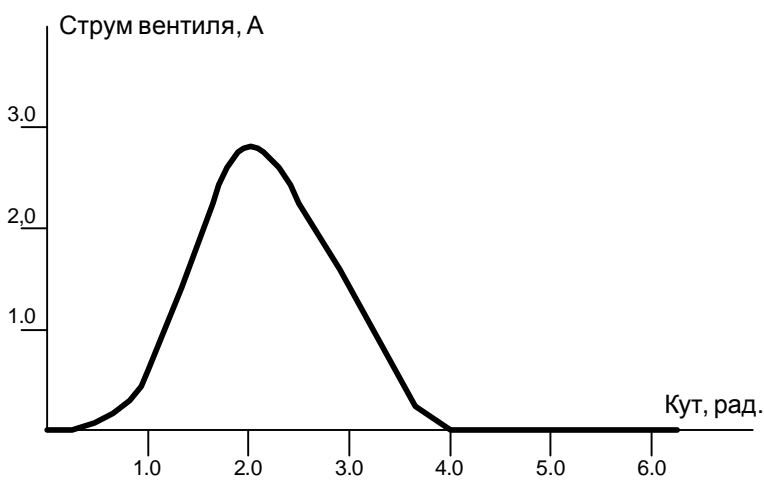


Рис. 4.5. Струм вентиля на періоді

деного вектора амплітуд струмів гілок схеми уточнено за методом Ньютона (задана точність отримана після 12-ої ітерації). Для кожної змінної (струмів гілок схеми) роздруковано постійні складові і амплітуди гармонік, косинусні і синусні складові цих амплітуд, а також значення цих змінних у вузлах періоду.

Залежність від кутової координати на одному періоді

третьої змінної – струму третьої гілки з керованим вентилям – показана на рис. 4.5. Значення кута запалювання було задане $\alpha_3 = 0,5$. Внаслідок наявності у гілці з

вентилем доволі значної індуктивності вентиль є у стані провідності від 0.5 і майже до 4 радіан (прикладена напруга - синусоїда).

4.1.5. Приклад В.5

У цьому прикладі моделюються нелінійні коливання у системі, яка містить неоднозначну нелінійність гістерезисного вигляду (нелінійність третьої групи), що описана у розділі 3.2.1.2. Такою системою є електричне коло, показане на рис. 4.6. У третій гілці схеми є дросель (нелінійна індуктивність), вебер-амперна характеристика якого має гістерезисний вигляд. Крім того, у другій гілці схеми є нелінійний активний опір з вольт-амперною характеристикою, що задана аналітично і є однозначною безумовною (нелінійність першої групи).

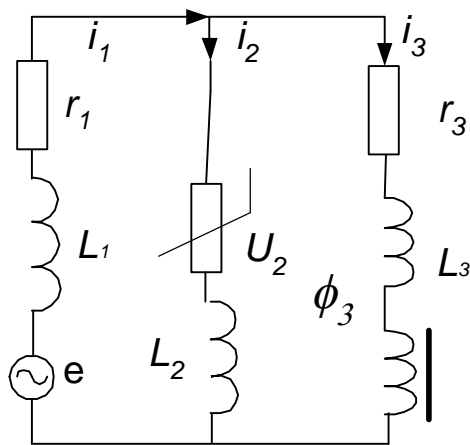


Рис. 4.6. Схема з дроселем

активний опір з вольт-амперною характеристикою, що задана аналітично і є однозначною безумовною (нелінійність першої групи).

Ця схема описується такою алгебро-диференційною системою рівнянь:

$$\begin{aligned}
 i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\
 \frac{d\phi_1}{dt} + r_1 i_1 + \frac{d\phi_2}{dt} + u_2 &= e; \\
 \frac{d\phi_2}{dt} + u_2 - \frac{d\phi_3}{dt} - r_3 i_3 &= 0,
 \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$e = E_m \sin \omega t \quad (4.30)$$

- зовнішня електрорушійна сила;

i_1, i_2, i_3 - струми гілок схеми;

$u_2 = u_2[i_2]$ - напруга на активному опорі другої гілки, є нелінійною функцією струму i_2 ;

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 - потокозчеплення індуктивностей гілок, при цьому

$$\phi_1 = L_1 i_1; \quad \phi_2 = L_2 i_2, \quad (4.31)$$

L_1, L_2 - постійні індуктивності перших двох гілок;

$$\phi_3 = L_3 i_3 + \phi_D [i_3], \quad (4.32)$$

L_3 - постійна індуктивність третьої гілки;

$$\phi_D = \phi_D [i_3] \quad (4.33)$$

- крива намагнічування дроселя у третій гілці, вона є гістерезисною.

Рівняння (4.29) приводяться до вигляду (1.66), якщо позначити:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (4.34)$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 - i_2 - i_3 \\ r_1 i_1 + u_2 [i_2] \\ u_2 [i_2] - r_3 i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ r_1 x_1 + u_2 [x_2] \\ u_2 [x_2] - r_3 x_3 \end{pmatrix}.$$

При цьому матриця B вигляду (1.69) є такою:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Необхідні для побудови миттєвої моделі процесу матриці диференціальних параметрів мають вигляд

$$d\vec{y}/d\vec{x} = \text{diag}(L_1, L_2, L_3 + L_D^\circ [i_3]); \quad (4.36)$$

$$\frac{d\vec{z}}{d\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ r_1 & r_2^\circ & 0 \\ 0 & r_2^\circ & -r_3 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

де $L_D^\circ = d\phi_D/di_3 = L_D^\circ [i_3]$ – диференціальна індуктивність дроселя третьої гілки, є нелінійною функцією струму i_3 ; $r_2^\circ = du_2/di_2 = r_2^\circ [i_2]$ – диференціальний активний опір другої гілки, є нелінійною функцією струму i_2 .

Для розрахунку приймаються значення:

$$E_m = 15000 \text{ В}; \quad \omega = 314.161 / \text{С}; \quad L_1 = L_2 = L_3 = 0.0001 \text{ Гн};$$

$$r_1 = 0.01 \text{ Ом}; \quad r_3 = 0.001 \text{ Ом}$$

Нехай нелінійна залежність $u_2 = u_2 [i_2]$ задається аналітично і має вигляд

$$u_2 = r_2 (i_2 + \alpha i_2^3) \quad (4.38)$$

при

$$r_2 = 7.5 \text{ Ом} \quad \text{і} \quad \alpha = 0.1 \cdot 10^{-4} \text{ 1/A}^2,$$

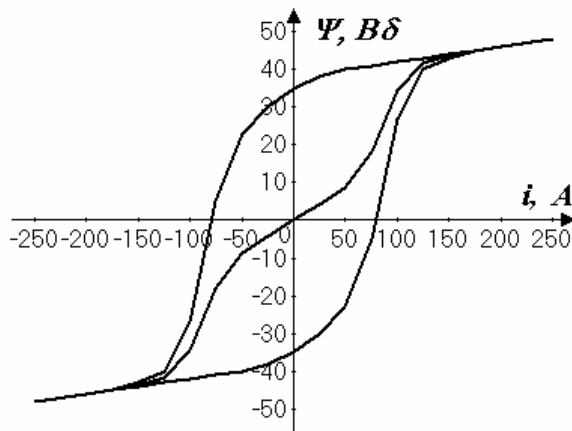


Рис. 4.7. Вебер-амперна характеристика дроселя

а вебер-амперна характеристика дроселя задається графічно (див. рис. 4.7), її три гілки (верхня, середня (основна) і нижня) задаються для розрахунку таблицями.

Блок програмних компонент користувача у цій задачі складається із головної програми `Program hister` і процедури `MODEL` миттєвої на півперіоді моделі процесу.

Для обробки результатів і їх запису до вихідного файлу застосовується стандартна процедура `OUTP` із Блоку 5 ПЗ ДГМ, тому тут вона до блоку користувача не входить.

Головна програма блоку програм-

них компонент користувача є такою.

```

PROGRAM hister
!-----
! Програма розрахунку періодичного процесу
! у схемі з гістерезисною індуктивністю
! (у струмах є тільки непарні гармоніки)
!-----
  Implicit none
  real,dimension(32)::X
  real,dimension(30)::E
  integer,dimension(10)::KER
  real,dimension(3,3)::B
  real,dimension(3,20)::PS3
  real::AL1,AL2,AL3,R1,R2,ALF,R3,XL,XP,DI
  real::Em,OM,EPS1,EPS2,DH,H1,HM
  integer::i,NT3,K,NG,NK,j
!-----
  Common/MPM/B,AL1,AL2,AL3,R1,R2,ALF,R3,
& NT3,XL,XP,DI,PS3
!-- через Common/MPM/ передаються дані процедурі Model
!-----
!--- введення даних
  Open(1,File='DaniV.dat',status='old')
  Read(1,1)Em,OM,EPS1,EPS2,DH,H1,HM
  Read(1,1)B
  Read(1,1)AL1,AL2,AL3,R1,R2,ALF,R3
!-----
  Read(1,2)NT3
  Read(1,1)XL,XP,DI
  Read(1,5)((PS3(i,j),i=1,3),j=1,NT3)
!----- ввели петлю намагнічування дроселя третьої гілки

```

```

      Read(1,2)KER
      Read(1,2)K
!----- ввели KER - масив керуючих змінних і
!----- K - порядок системи диф. рівнянь
!-----
      1 Format(4E10.4)
      2 Format(10I3)
      5 format(3E10.4)
      Close(1)
!-----
!--- запис вхідних даних до вихідного файлу
      Open(1,FILE='RezV.DAT')
      Write(1,10)
      10 Format(/5X, 'Вхідні дані задачі:')
      Write(1,4)Em,OM,EPS1,EPS2,DH,H1,HM
      Write(1,4)B
      Write(1,4)AL1,AL2,AL3,R1,R2,ALF,R3
      Write(1,3)NT3
      Write(1,4)XL,XP,DI
      Write(1,6)((PS3(i,j),i=1,3),j=1,NT3)
      Write(1,3)KER
      Write(1,3)K
      3 Format(2X,10I5)
      4 Format(2X,4E12.4)
      6 Format(2X,3E12.4)
!-----
      Call SizesV(KER(1),K,KER(8),NG,NK)
      Write(1,3)NG,NK
!-----
!--- формується складений вектор амплітуд змушувальної
!--- сили (синусоїда з амплітудою Em)
!--- і початкове значення вектора X
      E=0.; E(NG+2)=Em
      X=0.; X(NK+1)=OM
!-----
      write(1,13)
      13 format(/2X,'П о з р а х у н о к :')
      Call HARMOSC(K,X,E,NK,HM,H1,EPS1,EPS2,KER)
      Close(1)
      Stop
      End Program Hister

```

Головна програма цього пакету здійснює:

– опис змінних, у тому числі опис і оголошення розмірів двох масивів: $x(32)$ - матриці-стовпця, утвореного із складеного вектора амплітуд струмів трьох гілок схеми, кругової частоти ω і параметру h , і матриці-стовпця $e(30)$ – складеного вектора амплітуд змушувальної сили. Задані розміри цих масивів (32 і 30) дозволяють задавати максимальний порядок враховуваної гармоніки не більшим від 9 (враховуються гармоніки тільки непарних порядків). У разі задання більшого значення максимального порядку гармоніки розміри цих масивів необхідно збільшити;

– опис спільної ділянки пам'яті /MPM/ , за допомогою якої передаються дані до процедури MODEL: матриця в вигляду (3.26); індуктивності трьох гілок AL1, AL2, AL3; активні опори R1, R3 першої і третьої гілок; коефіцієнти R2 і ALF формули (4.38); кількість NT3 вузлів таблиці, якою задається петля гістерезису; ліва XL і права XP абсциси вузлів, у яких сходяться верхня, середня і нижня гілки петлі; крок між вузлами DI (вузли рівновіддалені); масив PS3, який містить таблицю, що нею задаються три гілки петлі гістерезису – див. розділ 3.2.1.2;

- введення вхідних даних із файла Daniv.dat;
- виведення до вихідного файлу Rezv.dat введених вхідних даних;
- звернення до процедури sizesv;
- формування вектора E змушувальних сил;
- присвоєння початкового значення масиву X;
- звернення до процедури HARMOSC.

Процедура MODEL, яка реалізує миттєву (на півперіоді) модель періодичного процесу у схемі, має вигляд:

```

Subroutine Model(AL,M,K,MK,XC,YC,ZC,YXC,ZXC,VM)
!-----
!-- Підпрограма реалізує миттєву (на півперіоді) модель
!-- періодичного процесу у схемі (рис. 4.6)
!-----
  Implicit none
  real,intent(in)::AL
  integer,intent(in)::M,K,MK
  real,dimension(MK)::XC,YC,ZC
  real,dimension(MK,K)::YXC,ZXC
  real,dimension(K)::X,Y,Z
  real,dimension(K,K)::YX,ZX,VM
  real,dimension(M)::XV,PSH,LH
  real,dimension(3,3)::B
  real,dimension(3,20)::PS3
  real::AL1,AL2,AL3,R1,R2,ALF,R3,XL,XP,DI,U2
  integer::NT3,i
  Common/MPM/B,AL1,AL2,AL3,R1,R2,ALF,R3,
& NT3,XL,XP,DI,PS3
!-- через Common/MPM/ передаються дані із головної програми
!-----
  VM=B
  do i=1,M
    call DRAWOUTV(K,XC,MK,X,i)
    Y(1)=AL1*X(1); Y(2)=AL2*X(2); Y(3)=AL3*X(3)
!-----
    Z(1)=X(1)-X(2)-X(3)
    U2=R2*(X(2)+ALF*X(2)**3)
    Z(2)=R1*X(1)+U2
    Z(3)=U2-R3*X(3)
!-----
    ZX(1,1)=1.; ZX(1,2)=-1.; ZX(1,3)=-1.
    U2=R2*(1.+3.*ALF*X(2)**2)
    ZX(2,1)=R1; ZX(2,2)=U2; ZX(2,3)=0.

```

```

          ZX(3,1)=0.;   ZX(3,2)=U2;   ZX(3,3)=-R3
!-----
          YX(1,1)=AL1;   YX(1,2)=0.;   YX(1,3)=0.
          YX(2,1)=0.;   YX(2,2)=AL2;   YX(2,3)=0.
          YX(3,1)=0.;   YX(3,2)=0.;   YX(3,3)=AL3
!-----
          call DRAWUPV(K,Y,YC,MK,i)
          call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,i)
          call DRAWUPM(K,YX,YXC,MK,i)
          call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,i)
        end do
        call DRAWOUTXV(K,XC,MK,M,XV,3)
        call HISTPER(AL,XV,M,PSH,LH,PS3,XL,XP,DI,NT3)
        call ADDV(K,PSH,M,YC,MK,3)
        call ADDM(K,LH,M,YXC,MK,3)
        Return
      End subroutine Model

```

Перший оператор процедури $vm=v$ присвоює формальному параметру vm значення матриці v із спільної ділянки пам'яті MPM .

Далі у процедурі є цикл, у якому параметром циклу є змінна i – номер вузла на півперіоді. У цьому циклі виконується таке:

– оператором `call DRAWOUTV(K,XC,MK,X,i)` викликається для виконання процедура `DRAWOUTV` (із Блоку 5 ПЗ ДГМ), яка “витягає” із складеного вузлового вектора значення змінних x_1 (струм першої гілки), x_2 (струм другої гілки) і x_3 (струм третьої гілки) в i -тому вузлі півперіоду і формує із них вектор \vec{x} ;

– за значеннями струмів і за формулами (4.34) обчислюються значення компонент векторів \vec{y} і \vec{z} (4.34) – масиви y і z і матриць диференційних параметрів $d\vec{y}/d\vec{x}$ (4.36), $d\vec{z}/d\vec{x}$ (4.37) – масиви yx і zx ;

– операторами

```

          call DRAWUPV(K,Y,YC,MK,i);
          call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,i)

```

“вставляються” значення елементів масивів y і z у масиви yc і zc (останні зберігають значення складених вузлових векторів вигляду (1.118)) на місця, що відповідають i -тому вузлу півперіоду;

– операторами

```

          call DRAWUPM(K,YX,YXC,MK,i);
          call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,i)

```

“вставляються” значення елементів масивів yx і zx у масиви $yxс$ і $zxс$ (останні зберігають значення складених матриць вузлових диференційних параметрів вигляду (1.127)) на місця, що відповідають i -тому вузлу півперіоду.

Цикл завершено, у ньому обчислено значення елементів масивів yc , zc , $yxс$ і $zxс$, що відповідають всім лінійним зв'язкам схеми рис. 4.6 і нелінійностям,

які входять до першої групи нелінійностей (нелінійний активний опір у другій гілці схеми).

У завершальній частині процедури (після циклу) дообчислюються значення елементів масивів Y_C , Z_C , Y_{XC} і Z_{XC} при врахуванні нелінійності, що входить до третьої групи – гістерезисної характеристики намагнічування дроселя третьої гілки схеми. У цій частині процедури:

-- оператор

```
call DRAWOUTXV(K,XC,MK,M,XV,3)
```

“витягає” із складеного вузлового вектора X_C струмів простий вузловий вектор X_V струму третьої гілки;

- оператор

```
call HISTPER(AL,XV,M,PSH,LH,PS3,XL,XP,DI,NT3)
```

викликає для виконання процедуру `HISTPER` (див. розділ 3.2.1.2), яка за значеннями коефіцієнта AL розширення петлі і X_V вузлового вектора струму третьої гілки обчислює значення поточкозчеплень (масив PSH) і диференційних індуктивностей (масив LH) дроселя за петлею гістерезису у вузлах півперіоду;

- оператори

```
call ADDV(K,PSH,M,YC,MK,3);
```

```
call ADDM(K,LH,M,YXC,MK,3)
```

значення поточкозчеплення і індуктивності дроселя у вузлах півперіоду додають до відповідних компонент матриць Y_C (складений вузловий вектор змінної \vec{y}) і Y_{XC} (складена матриця вузлових диференційних параметрів вигляду (1.127)).

Роздрук файлу `Daniv.dat` із вхідними даними:

```
+ .1500E 05+ .3142E 03+ .1000E-01+ .3000E-02
+ .1000E 00+ .1000E 01+ .1000E 01
+ .0000E 00+ .1000E 01+ .0000E 00+ .0000E 00
+ .1000E 01+ .1000E 01+ .0000E 00+ .0000E 00
- .1000E 01
+ .1000E-03+ .1000E-03+ .1000E-03+ .1000E-01
+ .7500E 01+ .1000E-04+ .1000E-02
017
- .1750E 03+ .1750E 03+ .2500E 02
- .4600E 02- .4600E 02- .4600E 02
- .4500E 02- .4500E 02- .4500E 02
- .4300E 02- .4350E 02- .4400E 02
- .4000E 02- .4150E 02- .4300E 02
- .2700E 02- .3450E 02- .4200E 02
+ .5000E 01- .1800E 02- .4100E 02
+ .2300E 02- .8500E 01- .4000E 02
+ .3000E 02- .4000E 01- .3800E 02
+ .3500E 02+ .0000E 00- .3500E 02
+ .3800E 02+ .4000E 01- .3000E 02
+ .4000E 02+ .8500E 01- .2300E+02
+ .4100E+02+ .1800E+02- .5000E+01
```

```

+.4200E+02+.3450E+02+.2700E+02
+.4300E+02+.4150E+02+.4000E+02
+.4400E+02+.4350E+02+.4300E+02
+.4500E+02+.4500E+02+.4500E+02
+.4600E 02+.4600E 02+.4600E+02
0010000010000000000010009000000
003

```

Файл RezV.DAT із вихідними даними (результатом) після відпрацювання програми є таким:

```

Вхідні дані задачі:
.1500E+05 .3142E+03 .1000E-01 .3000E-02
.1000E+00 .1000E+01 .1000E+01
.0000E+00 .1000E+01 .0000E+00 .0000E+00
.1000E+01 .1000E+01 .0000E+00 .0000E+00
-.1000E+01
.1000E-03 .1000E-03 .1000E-03 .1000E-01
.7500E+01 .1000E-04 .1000E-02
17
-.1750E+03 .1750E+03 .2500E+02
-.4600E+02 -.4600E+02 -.4600E+02
-.4500E+02 -.4500E+02 -.4500E+02
-.4300E+02 -.4350E+02 -.4400E+02
-.4000E+02 -.4150E+02 -.4300E+02
-.2700E+02 -.3450E+02 -.4200E+02
.5000E+01 -.1800E+02 -.4100E+02
.2300E+02 -.8500E+01 -.4000E+02
.3000E+02 -.4000E+01 -.3800E+02
.3500E+02 .0000E+00 -.3500E+02
.3800E+02 .4000E+01 -.3000E+02
.4000E+02 .8500E+01 -.2300E+02
.4100E+02 .1800E+02 -.5000E+01
.4200E+02 .3450E+02 .2700E+02
.4300E+02 .4150E+02 .4000E+02
.4400E+02 .4350E+02 .4300E+02
.4500E+02 .4500E+02 .4500E+02
.4600E+02 .4600E+02 .4600E+02
1 0 1 0 0 0 10 9 0 0
3
10 30

```

Р о з р а х у н о к :

Уточнене значення 1 кореня для h=1.000
(розв'язок одержано після 3-ої ітерації)

```

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:
X1(c1)= -.1862E+03 X1(s1)= .5968E+03 X1(1)= .6252E+03
X1(c3)= -.2321E+02 X1(s3)= .9510E+02 X1(3)= .9789E+02
X1(c5)= -.3233E+02 X1(s5)= .3852E+02 X1(5)= .5029E+02
X1(c7)= -.5870E+01 X1(s7)= .1935E+02 X1(7)= .2022E+02
X1(c9)= -.5311E+01 X1(s9)= .9524E+01 X1(9)= .1090E+02

```

значення функції у M = 60 вузлах півперіоду

-.2529E+03	-.1830E+03	-.1110E+03	-.4050E+02	.2562E+02	.8501E+02
.1363E+03	.1791E+03	.2139E+03	.2422E+03	.2654E+03	.2854E+03
.3037E+03	.3211E+03	.3382E+03	.3548E+03	.3706E+03	.3850E+03
.3976E+03	.4081E+03	.4166E+03	.4238E+03	.4305E+03	.4376E+03
.4461E+03	.4564E+03	.4689E+03	.4832E+03	.4989E+03	.5149E+03
.5304E+03	.5445E+03	.5565E+03	.5662E+03	.5734E+03	.5786E+03
.5820E+03	.5841E+03	.5851E+03	.5851E+03	.5839E+03	.5814E+03
.5772E+03	.5713E+03	.5639E+03	.5554E+03	.5465E+03	.5380E+03
.5309E+03	.5254E+03	.5217E+03	.5191E+03	.5160E+03	.5107E+03
.5007E+03	.4837E+03	.4577E+03	.4214E+03	.3744E+03	.3176E+03

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= -.2024E+01	X2(s1)= .5971E+03	X2(1)= .5971E+03
X2(c3)= -.1578E+01	X2(s3)= .9529E+02	X2(3)= .9530E+02
X2(c5)= -.1241E+01	X2(s5)= .3880E+02	X2(5)= .3882E+02
X2(c7)= -.9343E+00	X2(s7)= .1948E+02	X2(7)= .1950E+02
X2(c9)= -.5976E+00	X2(s9)= .9601E+01	X2(9)= .9620E+01

значення змінної у M = 60 вузлах півперіоду

-.6376E+01	.6135E+02	.1264E+03	.1861E+03	.2385E+03	.2823E+03
.3174E+03	.3445E+03	.3652E+03	.3810E+03	.3940E+03	.4057E+03
.4173E+03	.4294E+03	.4419E+03	.4546E+03	.4668E+03	.4779E+03
.4872E+03	.4947E+03	.5004E+03	.5047E+03	.5080E+03	.5110E+03
.5141E+03	.5175E+03	.5211E+03	.5247E+03	.5277E+03	.5299E+03
.5307E+03	.5301E+03	.5282E+03	.5251E+03	.5215E+03	.5178E+03
.5142E+03	.5109E+03	.5077E+03	.5044E+03	.5003E+03	.4948E+03
.4877E+03	.4786E+03	.4678E+03	.4557E+03	.4428E+03	.4300E+03
.4175E+03	.4056E+03	.3938E+03	.3810E+03	.3658E+03	.3464E+03
.3209E+03	.2877E+03	.2460E+03	.1957E+03	.1377E+03	.7372E+02

Амплітуди гармонік 3-ої змінної:

X3(c1)= -.1842E+03	X3(s1)= -.2318E+00	X3(1)= .1842E+03
X3(c3)= -.2164E+02	X3(s3)= -.1888E+00	X3(3)= .2164E+02
X3(c5)= -.3109E+02	X3(s5)= -.2769E+00	X3(5)= .3109E+02
X3(c7)= -.4935E+01	X3(s7)= -.1220E+00	X3(7)= .4937E+01
X3(c9)= -.4713E+01	X3(s9)= -.7771E-01	X3(9)= .4714E+01

значення змінної у M = 60 вузлах півперіоду

-.2465E+03	-.2443E+03	-.2375E+03	-.2266E+03	-.2128E+03	-.1973E+03
-.1811E+03	-.1655E+03	-.1512E+03	-.1389E+03	-.1286E+03	-.1203E+03
-.1136E+03	-.1083E+03	-.1038E+03	-.9983E+02	-.9621E+02	-.9283E+02
-.8966E+02	-.8668E+02	-.8381E+02	-.8086E+02	-.7753E+02	-.7341E+02
-.6807E+02	-.6110E+02	-.5225E+02	-.4144E+02	-.2887E+02	-.1494E+02
-.2760E+00	.1440E+02	.2838E+02	.4102E+02	.5190E+02	.6083E+02
.6785E+02	.7324E+02	.7739E+02	.8073E+02	.8368E+02	.8655E+02
.8952E+02	.9269E+02	.9607E+02	.9969E+02	.1036E+03	.1081E+03
.1133E+03	.1198E+03	.1280E+03	.1381E+03	.1502E+03	.1643E+03
.1799E+03	.1960E+03	.2116E+03	.2256E+03	.2367E+03	.2439E+03

Враховуємо гістерезис

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= -.1561E+03	X1(s1)= .6739E+03	X1(1)= .6917E+03
X1(c3)= -.6535E+02	X1(s3)= .8633E+02	X1(3)= .1083E+03

$X1(c5) = -.2328E+02$ $X1(s5) = .2769E+02$ $X1(5) = .3618E+02$
 $X1(c7) = -.6093E+01$ $X1(s7) = .1434E+02$ $X1(7) = .1558E+02$
 $X1(c9) = -.1202E+01$ $X1(s9) = .8852E+01$ $X1(9) = .8933E+01$

значення змінної у М = 60 вузлах півперіоду

-.2520E+03	-.1846E+03	-.1151E+03	-.4610E+02	.2006E+02	.8173E+02
.1380E+03	.1885E+03	.2337E+03	.2744E+03	.3114E+03	.3455E+03
.3775E+03	.4075E+03	.4355E+03	.4612E+03	.4843E+03	.5043E+03
.5211E+03	.5348E+03	.5459E+03	.5548E+03	.5624E+03	.5693E+03
.5761E+03	.5828E+03	.5896E+03	.5961E+03	.6020E+03	.6066E+03
.6098E+03	.6113E+03	.6113E+03	.6101E+03	.6082E+03	.6061E+03
.6043E+03	.6027E+03	.6015E+03	.6002E+03	.5982E+03	.5951E+03
.5905E+03	.5840E+03	.5760E+03	.5670E+03	.5576E+03	.5488E+03
.5413E+03	.5353E+03	.5308E+03	.5269E+03	.5222E+03	.5147E+03
.5023E+03	.4829E+03	.4550E+03	.4175E+03	.3705E+03	.3148E+03

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

$X2(c1) = -.2077E+01$ $X2(s1) = .5971E+03$ $X2(1) = .5971E+03$
 $X2(c3) = -.1552E+01$ $X2(s3) = .9521E+02$ $X2(3) = .9523E+02$
 $X2(c5) = -.1193E+01$ $X2(s5) = .3881E+02$ $X2(5) = .3883E+02$
 $X2(c7) = -.8949E+00$ $X2(s7) = .1948E+02$ $X2(7) = .1950E+02$
 $X2(c9) = -.5816E+00$ $X2(s9) = .9626E+01$ $X2(9) = .9644E+01$

значення змінної у М = 60 вузлах півперіоду

-.6298E+01	.6143E+02	.1265E+03	.1862E+03	.2384E+03	.2822E+03
.3173E+03	.3444E+03	.3650E+03	.3808E+03	.3938E+03	.4055E+03
.4171E+03	.4292E+03	.4418E+03	.4545E+03	.4668E+03	.4778E+03
.4872E+03	.4947E+03	.5004E+03	.5046E+03	.5080E+03	.5110E+03
.5141E+03	.5175E+03	.5212E+03	.5247E+03	.5278E+03	.5300E+03
.5308E+03	.5302E+03	.5282E+03	.5252E+03	.5216E+03	.5178E+03
.5142E+03	.5109E+03	.5078E+03	.5044E+03	.5003E+03	.4949E+03
.4877E+03	.4786E+03	.4678E+03	.4557E+03	.4428E+03	.4300E+03
.4175E+03	.4056E+03	.3938E+03	.3810E+03	.3658E+03	.3464E+03
.3209E+03	.2877E+03	.2460E+03	.1957E+03	.1376E+03	.7366E+02

Амплітуди гармонік 3-ої змінної:

$X3(c1) = -.1540E+03$ $X3(s1) = .7682E+02$ $X3(1) = .1721E+03$
 $X3(c3) = -.6380E+02$ $X3(s3) = -.8881E+01$ $X3(3) = .6441E+02$
 $X3(c5) = -.2209E+02$ $X3(s5) = -.1112E+02$ $X3(5) = .2473E+02$
 $X3(c7) = -.5198E+01$ $X3(s7) = -.5145E+01$ $X3(7) = .7313E+01$
 $X3(c9) = -.6208E+00$ $X3(s9) = -.7740E+00$ $X3(9) = .9922E+00$

значення змінної у М = 60 вузлах півперіоду

-.2457E+03	-.2460E+03	-.2415E+03	-.2323E+03	-.2184E+03	-.2005E+03
-.1793E+03	-.1559E+03	-.1312E+03	-.1064E+03	-.8244E+02	-.5999E+02
-.3964E+02	-.2171E+02	-.6293E+01	.6706E+01	.1752E+02	.2646E+02
.3388E+02	.4012E+02	.4547E+02	.5018E+02	.5442E+02	.5832E+02
.6193E+02	.6531E+02	.6847E+02	.7140E+02	.7413E+02	.7664E+02
.7895E+02	.8107E+02	.8303E+02	.8487E+02	.8662E+02	.8833E+02
.9005E+02	.9184E+02	.9373E+02	.9576E+02	.9794E+02	.1003E+03
.1027E+03	.1054E+03	.1082E+03	.1113E+03	.1148E+03	.1188E+03
.1238E+03	.1297E+03	.1371E+03	.1459E+03	.1563E+03	.1683E+03
.1814E+03	.1952E+03	.2089E+03	.2218E+03	.2329E+03	.2411E+03

За значеннями у m вузлах півперіоду третьої змінної – струму i_3 – зображеної на рис. 4.6 схеми побудована залежність цього струму від часу (кута η)

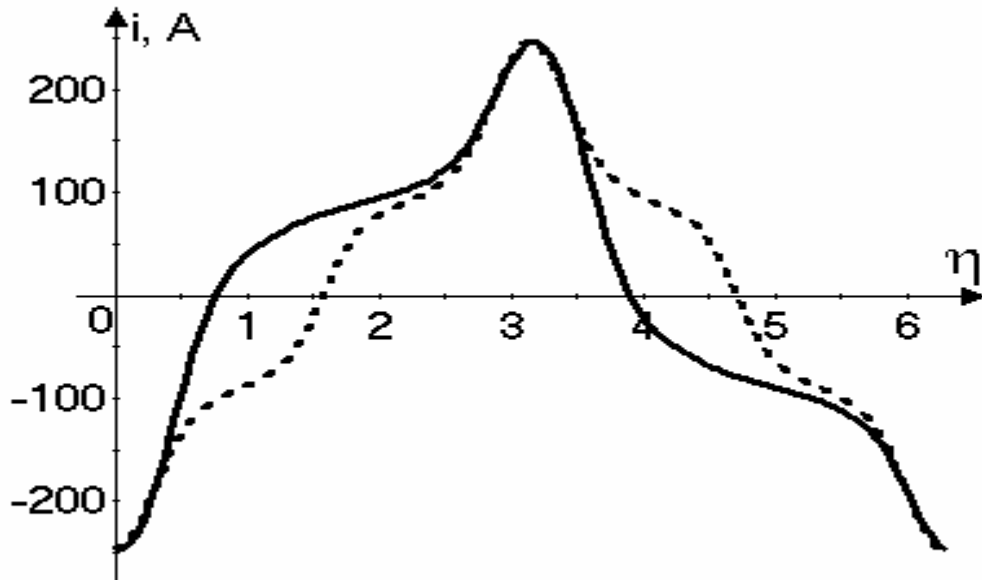


Рис. 4.8. Струм третьої гілки

на одному періоді. Ця залежність показана на рис. 4.8. На ньому пунктирна лінія – струм i_3 до врахування гістерезису (розрахунок за основною гілкою петлі), і суцільна лінія – цей же струм при врахуванні гістерезису (розрахунок за повною петлею).

Аналізуючи ці криві, а також значення вектора амплітуд струму i_3 до і після врахування гістерезису, потрібно відзначити появу у першій гармоніці струму i_3 активної складової, що є відображенням втрат потужності на перемагнічування дроселя. Дійсно, до врахування гістерезису амплітуди першої гармоніки струму третьої гілки з дроселем є такими (див. роздрук файлу `rezv.DAT`) $I_{3(c1)} = -184.2 \text{ A}$; $I_{3(s1)} = -0.23 \text{ A}$. Враховуючи, що електрорушійна сила у першій гілці є синусоїдою (див. формулу (4.30)), то струм третьої гілки – це майже чиста косинусоїда, тобто є індуктивного характеру (відстає від е.р.с на 90 ел. градусів), тому що опір третьої гілки в основному є індуктивним. Після врахування гістерезису отримано такі значення амплітуди першої гармоніки струму $I_{3(c1)} = -154.0 \text{ A}$; $I_{3(s1)} = 76.8 \text{ A}$. Бачимо появу у першій гармоніці струму значної синусної складової, що є у фазі з е.р.с., тобто є активною.

Читачеві пропонується на описаній вище чисельній моделі періодичного процесу у схемі рис. 4.6 провести експеримент і задати декілька варіантів петлі гістерезису із різними її площами і переконатися, що розрахункові втрати потужності на перемагнічування осердя дроселя будуть пропорційними до площі петлі гістерезису [4, 41].

4.2. Тести і приклади розрахунків автоколивань

У цьому розділі наводяться декілька прикладів чисельного моделювання автоколивань у нелінійних системах з різними видами нелінійних зв'язків у них. Це приклади А.1 – А.4. У кожному прикладі цієї групи у головній програмі блоку програмних компонент користувача перед зверненням до процедури `HARMOSC` четвертому елементу `KER(4)` керуючого масиву `KER` присвоюється значення 2.

4.2.1. Приклад А.1

У якості першої задачі як прикладу чисельного моделювання автоколивань розглянемо визначення періодичного розв'язку нелінійного диференційного рівняння

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad (4.39)$$

що описує, зокрема, рух маятника з нелінійним демпфуванням. Це рівняння у літературі відоме як рівняння Ван-дер-Поля. Його нелінійність безумовна однозначна (нелінійність першої групи) і задана аналітично.

У [27] показано, що визначення періодичного розв'язку рівняння (4.39) можна здійснити асимптотичним методом Боголюбова-Митропольського, однак тільки при значеннях коефіцієнта $\mu \ll 1$, коли описувані цим рівнянням коливання є майже гармонічними. При значеннях цього коефіцієнта поблизу 1 і особливо при $\mu \gg 1$, коли коливання є полігармонічними і мають релаксаційний характер, у [27] рекомендується застосовувати інші методи, зокрема – метод А. Дородніцина (асимптотичного наближення за степенями $1/\mu$).

На цьому прикладі покажемо, що при чисельному моделюванні диференціальним гармонічним методом нелінійних автоколивань, які описуються рівнянням (4.39), на значення коефіцієнта μ не накладається жодних обмежень.

Рівняння (4.39) приведемо до вигляду (1.65):

$$\frac{d\bar{x}}{dt} + \bar{z} - \bar{e} = 0 \quad (4.40)$$

при позначеннях

$$\bar{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}; \quad \bar{z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x_2 \\ x_1 + \mu(x_1^2 - 1)x_2 \end{Bmatrix}; \quad \bar{e} = 0. \quad (4.41a,b)$$

Значення похідної $d\bar{z}/d\bar{x}$, яка необхідна при формуванні миттєвої (на півперіоді) математичної моделі системи, є таким

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} = \begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ 1 + 2\mu x_1 x_2 & \mu(x_1^2 - 1) \end{Bmatrix}. \quad (4.42)$$

Текст головної програми блоку програмних компонент користувача для чисельного моделювання автоколивань, що описуються рівнянням (4.39), має вигляд:

```

Program Van_der_Pol
!-----
! Програма визначення періодичних розв'язків
! рівняння Ван-дер-Поля
! dx/dt+Z=E
! X=colon(x1,x2)
! Z=colon(z1,z2)
! E=colon(e1,e2)
! z1=-x2; z2=x1-mju*(1-x1**2)*x2
! e1=0; e2=0
! (змінні містять тільки непарні гармоніки)
!-----
Implicit none
real,dimension(42)::Y0
real,dimension(40)::E
integer,dimension(10)::KER
real::mju,OM,EPS1,EPS2,H1,HM
real::X1C1,X1S1,X2C1,X2S1
integer::K,NG,NK
!-----
Common/MP/mju
!----- спільна ділянка із процедурою MODEL
!-----
Open(1,File='DaniVan.dat',status='old')
Read(1,1)mju
Read(1,1)EPS1,EPS2,H1,HM
!----- EPS1 - точність інтегрування
!----- EPS2 - точність для методу Ньютона
!----- H1 - значення h, при якому необх. уточнити корінь
!----- HM - максимальне значення h
!-----
Read(1,2)KER
Read(1,2)K
Read(1,1)OM
Read(1,1)X1C1,X1S1,X2C1,X2S1
!----- KER - масив керуючих змінних
!----- K - порядок системи диф. рівнянь
!----- X1C1,X1S1,X2C1,X2S1 - початкові наближення амплітуд
!----- перших гармонік змінних X1 і X2
1 Format(4E10.4)
2 Format(10I3)
Close(1)
!-----
Open(1,file='RezVan.dat')
write(1,5)
5 format(2X,'Періодичний розв'язок рівняння Ван-дер-Поля'
& /10X,'Введені дані:')
write(1,14)mju
14 format(2X,' mju=',E10.4)

```

```

        write(1,15)EPS1, EPS2, H1, HM
15 format(2X, ' EPS1=', E10.4,
    & ' EPS2=', E10.4, ' H1=', E10.4, ' HM=', E10.4)
        write(1,16)KER
16 format(2X, 'KER=', 10i5)
        Write(1,17)K
17 format(2X, ' K=', i2)
        write(1,18)OM
18 format(2X, 'OM=', E11.4)
        write(1,19)X1C1, X1S1, X2C1, X2S1
19 format(2X, 'X1C1=', E11.4, ' X1S1=', E11.4,
    & ' X2C1=', E11.4, ' X2S1=', E11.4)
        3 Format(2X, 8I5)
!----- записали введені дані до вихідного файлу
!-----
        Call SizesV(KER(1), K, KER(8), NG, NK)
        Write(1, 3)NG, NK
!----- NG - порядок простого вектора амплітуд
!----- NK - порядок складеного вектора амплітуд
        Y0=0; Y0(NK+1)=OM
        Y0(1)=X1C1; Y0(2)=X1S1; Y0(NG+1)=X2C1; Y0(NG+2)=X2S1
!----- сформували початкове значення вектора Y0.
!-----
        write(1,13)
13 format(/2X, 'П о з р а х у н о к :')
        Call HARMOSC(K, Y0, E, NK, HM, H1, EPS1, EPS2, KER)
        Close(1)
        Stop
        End Program Van_der_Pol

```

Текст програми MODEL, що реалізує миттєву (на півперіоді) модель процесу:

```

        Subroutine Model(AL, M, K, MK, XC, YC, ZC, YXC, ZXC, VM)
!-----
! Процедура миттєвої (на півперіоді) моделі процесу,
!----- що описується рівнянням (4.39)
        Implicit none
        real::AL
        integer, intent(in)::M, K, MK
        real, dimension(MK)::XC, YC, ZC
        real, dimension(MK, K)::YXC, ZXC
        real, dimension(K)::X, Z
        real, dimension(K, K)::ZX, VM
        real::mju
        integer::i
        Common/MP/mju
!-- Спільна ділянка пам'яті із головною програмою
!-----
        VM(1,1)=0.; AL=0.
        YC(1)=0.; YXC(1,1)=0.
        Do i=1, M
            call DRAWOUTV(K, XC, MK, X, i)
            Z(1)=-X(2)

```

```

Z(2)=X(1)-mju*(1.-X(1)**2)*X(2)
ZX(1,1)=0.;      ZX(1,2)=-1.
ZX(2,1)=1.+2.*mju*X(1)*X(2)
ZX(2,2)=mju*(X(1)**2-1.)
call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,i)
call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,i)
end do
Return
End Subroutine Model

```

У цій процедурі формальні параметри `AL` і `VM` не використовуються, тому що нелінійність рівняння (4.39) не належить до третьої групи - не є гістерезисною - і рівняння (4.39) у записі (4.40) є у нормальній формі Коші, тобто приводиться до вигляду (1.65). З цієї ж причини перші чотири оператори

```

VM(1,1)=0.; AL=0.
YC(1)=0.; YXC(1,1)=0.

```

виконують непотрібні операції, їх мета – заблокувати повідомлення компілятора при компіляції процедури, що зазначені формальні параметри у тілі процедури не використовуються.

Оскільки у задачі немає нелінійностей другої чи третьої груп, то всі дії процедури (обчислення значень складеного вузлового вектора `zc` і складеної матриці вузлових параметрів `zxc`) виконуються у головному циклі процедури.

Роздрук файлу `RezVan.dat` з результатами розрахунку:

Періодичний розв'язок рівнянь Ван-дер-Поля

Введені дані:

```

mju= .3000E+01
EPS1=.1000E-02 EPS2=.1000E-03 H1=.1000E+01 HM=.1000E+01
KER=  1    1    0    2    0    0    0    9    0    0
K= 2
OM = .8000E+00
X1C1=.2000E+01 X1S1=.0000E+00 X2C1=.0000E+00 X2S1=-.2000E+01
 10    20

```

Р о з р а х у н о к :

Уточнене значення 1 кореня для `h=1.000`

(розв'язок одержано після 2-ої ітерації)

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

```

X1(c1)= .2074E+01 X1(s1)= -.7973E-10 X1(1)= .2074E+01
X1(c3)= -.3668E+00 X1(s3)= -.3408E+00 X1(3)= .5007E+00
X1(c5)= .1400E-01 X1(s5)= .2272E+00 X1(5)= .2276E+00
X1(c7)= .8226E-01 X1(s7)= -.9589E-01 X1(7)= .1263E+00
X1(c9)= -.8103E-01 X1(s9)= .1747E-01 X1(9)= .8289E-01

```

значення змінної у `M = 60` вузлах півперіоду

```

.1723E+01 .1706E+01 .1698E+01 .1694E+01 .1691E+01 .1682E+01
.1665E+01 .1638E+01 .1602E+01 .1560E+01 .1516E+01 .1476E+01

```

```

.1443E+01 .1420E+01 .1405E+01 .1396E+01 .1386E+01 .1372E+01
.1346E+01 .1307E+01 .1253E+01 .1189E+01 .1119E+01 .1050E+01
.9875E+00 .9356E+00 .8940E+00 .8581E+00 .8189E+00 .7644E+00
.6813E+00 .5578E+00 .3858E+00 .1629E+00 -.1062E+00 -.4104E+00
-.7328E+00-.1053E+01-.1351E+01 -.1609E+01 -.1813E+01 -.1957E+01
-.2042E+01-.2075E+01-.2069E+01 -.2039E+01 -.1998E+01 -.1959E+01
-.1930E+01-.1914E+01-.1910E+01 -.1913E+01 -.1917E+01 -.1917E+01
-.1907E+01-.1886E+01-.1855E+01 -.1819E+01 -.1781E+01 -.1748E+01

```

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

```

X2(c1)= -.5166E-06 X2(s1)= -.1472E+01 X2(1)= .1472E+01
X2(c3)= -.7254E+00 X2(s3)= .7808E+00 X2(3)= .1066E+01
X2(c5)= .8060E+00 X2(s5)= -.4967E-01 X2(5)= .8075E+00
X2(c7)= -.4763E+00 X2(s7)= -.4086E+00 X2(7)= .6275E+00
X2(c9)= .1115E+00 X2(s9)= .5175E+00 X2(9)= .5293E+00

```

значення змінної у $M = 60$ вузлах півперіоду

```

-.2841E+00-.1624E+00-.7238E-01 -.3898E-01 -.7235E-01 -.1654E+00
-.2959E+00-.4318E+00-.5397E+00 -.5929E+00 -.5787E+00 -.5015E+00
-.3826E+00-.2546E+00-.1545E+00 -.1137E+00 -.1503E+00 -.2643E+00
-.4361E+00-.6309E+00-.8068E+00 -.9244E+00 -.9579E+00 -.9026E+00
-.7784E+00-.6279E+00-.5092E+00 -.4843E+00 -.6055E+00 -.9031E+00
-.1376E+01-.1990E+01-.2678E+01 -.3352E+01 -.3917E+01 -.4289E+01
-.4404E+01-.4236E+01-.3801E+01 -.3149E+01 -.2364E+01 -.1542E+01
-.7787E+00-.1535E+00 .2833E+00 .5162E+00 .5641E+00 .4733E+00
.3063E+00 .1279E+00-.7587E-02 -.6567E-01 -.3667E-01 .6542E-01
.2090E+00 .3543E+00 .4638E+00 .5113E+00 .4881E+00 .4039E+00

```

кругова частота основної гармоніки = .7095E+00

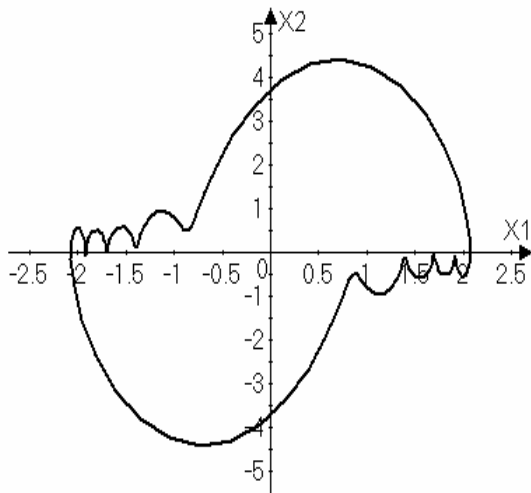


Рис. 4.9. Граничний цикл

Ці результати відносяться до варіанту обчислень при $\mu = 3.0$ і $n = 9$.

За одержаними значеннями змінних x_1 і x_2 у вузлах на півперіоді на рис. 4.9 збудовано граничний цикл для змодельованих автоколиваний (залежність змінної x_2 (швидкість) від змінної x_1 (відхилення)).

Для цього ж значення μ виконані розрахунки при інших значеннях n , їх результати наведені у таблиці 4.2. Як видно із цієї таблиці, амплітуда 15-ої гармоніки змінної x_1 не перевищує 1%

від значення амплітуди 1-ої гармоніки, і даліше нарощувати кількість враховуваних гармонік практично немає сенсу.

Таблиця 4.2. Результати розрахунку автоколивань при $\mu = 3.0$

n	$X_{1(1)}$	$X_{1(3)}$	$X_{1(5)}$	$X_{1(7)}$	$X_{1(9)}$	$X_{1(11)}$	$X_{1(13)}$	$X_{1(15)}$	ω
1	2.0								1.0
3	2.102	0.5329							0.8212
5	2.087	0.5391	0.2741						0.7304
7	2.074	0.5068	0.2433	0.1499					0.7105
9	2.074	0.5007	0.2276	0.1263	0.0829				0.7095
11	2.075	0.5001	0.2249	0.1197	0.0704	0.0433			0.7094
13	2.075	0.5000	0.2244	0.1183	0.0673	0.0407	0.0276		0.7093
15	2.075	0.5000	0.2243	0.1179	0.0665	0.0391	0.0241	0.0164	0.7093

4.2.2. Приклад А.2

У цьому прикладі розглядається визначення параметрів автоколивань в системі автоматичного регулювання третього порядку, що описується рівнянням

$$T^2 \ddot{x} + 2\xi T \dot{x} + x + b \operatorname{sign} x = 0. \quad (4.43)$$

Для визначення періодичного розв'язку цього рівняння у [56] використано метод гармонічної лінеаризації, там це подається як приклад 4.2.2. При цьому коливання змінної x шукаються у вигляді

$$x = A \sin \omega t. \quad (4.44)$$

Методом гармонічної лінеаризації у [56] одержано

$$\omega = \frac{1}{T}; \quad A = \frac{2bT}{\pi\xi}. \quad (4.45)$$

Якщо задатися числовими значеннями

$$T = 1.0; \quad b = 10.0; \quad \xi = 0.07,$$

то за формулами (4.45) одержимо: $\omega = 1.0$ і $A = 90.95$.

Розв'яжемо цю ж задачу шляхом чисельного моделювання із застосуванням ПЗ ДГМ. Для цього рівняння (4.43) приводимо до вигляду (1.65):

$$\frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{z} - \vec{e} = 0, \quad (4.46)$$

де

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \end{pmatrix}; \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_3 \\ c_1 x_3 + c_2 x_2 + c_2 \operatorname{sign} x_1 \end{pmatrix}; \quad (4.47)$$

$$c_1 = \frac{2\xi}{T}; \quad c_2 = \frac{1}{T^2} \quad (4.48)$$

Програмні компоненти блоку користувача у цьому прикладі є такими.

1. Головна програма:

```

Program SAR
!-----
! Програма визначення періодичних розв'язків
! рівняння, що описує автоколивний режим
! системи автоматичного регулювання
! dX/dt+Z=0
! X=colon(x1,x2,x3)
! Z=colon(z1,z2,z3)
! z1=-x2; z2=-x3; z3=c1*x3+c2*x2+c3*sign(x1)
! (змінні містять тільки непарні гармоніки)
!-----
Implicit none
real,dimension(42)::Y0
real,dimension(40)::E
integer,dimension(10)::KER
real::A,D,T,C1,C2,B,OM,EPS1,EPS2,H1,HM
real::X1C1,X1S1,X2C1,X2S1,X3C1,X3S1
integer::K,NG,NK
!-----
Common/MP/C1,C2,B
!----- спільна ділянка із процедурою MODEL
!-----
Open(1,File='DaniVan.dat',status='old')
Read(1,*)D,T,B
Read(1,*)EPS1,EPS2,H1,HM
!----- H1 - значення h, при якому необх. уточ. корінь
!----- HM - максимальне значення h
!----- EPS1 - точність інтегрування
!----- EPS2 - точність для метода Ньютона
!-----
Read(1,*)KER
Read(1,*)K
!----- KER - масив керуючих змінних
!----- K - порядок вихідної системи диф. рівнянь
!----- ввели дані
Close(1)
!-----
Open(1,file='RezVan.dat')

```

```

write(1,5)
5 format(2X,'Періодичний розв'язок рівнянь SAR'
& /10X,'Введені дані:')
write(1,14)D,T,B
14 format(2X,'Dzeta=',E10.4,' T=',E10.4,' B=',E10.4)
write(1,15)EPS1,EPS2,H1,HM
15 format(2X,' EPS1=',E10.4,
& ' EPS2=',E10.4,' H1=',E10.4,' HM=',E10.4)
write(1,16)KER
16 format(2X,' KER=',10i5)
Write(1,17)K
17 format(2X,' K=',i2)
!----- записали до вихідного файлу введені дані
!-----
OM=1./T; A=2.*B*T/(3.14159*D)
write(1,18)OM,A
18 format(2X,'OM=',E11.4,' A=',E11.4)
X1C1=A; X1S1=0.; X2C1=0.; X2S1=-OM*A
X3C1=-OM**2*A; X3S1=0.
!--- X1C1,X1S1,X2C1,X2S1,X3C1,X3S1 - початкові значення
!----- амплітуд перших гармонік змінних
write(1,19)X1C1,X1S1,X2C1,X2S1,X3C1,X3S1
19 format(2X,'X1C1=',E11.4,' X1S1=',E11.4,' X2C1=',E11.4,
& ' X2S1=',E11.4,' X3C1=',E11.4,' X3S1=',E11.4)
3 Format(2X,10I5)
C1=2.*D/T; C2=1./T**2
Call SizesV(KER(1),K,KER(8),NG,NK)
Write(1,3)NG,NK
!----- NG - порядок простого вектора амплітуд
!----- NK - порядок складеного вектора амплітуд
Y0=0; Y0(NK+1)=OM
Y0(1)=X1C1; Y0(2)=X1S1; Y0(NG+1)=X2C1; Y0(NG+2)=X2S1
Y0(2*NG+1)=X3C1; Y0(2*NG+2)=X3S1
!----- сформували початкове значення вектора Y0
write(1,13)
13 format(/2X,'П о з р а х у н о к :')
Call HARMOSC(K,Y0,E,NK,HM,H1,EPS1,EPS2,KER)
Close(1)
Stop
End Program SAR

```

У цій програмі реальним змінним D, T, B відповідають змінні ξ, T і b рівняння (4.43) і змінним OM, A – змінні ω і A із формул (4.45). За значеннями останніх двох змінних обчислюються початкові значення амплітуд перших гармонік змінних x_1, x_2, x_3 .

2. Процедура, що реалізує миттєву (на півперіоді) модель системи:

```

Subroutine Model(AL,M,K,MK,XC,YC,ZC,YXC,ZXC,VM)
!-----
! Процедура миттєвої (на півперіоді) моделі процесу

```

```

!-----
  Implicit none
  real::AL
  integer,intent(in)::M,K,MK
  real,dimension(MK)::XC,YC,ZC
  real,dimension(MK,K)::YXC,ZXC
  real,dimension(K)::X,Z
  real,dimension(K,K)::ZX,VM
  real::C1,C2,B
  integer::i
!-----
  Common/MP/C1,C2,B
! Спільна ділянка пам'яті із головною програмою
!-----
  VM(1,1)=0.; AL=0.
  YC(1)=0.; YXC(1,1)=0.
  Do i=1,M
    call DRAWOUTV(K,XC,MK,X,i)
    Z(1)=-X(2)
    Z(2)=-X(3)
    Z(3)=C1*X(3)+C2*X(2)+C2*sign(B,X(1))
    ZX(1,1)=0.; ZX(1,2)=-1.; ZX(1,3)=0.
    ZX(2,1)=0.; ZX(2,2)=0.; ZX(2,3)=-1.
    ZX(3,1)=0.; ZX(3,2)=C2; ZX(3,3)=C1
    call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,i)
    call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,i)
  end do
Return
End Subroutine Model

```

Як і у попередньому прикладі A1, у процедурі MODEL для цього прикладу формальні параметри AL і VM не використовуються, тому що нелінійність рівняння (4.43) не є гістерезисною (не належить до третьої групи) і рівняння (4.43) у записі (4.46) є у нормальній формі Коші, тобто не приводиться до вигляду (1.67). З цієї ж причини перші чотири оператори виконують непотрібні операції, їх мета – заблокувати повідомлення компілятора при компіляції процедури, що зазначені формальні параметри у тілі процедури не використовуються.

Оскільки у задачі немає нелінійностей другої чи третьої груп, то всі дії процедури (обчислення значень складеного вузлового вектора zc і складеної матриці вузлових параметрів zxc) виконуються у головному циклі процедури.

Провівши розрахунок за цією програмою при врахуванні тільки першої гармоніки для малого значення $\xi=0.07$, отримано результат $A = 91.65$ і $\omega=0.9954$, достатньо близький до одержаного у [56] методом гармонічної лінеаризації. Відхилення за амплітудою не перевищує 0.5% і за частотою – 0.3%.

Розрахунок цього ж варіанту, але при $n = 5$, дав такий результат:

Періодичний розв'язок рівнянь SAR

Введені дані:

Dzeta= .7000E-01 T= .1000E+01 B= .1000E+02

EPS1= .1000E-02 EPS2= .1000E-03 H1= .1000E+01 HM= .1000E+01


```

KER = 1 1 0 2 0 0 0 5 0 0
K= 3
OM= .1000E+01 A= .9095E+02
X1C1= .9095E+02 X1S1= .0000E+00 X2C1= .0000E+00 X2S1= -.9095E+02
X3C1= -.9095E+02 X3S1= .0000E+00
6 18
Р о з р а х у н о к :
Номер найвищої гармоніки = 5
Уточнене значення 1 кореня для h=1.000
(розв'язок одержано після 2-ої ітерації)

```

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

```

X1(c1)= .9145E+02 X1(s1)= .0000E+00 X1(1)= .9145E+02
X1(c3)= .1396E-01 X1(s3)= -.1783E+00 X1(3)= .1789E+00
X1(c5)= -.4060E-02 X1(s5)= .2120E-01 X1(5)= .2158E-01

```

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

```

X2(c1)= .8884E-05 X2(s1)= -.9117E+02 X2(1)= .9117E+02
X2(c3)= -.5333E+00 X2(s3)= -.4176E-01 X2(3)= .5350E+00
X2(c5)= .1057E+00 X2(s5)= .2023E-01 X2(5)= .1076E+00

```

Амплітуди гармонік 3-ої змінної:

```

X3(c1)= -.9089E+02 X3(s1)= -.2267E-05 X3(1)= .9089E+02
X3(c3)= -.1250E+00 X3(s3)= .1595E+01 X3(3)= .1600E+01
X3(c5)= .1007E+00 X3(s5)= -.5268E+00 X3(5)= .5363E+00

```

кругова частота основної гармоніки = .9969E+00

Як бачимо, при $\xi = 0.07$ вміст вищих гармонік у розв'язку є незначним.

Для великих значень ξ результати розрахунків, отримані методом гармонічної лінеаризації і пропонованим методом, відрізняються більше. Якщо задатися $\xi = 7.0$ (при тих же $T = 1.0$; $b = 10.0$), то за формулами (4.45) одержимо $\omega = 1.0$ і $A = 0.9095$. Далше наводиться роздрук результатів чисельного моделювання при $\xi = 7.0$ і врахуванні першої, третьої і п'ятої гармонік (роздрук файлу RezVan.dat):

Періодичний розв'язок рівнянь SAR

Введені дані:

```

Dzeta= .7000E+01 T= .1000E+01 B= .1000E+02
EPS1= .1000E-02 EPS2= .1000E-03 H1= .1000E+01 HM= .1000E+01
KER = 1 1 0 2 0 0 0 5 0 0
K= 3
OM= .1000E+01 A= .9095E+00
X1C1=.9095E+00 X1S1=.0000E+00 X2C1=.0000E+00 X2S1= -.9095E+00
X3C1= -.9095E+00 X3S1= .0000E+00
6 18
Р о з р а х у н о к :
Номер найвищої гармоніки = 5

```

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

$X1(c1) = .1660E+01$ $X1(s1) = .0000E+00$ $X1(1) = .1660E+01$
 $X1(c3) = -.5919E-01$ $X1(s3) = -.1553E-01$ $X1(3) = .6119E-01$
 $X1(c5) = .1166E-01$ $X1(s5) = .5756E-02$ $X1(5) = .1301E-01$

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

$X2(c1) = .4941E-07$ $X2(s1) = -.1228E+01$ $X2(1) = .1228E+01$
 $X2(c3) = -.3448E-01$ $X2(s3) = .1314E+00$ $X2(3) = .1359E+00$
 $X2(c5) = .2130E-01$ $X2(s5) = -.4316E-01$ $X2(5) = .4813E-01$

Амплітуди гармонік 3-ої змінної:

$X3(c1) = -.9089E+00$ $X3(s1) = -.3584E-07$ $X3(1) = .9089E+00$
 $X3(c3) = .2917E+00$ $X3(s3) = .7656E-01$ $X3(3) = .3016E+00$
 $X3(c5) = -.1597E+00$ $X3(s5) = -.7880E-01$ $X3(5) = .1781E+00$

кругова частота основної гармоніки = .7400E+00

Як бачимо, амплітуда першої гармоніки змінної x_1 (при врахуванні першої, третьої і п'ятої гармонік) становить 1.66 і кругова частота - 0.74. Тут уже результати розрахунків відрізняються від одержаних за методом гармонічної лінеаризації (0.905 і 1.0), відповідно, на 82% і 26%.

Результати суттєво залежать від кількості враховуваних вищих гармонік, що ілюструє таблиця 4.3.

Таблиця 4.3. Результати розв'язання рівняння (4.43)

n	$X_{1(1)}$	$X_{1(3)}$	$X_{1(5)}$	$X_{1(7)}$	$X_{1(9)}$	$X_{1(11)}$	ω
1	2.207						0.6414
3	2.207	0.082					0.6414
5	1.66	0.061	0.013				0.74
7	1.432	0.053	0.011	0.004			0.7968
9	1.31	0.048	0.01	0.0036	0.0016		0.8334
11	1.233	0.045	0.0095	0.0033	0.0015	0.0008	0.8589

Ця задача, на відміну від інших, що наведені у цьому розділі, підтверджує допустимість застосування до її розв'язання методу гармонічної лінеаризації: при нарощуванні кількості враховуваних гармонік значення амплітуди першої гармоніки наближається до 0.9095 і значення кругової частоти – до 1.0, тобто значень, отриманих методом гармонічної лінеаризації. Так, коли враховані гармоніки до 23-ої включно, то ці змінні приймають, відповідно, значення 1.059 (відхилення 16%) і 0.9266 (відхилення 7%).

Отриманий результат можна пояснити специфікою нелінійності – це розривна функція $y = b \operatorname{sign} x$, яка різко нелінійна (розрив першого роду) тільки в околиці нульового значення змінної x . Розривність функції є причиною поганої збіжності рядів Фур'є, що апроксимують періодичні залежності змінних цієї задачі (потрібно враховувати багато гармонік).

4.2.3. Приклад А.3

Розглянемо приклад 4.1.2 із [56], це розрахунок автоколивного режиму, що описується рівнянням

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha(x^2 - b^2)\dot{x} = 0. \quad (4.49)$$

При розгляді цього прикладу у [56] використаний аналітичний метод гармонічного балансу і розв'язок шукається у вигляді

$$x = a \sin \omega t. \quad (4.50)$$

При застосуванні цього методу значення амплітуди a і кругової частоти ω одержані у [56], шляхом розв'язання алгебричних рівнянь

$$\alpha a \omega \left(\frac{a^2}{4} - b^2 \right) = 0; \quad (4.51)$$

$$-a\omega^2 + a\omega_0^2 = 0,$$

із яких одержано

$$\omega = \omega_0; \quad a = 2b. \quad (4.52)$$

Якщо задатися значеннями

$$\alpha = 0.5; \quad b = 1.5; \quad \omega_0 = 0.5, \quad (4.53)$$

то одержимо

$$a = 3.0; \quad \omega = 0.5. \quad (4.54)$$

Виконаємо розрахунок цих автоколиваний (розглядаючи їх як полігармонічні) шляхом чисельного моделювання з використанням програмного забезпечення ДГМ. Для цього рівняння (4.49) записуємо у вигляді (1.65):

$$\frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{z} - \vec{e} = 0, \quad (4.55)$$

де

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ \omega_0^2 x_1 + \alpha(x_1^2 - b^2)x_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Необхідний для побудови миттєвої (на півперіоді) математичної моделі процесу вираз для похідної $d\vec{z}/d\vec{x}$ має вигляд

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 2\alpha x_1 x_2 + \omega_0^2 & \alpha(x_1^2 - b^2) \end{array} \right\|. \quad (4.57)$$

Блок програмних компонент користувача для цього випадку складається із головної програми `Program Avto` і процедури `MODEL` миттєвої моделі процесу.

Для обробки результатів і їх запису до вихідного файлу застосовується стандартна процедура `OUTP` із Блоку 5 ПЗ ДГМ, тому тут вона до блоку користувача не входить.

Головна програма `Program Avto` і процедура `MODEL` цього блоку мають вигляд:

```

Program Avto
!-----
!   dx/dt+Z=E
!   X=colon(x1,x2)
!   Z=colon(z1,z2)
!   E=colon(e1,e2)
!   z1=-x2;   z2=A*(x1**2-B**2)*x2+C*x1
!   e1=0;   e2=0
!   (змінні містять тільки непарні гармоніки)
!-----
Implicit none
real,dimension(42)::Y0
real,dimension(40)::E
integer,dimension(10)::KER
real::A,B,C,OM,EPS1,EPS2,H1,HM
real::X1C1,X1S1,X2C1,X2S1
integer::K,NG,NK
!-----
Common/MP/A,B,C
!----- спільна ділянка пам'яті із процедурою MODEL
!-----
Open(1,File='DaniVan.dat',status='old')
Read(1,*)A,B,C
Read(1,*)EPS1,EPS2,H1,HM
!----- H1 - значення h, при якому необх. уточ. корінь
!----- HM - максимальне значення h
!----- EPS1 - точність інтегрування
!----- EPS2 - точність для методу Ньютона
!-----
Read(1,*)KER
Read(1,*)K
Read(1,*)OM
Read(1,*)X1C1,X1S1,X2C1,X2S1
!--- X1C1,X1S1,X2C1,X2S1 - початкові значення
!----- амплітуд перших гармонік змінних
1 Format(4E10.4)
2 Format(10I3)
Close(1)
!-----

```

```

    Open(1,file='RezVan.dat')
    write(1,5)
    5 format(2X,'Розв'язок рівнянь автоколивного режиму'/
    & /10X,'Введені дані:')
    write(1,14)A,B,C
    14 format(2X,' A=',E10.4,' B=',E10.4,' C=',E10.4)
    write(1,15)EPS1,EPS2,H1,HM
    15 format(2X,' EPS1=',E10.4,
    & ' EPS2=',E10.4,' H1=',E10.4,' HM=',E10.4)
    write(1,16)KER
    16 format(3X,' KER =',10i5)
    Write(1,17)K
    17 format(2X,' K=',i2)
    write(1,18)OM
    18 format(2X,'OM=',E11.4)
    write(1,19)X1C1,X1S1,X2C1,X2S1
    19 format(2X,'X1C1=',E11.4,' X1S1=',E11.4,
    & ' X2C1=',E11.4,' X2S1=',E11.4)
    3 Format(2X,10I5)
!----- занесли введені дані до вихідного файлу
    Call SizesV(KER(1),K,KER(8),NG,NK)
    Write(1,3)NG,NK
!----- NG - порядок простого вектора амплітуд
!----- NK - порядок складеного вектора амплітуд
    Y0=0; Y0(NK+1)=OM
    Y0(1)=X1C1; Y0(2)=X1S1; Y0(NG+1)=X2C1; Y0(NG+2)=X2S1
!----- сформували початкове значення вектора Y0
    write(1,13)
    13 format(/2X,'Р о з р а х у н о к :')
    Call HARMOSC(K,Y0,E,NK,HM,H1,EPS1,EPS2,KER)
    Close(1)
    Stop
    End Program Avto
!-----

!-----
    Subroutine Model(AL,M,K,MK,XC,YC,ZC,YXC,ZXC,VM)
!-----
! Процедура миттєвої (на півперіоді) моделі процесу
!-----
    Implicit none
    real::AL
    integer,intent(in)::M,K,MK
    real,dimension(MK)::XC,YC,ZC
    real,dimension(MK,K)::YXC,ZXC
    real,dimension(K)::X,Z
    real,dimension(K,K)::ZX,VM
    real::A,B,C
    integer::i
!-----
    Common/MP/A,B,C
! Спільна ділянка пам'яті із головною програмою
!-----

```

```

BM(1,1)=0.; AL=0.
YC(1)=0.; YXC(1,1)=0.
Do i=1,M
  call DRAWOUTV(K,XC,MK,X,i)
  Z(1)=-X(2)
  Z(2)=A*(X(1)**2-B**2)*X(2)+C*X(1)
  ZX(1,1)=0.; ZX(1,2)=-1.
  ZX(2,1)=2.*A*X(1)*X(2)+C
  ZX(2,2)=A*(X(1)**2-B**2)
  call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,i)
  call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,i)
end do
Return
End Subroutine Model

```

Як і у попередніх прикладах A.1 і A.2, у процедурі `MODEL` для цього прикладу формальні параметри `AL` і `VM` не використовуються, тому що нелінійність рівняння (4.49) не є гістерезисною (не належить до третьої групи) і рівняння (4.49) у записі (4.55) є у нормальній формі Коші (1.65). З цієї ж причини перші чотири оператори

```

BM(1,1)=0.; AL=0.
YC(1)=0.; YXC(1,1)=0.

```

виконують непотрібні операції, їх мета – заблокувати повідомлення компілятора при компіляції процедури, що зазначені формальні параметри у тілі процедури не використовуються.

Оскільки у задачі немає нелінійностей другої чи третьої груп, то всі дії процедури (обчислення значень складеного вузлового вектора `zc` і складеної матриці вузлових параметрів `zxc`) виконуються у головному циклі процедури.

Роздрук файлу `RezVan.dat` з результатами розрахунку:

Періодичний розв'язок рівнянь автоколивного режиму

Введені дані:

```

A= .5000E+00  B= .1500E+01  C= .2500E+00
EPS1= .1000E-02  EPS2= .1000E-03  H1= .1000E+01  HM= .1000E+01
KER = 1 1 0 2 0 0 0 9 0 0
K = 2
OM= .4000E+00
X1C1=.3300E+01  X1S1= .1000E-01  X2C1= .1000E-01  X2S1= -.2000E+01
10 20

```

Р о з р а х у н о к :

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .3083E+01	X1(s1)= .0000E+00	X1(1)= .3083E+01
X1(c3)= -.4235E+00	X1(s3)= -.4977E+00	X1(3)= .6535E+00
X1(c5)= -.4779E-01	X1(s5)= .2488E+00	X1(5)= .2533E+00
X1(c7)= .1034E+00	X1(s7)= -.5143E-01	X1(7)= .1155E+00
X1(c9)= -.5647E-01	X1(s9)= -.2426E-01	X1(9)= .6146E-01

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= -.5489E-06	X2(s1)= -.1223E+01	X2(1)= .1223E+01
X2(c3)= -.5922E+00	X2(s3)= .5038E+00	X2(3)= .7775E+00
X2(c5)= .4934E+00	X2(s5)= .9476E-01	X2(5)= .5024E+00
X2(c7)= -.1428E+00	X2(s7)= -.2872E+00	X2(7)= .3207E+00
X2(c9)= -.8659E-01	X2(s9)= .2016E+00	X2(9)= .2194E+00

кругова частота основної гармоніки = .3966E+00

Залежність розрахункових величин амплітуд гармонік змінної x_1 і кругової частоти коливань ω від кількості враховуваних гармонік ілюструє таблиця 4.4.

Таблиця 4.4. Результати розрахунку для рівняння (4.49)

n	$X_{1(1)}$	$X_{1(3)}$	$X_{1(5)}$	$X_{1(7)}$	$X_{1(9)}$	ω
1	3.0					0.5
3	3.120	0.7281				0.4206
5	3.085	0.6782	0.3042			0.3970
7	3.082	0.6549	0.2601	0.1328		0.3966
9	3.083	0.6535	0.2533	0.1155	0.0615	0.3966

Як бачимо, у розрахунку достатньо враховувати гармоніки по сьому включно. При цьому отримані значення амплітуди і частоти відрізняються від значень (4.54) на 2.6% і 20.7%, відповідно. Часова залежність змінної x_1 містить достатньо виражені вищі гармоніки: третю (24%) і п'яту (8.3%).

4.2.4. Приклад А.4

У цьому розділі наведемо результати моделювання коливань маятника з підштовхувальною силою при в'язкому демпфуванні, що описуються рівнянням

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \operatorname{sign}(\dot{x}) - 2h\dot{x}. \quad (4.58)$$

Тут підштовхувальна сила – своєрідне від'ємне сухе тертя: коли швидкість додатня, то і підштовхувальна сила стала і додатня; коли швидкість від'ємна – то і вона стала і від'ємна.

У [56], прийнявши

$$x = a \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (4.59)$$

розв'язано цю задачу методом усереднення (там це – приклад 4.3.3) і одержано

$$a = \frac{2f}{\pi h \omega_0}. \quad (4.60)$$

Задавшись

$$f = 0.9; \quad h = 0.455; \quad \omega_0 = 1.0, \quad (4.61)$$

за формулою (4.60) маємо

$$a = 1.259. \quad (4.62)$$

А тепер виконаємо розрахунок цього нелінійного коливання шляхом чисельного моделювання з використанням ПЗ ДГМ. З цією метою рівняння (4.58) приводимо до вигляду (1.65)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{z} - \vec{e} = 0, \quad (4.63)$$

де

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ \omega_0^2 x_1 + 2hx_2 - f \operatorname{sign} x_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.64)$$

Необхідний для побудови миттєвої (на півперіоді) математичної моделі процесу вираз для похідної $d\vec{z}/d\vec{x}$ має вигляд

$$\frac{d\vec{z}}{d\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & 2h \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

Блок програмних компонент користувача для цього випадку складається із головної програми **Program Majatnyk** і процедури **МОДЕЛ** (миттєвої моделі процесу на півперіоді), які мають вигляд:

```

Program Majatnyk
!-----
! Розрахунок коливань маятника
! з підштовхувальною силою
!   dx/dt+Z=E
!   X=colon(x1,x2)
!   Z=colon(z1,z2)
!   E=colon(e1,e2)
!   z1=-x2;   z2=C*x1+2*h*x2-f*sign(x2)
!   e1=0;   e2=0
! (змінні містять тільки непарні гармоніки)
!-----
Implicit none
real,dimension(42)::Y0
real,dimension(40)::E
integer,dimension(10)::KER
real::C,H,F,OM,A,EPS1,EPS2,H1,HM

```



```

      real::X1C1,X1S1,X2C1,X2S1
      integer::K,NG,NK
!-----
      Common/MP/C,H,F
!----- спільна ділянка пам'яті із процедурою MODEL
!-----
      Open(1,File='DaniVan.dat',status='old')
      Read(1,1)C,H,F
      Read(1,1)EPS1,EPS2,H1,HM
      Read(1,2)KER
      Read(1,2)K
      1 Format(4E10.4)
      2 Format(10I3)
      Close(1)
!----- ввели дані
!-----
      Open(1,file='RezVan.dat')
      write(1,5)
      5 format(2X,'Розрахунок коливань маятника'
      & /10X,'Введені дані:')
      write(1,14)C,H,F
      14 format(2X,' C=',E10.4,' H=',E10.4,' F=',E10.4)
      write(1,15)EPS1,EPS2,H1,HM
      15 format(2X,' EPS1=',E10.4,
      & ' EPS2=',E10.4,' H1=',E10.4,' HM=',E10.4)
      write(1,3)KER
      Write(1,17)K
      17 format(2X,' K=',i2)
!----- занесли введені дані до вихідного файлу
!-----
      OM=sqrt(C); A=2.*F/(3.14159*H*OM) !---формула (4.60)
      write(1,18)OM,A
      18 format(2X,'OM=',E11.4,' A=',E11.4)
      X1C1=A; X1S1=0.; X2C1=0.; X2S1=-A*OM
!--- X1C1,X1S1,X2C1,X2S1 - початкові значення
!----- амплітуд перших гармонік змінних
      write(1,19)X1C1,X1S1,X2C1,X2S1
      19 format(2X,'X1C1=',E11.4,' X1S1=',E11.4,
      & ' X2C1=',E11.4,' X2S1=',E11.4)
      3 Format(2X,8I5)
      Call SizesV(KER(1),K,KER(8),NG,NK)
      Write(1,3)NG,NK
!----- NG - порядок простого вектора амплітуд
!----- NK - порядок складеного вектора амплітуд
      Y0=0; Y0(NK+1)=OM
      Y0(1)=X1C1; Y0(2)=X1S1; Y0(NG+1)=X2C1; Y0(NG+2)=X2S1
!----- сформували початкове значення вектора Y0
      write(1,13)
      13 format(/2X,'Р о з р а х у н о к :')
      Call HARMOSC(K,Y0,E,NK,HM,H1,EPS1,EPS2,KER)
      Close(1)
      Stop
      End Program Majatnyk

```

```

!-----
      Subroutine Model(AL,M,K,MK,XC,YC,ZC,YXC,ZXC,VM)
!-----
! Процедура миттєвої на півперіоді моделі процесу
!-----
      Implicit none
      real::AL
      integer,intent(in)::M,K,MK
      real,dimension(MK)::XC,YC,ZC
      real,dimension(MK,K)::YXC,ZXC
      real,dimension(K)::X,Z
      real,dimension(K,K)::ZX,VM
      real::C,H,F
      integer::i
!-----
      Common/MP/C,H,F
! Спільна ділянка пам'яті із головною програмою
!-----
      VM(1,1)=0.; AL=0.
      YC(1)=0.; YXC(1,1)=0.
      Do i=1,M
         call DRAWOUTV(K,XC,MK,X,i)
         Z(1)=-X(2)
         Z(2)=C*X(1)+2.*H*X(2)-sign(F,X(2))
         ZX(1,1)=0.; ZX(1,2)=-1.
         ZX(2,1)=C; ZX(2,2)=2.*H
         call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,i)
         call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,i)
      end do
      Return
End Subroutine Model

```

І у цьому прикладі, як і у декількох попередніх, у процедурі `MODEL` формальні параметри `AL` і `VM` не використовуються, тому що нелінійність рівняння (4.58) є гістерезисною (не належить до третьої групи) і рівняння (4.58) у записі (4.63) є у нормальній формі Коші (1.65). З цієї ж причини перші чотири оператори

```

      VM(1,1)=0.; AL=0.
      YC(1)=0.; YXC(1,1)=0.

```

виконують непотрібні операції, їх мета – заблокувати повідомлення компілятора при компіляції процедури, що зазначені формальні параметри у тілі процедури не використовуються.

Оскільки у задачі немає нелінійностей другої чи третьої груп, то обчислення значень складеного вузлового вектора `zc` і складеної матриці вузлових параметрів `zxc` виконуються у головному циклі процедури.

Роздрук вихідного файлу `RezVan.dat` з результатами розрахунку:

Розрахунок коливань маятника

Введені дані:
 C= .1000E+01 H= .4550E+00 F= .9000E+00
 EPS1= .1000E-02 EPS2= .1000E-03 H1= .1000E+01 HM= .1000E+01
 KER = 1 1 0 2 0 0 0 7 0 0
 K = 2
 OM= .1000E+01 A= .1259E+01
 X1C1= .1259E+01 X1S1= .0000E+00 X2C1= .0000E+00 X2S1=-.1259E+01
 8 16

Р о з р а х у н о к :

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

X1(c1)= .1340E+01 X1(s1)= .7881E-14 X1(1)= .1340E+01
 X1(c3)= -.6973E-02 X1(s3)= .5264E-01 X1(3)= .5310E-01
 X1(c5)= -.6343E-02 X1(s5)= .8976E-02 X1(5)= .1099E-01
 X1(c7)= -.3347E-02 X1(s7)= .2136E-02 X1(7)= .3971E-02

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

X2(c1)= .3444E-06 X2(s1)= -.1243E+01 X2(1)= .1243E+01
 X2(c3)= .1465E+00 X2(s3)= .1941E-01 X2(3)= .1478E+00
 X2(c5)= .4163E-01 X2(s5)= .2942E-01 X2(5)= .5098E-01
 X2(c7)= .1387E-01 X2(s7)= .2174E-01 X2(7)= .2578E-01

кругова частота основної гармоніки = .9277E+00

Результати розв'язання цієї задачі у залежності від значення n наведені у таблиці 4.5.

Таблиця 4.5. Результати розрахунків для рівняння (4.58)

n	a_1	a_3	a_5	a_7	ω
1	1.296				0.9706
3	1.296	0.048			0.9706
5	1.326	0.051	0.011		0.9419
7	1.340	0.053	0.011	0.004	0.9277

Видозмінимо розглянуту вище задачу - замість в'язкого демпфування встановимо демпфування, яке створює газове середовище: нехай сила опору пропорційна до добутку $\dot{x}|\dot{x}|$. Для цього випадку коливання маятника з підштовхувальною силою описується рівнянням

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \operatorname{sign}(\dot{x}) - \alpha \dot{x}|\dot{x}|. \quad (4.66)$$

Прийнявши, що

$$x = a \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (4.67)$$

методом усереднення отримуємо

$$a = \sqrt{\frac{3f}{2\alpha\omega_0}}. \quad (4.68)$$

Задавшись значеннями

$$f = 0.9; \quad \alpha = 1.3; \quad \omega_0 = 1.0, \quad (4.69)$$

маємо

$$a = 1.019. \quad (4.70)$$

А тепер виконаємо розрахунок цього нелінійного коливання шляхом чисельного моделювання з використанням ПЗ ДГМ. З цією метою рівняння (1) приводимо до вигляду

$$\frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{z} - \vec{e} = 0, \quad (4.71)$$

де

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ \omega_0^2 x_1 + \alpha x_2 |x_2| \end{pmatrix}; \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

Необхідний для побудови миттєвої математичної моделі процесу на півперіоді вираз для похідної $d\vec{z}/d\vec{x}$ має вигляд

$$\frac{d\vec{z}}{d\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & 2\alpha|x_2| \end{pmatrix}. \quad (4.73)$$

Блок програмних компонент користувача для цього випадку складається із головної програми `Program Majat1` і процедури `MODEL` миттєвої моделі процесу (на півперіоді), які мають вигляд:

```

Program Majat1
!-----
! Розрахунок коливань маятника
! з підштовхувальною силою у газовому середовищі
!   dX/dt+Z=E
!   X=colon(x1,x2)
!   Z=colon(z1,z2)
!   E=colon(e1,e2)
!   z1=-x2;
!   z2=C*x1+h*x2*abs(x2)-f*sign(x2)
!   e1=0; e2=0
! (змінні містять тільки непарні гармоніки)
!-----
Implicit none
real,dimension(42)::Y
real,dimension(40)::E
integer,dimension(10)::KER

```

```

real::C,H,F,OM,A,EPS1,EPS2,H1,HM
real::X1C1,X1S1,X2C1,X2S1
integer::K,NG,NK
!-----
Common/MP/C,H,F
!----- спільна ділянка із процедурою MODEL
!-----
Open(1,File='DaniMaj.dat',status='old')
Read(1,*)C,H,F
Read(1,*)EPS1,EPS2,H1,HM
Read(1,*)KER
Read(1,*)K
Close(1)
!-----
Open(1,file='RezMaj.dat')
write(1,5)
5 format(2X,'Розрахунок коливань маятника в газі'
& /10X,'Введені дані:')
write(1,14)C,H,F
14 format(2X,' C=',E10.4,' H=',E10.4,' F=',E10.4)
write(1,15)EPS1,EPS2,H1,HM
15 format(2X,' EPS1=',E10.4,
& ' EPS2=',E10.4,' H1=',E10.4,' HM=',E10.4)
write(1,16)KER
16 format(2X,' KER =',10i5)
Write(1,17)K
17 format(2X,' K=',i2)
!----- занесли введені дані до вихідного файлу
OM=sqrt(C); A=sqrt(3.*F/(2.*H*OM**2))
write(1,18)OM,A
18 format(2X,'OM=',E11.4,' A=',E11.4)
X1C1=A; X1S1=0.; X2C1=0.; X2S1=-A*OM
!--- X1C1,X1S1,X2C1,X2S1 - початкові значення
!----- амплітуд перших гармонік змінних
write(1,19)X1C1,X1S1,X2C1,X2S1
19 format(2X,'X1C1=',E11.4,' X1S1=',E11.4,
& ' X2C1=',E11.4,' X2S1=',E11.4)
Call SizesV(KER(1),K,KER(8),NG,NK)
Write(1,20)NG,NK
20 format(2X,'NG=',i3,' NK=',i3)
!----- NK - порядок складеного вектора амплітуд
!-----
Y=0; Y(NK+1)=OM
Y(1)=X1C1; Y(2)=X1S1; Y(NG+1)=X2C1; Y(NG+2)=X2S1
!-- Сформували початкове значення вектора Y0
!-----
write(1,21)
21 format(/2X,'Р о з р а х у н о к :')
Call HARMOSC(K,Y,E,NK,HM,H1,EPS1,EPS2,KER)
Close(1)
Stop
End Program Majat1
!-----

```

```

!-----
      Subroutine Model(AL,M,K,MK,XC,YC,ZC,YXC,ZXC,VM)
!-----
! Процедура миттєвої моделі процесу на півперіоді
!-----
      Implicit none
      real::AL
      integer,intent(in)::M,K,MK
      real,dimension(MK)::XC,YC,ZC
      real,dimension(MK,K)::YXC,ZXC
      real,dimension(K)::X,Z
      real,dimension(K,K)::ZX,VM
      real::C,H,F
      integer::i
!-----
      Common/MP/C,H,F
! Спільна ділянка пам'яті із головною програмою
!-----
      VM(1,1)=0.; AL=0.
      YC(1)=0.; YXC(1,1)=0.
      Do i=1,M
         call DRAWOUTV(K,XC,MK,X,i)
         Z(1)=-X(2)
         Z(2)=C*X(1)+H*X(2)*abs(X(2))-sign(F,X(2))
         ZX(1,1)=0.
         ZX(1,2)=-1.
         ZX(2,1)=C
         ZX(2,2)=2*H*abs(X(2))
         call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,i)
         call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,i)
      end do
      Return
      End Subroutine Model

```

Роздрук файлу RezMaj.dat із результатами розрахунку:

Розрахунок коливань маятника в газі

Введені дані:

C= .1000E+01 H= .1300E+01 F= .9000E+00

EPS1= .1000E-02 EPS2= .1000E-03 H1= .1000E+01 HM= .1000E+01

KER = 1 1 0 2 0 0 0 5 9 1

K= 2

OM = .1000E+01 A = .1019E+01

X1C1= .1019E+01 X1S1= .0000E+00 X2C1= .0000E+00 X2S1= -.1019E+01

6 11 12 36

Р о з р а х у н о к :

Рахується h-характеристика

Уточнене значення 1 кореня для h=1.000

(розв'язок одержано після 4-ої ітерації)

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

$x1(c1) = .1216E+01$ $x1(s1) = -.6529E-12$ $x1(1) = .1216E+01$
 $x1(c3) = .1452E-01$ $x1(s3) = .8249E-01$ $x1(3) = .8376E-01$
 $x1(c5) = -.1268E-01$ $x1(s5) = .1592E-01$ $x1(5) = .2035E-01$

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

$x2(c1) = .4739E-06$ $x2(s1) = -.9979E+00$ $x2(1) = .9979E+00$
 $x2(c3) = .2031E+00$ $x2(s3) = -.3574E-01$ $x2(3) = .2062E+00$
 $x2(c5) = .6532E-01$ $x2(s5) = .5202E-01$ $x2(5) = .8350E-01$

кругова частота основної гармоніки = $.8207E+00$

Результати розв'язання цієї задачі у залежності від значення n наведені у таблиці 4.6.

Таблиця 4.6. Результати розрахунків для рівняння (4.66)

n	a_1	a_3	a_5	a_7	ω
1	1.057				0.9639
3	1.197	0.084			0.8398
5	1.216	0.084	0.020		0.8207
7	1.223	0.084	0.020	0.007	0.8134

4.3. Приклад розрахунку параметричних коливань

Розглянемо, як приклад, наведений у [39] розрахунок параметричного коливання у електричному контурі. Там розглядається простий електричний контур, утворений послідовно з'єднаними індуктивністю L , нелінійним активним опором r , значення якого у залежності від струму контуру i визначається за формулою

$$r = R_0(1 + \beta_0 i^2), \quad (4.74)$$

де R_0 і β_0 - постійні величини, i змінною ємністю C , значення якої є періодичною функцією часу і визначається за формулою

$$C = \frac{C_0}{1 + m \cos 2\omega t}, \quad (4.75)$$

де C_0 , m і ω - постійні величини.

Для розрахунку амплітуди коливань струму у цьому контурі (іншими словами – амплітуди змінного струму) у [39] використано метод повільно змінних амплітуд. Прийнято допущення, що внаслідок генерації параметричних коливань струм у контурі змінюється гармонічно із частотою ω згідно із виразом

$$i = I_c \cos \omega t + I_s \sin \omega t. \quad (4.76)$$

Враховуючи, що контур є коливною системою з малою дисипацією, нехтуючи у рівняннях, які описують контур, членами другого порядку малості і усереднюючи значення параметрів контуру на періоді коливань, у [39] отримано так звані укорочені рівняння, у яких під знаками похідних є амплітуди I_c і I_s . Із стаціонарного розв'язку цих рівнянь отримано вираз для амплітуди струму

$$I = \sqrt{\frac{4}{3\beta_0} \left(-1 + \frac{\omega L}{R_0} \sqrt{m^2/4 - \xi^2}\right)}, \quad (4.77)$$

де

$$\xi = 1 - \frac{1}{\omega^2 LC_0}. \quad (4.78)$$

У формулах (4.74) – (4.78) прийнято такі ж позначення, як і у параграфі 4.5 джерела [39].

Задавшись числовими значеннями $L = 0,025$ Гн; $R_0 = 0,09$ Ом; $\beta_0 = 0,1$ $1/A^2$; $C_0 = 0,004$ Ф; $m = 0,13$; $\omega = 100$ 1/с, за формулами (4.77) і (4.78) отримуємо $\xi = 0$ і $I = 3,277$ А.

Розв'яжемо цю ж задачу шляхом чисельного полігармонічного моделювання з використанням ПЗ ДГМ.

Рівняння, що описують розглядуваний електричний контур, у формі запису (1.64), мають вигляд

$$\frac{d\vec{y}}{dt} + \vec{z} - \vec{e} = 0, \quad (4.79)$$

де

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ u_c \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ u_c \end{pmatrix}; \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ri + u_c \\ -\frac{i}{u_c} \end{pmatrix}; \quad \vec{e} = 0; \quad (4.80)$$

u_c - напруга на конденсаторі;

$$\phi = Li \quad (4.81)$$

- поточкозчеплення індуктивного елемента схеми.

Похідні $d\vec{y}/d\vec{x}$ і $d\vec{z}/d\vec{x}$ є такими

$$\frac{d\vec{y}}{d\vec{x}} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{d\vec{z}}{d\vec{x}} = \begin{pmatrix} R_0(1 + 3\beta_0 i^2) & 1 \\ -\frac{1 + m \cos 2\eta}{C_0} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.82a,б)$$

Текст головної програми і процедури model із блоку програмних компонент користувача:

```
PROGRAM ParamOscil
!-----
! Програма розрахунку параметричних коливань
! у електричному контурі
! з періодично змінною ємністю і
! нелінійними активним опором і індуктивністю
!-----
      Implicit none
      real,dimension(22)::X
      real,dimension(20)::E
      integer,dimension(10)::KER
      real::OM,EPS1,EPS2,H1,HM
      real::R0,BET0,C0,AM,ST1,DST
      real,dimension(8)::PT
      real::CI1,CI2,CU1,CU2
      integer::K,NG,NK,NT,i
      Common/MP/R0,BET0,C0,AM,NT,ST1,DST,PT
!----- Common/MP/ передає дані процедурі Model
!-----
!--- введення даних із файлу
      Open(1,File='DaniV.dat',status='old')
      Read(1,1)OM,EPS1,EPS2,H1,HM
      Read(1,1)R0,BET0,C0,AM
!-----
!--- введення таблиці кривої намагнічування
      Read(1,2)NT
      Read(1,1)ST1,DST
      Read(1,1) (PT(i),i=1,NT)
!-----
      Read(1,2)KER
      Read(1,2)K
      Read(1,1)CI1,CI2,CU1,CU2
!----- CI1,CI2,CU1,CU2 - початкові значення
!----- амплітуд перших гармонік змінних
      1 Format(5E10.4)
      2 Format(10I3)
      Close(1)
!-----
      Open(1,FILE='RezV.DAT')
      Write(1,10)
      10 Format(/5X, 'Вхідні дані задачі:')
!--- запис до вихідного файлу вхідних даних
      Write(1,4)OM,EPS1,EPS2,H1,HM
      Write(1,4)R0,BET0,C0,AM
      Write(1,3)NT
      Write(1,4)ST1,DST
      Write(1,4) (PT(i),i=1,NT)
      Write(1,11)KER
      11 format(2X.'KER = ',10i5)
```

```

Write(1,12)K
12 format(2X,'K = ',i5)
Write(1,4)CI1,CI2,CU1,CU2
3 Format(1X,10I5)
4 Format(1X,5E11.4)
Write(1,20)
20 Format(/5X,'Р е з у л ь т а т и  :'/)
Call SizesV(KER(1),K,KER(8),NG,NK)
Write(1,3)NG,NK
X=0.; X(1)=CI1; X(2)=CI2;
X(NG+1)=CU1; X(NG+2)=CU2; X(NK+1)=OM
!----- задали початкове наближення вектора X
Call HARMOSC(K,X,E,NK,НМ,Н1,EPS1,EPS2,KER)
Close(1)
Stop
End Program ParamOscil
!-----

!-----
Subroutine Model(AL,M,K,MK,XC,YC,ZC,YXC,ZXC,ВМ)
!-----
! Підпрограма реалізує миттєву модель на півперіоді:
! для біжучого значення складеного вузлового вектора XC
! визначає значення складених вузлових векторів YC,ZC
! і матриць похідних YXC і ZXC
!--- AL - коеф.звуження петлі гістерезису (не використовується)
!--- M - кількість вузлів на півперіоді
!--- K - порядок системи диференційних рівнянь
!--- MK=M*K
!--- ВМ - матриця коефіцієнтів (не використовується)
!-----
Implicit none
real::AL
integer,intent(in)::M,K,MK
real,dimension(MK)::XC,YC,ZC
real,dimension(MK,K)::YXC,ZXC
real,dimension(K)::X,Y,Z
real,dimension(K,K)::YX,ZX,ВМ
integer::i,NT
real::R0,ВЕТ0,C0,AM,ST1,DST,LD,ET,AI
real,dimension(8)::PT
!-----
Common/MP/R0,ВЕТ0,C0,AM,NT,ST1,DST,PT
!-- через Common/MP/ передаються дані із головної програми
!-----
ВМ(1,1)=0.; AL=0.
Do i=1,M
call DRAWOUTV(K,XC,MK,X,i)
AI=i-1; ET=3.1416*AI/M !--- кутова координата вузла
call INTLIN(X(1),Y(1),LD,ST1,DST,PT,NT)
Y(2)=X(2)
Z(1)=R0*X(1)+R0*ВЕТ0*X(1)**3+X(2)
Z(2)=-X(1)*(1.+AM*cos(2.*ET))/C0

```

```

YX(1,1)=LD
YX(1,2)=0.
YX(2,1)=0.
YX(2,2)=1.
ZX(1,1)=R0+3.*R0*BET0*X(1)**2
ZX(1,2)=1.
ZX(2,1)=-(1.+AM*cos(2.*ET))/C0
ZX(2,2)=0.
call DRAWUPV(K,Y,YC,MK,i)
call DRAWUPV(K,Z,ZC,MK,i)
call DRAWUPM(K,YX,YXC,MK,i)
call DRAWUPM(K,ZX,ZXC,MK,i)
end do
Return
End subroutine Model

```

Хоч у цій задачі індуктивність L електричного контуру задана постійною, у головній програмі передбачено, що вона може бути й змінною - функцією струму, і передбачено задавати значення для змінних $ST1, DST, PT, NT$, що задають таблично криву намагнічування індуктивного елемента ($ST1$ – значення струму, при якому закінчується початкова лінійна частина кривої намагнічування; DST – крок таблиці; PT – таблиця, що задає значення поточкозчеплення у вузлах таблиці; NT – кількість вузлів таблиці), і тоді замість (4.81) маємо

$$\phi = \phi[i]. \quad (4.83)$$

Значення L у формулі (4.82а) обчислюється як

$$L = d\phi/di. \quad (4.84)$$

Для визначення значень ϕ і L у процедурі `MODEL` викликається для виконання процедура `INTLIN` із Блоку 4 ПЗ ДГМ (див. розділ 2.2.4.2), яка здійснює лінійну інтерполяцію із таблиці `PT`.

За описаною програмою виконані обчислення для випадку постійної індуктивності, крива намагнічування представлена як пряма лінія, тангенс кута нахилу якої дорівнює $L=0.025$ Гн, і ця пряма лінія представлена таблицею із трьох вузлів.

Результати розрахунку (враховується тільки перша гармоніка) є такими:

Вхідні дані задачі:

```

.1000E+03 .1000E-01 .3000E-02 .1000E+01 .1000E+01
.9000E-01 .1000E+00 .4000E-02 .1300E+00
3
.1000E+01 .5000E+00
.2500E-01 .3750E-01 .5000E-01
KER = 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0
K = 2
.1500E+01 -.1500E+01 .3000E+01 .4000E+01

```

Результати:

2 4

Номер найвищої гармоніки = 1

Початкове значення вектора амплітуд:

.1500E+01 -.1500E+01 .3000E+01 .4000E+01
.1000E+03 .0000E+00

Нев'язки для початкового значення в.а.:

-.5694E+00 .6944E-01 .6253E+00 .5063E+02
.0000E+00 .0000E+00

Уточнене значення кореня для $h=1.000$

(розв'язок одержано після 2-ої ітерації)

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:

$X1(c1) = .2317E+01$ $X1(s1) = -.2317E+01$ $X1(1) = .3277E+01$

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:

$X2(c1) = .5417E+01$ $X2(s1) = .6170E+01$ $X2(1) = .8211E+01$

Тут необхідно звернути увагу, що у вхідних даних 4-ому елементу масиву `KEE` надано значення 1, тим самим задано, що модельоване коливання є параметричним.

Наведені вище результати розрахунку показують, що одержане значення амплітуди 1-ої гармоніки струму контуру дорівнює 3.277 А, і це з точністю до третього знаку співпадає з результатами аналітичного розрахунку методом повільно змінних амплітуд з використанням укорочених диференціальних рівнянь. Це підтверджує теоретичну коректність застосування для розв'язання цієї задачі методу повільно змінних амплітуд із заміною диференціальних рівнянь, що описують процеси у контурі, укороченими рівняннями: результати розрахунку за укороченими рівняннями такі ж, як і чисельне розв'язання повних диференціальних рівнянь без їх спрощень і нехтувань окремими членами.

Повторивши ці ж розрахунки, але врахувавши крім 1-ої гармоніки ще й 3-ю, 5-у і 7-у гармоніки, отримано, що 3-я гармоніка струму складає 0,4 %, 5-а і 7-а гармоніки струму практично нульові. Практичну відсутність у часових залежностях змінних вищих гармонік пояснюється наступним. У цій задачі генерування вищих гармонік може здійснювати лише активний опір, бо він є нелінійним, але, враховуючи, що спад напруги на ньому при заданих вхідних даних є значно меншим від спадів напруг на ємності і індуктивності, то тому генеровані його нелінійністю вищі гармоніки струму і напруги є незначними.

Ускладнимо задачу. Нехай індуктивність теж є нелінійною і залежність поточкозчеплення від струму (крива намагнічування, подібно як на рис. 4.2) задана таблицею. Її початкова частина є лінійна, і вона визначає таку ж індуктивність (0.025 Гн), як і у розглянутому вище випадку. Після досягнення струмом контуру значення 1.0 А розпочинається нелінійна частина кривої намагнічування.

Результати розрахунку у цьому випадку при врахуванні гармонік до 7-ої включно є такими:

```

Вхідні дані задачі:
.1000E+03 .1000E-01 .3000E-02 .1000E+01 .1000E+01
.9000E-01 .1000E+00 .4000E-02 .1300E+00
8
.1000E+01 .2500E+00
.2500E-01 .2830E-01 .3120E-01 .3320E-01 .3450E-01
.3550E-01 .3620E-01 .3670E-01
1 0 0 1 0 0 0 7 0 0
2
.1500E+01 -.1500E+01 .3000E+01 .4000E+01
Р е з у л ь т а т и :
8 16
Номер найвищої гармоніки = 7
Початкове значення вектора амплітуд:
.1500E+01 -.1500E+01 .0000E+00 .0000E+00
.0000E+00 .0000E+00 .0000E+00 .0000E+00
.3000E+01 .4000E+01 .0000E+00 .0000E+00
.0000E+00 .0000E+00 .0000E+00 .0000E+00
.1000E+03 .0000E+00
Нев'язки для початкового значення в.а.:
.3870E+00 .1026E+01 .1067E+01 -.1098E+01
.1689E+00 .1690E+00 .1288E+00 -.1287E+00
.6253E+00 .5063E+02 -.2437E+02 .2438E+02
.9936E-03 .1982E-02 .1569E-02 .3033E-02
.0000E+00 .0000E+00

```

Уточнене значення 1 кореня для $h=1.000$
(розв'язок одержано після 2-ої ітерації):

```

Амплітуди гармонік 1-ої змінної:
X1(c1)= .4170E+00 X1(s1)= -.1150E+01 X1(1)= .1223E+01
X1(c3)= -.4553E-01 X1(s3)= .1917E-01 X1(3)= .4940E-01
X1(c5)= .3108E-01 X1(s5)= .6536E-02 X1(5)= .3176E-01
X1(c7)= -.7244E-02 X1(s7)= -.9633E-02 X1(7)= .1205E-01

```

```

Амплітуди гармонік 2-ої змінної:
X2(c1)= .2685E+01 X2(s1)= .1103E+01 X2(1)= .2902E+01
X2(c3)= .4596E-01 X2(s3)= -.1367E-01 X2(3)= .4795E-01
X2(c5)= -.3574E-02 X2(s5)= .1383E-01 X2(5)= .1428E-01
X2(c7)= .3293E-02 X2(s7)= -.1867E-02 X2(7)= .3785E-02

```

Як бачимо, результати розрахунку суттєво відрізняються від попереднього випадку, коли індуктивність є постійною: 1-а гармоніка струму = 1.223 А (відрізняється у 2.68 разів!). Помітні значення вищих гармонік: 3-я – 4%, 5-а – 2,6% і 7-а – 0,9%.

У цьому випадку максимальні значення струму контуру, а, отже, і амплітуда першої гармоніки струму суттєво обмежуються нелінійністю (насиченням) індуктивності.

Метод повільно змінних амплітуд для розв'язання цієї задачі з нелінійною індуктивністю, та ще й при заданні характеристики намагнічування таблично, уже не є придатним.

Післямова

Приклади чисельного моделювання нелінійних коливань, розглянуті у останній главі цієї книжки, є нескладними: з невеликою кількістю змінних координат (не більше трьох), з нелінійностями, що є функціями тільки однієї змінної тощо. Підбір простих прикладів був зумовлений намаганнями автора сконцентрувати увагу читача на способах використання пропонованого методу і його програмного забезпечення. Братися за моделювання нелінійних коливань у складніших системах доцільно тільки після ґрунтовного засвоєння самого методу і його програмного забезпечення.

Опрацювавши цю книжку, користувач уже в змозі взятися за такі складніші задачі. І тут предметом основної уваги має бути розробка миттєвої (на періоді чи півперіоді) моделі процесу системи при щонайдетальнішому врахуванні нелінійностей.

Викладеним у книжці методом було розв'язано багато задач на розрахунок періодичних процесів у таких складних об'єктах як електричні машини (синхронні, асинхронні, постійного струму) при врахуванні у них нелінійностей, зокрема – насичення магнітопроводу, наявності у колах їхніх обмоток напівпровідників і інших нелінійних елементів, при розгляді миттєвих моделей електричних машин як із позицій теорії електричних кіл, так і з позицій теорії електромагнітного поля [9, 11 – 19, 21 – 26]. І досвід, отриманий при розв'язанні цих задач, може бути використаний при розробці моделей нелінійних коливань у об'єктах іншої фізичної природи – механічних, акустичних, радіоелектронних тощо.

У цій книжці не розглянуті деякі додаткові можливості пропонованого методу, зокрема – врахування симетрії періодичних процесів (така симетрія є, наприклад, у симетричних багатофазних електричних колах), що дозволяє мінімізувати у задачі кількість невідомих векторів амплітуд. При необхідності читач може ознайомитися із такими можливостями у [15, 17, 20]. Це стосується і визначення періодичних розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних з періодизацією за часом і однією із просторових координат (розрахунок стаціонарного електромагнітного поля у масивних феромагнітних середовищах [19, 23, 25]).

Пропонований метод і його програмне забезпечення не накладають обмежень на розмірність задачі (кількість змінних) і кількість враховуваних гармонік, єдиним обмеженням тут є тільки продуктивність використовуваного комп'ютера – його швидкодія і об'єм пам'яті.

Разом з тим автор, пропагуючи свій метод, вважав би нерозумним протиставляти його іншим методам розрахунку (моделювання) нелінійних коливань. Це тільки альтернатива, яка має свою нішу у цій області. І найдоцільнішим часто є застосування не одного, а декількох методів у їх взаємодії. Так, зокрема, у декількох прикладах, наведених у главі 4, початкові наближення амплітуд гармонік коливань отримані аналітичними методами (гармонічної лінеаризації, повільно змінних амплітуд, асимптотичні Боголюбова-Митропольського, гармонічного балансу тощо).

Автор бажає читачеві, який прийняв рішення стати користувачем запропонованого методу і його програмного забезпечення, успіхів у розв'язанні різноманітних задач, як простих, так і складних, із області моделювання нелінійних коливань.

Список літератури

1. Андреев В.С. Теория нелинейных электрических цепей: учебное пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1982. – 280 с.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
3. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. – М.: Наука, 1985. – 235 с.
4. Бессонов Л.А. Нелинейные электрические цепи. – М.: Высш. школа, 1977. – 343 с.
5. Боголюбов Н.Н. Митропольский Ю.Л. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974, - 504 с.
6. Бондаренко В.М. Вопросы анализа нелинейных цепей. – К. : Наук. думка, 1967. - 159 с.
7. Божко А.Е., Голуб Н.М. Динамико-энергетические связи колебательных систем. – К: Наук. думка, 1980. – 188 с.
8. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И. , Фуфаев Н.Л. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. - 384 с.
9. Гавдьо І.Р., Глухівський Л.Й., Маляр В.С. Розрахунок усталених режимів і статичних характеристик асинхронних двигунів з екранованими полюсами диференціальним гармонічним методом // Вісник НУ "Львівська політехніка" № 449. Електроенергетичні і електромеханічні системи. – Львів: Вища школа, 2002. - с. 48 - 53
10. Гарасымив И.И., Мандзий Б.А., Фельштын О.И. Машинное моделирование электронных и электротехнических устройств. – Львів: Світ, 1991. – 133 с.
11. Глухівський Л.И. Расчет характеристик феррорезонансного контура дифференциальным гармоническим методом // Изв. вузов. Энергетика, 1979, № 11.
12. Глухівський Л.И. Основные положения дифференциального гармонического метода расчета периодических процессов в нелинейных цепях // Электричество, 1980, №11. – с. 17 – 22.
13. Глухівський Л.И. Дифференциальный гармонический метод расчета периодических процессов в цепях с вентилями // Изв. вузов. Электромеханика, 1980, № 1.
14. Глухівський Л.И. Расчет больших колебаний явнополюсной синхронной машины дифференциальным гармоническим методом // Техническая электродинамика, 1980, № 1.
15. Глухівський Л.И. Расчет периодического процесса в мостовой выпрямительной схеме дифференциальным гармоническим методом // Техническая электродинамика, 1980, № 2.
16. Глухівський Л.И. Определение асимптотической устойчивости периодических режимов нелинейных электрических цепей дифференциальным гармоническим методом. // Изв. вузов. Энергетика, 1981, № 1.
17. Глухівський Л.И. Расчет периодических процессов электротехнических устройств (дифференциальный гармонический метод). – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов ун-те, 1984. - 164 с.
18. Глухівський Л.И. Расчет дифференциальным гармоническим методом установившихся режимов явнополюсной синхронной машины с возбуждением от дополнительной обмотки статора // Техническая электродинамика, 1984, № 1.
19. Глухівський Л.И. Расчет стационарного электромагнитного поля в многослойных средах дифференциальным гармоническим методом // Теоретическая электротехника, вып. 40, 1986.
20. Глухівський Л.Й. Періодичні процеси у нелінійній електротехніці (диференціальний гармонічний метод і його програмне забезпечення). – Київ: Альфа Пік, 2005. – 159 с.
21. Глухівський Л.И., Биляковский И.Е. Численное моделирование тиристорных регуляторов напряжения дифференциальным гармоническим методом // Техническая электродинамика, 1986, № 4.
22. Глухівський Л.Й., Біляковський І.Є. Моделювання диференціальним гармонічним методом полігармонічних несиметричних режимів роботи асинхронних машин з урахуванням насичення // Праці н.-т. конференції, присвяченої 100-річчю від дня народж. проф. Т. Губенка. Електромеханіка, теорія і практика. – Львів: вид-во ДУЛП, 1996.

23. Глухивский Л.И., Костив А.П. Расчет магнитного поля асинхронной машины с массивным ротором. Львов: Вища школа, 1983. – 128 с.
24. Глухивский Л.И., Маляр В.С. Расчет установившегося асинхронного хода явнополюсной синхронной машины дифференциальным гармоническим методом // Изв. вузов. Энергетика, 1984, № 2.
25. Глухивский Л.И., Муzychка И.М., Фильц Р.В. Определение периодического во времени электромагнитного поля в проводящей ферромагнитной пластине дифференциальным гармоническим методом // Математические методы и физико-химические поля, вып. 20. – Киев: Наукова думка, 1984.
26. Глухівський Л. Алгоритм математичної моделі нелінійного гістерезисного індуктивного елемента у періодичному процесі // Теоретична електротехніка. – 2007. – Випуск 59. – С. 81 – 86.
27. Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л. Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем. – М.: Высш. школа, 1989. – 383 с.
28. Горбачев М.Н. Нахождение периодических решений в некоторых задачах теории электрических цепей // Электронное моделирование, 1999, т. 21. - № 3. – С. 26-35.
29. Закржевский М.В. Колебания существенно-нелинейных механических систем. – Рига: Зинатне, 1980. – 190 с.
30. Кузьмин П.А. Малые колебания и устойчивость движения. - М.: Наука, 1973.- 208 с.
31. Колев Л., Радев Н., Станчев К. Расчет периодических режимов в нелинейных электрических цепях // Электричество, 1986, № 6. – С. 69-71.
32. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. – М.: Наука, 1980. – 359 с.
33. Львов Е.Л. Гармонический баланс с учетом произвольного числа высших нечетных гармоник // Электричество, 1982, №2 - с. 32-37.
34. Маляр В.С., Маляр А.В. Математическое моделирование периодических режимов работы электротехнических устройств // Электронное моделирование, 2005, т. 27, № 3. - С. 39 - 53.
35. Маляр В.С. Розрахунок статичних характеристик періодичних процесів диференціальним сплайн-методом // Теоретична електротехніка, 2000. – Вип. 55. – С. 37-42.
36. Маляр В.С., Фильц Р.В. Метод расчета режимов насыщенной явнополюсной синхронной машины при больших колебаниях ротора. – Изв. вузов. Энергетика, 1978, №6. – С. 9 – 15.
37. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. – М: 1972.
38. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи. - М.: Высш. школа, 1977. 272 с.
39. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1978. – 392 с.
40. Митропольский Ю. А Нелинейная механика. Одночастотные колебания. – К.: Институт математики НАН Украины, 1997. — 384с.
41. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники, в 2-х т. – Л.: Энергоиздат, 1981. Т. 1 – 536 с., т. 2. – 415 с.
42. Неймарк Ю.П. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1972. – 471 с.
43. Немнюгин С.А., Стесик О.Л. Современный ФОРТРАН. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 496 с.
44. Ортега Д., Рейнболт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений с многими неизвестными. – М: Мир, 1975. – 558 с.
45. Пальтов И.П. Нелинейные методы исследования автоматических систем. – Л.: Энергия, 1976. – 128 с.
46. Пановко Я.П. Введение в теорию механических колебаний: учебное пособие. – М.: Наука, 1980. – 272 с.
47. Паранчук Р.Я., Синицкий Л.А. Дослідження ферорезонансу, субгармонічних і несиметричних режимів у нелінійних колах // Вісник Східноукраїнського нац. ун-ту ім. В. Даля. – 2003, № 6(64). – С. 146 – 152.

48. Перхач В.С. Математичні задачі електроенергетики. – Львів: Вид-во при Львів. держ ун-ті, 1989. – 464 с.
49. Петренко А.И., Гумен Н.Б., Смирнов А.М. Моделирование на ЭЦВМ периодических процессов в нелинейных цепях // Автоматизация проектирования в электронике, 1980, вып. 21. – С. 12 – 15.
50. Поляковский Ю.В., Сеницкий Л.А. О расчете периодических режимов в нелинейных автономных цепях на ЭЦВМ. – Теорет. электротехника, 1971, вып. 13, с. 71-75.
51. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
52. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування. – Київ: Либідь, 1997. – 544 с.
53. Пухов Г.Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. – К.: Наук. думка, 1967. – 568 с.
54. Пухов Г.Е. Математическое моделирование периодических процессов путем совместного применения дифференциальных Т-преобразований и тригонометрических рядов. – В кн.: Машинное моделирование электрических и электронных цепей. – К.: Наук. думка, 1981. – С. 3 – 20.
55. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – К.: Наук. думка, 1976. – 180 с.
56. Симоновський В. І. Коливання нелінійних систем: Навч. посіб. для студ. / Сумський держ. ун-т. — Суми : Вид-во СумДУ, 1999. — 130с.
57. Сеницкий Л.А., Шумков Ю.М. О поиске периодических режимов в нелинейных цепях численными методами // Теорет. электротехника, 1970, вып. 9, с. 110-115.
58. Сеницкий Л.А., Хвищун И.А., Шмигельский Я.А. О надежном алгоритме поиска периодического режима в нелинейных цепях. – Теорет. электротехн., 1981, вып. 30. - с. 114-125.
59. Сокіл Б. І. Нелінійні коливання механічних систем і аналітичні методи їх досліджень: Автореф. дис... д-ра техн. наук: 05.02.09 / Національний ун-т "Львівська політехніка".—Львів,2001. — 36с.
60. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – М.: Мир, 1953. – 256 с.
61. Тафт В.А. Об анализе установившихся периодических режимов в нелинейных системах со многими степенями свободы // Автоматика и телемеханика, 1959, №9. – С. 1163 – 1170.
62. Тондл А. Нелинейные колебания механических систем. – М.: Мир, 1973.
63. Фейгин М. И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. — М. : Наука, 1994. — 288с.
64. Фильц Р.В. Математические основы теории электромеханических преобразователей. – К.: Наук. думка, 1979. - 208 с.
65. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. - М.: Мир, 1968. – 432 с.
66. Хейл. Дж. Колебания в нелинейных системах. – М.: Мир, 1966. - 230 с.
67. Эйприлл Т., Трик Т. Анализ стационарного режима нелинейных цепей с периодическими входными сигналами. – В кн.: Автоматизация в проектировании. – М.: Мир, 1972. - с. 148 – 155.
68. Яворский Я.Я., Глухивский Л.И., Фильц Р.В. Математическое моделирование магнитного поля и периодических процессов в управляемом реакторе с вращающимся магнитным полем на основе дифференциального гармонического метода. // Электронное моделирование, 1983, № 6.
69. Hahn V. Fortran 90 for Scientists and Engineers. – Arnold, 1997. – 368 p.

Зміст

Передмова	3
Вступ	4
Глава 1. Математичні основи диференційного гармонічного методу	13
1.1 Гармонічна алгебризація диференційних рівнянь	13
1.2 Визначення періодичного розв'язку	18
1.3 Алгоритм розрахунку гармонічних характеристик	21
1.4 Алгоритм обчислення значень матриць диференційних гармонічних параметрів	26
1.5 Періодичні розв'язки нелінійних систем диференційних рівнянь	33
1.5.1 Форма запису нелінійної системи диференційних рівнянь	34
1.5.2 Гармонічна алгебризація векторного диференційного рівняння	36
1.5.3 Визначення періодичного розв'язку нелінійної системи диференційних рівнянь	39
1.5.4 Гармонічні характеристики і їх диференційні параметри	44
1.5.5 Алгоритми пошуку періодичного розв'язку	50
1.5.6 Дослідження стійкості нелінійних коливань	52
1.5.7 Якщо періодичних розв'язків є більше як один	55
Глава 2. Програмне забезпечення диференційного гармонічного методу	58
2.1 Структура програмного забезпечення	58
2.2 Програмні компоненти ПЗ ДГМ	60
2.2.1 Перший програмний блок	60
2.2.1.1 Модуль ARRAY	60
2.2.1.2 Процедура SNCS	61
2.2.1.3 Процедура VGVS	64
2.2.1.4 Процедура VSVG	65
2.2.1.5 Процедура VSVGPR	65
2.2.1.6 Процедура KVGVS	66
2.2.1.7 Процедура KVSVG	67
2.2.2 Другий програмний блок	68
2.2.2.1 Процедура OMA	68
2.2.2.2 Процедура OMV	69
2.2.2.3 Процедура OMAB	70
2.2.2.4 Процедура OMVB	71
2.2.2.5 Процедура GRPAR	72
2.2.2.6 Процедура GRMAT	74
2.2.3 Третій програмний блок	75
2.2.3.1 Процедура HARMOSC	75
2.2.3.2 Процедура CALCULU	85
2.2.3.3 Процедура IMPROVE	90
2.2.4 Четвертий програмний блок	93
2.2.4.1 Процедура SYS	94

2.2.4.2	Процедура для лінійної інтерполяції	95
Глава 3. Методика чисельного моделювання нелінійних коливань		97
3.1	Структура головної програми	97
3.2	Програмування миттєвої на періоді (півперіоді) моделі процесу	100
3.2.1	Види не лінійностей	101
3.2.1.1	Миттєва модель на періоді керованого вентиля	104
3.2.1.2	Миттєва на періоді модель не лінійності гістерезисного вигляду	108
3.2.2	Допоміжні процедури для спрощення розробки процедури MODEL	113
3.2.2.1	Процедура DRAWOUTV	113
3.2.2.2	Процедура DRAWOUTXV	114
3.2.2.3	Процедура DRAWUPV	114
3.2.2.4	Процедура DRAWUPM	115
3.2.2.5	Процедура ADDV	116
3.2.2.6	Процедура ADDM	117
3.2.3	Зразок процедури MODEL	118
3.3	Процедура OUTP	121
Глава 4. Тести і приклади		123
4.1	Тести і приклади розрахунків вимушених коливань	123
4.1.1	Приклад В.1	123
4.1.2	Приклад В.2	132
4.1.3	Приклад В.3	136
4.1.4	Приклад В.4	148
4.1.5	Приклад В.5	157
4.2	Тести і приклади розрахунків автоколивань	168
4.2.1	Приклад А.1	168
4.2.2	Приклад А.2	173
4.2.3	Приклад А.3	179
4.2.4	Приклад А.4	183
4.3	Приклад розрахунку параметричних коливань	191
Післямова		198
Список літератури		199

Науково-технічне і навчальне видання

Автор – Глухівський Лев Йосипович,
доктор техн. наук, професор

**Нелінійні коливання: чисельне
полігармонічне моделювання**

Підписано до друку 11.08.2008
Папір офсетний
Ум. друк. аркушів 10,2

Наклад 500 прим.
Формат 60 x 84 1/16
Гарнітура Arial Narrow

Видавництво ТОВ "Альфа ПіК", м. Київ, вул. Малопідвальна, 21/8
Свідоцтво про реєстрацію ДК 1806