

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

І.В. Стеценко

МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ

Черкаси



2010

УДК 004.94(075.8)
ББК 32.97я7
С 79

*Рекомендовано до друку
Вченою радою Черкаського державного
технологічного університету,
протокол № 4 від 25 січня 2010 року.*

Рецензенти:

Томашевський В.М., д.т.н., професор,
Тесля Ю.М., д.т.н., професор.

Стеценко, І.В. Моделювання систем: навч. посіб. [Електронний ресурс, текст] / І.В. Стеценко ; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2010. – 399 с.
ISBN 978-966-402-073-9

Розглядається теорія й практика аналітичного та імітаційного моделювання складних систем. Подано авторський огляд проблем моделювання, а також використано наукові результати зі створення систем імітаційного моделювання різного призначення.

Особливу увагу приділено розвитку практичних навичок з побудови та дослідження моделей систем. Наведено приклади розв'язання задач моделювання з використанням широкого спектру програмного забезпечення.

Для студентів вищих навчальних закладів, що навчаються за напрямом підготовки «Комп'ютерні науки», для аспірантів технічних та економічних спеціальностей, а також фахівців галузі інформаційних технологій.

УДК 004.94(075.8)
ББК 32.97я7

ЗМІСТ

Передмова	7
Розділ 1. ЗАДАЧІ, МЕТОДИ ТА ПРОЦЕС МОДЕЛЮВАННЯ	10
1.1. Поняття моделі.....	10
1.2. Способи побудови моделей.....	10
1.3. Класифікація моделей.....	11
1.4. Задачі моделювання.....	11
1.5. Методи моделювання.....	12
1.6. Процес моделювання.....	14
1.7. Системний підхід до побудови моделей.....	16
1.8. Приклади розв'язання задач.....	18
1.9. Завдання для самостійної роботи.....	20
1.10. Контрольні запитання.....	21
Розділ 2. МЕТОДИ ЗБОРУ ІНФОРМАЦІЇ ТА ДАНИХ ПРО СИСТЕМУ	22
2.1. Ідентифікація закону розподілу.....	22
2.2. Апроксимація функціональної залежності..	36
2.3. Приклади розв'язання задач.....	48
2.4. Завдання для самостійної роботи.....	58
2.5. Контрольні запитання.....	60
Розділ 3. ФОРМАЛІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ	61
3.1. Мережі масового обслуговування.....	62
3.2. Мережі масового обслуговування з блокуванням маршруту.....	65
3.3. Мережі Петрі з часовими затримками.....	66
3.4. Мережі Петрі з конфліктними переходами.....	74
3.5. Мережі Петрі з багатоканальними переходами.....	76
3.6. Мережі Петрі з інформаційними зв'язками.....	78
3.7. Приклади розв'язання задач.....	90
3.8. Завдання для самостійної роботи.....	104
3.9. Контрольні запитання.....	109

Розділ 4. АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ111

- 4.1. Аналітичне моделювання розімкнених мереж масового обслуговування.....111
- 4.2. Аналітичне моделювання замкнених мереж масового обслуговування.....115
- 4.3. Аналітичне дослідження властивостей мереж Петрі..... 121
- 4.4. Приклади розв'язання задач..... 133
- 4.5. Завдання для самостійної роботи..... 143
- 4.6. Контрольні запитання..... 147

Розділ 5. ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ..... 149

- 5.1. Генератори випадкових величин..... 149
- 5.2. Алгоритми імітації процесів функціонування дискретних систем..... 159
- 5.3. Імітаційне моделювання мережі масового обслуговування..... 175
- 5.4. Імітаційне моделювання мережі Петрі з часовими затримками..... 192
- 5.5. Імітаційне моделювання мережі Петрі з конфліктними переходами..... 195
- 5.6. Імітаційне моделювання мережі Петрі з багатоканальними переходами..... 197
- 5.7. Приклади розв'язання задач..... 298
- 5.8. Завдання для самостійної роботи..... 214
- 5.9. Контрольні запитання..... 218

Розділ 6. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ІМІТАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ..... 220

- 6.1. Планування та проведення факторних експериментів..... 220
- 6.2. Регресійний аналіз впливу факторів.....226
- 6.3. Дисперсійний аналіз впливу факторів..... 233
- 6.4. Приклади розв'язання задач..... 236
- 6.5. Завдання для самостійної роботи.....246
- 6.6. Контрольні запитання..... 249

**Розділ 7. МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ІМІТАЦІЙНИХ
МОДЕЛЕЙ.....250**

- 7.1. Пошук оптимальних значень за
Допомогою серії факторних експериментів... 250
- 7.2. Методи групового урахування аргументів... 252
- 7.3. Еволюційні методи пошуку оптимальних
значень..... 255
- 7.4. Завдання для самостійної роботи..... 259
- 7.5. Контрольні запитання.....259

**Розділ 8. ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ
ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ..... 260**

- 8.1. Мова імітаційного моделювання GPSS..... 262
- 8.2. Система імітаційного моделювання
PTRSIM..... 268
- 8.3. Пакет імітаційного моделювання Arena..... 273
- 8.4. Приклади розв'язання задач.....285
- 8.4. Завдання для самостійної роботи..... 301
- 8.5. Контрольні запитання.....312

Розділ 9. МЕТОДИ САМООРГАНІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ..... 313

- 9.1. Основні поняття теорії самоорганізації
моделей.....313
- 9.2. Алгоритми самоорганізації моделей..... 317
- 9.3. Однорядний алгоритм самоорганізації
моделей..... 318
- 9.4. Багаторядний алгоритм самоорганізації
моделей..... 332
- 9.5. Приклади розв'язання задач.....336
- 9.6. Завдання для самостійної роботи..... 342
- 9.7. Контрольні запитання.....343

**Розділ 10. ЗАВДАННЯ ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ.....344**

- 10.1. Лабораторна робота «Перевірка генератора випадкових чисел на відповідність закону розподілу»..... 344
- 10.2. Лабораторна робота «Ідентифікація об'єкта за даними спостережень».....345
- 10.3. Лабораторна робота «Дослідження мережі масового обслуговування аналітичними методами».....347
- 10.4. Лабораторна робота «Дослідження мережі МО імітаційними методами. Складання алгоритму імітації і його реалізація».....350
- 10.5. Лабораторна робота «Дослідження мережі Петрі імітаційними методами. Складання алгоритму імітації і його реалізація».....352
- 10.6. Лабораторна робота «Планування і проведення машинних експериментів з імітаційною моделлю системи»..... 353
- 10.7. Лабораторна робота «Відшукування моделі оптимальної складності методами самоорганізації моделей».....354

**Розділ 11. ЗАВДАННЯ ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТУ.....357**

- 11.1. Вказівки до виконання курсового проекту.....357
- 11.2. Рекомендований зміст пояснювальної записки курсового проекту.....357
- 11.3. Варіанти завдань до курсового проекту.....359

Розділ 12. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ.....391

- Література.....395**
- Предметний покажчик.....398**

ПЕРЕДМОВА

Моделювання є найбільш ефективним способом дослідження складних систем різного призначення, – технічних, економічних, екологічних, соціальних, інформаційних – як на етапі їх проектування, так і в процесі експлуатації. Можливості моделювання систем далеко не вичерпані, тому постійно з'являються найновіші методи та технології моделювання.

Створення моделі – кропіткий і творчий процес, що вимагає від дослідника не тільки глибоких теоретичних знань з різних математичних та технічних дисциплін, але й творчого підходу до розв'язання задач, уміння генерувати певні евристики, що відповідають глибинній суті досліджуваного об'єкта. Відомий науковець з імітаційного моделювання систем Роберт Шеннон навіть назвав свою книгу «Имитационное моделирование – искусство и наука».

Моделювання як спосіб пізнання використовувалось людиною з давніх часів. Але з появою комп'ютера моделювання систем збагатилось появою принципово нових методів моделювання таких, як імітаційне моделювання, еволюційне моделювання, методи групового урахування аргументів. Моделі і методи моделювання використовуються при створенні систем автоматизованого проектування, систем прийняття рішень, систем автоматизованого керування, систем штучного інтелекту. Потрібність у розв'язанні задач моделювання систем виникає не тільки у науковця, але й у проектувальника, виробника, ділової людини під час повсякденної праці.

Сучасні технології моделювання не тільки полегшили і прискорили процес побудови та дослідження моделі, але й значно наблизили сприйняття інформації спеціаліста з моделювання систем і спеціаліста, що працює у галузі, яка моделюється. Результати моделювання, які представлені засобами 3D анімації, допомагають знайти спільну мову і розуміння між спеціалістами з моделювання систем та спеціалістами, що працюють у галузі, яка моделюється.

Обмін досвідом серед науковців здійснюється засобами наукових конференцій, публікацій у наукових журналах, а також Internet-засобами. Існує товариство міжнародного комп'ютерного моделювання SCS (www.scs.org), що опікується вивченням, розповсюдженням, використанням й удосконаленням методів моделювання для цілей вирішення практичних проблем. Європейське товариство моделювання EUROSIM розміщує свою інформацію на порталі www.eurosim.info.

В Україні інформація з моделювання систем розповсюджується з порталу www.simulation.org.ua. Розробник порталу – доктор технічних на-

ук, професор Томашевський В.М. Щорічно за ініціативою Інституту проблем математичних машин і систем НАН України проводиться науково-практична конференція з міжнародною участю «Математичне та імітаційне моделювання систем МОДС».

Обсяг матеріалу, який охоплює вивчення дисципліни «Моделювання систем», великий. Для освоєння мистецтва моделювання систем потрібно володіти знаннями з вищої математики, теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії інженерного експерименту, системного аналізу і уміти програмувати. Досконале володіння універсальною мовою програмування, знання методів об'єктно-орієнтованого програмування необхідне для дослідника, що не тільки створює моделі систем, але й створює системи моделювання.

Даний підручник містить матеріал з аналітичного та імітаційного моделювання систем. Аналітичне моделювання охоплює моделювання систем засобами мереж масового обслуговування, моделювання методами самоорганізації моделей, а також дослідження властивостей систем, функціонування яких описано засобами мереж Петрі. Імітаційному моделюванню систем, як методу, що є найбільш практично застосовуваним для дослідження складних систем, присвячена найбільша частина матеріалу. Розглядаються алгоритми імітаційного моделювання систем, що базуються на представленні процесу функціонування системи засобами мереж масового обслуговування та засобами мереж Петрі.

Послідовність викладення матеріалу підпорядкована етапам процесу моделювання, основні з яких указуються усіма науковцями, що займаються проблемами моделювання. Насамперед, це системний аналіз об'єкта дослідження та формулювання цілі та задачі дослідження, визначення змінних та параметрів моделі. Наступний етап – формалізація моделі відомим засобами формального представлення. Деякі з систем можуть бути представлені засобами мереж масового обслуговування, інші – можуть бути представлені засобами сіток Петрі. Реалізація моделі – найбільш відповідальний етап моделювання системи. Дослідження моделі – найбільш цікавий і творчий етап моделювання. Побудувати модель – тільки частина справи дослідника, уміти отримати результати моделювання – найважливіша частина справи дослідника. Мистецтво дослідника полягає саме у тому, щоб здобути в процесі моделювання корисні, з огляду цілі моделювання, результати.

Перший розділ представляє огляд способів побудови моделей, задач та методів моделювання, і процесу моделювання. Особлива увага приділяється системному підходу до побудови моделей.

Другий розділ містить знання з методів, що призначені для збору даних та інформації про систему.

У розділі 3 розглядаються способи формалізації моделей засобами мереж масового обслуговування та засобами мереж Петрі. Для моделей, що отримані, можуть застосовуватись аналітичні або імітаційні методи моделювання в залежності від складності моделі. Аналітичне моделювання систем розглядається у розділі 4.

Наступні чотири розділи навчального підручника присвячені проблемам імітаційного моделювання. У розділі 5 розглядається імітаційне моделювання систем. Алгоритми імітації мереж масового обслуговування та мереж Петрі, що побудовані на основі універсальних мов програмування мають високу гнучкість. Наведені лістинги програм мовою Object Pascal, що демонструють процедурний та об'єктно-орієнтований підхід до побудови алгоритмів імітації. У розділах 6 та 7 розглядаються методи дослідження імітаційних моделей, у тому числі методи оптимізації. Восьмий розділ навчального підручника містить огляд програмного забезпечення імітаційного моделювання систем. Імітаційне моделювання засобами мови моделювання GPSS, пакету імітаційного моделювання Arena та системи імітаційного моделювання PRTSIM розглядається детально.

У дев'ятому розділі описуються методи самоорганізації моделей (МГУА), що використовуються для розв'язання задач прогнозування.

Кожний розділ містить теоретичну частину, приклади розв'язання задач, завдання для самостійної роботи, контрольні запитання.

Теоретична частина викладається з використанням великої кількості рисунків та лістингів програм. Розв'язання задач у прикладах наведено якнайбільш детально. Задачі розміщені в порядку зростання складності їх розв'язання, тому рекомендується не змінювати порядок їх розглядання. Самостійне розв'язання задач необхідне для надбання практичних навичок моделювання систем. Контрольні запитання даються для самоперевірки засвоєних теоретичних знань. Також вони допомагають структурувати вивчений матеріал. Алфавітний покажчик, що міститься у кінці підручника, складений для зручності читача.

Автор сподівається, що дана книга допоможе студенту, який є новачком у проблемах моделювання систем, опанувати цю складну, але цікаву науку. Оскільки в навчальному підручнику міститься не тільки огляд автором проблем моделювання, але й особистий погляд на науку моделювання, а також наукові результати автора зі створення систем імітаційного моделювання різного призначення, навчальний підручник представляє інтерес для викладачів дисципліни «Моделювання систем», для аспірантів технічних та економічних спеціальностей, а також спеціалістів у галузі інформаційних технологій. а також корисний для аспірантів та фахівців у галузі інформаційних технологій.

Розділ 1

ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ

1.1. Поняття моделі

Моделлю називається представлення об'єкта, системи чи поняття в деякій абстрактній формі, що є зручною для наукового дослідження.

В загальному випадку модель має структуру, зображену на рисунку 1.1. Тут X – множина вхідних змінних системи, Y – множина вихідних змінних системи, P – множина параметрів, F – функція, функціонал, алгоритм або формальне представлення залежності змінних Y від змінних X .

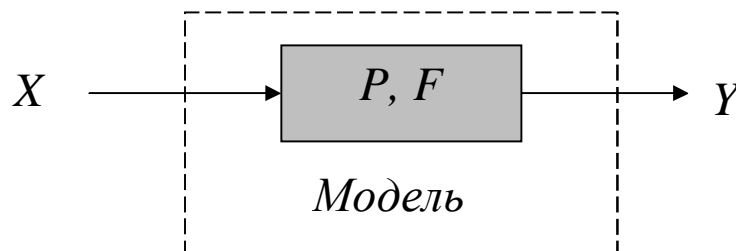


Рисунок 1.1. Загальна структура моделі

Наприклад, моделі масового обслуговування описуються набором вхідних змінних, що складається з інтенсивності вхідного потоку вимог на обслуговування, тривалості обслуговування вимоги кожним пристроєм, ймовірностей вибору маршруту. набір вихідних змінних моделі масового обслуговування складається з таких змінних як інтенсивність вихідного потоку вимог, середня довжина черги в місцях накопичення вимог та інших. У якості параметрів моделі масового обслуговування можуть розглядатись кількість пристроїв обслуговування, наявність черг у місцях накопичення вимог, наявність обмежень на кількість місць в чергах та інші. У якості алгоритму – алгоритм розрахунку вихідних змінних моделі за значенням вхідних змінних, який в залежності від складності моделі може мати вид простого розрахунку за математичними формулами або вид алгоритму імітації системи.

1.2. Способи побудови моделей

Існують два способи побудови моделей. При першому способі в результаті ретельного вивчення системи встановлюються закони функціонування системи, які потім відтворюються за допомогою моделі. Поведінку системи, таким чином, досліджують на моделі. Параметри моделі P в цьому випадку пов'язані з реальними процесами, що протікають в системі, і мають фізичну інтерпретацію. Тому моделі такого типу називають *фізичними* моделями.

При другому без усякого фізичного обґрунтування припускається вид залежності F , невідомі параметри якої P потім відшуковуються за даними спостережень за змінними системи X, Y . Параметри P в цьому випадку не зв'язані з фізикою реальних процесів, що протікають в системі, або, точніше, цей зв'язок досліднику залишається невідомим. Тому моделі такого типу називають *нефізичними* моделями.

В літературі зустрічаються також терміни моделей типу сірого та чорного ящика, які еквівалентні термінам фізичної та нефізичної моделі. Для фізичної моделі закони функціонування системи досліднику відомі, тому ящик є прозорим, сірим. Для нефізичної моделі сутність системи залишається для дослідника скритою, потаємною, тобто ящик є чорним.

1.3. Класифікація моделей

З точки зору вихідної змінної моделі поділяють на *статичні* – якщо вихідна змінна Y не змінюється з часом, та *динамічні* – якщо змінна Y змінюється з часом. Динамічні моделі поділяють на *неперервні* – якщо змінювання змінної Y є неперервним, та *дискретні* – якщо змінювання змінної Y трапляється в деякі особливі моменти часу, а в інші моменти часу залишається незмінним. Дискретні системи поділяють на *детерміновані* – якщо змінювання змінної Y в особливі моменти часу є цілком передбачуваними, та *стохастичні* – якщо змінювання змінної Y відомо з деякою ймовірністю.

З точки зору способу представлення залежності вихідних змінних моделі від вхідних її змінних розрізняють також алгебраїчні моделі, диференційні моделі, аналітичні моделі, імітаційні моделі і багато інших. Наприклад, диференційна модель описується системою диференційних рівнянь. Імітаційна модель описується алгоритмом імітації.

1.4. Задачі моделювання

Однакові об'єкти моделювання в залежності від цілі та задачі дослідження можуть мати різні моделі.

Серед задач моделювання виділимо такі задачі: задача моделювання, задача управління, задача ідентифікації, задача оптимізації, задача прогнозування.

Задача моделювання (або пряма задача) полягає у відшуканні значень вихідних змінних Y при відомих значеннях вхідних змінних X , відомій моделі F та визначених параметрах P (див. рис. 1.1).

Задача управління (або зворотна задача) полягає у відшуканні таких значень вхідних змінних X , що забезпечують задані значення вихідних змінних Y при відомій моделі F та фіксованих значеннях параметрів P .

У формулюванні *задачі ідентифікації* відомими являються множина вхідних змінних X , множина вихідних змінних Y та множина моделей F . Потрібно визначити єдину модель f з множини запропонованих моделей F , і визначити її параметри P , що забезпечують при вхідних значеннях X вихідні значення Y

У постановці *задачі оптимізації* відомими являються модель F , множина можливих вхідних значень X та критерій оптимізації K , а від дослідника вимагається знайти значення вхідних змінних X , значення параметрів P , та значення вихідних змінних Y , що задовольняють заданому критерію оптимізації K .

Задача прогнозування формулюється так, що при відомих для дослідника значеннях вхідних та вихідних значень моделі X_t, Y_t до моменту часу t та заданому часі прогнозування T потрібно визначити модель F та її параметри P , які забезпечують найліпший прогноз Y_{t+T} .

Стисло визначення методів моделювання представлені на рисунку 1.2.

З А Д А Ч І М О Д Е Л Ю В А Н Н Я

Моделювання:	відомі $X, P, F \Rightarrow$ знайти Y
Управління:	відомі $Y, P, F \Rightarrow$ знайти X
Ідентифікації:	відомі X, Y , множина $F \Rightarrow$ знайти $f \in F, P$
Оптимізації:	відомі F , критерій $K \Rightarrow$ знайти P, X, Y
Прогнозування:	відомі $X_t, Y_t, T \Rightarrow$ знайти F, P, Y_{t+T}

Рисунок 1.2. Задачі моделювання

У наступних розділах підручника містяться приклади розв'язання задач, що охоплюють усі види розглянутих задач.

1.5. Методи моделювання

Серед великої кількості методів моделювання, що існують, виділимо такі методи: аналітичне моделювання, математичне моделювання, імітаційне моделювання.

Моделювання аналітичне, якщо представлення залежності F вихідних змінних Y від вхідних її змінних X має аналітичний вигляд, тобто

представлений у вигляді відомих аналітичних функцій. Нагадаємо, що функція називається аналітичною, якщо вона розкладається у ряд Тейлора. Аналітичні функції диференційовані безліч разів і тому до них можуть застосовуватись методи математичного аналізу. Перевагою цього методу моделювання є можливість отримання залежності $Y=f(X)$ в явному вигляді і застосування до неї методів класичного математичного аналізу. Якщо є можливість побудувати аналітичну модель системи, то завжди віддають перевагу цьому методу моделювання.

Зауважимо, що відшукування залежності $Y=f(X)$ може виявитись настільки складним, що досліднику доведеться застосовувати спеціальне програмне забезпечення, а для деяких систем доводиться відмовлятися від пошуку абстрактної залежності $Y=f(X)$ і задовольнятися наближеним розв'язком, що знаходиться чисельними методами.

Деякі системи настільки складні, що не дивлячись на те, що опис їх функціонування піддається опису аналітичними функціями, знаходження залежності $Y=f(X)$ у явному вигляді виявляється неможливим. Наприклад, усі задачі математичного програмування мають досить простий аналітичний опис, але розв'язок задачі може бути знайдений тільки в результаті виконання певної кількості кроків. Іншими словами відомий алгоритм відшукування точного розв'язку задачі, але сам розв'язок не може бути записаний в аналітичній формі. Такий метод моделювання називають *математичним моделюванням*. Зауважимо, що алгоритм F відшукування точного розв'язку задачі може бути реалізований дослідником самостійно, за допомогою спеціального програмного забезпечення або за допомогою чисельних методів.

Існують системи, опис яких не піддається опису аналітичними функціями, але процес функціонування їх може бути описаний алгоритмом імітації. Під імітацією розуміють відтворення за допомогою комп'ютерної програми процесу функціонування складної системи в часі. У результаті багатократних прогонів імітаційної моделі дослідник отримує інформацію про властивості реальної системи. Такий метод моделювання називають *імітаційним моделюванням*.

Стисло визначення методів моделювання представлені на рисунку 1.3.

У навчальному підручнику розглядаються аналітичне та імітаційне моделювання систем.



Рисунок 1.3. Методи моделювання

1.6. Процес моделювання

Процес моделювання складається з кількох етапів. На першому етапі дослідник визначає мету та задачу моделювання. На другому етапі, виходячи з мети та задачі моделювання, дослідник приступає до вербального опису системи. Опис набору змінних моделі, разом із описом структури системи та формулюванням цілі та задачі дослідження складає концептуальну модель системи. Виходячи з концептуальної моделі системи та з огляду на вибір інструментальних засобів, дослідник робить вибір теоретичної бази, на основі якої буде побудована модель системи. У навчальному підручнику розглядаються формалізація систем засобами мереж масового обслуговування та засобами мереж Петрі. Отже, обравши теоретичну базу моделювання, дослідник має описати систему, що розглядається, обраними елементами формального опису і визначити для них усі необхідні параметри. Формальне представлення системи має вигляд схеми, в якій указані зв'язки між елементами системи та зв'язки із зовнішнім середовищем і указані параметри елементів системи. У формальній моделі міститиметься також інформація, яким чином будуть знайдені вихідні змінні моделі в результаті моделювання. Наприклад, якщо в якості теоретичної бази моделювання обрані засоби мереж масового обслуговування, то формаль-

на модель представляється зображенням мережі масового обслуговування, що складена за умовою задачі, з вказуванням числових значень вхідних змінних і параметрів, а також формули розрахунку вихідних змінних моделі, що являються ціллю моделювання.

На третьому етапі дослідник приступає до створення моделі. Спочатку виконується реалізація моделі за допомогою обраного програмного забезпечення. Потім виконується верифікація моделі, тобто перевірка алгоритму моделювання на відповідність задуму моделювання. Наприклад, змінюють значення вхідних змінних і спостерігають як модель реагує на таке змінювання. Якщо реакція моделі відповідає логіці її функціонування, то модель вважається правильною. Завершується створення моделі перевіркою адекватності моделі, що полягає у порівнянні значень вихідних змінних об'єкта, що моделюється, і моделі при однакових значеннях вхідних змінних. Очевидно, що таку перевірку можна здійснити тільки, якщо відомі деякі значення вхідних і вихідних змінних досліджуваного об'єкта.

Четвертий етап – це дослідження моделі. Результати моделювання стають корисними, якщо проведене змістовне дослідження моделі відповідно до цілі моделювання. Експерименти, що проводяться з моделлю, мають бути спочатку сплановані, потім – проведені, і наприкінці – статистично оброблені. Наприклад, якщо при дослідженні технологічного процесу обробки деталей була поставлена мета – виявлення місць накопичення деталей, то в результаті моделювання слід не тільки вказати ці місця накопичення та обсяги накопичення, але й дослідити, які фактори впливають на зменшення накопичення деталей, і запропонувати заходи щодо зменшення обсягів накопичення деталей.

Аналіз результатів моделювання складається з оцінки точності результатів моделювання, оцінки стійкості результатів моделювання та оцінки чутливості результатів моделювання.

Формування висновків та пропозицій є завершальний етап моделювання, на якому підводяться підсумки та висловлюються думки щодо напрямків подальшого дослідження об'єкта моделювання.

Звісно, що процес моделювання може бути представлений етапами тільки у звіті про результати моделювання. У ході моделювання досліднику доводиться неодноразово повертатись до попередніх етапів і уточнювати постановку задачі, формальний опис моделі, алгоритм реалізації або план проведення експериментів поступового наближення до мети.

На рисунку 1.4 представлений процес моделювання з урахуванням можливих повернень до попередніх етапів моделювання.

ПРОЦЕС МОДЕЛЮВАННЯ



Рисунок 1.4. Процес моделювання

1.6. Системний підхід до побудови моделей

Задачею системного аналізу являється формування опису системи, що відповідає меті дослідження системи [Тимченко, 2000]. Опис системи складається з опису:

- 1) набору вхідних змінних системи з указуванням їх основних характеристик;
- 2) набору вихідних змінних системи, визначення яких забезпечує досягнення цілі дослідження;
- 3) границь системи з указуванням того, що являється для системи її зовнішнім середовищем;

- 4) елементів системи з указування їх основних властивостей;
- 5) зв'язків між елементами системи.

Системний підхід до дослідження систем означає, що дослідник вивчає функціонування системи в цілому, не концентруючи свою увагу на окремих її частинах. Оснований системний підхід на визнанні факту, що навіть найліпше функціонування окремих підсистем та елементів системи не гарантує найліпшого функціонування всієї системи в цілому, оскільки завжди існує взаємодія між частинами системи. Всім системам притаманні характеристики, що являються перепорою на шляху до поліпшення функціонування системи [Шеннон]:

- змінюваність – жодна реальна система не являється статичною продовж тривалого проміжку часу, тому модель, що будується, має обмежений термін користування;
- наявність оточуючого середовища – в моделі має бути передбачений вплив зовнішнього середовища, який часто має випадковий характер;
- противоінтуїтивна поведінка – виникає як результат того, що інколи наслідок проявляється пізніше причини;
- тенденція до погіршення характеристик функціонування – окремі частини системи зношуються, в результаті чого погіршується їх робота, що в свою чергу призводить до не передбачуваних наслідків;
- взаємозалежність – усі частини системи залежать одна від одної, в наслідок чого погіршення характеристик функціонування однієї частини системи неминуче впливає на характеристики функціонування інших частин системи;
- організація – існує ієрархія підсистем, що підкоряється цільовому призначенню системи.

Будь-яка система об'єктивна і в той же час суб'єктивна з точки зору вибору границь системи та її елементів. Дійсно, одному й тому ж самому об'єктивному процесу дослідник може поставити у відповідність різні системи і тільки досвід дослідника, його інтуїція і здатність творчо мислити допомагає здійснити вибір між багатьма варіантами і виконати дослідження системи найліпшим способом.

Моделі, побудовані із застосуванням системного підходу, отримали назву *системних моделей*.

Опис системи разом із указуванням цілі та задачі дослідження складає сутність *концептуальної моделі* системи. Назва „концептуальна” походить від латинського слова *conceptio*, що означає „сприйняття”.

Умовно можна виділити такі етапи створення *концептуальної моделі* системи:

- Визначення цілі дослідження системи (орієнтація).

- Вибір рівня деталізації системи (стратифікація).
- Визначення елементів системи (деталізація)
- Визначення впливу зовнішнього середовища (локалізація).
- Визначення зв'язків між елементами системи та із зовнішнім середовищем (структуризація).

1.8. Приклади розв'язання задач

■ **Задача 1.** Запропонуйте множину вхідних змінних та множину вихідних змінних моделі, а також множину параметрів моделі, якщо досліджуваний об'єкт – технологічний процес обробки деталей.

Розв'язання. Функціонування технологічного процесу обробки деталей залежить, насамперед, від інтенсивності потоку деталей, що надходять на обробку. Структура технологічного процесу описується кількістю та послідовністю технологічних операцій, характеристиками обладнання, призначеного для виконання кожної операції технологічного процесу, кількість працівників, зайнятих у кожній операції. До характеристик обладнання відносяться такі величини, як тривалість виконання технологічної операції, кількість одночасно оброблюваних деталей, кількість пристроїв, що призначені для виконання технологічної операції. Складне обладнання, як правило, часто псується в процесі експлуатації, тому слід передбачити в моделі можливість виходу з ладу обладнання й описати процес виникнення та усунення несправностей обладнання.

Основним показником ефективності технологічного процесу є інтенсивність вихідного потоку деталей. Важливими показниками є також коефіцієнт завантаження обладнання, завантаження працівників, зайнятих у технологічному процесі. У деяких задачах розглядається проблема накопичення деталей, що на даний момент не можуть опрацьовуватись технологічним процесом.

Відповідь: Множина вхідних змінних технологічного процесу обробки деталей може складатись в залежності від цілі моделювання з таких змінних:

- інтенсивність надходження деталей на початок технологічного процесу,
- кількість операцій технологічного процесу,
- кількість та характеристики обладнання, призначеного для виконання кожної операції технологічного процесу,
- кількість працівників, зайнятих у кожній операції технологічного процесу;
- ймовірності виходу з ладу обладнання,
- тривалість виконання кожної операції технологічного процесу,
- кількість місць для зберігання деталей, що на даний момент не можуть опрацьовуватись технологічним процесом – для кожної операції технологічного процесу окремо.

Множина вихідних змінних технологічного процесу обробки деталей може складатись в залежності від цілі моделювання з таких змінних:

- Û інтенсивність вихідного потоку деталей на кінець технологічного процесу,
- Û завантаження обладнання,
- Û завантаження працівників,
- Û обсяги накопичення деталей у місцях зберігання.

У якості параметрів технологічного процесу обробки деталей в залежності від цілі моделювання можуть розглядатись:

- Û кількість операцій технологічного процесу,
- Û кількість обладнання, що забезпечує виконання технологічного процесу,
- Û кількість працівників, зайнятих у технологічному процесі;
- Û наявність місць для зберігання деталей, що на даний момент не можуть опрацьовуватись технологічним процесом .

■ **Задача 2.** Запропонуйте множину вхідних змінних та множину вихідних змінних моделі, а також множину параметрів моделі, якщо досліджуваний об'єкт – система управління транспортним рухом на перехресті.

Відповідь: Множина вхідних змінних системи управління транспортним рухом на перехресті може складатись в залежності від цілі моделювання з таких змінних:

- Û інтенсивність надходження автомобілів на ділянку транспортного руху,
- Û ймовірності вибору маршруту слідування автомобіля.

Множина вихідних змінних системи управління транспортним рухом на перехресті може складатись в залежності від цілі моделювання з таких змінних:

- Û обсяги накопичення автомобілів на кожному напрямку руху,
- Û середній час очікування автомобіля на кожному напрямку руху,
- Û максимальний час очікування автомобіля на перехресті.

У якості параметрів системи управління транспортним рухом в залежності від цілі моделювання можуть розглядатись:

- Û структура перехрестя (Т-образне перехрестя, Х-образне, кільце),
- Û кількість напрямків руху,
- Û кількість рядів руху для кожного напрямку руху,
- Û параметри управління транспортним рухом – наявність керування світлофорними об'єктами, наявність дорожних знаків,
- Û кількість світлофорних об'єктів та їх характеристики – кількість фаз управління та їх структура, тривалість горіння червоного, жовтого та зеленого світла у кожному напрямку на протязі кожної фази,
- Û параметри автомобілів, що надходять, – їх габарити, маршрути слідування, швидкість руху.

■ **Задача 3.** Поставте задачу моделювання для системи обслуговування клієнтів у банку з метою визначення кількості клієнтів, що перебувають у приміщенні банку.

Відповідь: Для відомих значень інтенсивності надходження клієнтів у банк, інтенсивності обслуговування клієнтів у касирів банку та у клерків в залежності від виду банківської операції, ймовірності звернення клієнта до касира або до клерка **знайти** середню та найбільшу кількість клієнтів у банку, що обслуговуються або очікують обслуговування, якщо відомі кількість касирів, кількість клерків, кількість різних банківських операцій та ймовірності їх затребування клієнтом банку, а також обслуговування клієнтів у банку.

■ **Задача 4.** Поставте задачу оптимізації для системи обслуговування клієнтів у банку з метою визначення найменшої кількості касирів та кількості клерків, що забезпечують обслуговування клієнтів за умови, що кількість клієнтів, які очікують обслуговування, не перевищує десяти.

Відповідь: Для відомих значень інтенсивності надходження клієнтів у банк, інтенсивності обслуговування клієнтів у касирів банку та у клерків в залежності від виду банківської операції, ймовірності звернення клієнта до касира або до клерка **визначити найменшу** кількість касирів, що забезпечує найбільшу кількість клієнтів у чергах меншу або рівну десяти, якщо відома процедура обслуговування клієнтів у банку.

■ **Задача 5.** Поставте задачу управління для системи транспортного руху на перехресті, керованому світлофорами, з метою забезпечення найменшого накопичення автомобілів на перехресті.

Відповідь: Для відомих значень інтенсивності надходження автомобілів у кожному напрямку руху, кількості рядів руху у кожному напрямку, інтенсивності від'їзду автомобілів з перехрестя при зеленому сигналі світлофора **визначити** тривалості горіння зеленого та червоного сигналу світлофору у кожному напрямку руху, що забезпечують **найменше** значення спостережуваної найбільшої кількості автомобілів, які очікують переїзду перехрестя, якщо відомі правила дорожнього руху на перехресті.

■ **Задача 6.** Поставте задачу прогнозування для системи маркетингу товару визначеного виду з метою оцінювання обсягів закупок товарів.

Відповідь: Для відомих спостережуваних значень змінювання попиту на товар визначеного виду протягом року, змінювання кількості реклами, збільшення кількості видів використовуваної реклами **прогнозувати** подальше змінювання попиту на товар.

1.9. Завдання для самостійної роботи

□ 1. Запропонуйте множину вхідних змінних та множину вихідних змінних моделі, а також множину параметрів моделі, якщо досліджуваний об'єкт – система постачання товарів маркету.

□ 2. Запропонуйте множину вхідних змінних та множину вихідних змінних моделі, а також множину параметрів моделі, якщо досліджуваний об'єкт – система передачі даних комп'ютерної мережі.

3. Запропонуйте множину вхідних змінних та множину вихідних змінних моделі, а також множину параметрів моделі, якщо досліджуваний об'єкт – система перевезення вантажів торгової фірми.

4. Запропонуйте множину вхідних змінних та множину вихідних змінних моделі, а також множину параметрів моделі, якщо досліджуваний об'єкт – система обслуговування клієнтів у банку.

5. Поставте задачу моделювання для виробничої системи.

6. Поставте задачу управління для технологічного процесу обробки деталей.

7. Поставте задачу прогнозування для системи обслуговування клієнтів у банку.

8. Поставте задачу оптимізації для системи перевезення вантажів торгової фірми.

1.10. Контрольні запитання

- 1) Що називається моделлю системи?
- 2) Які моделі Ви знаєте?
- 3) Які існують класифікації моделей?
- 4) Які існують способи побудови моделей?
- 5) Які моделі називають фізичними?
- 6) Які існують методи моделювання?
- 7) Що розуміють під терміном аналітичне моделювання? імітаційне моделювання? математичне моделювання?
- 8) Які переваги імітаційного моделювання систем?
- 9) Сформулюйте постановку задачі моделювання; задачі оптимізації; задачі ідентифікації; задачі управління; задачі прогнозування.
- 10) У чому полягає системний підхід до побудови моделі?
- 11) Які основні положення системного підходу?
- 12) Що розуміють під терміном «системна модель»?
- 13) З чого складається концептуальна модель системи?
- 14) Як створюється концептуальна модель системи?

Розділ 2

МЕТОДИ ЗБОРУ ІНФОРМАЦІЇ ТА ДАНИХ ПРО СИСТЕМУ

2.1. Ідентифікація закону розподілу

Найважливішою характеристикою випадкової величини являється її закон розподілу. Знання закону розподілу дозволяє із певною ймовірністю прогнозувати наступне значення випадкової величини, знаходити ймовірність влучення випадкової величини в заданий інтервал, а також моделювати випадкову величину за допомогою генераторів випадкових чисел. Випадкову величину можна замінити в моделі її середнім значенням тільки тоді, коли дослідник упевнений, що це не вплине на результати моделювання. Наприклад, у випадку, коли відхилення випадкової величини від середнього її значення в десятки разів менше за середнє значення, напевно, можна припустити, що випадкова величина є детермінованою із значенням, що дорівнює середньому значенню випадкової величини.

Послідовність дій, що виконують для ідентифікації закону розподілу наведена на рисунку 2.1.

Ідентифікація закону розподі- лу випадкової величини	Формування масиву значень випадкової величини
	Побудова гістограми частот
	Формування гіпотези про вид закону розподілу
	Оцінка значень параметрів закону розподілу
	Перевірка відповідності за критерієм згоди

Рисунок 2.1. Послідовність дій, що виконують для ідентифікації закону розподілу випадкової величини

Розглянемо детально кожну дію.

Формування масиву спостережуваних значень випадкової величини

Із попередніх спостережень за випадковою величиною або у ході експериментів отримують певну, бажано велику (більше сотні) кількість значень і запам'ятовують у файлі для проведення подальшого дослідження.

Побудова гістограми частот

Розглянемо, як будується гістограма частот. Спочатку, переглядаючи масив значень випадкової величини ζ знаходять найменше min та найбільше max спостережуване значення випадкової величини:

$$min = \min_i \{z_i\}, \quad max = \max_i \{z_i\}. \quad (2.1)$$

Далі, весь інтервал спостережуваних значень випадкової величини від мінімального до максимального значення поділяють на рівні інтервали так, що кожний інтервал має довжину

$$h = \frac{\max - \min}{k}, \quad (2.2)$$

де, k – кількість інтервалів.

Рекомендована кількість інтервалів k при великій кількості (більше 100) спостережуваних значень складає 20. Потім, переглядаючи масив випадкових значень, для кожного i -ого інтервалу підраховують кількість влучень випадкової величини в цей інтервал n_i . Гістограма частот представляється прямокутниками, що мають висоту рівну кількості влучень n_i та ширину рівну довжині інтервалу (рисунок 2.2).

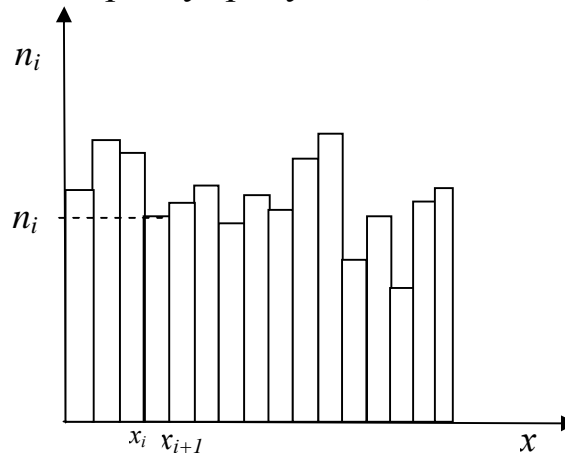


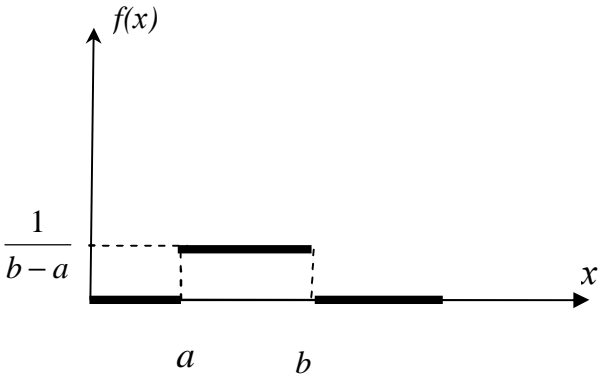
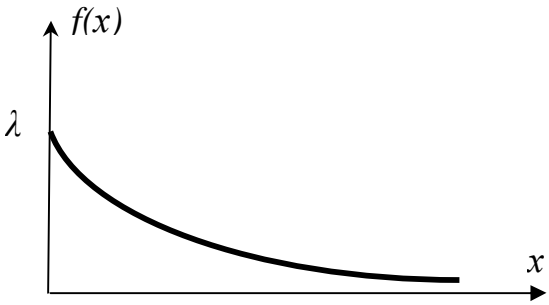
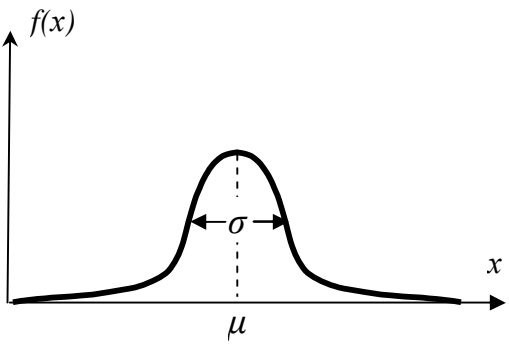
Рисунок 2.2. Гістограма частот

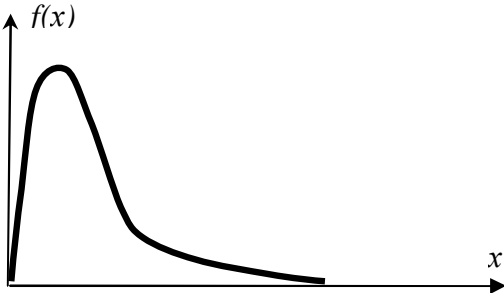
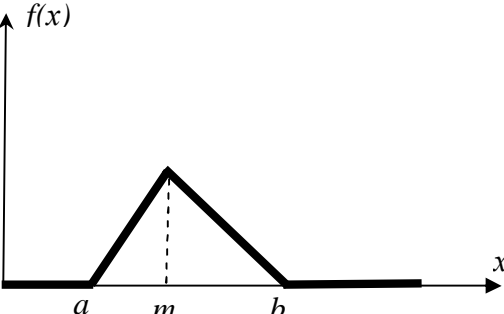
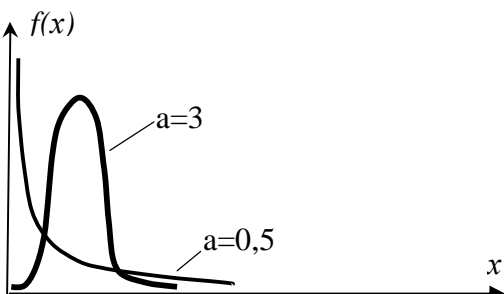
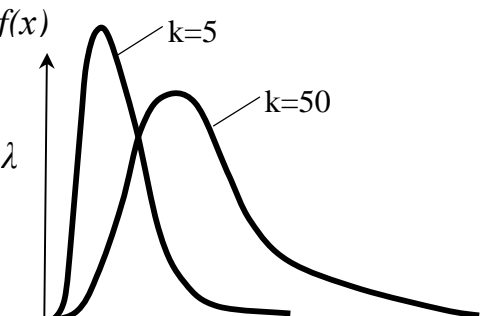
За видом гістограми частот роблять припущення про вид закону розподілу. Вид гістограми частот порівнюють з відомими законами розподілу випадкових величин. Для зручності наведемо найбільш вживані у цілях моделювання закони розподілу в таблиці (таблиця 2.1 та таблиця 2.2). Прийняті такі позначення: $f(x)$ – щільність закону розподілу випадкової величини ζ , μ – математичне сподівання випадкової величини ζ , σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини ζ . У таблицях крім графічного зображення закону розподілу наведений зв'язок середнього значення та середнього квадратичного відхилення випадкової величини із параметрами закону.

Оцінка значень параметрів закону розподілу

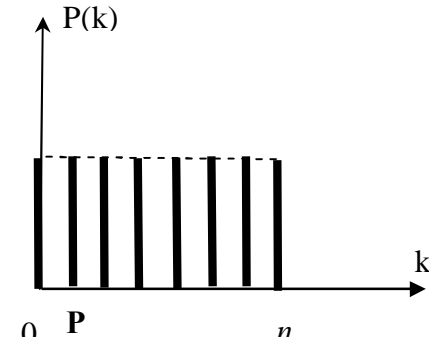
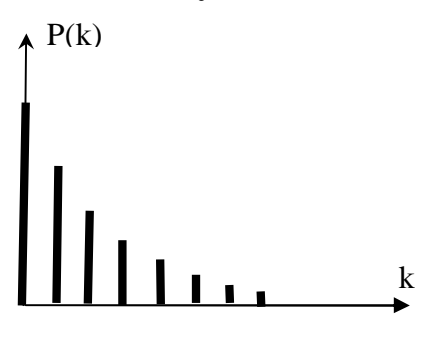
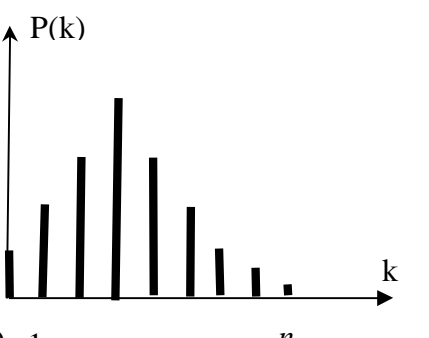
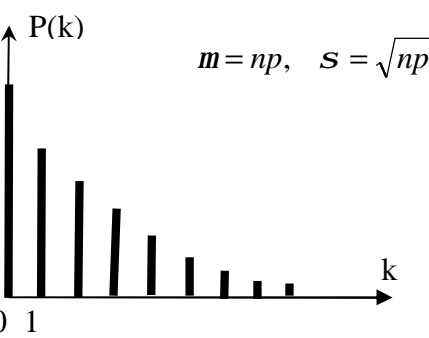
З формули закону розподілу, що наведена у таблицях 2.1 та 2.2, дослідник робить висновок про параметри закону розподілу, які потрібно визначити. Переважна більшість параметрів закону розподілу може бути оцінена на основі фундаментальних статистичних характеристик випадкової величини таких, як максимальне та мінімальне значення, середнє значення, середнє квадратичне відхилення.

Закони розподілу неперервних випадкових величин

Графічне представлення щільності закону розподілу	Формульне представлення щільності закону розподілу
<p style="text-align: center;">Рівномірний</p> 	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \leq a, x \geq b \end{cases}$ $m = \frac{a+b}{2}, \quad s = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
<p style="text-align: center;">Експоненціальний (показниковий)</p> 	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 0 \leq x < \infty \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ $m = \frac{1}{\lambda}, \quad s = \frac{1}{\lambda}$
<p style="text-align: center;">Нормальний (Гауса)</p> 	$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}, \quad -\infty \leq x \leq \infty$ $m = m, \quad s = s$

Графічне представлення щільності закону розподілу	Формульне представлення щільності закону розподілу
<p style="text-align: center;">Логнормальний</p> 	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{xb\sqrt{2p}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2b^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ $m = e^{\frac{a+b^2}{2}}$ $s = \sqrt{e^{2a+b^2}(e^{b^2} - 1)}$
<p style="text-align: center;">Трикутний</p> 	$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(m-a)(b-a)}, & a \leq x \leq m \\ \frac{2(b-x)}{(b-m)(b-a)}, & m \leq x \leq b \end{cases}$ $m = \frac{a+m+b}{3}$ $s = \frac{\sqrt{a(a-m) + b(b-a) + m(m-b)}}{3\sqrt{2}}$
<p style="text-align: center;">Вейбулла</p> 	$f(x) = \begin{cases} ab^{-a} x^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ $m = \frac{b}{a} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)$ $s = b \sqrt{\frac{1}{a} \left(2\Gamma\left(\frac{2}{a}\right) - \frac{1}{a} \left(\Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \right)^2 \right)}$
<p style="text-align: center;">Ерланга</p> 	$f(x) = \begin{cases} l e^{-lx}, & 0 \leq x \leq \infty \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ $m = k \cdot \frac{1}{l}, \quad s = \sqrt{k} \cdot \frac{1}{l}$

Закони розподілу дискретних випадкових величин

Графічне представлення закону розподілу	Формульне представлення закону розподілу
<p style="text-align: center;">Рівномірний</p>  <p>Графік показує рівномірний розподіл. Вертикальна ось позначена як P(k), горизонтальна — як k. Стовпчики однакової висоти розташовані на інтервалі від 0 до n. Підвішена лінійка показує рівність висот стовпчиків.</p>	$P(k) = \frac{1}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$ $m = \frac{n}{2}, \quad s = \frac{n}{2\sqrt{3}}$
<p style="text-align: center;">Пуассона</p>  <p>Графік показує розподіл Пуассона. Вертикальна ось позначена як P(k), горизонтальна — як k. Стовпчики зменшуються експоненціально з ростом k. Ось k позначена 0, 1, n.</p>	$P(k) = \frac{l^k}{k!} e^{-l}, \quad k = 0, 1, \dots, n$ $m = l, \quad s = \sqrt{l}$
<p style="text-align: center;">Біноміальний</p>  <p>Графік показує біноміальний розподіл. Вертикальна ось позначена як P(k), горизонтальна — як k. Стовпчики симетрично розподілені навколо центру, зменшуючись до країв. Ось k позначена 0, 1, n.</p>	$P(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$ $m = np, \quad s = \sqrt{np(1-p)}$
<p style="text-align: center;">Геометричний</p>  <p>Графік показує геометричний розподіл. Вертикальна ось позначена як P(k), горизонтальна — як k. Стовпчики зменшуються експоненціально з ростом k. Ось k позначена 0, 1. Поруч з графіком наведено формули для математичного сподівання та дисперсії: $m = np, \quad s = \sqrt{np(1-p)}$.</p>	$P(k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, \dots$ $m = (1-p)p, \quad s = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$

Нагадаємо формули оцінки середнього μ та дисперсії σ^2 випадкової величини ζ :

$$\tilde{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i, \quad (2.3)$$

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (V_i - m)^2 \quad (2.4)$$

де n – кількість генерованих випадкових чисел, а хвиляста лінія підкреслює, що розраховується статистична оцінка величини.

У випадку дискретного закону розподілу теоретичне значення частоти влучення випадкової величини ζ у значення i визначається значенням ймовірності $P(i)$. У випадку неперервного закону розподілу теоретичне значення частоти влучення випадкової величини ζ в i -й інтервал визначається за формулами:

$$p_i^T = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad (2.5)$$

де $f(x)$ – щільність закону розподілу випадкової величини ζ , $F(x)$ – закон розподілу випадкової величини ζ , (x_{i-1}, x_i) – інтервал.

Наприклад, у випадку експоненціального закону розподілу теоретичне значення частоти влучення в інтервал може бути визначене за формулою:

$$p_i^T = \int_{x_i}^{x_{i+1}} l e^{-lx} dx = (e^{-lx_i} - e^{-lx_{i+1}}), \quad (2.6)$$

де параметр λ має бути оцінений за формулою (див. табл.2.1):

$$l = \frac{1}{\tilde{m}} = \frac{1}{\tilde{s}}. \quad (2.7)$$

А у випадку закону розподілу Пуасона – за формулою:

$$p_i^T = \frac{l^i}{i!} e^{-l}. \quad (2.8)$$

де параметр λ оцінюється за формулою (див. табл.2.2):

$$l = \tilde{m} = \tilde{s}^2 \quad (2.9)$$

Перевірка відповідності досліджуваних випадкових чисел обраному закону розподілу.

Відповідність обраного закону розподілу заданим випадковим числам (при кількості спостережуваних чисел більше ста) перевіряється за критерієм згоди χ^2 [Гмурман]:

$$c^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i^T)^2}{np_i^T}, \quad (2.10)$$

де n_i – спостережувана кількість влучень в i -ий інтервал, np_i^T - очікувана за теоретичним законом розподілу кількість влучень в i -ий інтервал.

З формули (2.10) видно, що основною ідеєю критерію χ^2 є вимірювання розбіжності між спостережуваною та очікуваною за теоретичним законом розподілу кількістю влучень в i -ий інтервал (рис. 2.3).

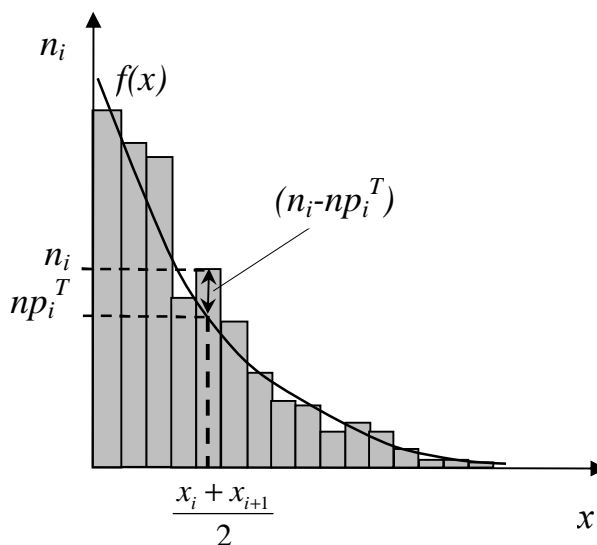


Рисунок 2.3. До пояснення змісту критерію χ^2

Розраховане значення χ^2 порівнюється з табличним значенням критерію $\chi_{кр}^2$, яке взяте при рівні значимості $\alpha=0,05$ та кількості степенів свободи, рівній кількості інтервалів у гістограмі частот k мінус 1 мінус кількість параметрів закону розподілу [Гмурман]. Якщо $\chi^2 < \chi_{кр}^2$, то з довірчою ймовірністю 0,95 можна стверджувати, що знайдений закон розподілу відповідає спостережуваним значенням випадкової величини ζ . Інакше потрібно змінити параметри розподілу або припустити інший закон розподілу.

Довірча ймовірність результату означає, що якщо, наприклад, за допомогою критерію ζ^2 з'ясували відповідність закону випадкових чисел закону розподілу, то гарантувати цю відповідність можемо не більше як з ймовірністю 0,95. З ймовірністю 0,05 могло статися, що спостережувані значення випадково виявилися відповідними закону розподілу. Довірча ймовірність означає також, що, якщо провести повторний експеримент із тою ж самою випадковою величиною, то з ймовірністю 0,95 результат ідентифікації закону розподілу співпаде із отриманим попереднім результатом.

Критерій χ^2 має такі обмеження для застосування: по-перше, кількість випадкових чисел повинна бути не менша за 100; по-друге, кількість влучень у кожний інтервал має бути більшою за 5:

$$n \geq 100, \quad n_i \geq 5, \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.11)$$

Якщо кількість влучень в якийсь інтервал менша за 5, то потрібно об'єднати сусідні інтервали і добитися, щоб кількість влучень стала більшою або рівною за 5. Допускається об'єднання як двох інтервалів, так і більше.

Якщо кількість досліджуваних чисел надто мала (менше ста), то потрібно застосовувати критерій Колмогорова-Смірнова (або як його ще називають I -критерій). За критерієм Колмогорова-Смірнова відповідність спостережуваних випадкових чисел обраному закону розподілу оцінюється за значенням найбільшої абсолютної різниці [Шеннон, Бронштейн]:

$$I = \sqrt{n} \cdot \max_i |w_i - w_i^T|,$$

$$w_i = \sum_{j=1}^i \frac{n_j}{n}, \quad w_i^T = F(x_i) \quad (2.12)$$

де w_i – спостережувані значення сумарної частоти влучень в i -ий інтервал, n_j – кількість влучень випадкової величини в j -ий інтервал, n – кількість спостережуваних випадкових чисел, w_i^T – теоретичні значення сумарної частоти влучень в i -ий інтервал, розраховані за законом розподілу $F(x)$ випадкової величини ζ , x_i – середина i -ого інтервалу.

З формули (2.12) слідує, що на відміну від χ^2 -критерія I -критерій порівнює сумарні частоти влучення в i -ий інтервал (рис. 2.4).

Розраховане значення I -критерію порівнюють з табличним значення критерію $I_{кр}=1,36$, яке взяте при рівні значимості $\alpha=0,05$ [Бронштейн]. Якщо $I < I_{кр}$, то з довірчою ймовірністю 0,95 можна стверджувати, що спостережувана випадкова величина ζ має закон розподілу $F(x)$.

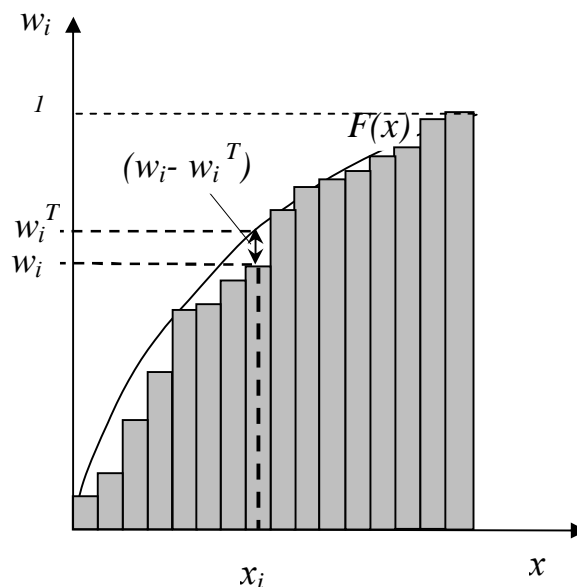


Рисунок 2.4. До пояснення змісту λ -критерію (Колмогорова-Смірнова)

В [Бронштейн] зауважується, що критерій Колмогорова-Смірнова вимагає, щоб оцінка параметрів розподілу виконувалась за даними, які не використовувались для розрахунку I -критерію.

Програмне забезпечення Mathcad має певні зручності для виконання експериментальних досліджень. Так, для побудови гістограми частот зручно використовувати вбудовану в Mathcad функцію $hist(interv, vect)$, параметрами якої є вектор числових значень $interv$, що задає кінці інтервалів гістограми частот, та вектор спостережуваних значень випадкової величини $vect$. Результатом функції $hist(interv, vect)$ є вектор, числові значення якого дорівнюють кількості влучень в інтервали гістограми частот.

Для побудови функції закону розподілу в програмному забезпеченні Mathcad передбачені функції:

$pnif(x, a, b)$, $dnif(x, a, b)$ – для рівномірного закону розподілу та його щільності;

$pnorm(x, \mu, \sigma)$, $dnorm(x, \mu, \sigma)$ – для нормального закону розподілу та його щільності;

$pexp(x, \lambda)$, $dexp(x, \lambda)$ – для експоненціального закону розподілу та його щільності;

$plnorm(x, \mu, \sigma)$, $dlnorm(x, \mu, \sigma)$ – для логнормального закону розподілу та його щільності;

$pweibull(x, s)$, $dweibull(x, s)$ – для закону розподілу Вейбула та його щільності;

$ppois(x, \lambda)$, $dpois(x, \lambda)$ – для закону розподілу Пуассона та його щільності;

$pbinom(x, p, c)$, $dbinom(p, c)$ – для біноміального закону розподілу та його щільності.

Значення критерію $\chi^2_{кр}$ забезпечується Mathcad-функцією $qchisq(0.95, m)$, де перший параметр – це довірча ймовірність результату, а другий параметр – кількість степенів свободи.

Реалізація ідентифікації закону розподілу засобами програмного забезпечення Mathcad 2000 Professional представлена на рисунках 2.5-2.10. На рисунках 2.5, 2.6, 2.7 представлений лістинг Mathcad-програми, що виконує ідентифікацію закону розподілу неперервної випадкової величини з використанням критерію χ^2 . Дані про спостережувані значення випадкової величини зчитуються з файлу даних формату *prn*. Зверніть увагу на функцію $grup(v, w)$, що виконує об'єднання сусідніх груп у разі, якщо спостережувана кількість влучень менша п'яти. Об'єднання груп здійснюється одночасно для спостережуваних та теоретичних значень кількості влучень, які передаються у функцію у якості аргументів. Результат перевірки відповідності за критерієм χ^2 виводиться за допомогою функції *if*.

На рисунках 2.8, 2.9, 2.10 представлений лістинг Mathcad-програми, що виконує ідентифікацію закону розподілу дискретної випадкової величини з використанням λ -критерію. Кількість інтервалів у випадку дискретної випадкової величини визначається кількістю значень, які вона приймає. Довжина інтервалу складає 1. Оскільки кількість спостережуваних значень випадкової величини мала, в даному випадку використовується

λ -критерій, в якому порівнюються сумарні частоти влучення в інтервали. Зауважимо, що використання λ -критерію не вимагає об'єднання груп. Табличне значення $I_{кр}$ при рівні значимості 0,05 однакове для різних законів розподілу і складає 1,36. Тому функція *if* формує результат, порівнюючи знайдене значення λ -критерію з 1,36.

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Зчитування спостережуваних значень випадкової величини $A := \text{READPRN}(\text{"randnorm.prn"})$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	9.379	8.76	10.81	9.876	11.15	12.27	9.893	10.69	11.05	8.681	8.523	8.978
1	10.61	7.882	9.466	9.682	11.44	8.908	9.977	9.075	10.98	9.149	9.509	9.388
2	9.515	9.591	9.146	10.06	11.55	10.43	9.75	9.378	10.2	10.94	10.8	11.13
3	9.198	12.05	11.58	9.771	12.55	10.86	9.527	11.22	9.848	10.59	9.836	11.01
4	9.153	9.432	7.652	10.34	7.988	9.273	9.32	10.39	9.869	8.402	10.63	10.34
5	9.461	9.694	10.68	9.578	11.32	10.34	9.869	9.554	10.43	11.62	10.82	10.48
6	10.89	10.97	10.31	9.968	10.81	8.61	8.326	9.521	10.99	9.469	9.691	11.89

Формування масиву спостережуваних значень випадкової величини

$j := 0.. \text{rows}(A) - 1$ $k := 0.. \text{cols}(A) - 1$

$\zeta_{j+k \cdot \text{rows}(A)} := A_{j,k}$

Кількість значень у масиві $n := \text{length}(\zeta)$ $n = 700$ $i := 0.. n - 1$

Кількість інтервалів у гістограмі $m := 20$ $j := 0.. m$

Довжина інтервалу $\Delta x := \frac{\max(\zeta) - \min(\zeta)}{m - 1}$ $\Delta x = 0.309$ $\max(\zeta) = 12.55$
 $\min(\zeta) = 6.679$

Поділ на інтервали $x_j := \min(\zeta) - \frac{\Delta x}{2} + j \cdot \Delta x$ $\text{length}(x) = 21$

$x^T =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	6.525	6.834	7.143	7.452	7.761	8.07	8.379	8.688	8.997	9.306

Кількість влучень в інтервал $h := \text{hist}(x, \zeta)$

$h^T =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
	0	1	2	2	5	10	17	27	43	54	84	93	84	78	75	51	28	26	12	6	2

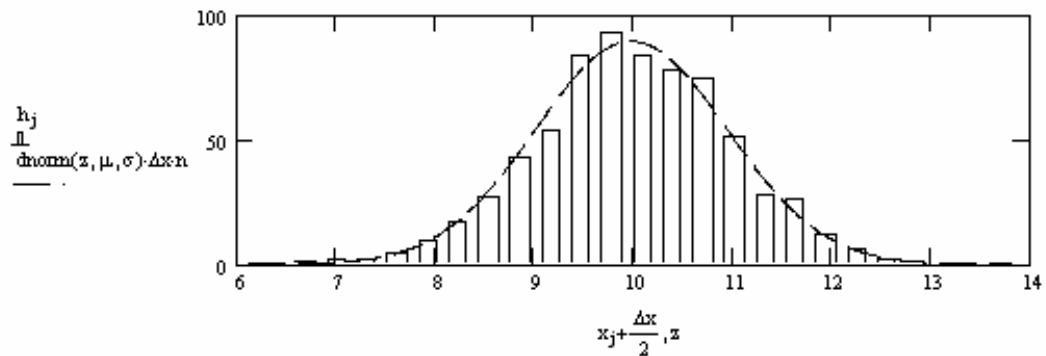
Оцінка середнього значення випадкової величини $\mu := \text{mean}(\zeta)$ $\mu = 9.971$

Оцінка середнього квадратичного відхилення $\sigma := \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \text{stdev}(\zeta)$ $\sigma = 0.966$

Рисунок 2.5. Лістинг Mathcad-програми: формування масиву значень та оцінювання параметрів закону розподілу)

Побудова гістограми частот

$$z := \mu - 4\sigma, \mu - 4\sigma + 0.01 .. \mu + 4\sigma$$



Розрахунок теоретично очікуваної кількості влучень

$$j := 0 .. m - 1$$

$$h_{\text{teor}_j} := (\text{pnorm}(x_{j+1}, \mu, \sigma) - \text{pnorm}(x_j, \mu, \sigma)) \cdot n$$

$$h_{\text{teor}}^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.28	0.786	1.99	4.552	9.41	17.572	29.648	45.193	62.24	77.444

Побудова функції, що виконує об'єднання сусідніх груп у разі, якщо кількість влучень менша п'яти

```

груп(v, w) :=
  j ← 0
  for i ∈ 0..length(v) - 1
    if vi ≥ 5
      aj ← vi
      bj ← wi
      j ← j + 1
    otherwise
      if i = length(v) - 1
        aj-1 ← aj-1 + vi
        bj-1 ← bj-1 + wi
      otherwise
        vi+1 ← vi + vi+1
        wi+1 ← wi + wi+1
  (
    a
    b
  )
  
```

Рисунок 2.6. Продовження лістингу Mathcad-програми: гістограма частот та об'єднання сусідніх груп

Групована спостережувана кількість влучень

$$H := \text{grup}(h, h_{\text{teor}})_0$$

$$H^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	5	5	10	17	27	43	54	84	93	84	78	75	51	28	26	12	8

Групована теоретична кількість влучень

$$H_{\text{teor}} := \text{grup}(h, h_{\text{teor}})_1$$

$$H_{\text{teor}}^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3.056	4.552	9.41	17.572	29.648	45.193	62.24	77.444	87.062	88.428

Розрахунок спостережуваного значення хі-квадрат

$$j := 0.. \text{length}(H) - 1 \quad \chi := \sum_j \frac{(H_j - H_{\text{teor}_j})^2}{H_{\text{teor}_j}} \quad \chi = 7.365$$

Табличне значення хі-квадрат при рівні значимості 0,05 $q\text{chisq}(0.95, m - 1 - 2) = 27.587$

Формування відповіді $\text{result} := \text{if}(\chi < q\text{chisq}(0.95, m - 3), \text{"YES"}, \text{"NO"})$

$\text{result} = \text{"YES"} \blacksquare$

Рисунок 2.7. Продовження лістингу Mathcad-програми: перевірка за критерієм χ^2 .

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Зчитування спостережуваних значень випадкової величини даних із файлу

$A := \text{READPRN}(\text{"DATAR.pm"})$

$$A^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	7	9	5	5	7	7	11	6	4	7	4	6	1	4	5	7	5	6	5	6

Формування масиву спостережуваних значень випадкової величини

$ns := \text{rows}(A) \quad ns = 48 \quad j := 0..ns - 1$
 $N := \text{cols}(A) \quad N = 1 \quad k := 0..N - 1$

$\zeta_{j+k \cdot ns} := A_{j,k}$

Кількість значень у масиві $n := \text{length}(\zeta) \quad n = 48 \quad i := 0..n - 1$

Визначення мінімального та максимального спостережуваних значень

$x_{\min} := \min(\zeta) \quad x_{\min} = 0$

$x_{\max} := \max(\zeta) \quad x_{\max} = 11$

Кількість інтервалів у гістограмі $m := 1 + x_{\max} - x_{\min} \quad m = 12 \quad j := 0..m$

Довжина інтервалу $\Delta x := 1$

Поділ на інтервали $x_j := x_{\min} - \frac{\Delta x}{2} + j \cdot \Delta x$

$$x^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5

Середини інтервалів $k := 0..m - 1 \quad x_{m_k} := x_k + \frac{\Delta x}{2}$

$$x_m^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Частота влучень в інтервали

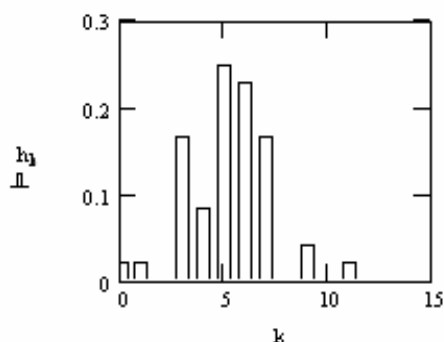
$h := \frac{\text{hist}(x, \zeta)}{n} \quad \sum_k h_k = 1$

$$h^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0.021	0.021	0	0.167	0.083	0.25	0.229	0.167	0	0.042	0	0.021

Рисунок 2.8. Лістинг Mathcad-програми: формування масиву значень та побудова гістограми частот

Формування гіпотези про закон розподілу



Сумарна частота влучень в інтервали

$$w_k := \sum_{j=0}^k h_j \quad w_{m-1} = 1$$

$$w^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
	0	0.021	0.042	0.042	0.208	0.292	0.542	0.771	0.937	0.937	0.979	0.979	1

Оцінювання параметрів закону розподілу:

середнього значення $\mu := \text{mean}(\zeta) \quad \mu = 5.25$

середнього квадратичного відхилення $\sigma := \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \text{stdev}(\zeta) \quad \sigma = 1.984$

максимального $c := x_{\max} \quad c = 11$

$p := \frac{\mu}{c} \quad p = 0.477$

Візуальне порівняння гістограми сумарних частот випадкових чисел з гіпотетичним законом розподілу

$$G(i) := \text{pbinom}(i, c, p)$$

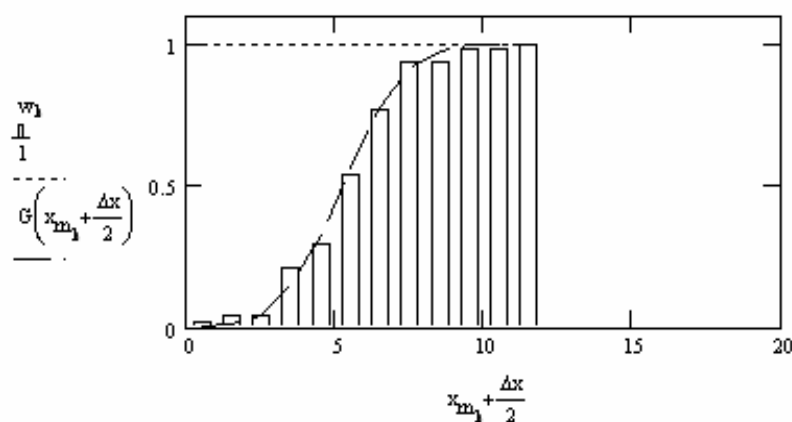


Рисунок 2.9. Продовження лістингу Mathcad-програми: формування гіпотези про закон розподілу та оцінювання параметрів закону розподілу

Перевірка гіпотези за критерієм λ

$$k := 0..m - 1$$

Спостережувана сумарна частота влучень в інтервали

$w^T =$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	0.021	0.042	0.042	0.208	0.292	0.542	0.771	0.937	0.937	0.979

+

Теоретична сумарна частота влучень в інтервали

$$w_{\text{teor}_k} := G\left(x_{m_k} + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$w_{\text{teor}}^T =$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	$2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-3}$	0.045	0.145	0.328	0.561	0.774	0.913	0.977	0.996

$$\text{delta}_w_k := |w_k - w_{\text{teor}_k}|$$

$\text{delta}_w^T =$		0	1	2	3	4	5	6
	0	0.02	0.033	$3.633 \cdot 10^{-3}$	0.063	0.036	0.02	$3.595 \cdot 10^{-3}$

$$\lambda := \max(\text{delta}_w) \cdot \sqrt{n} \quad \lambda = 0.437$$

Формування висновку щодо відповідності випадкової величини обраному закону розподілу

$$\text{result} := \text{if}(\lambda < 1.36, \text{"YES"}, \text{"NO"})$$

$$\text{result} = \text{"YES"}$$

Рисунок 2.10. Продовження лістингу Mathcad-програми: перевірка за λ -критерієм

2.2. Апроксимація функціональної залежності

Будь-який елемент системи описується залежністю множини вихідних його змінних від множини вхідних. У загальному випадку така залежність може бути представлена функціональною залежністю. Відновлення функціональної залежності змінних моделі за результатами спостережень називають *апроксимацією*. Заміна об'єкта, який є елементом системи, його функціональною залежністю є, певною мірою, спрощення. Причини, з яких дослідник змушений використовувати апроксимацію різні. Можливо, об'єкт надто складний, щоб представити його функціонування більш детально. Можливо, спрощене представлення об'єкта дозволить спростити загальну модель системи.

Сформулюємо задачу апроксимації. Розглядається об'єкт, що має одну вихідну змінну y та декілька вхідних змінних, представлених вектором $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Відомі дані спостережень про значення вхідної та вихідної змінної представлені таблицею, яка має вигляд таблиці 2.3:

Таблиця 2.3

Дані спостережень

Змінні	Спостереження			
	1	2	...	n
Вхідна змінна x_1	x_{11}	x_{21}	...	x_{n1}
Вхідна змінна x_2	x_{12}	x_{22}	...	x_{n2}
...				
Вхідна змінна x_m	x_{1m}	x_{2m}	...	x_{nm}
Вихідна змінна y	y_1	y_2	...	y_n

Задача апроксимації полягає у знаходженні функціональної залежності заданого виду, що найліпше відповідає даним спостережень з точки зору критерію найменших квадратів. Нехай y_i – спостережувані значення вихідної змінної, $y_i^f = f(x_i)$ – розраховані за функціональною залежністю $f(x_i)$ значення вихідної змінної. Ідея критерію найменших квадратів полягає у тому, що розбіжність між спостережуваними і розрахованими значеннями вихідної змінної повинна бути мінімальною. Якщо розбіжність вимірювати сумою різниць $(y_i - y_i^f)$, то може статися так, що навіть при великих, але різних за знаком, різницях загальна розбіжність має мале значення. Тому розбіжність вимірюють сумою квадратів різниць $(y_i - y_i^f)^2$. Отже, критерій найменших квадратів має вид:

$$F = \sum_i (y_i^f - y_i)^2 = \sum_i (f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (2.13)$$

де мінімум у загальному випадку розглядається по відношенню до різних пропонуванних функцій $f(x_i)$.

Графічне представлення змісту критерію найменших квадратів наведено на рисунку 2.11. У випадку багатьох змінних неможливо представити графічно функціональну залежність $y=f(x)$, тому на графіку розглядається тільки залежність $y=y(i)$, де i – номер спостереження.

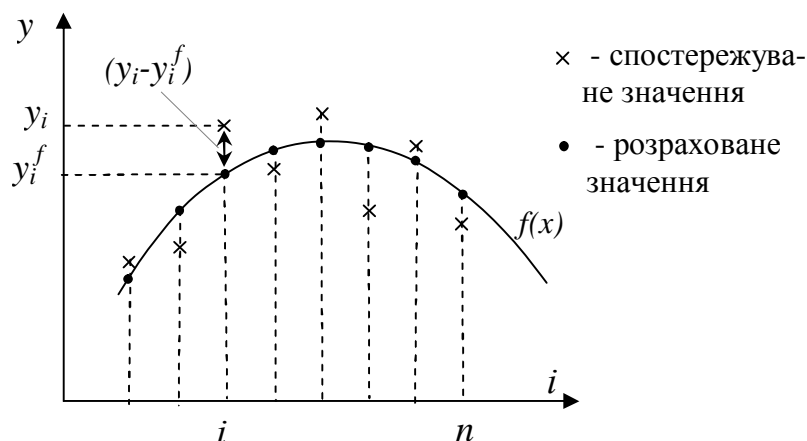


Рисунок 2.11. До пояснення змісту критерію найменших квадратів

Апроксимацію функціональної залежності виконують у такий спосіб:

- 1) формують масив спостережуваних значень;
- 2) формують припущення про вид математичної функції $f(x, b)$, де b – параметри функціональної залежності;
- 3) відшуковують значення параметрів функціональної залежності b за критерієм найменших квадратів;
- 4) оцінюють якість знайденої функціональної залежності методами багатofакторного кореляційно-регресійного аналізу.

Послідовність дій, що виконують для апроксимації функціональної залежності, представлена на рисунку 2.12.

Апроксимація функціональної залежності	Формування масиву спостережуваних значень
	Формування гіпотези про вид функціональної залежності
	Оцінка значень параметрів функціональної залежності
	Кореляційно-регресійний аналіз функціональної залежності

Рисунок 2.12. Послідовність дій, що виконують для апроксимації функціональної залежності

Формування масиву спостережуваних значень

На відміну від функції однієї змінної, задача апроксимації функції багатьох змінних має розв’язок тільки за умови, що змінні x_1, x_2, \dots, x_m не залежать одна від одної. Дійсно, якщо, наприклад, $x_1 = g(x_2)$, то змінна x_1 має бути викреслена зі списку змінних. Якщо дослідник помилково включить залежну змінну у список змінних, параметри функціональної залежності не можуть бути знайдені.

Формування гіпотези про вид функціональної залежності

Застосування методу найменших квадратів вимагає, щоб функціональна залежність, яка знаходиться, мала лінійний відносно параметрів b вид:

$$f(x,b) = b_0 + b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \dots + b_k f_k(x) \quad (2.14)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – вектор змінних.

Наприклад, $f(x,b) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 \cos x_3 + b_4 \sin x_3$ – лінійна залежність відносно параметрів b , $f(x,b) = b_0 + b_1 x_1 + b_3 \cos(b_4 \cdot x_2) + x_3^{b_5}$ – нелінійна залежність.

Припущення про вид функцій $f_i(x)$ дослідник має зробити, ґрунтуючись на своїх знання та досвіді. Параметри b функціональної залежності $f(x,b)$ вибираються так, що забезпечити мінімум критерію найменших квадратів:

Оцінка значень параметрів функціональної залежності

Значення критерію найменших квадратів визначається за формулою:

$$F(b) = \sum_{i=0}^n (f(x_i, b) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^n (b_0 + b_1 f_1(x_i) + \dots + b_k f_k(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min, \quad (2.15)$$

де $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$, y_i – дані досліджень про об'єкт.

Необхідною умовою екстремуму функції багатьох змінних є рівність нулю частинних похідних:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial b_0} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F}{\partial b_k} = 0 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Візьмемо похідні в (2.16) і отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^n 2(b_0 + b_1 f_1(x_i) + \dots + b_k f_k(x_i) - y_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^n 2(b_0 + b_1 f_1(x_i) + \dots + b_k f_k(x_i) - y_i) f_1(x_i) = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=0}^n 2(b_0 + b_1 f_1(x_i) + \dots + b_k f_k(x_i) - y_i) f_k(x_i) = 0 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Зробивши елементарні перетворення, отримаємо систему лінійних рівнянь для відшукування b :

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_{i=0}^n f_1(x_i) \dots + b_k \sum_{i=0}^n f_k(x_i) = \sum_{i=0}^n y_i \\ b_0 \sum_{i=0}^n f_1(x_i) + b_1 \sum_{i=0}^n f_1(x_i)^2 \dots + b_k \sum_{i=0}^n f_k(x_i) f_1(x_i) = \sum_{i=0}^n y_i f_1(x_i) \\ \dots \\ b_0 \sum_{i=0}^n f_k(x_i) + b_1 \sum_{i=0}^n f_1(x_i) f_k(x_i) \dots + b_k \sum_{i=0}^n f_k(x_i)^2 = \sum_{i=0}^n y_i f_k(x_i) \end{cases} \quad (2.18)$$

Система (2.18) називається *системою нормальних рівнянь*. З (2.18) невідомі b знаходяться, наприклад, методом Гауса.

При розрахунках на комп'ютері для розв'язання системи (2.18) зручно використовувати матричну форму запису рівнянь. Якщо підставити дані $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ та y_i $i=1, \dots, n$ у (2.5), то утвориться n рівнянь, які називаються *системою умовних рівнянь*:

$$\begin{cases} y_1 = b_0 + b_1 f_1(x_1) + \dots + b_k f_k(x_1) \\ y_2 = b_0 + b_1 f_1(x_2) + \dots + b_k f_k(x_2) \\ \dots \\ y_n = b_0 + b_1 f_1(x_n) + \dots + b_k f_k(x_n) \end{cases} \quad (2.19)$$

Утворимо матрицю X зі стовпчиків $1, f_1(x_i), f_2(x_i) \dots f_k(x_i)$ у відповідності до доданків функціональної залежності (2.14). Тоді *система умовних рівнянь* приймає вид:

$$X \cdot b = y. \quad (2.20)$$

$$\text{де } X = \begin{pmatrix} 1 & f_1(x_1) & \dots & f_k(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & & f_k(x_2) \\ \dots & & & \\ 1 & f_1(x_n) & & f_k(x_n) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Неважко упевнитись, що уможливив зліва обидві частини рівняння (2.11) на X^T , отримаємо систему нормальних рівнянь (2.18), записану в матричному виді:

$$X^T \cdot X \cdot b = X^T y. \quad (2.21)$$

Матриця $X^T \cdot X$ є симетрична квадратна матриця. Тому завжди існує розв'язок системи (2.21):

$$b = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T y. \quad (2.22)$$

Кореляційно-регресійний аналіз функціональної залежності

При малому обсязі даних виникає необхідність перевірки отриманої функціональної залежності. Для цього використовують методи багатofакторного *кореляційно-регресійного аналізу*.

Оцінку практичної значущості отриманої функціональної залежності проводять за допомогою *індексу кореляції*, який характеризує щільність зв'язку:

$$R = \sqrt{\frac{s_{\text{факт}}^2}{s_{\text{заг}}^2}}, \quad (2.23)$$

де $s_{\text{факт}}^2 = \frac{\sum (f(x_i, b) - \bar{y})^2}{n-1}$ - факторна дисперсія результативної ознаки y ,
 $s_{\text{заг}}^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$ - його загальна дисперсія.

Для розрахунку індекса кореляції можна скористатись також формулою у матричному вигляді [Общая теория статистики]:

$$R = \sqrt{\frac{b(X^T y) - n\bar{y}^2}{y^T y - n\bar{y}^2}} \quad (2.24)$$

Індекс детермінації R^2 характеризує, яка частина загальної варіації результативної ознаки y пояснюється фактором x . Якщо більше половини загальної варіації результативної ознаки y пояснюється впливом фактора x , то застосування методів функціонального аналізу для вивчення кореляційного зв'язку являються виправданими, а синтезовані при цьому аналітичні моделі визнаються придатними для їх практичного застосування. Звідси, функціональна залежність практично значима, якщо $R^2 > 0,5$ або $R > 0,7$. Якісну оцінку щільності зв'язку проводять традиційно за *шкалою Чеддока* (табл 2.4):

Таблиця 2.4

Якісна оцінка щільності зв'язку за шкалою Чеддока

Інтервал, якому належить значення індексу кореляції	Якісна оцінка щільності зв'язку
0,1÷0,3	слабкий зв'язок
0,3÷0,5	помірний зв'язок
0,5÷0,7	помітний зв'язок
0,7÷0,9	сильний зв'язок
0,9÷0,99	дуже сильний зв'язок

Оцінку істотності індекса кореляції проводять за критерієм Фішера:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k-1}{k}, \quad (2.25)$$

Знайдене значення критерію порівнюють із критичним значенням критерію Фішера, який знаходиться із статистичних таблиць при рівні значимості 0,05, кількості ступенів вільності чисельника k та кількості ступенів вільності знаменника $n-k-1$. Якщо $F > F_{кр}$, то значення індексу кореляції визнається істотним.

Критичне значення критерію Фішера можна знайти, скориставшись вбудованою в програмне забезпечення Mathcad-функцією qF :

$$F_{кр} = qF(0.95, k, n-k-1). \quad (2.26)$$

Оцінку статистичної значимості коефіцієнтів регресії проводять за критерієм Ст'юдента у такий спосіб. Спочатку розраховують діагональні елементи матриці $(X^T \cdot X)^{-1}$:

$$d_j = \left((X^T X)^{-1} \right)_{jj}, j = 0, 1, \dots, k. \quad (2.27)$$

Потім знаходять дисперсію $s^2 = \frac{\sum (f(x_i, b) - y_i)^2}{n-k-1}$. Спостережуване значення критерію Ст'юдента знаходиться окремо для кожного параметру b_j за формулою:

$$t_j = \frac{|b_j|}{\sqrt{d_j \cdot s^2}}. \quad (2.28)$$

Критичне значення критерію Ст'юдента знаходять із статистичних таблиць при рівні значимості 0,05 та кількості ступенів вільності $n-k-1$. Якщо $t_j > t_{кр}$, знайденого з таблиць критерію Ст'юдента при рівні значимості $\alpha=0,05$ та кількості ступенів вільності $n-2$, то коефіцієнт b_j визнається значимим. Критичне значення критерію Ст'юдента можна знайти, скориставшись функцією qt програмного забезпечення Mathcad:

$$t_{кр} = qt(0.95, n-k-1). \quad (2.29)$$

Довірчий інтервал для коефіцієнту b_j визначається за формулою:

$$b_j \pm t_{кр} \sqrt{d_j s^2} \quad (2.30)$$

Знання довірчого інтервалу надає досліднику можливість оцінити величину похибки отриманого значення параметру.

Реалізація методу найменших квадратів засобами програмного забезпечення представлена на рисунках 2.13-2.16.

Апроксимація функціональної залежності за методом найменших квадратів. Багатофакторний кореляційно-регресійний аналіз

Формування масиву спостережуваних значень

```
Data := READPRN("bookApp.prn")
```

```
j := 0..cols(Data) - 2
```

```
X (j) := Data (j)
```

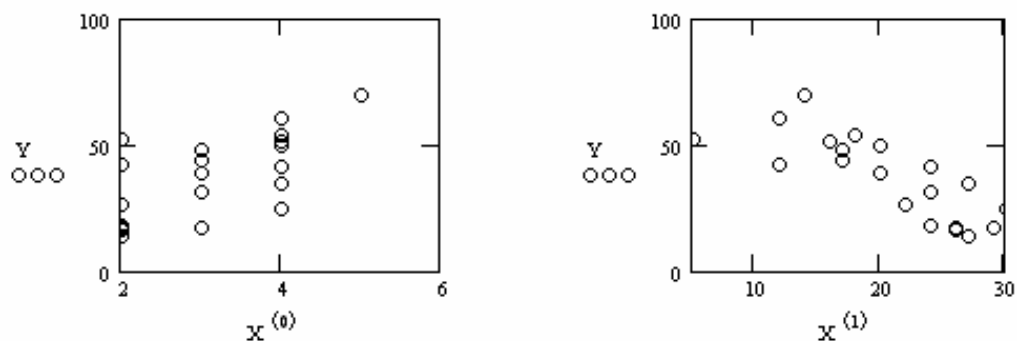
```
Y := Data (cols(Data)-1)
```

$X^{(0)}$	=	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>7</td><td>3</td></tr><tr><td>8</td><td>2</td></tr><tr><td>9</td><td>2</td></tr><tr><td>10</td><td>5</td></tr><tr><td>11</td><td>2</td></tr><tr><td>12</td><td>2</td></tr><tr><td>13</td><td>4</td></tr><tr><td>14</td><td>4</td></tr><tr><td>15</td><td>2</td></tr></table>		0	0	2	1	3	2	4	3	3	4	4	5	3	6	4	7	3	8	2	9	2	10	5	11	2	12	2	13	4	14	4	15	2
	0																																			
0	2																																			
1	3																																			
2	4																																			
3	3																																			
4	4																																			
5	3																																			
6	4																																			
7	3																																			
8	2																																			
9	2																																			
10	5																																			
11	2																																			
12	2																																			
13	4																																			
14	4																																			
15	2																																			

$X^{(1)}$	=	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>27</td></tr><tr><td>1</td><td>29</td></tr><tr><td>2</td><td>18</td></tr><tr><td>3</td><td>17</td></tr><tr><td>4</td><td>27</td></tr><tr><td>5</td><td>24</td></tr><tr><td>6</td><td>30</td></tr><tr><td>7</td><td>20</td></tr><tr><td>8</td><td>12</td></tr><tr><td>9</td><td>26</td></tr><tr><td>10</td><td>14</td></tr><tr><td>11</td><td>22</td></tr><tr><td>12</td><td>5</td></tr><tr><td>13</td><td>12</td></tr><tr><td>14</td><td>20</td></tr><tr><td>15</td><td>26</td></tr></table>		0	0	27	1	29	2	18	3	17	4	27	5	24	6	30	7	20	8	12	9	26	10	14	11	22	12	5	13	12	14	20	15	26
	0																																			
0	27																																			
1	29																																			
2	18																																			
3	17																																			
4	27																																			
5	24																																			
6	30																																			
7	20																																			
8	12																																			
9	26																																			
10	14																																			
11	22																																			
12	5																																			
13	12																																			
14	20																																			
15	26																																			

Y	=	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>14.01</td></tr><tr><td>1</td><td>17.01</td></tr><tr><td>2</td><td>53.99</td></tr><tr><td>3</td><td>43.83</td></tr><tr><td>4</td><td>34.72</td></tr><tr><td>5</td><td>30.92</td></tr><tr><td>6</td><td>24.19</td></tr><tr><td>7</td><td>38.55</td></tr><tr><td>8</td><td>41.69</td></tr><tr><td>9</td><td>16.65</td></tr><tr><td>10</td><td>69.34</td></tr><tr><td>11</td><td>25.92</td></tr><tr><td>12</td><td>51.83</td></tr><tr><td>13</td><td>60.58</td></tr><tr><td>14</td><td>50</td></tr><tr><td>15</td><td>17.1</td></tr></table>		0	0	14.01	1	17.01	2	53.99	3	43.83	4	34.72	5	30.92	6	24.19	7	38.55	8	41.69	9	16.65	10	69.34	11	25.92	12	51.83	13	60.58	14	50	15	17.1
	0																																			
0	14.01																																			
1	17.01																																			
2	53.99																																			
3	43.83																																			
4	34.72																																			
5	30.92																																			
6	24.19																																			
7	38.55																																			
8	41.69																																			
9	16.65																																			
10	69.34																																			
11	25.92																																			
12	51.83																																			
13	60.58																																			
14	50																																			
15	17.1																																			

Візуальне спостереження залежності вихідної змінної від вхідних



**Рисунок 2.13. Лістинг Mathcad-програми:
формування масиву значень**

Формування гіпотези про вид функціональної залежності

$$\text{fun}(x) := \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \\ (x_1)^2 \end{bmatrix} \quad k := 3$$

$$f(x, b) := \begin{cases} a \leftarrow \text{fun}(x)_0 \\ \text{for } i \in 0..k-1 \\ \quad a \leftarrow a + b_i \cdot \text{fun}(x)_i \\ a \end{cases}$$

$$f(x, b) \rightarrow 1 + b_0 + b_1 \cdot x_0 + b_2 \cdot (x_1)^2$$

Оцінка значень параметрів функціональної залежності за методом найменших квадратів

$$i := 0.. \text{rows}(\text{Data}) - 1$$

Формування
матриці для
розрахунку
параметрів

$$\text{Matrix_X}_{i,0} := 1$$

$$\text{Matrix_X}_{i,1} := X_{i,0}$$

$$\text{Matrix_X}_{i,2} := (X_{i,1})^2$$

$$\text{Matrix_X}^T = \begin{array}{c|cccccccccccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 2 & 5 & 2 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 729 & 841 & 324 & 289 & 729 & 576 & 900 & 400 & 144 & 676 & 196 & 484 & 25 & 144 & 400 & 676 \end{array}$$

Розрахунок параметрів функціональної залежності

$$\text{coef_b} := (\text{Matrix_X}^T \cdot \text{Matrix_X})^{-1} \cdot \text{Matrix_X}^T \cdot Y \quad \text{coef_b} = \begin{pmatrix} 30.778 \\ 9.511 \\ -0.049 \end{pmatrix}$$

Розрахунок значень вихідної змінної за функціональною залежністю

$$f \left(\begin{pmatrix} X^{(0)} \\ X^{(1)} \end{pmatrix}, \text{coef_b} \right)^T = \begin{array}{c|cccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 0 & 14.742 & 18.713 & 53.795 & 46.015 & 33.763 & 31.82 & 25.306 & 40.525 \end{array}$$

Рисунок 2.14. Продовження лістингу Mathcad-програми: розрахунок параметрів функціональної залежності

Кількість даних спостережень $n := \text{rows}(\text{Data})$

Розрахунок критерію найменших квадратів $\text{Krit} := \sum_{i=0}^{n-1} \left[f \left[\begin{pmatrix} X^{(0)} \\ X^{(1)} \end{pmatrix}, \text{coef_b} \right]_i - Y_i \right]^2$ $\text{Krit} = 87.803$

Кореляційно-регресійний аналіз знайденої функціональної залежності

Розрахунок індексу кореляції

$\sigma_{\text{fact}} := \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[f \left[\begin{pmatrix} X^{(0)} \\ X^{(1)} \end{pmatrix}, \text{coef_b} \right]_i - \text{mean}(Y) \right]^2$ $\sigma_{\text{fact}} = 265.918$

$\sigma_{\text{zag}} := \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (Y_i - \text{mean}(Y))^2$ $\sigma_{\text{zag}} = 268.434$

$R := \sqrt{\frac{\sigma_{\text{fact}}}{\sigma_{\text{zag}}}}$

Індекс кореляції $R = 0.995$

Індекс кореляції показує, що (за шкалою Чеддока) зв'язок між вихідною змінною y та множиною вхідних змінних x дуже сильний

Індекс детермінації $R^2 = 0.991$

Індекс детермінації показує, що 99 відсотків загальної варіації вихідної змінної y пояснюється факторами x

Розрахунок індексу кореляції матричним способом

$RR := \sqrt{\frac{\text{coef_b} \cdot (\text{Matrix_X}^T \cdot Y) - n \cdot \text{mean}(Y)^2}{Y^T \cdot Y - n \cdot \text{mean}(Y)^2}}$ $RR = (0.993)$

Рисунок 2.15. Продовження лістингу Mathcad-програми: розрахунок критерію найменших квадратів та розрахунок індексу детермінації

Істотність індексу кореляції

$$F := \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - k - 1}{k}$$

if(F > qt(0.95, k, n - k - 1), "YES", "NO") = "YES" Значення індексу кореляції - істотне

Дослідження значимості параметрів функціональної залежності

$$j := 0..k - 1$$

$$d_j := \left[\left(\text{Matrix_X}^T \cdot \text{Matrix_X} \right)^{-1} \right]_{j,j} \qquad d = \begin{pmatrix} 0.845 \\ 0.057 \\ 8.422 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$s_{kv} := \frac{1}{n - k - 1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[\left[\begin{pmatrix} X \langle 0 \rangle \\ X \langle 1 \rangle \end{pmatrix}, \text{koef_b} \right]_i - Y_i \right]^2 \qquad s_{kv} = 5.488$$

$$t_j := \frac{|\text{koef_b}_j|}{\sqrt{d_j \cdot s_{kv}}} \qquad t = \begin{pmatrix} 14.29 \\ 17.023 \\ 23.007 \end{pmatrix}$$

if(t_j > qt(0.95, n - 2), "YES", "NO")

"YES"
"YES"
"YES"

Усі параметри функціональної залежності - значимі

Визначення довірчих інтервалів параметрів функціональної залежності

$$b_{\min_j} := \text{koef_b}_j - \text{qt}(0.95, n - 2) \cdot \sqrt{d_j \cdot s_{kv}} \qquad b_{\max_j} := \text{koef_b}_j + \text{qt}(0.95, n - 2) \cdot \sqrt{d_j \cdot s_{kv}}$$

$$b_{\min} = \begin{pmatrix} 27.043 \\ 8.542 \\ -0.053 \end{pmatrix} \qquad \text{koef_b} = \begin{pmatrix} 30.778 \\ 9.511 \\ -0.049 \end{pmatrix} \qquad b_{\max} = \begin{pmatrix} 34.512 \\ 10.479 \\ -0.046 \end{pmatrix}$$

Найбільше неточно визначений перший параметр, найбільш точно визначений параметр - останній

Рисунок 2.16. Продовження лістингу Mathcad-програми: значимість параметрів та розрахунок довірчих інтервалів параметрів функціональної залежності.

Апроксимація функціональної залежності за методом χ^2

У методі апроксимації за методом найменших квадратів вважається, що точність спостережуваних значень приблизно однакова. У випадках, коли відомо, що точність спостережуваних значень суттєво відрізняється, доцільно використовувати апроксимацію за методом χ^2 .

Оцінка значень параметрів функціональної залежності здійснюється за методом χ^2 :

$$c^2(b) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{f(x_i, b) - y_i}{s_i} \right)^2 \rightarrow \min \quad (2.31)$$

де s_i - середнє квадратичне відхилення спостережуваного значення y_i .

У випадку, коли точність визначення всіх y_i однакова з формули (2.31) отримуємо наступну формулу визначення критерію χ^2 :

$$c^2(b) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{f(x_i, b) - y_i}{s} \right)^2 = \frac{1}{s^2} \sum_{i=0}^n (f(x_i, b) - y_i)^2 \rightarrow \min \quad (2.32)$$

де s - однакове для всіх спостережуваних значень y_i середнє квадратичне відхилення.

Значення параметрів b_j , які отримані за критерієм (2.32) та за критерієм (2.15), співпадають. Але значення критерію χ^2 не залежить від розмірності y , а значення критерію (2.15) – сильно залежить від розмірності величини y . Дійсно, значення критерію найменших квадратів суттєво відрізняється при значеннях y , вимірюваних у сотнях або у сотнях тисяч, а значення критерію χ^2 у цих самих випадках приймає однакові значення.

Уявіть, що два дослідники обмінюються досвідом з апроксимації функціональної залежності методом найменших квадратів: у одного з них значення критерію найменших квадратів складає 0,01, а в іншого – 100,5. У кого з них ліпший результат апроксимації? Виявляється, що на це питання відповісти неможливо, доки обидва не порівняють спостережувані значення у своїх дослідах. Значення критерію найменших квадратів 0,01 при спостережуваних значеннях y порядку 1 може вважатись задовільним. Але те ж значення критерію найменших квадратів при спостережуваних значеннях y порядку 0,01 не може вважатись задовільним, оскільки похибка величини ($\sqrt{0,01} = 0,1$) перевищує в десятки разів саму величину. Ті ж самі дослідники, коли користуються критерієм χ^2 , можуть легко порівняти свої результати: менше значення критерію χ^2 відповідає більш точному результату апроксимації.

З формули (2.31) випливає, що параметри функціональної залежності обираються таким чином, щоб найліпше задовольняти даним спостережень, які визначені з більшою точністю, і, можливо гірше задовольняти даним спостережень, які визначені з меншою точністю. На рисунку 2.17 графік функціональної залежності, що знайдена за методом χ^2 , більш щільно притискається до точок з більшою точністю.

Розраховане за формулою (2.31) значення критерію χ^2 порівнюють із табличним значенням $\chi_{кр}^2$, яке знаходять при кількості ступенів вільності, що дорівнює кількості спостережуваних даних мінус один і мінус кількість шуканих параметрів функціональної залежності, та рівні довірчої ймовірності 0,95:

$$\chi_{кр}^2 = qchisq(0.95, n-1-k), \quad (2.33)$$

де *qchisq* – Mathcad-функція, що знаходить значення критерію $\chi_{кр}^2$, *n* - кількість спостережуваних значень, *k* - кількість параметрів функціональної залежності.

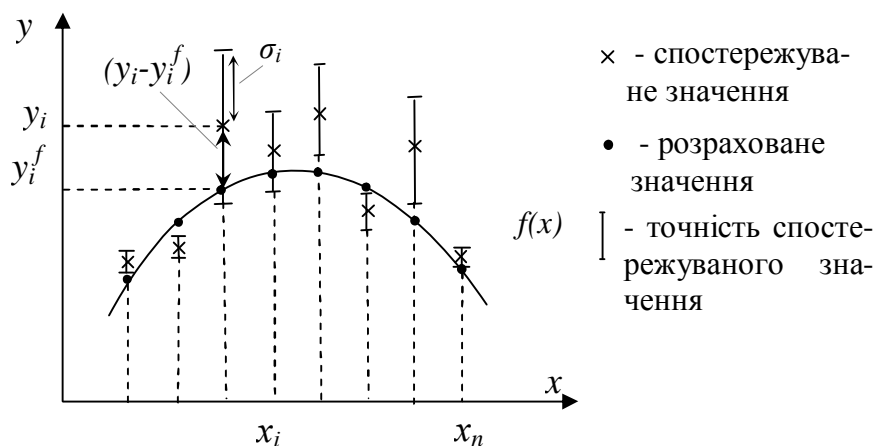


Рисунок 2.17. До пояснення методу χ^2

Якщо $\chi^2 < \chi_{кр}^2$, то функціональна залежність, що знайдена за методом χ^2 , з довірчою ймовірністю 0,95 відповідає даним спостережень. В іншому випадку потрібно змінити вид функціональної залежності.

Використання критерію χ^2 має суттєві переваги перед використанням критерію найменших квадратів. Проте використання його обмежене, оскільки дослідник не завжди має інформацію про точність вимірювання даних.

2.3. Приклади розв'язання задач

■ **Задача 1.** За даними спостережень, які наведені у таблиці 2.5, визначити закон розподілу випадкової величини «кількість телефонних викликів таксі».

Таблиця 2.5

Дані спостережень про кількість телефонних викликів таксі

Кількість ви- кликів, <i>i</i>	Кількість 10-хвилинних ін- тервалів з кількістю викликів <i>i</i> , <i>n_i</i>	Відносна частота влучень, <i>p_i = n_i / n</i>
0	70	0,311
1	85	0,378
2	52	0,231
3	14	0,062

4	3	0,013
5	1	0,004
	$n = \sum n_i = 225$	$\sum p_i = 1$

Розв'язання. Гістограма частот має вигляд, представлений на рисунку 2.18:

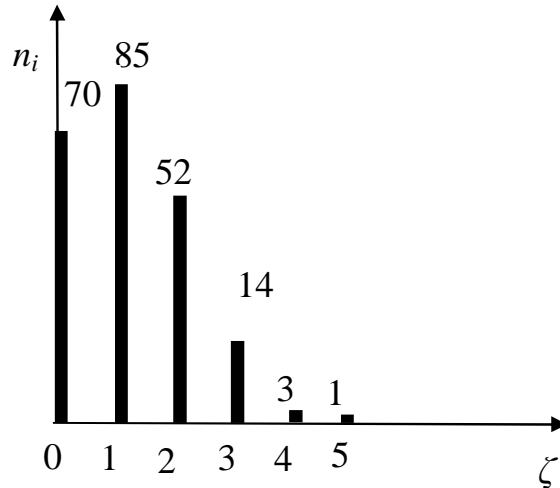


Рисунок 2.18. Гістограма частот

З вигляду гістограми частот доцільно припустити, що дана випадкова величина має розподіл Пуассона (див. табл. 2.2):

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

де λ - параметр закону розподілу.

Для оцінки параметру закону розподілу обчислимо середнє та середнє квадратичне відхилення випадкової величини «кількість телефонних викликів таксі»:

$$\bar{V} = (0 \cdot 70 + 1 \cdot 85 + 2 \cdot 52 + 3 \cdot 14 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1) / 225 = 1,102 \sim \mu,$$

$$D = (70 \cdot (0 - 1,102)^2 + 85 \cdot (1 - 1,102)^2 + \dots + 1 \cdot (5 - 1,102)^2) / (225 - 1) = 0,976 \sim \sigma^2.$$

Оскільки параметр закону розподілу Пуассона $\lambda = \mu = \sigma^2$, то приймемо гіпотезу про значення $\lambda = 1,039 = (0,976 + 1,102) / 2$. Обчислимо значення ймовірності влучення випадкової величини у значення i за формулою (див. табл. 2.2):

$$p_i^T = \frac{e^{-1,039} \cdot 1,039^i}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots, 5.$$

Результати розрахунків представлені у таблиці 2.6

Оскільки кількість спостережуваних значень випадкової величини достатньо велика ($225 > 100$), для оцінки відповідності закону розподілу застосуємо критерій χ^2 . Критерій χ^2 вимагає, щоб кількість влучень у кожний інтервал була не менша 5, тому об'єднаємо сусідні групи. Розрахунок критерію χ^2 представлений у таблиці 2.7.

**Розрахунок очікуваної кількості влучень
за теоретичним законом розподілу**

Значення випадкової величини, i	Ймовірність влучення випадкової величини, $p_i^T = \frac{e^{-1.039} \cdot 1.039^i}{i!}$	Очікувана кількість влучень у значення, $n \cdot p_i^T$
0	0,354	79
1	0,368	83
2	0,191	43
3	0,066	15
4	0,017	4
5	0,004	1
	$\Sigma p_i = 1$	$\Sigma n \cdot p_i^T = 225$

Таблиця 2.7.

Розрахунок критерію χ^2

Значення випадкової величини, i	Очікувана кількість влучень у значення, $n \cdot p_i^T$	Спостережувана кількість влучень у значення, n_i	Розрахунок критерію, $\frac{(n_i - n \cdot p_i^T)^2}{n \cdot p_i^T}$
0	79	70	1,025
1	83	85	0,048
2	43	52	1,884
3	15+4+1	14+3+1	0,2
	$\Sigma=225$	$\Sigma=225$	$\Sigma=3,157$

Отже, маємо

$$c^2 = \sum \frac{(n_i - n \cdot p_i^T)^2}{n \cdot p_i^T} = 3,157.$$

Табличне значення $\chi^2_{кр}$ знаходиться з таблиць при кількості груп $k=4$ та кількості ступенів вільності $m=4-1-1=2$: $\chi^2_{кр} = 5,99$. Порівнюючи розраховане та табличне значення $\chi^2 < \chi^2_{кр}$ приходимо до висновку, що досліджувана випадкова величина із довірчою ймовірністю 0,95 відповідає закону розподілу Пуассона із параметром 1,039.

Відповідь. Випадкова величина «кількість телефонних викликів таксі» із довірчою ймовірністю 0,95 відповідає закону розподілу Пуассона із параметром 1,039.

■ **Задача 2.** Визначити закон розподілу випадкової величини «тривалість обслуговування клієнта» за наступними даними спостережень (табл. 2.8):

Дані спостережень про тривалість обслуговування клієнта

Інтервал, (x_{i-1}, x_i)	Кількість влучень випадкової величини в інтервал, n_i	Відносна частота влучень, $p_i = n_i/n$	Сумарна частота влучень, h_i
(28;30)	11	0,133	0,133
(30;32)	10	0,120	0,253
(32;34)	7	0,084	0,337
(34;36)	7	0,084	0,421
(36;38)	13	0,157	0,578
(38;40)	16	0,193	0,771
(40;42)	8	0,096	0,867
(42;44)	11	0,133	1,000
	$n = \sum_{i=1}^8 n_i = 83$	$\sum p_i = 1$	

Розв'язання. Гістограма частот має вигляд, представлений на рисунку 2.19:

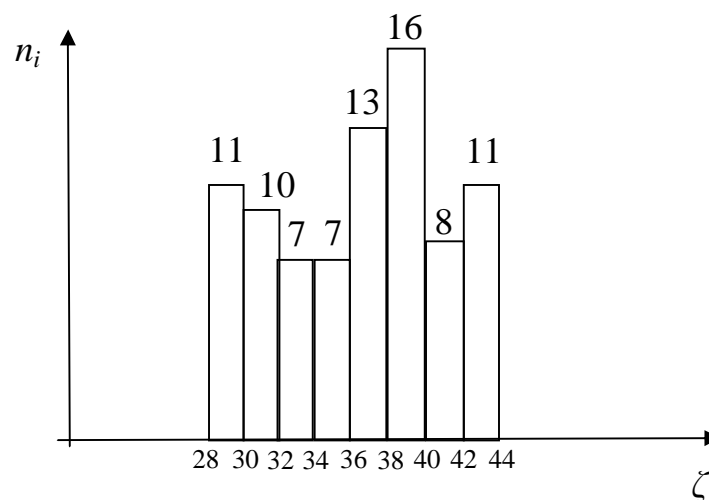


Рисунок 2.19. Гістограма частот

З виду гістограми частот доцільно припустити, що дана випадкова величина має рівномірний розподіл (див. табл. 2.2). Оцінимо параметри рівномірного закону розподілу:

$$a = \text{floor}(\max(z)) = 28, \quad b = \text{ceil}(\min(z)) = 44,$$

де *floor* – функція наближення до найближчого більшого цілого числа, *ceil* – функція наближення до найближчого меншого цілого числа.

Приймемо гіпотезу про рівномірний закон розподілу із параметрами 28 і 44. Розрахуємо значення ймовірностей влучення випадкової величини у значення i за формулою (2.5):

$$p_i^T = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{44-28} dx = \frac{1}{16} (x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{16} \cdot 2 = 0,125,$$

оскільки довжина інтервалу складає 2.

Результати розрахунків теоретично очікуваної сумарної частоти влучень представлені у таблиці 2.9.

Таблиця 2.9

Розрахунок сумарної частоти влучень за теоретичним законом розподілу

Інтервал	Ймовірність влучення випадкової величини	Очікувана сумарна частота влучень
(28;30)	0,125	0,125
(30;32)	0,125	0,250
(32;34)	0,125	0,375
(34;36)	0,125	0,500
(36;38)	0,125	0,625
(38;40)	0,125	0,750
(40;42)	0,125	0,875
(42;44)	0,125	1,000
	$\Sigma p_i = 1$	

Оскільки кількість спостережуваних значень випадкової величини недостатня ($83 < 100$), для оцінки відповідності закону розподілу застосуємо λ -критерій. Розрахунок λ -критерію представлений у таблиці 2.10. За формулою (2.12) розраховуємо спостережуване значення критерію:

$$I = \sqrt{n} \cdot \max_i |w_i - w_i^T| = \sqrt{83} \cdot 0,079 = 0,72.$$

Розраховане значення I -критерію менше за табличне значення критерію $I_{кр}=1,36$ (рівень значимості $\alpha=0,05$), тому можна стверджувати, що спостережувана випадкова величина ζ із довірчою ймовірністю 0,95 має рівномірний закон розподілу з параметрами 28 і 44.

Таблиця 2.10.

Розрахунок λ -критерію

Інтервал	Очікувана сумарна частота влучень, w^T	Спостережувана сумарна частота влучень, w	Розрахунок λ -критерію, $ w^T - w $
(28;30)	0,125	0,133	0,008
(30;32)	0,250	0,253	0,003
(32;34)	0,375	0,337	0,038
(34;36)	0,500	0,421	0,079
(36;38)	0,625	0,578	0,047
(38;40)	0,750	0,771	0,021
(40;42)	0,875	0,867	0,008
(42;44)	1,000	1,000	0,000
			max=0,079

Відповідь. Випадкова величина „тривалість обслуговування клієнта” з довірчою ймовірністю 0,95 має рівномірний закон розподілу в інтервалі від 28 до 44.

■ **Задача 3.** За даними спостережень, представленими у таблиці 2.11, знайти апроксимуючу функцію, що має вид $y=b_0+b_1x_1^2+b_2x_2$, та оцінити її якість.

Таблиця 2.11

Дані спостережень

X_1	4	3	4	4	2	5	4	3	5	4	3	5	3	5	4	3	2
X_2	1	15	13	11	13	13	15	14	15	11	12	12	11	12	14	11	11
Y	40	15	38	40	2	65	36	16	63	40	18	66	19	63	37	19	4

Розв’язання. За даними спостережень та виходячи з виду функціональної залежності складемо матрицю X та вектор Y системи умовних рівнянь (2.20):

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 4^2 & 1 \\ 1 & 3^2 & 15 \\ 1 & 4^2 & 13 \\ 1 & 4^2 & 11 \\ 1 & 2^2 & 13 \\ 1 & 5^2 & 13 \\ 1 & 4^2 & 15 \\ 1 & 3^2 & 14 \\ 1 & 5^2 & 15 \\ 1 & 4^2 & 11 \\ 1 & 3^2 & 12 \\ 1 & 5^2 & 12 \\ 1 & 3^2 & 11 \\ 1 & 5^2 & 12 \\ 1 & 4^2 & 14 \\ 1 & 3^2 & 11 \\ 1 & 2^2 & 11 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ 38 \\ 40 \\ 2 \\ 65 \\ 36 \\ 16 \\ 63 \\ 40 \\ 18 \\ 66 \\ 19 \\ 63 \\ 37 \\ 19 \\ 4 \end{pmatrix}$$

За формулою (2.22) розрахуємо параметри функціональної залежності:

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{pmatrix} -4,915 \\ 2,934 \\ -0,323 \end{pmatrix}.$$

Отже, знайдена наступна функціональна залежність:

$$Y_{reg} = f(x) = -4,915 + 2,934x_1^2 - 0,323x_2.$$

Оцінимо якість знайденої функціональної залежності. По-перше, розрахуємо критерій найменших квадратів за формулою (2.15). Розрахунки представимо у таблиці 2.12.

Таблиця 2.12

Розрахунок критерію найменших квадратів

X_1	4	3	4	4	2	5	4	3	5	4	3	5	3	5	4	3	2
X_2	1	15	13	11	13	13	15	14	15	11	12	12	11	12	14	11	11
Y	40	15	38	40	2	65	36	16	63	40	18	66	19	63	37	19	4
Y_{reg}	41,7	16,6	37,8	38,5	2,6	64,2	37,2	17,0	63,6	38,5	17,6	64,5	17,9	64,5	37,5	17,9	3,3
$ Y_{reg}-Y $	1,7	1,6	0,2	1,5	0,6	0,8	1,2	1,0	0,6	1,5	0,4	1,5	1,1	1,5	0,5	1,1	0,7
$(Y_{reg}-Y)^2$	2,89	2,69	0,03	2,34	0,38	0,60	1,38	0,93	0,34	2,34	0,15	2,11	1,14	2,40	0,25	1,14	0,54
$\Sigma(Y_{reg}-Y)^2 = 21,65$																	

Таким чином, значення критерію найменших квадратів досягає значення 21,65, що у порівнянні із значеннями вихідної величини є досить прийнятним значенням. Із наведених розрахунків видно також, що відхилення розрахованого за функціональною залежністю значення від спостережуваного значення не перевищує 1,7, що не перевищує 5% значення вихідної величини.

Проведемо кореляційно-регресійний аналіз функціональної залежності, що знайдена. Обчислимо індекс кореляції за формулою (2.23):

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{17} = 34,2, \quad s_{факт} = \frac{\sum (Y_{reg_i} - 34,2)^2}{16} = 443,5, \quad s_{заг} = \frac{\sum (Y_{reg_i} - 34,2)^2}{16} = 443,5,$$

$$R = \sqrt{\frac{s_{факт}}{s_{заг}}} = 0,998, \quad R^2 = 0,997.$$

Отже, за шкалою Чеддока зв'язок оцінюється як дуже сильний. Значення індексу детермінації свідчить про те, що 99,7% варіації вихідної змінної у пояснюється змінюванням значень вхідних змінних x_1 та x_2 .

Обчислимо довірчі інтервали за формулами (2.27)-(2.30):

$$d = \begin{pmatrix} 1,16 \\ 0,001 \\ 0,006 \end{pmatrix}, \quad s^2 = \frac{\sum (Y_{reg_i} - Y_i)^2}{17 - 3 - 1} = 1,67,$$

$$t = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 65,3 \\ 3,2 \end{pmatrix}, \quad t_{кр} = qt(0,95, 17 - 3 - 1) = 1,77,$$

$$t_{кр} \sqrt{d_j s^2} = 1,77 \sqrt{1,67 d} = \begin{pmatrix} 2,46 \\ 0,08 \\ 0,18 \end{pmatrix}.$$

Отже, довірчі інтервали параметрів функціональної залежності задаються наступними значеннями:

$$b_{\min} = \begin{pmatrix} -7,37 \\ 2,85 \\ -0,50 \end{pmatrix} \quad b_{\max} = \begin{pmatrix} -2,46 \\ 3,01 \\ -0,14 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. Дані спостережень відповідають функціональній залежності $f(x) = -4,915 + 2,934x_1^2 - 0,323x_2$ із значенням критерію найменших квадратів 21,65. Результати кореляційно-регресійного аналізу свідчать, що зв'язок між змінними y та x дуже сильний, усі параметри функціональної залежності являються значимими. Довірчі інтервали свідчать про те, що найбільш неточно знайдений перший параметр функціональної залежності ($\pm 2,46$), а найбільш точно знайдений другий параметр функціональної залежності ($\pm 0,08$).

■ **Задача 4.** Інтенсивність надходження покупців до маркету протягом дня змінюється (табл. 2.13). Знайти апроксимуючу функцію, що наближено моделює інтенсивність надходження покупців в залежності від часу, та визначити якість знайденої функції.

Таблиця 2.13

Дані інтенсивності надходження покупців до маркету протягом дня

t	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Y	15	23	16	9	11	16	17	23	32	41	53	28	12	8	5

Розв'язання. Оскільки спостерігається два піки збільшення інтенсивності надходження покупців (на 9-ту та 18-ту годину), апроксимуюча функція має бути принаймні 4-ого порядку:

$$y = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + b_4t^4.$$

Побудуємо матрицю для відшукування параметрів функціональної залежності:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 8^2 & 8^3 & 8^4 \\ 1 & 9 & 9^2 & 9^3 & 9^4 \\ 1 & 10 & 10^2 & 10^3 & 10^4 \\ 1 & 11 & 11^2 & 11^3 & 11^4 \\ 1 & 12 & 12^2 & 12^3 & 12^4 \\ 1 & 13 & 13^2 & 13^3 & 13^4 \\ 1 & 14 & 14^2 & 14^3 & 14^4 \\ 1 & 15 & 15^2 & 15^3 & 15^4 \\ 1 & 16 & 16^2 & 16^3 & 16^4 \\ 1 & 17 & 17^2 & 17^3 & 17^4 \\ 1 & 18 & 18^2 & 18^3 & 18^4 \\ 1 & 19 & 19^2 & 19^3 & 19^4 \\ 1 & 20 & 20^2 & 20^3 & 20^4 \\ 1 & 21 & 21^2 & 21^3 & 21^4 \\ 1 & 22 & 22^2 & 22^3 & 22^4 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 15 \\ 23 \\ 16 \\ 9 \\ 11 \\ 16 \\ 17 \\ 23 \\ 32 \\ 41 \\ 53 \\ 28 \\ 12 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Розрахуємо за формулою (2.22) параметри функціональної залежності:

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{pmatrix} 362,3 \\ -86,5 \\ 7,02 \\ -0,2 \\ -0,001 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, апроксимуюча функціональна залежність має вид:

$$Y_{reg} = f(x) = -362,3 - 86,5t + 7,02t^2 - 0,2t^3 - 0,0001t^4.$$

Оцінимо якість знайденої функціональної залежності. По-перше, розрахуємо критерій найменших квадратів за формулою (2.15):

$$F(b) = \sum_{i=0}^n (f(x_i, b) - y_i)^2 = 873,6.$$

Значення критерію найменших квадратів близько 30^2 .

По-друге, оцінимо якість знайденої функціональної залежності методами кореляційно-регресійного аналізу. Розрахуємо індекс кореляції за формулою (2.23):

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{15} = 20,6, \quad s_{fact} = \frac{\sum (Y_{reg_i} - 20,6)^2}{14} = 112,7, \quad s_{zag} = \frac{\sum (Y_{reg_i} - 20,6)^2}{14} = 175,1,$$

$$R = \sqrt{\frac{s_{fact}}{s_{zag}}} = 0,8, \quad R^2 = 0,64.$$

Отже, за шкалою Чеддока зв'язок оцінюється як сильний, але не дуже сильний. Значення індексу детермінації свідчить про те, що 64% змінювання інтенсивності надходження покупців пояснюється змінюванням часу.

Оцінимо значимість параметрів функціональної залежності (2.27)-(2.29):

$$d = \begin{pmatrix} 2286 \\ 199,4 \\ 2,27 \\ 0,005 \\ 0,000001 \end{pmatrix} s^2 = \frac{\sum (Y_{reg_i} - Y_i)^2}{15 - 4 - 1} = 87,4,$$

$$t = \begin{pmatrix} 5,9 \\ 4,7 \\ 3,6 \\ 2,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}, \quad t_{\text{до}} = qt(0,95, 15 - 4 - 1) = 1,8.$$

Порівнюючи розраховані значення t_j з критичним значенням $t_{кр}$, знаходимо, що значення параметра b_4 є незначимим.

Розрахуємо точність визначення параметрів функціональної залежності, які є значимими, за формулою (2.30):

$$1,8\sqrt{87,36d} = \begin{pmatrix} 817,8 \\ 241,5 \\ 25,8 \\ 1,2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. Дані спостережень відповідають функціональній залежності $f(x) = -362,3 - 86,5t + 7,02t^2 - 0,2t^3 - 0,0001t^4$ із значенням критерію найменших квадратів 873,6. Результати кореляційно-регресійного аналізу свідчать, що зв'язок між змінними y та x сильний. Усі параметри функціональної залежності, окрім останнього, являються значимими. Точність визначення довірчих інтервалів першого та другого параметрів функціональної залежності недостатня, тому рекомендується збільшити кількість даних спостережень.

■ **Задача 5.** За результатами вимірювання значення середнього часу, що витрачає швачка на обробку шва в залежності від його довжини (табл. 2.14), знайти апроксимуючу функцію для моделювання цієї змінної величини. Оскільки вимірювання середнього часу проводилось для різної кількості швів, різні значення середнього часу мають різну точність вимірювання:

Таблиця 2.14

Результати вимірювання значення середнього часу, що витрачає швачка на обробку шва в залежності від його довжини

X	20	23	33	47	55	56	79	98	114	126	142	150	161	196	198	226	230
Y	7	10	25	25	30	14	27	38	29	32	35	37	37	56	47	63	60
σ	3	5	18	5	19	8	1	20	9	2	5	2	1	21	16	32	28

Розв'язання. Оскільки точність вимірювання спостережуваної величини сильно відрізняється, доцільно скористатись апроксимацією за критерієм χ^2 . Із даних спостережень випливає, що спостерігається зростання досліджуваної величини Y в залежності від змінної X . Тому доцільно припустити найпростішу лінійну залежність між цими змінними:

$$f(\delta, b) = b_0 + b_1 x.$$

Критерій χ^2 за формулою (2.31) приймає для цієї функції вигляд:

$$c^2(b) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{b_0 + b_1 x_i - y_i}{s_i} \right)^2 \rightarrow \min.$$

Візьмемо частинні похідні по параметрам b_0 , b_1 і прирівняємо їх нулю:

$$\begin{cases} b_0 \sum_i \frac{1}{s_i^2} + b_1 \sum_i \frac{x_i}{s_i^2} = \sum_i \frac{y_i}{s_i^2} \\ b_0 \sum_i \frac{x_i}{s_i^2} + b_1 \sum_i \frac{x_i^2}{s_i^2} = \sum_i \frac{y_i x_i}{s_i^2} \end{cases}$$

Зробимо необхідні розрахунки і отримаємо наступну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} b_0 \cdot 2,78 + b_1 \cdot 324,22 = 86,11 \\ b_0 \cdot 324,22 + b_1 \cdot 43319 = 10918 \end{cases}$$

Звідси знаходимо значення невідомих b_0 , b_1 :

$$b_0 = 12,57$$

$$b_1 = 0,16$$

Отже, знайдена апроксимуюча функція, що має вид:

$$f(\delta, b) = 12,57 + 0,16x,$$

Досягається значення критерію $\chi^2 = 18,28$. Критичне значення складає $\chi^2_{кр} = qchisq(0.95, 17-1-1) = 25$.

Оскільки спостережуване значення критерію менше за критичне, приймається рішення про цілком задовільні результати апроксимації методом χ^2 .

Відповідь. Дані спостережень значення середнього часу, що витрачає швачка на обробку шва, в залежності від довжини шва відповідають функціональній залежності $y = 12,57 + 0,16x$ (y – середній час, x – довжина шва).

2.4. Завдання для самостійної роботи

□ Задача 1. З'ясуйте, чи є випадкові числа рівномірно розподіленими на інтервалі $(0,1)$, якщо гістограма частот представляється наступними значеннями кількості влучень в інтервали (табл. 2.15):

Таблиця 2.15

Частота влучень в інтервали випадкової величини

Інтервал	Кількість влучень
(0;0,1)	54
(0,1;0,2)	46
(0,2;0,3)	52
(0,3;0,4)	71
(0,4;0,5)	43
(0,5;0,6)	28
(0,6;0,7)	60
(0,7;0,8)	51
(0,8;0,9)	55
(0,9;1)	47

□ Задача 2. Визначте закон розподілу випадкової величини, якщо ряд спостережуваних значень випадкової величини наступний:

10, 7, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 9, 10, 7, 10, 7, 10, 9, 9, 8, 8, 8, 9, 6, 6, 5, 8, 7, 8, 8, 7, 8, 9, 9, 9, 8, 7, 8, 7, 6, 9, 9, 9.

□ Задача 3. Визначте закон розподілу випадкової величини, якщо гістограма частот представлена наступними значеннями:

Значення	Кількість влучень
0	61
1	33
2	11
3	3
4	1

□ Задача 4. Визначте закон розподілу випадкової величини, якщо ряд спостережуваних значень випадкової величини наступний:

121, 76, 65, 252, 85, 36, 137, 80, 40, 48, 99, 101, 113, 124, 111, 66, 19, 170, 148, 42, 107, 184, 83, 0, 29, 34, 74, 103, 70, 83, 127, 111, 120, 42, 45, 45, 80, 34, 0, 163, 139, 107, 49, 53, 56, 113, 80, 165, 31, 119.

□ Задача 5. Побудуйте апроксимуючу функцію виду $y = b_0 + b_1 \frac{1}{x} + b_2 \frac{1}{x^2}$ за такими результатами спостережень:

X	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9
Y	12	13	11	8	5	9	2	7	4	5	5	6	7	9	5	5	4

□ Задача 6. Побудуйте апроксимуючу функцію виду $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3^2$ за такими результатами спостережень:

X_1	48	2	4	22	31	22	32	2	21	17	43	11	24	23	22	30	18
X_2	18	14	13	17	16	4	17	17	18	8	17	9	7	11	15	10	11
X_3	25	8	20	11	16	16	22	8	24	15	24	13	19	16	11	21	23
Y	381	8	31	167	242	182	252	5	164	138	341	88	197	183	169	243	147

□ Задача 7. Побудуйте апроксимуючу функцію за такими результатами спостережень:

X_1	2	2	3	2	2	5	5	2	3	4	3	4	5	4	5
X_2	11	13	12	14	13	13	14	14	15	13	15	14	14	12	11
Y	4	2	18	1	2	65	64	1	15	38	15	37	64	39	67

□ Задача 8. Побудуйте апроксимуючу функцію, що відповідає наступним результатам спостережень, за критерієм χ^2 :

X	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9
σ	0,2	05	0,2	1,8	0,6	0,8	1,5	1,9	1,2	0,8	0,5	2,8	0,6	1,1	0,7	5,9	0,3
Y	23	16	15	16	17	13	11	13	21	21	19	12	20	23	20	13	23

2.5. Контрольні запитання

- 1) У який спосіб дослідник може визначити закон розподілу випадкової величини?
- 2) Дайте формулювання задачі ідентифікації закону розподілу?
- 3) Які критерії застосовуються для визначення відповідності обраного закону розподілу досліджуваним випадковим числам?
- 4) Як розраховується критерій χ^2 ? λ -критерій?
- 5) Яку інформацію надає досліднику оцінка відповідності обраного закону розподілу досліджуваним випадковим числам?
- 6) За яких умов для визначення відповідності обраного закону розподілу досліджуваним випадковим числам застосовується критерій χ^2 ?
- 7) Опишіть дії, що виконуються дослідником при визначенні закону розподілу випадкової величини.
- 8) Дайте формулювання задачі ідентифікації функціональної залежності.
- 9) У який спосіб дослідник може визначити функціональну залежність між змінними моделі?
- 10) За якої умови задача апроксимації не має розв'язку?
- 11) За якими міркуваннями дослідник обирає вид апроксимуючої функції?
- 12) Чи існують обмеження на вид функціональної залежності, що дослідник висуває в задачі апроксимації? Які?
- 13) За яким критерієм визначаються параметри функціональної залежності?
- 14) Який зміст критерію найменших квадратів?
- 15) Як складається система умовних рівнянь?
- 16) Як складається система нормальних рівнянь?
- 17) За якими формулами розраховуються параметри апроксимуючої функціональної залежності?
- 18) Яка мета досягається при виконанні кореляційно-регресійного аналізу?
- 19) За якими формулами виконується кореляційно-регресійний аналіз?
- 20) Який показник характеризує щільність зв'язку?
- 21) Що оцінюють за допомогою шкали Чеддока?
- 22) За яким критерієм оцінюється значимість параметрів функціональної залежності?
- 23) За яким критерієм визначається істотність індексу кореляції?
- 24) За якими формулами визначається довірчий інтервал параметра функціональної залежності?
- 25) Яку інформацію надає знання довірчого інтервалу?
- 26) В яких випадках використовується апроксимація за критерієм χ^2 ?
- 27) Як виконується апроксимація функціональної залежності за критерієм χ^2 ?
- 28) Які відмінності апроксимації за критерієм χ^2 від апроксимації за критерієм найменших квадратів?

Розділ 3

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Представлення процесу функціонування системи відомими формальними засобами надає досліднику можливість використати теоретичні та практичні здобутки науковців з дослідження систем. Нерідко саме на етапі формалізації системи з'ясовуються особливості функціонування системи, що досліджується, уточнюються значення параметрів, які характеризують алгоритм функціонування системи, набувають конкретного змісту складові елементи системи.

Найбільш формалізованим представленням є представлення у вигляді математичних формул. Менш формалізованим, але більш універсальним – представлення у вигляді схем, що відображають елементи системи та структурні взаємозв'язки між ними. Найбільш відомими і найбільш поширеними серед спеціалістів засобами формалізації процесів функціонування дискретних систем являються мережі масового обслуговування та мережі Петрі. Мережі масового обслуговування призначені для описування процесів обробки, таких як виробничі процеси, бізнес-процеси, і представляють великий, але чітко обмежений клас систем. Мережі Петрі являються більш могутнім засобом формалізації дискретних процесів і описують системи із найскладнішими зв'язками, в тому числі управляючими.

Класифікація засобів формалізації процесів функціонування дискретних систем представлена на рисунку 3.1.

Формалізація процесів функціонування дискретних систем	Мережі масового обслуговування	§ розімкнуті
		§ замкнуті
		§ з блокуванням маршруту
	Мережі Петрі	§ з часовими затримками
		§ з конфліктними переходами
		§ з багатоканальними переходами
		§ з інформаційними зв'язками

Рисунок 3.1. Засоби формалізації процесів функціонування дискретних систем

3.1. Мережі масового обслуговування

Стохастична *мережа масового обслуговування* (МО) – це сукупність взаємозалежних систем масового обслуговування (СМО), у якій об'єкти, що обслуговуються, з визначеною ймовірністю переходять з однієї СМО в іншу. За традицією, що склалась у теорії систем масового обслуговування об'єкти, що обслуговуються, називаються вимогами.

Кожна *система масового обслуговування* – це одне або декілька обслуговуючих пристроїв з чергою. У розімкнутій мережі МО вимоги надходять ззовні мережі і після обробки залишають її. У замкнутій мережі МО деяка кількість вимог весь час знаходиться в ній, переходячи з однієї СМО до іншої, але ніколи не залишаючи мережу МО.

Мережі масового обслуговування функціонують за наступними простими правилами. Вимоги, що надходять на обслуговування, проходять одну за одною СМО згідно указанного маршруту. На вході кожної СМО вимога намагається знайти один вільний пристрій з декількох паралельно функціонуючих. Правило, за яким вимога обирає той чи інший пристрій за умови, що вони вільні, може бути указано окремо у відповідності до процесу функціонування реальної системи. Якщо всі пристрої однакові, то вимога переглядає пристрої по порядку і займає перший, що виявився вільним. Якщо в момент надходження вимоги до СМО всі пристрої виявились зайнятими, то вимога при наявності черги у СМО намагається в неї потрапити, або залишає мережу масового обслуговування і вважається не обслугованою.

При графічному представленні мережі МО користуються позначеннями, представленими на рисунку 3.2.

Черга у СМО обов'язково одна. Кількість місць у черзі може бути обмежена або необмежена. Якщо в реальному процесі не виникає проблеми з наявністю вільного місця у черзі, то при моделюванні така черга може вважатись необмеженою, навіть якщо місць у ній декілька. Отже, обмеження на кількість місць у черзі вводять, коли потрібно моделювати ситуацію „в даний момент вимога не може бути прийнята у СМО”.

Мережа масового обслуговування може мати такі ускладнюючі елементи, як декілька типів вимог, що обслуговуються, розгалуження та блокування маршрутів, черги із складними правилами упорядкування вимог у них і т.і.

Декілька типів вимог вводять у разі, якщо потрібно розрізняти час обслуговування у пристроях для різних типів вимог, або маршрути слідування (у тому числі ймовірності слідування від однієї СМО до іншої).

Розгалуження маршруту означає, що маршрут вимоги може бути визначений тільки з визначеною ймовірністю. Сума ймовірностей у місці розгалуження маршруту складає одиницю, тому на одній із гілок розгалуження допускається, що ймовірність не вказується.

Блокування маршрутів допомагають ввести в мережу МО елементи, що управляють процесом обслуговування. Наприклад, вилучити полама-

ний пристрій з процесу обслуговування, заборонити подальше просування вимоги до виконання деякої умови і т.і.

Черги із складними правилами упорядкування розглядаються у випадках, коли потрібно установити пріоритети обслуговування вимог в залежності від, наприклад, типу вимоги, накопленого часу обслуговування вимоги і т.і.

ЕЛЕМЕНТИ МЕРЕЖІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

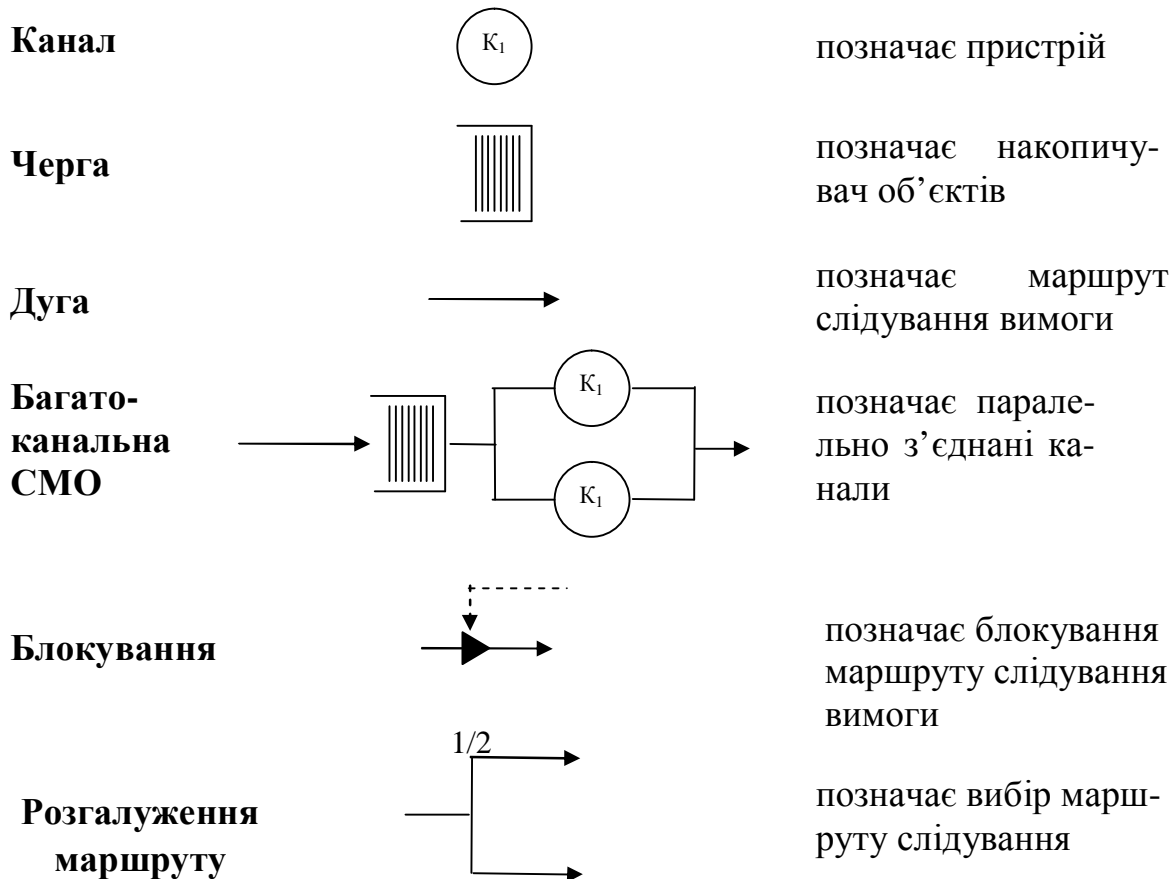


Рисунок 3.2. Елементи мережі масового обслуговування

Розглянемо, наприклад, функціонування мережі МО, яка представлена на рисунку 3.3. Усі об'єкти проходять три етапи обробки – СМО₁, СМО₂, СМО₃. До першої СМО об'єкти надходять на обслуговування з інтенсивністю λ (вимог/од. часу), де обслуговуються пристроєм K_1 з інтенсивністю μ_1 (вимог/од. часу). Оскільки в першій СМО відсутня черга, то об'єкти, що надійшли в момент часу, коли пристрій зайнятий, отримують відмову в обслуговуванні і вважаються не обслугованими мережею МО. Ті об'єкти, що пройшли обслуговування у першому пристрої мережі МО, надходять до другої СМО. У другій СМО об'єкти обслуговуються в одному з каналів обслуговування K_2 . Якщо в момент надходження об'єкта до другої СМО обидва канали зайняті, об'єкт надходить до черги другої СМО. Обмеження на довжину черги другої СМО не указане, тому кіль-

кість об'єктів, що одночасно знаходяться в цій черзі, може бути будь-якою великою. Коли закінчилось обслуговування вимоги в одному з каналів другої СМО об'єкт намагається потрапити до третьої СМО. Об'єкт потрапляє на обслуговування в канал третьої СМО, якщо він вільний, в протилежному випадку він намагається зайняти місце в черзі третьої СМО. Але черга третьої СМО має обмежену кількість місць L_{\max} . Це означає, що об'єкт, який намагається потрапити до черги третьої СМО у момент, коли всі місця в ній зайняти, отримує відмову в обслуговуванні.

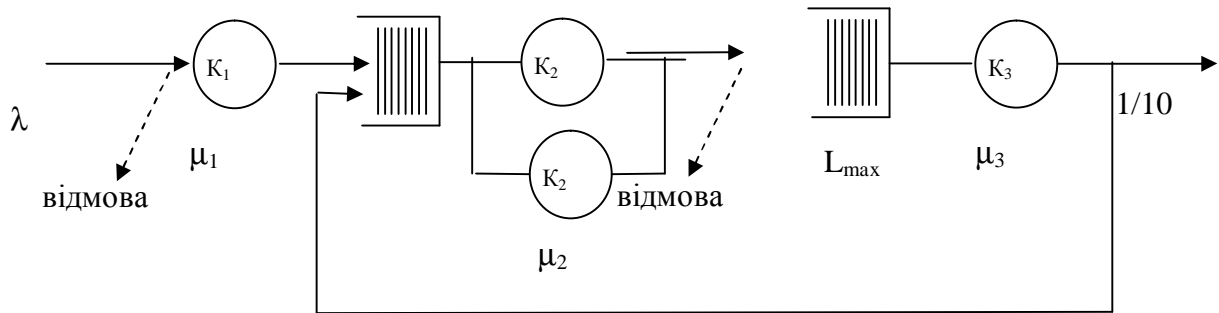


Рисунок 3.3. Приклад мережі масового обслуговування

Об'єкт, який закінчив обслуговування у каналі третьої СМО, з імовірністю $1/10$ повертається до другої СМО для додаткової обробки і з імовірністю $9/10$ виходить з мережі МО як успішно обслугований. Такі повернення на додаткову обробку зустрічаються, наприклад, у системах з пунктами контролю якості: з імовірністю $9/10$ об'єкт проходить перевірку якості успішно і з імовірністю $1/10$ в результаті перевірки виявляється, що об'єкт неякісний і потребує додаткової обробки.

Підсумовуючи, зауважимо, що всім процесам масового обслуговування як простим, так і складним, притаманна одна характерна риса, за якою дослідник приймає рішення про можливість використання мережі масового обслуговування для моделювання досліджуваного процесу: **в процесі масового обслуговування вимога не знищується, не з'єднується з іншими вимогами і не розпадається на декілька вимог.**

Для того, щоб скласти мережу масового обслуговування, яка моделює заданий процес, потрібно, по-перше, з'ясувати, що являється об'єктом обслуговування. По-друге, потрібно виділити елементи процесу обслуговування і кожному елементу поставити у відповідність СМО. По-третє, для кожної СМО визначити кількість з'єднаних паралельно пристроїв та наявність черги. По-четверте, представити маршрут проходження вимоги в мережі МО, з'єднавши відповідні СМО і визначивши умови надходження в ту чи іншу СМО. Потім потрібно визначити числові значення параметрів кожної СМО і числові значення параметрів зовнішнього потоку на обслуговування. Наприкінці, з'ясовують специфічні характеристики ме-

режі МО такі, як кількість типів вимог, що надходять на обслуговування, правила упорядкування вимог у чергах, правила переходу з однієї СМО до іншої (рисунок 3.4).

Для того, щоб представити систему засобами мережі масового обслуговування потрібно:

- § з'ясувати, що являється в системі об'єктом обслуговування;
- § виділити елементи процесу обслуговування об'єктів і кожному елементу поставити у відповідність СМО;
- § для кожної СМО визначити кількість пристроїв та наявність черги;
- § з'єднати СМО у відповідності до процесу обслуговування;
- § визначити маршрут проходження об'єкту обслуговування від однієї СМО до іншої;
- § визначити умови надходження в кожен СМО (ймовірність вибору маршруту та інші);
- § визначити наявність блокування маршруту та умови блокування;
- § визначити числові значення параметрів кожної СМО;
- § визначити числові значення параметрів зовнішнього потоку на обслуговування;
- § визначити стан мережі масового обслуговування на початку моделювання.

Рисунок 3.4. Послідовність дій, виконуваних для формалізації системи засобами мережі масового обслуговування

3.2. Мережі масового обслуговування з блокуванням маршруту

Блокування маршруту може здійснюватись з різних причин і може відноситись до різних елементів мережі МО. Управління блокуванням схематично позначається пунктирною стрілкою (управляючі зв'язки між елементами). Наприклад, канал обслуговування блокується, якщо наступний канал обслуговування зайнятий і зайняті всі місця в його черзі. Або, за умови перебільшення кількості вимог в черзі основного каналу, блокування резервного каналу знімається. Умова блокування може бути задана також за станом не одного, а декількох елементів мережі МО, і взагалі може бути будь-якою складною.

Мережа масового обслуговування, розглянута у пункті 3.1 (див. рис 3.3), має дві точки, де вимога, що обслуговується, може отримати відмову. Якщо на початку процесу обслуговування відмова обслуговування виглядає досить логічно, то відмова в процесі обслуговування не завжди має місце у реальному процесі. Той факт, що вимога, яка завершила обслуговування у другій СМО і намагається потрапити до третьої СМО у момент, коли всі місця у її черзі зайнятими, не отримує відмову в обслуговуванні,

а очікує звільнення місця у третій СМО, позначається блокуванням маршруту слідування вимоги (рис.3.5). Де ж вимога очікує звільнення місця у третій СМО? Вимога змушена очікувати у тому пристрої, в якому завершила обробку.

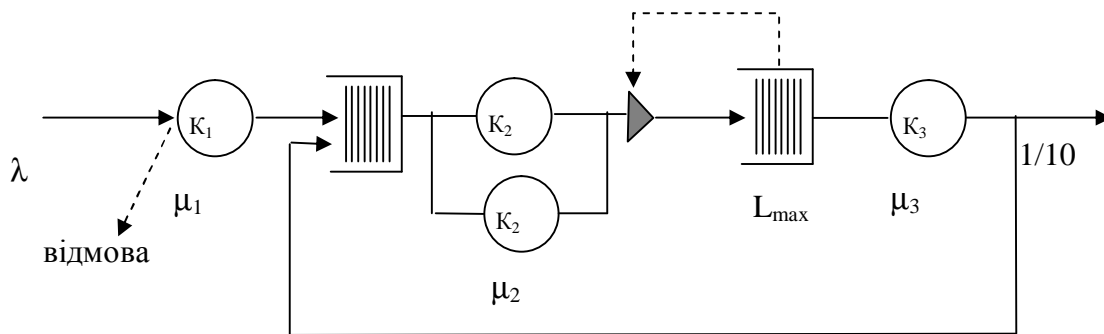


Рисунок 3.5. Приклад мережі масового обслуговування з блокуванням маршруту

Наприклад, у робототехнічних системах робот, що закінчив обробку деталі і не знаходить місце, куди покласти оброблену деталь, змушений тримати її до тих пір, поки місце для деталі звільниться. Робот, який блокуваний, має дивакуватий стан – хоч він виконав обробку деталі, проте не може зайнятись обробкою іншої деталі, оскільки місце обробки зайняте. Отже, специфічний стан пристрою, коли з одного боку він зайнятий вимогою, оскільки вимога займає місце обробки, з іншого боку – пристрій вільний, оскільки він не виконує роботу по обробці вимоги, називається *блокуванням*. *Блокування маршруту* означає, що маршрут слідування вимог у вказаному місці закритий і вимога не може слідувати по цьому маршруту до моменту, коли блокування маршруту буде знято.

3.3. Мережі Петрі з часовими затримками

Мережі Петрі є засобом формального опису процесів функціонування дискретних систем. У дискретній системі зміни її стану трапляються в особливі моменти часу, коли виникають умови для здійснення події. Здійснення події означає зміну стану системи, а значить, виникнення або не виникнення умов для інших подій. Процес функціонування дискретної системи – це упорядкована в часі послідовність подій.

Розглянемо, наприклад, процес обслуговування клієнтів звичайним банкоматом. Подія перша полягає у тому, що клієнт підходить до банкомату. Подія друга - клієнт розпочав виконувати потрібні йому операції. Подія третя - клієнт закінчив виконувати потрібні йому операції. Подія четверта – клієнт залишив банкомат. Якщо у момент, коли клієнт з'явився перед банкоматом, банкомат зайнятий іншим клієнтом, то клієнт очікує звільнення банкомату. Умови, що передують виконанню певної події на-

зивають *передумовами*. Умови, які є результатом здійснення події, називають *післяумовами*. Так, передумовами події «клієнт розпочав виконувати операції» являються умови а) «банкомат вільний» та б) «у черзі клієнтів є клієнт». Післяумовою події «клієнт розпочав виконувати операції» являється умова «клієнт обслуговується». Передумовами події «клієнт закінчив виконувати операції» являється умова «клієнт обслуговується». Післяумовами цієї події являються умови а) «банкомат вільний» та б) «є обслугований клієнт». Складемо таблицю взаємозв'язків між подіями та умовами (табл. 3.1):

Таблиця 3.1

Таблиця взаємозв'язків між подіями та умовами

Подія	Передумови події	Післяумови події
«клієнт підійшов до банкомату»	«можливо, що клієнт підійде до банкомату»	«у черзі клієнтів є клієнт»
«клієнт розпочав виконувати операції»	«у черзі клієнтів є клієнт»; «банкомат вільний»	«клієнт обслуговується»
«клієнт закінчив виконувати операції»	«клієнт обслуговується»	«банкомат вільний»; «є обслугований клієнт»
«клієнт залишив банкомат»	«є обслугований клієнт»	«кількість обслугованих клієнтів збільшилась на одиницю»;

При графічному представленні мережі Петрі користуються такими позначеннями (рисунок 3.6). Події зображуються планками, які називають *переходами*. Умови для виникнення подій зображуються кругами, які називають *позиціями*. Зв'язки між позиціями та переходами зображуються дугами. Виконання (або не виконання) умови зображується наявністю (або відсутністю) *маркери* в позиції. Маркер позначається крапкою. В позиції може знаходитись не одна маркер, а декілька, що означає багатократне виконання умови запуску переходу. Число, яке записане в позиції, означає кількість маркерів, що міститься в ній. Якщо передумовою запуску являється наявність не однієї, а певної кількості маркерів у позиції, то між позицією та переходом існує не один, а кілька зв'язків. Для великої кількості зв'язків введемо позначення пучка зв'язків – дуга із косою рисою та числом біля неї, яке означає кількість зв'язків у пучку зв'язків.

Е Л Е М Е Н Т И М Е Р Е Ж І П Е Т Р І

Перехід		позначає подію
Позиція	○	позначає умову
Дуга	○ → → ○	позначає зв'язки між подіями та умовами
Маркер(один)	●	позначає виконання (або не виконання) умови
Багато фішок	(12)	позначає багатократне виконання умови
Багато дуг	→ 16	позначає велику кількість зв'язків

Рисунок 3.6. Елементи мережі Петрі

Скористаємось графічними позначеннями і представимо процес обслуговування клієнтів банкоматом мережею Петрі (рисунок 3.7).

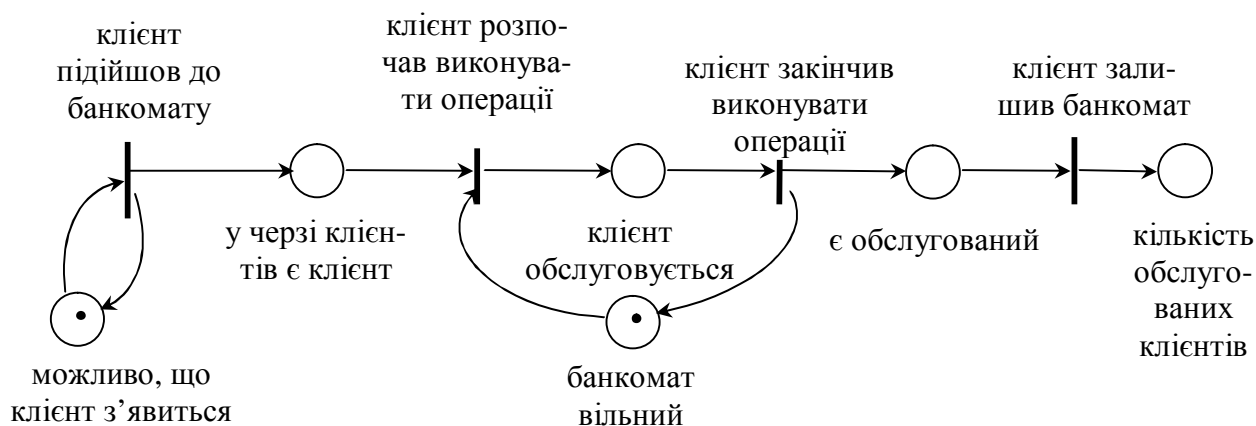


Рисунок 3.7. Мережа Петрі, яка представляє процес обслуговування клієнтів банкоматом

Коли спрацює перехід «клієнт підійшов до банкомату», у позиції «у черзі клієнтів є клієнт» з'явиться маркер. Наявність маркерів у позиціях «у черзі клієнтів є клієнт» та «банкومات вільний» означає, що виконані умови для події «клієнт розпочав виконувати операції». При запуску переходу «клієнт розпочав виконувати операції» маркери з позицій «у черзі клієнтів

«є клієнт» та «банкомат вільний» видаляються, а в позиції «клієнт обслуговується» маркер з'являється. Наявність маркеру в позиції «клієнт обслуговується» означає, що виконані умови для події «клієнт закінчив виконувати операції». При запуску цього переходу маркер з позиції «клієнт обслуговується» видаляється, а в позиції «банкомат вільний» та «є обслугований клієнт» маркери додаються. Наявність маркеру в позиції «є обслугований клієнт» являється умовою запуску переходу «клієнт залишає банкомат». При запуску цього переходу маркер з позиції «є обслугований клієнт» видаляється.

На перший погляд здається, що умова «банкомат вільний» являється зайвою. Але наявність умови «банкомат вільний» забезпечує, що обслуговування клієнтів здійснюється по-одному.

Випадковий характер процесів, які моделюються, проявляється у випадковому запуску переходів, для яких виконані передумови: якщо виконані передумови одночасно для декількох переходів, то послідовність їх запуску визначається випадком.

В процесі обслуговування клієнтів банкоматом можемо спостерігати, наприклад, таку послідовність переходів:

- клієнт підійшов до банкомату;
- клієнт розпочав виконувати операції;
- клієнт закінчив виконувати операції;
- клієнт залишив банкомат;
- клієнт підійшов до банкомату.

Наступна послідовність переходів теж являється можливою:

- клієнт підійшов до банкомату;
- клієнт розпочав виконувати операції;
- клієнт підійшов до банкомату;
- клієнт закінчив виконувати операції;
- клієнт підійшов до банкомату;
- клієнт залишив банкомат;
- клієнт розпочав виконувати операції;
- клієнт закінчив виконувати операції;
- клієнт залишив банкомат;
- клієнт розпочав виконувати операції;
- клієнт закінчив виконувати операції;
- клієнт залишив банкомат.

У першому випадку клієнтам не доводиться очікувати звільнення банкомату, а у другому спостерігається черга клієнтів до двох чоловік.

На рисунку 3.8 представлена послідовність дій, яку потрібно виконати досліднику для формалізації системи засобами мережі Петрі.

Для того, щоб представити систему засобами мереж Петрі потрібно:

§ виділити події, що виникають в системі, і поставити у відповідність кожній події перехід мережі Петрі;

§ з'ясувати умови, при яких виникає кожна з подій, і поставити у відповідність кожній умові позицію мережі Петрі;

§ визначити кількість фішок у позиції мережі Петрі, що символізує виконання умови;

§ з'єднати позиції та переходи відповідно до логіки виникнення подій у системі : якщо умова передуює виконанню події, то з'єднати в мережі Петрі відповідну позицію з відповідним переходом; якщо умова являється наслідком виконання події, то з'єднати в мережі Петрі відповідний перехід з відповідною позицією;

§ з'ясувати зміни, які відбуваються в системі при здійсненні кожної події, і поставити у відповідність змінам переміщення визначеної кількості фішок із позицій в переходи та з переходів у позиції;

§ визначити числові значення часових затримок в переходах мережі Петрі;

§ визначити стан мережі Петрі на початку моделювання.

Рисунок 3.8. Послідовність дій, виконуваних для формалізації системи засобами мережі Петрі

Кількість маркерів у позиціях складає вектор, який називається *маркіруванням*. В графічному представленні мережі Петрі зображується тільки початкове маркірування. В процесі функціонування мережі Петрі маркірування змінюється.

Умовою запуску переходу є наявність маркерів у його вхідних позиціях в кількості рівній кількості зв'язків. Якщо умова запуску переходу виконана, то здійснюється *запуск переходу*: з усіх вхідних позицій маркери видаляються у кількості рівній кількості зв'язків, а в усі вихідні позиції маркери додаються у кількості рівній кількості зв'язків. Наприклад, на рис. 3.9 умова запуску переходу T_1 виконана, оскільки в позиції P_1 є один маркер і в позиції P_2 є один маркер, а умова запуску переходу T_2 – не виконана, так як в позиції P_2 не має трьох маркерів. Після запуску переходу T_1 в позиції P_1 маркер залишиться, в позиції P_2 стане один маркер, а в позиції P_3 з'явиться два маркери.

Взагалі, позиції та переходи можна зображувати в будь-якому порядку і позначати будь-якими літерами. Головна мета при цьому – читабельність мережі Петрі. Час, який витрачений на представлення мережі Петрі в найбільш зрозумілому вигляді, окупиться меншою кількістю помилок при її реалізації. Наприклад, корисно позначати позиції та переходи не літерами, а іменами «покупці», «самоскиди», «склад», «завантаження»,

«розвантаження» і т.і., які підказують зв'язок того чи іншого фрагменту мережі Петрі з текстом задачі.

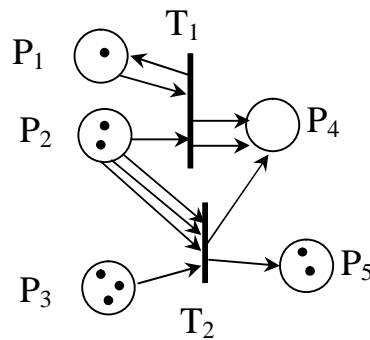


Рисунок 3.9. Фрагмент мережі Петрі

При зображенні мережі Петрі маркери в позиціях розставляються так, як вони розташовані на початку роботи моделі. Потім їх розташування змінюється, але то вже є результат функціонування моделі. Зрозуміло, що для того, щоб розпочався процес функціонування моделі, початкове розташування маркерів у позиціях повинно дозволяти запуск одного або декількох переходів.

Для переходу може бути задана часова затримка. Тоді при виконанні умови запуску переходу з усіх вхідних позицій маркери видаляються, а добавляються маркери в вихідні позиції тільки після того, як сплине заданий час затримки. Мережа Петрі, в якій задані часові затримки, називають *мережею Петрі з часовими затримками*. Імітаційні моделі складних систем складають на основі саме мереж Петрі з часовими затримками.

Процес функціонування звичайної мережі Петрі полягає у повторюваному послідовному перегляді усіх переходів мережі Петрі і виконанні наступних дій:

Якщо умова запуску переходу виконана, здійснюється вхід маркерів до переходу і запам'ятовується момент виходу маркерів з переходу. Потім обирається перехід, для якого момент виходу маркерів з переходу найменший, і здійснюється вихід маркерів з обраного переходу. Вихід маркерів з переходу змінює маркірування мережі Петрі, тому знову перевіряється умова запуску переходу і т.д. Процес продовжується, доки запускається хоч один перехід, або, доки вичерпаний час спостереження мережі Петрі.

Розглянемо найбільш вживані фрагменти мереж Петрі, що виникають при моделюванні дискретних систем.

Надходження: До системи надходять об'єкти у кількості k штук через заданий інтервал часу t .

Відповідна мережа Петрі представлена на рисунку 3.10. Подія «надходження» відбувається завжди, тобто у вхідній позиції цієї події завжди є маркер. Виконання події «надходження» означає прибуття k маркерів у

позицію «черга». Для події «надходження» задається часова затримка t одиниць часу.

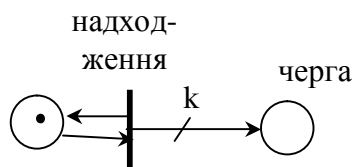


Рисунок 3.10. Фрагмент мережі Петрі для події «надходження»

Захват ресурсу: Ресурс у загальній кількості p використовується для обробки об'єктів 1 та 2. Об'єкти 1 вимагають для своєї обробки m одиниць ресурсу, об'єкти 2 – n одиниць ресурсу.

Відповідна мережа Петрі представлена на рисунку 3.11. Подія «захват ресурсу об'єктами типу 1» відбувається за умов, що є об'єкти типу 1 у черзі та є m одиниць ресурсу. Здійснення цієї події означає звільнення ресурсу та збільшення кількості оброблених об'єктів типу 1. Для події задається часова затримка $t1$.

Подія «захват ресурсу об'єктами типу 2» відбувається за умов, що є об'єкти типу 2 у черзі та є n одиниць ресурсу. Здійснення цієї події означає звільнення ресурсу та збільшення кількості оброблених об'єктів типу 2. Для події задається часова затримка $t2$.

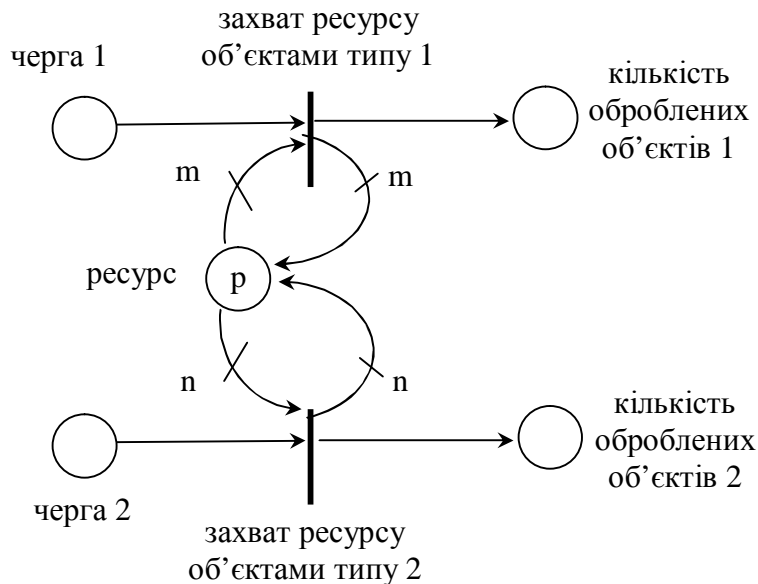


Рисунок 3.11. Фрагмент мережі Петрі для події «захват ресурсу»

Зборка: Об'єкти двох типів у кількості m та n з'єднуються в один об'єкт.

Відповідна мережа Петрі представлена на рисунку 3.12. Для зборки об'єкта необхідно m елементів 1-ого типу, n елементів 2-ого типу та вільний «складальник». Здійснення події «зборка» означає збільшення кілько-

сті зібраних об'єктів на одиницю та звільнення «складальника». Часова затримка t , що задається для події «зборка», дорівнює часу, який витрачається на збирання.

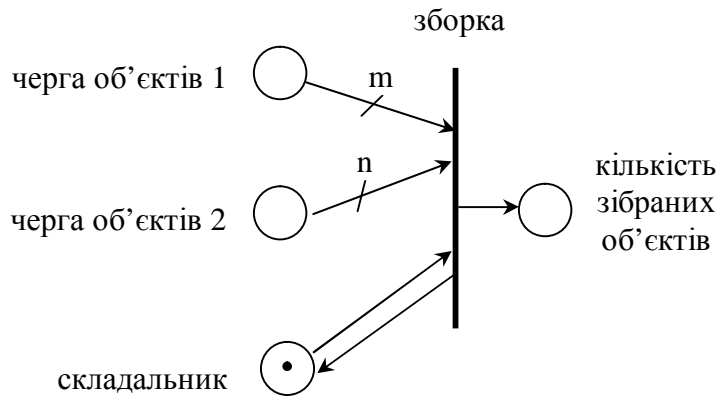


Рисунок 3.12. Фрагмент мережі Петрі для події «зборка»

Поломка: Пристрій, що використовується в технологічному процесі, ламається, налагоджується і знову включається в процес. Об'єкти, обслуговування яких не було завершено з причини поломки пристрою, очікують його налагодження і знову обслуговуються.

Відповідна мережа Петрі представлена на рисунку 3.13.

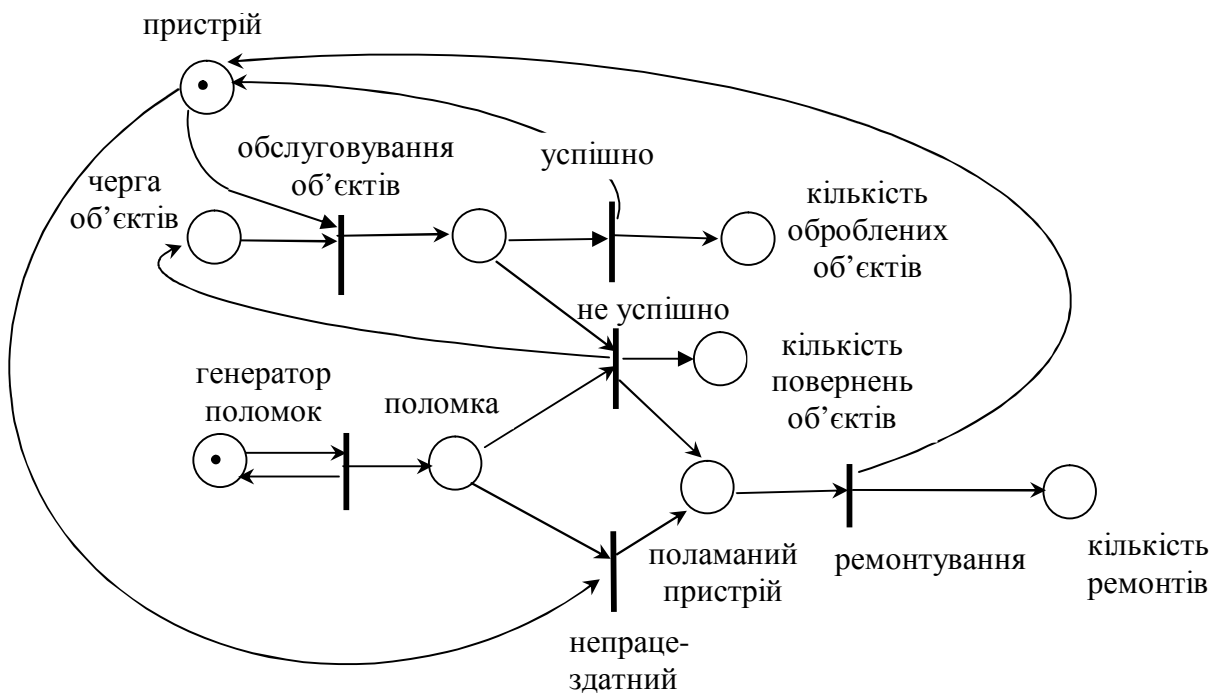


Рисунок 3.13. Фрагмент мережі Петрі для події «поломка»

Черга об'єктів обслуговується за умови, що є діючий пристрій. Якщо обслуговування завершено успішно, то пристрій звільнюється, а кількість оброблених об'єктів збільшується. Якщо під час обслуговування об'єкта

сталася поломка, то після закінчення обслуговування виконані умови для здійснення переходу «не успішно». В результаті запуску переходу «не успішно» об'єкт, обслуговування якого не завершено, повертається до черги об'єктів, а пристрій об'являється поламаним. Поламаний пристрій вилучається з технологічного процесу і відправляється на ремонтування (перехід «ремонтування»).

Може статися так, що поломка трапилася в момент, коли пристрій вільний. В такому випадку повернення об'єкта, що не обслугований, не потрібне, а поламаний пристрій вилучається з технологічного процесу і відправляється на ремонтування.

Переходи «не успішно» і «не працездатний» не являються конфліктними, оскільки, якщо виконана умова запуску переходу «не успішно», то пристрій знаходиться у стані зайнятий, а значить маркер у позиції «пристрій» відсутній. Відсутність маркеру в позиції «пристрій» означає, що умова запуску переходу «не працездатний» не виконана. З іншого боку, якщо виконана умова запуску переходу «не працездатний», то в позиції «пристрій» має бути маркер, а значить пристрій вільний і об'єкта, що має бути «неуспішним», не може бути.

3.4. Мережі Петрі з конфліктними переходами

Якщо в мережі Петрі одночасно виконана умова запуску декількох переходів, то такі переходи називають *конфліктними*. Уявіть, що на рисунку 3.5 в позиції P_2 не два маркери, а три. Тоді для переходів T_1 і T_2 одночасно виконана умова запуску переходу і вони в даний момент є конфліктними.

Існують наступні способи розв'язування конфлікту:

- 1) пріоритетний (явний та неявний спосіб завдання пріоритету);
- 2) ймовірнісний (з рівною та указаною ймовірністю).

При *пріоритетному способі* указується пріоритет запуску переходів і першим запускається перехід, що має вищий пріоритет. Наприклад, якщо один із пристроїв, що обслуговує об'єкти, основний, а інший – резервний, то для переходу «обслуговування основним пристроєм» повинен бути указаний пріоритет запуску вищий, ніж для переходу «обслуговування резервним пристроєм». На рисунку 3.14 наведений приклад подібної конфліктної ситуації.

Мережа Петрі, що моделює поломку пристрою (див. рис. 3.13), має конфліктні переходи «успішно» та «не успішно». Для того, щоб модель працювала вірно, потрібно установити пріоритет для переходу «не успішно».

Зауважимо, що, якщо переходи мережі Петрі передивляються і запускаються у певному порядку, це означає *неявний* спосіб завдання пріоритету. Дійсно, перехід, що передивляється першим, виконується з більшим пріоритетом ніж другий. У загальному випадку переходи мережі Петрі

мають передивлятися у випадковому порядку, що забезпечить рівний пріоритет запуску переходів.

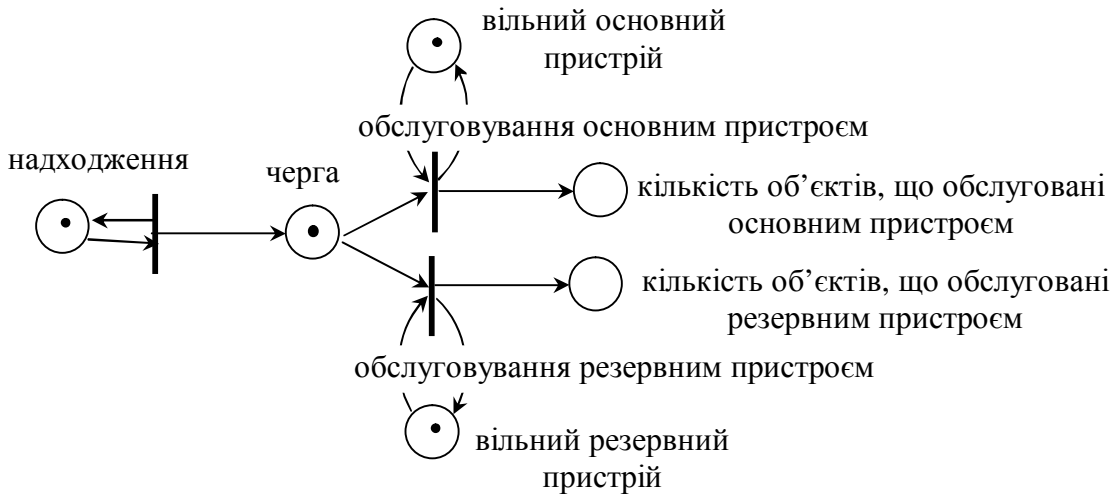


Рисунок 3.14. Мережа Петрі, що моделює обслуговування об'єктів основним та резервним пристроями

Мережа Петрі, що моделює захват ресурсу (див. рис. 3.11), має конфліктні переходи «захват ресурсу об'єктом типу 1» та «захват ресурсу об'єктом типу 2» за умови, що в позиціях «черга 1» і «черга 2» одночасно з'явилися об'єкти і до того ж у позиції «ресурс» є наявний вільний ресурс тільки для одного з об'єктів, що надійшли. Приклад такого конфлікту наведений на рисунку 3.15. Очевидно, що від того, яким способом розв'язується конфлікт у даній мережі Петрі, сильно залежить кількість об'єктів типу 1 та типу 2, обслугованих протягом часу моделювання.

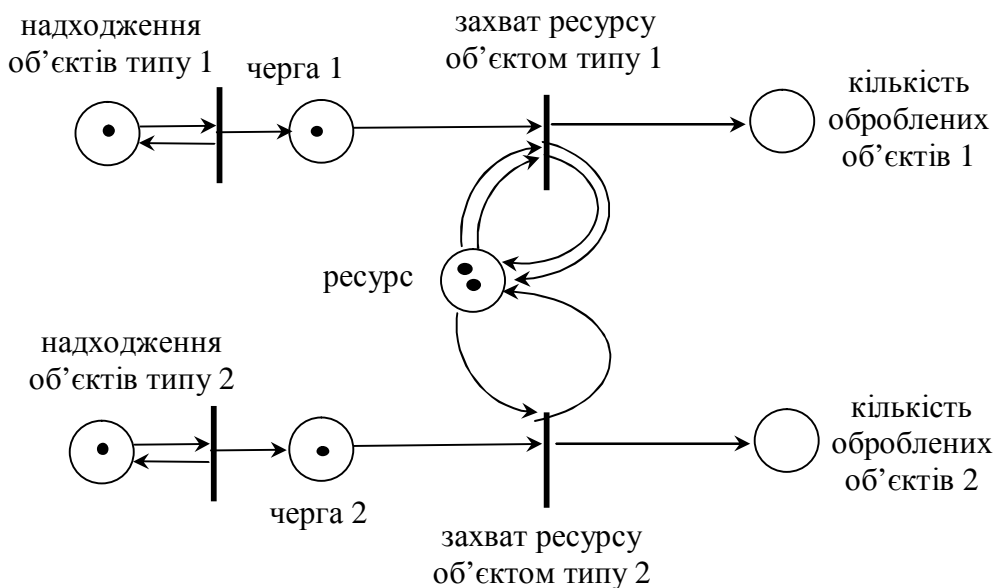


Рисунок 3.15. Мережа Петрі, що моделює захват ресурсу об'єктами різних типів

При ймовірнісному способі розв'язування конфлікту указується ймовірність запуску переходу і першим запускається перехід, на який указав «випадок». Генерується випадкове число рівномірно розподілене на інтервалі (0;1) і за його значенням приймається рішення про запуск того чи іншого переходу. Наприклад, об'єкт із заданою ймовірністю після обробки виявляється бракованим (рис. 3.16).

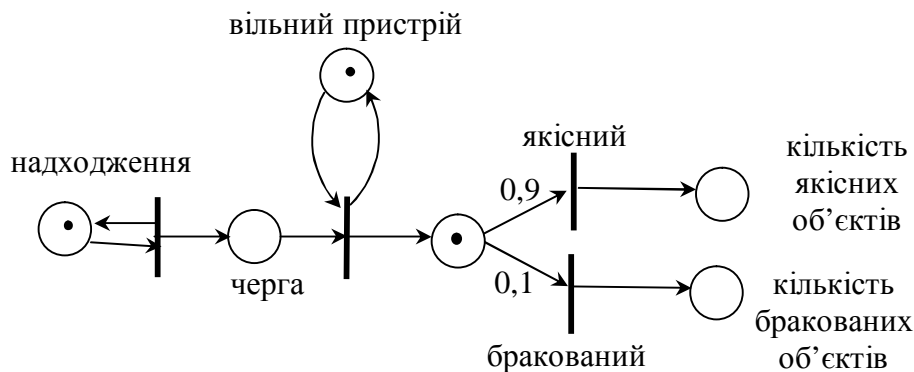


Рисунок 3.16. Мережа Петрі, що моделює виникнення бракованих об'єктів у процесі обробки

Якщо в описі системи, що моделюється, не міститься інформація про особливості виникнення подій, що можуть статися одночасно, то для розв'язання конфліктів використовується *рівноймовірнісний спосіб*. У цьому способі кожний із конфліктних переходів запускається з ймовірністю $1/k$, якщо конфлікують k переходів. Наприклад, для мережі Петрі, що моделює захват ресурсу (див. рис. 3.15), конфлікт переходів «захват ресурсу об'єктом 1» та «захват ресурсу об'єктом 2» може бути розв'язаний завданням рівної ймовірності запуску цих переходів.

Зауважимо, що наявність конфліктних переходів у мережі Петрі означає, що змінюється процес запуску переходів мережі Петрі:

У мережі Петрі з конфліктними переходами спочатку перевіряється умова запуску усіх її переходів, потім розв'язується конфлікт для конфліктних переходів і тільки потім здійснюється запуск переходу, що «виграв» конфлікт.

3.5. Мережі Петрі з багатоканальними переходами

Багатоканальними називають переходи з часовою затримкою, в яких одночасно може знаходитись декілька маркерів. На рисунку 3.17 представлений фрагмент мережі Петрі, що моделює одночасне обслуговування k об'єктів. Об'єкти накопичуються у позиції «черга об'єктів» і обслуговуються протягом часу обслуговування. Оскільки умовою запуску переходу «обслуговування» є наявність маркера в позиції «черга об'єктів» та наявність маркера в позиції «кількість одночасно обслуговуваних об'єктів», то

в перехід може потрапити до k штук маркерів з позиції «черга об'єктів». Кожний маркер, яка входить у перехід, знаходиться в ньому протягом часу обслуговування, указанного в часовій затримці переходу. Перехід «обслуговування» має часову затримку $t_{обс}$.

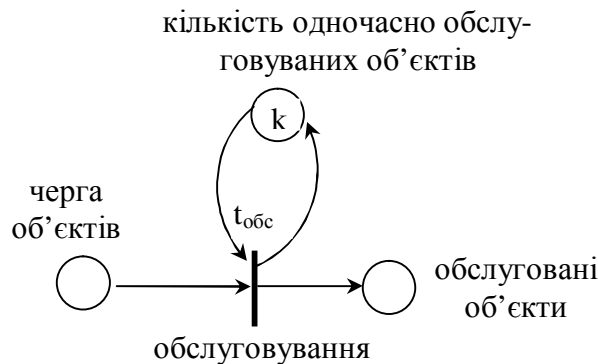


Рисунок 3.17. Багатоканальний перехід, що моделює паралельне обслуговування об'єктів

Багатоканальний перехід з невеликою кількістю об'єктів, що одночасно можуть обслуговуватись, еквівалентний простій сітці Петрі, в якій кожний канал обслуговування моделюється окремим фрагментом мережі Петрі. На рисунку 3.18 зображений фрагмент мережі Петрі, що моделює одночасне паралельне обслуговування трьох об'єктів. Зрозуміло, що при великій кількості паралельно обслуговуваних об'єктів кількість використаних переходів та позицій при такому представленні значно зростає і зображувана мережа Петрі стає незрозумілою і переобтяженою кількістю зв'язків.

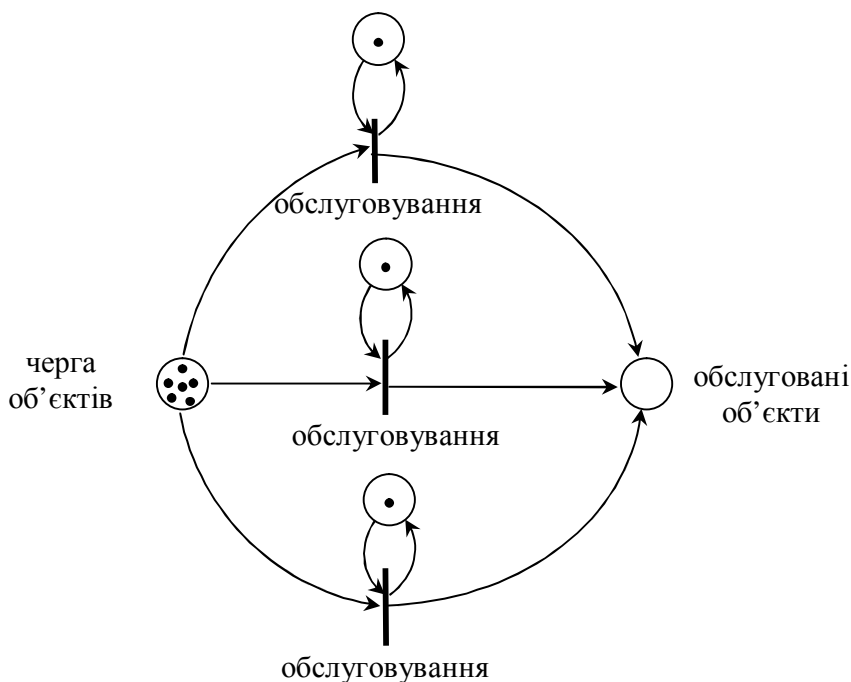


Рисунок 3.18. Реалізація багатоканального переходу простою мережею Петрі

Використання багатоканальних переходів значно спрощує вид мережі Петрі і робить її наближеною до змісту реальної системи. Проте процес функціонування такої мережі Петрі ускладнюється. По-перше, умова запуску переходу перевіряється та здійснюється запуск переходів до тих пір, доки є можливість запуску. По-друге, у багатоканальному переході часової мережі Петрі запам'ятовується не одне значення моменту часу, в який маркери мають вийти з переходу, а масив значень виходу маркерів. Тобто, кожний раз, при виконанні умови запуску здійснюється вхід маркерів у перехід і запам'ятовується момент виходу маркерів з переходу в кінець масиву значень. Запуск багатоканального переходу здійснюється стільки разів, скільки це дозволяє кількість маркерів у його вхідних позиціях. Під час виходу маркерів з переходу відповідне значення у масиві значень видаляється.

Отже, наявність багатоканальних переходів у мережі Петрі означає, що процес запуску її переходів змінюється:

У мережі Петрі з багатоканальними переходами умова запуску переходу перевіряється та здійснюється запуск переходу стільки разів, скільки це дозволяє кількість маркерів у його вхідних позиціях. Під час запуску переходу запам'ятовується момент виходу маркерів з переходу у масиві значень. Під час виходу маркерів з переходу відповідне значення моменту часу у масиві значень видаляється.

3.6. Мережі Петрі з інформаційними зв'язками

Процеси управління, сутність яких полягає у тісній взаємодії підсистеми управління та підсистеми об'єкту управління, в загальному випадку не можуть бути описані як процеси обслуговування об'єктів. Мережі Петрі являються універсальним засобом формалізації, що дозволяє описувати процеси як в підсистемі управління, так і в підсистемі об'єкта управління.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Управління дорожнім рухом.

Досліджувана система представляє собою дорожній рух на перехресті, керований світлофорами (рисунок 3.19). Перехрестя є простим перетином двох доріг.

Управління транспортним рухом здійснюється світлофорами так, що протягом певного часу горить зелене світло в першому та другому напрямках руху, а в третьому та четвертому напрямках горить червоне світло.

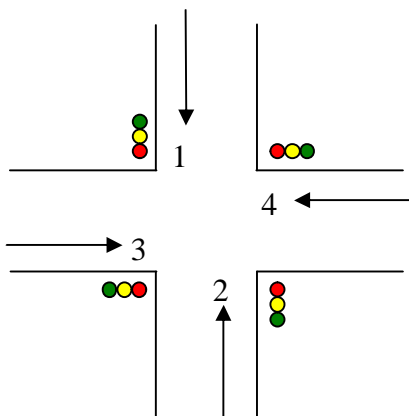


Рисунок 3.19. Схема руху автотранспорту на перехресті

Потім горить жовте світло в усіх напрямках протягом часу, що дозволяє автомобілям, які виїхали на перехрестях, залишити його до початку руху автомобілів з іншого напрямку. Далі вмикається зелене світло в третьому та четвертому напрямках руху, а в першому та другому напрямках горить червоне світло. Потім знову вмикається жовте світло в усіх напрямках і так далі. Тривалості горіння зеленого та червоного світла задаються так, як у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Параметри управління світлофорного об'єкта

Напрямок руху	Фаза світлофора							
	I		II		III		IV	
	світло	час	світло	час	світло	час	світло	час
1	зелений	20	жовтий	10	червоний	30	жовтий	10
2	зелений	20	жовтий	10	червоний	30	жовтий	10
3	червоний	20	жовтий	10	зелений	30	жовтий	10
4	червоний	20	жовтий	10	зелений	30	жовтий	10

Інтенсивність руху автомобілів в усіх напрямках відома і наведена у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

Інтенсивність руху автомобілів у напрямках

Напрямок руху	Інтенсивність руху, $\lambda=1/a,$ $1/c$
1	1/15
2	1/9
3	1/20
4	1/35

Метою моделювання є визначення параметрів управління, при яких максимум середньої кількості автомобілів, що очікують переїзду в різних напрямках, досягає свого найменше значення:

$$L = \min\{L_1, L_2, L_3, L_4\} \rightarrow \min .$$

Виділимо події, які відбуваються при переїзді автомобілів перехрестя в i -ому напрямку:

- * надходження автомобіля в i -ому напрямку;
- * переїзд автомобілем перехрестя в i -ому напрямку.

Подія «переїзд автомобілем перехрестя в i -ому напрямку» відбувається за умови, що надійшов автомобіль в i -ому напрямку та є зелене світло в i -ому напрямку. Введемо позиції «є зелене світло в 1-ому та 2-ому напрямках» та «є зелене світло в 3-ому та 4-ому напрямках», за наявності маркера в яких буде прийматись рішення про переїзд автомобілем перехрестя. В результаті функціонування підсистеми управління маркер в позиції «є зелене світло в 1-ому та 2-ому напрямках» з'являється або зникає.

Маркером у позиції «є зелене світло» повинні користуватись одночасно декілька автомобілів (в декількох рядах і в декількох напрямках), але вона не являється ресурсом, який використовують одночасно, в ній тільки міститься інформація типу «дозвіл».

Спробуємо представити фрагменту руху автомобілів через перехрестя у напрямках 1 та 2, використовуючи позицію «є зелене світло у напрямку 1 та 2» звичайною мережею Петрі (рис.3.20). Маркер з позиції «є зелене світло у напрямку 1 та 2» доводиться забирати і віддавати миттєво, аби інші автомобілі могли скористатись нею. З цієї причини довелося ввести додатковий перехід «перевірка дозволу». Тепер подивимось уважно на те, що вийшло. Переходи «перевірка дозволу в 1 напрямку» та «перевірка дозволу у 2 напрямку» виявились конфліктними.

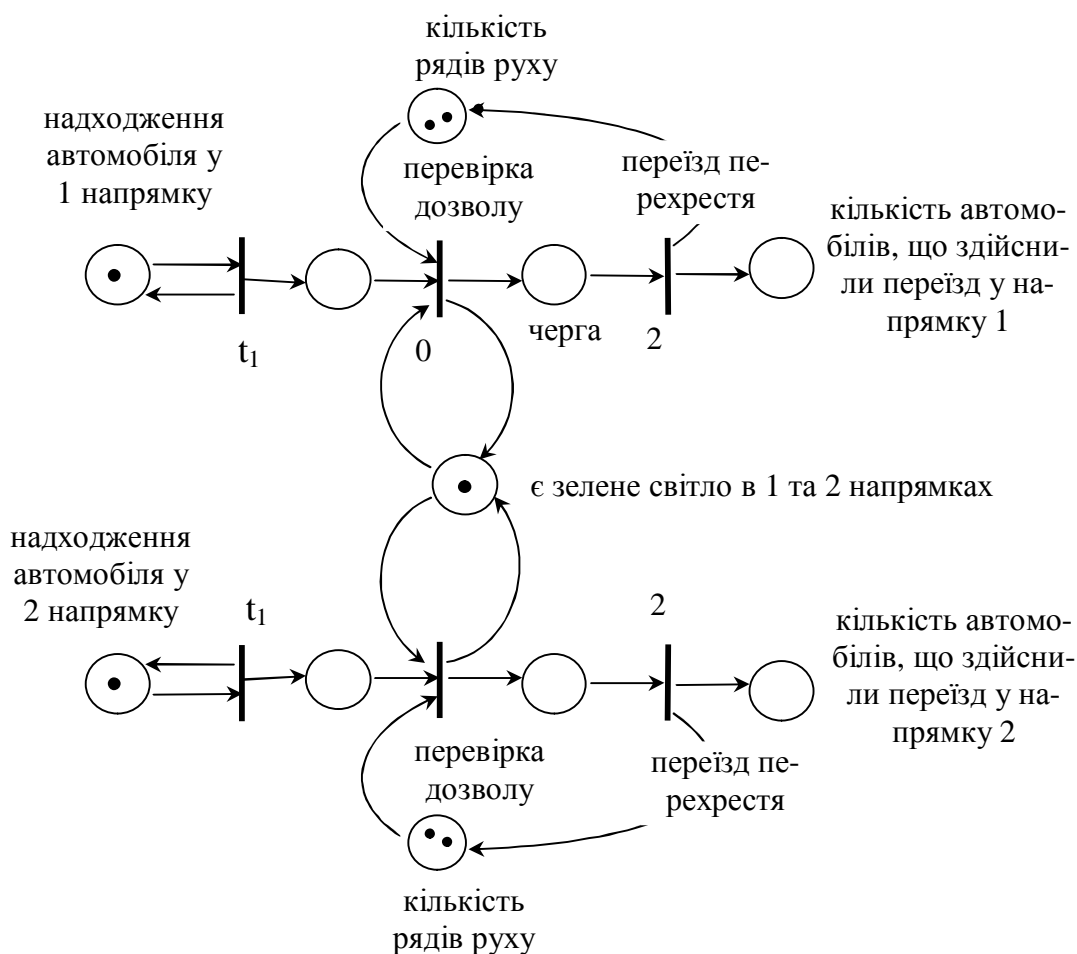


Рисунок 3.20. Підсистема руху автомобілів у i -ому напрямку, представлена мережею Петрі

За правилами мереж Петрі з конфліктними переходами спочатку потрібно розв'язати конфлікт одним із відомих способів, наприклад, запустити той з них, на який укаже випадкове число, і тільки після цього запустити інший перехід. Це декілька суперечить змісту реальної системи, що моделюється. Дійсно, при вмиканні зеленого світла автомобілі переїжджають перехрестя одночасно і в 1 і 2 напрямках не заважаючи один ін-

шому. Можна позбавитись від конфліктної ситуації створивши замість однієї позиції «є зелене світло у 1 та 2 напрямках» дві позиції «є зелене світло у 1 напрямку» та «є зелене світло у 2 напрямку», що призведе до збільшення кількості позицій вдвічі.

Автомобілі не конфлікують при захопленні зеленого світла, тому моделювання світлофорного об'єкта звичайною мережею Петрі призводить до зайвих ускладнень, яких не має в реальній системі.

Введемо інформаційний зв'язок між позицією і переходом як такий, що наявність маркера в позиції перевіряється при здійсненні перевірки умови запуску переходу, але при здійсненні запуску переходу маркер з позиції не віднімається. Тобто звичайний матеріальний зв'язок між позицією та переходом означає пересування маркерів з позиції в перехід при виконанні умови запуску переходу. А інформаційний зв'язок між позицією та переходом означає, що пересування маркерів при запуску переходу не відбувається. Домовимось позначати інформаційний зв'язок пунктирною лінією.

Представимо підсистему руху автомобілів через перехрестя мережею Петрі з інформаційними зв'язками (рисунок 3.21). В такому представленні моделі конфлікт при сумісному використанні маркеру в позиції «є зелене світло» не виникає. По-друге, не виникає необхідності вводити додаткові переходи чи додаткові позиції, що ускладнюють модель. Функціонування такої моделі якнайбільш наближено до функціонування реальної системи.

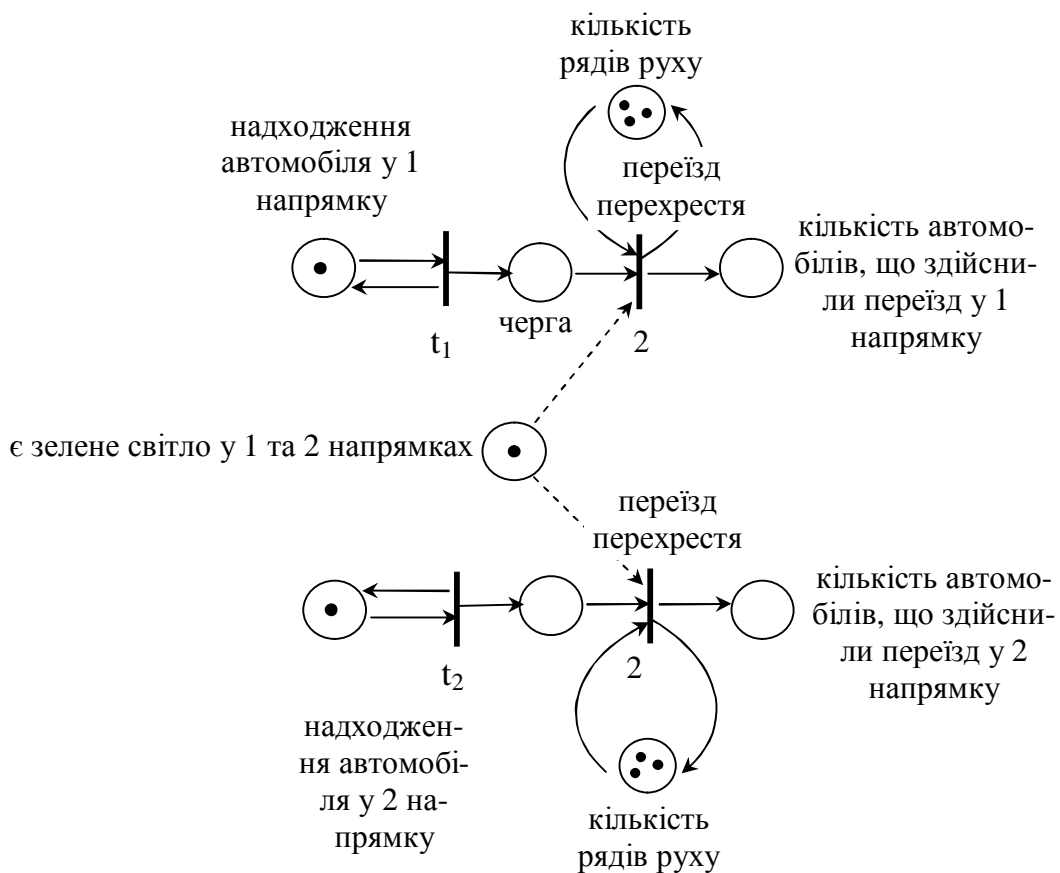


Рисунок 3.21. Підсистема руху автомобілів у i -ому напрямку, представлена мережею Петрі з інформаційними зв'язками

Часові затримки, які передбачаються для переходів, указані на рисунку ($t_1 = -a \ln \zeta$, де a – середнє значення інтервалу надходження автомобілів, ζ – рівномірно розподілена в інтервалі $(0;1)$ випадкова величина).

Виділимо події, які відбуваються в підсистемі управління:

- * горить зелене світло в 1-ому та 2-ому напрямках;
- * горить жовте світло в усіх напрямках;
- * горить зелене світло в 3-ому та 4-ому напрямках;
- * горить жовте світло в усіх напрямках;

Подія «горить зелене світло в 1-ому та 2-ому напрямках» відбувається за умови, що вичерпаний час горіння червоного світла в усіх напрямках і настав час горіння зеленого світла в 1-ому та 2-ому напрямках. Результатом цієї події є виконання умови «є зелене світло в 1 та 2 напрямках». Подія «горить жовте світло в усіх напрямках» відбувається за умови, що

Події «горить зелене світло в першому напрямку», «горить жовте світло в обох напрямках», «горить зелене світло в другому напрямку», «горить жовте світло в обох напрямках» змінюють одна одну утворюючи коло подій, що відбуваються в підсистемі управління.

Умова «є зелене світло в першому напрямку» виникає разом з умовою «вмикається зелене світло на першому напрямку» і зникає разом з початком горіння червоного світла в обох напрямках. Так само умова «є зелене світло в другому напрямку». Таким чином, підсистема управління дорожнім рухом на перехресті представляється мережею Петрі як на рисунку 3.22.

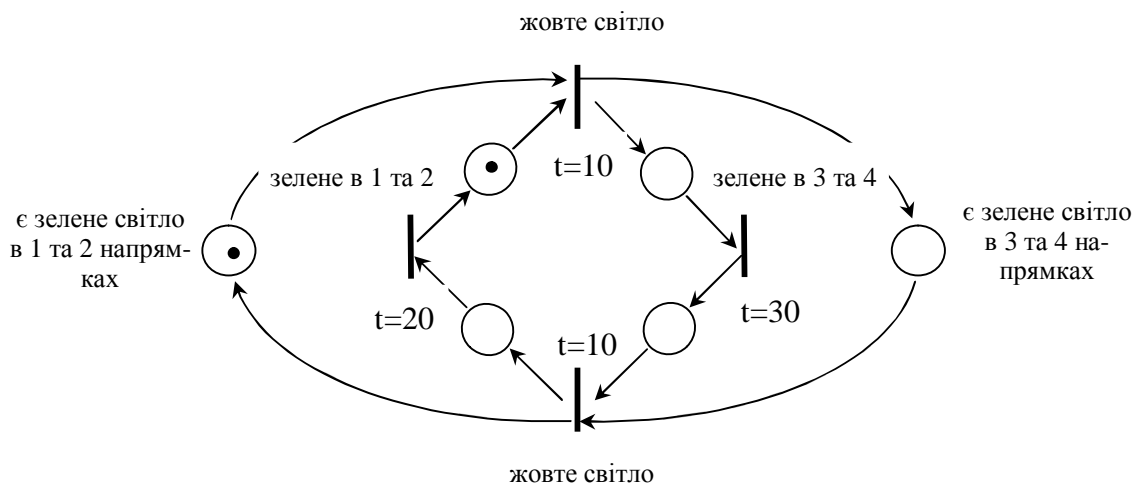


Рисунок 3.22. Підсистема управління руху автомобілів на перехресті, представлена мережею Петрі

З'єднуючи підсистеми руху в кожному напрямку та підсистему управління рухом, отримуємо модель, що представлена на рисунку 3.23.

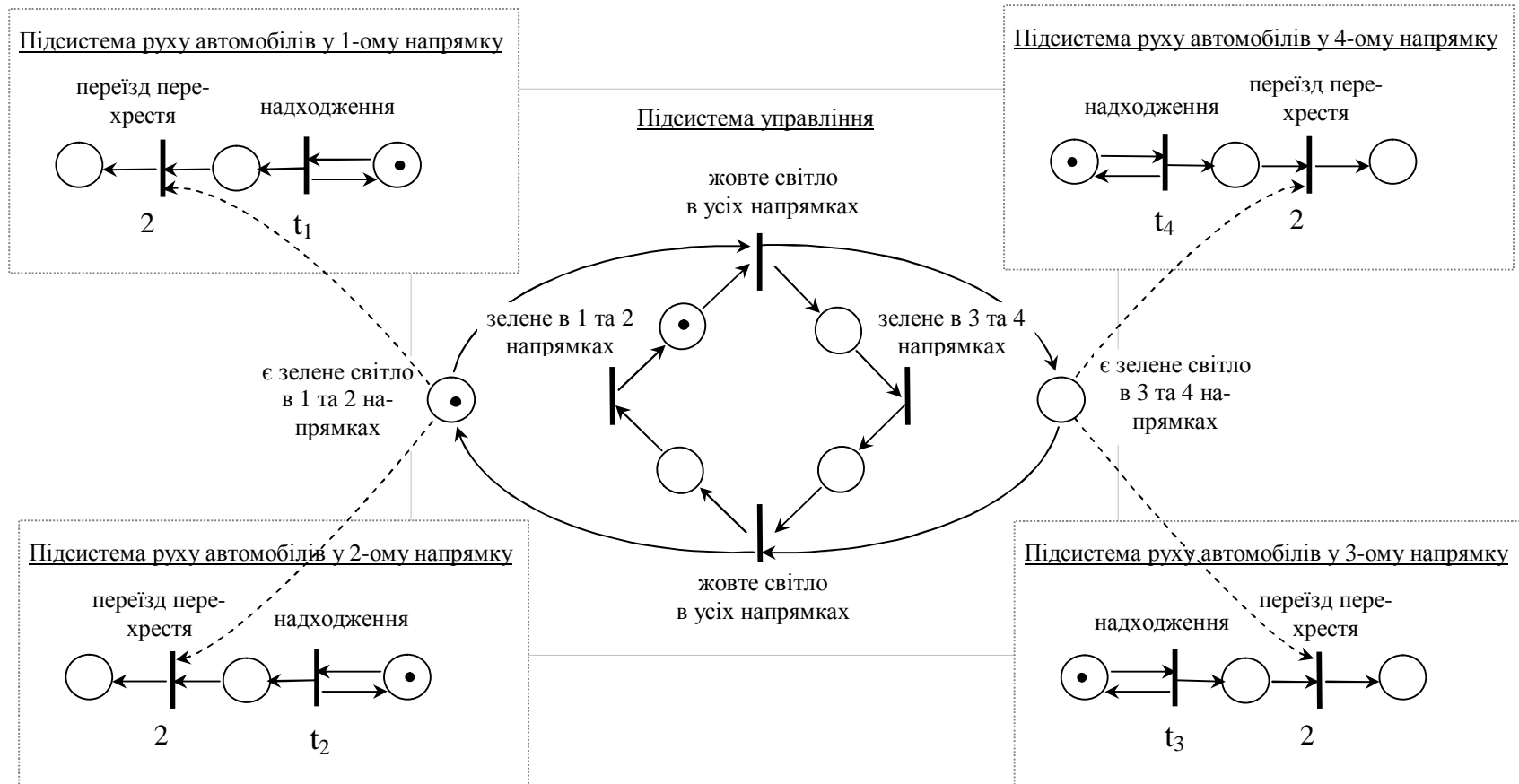


Рисунок 3.23. Модель дорожнього руху через перехрестя, кероване світлофорами.

В результаті функціонування моделі спостерігається кількість автомобілів, що очікують переїзду, у позиціях «черга», розташованих між переходами «надходження» та «переїзд перехрестя» кожного напрямку руху. Середня кількість машин, що очікують переїзду в i -ому напрямку, розраховується як середнє динамічної випадкової величини за формулою:

$$\text{середня кількість автомобілів у черзі} = \frac{\sum_{k=0}^n M(\text{черга})_k \cdot \Delta t_k}{T_{\text{mod}}}.$$

Середній час очікування автомобілів у черзі розраховується як сумарне очікування автомобілів у черзі, розділене на кількість автомобілів, що здійснили переїзд:

$$\text{середній час очікування автомобілів у черзі} = \frac{\sum_{k=0}^n M(\text{черга})_k \cdot \Delta t_k}{M(\text{кільк_авт_зд_переїзд})}.$$

Запропонований підхід до побудови моделі перехрестя, керованого світлофорами, реалізований в системі Crossroads [Стеценко, Батора, 2007].

Приклад 2. Система керування запасами.

Розглянемо систему керування запасами товарів одного типу деякого торгового підприємства. Відомо, що попит на товари виникає через випадкові інтервали часу із середнім значенням $t_{\text{надх}}$. При наявності товару в запасі покупець, що надійшов, здійснює покупку, інакше підраховується невдоволений попит покупців на товар. Максимальний рівень запасу товарів, що зберігається, складає N штук. Стратегія прийняття рішень про поповнення запасів складається у періодичному перегляді стану запасі з визначеним часом $t_{\text{контролю}}$. Якщо при перегляді стану запасів товару виявилось, що кількість товарів у запасі менша за m штук, то приймається рішення про поповнення запасу товарів і здійснюється замовлення на доставку товарів. Доставка товарів здійснюється протягом відомого часу $t_{\text{доставки}}$. Кількість товарів, що доставляються, доводить запас до максимального рівню запасів.

Метою моделювання являється визначення такої стратегії прийняття рішень, що забезпечує найбільш ефективне функціонування торгового підприємства.

Виділимо події, які відбуваються в підсистемі обслуговування покупців:

- * надійшов покупець;
- * покупка одиниці товару;
- * товар відсутній.

Подія «надійшов покупець» відбувається з часовою затримкою $t_{\text{надх}}$. Подія «покупка одиниці товару» здійснюється за умов, що є покупець у

черзі покупців і є товар на складі. В результаті здійснення цієї події підраховується кількість вдоволеного попиту на товар. Якщо подія «покупка одиниці товару» не здійснюється, то здійснюється подія «товар відсутній». В результаті здійснення цієї події підраховується невдоволений попит на товар.

Виділимо події, які відбуваються в підсистемі прийняття рішення про поповнення запасу:

- * контроль стану запасу;
- * прийняття рішення про достатній стан запасу;
- * прийняття рішення про недостатній стан запасу;
- * поповнення запасу;
- * періодичність контролю запасів.

На початку моделювання вважається, що запас достатній, тому маркер знаходиться у позиції «достатній запас». Оскільки умова запуску переходу «періодичність контролю запасів» виконана, здійснюється запуск цього переходу протягом часу, рівного часу. Після того, як сплине час $t_{\text{контролю}}$, відбувається контроль стану запасів, тобто ставиться питання, чи запас недостатній? У позиції «недостатній запас» з'являється маркер, яка або потрапляє в перехід «контроль стану запасів» або спричиняє перехід «поповнення запасу». Присвоїмо переходу «контроль стану запасів» більший пріоритет ніж перехід «поповнення запасу». Тепер, якщо в позиції «запас» є достатня кількість маркерів, то умова «недостатній запас» миттєво зникає, а замість неї з'являється умова «достатній запас». Якщо ж у позиції «запас» відсутня достатня кількість маркерів, то умова «недостатній запас» залишається і спричиняє спрацьовування переходу «поповнення запасу».

Рішення про достатній стан запасу приймається, якщо позиція «запас» містить не менше m маркерів. Інакше приймається рішення про недостатній стан запасу і здійснюється подія «поновлення запасу», в результаті якої протягом часу $t_{\text{доставки}}$ здійснюється доставка товарів і в позицію «запас» надходить відповідна кількість маркерів. Поповнення запасу відбувається до максимального рівня N штук товарів, таким чином кількість товарів, що доставляються розраховується як максимальна кількість товарів мінус кількість товарів у запасі, тобто $N - M(\text{запас})$ штук товарів.

Після таких міркувань отримуємо мережу Петрі, яка представлена на рисунку 3.24. Середню кількість товарів у запасі знайдемо, якщо обчислимо середнє значення маркерів в позиції «запас»:

$$\text{середній запас} = \frac{\sum_{k=1}^n \text{запас}_k}{n},$$

де запас_k – k -те спостереження запасу.

Мінімальна кількість товарів у запасі m , при якій приймається рі-

шення про поповнення стану запасів, кількість товарів, що доставляються, та періодичність перегляду стану запасів $t_{\text{контролю}}$ визначає вибір стратегії прийняття рішень.

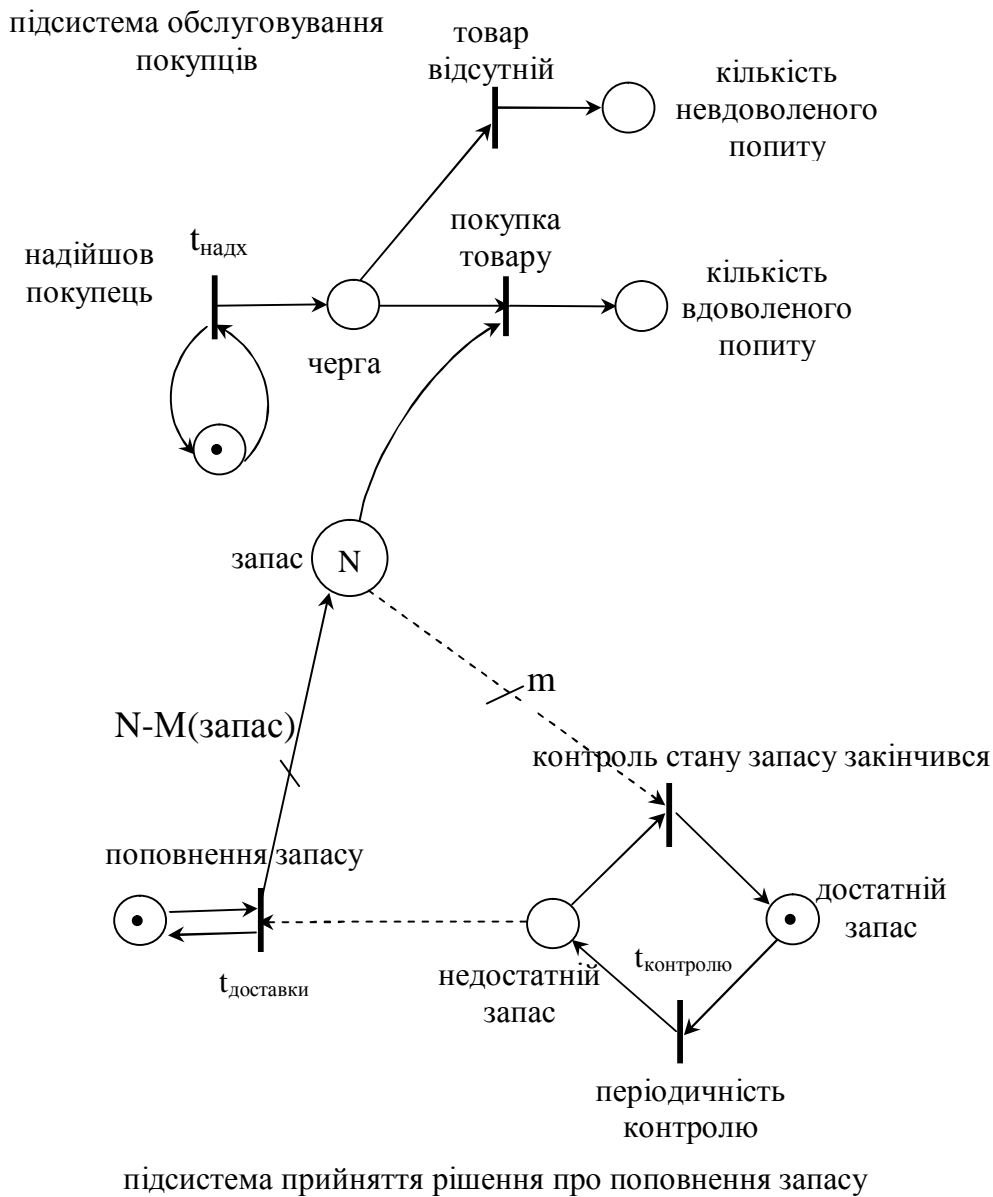


Рисунок 3.24. Модель системи керування запасами товарів торгового підприємства

Стратегія прийняття рішення про поповнення запасу може мати більш складний вид. Наприклад, на кількість товарів, що замовляється, можуть впливати величини «кількість невдоволеного попиту» та «кількість замовлених товарів». Припустимо, що покупець, який надійшов у момент часу, коли товари відсутні у запасі, з визначеною ймовірністю погоджується замовити товар і зачекати його доставки. Тоді кількість товарів, що замовляються, повинна бути збільшена на кількість товарів, які замовлені.

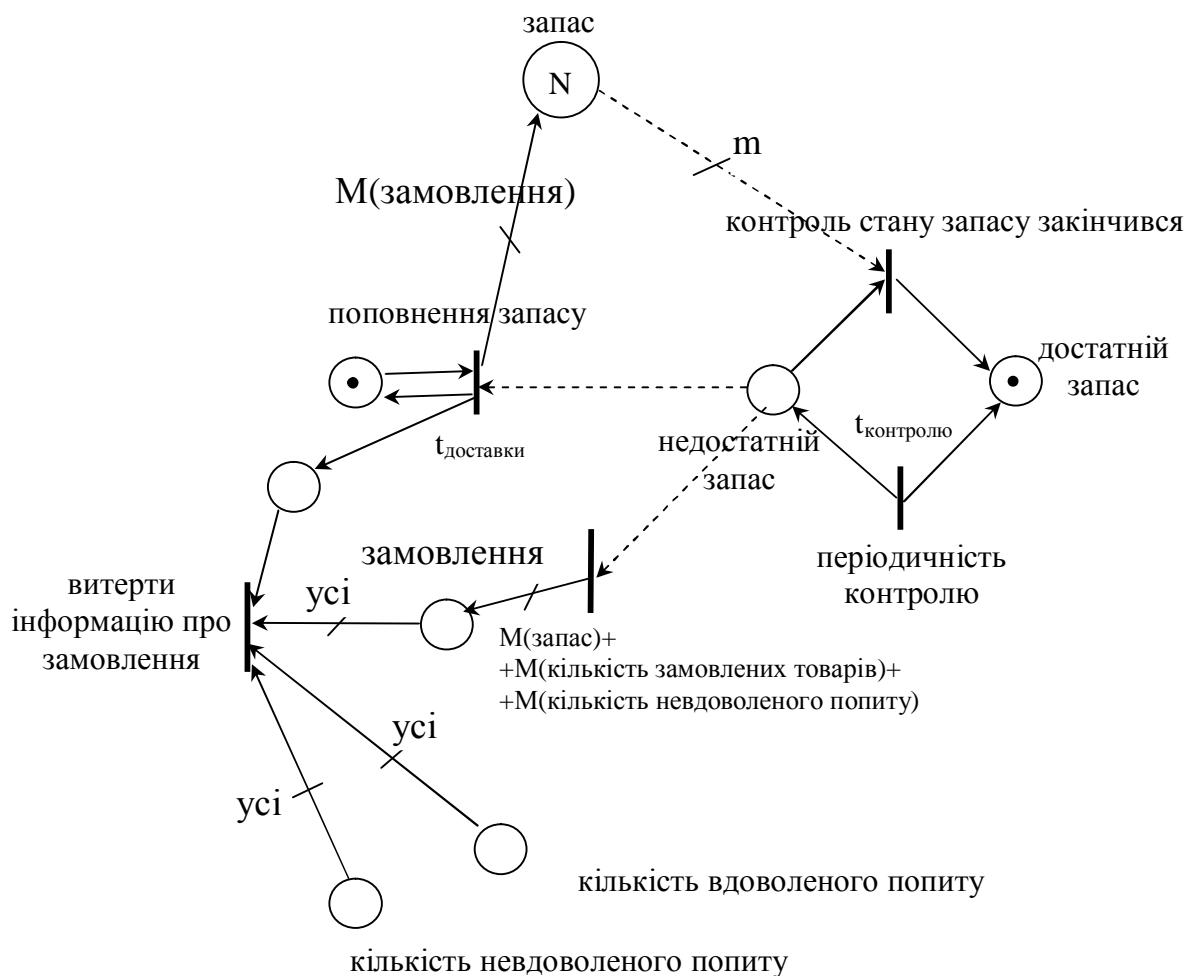
Припустимо, що стратегія прийняття рішення про поповнення запасів враховує поточний запас товарів, кількість замовлених товарів та кількість невдоволеного попиту на товар, і здійснює замовлення на доставку товарів у кількості, що розраховується за формулою:

кількість товарів, що доставляються =

«запас» + «кількість замовлених товарів» + «кількість невдоволеного попиту»,

де «запас» – це кількість маркерів у позиції «запас» на момент здійснення замовлення.

На рисунку 3.25 представлена підсистема прийняття рішень про поповнення запасу з ускладненою стратегією прийняття рішень.



підсистема прийняття рішення про поповнення запасу

Рисунок 3.25. Підсистема керування запасами товарів торгового підприємства

В багатьох випадках інформаційні зв'язки дозволяють представити модель системи у більш зрозумілому і компактному вигляді. Порівняйте, наприклад, представлення події «поломка» звичайною мережею Петрі (див. рисунок 3.13) та представлення цієї ж події мережею Петрі з інформаційними зв'язками (рисунок 3.26). Обслуговування об'єктів відбуваєть-

ся тут тільки при наявності працюючого пристрою і наявність цього пристрою перевіряється за допомогою інформаційного зв'язку між позицією «пристрій працює» та переходом «обслуговування об'єктів». Успішність виконання обслуговування перевіряється також тільки наявністю працюючого пристрою за допомогою інформаційного зв'язку. В результаті відпадає необхідність використовувати позицію «поламаний пристрій» та перехід «ремонткування 1».

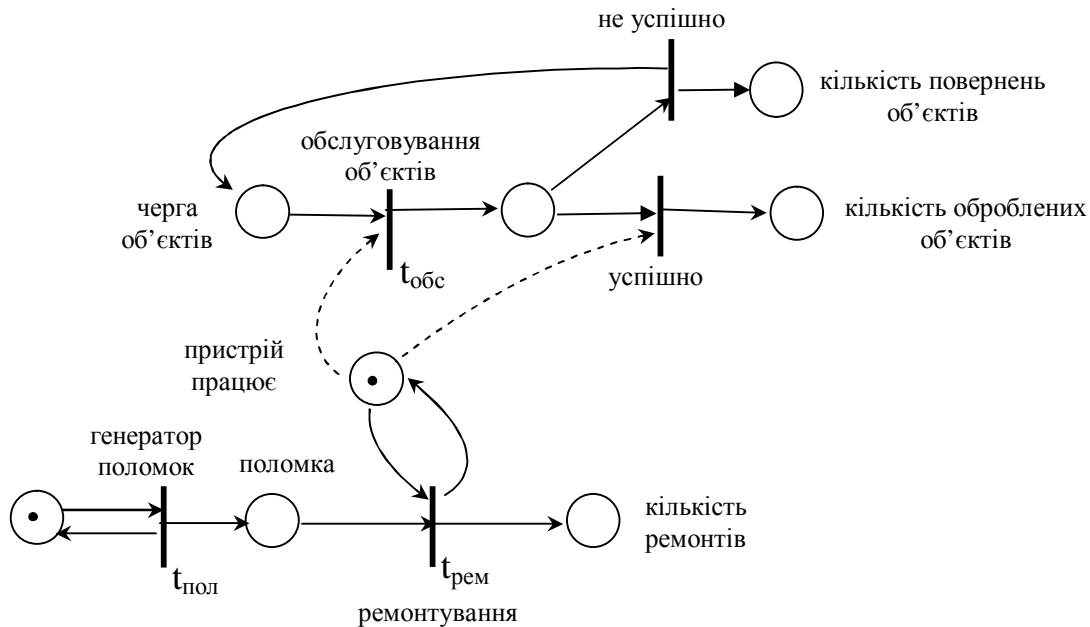


Рисунок 3.26. Моделювання поломок пристрою мережею Петрі з інформаційними зв'язками

Крім того модель з інформаційними зв'язками більш коректна. Дійсно в попередній моделі події «поломка» пристрій відправляється на ремонткування дещо пізніше, ніж потрібно, оскільки маркер потрапляє в позицію «поламаний пристрій» тільки після того, як сплине планований час обслуговування об'єкта. В моделі з інформаційними зв'язками такої проблеми не виникає, пристрій відправляється на ремонткування зразу, як тільки виникла поломка. Невеличка похибка може спостерігатися в цій моделі тільки при підрахунку середньої довжини черги об'єктів. Дійсно, повернення об'єкта, який оброблений не успішно, відбувається тільки після того, як закінчився планований час обслуговування і з'ясувалось, що пристрій зламався. Якщо значення середньої довжини черги важливо дослідити більш точно, то похибки можна уникнути, якщо замінити подію «обслуговування об'єктів» з часовою затримкою $t_{обс}$ на подію «припинення обслуговування об'єктів» з часовою затримкою $t = \min\{t_{обс}, t_{пол}\}$, що дорівнює мінімальному із значень планованого часу обслуговування та планованого часу виникнення поломки.

Приклад 3. Управління чергами.

У деяких задачах виникають процеси пов'язані з управлінням чергами. Наприклад, у черзі клієнти, що очікують, переходять (переїжджають) з однієї черги в іншу. Реалізувати такий фрагмент звичайною мережею Петрі неможливо. А за допомогою мережі Петрі з інформаційними зв'язками та зв'язками, що залежать від поточного маркірування мережі Петрі, такий фрагмент представляється так, як це показано на рисунку 3.27. Припустимо, що у черзі Ч1 знаходиться у даний момент часу 3 маркери, а у черзі Ч2 – 2 маркери, тоді в результаті перевірки умов запуску переходів «порівняння з чергою 1» та «порівняння з чергою 2» отримуємо, що умова запуску переходу «порівняння з чергою 1» не виконана, а умова запуску переходу «порівняння з чергою 2» - виконана. В результаті запуску переходу «порівняння з чергою 1» у позиції «Ч1 довша за Ч2» з'явиться маркер, що спричиняє запуск переходу «перехід з Ч1 до Ч2». В результаті запуску переходу «перехід з Ч1 до Ч2» один маркер з Ч1 видаляється і додається до черги Ч2, а умова «Ч1 довша за Ч2» зникає.

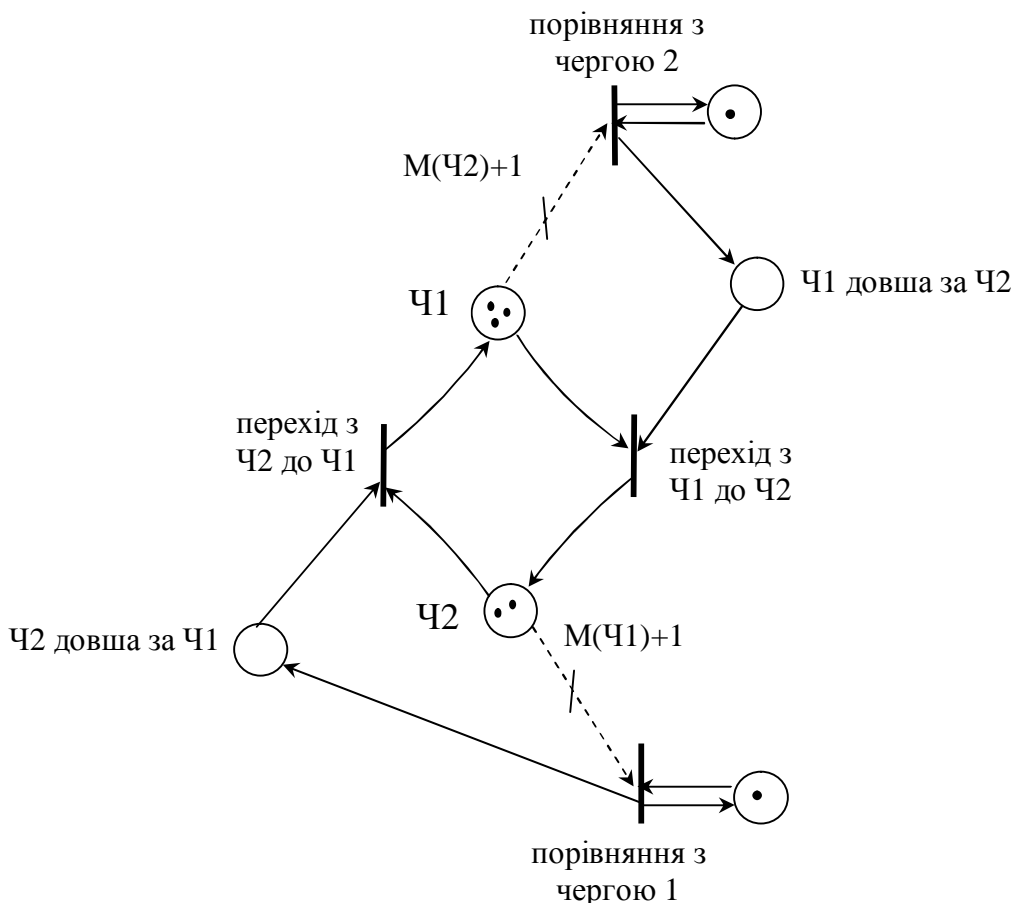


Рисунок 3.27. Фрагмент мережі Петрі, що моделює перехід з однієї черги в іншу за умови, що вона коротша

Процес функціонування мережі Петрі з інформаційними зв'язками відрізняється від процесу функціонування звичайної мережі Петрі тим, що

для переходу, який має інформаційні зв'язки зі своєю вхідною позицією, наявність маркерів у цій позиції у кількості, що дорівнює кількості інформаційних зв'язків являється необхідною умовою запуску переходу, але при запуску переходу маркери з такої позиції не віднімаються.

3.7. Приклади розв'язання задач

■ **Задача 1.** Складіть формалізовану модель системи засобами мереж масового обслуговування для наступної задачі:

Система передачі даних забезпечує передачу пакетів даних із пункту А в пункт С через транзитний пункт В. У пункті А пакети надходять через 10 ± 5 мс. Тут вони буферуються в накопичувачі ємністю 20 пакетів і передаються по будь-якій із двох ліній АВ1-за час 20 мс або АВ2-за час 20 ± 5 мс. У пункті В вони знову буферуються в накопичувачі ємністю 25 пакетів і далі передаються по лініях ВС1 (за 25 ± 3 мс) і ВС2 (за 25 мс). Причому пакети з АВ1 надходять у ВС1, а з АВ2 - в ВС2. Щоб не було переповнення накопичувача, у пункті В вводиться граничне значення його ємності - 20 пакетів. При досягненні чергою граничного значення відбувається підключення резервної апаратури і час передачі знижується для ліній ВС1 і ВС2 до 15 мс.

Метою моделювання є визначення ймовірності підключення резервної апаратури, відсотку пакетів, які не передались через завантаження ліній зв'язку, та статистичних характеристик черг пакетів у пункті А та у пункті В.

Розв'язання. Об'єктом обслуговування в системі, яка описана в умові задачі, є пакети даних, що передаються. Обслуговування здійснюють лінії зв'язку АВ1, АВ2, ВС1, ВС2. Оскільки пакети, які передавались лінією АВ1, передаються далі лінією ВС1, то об'єднувати лінії АВ1 і АВ2 в одну СМО не можна. Тому, кожній з ліній зв'язку поставимо у відповідність СМО: лінії АВ1 – СМО₁, лінії АВ2 – СМО₂, лінії ВС1 – СМО₃, , лінії ВС2 – СМО₄.

Перша і друга СМО, що відповідають буферу пакетів даних у пункті А, мають спільну чергу, в якій за умовою задачі не може міститись більше 20 пакетів. Тому черга має обмеження 20 місць. Канал першої СМО, який відповідає лінії АВ1, обслуговує пакети з часом $t_{обр}=20$. Канал другої СМО, який відповідає лінії АВ2, обслуговує пакети з часом $t_{обр}=20 \pm 5$. Після обробки у першій СМО пакет надходить до третьої СМО. А після обробки в другій СМО пакет надходить до четвертої СМО. На сумарну кількість пакетів у чергах третьої та четвертої СМО за умовою задачі складає 25 пакетів. Канал третьої СМО відповідає лінії ВС1 і має параметр часу обслуговування, що дорівнює 25 ± 3 мс за умови, що сума пакетів, яка міс-

тяться у чергах третьої та четвертої СМО менша за 20 пакетів, і дорівнює 15мс в іншому випадку:

$$t_{обр} = \begin{cases} 25 \pm 3, & \text{if } L_1 + L_2 < 20 \\ 15, & \text{else} \end{cases} .$$

Канал четвертої СМО відповідає лінії ВС2 і має параметр часу обслуговування, що дорівнює 25 мс за умови, що сума пакетів, яка міститься у чергах третьої та четвертої СМО менша за 20 пакетів, і дорівнює 15мс в іншому випадку:

$$t_{обр} = \begin{cases} 25, & \text{if } L_1 + L_2 < 20 \\ 15, & \text{else} \end{cases} .$$

Пакети, які при надходженні у будь-яку СМО не знайшли вільного місця ні в каналі, ні в черзі, залишають мережу не обслугованими.

За умовою задачі, пакети надходять у пункт А з інтервалом часу 10 ± 5 мс. Отже пакету надходять в мережу МО з часом $t_{надх} = 10 \pm 5$ до ліній зв'язку АВ1 та АВ2.

З'єднуємо побудовані СМО відповідно до маршруту пакетів і отримуємо мережу МО, що моделює процес передачі пакетів даних (рис. 3.28).

Відповідь: відповіддю є складена мережа масового обслуговування (див. рис 3.28).

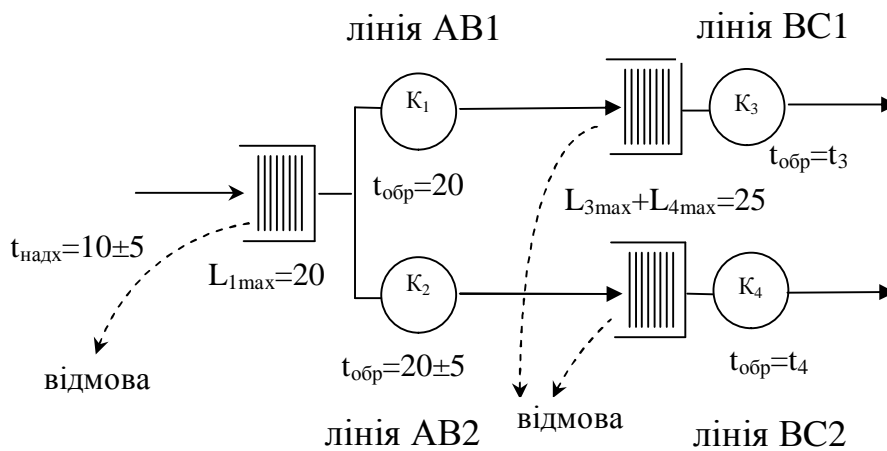


Рисунок 3.28. Мережа масового обслуговування, що представляє формалізовану модель системи передачі даних

■ **Задача 2.** Складіть формалізовану модель системи засобами мереж масового обслуговування для наступної задачі:

Розглядається модель банку, у якому два касири сидять у помешканні, а два обслуговують клієнтів, що підїжджають на автомобілях. Частина клієнтів, що надходять у банк, намагається спочатку обслужитися у автомобільних касирів. Час між надходженнями клієнтів цих клієнтів має експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням 0,75 хвили-

ни. У черзі до першого касира можуть знаходитись три автомобілі, а в черзі до другого – чотири. Час обслуговування першим автомобільним касиром нормально розподілено з математичним сподіванням 0,5 хвилини і середньоквадратичним відхиленням 0,25 хвилини. Тривалість обслуговування другим касиром розподілена рівномірно на інтервалі $0,2 \div 1,0$ хвилини. Якщо клієнт, що приїхав на автомобілі, не може стати в чергу до автомобільних касирів через відсутність вільного місця, він залишає машину на стоянці і йде до касирів, що сидять у помешканні банку. Інша частина клієнтів йде зразу на обслуговування до касирів у помешканні банку і стають в одну чергу з клієнтами, що прибули на автомобілях. Інтервал між їхніми прибуттями розподілений за експоненціальним законом з математичним сподіванням 0,5 хвилини. До обох касирів стоїть одна черга. У черзі не може стояти більш 7 клієнтів. Клієнти, що прийшли в банк, коли черга заповнена повністю, не обслуговуються і залишають банк. Час обслуговування в обох касирів у помешканні банку має трикутний розподіл на інтервалі $0,1 \div 1,2$ хвилини з модою 0,4 хвилини.

Метою моделювання є визначення завантаження автомобільних касирів і касирів у банку, середніх довжини черг, а також ймовірності того, що клієнт піде з банку не обслугованим.

Розв'язання. Об'єктом обслуговування в системі, яка описана в умові задачі, є клієнти банку, що під'їжджають на автомобілях. Обслуговування клієнтів здійснюють два автомобільних касири і два касири у помешканні банку. Оскільки черги до автомобільних касирів різні, то моделювати їх слід різними СМО. Тому поставимо у відповідність першому автомобільному касиру СМО₁, другому автомобільному касиру – СМО₂. Канал першої СМО має час обслуговування, що є випадковою розподіленою за нормальним законом величиною із середнім значенням 0,5 хвилини і середньоквадратичним відхиленням 0,25 хвилини. Черга першої СМО має обмеження три клієнти. Канал другої СМО має час обслуговування, що є випадковою розподіленою рівномірно величиною з мінімальним значенням 0,2 хвилини і максимальним значенням 1 хвилина. Черга другої СМО має обмеження чотири клієнти.

Якщо клієнт, який під'їхав до банку на автомобілі, не знайшов вільних місць очікування до автомобільних касирів, то він іде до касирів у помешканні банку. Оскільки ці касири мають спільну чергу поставимо у відповідність їм одну СМО з двома каналами обслуговування. Час обслуговування клієнта цими каналами є випадкова розподілена за трикутним законом величиною з мінімальним значенням 0,1 хвилини, максимальним значенням 1 хвилина і модою 0,4 хвилини. Черга клієнтів у помешканні банку має обмеження 7 клієнтів. Клієнти, які не знайшли вільного місця в черзі, залишають банк. Тому маємо відмову в обслуговуванні за цієї умови.

За умовою задачі, клієнти під'їжджають у банк на автомобілях з часом надходження, що є випадковою розподіленою за експоненціальним законом величиною із середнім значенням 0,75 хвилини.

Завантаження автомобільних касирів і касирів у банку знайдемо, спостерігаючи завантаження каналів обслуговування у СМО₁, СМО₂, СМО₃, СМО₄. Середні довжини черг клієнтів у банку знайдемо, спостерігаючи відповідні середні довжини черг у побудованій мережі МО.

Ймовірність того, що клієнт піде з банку не обслугованим, знайдемо, підраховуючи кількість відмов обслуговування в мережі МО у відношенні до загальної кількості об'єктів, що надійшли на обслуговування.

З'єднуємо побудовані СМО відповідно до маршруту пакетів і отримуємо мережу МО, що моделює процес передачі пакетів даних (рис. 3.29).

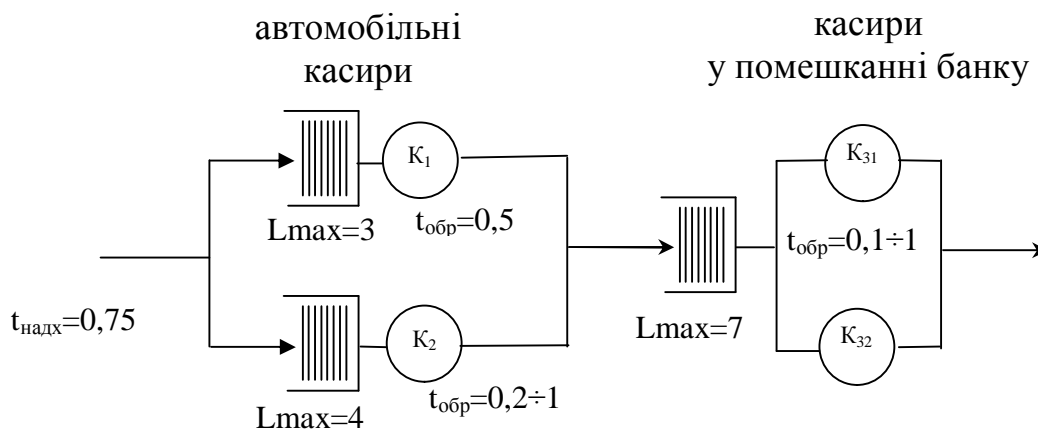


Рисунок 3.29. Мережа масового обслуговування, що представляє формалізовану модель процесу обслуговування клієнтів

Відповідь: відповіддю є складена мережа масового обслуговування (див. рис 3.29).

■ **Задача 3.** Складіть формалізовану модель системи засобами мережі масового обслуговування для наступної задачі:

Система являє собою потік транспорту в двох напрямках по дорозі з двостороннім рухом, одна сторона якої закрыта в зв'язку з ремонтом протягом 500м. Світлофори, які розміщені на обох кінцях односторонньої ділянки, управляють рухом на ній. Світлофори відкривають рух на ділянці в одному з напрямків протягом заданого інтервалу часу. Коли рух відкритий, автомобілі слідуєть по ділянці з інтервалом 2 секунд. Автомобіль, що під'їжджає до ділянки, їде по ньому без затримки, якщо горить зелене світло і попереду немає інших автомобілів. Автомобілі під'їжджають до світлофорів через інтервали часу, які розподілені за експоненціальним законом з математичним сподіванням, що дорівнює 12 секунд для 1-ого напрямку і 9 секунд для 2-ого напрямку руху. Світлофор змінює сигнали за

таким циклом: зелений у 1-ому напрямку протягом 100 секунд, червоний в обох напрямках протягом 55 секунд, зелений у 2-ому напрямку протягом 120 секунд, червоний в обох напрямках протягом 55 секунд. Червоне світло горить в обох напрямках для того, щоб автомобілі, які в'їхали на ділянку дороги, змогли залишити його до переключення зеленого світла на інший напрямок.

Метою моделювання є визначення середнього часу очікування автомобілів в обох напрямках.

Розв'язання. Об'єктами обслуговування є автомобілі. Обслуговування здійснюється переїздами на зелене світло світлофора у двох напрямках. Поставимо у відповідність кожному напрямку руху автомобілів СМО з одним каналом обслуговування і необмеженою чергою автомобілів: СМО₁ для першого напрямку і СМО₂ для другого напрямку. Канали обох СМО затримують кожний автомобіль, що намагається переїхати ділянку руху, протягом 2 секунд. Після обслуговування автомобілі залишають систему.

Оскільки переїзд ділянки в кожному напрямку, що ремонтується, здійснюється тільки на зелене світло, то обслуговування СМО здійснюється тільки за умови горіння зеленого світла. Засобами мереж масового обслуговування таку поведінку СМО можна описати за допомогою блокувань маршруту слідування об'єктів обслуговування. Поставимо у кожному напрямку руху блокування маршрутів слідування і опишемо правила блокування і розблокування маршрутів наступним чином:

протягом часу 100 секунд відкритий рух у першому напрямку, а у другому – блокований, протягом часу 55 секунд рух блокований в обох напрямках, протягом часу 120 секунд відкритий рух у другому напрямку, а у першому – блокований, протягом часу 55 секунд рух блокований в обох напрямках, потім все повторюється знову.

Автомобілі під'їжджають у першому напрямку через інтервали часу, що є випадковою розподіленою за експоненціальним законом величиною з середнім значенням 12 секунд, у другому напрямку – через інтервали часу, що є випадковою розподіленою за експоненціальним законом величиною з середнім значенням 9 секунд.

Таким чином, формалізована модель системи керованого руху автомобілів у двох напрямках має вигляд, що представлений на рисунку 3.30. Для часу надходження використані формули генерування випадкових чисел, що мають експоненціальний закон розподілу, за значенням випадкової рівномірно розподіленої в інтервалі (0,1) величини ζ (див. розділ 5.1). Середній час очікування автомобілів знайдемо, підраховуючи суму часу очікування автомобілів у першому та другому напрямках (першій та другій СМО).

Відповідь: відповіддю є складена мережа масового обслуговування (див. рис 3.30).

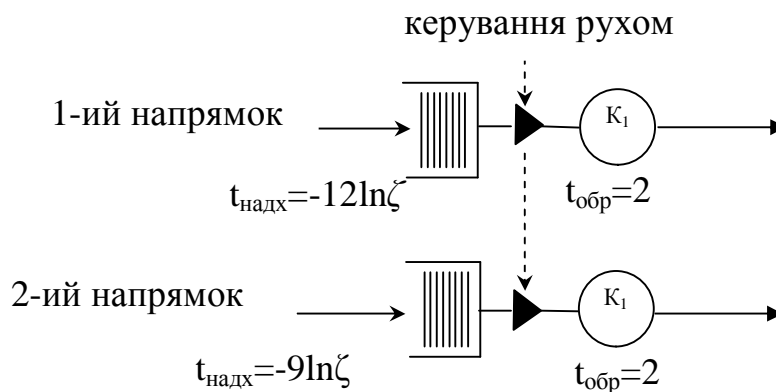


Рисунок 3.30. Мережа масового обслуговування, що представляє формалізовану модель системи керованого руху автомобілів у двох напрямках

■ **Задача 4.** Складіть мережу Петрі для наступної задачі:

На комплектуючий конвеєр збирального цеху в середньому через 10 хвилин поступають 10 деталей 1-го типу і в середньому через 40 хвилин поступають 40 деталей 2-го типу. Конвеєр складається з секцій, які вміщують по 20 деталей кожного типу. Комплектація починається тільки при наявності деталей обох типів у потрібній кількості і продовжується 20 хвилин. При нестачі деталей секція конвеєру залишається пустою. Метою моделювання є визначення ймовірності пропуску секції, середньої довжини черг по кожному типу деталей.

Розв’язання. Виділимо події, які відбуваються в даній конвеєрній системі:

- * надходження деталей 1-ого типу;
- * надходження деталей 2-ого типу;
- * надходження секції конвеєра;
- * комплектація;
- * пропуск секції.

Події «надходження деталей 1-ого типу», «надходження деталей 2-ого типу» та «надходження секції конвеєра» виконуються незалежно від стану системи, тому у вхідних позиціях цих подій повинна бути необхідна кількість маркерів. Для здійснення події «комплектація» потрібно виконання таких умов:

- 1) в черзі деталей 1-ого типу є 20 деталей;
- 2) в черзі деталей 2-ого типу є 20 деталей;
- 3) є секція конвеєра;

Здійснення події «пропуск секції» відбувається за умови, що є секція конвеєра, але комплектація не відбувається через відсутність деталей у необхідній кількості.

З'єднуючи події та умови зв'язками отримаємо мережу Петрі, яка представлена на рисунку 3.31. Переходу «комплектація» тут потрібно присвоїти більший пріоритет в порівнянні з переходом «пропуск секції», інакше модель буде працювати не вірно. Це значить, що при одночасному виконанні умови запуску переходів «комплектація» та «пропуск секції» завжди запускається перехід «комплектація». Для переходів задаються такі часові затримки:

- «надходження деталей 1-ого типу» – в середньому 10 хвилин ($t=10 \cdot \ln z$);
- «надходження деталей 2-ого типу» – в середньому 40 хвилин ($t=40 \cdot \ln z$);
- «надходження секції конвеєра» – 20 хвилин ($t=20$);
- «комплектація» – 20 хвилин ($t=20$);
- «пропуск секції» – без затримки ($t=0$).

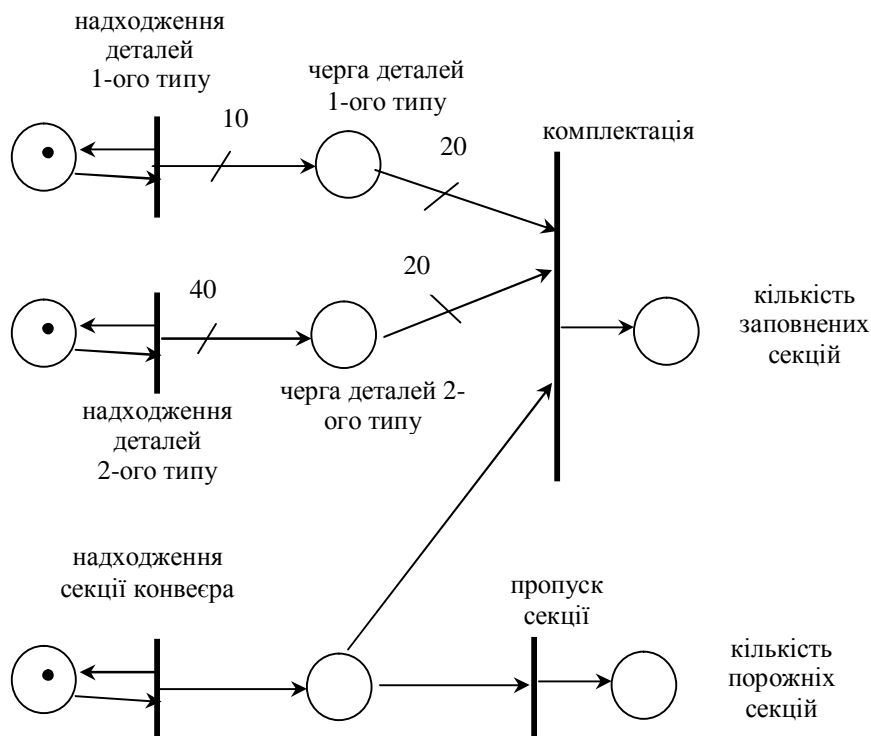


Рисунок 3.31. Мережа Петрі, що представляє формалізовану модель системи конвеєрної зборки деталей

Для визначення ймовірності пропуску секції конвеєра скористаємось значеннями позицій «кількість заповнених секцій» та «кількість порожніх секцій»:

$$\text{ймовірність пропуску секції} = \frac{\text{кількість порожніх секцій}}{\text{кількість заповнених секцій} + \text{кількість порожніх секцій}}$$

Середню довжину черги i -ого типу деталей знайдемо, спостерігаючи значення позиції «черга деталей i -ого типу»:

$$\text{середня довжина черги} = \frac{\sum_{k=1}^n \text{черга деталей}_k \cdot \Delta t_k}{T_{\text{mod}}},$$

де черга деталей_k – k -те спостереження черги.

Відповідь: відповіддю є мережа Петрі (див. рис. 3.31) та формули для визначення статистичних характеристик роботи моделі.

■ **Задача 5.** Складіть мережу Петрі для наступної задачі:

Вантажі прибувають для відправлення в аеропорт у контейнерах із інтенсивністю два контейнери за 1 хвилину. Вантажний аеропорт не має фіксованого розкладу, а літаки відправляються по мірі їх повного завантаження. У розпорядженні є два типи літаків для перевезення вантажів. Є три літаки з вантажопідіймальністю 80 контейнерів і два літаки з вантажопідіймальністю 140 контейнерів. Час польоту кожного літака туди й назад розподілено нормально з математичним сподіванням 3 години, середньоквадратичним відхиленням 1 година, мінімумом 2 години, максимумом 4 години. Керуючий аеропортом намагається якнайчастіше використовувати літаки меншої вантажопідіймальності. Літаки, що піднімають 140 контейнерів, використовуються тільки тоді, коли інших немає в наявності. Припускається, що часом завантаження можна не враховувати.

Метою моделювання є визначення 1) середнього часу очікування контейнерів із вантажами, 2) середнього завантаження літаків обох типів.

Розв'язання. Виділимо події, які відбуваються в даному аеропорті:

- * прибуття контейнерів;
- * завантаження великого літака (вантажопідіймальністю 140 контейнерів);
- * завантаження маленького літака (вантажопідіймальністю 80 контейнерів);
- * політ великого літака;
- * політ маленького літака;

Подія «прибуття контейнерів» відбувається незалежно від стану системи. Подія «завантаження маленького літака» відбувається за умови наявності в аеропорту 80 контейнерів та маленького літака. Подія «завантаження великого літака» відбувається за умови наявності 140 контейнерів та великого літака. Крім того, за умовами задачі подія «завантаження великого літака» має менший пріоритет ніж подія «завантаження маленького літака».

Подія «політ літака» відбувається за умови, що літак завантажений.

З'єднуємо події та умови зв'язками і отримуємо мережу Петрі, яка представлена на рисунку 3.32. Для переходів задаються наступні часові затримки:

«надходження контейнерів» – 0,5 хвилин ($t=0,5$);
 «завантаження літака» (великого чи малого) – без затримки ($t=0$);
 «політ великого літака»(великого чи малого) –

$$t = \begin{cases} 120 \text{ хв, якщо } r < 120 \\ r \text{ хв, якщо } 120 \leq r \leq 240, \text{ де } r = \left(\sum_{i=1}^{12} z_i - 6 \right) + 180. \\ 240 \text{ хв, якщо } r > 240 \end{cases}$$

Середнє завантаження літаків знайдемо, спостерігаючи значення маркірування в позиціях «три маленьких літака» та «два великих літака»:

середнє завантаження маленьких літаків = 3 - середнє значення маркірування «три маленьких літака»

середнє завантаження великих літаків = 2 - середнє значення маркірування «два великих літака»

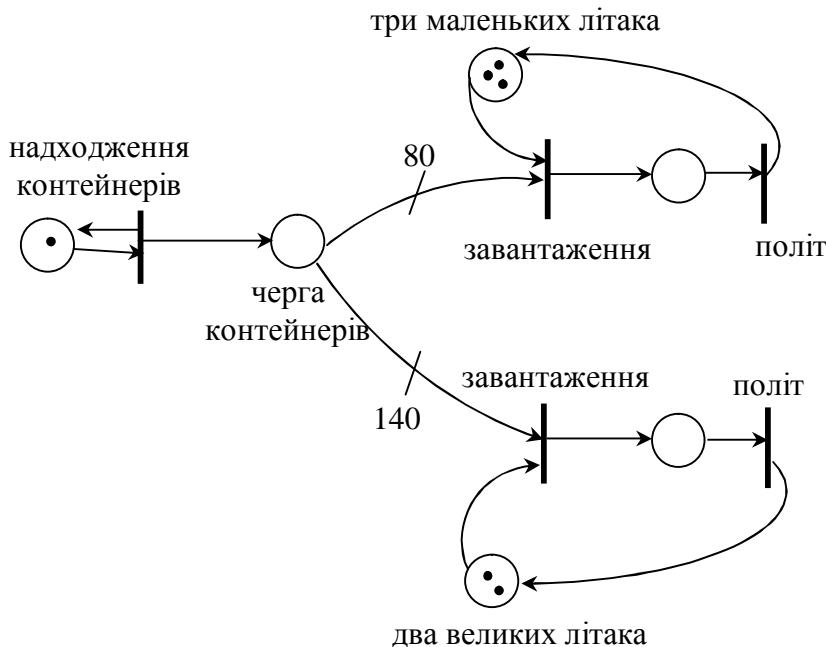


Рисунок 3.32. Мережа Петрі, що представляє формалізовану модель системи перевезення вантажів літаками двох типів

Відповідь: відповіддю є мережа Петрі (див. рис. 3.32) та формули для розрахунку вихідних величин моделі.

■ **Задача 6.** Складіть мережу Петрі для задачі 3 (система керованого світлофорами руху автомобілів у двох напрямках):

Розв’язання. На відміну від попередніх задач в даній системі присутнє управління об’єктом моделювання.

Виділимо події, які відбуваються в системі управління:

- * горить зелене світло в першому напрямку;
- * горить червоне світло в обох напрямках;
- * горить зелене світло в другому напрямку;

- * горить червоне світло в обох напрямках;

Виділимо події, які відбуваються при переїзді машин в першому та другому напрямках:

- * надійшла машина в першому напрямку;
- * переїзд машини в першому напрямку;
- * надійшла машина в другому напрямку;
- * переїзд машини в другому напрямку.

Подія «переїзд машини в першому напрямку» відбувається за умови, що надійшла машина в першому напрямку та є зелене світло в першому напрямку. Так само подія «переїзд машини в другому напрямку».

Подія «горить зелене світло в першому напрямку» відбувається за умови, що вичерпаний час горіння червоного світла в обох напрямках і настав час горіння зеленого світла в першому напрямку. За аналогічних умов здійснюється подія «горить зелене світло в другому напрямку». Події «горить зелене світло в першому напрямку», «горить червоне світло в обох напрямках», «горить зелене світло в другому напрямку», «горить червоне світло в обох напрямках» змінюють одна одну утворюючи коло подій, що відбуваються в підсистемі управління.

Умова «є зелене світло в першому напрямку» виникає разом з умовою «вмикається зелене світло на першому напрямку» і зникає разом з початком горіння червоного світла в обох напрямках. Так само умова «є зелене світло в другому напрямку».

З'єднуємо події та умови зв'язками та отримуємо мережу Петрі, яка представлена на рисунку 3.33.

Усі часові затримки, які передбачаються для переходів, указані на рисунку ($t_1 = -12 \cdot \ln \zeta$, $t_2 = -9 \cdot \ln \zeta$, ζ - рівномірно розподілена в інтервалі (0;1) випадкова величина).

Середню кількість машин, що очікують переїзду, знайдемо, спостерігаючи сумарне значення маркірувань у позиціях «черга машин в першому напрямку» та «черга машин в другому напрямку»:

$$\text{середня_кількість_автомобілів} = \frac{\sum_{k=0}^n (\text{черга_машин_в_1_напр} + \text{черга_машин_в_2_напр})_k}{n},$$

На рисунку ці позиції розташовані між подіями «надійшла машина» та «переїзд машини».

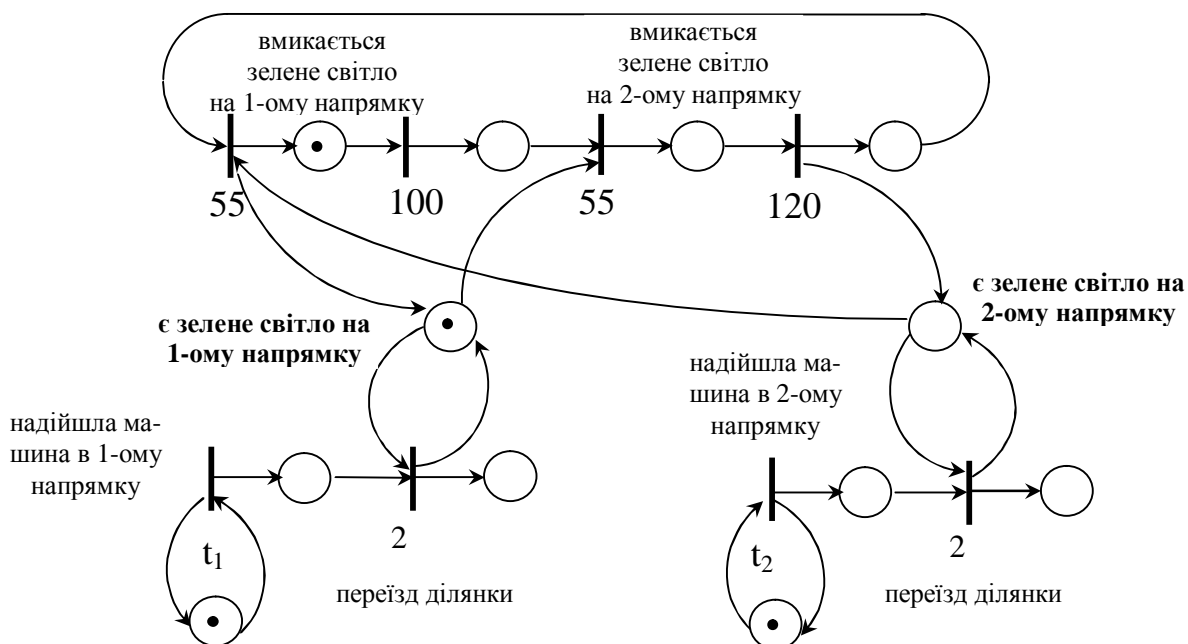


Рисунок 3.33. Мережа Петрі, що представляє формалізовану модель системи транспортного руху у двох напрямках, керованого світлофорами

Зауважимо, що формалізація моделі системи руху автомобілів засобами мереж Петрі (на відміну від представлення її мережами МО в задачі 3) дозволяє описати керування рухом тими ж засобами, що і рух автомобілів. Тобто рівень формалізації підсистеми керування рухом і підсистеми руху автомобілів однаковий. Нагадаємо, що в задачі 3 рух автомобілів описували системами масового обслуговування, а керування рухом – блокуваннями маршрутів слідування із складними правилами переключення.

Відповідь: відповіддю є мережа Петрі (див. рис. 3.33) та формула для розрахунку середньої кількості машин, що очікують переїзду.

■ **Задача 7.** Складіть мережу Петрі для наступної задачі:

Система, що моделюється, складається з одного бульдозера, чотирьох самоскидів і двох механізованих навантажувачів. Бульдозер згрібає землю до навантажувачів. Для початку навантаження перед навантажувачами повинні лежати хоча б дві купи землі. Час, що затрачається бульдозером на підготовку фронту робіт до початку навантаження, має розподіл Ерланга і складається із суми двох експоненціальних величин, кожна з яких має математичне сподівання, рівне 4 (це відповідає закону розподілу Ерланга з математичним сподіванням 8 і дисперсією 32). Крім наявності землі для початку навантаження потрібно навантажувач і порожній самоскид. Час навантаження має експоненціальний закон розподілу з матема-

тичним сподіванням 14 хвилин для 1-ого навантажувача і 12 хвилин для другого. Після того, як самоскид завантажений, навантажувач відпочиває протягом 5хв, а самоскид їде до місця розвантаження, розвантажується і знову повертається на вантаження. Час перебування самоскида в дорозі розподілено нормально, причому у завантаженому стані він витрачає на дорогу в середньому 22 хвилини, а в порожньому – 18 хвилин. Середньоквадратичне відхилення в обох випадках дорівнює 3 хвилини. Час розвантаження розподілено рівномірно на інтервалі від 2 до 8 хвилин. Після вантаження кожного самоскида навантажувач повинний «відпочивати» протягом 5 хвилин, а потім знову може приступати до вантаження.

Метою моделювання є визначення 1) характеристик черг партій вантажу (середні та максимальні значення), 2) завантаження самоскидів 3) завантаження навантажувачів.

Розв'язання. Виділимо події, які відбуваються в даній обчислювальній системі:

- * нагрібання куп землі бульдозером;
- * навантаження першим навантажувачем;
- * навантаження другим навантажувачем;
- * відпочинок першого навантажувача;
- * відпочинок другого навантажувача
- * поїздка самоскида

У дужках указані відповідні часові затримки для переходів. Тут t_1 – час поїздки до місця розвантаження; t_2 – час розвантаження; t_3 - час поїздки до місця навантаження, ζ – випадкова рівномірно розподілена в інтервалі (0,1) величина. Значення 45хв є середнім значенням часу поїздки самоскида ($45=22+5+18$).

З'єднуючи події та умови зв'язками отримаємо мережу Петрі, яка представлена на рисунку 3.34.

Для визначення середньої кількості куп землі скористаємось значенням середнього маркірування в позиції «купи землі»:

$$\text{середня кількість куп землі} = \text{середнє значення маркірування «купи землі»}$$

Для визначення середньої кількості самоскидів в очікуванні скористаємось значенням середнього маркірування в позиції „самоскиди”:

$$\text{середня черга самоскидів} = \text{середнє значення маркірування «самоскиди»}$$

Для визначення середньої черги навантажувачів скористаємось значенням середнього маркірування в позиції «навантажувач 1» та значенням середнього маркірування в позиції «навантажувач 2»:

$$\text{середня черга навантажувачів} = \text{середнє значення маркірування «навантажувач 1»} + \text{середнє значення маркірування «навантажувач 2»}$$

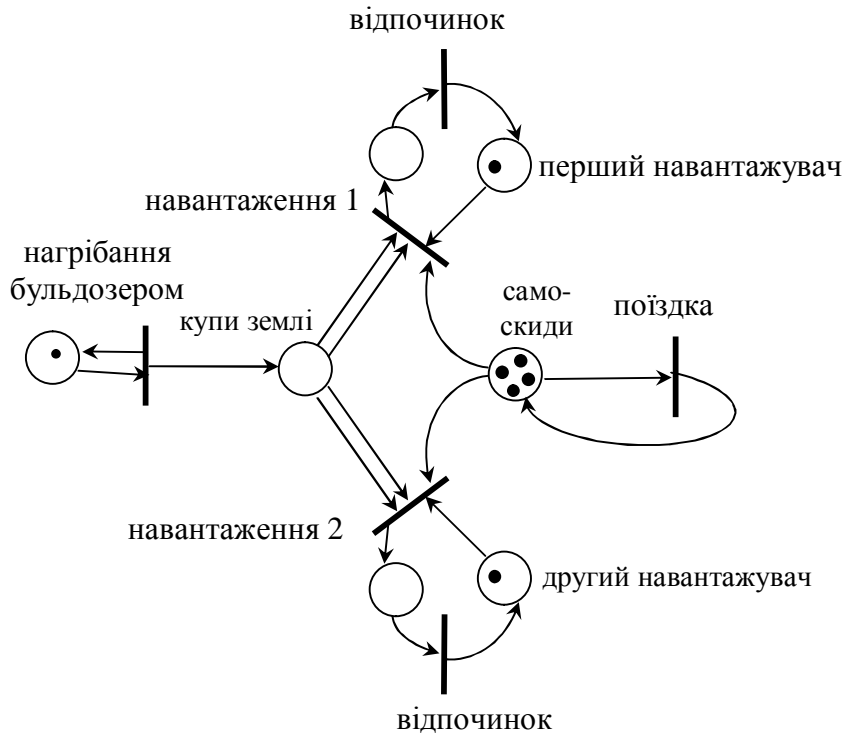


Рисунок 3.34. Мережа Петрі, що представляє формалізовану модель транспортної системи, що складається з бульдозера, навантажувачів та самоскидів

Відповідь: відповіддю є мережа Петрі (див. рис. 3.34) та формули для розрахунку середньої кількості куп землі, середньої кількості самоскидів, середньої черги навантажувачів.

■ **Задача 5.** Складіть мережу Петрі для такої задачі.

Фірма має в місті 6 точок роздрібного продажу. Попит на товари (в од. товару) у цих точках має розподіл Пуассона із математичним сподіванням 10 од. товару в день. Торгові точки обслуговуються оптовим магазином. На передачу запиту торгової точки в магазин потрібно 1 день. Товари за запитом поступають з оптового магазину в торгову точку в середньому через 5 днів після одержання запиту. Ця величина має логнормальний розподіл із дисперсією 1. Оптовий магазин кожні 14 днів розміщує замовлення на фабриці. Час, протягом якого магазин одержує вантаж із фабрики, розподілено нормально з очікуванням 90 днів, середньоквадратичним відхиленням 10 днів; проте замовлення при цьому ніколи не виконується раніше 60 днів і пізніше 120 днів.

Метою моделювання є визначення таких величин: рівень запасу в оптовому магазині, ймовірність невдоволеного запиту торгової точки.

Розв'язання. Виділимо події, які відбуваються в підсистемі «Торгова точка»:

- * надійшов покупець товару;
- * покупка товару;

- * немає товару;
- * передача запиту торгової точки у магазин;
- * одержання товарів за запитом з оптового магазину.

Подія «надійшов покупець товару» відбувається з часовою затримкою $t = -0,1 \cdot \ln V$. Події «покупка товару» та «немає товару» виконуються без затримки. Подія «немає товару» виконується тільки після того, як не виконалась подія «покупка товару». Цей факт можна реалізувати задавши для події «покупка товару» більший пріоритет ніж для події «немає товару».

Подія «передача запиту торгової точки у магазин» відбувається кожний день ($t=1$). Подія «одержання товарів за запитом з оптового магазину» відбувається з часовою затримкою $t=5$ при наявності товарів в оптовому магазині.

Виділимо події, які відбуваються в підсистемі «Виробництво та доставка товарів»:

- * настав час розміщення замовлення на фабриці;
- * магазин одержує вантаж із фабрики.

Для першої з цих подій часова затримка складає $t=14$. Для події «магазин одержує вантаж із фабрики» часова затримка є нормально розподіленою випадковою величиною і розраховується за формулами (1.8) та (1.7):

$$t = \begin{cases} 60 \text{ дн, якщо } r < 60 \\ r \text{ дн, якщо } 60 \leq r \leq 120 \\ 120 \text{ дн, якщо } r > 120 \end{cases} \text{ де } r = 10 \cdot \left(\sum_{i=1}^{12} z_i - 6 \right) + 90.$$

Після таких міркувань отримуємо мережу Петрі, яка представлена на рисунку 3.35. Оскільки в задачі нічого не сказано про кількість товарів, які поступають з оптового магазину до торгової точки та з фабрики до оптового магазину, то ці величини позначені на рисунку невідомими x та y . Виходячи з умов задачі, можна запропонувати, наприклад, значення $x=70$ та $y=1800$.

Середній рівень запасу в торгових точках та в оптовому магазині знайдемо, спостерігаючи кількість маркерів у позиції «Торгова точка» та у позиції «Оптовий магазин»:

$$\text{середній запас} = \frac{\sum_{k=1}^n \text{запас}_k}{n},$$

де запас_k – k -те спостереження запасу в оптовому магазині чи в торговій точці.

Ймовірність невдоволеного попиту знайдемо, підраховуючи кількість невдоволеного попиту у відношенні до загальної кількості попитів на товар:

$$\text{ймовірність невдоволеного попиту} = \frac{\text{кількість невдоволеного попиту}}{\text{кількість попитів}}$$

Торгова точка 1

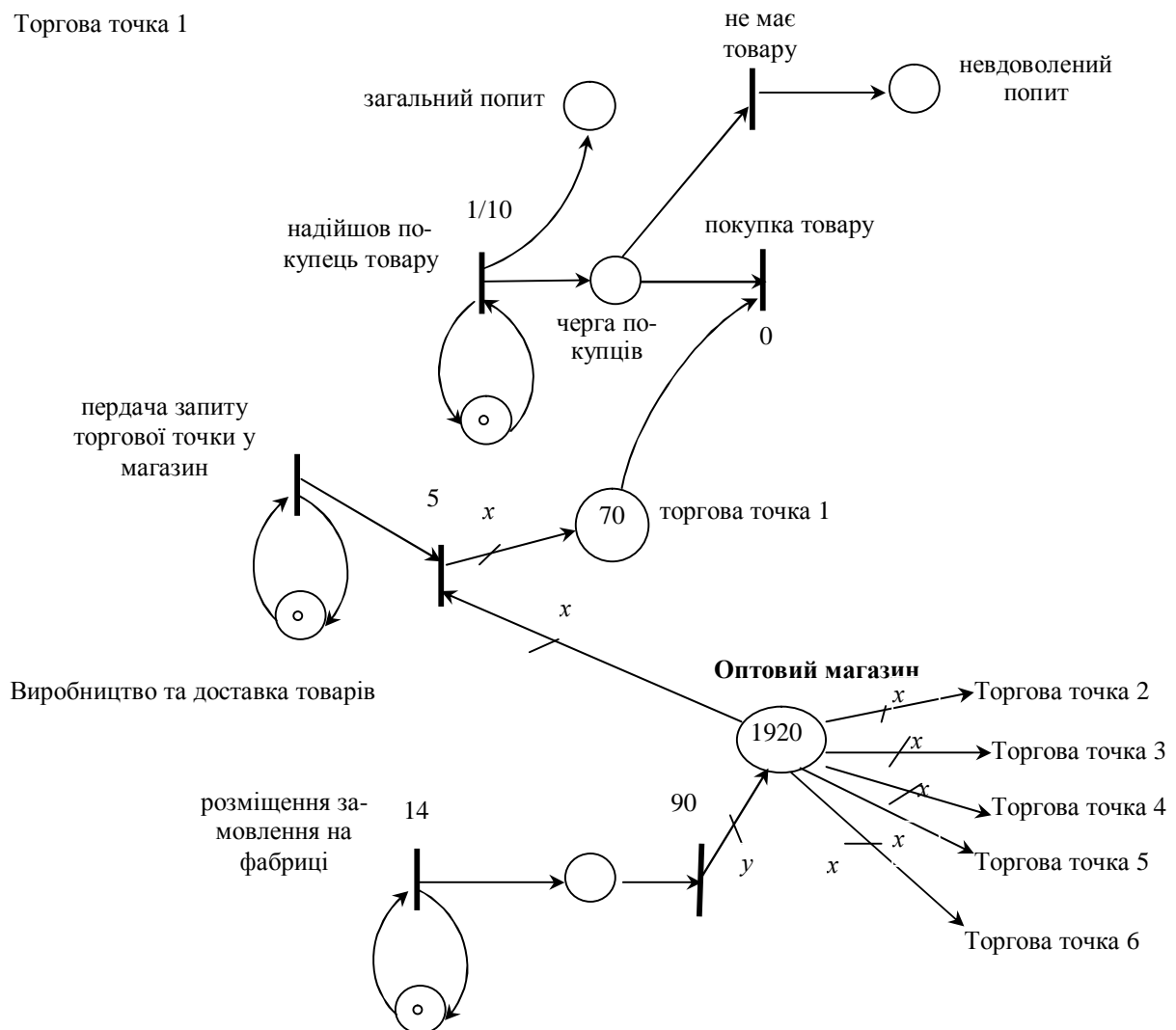


Рисунок 3.35. Мережа Петрі, що представляє формалізовану модель торгівельної системи, що складається з оптового магазину та шістьох торгових точок

Відповідь: відповіддю є мережа Петрі (див. рис. 3.35) та формули для розрахунку середнього запасу в торгових точках та в оптовому магазині, а також ймовірності невдоволеного попиту.

3.8. Завдання для самостійної роботи

□ 1. Складіть формалізовану модель системи засобами мереж масового обслуговування для наступної задачі:

У вузол комутації повідомлень, що складається з вхідного буфера, процесора, двох вихідних буферів і двох вихідних ліній, надходять пові-

домлення з двох напрямків. Повідомлення з одного напрямку надходять у вхідний буфер, обробляються в процесорі, буферуються у вихідному буфері першої лінії і передаються по вихідній лінії. Повідомлення з другого напрямку обробляються аналогічно, але передаються по другій вихідній лінії. Застосований метод контролю потоків потребує одночасної присутності в системі не більш трьох повідомлень на кожному напрямку. Повідомлення надходять через інтервали 15 ± 7 мс. Час обробки в процесорі дорівнює 7 мс на повідомлення, час передачі по вихідній лінії дорівнює 15 ± 5 мс. Якщо повідомлення надходить при наявності трьох повідомлень у напрямку, то воно одержує відмову.

Метою моделювання є визначення завантаження процесора та вихідних ліній, визначення ймовірності відмови в обслуговуванні через переповнення буфера напрямку.

□ 2. Складіть формалізовану модель системи засобами мереж масового обслуговування для наступної задачі:

На регульовальну ділянку цеху через випадкові інтервали часу надходять по два агрегати в середньому через кожні 30 хвилин. Первинне регулювання здійснюється для двох агрегатів одночасно і займає біля 30 хвилин. Якщо в момент приходу агрегатів попередня партія не була оброблена, агрегати на регулювання не приймаються. Агрегати, які одержали відмову, після первинного регулювання надходять у проміжний накопичувач. З накопичувача агрегати, що пройшли первинне регулювання, надходять попарно на вторинне регулювання, яке виконується в середньому за 30 хвилин, а ті, що не пройшли первинне регулювання, надходять на повне регулювання, що займає 100 хвилин для одного агрегату. Всі величини, задані середніми значеннями, мають експоненціальний розподіл.

Метою моделювання є визначення ймовірності відмови в первинному регулюванні, завантаження накопичувача агрегатами, що потребують повного регулювання.

□ 3. Складіть формалізовану модель системи засобами мереж масового обслуговування для наступної задачі:

Філія банку з п'ятьма касами обслуговує клієнтів протягом робочого дня. Інтервали часу між надходженням клієнтів є випадкова величина, що має експоненціальний закон розподілу із середнім значенням 1 хвилина. Час обслуговування клієнтів є випадкова величина, що має експоненціальний розподіл із середнім значенням 4,5 хвилини.

До кожної каси формується окрема черга. Клієнт, що надійшов на обслуговування, обирає найкоротшу чергу, при цьому, якщо найкоротших черг декілька, то клієнт обирає ту, що зліва.

В зв'язку з тим, що керівництво банку цікавлять поточні витрати та якість послуг, що надаються клієнтам, ставиться питання про можливість зменшення кількості кас.

□ 4. Складіть формалізовану модель системи засобами мереж масового обслуговування для наступної задачі:

На складальну ділянку цеху підприємства через інтервали часу, що мають експоненціальний закон розподілу з середнім значенням 10 хвилин, надходять партії, кожна з яких складається з трьох деталей. Половина всіх деталей, що надходять, перед зборкою повинна пройти попередню обробку протягом 7 хвилин. На зборку подаються оброблена і необроблена деталі. Процес зборки займає усього 6 хвилин. Потім виріб надходить на регулювання, що продовжується в середньому 8 хвилин (час виконання має експоненціальний розподіл). У результаті зборки можлива поява 4% бракованих виробів, що не надходять на регулювання, а направляються знову на попередню обробку.

Метою моделювання є визначення можливих місць появи черг та їхніх статистичних характеристик, середньої та максимальної кількості деталей, що знаходиться на складальній ділянці цеху.

□ 5. Складіть мережу Петрі для системи, що описана наступною мережею масового обслуговування (рис. 3.36):

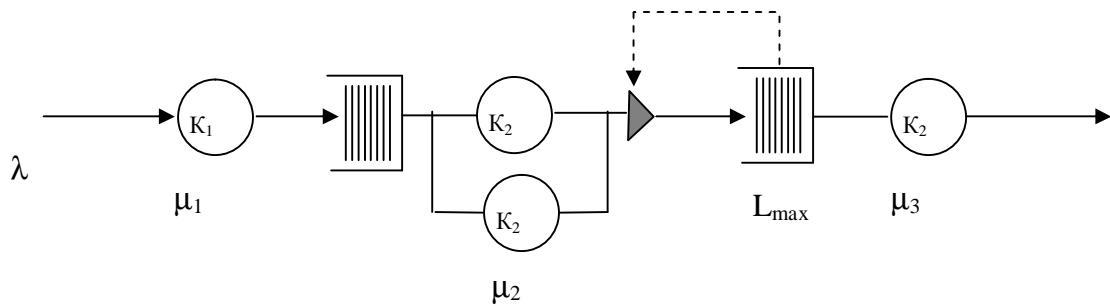


Рисунок 3.36. Мережа МО до задачі 5.

□ 6. Складіть мережу Петрі для системи, що описана наступною мережею масового обслуговування (рис. 3.37):

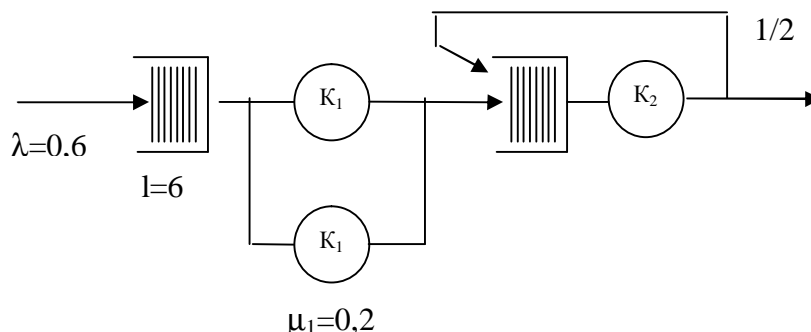


Рисунок 3.37. Мережа МО до задачі 6.

□ 7. Складіть формалізовану модель системи засобами мереж Петрі для наступної задачі.

Завдання поступають на верстат у середньому один верстат у час. Розподіл величини інтервалу між ними експоненціальний. При нормальному режимі роботи завдання виконуються в порядку їхнього надходження. Час виконання завдання нормально розподілений з математичним сподіванням 0,5 години і середньоквадратичним відхиленням 0,1 година. Перед виконанням завдання відбувається наладка верстата, час здійснення якої розподілений рівномірно на інтервалі від 0,2 до 0,5 години. Завдання, які виконані на верстаті, направляються в інші відділи цеху. Верстат страждає від поломок, при яких він не може продовжувати виконання завдання. Інтервали між поломками розподілені нормально з математичним сподіванням 20 годин і середньоквадратичним відхиленням 2 години. При поломці виконуване завдання виймається з верстата і поміщається в початок черги завдань до верстата. Виконання завдання відновляється з того місця, на якому воно було перервано. Коли верстат ламається, починається процес усунення поломки, що складається із трьох фаз. Тривалість кожної фази має експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням, рівним $3/4$ години. Оскільки загальна тривалість усунення поломки є сумою незалежних випадкових величин, що мають експоненціальний закон розподілу з однаковими параметрами, можна вважати, що ця випадкова величина розподілена за законом Ерланга.

Метою моделювання є визначення завантаження верстата і часу виконання завдання.

□ 8. Складіть формалізовану модель системи засобами мереж Петрі для наступної задачі.

Конвеєрна система складається з п'ятих обслуговуючих пристроїв, розташованих уздовж стрічки конвеєра. Деталі надходять на опрацювання на першій пристрій із постійною швидкістю, що складає 4 деталі за 1 хвилину. Тривалість обслуговування на кожному пристрої має експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням 1 хвилину. Вільного місця перед кожним конвеєром немає, тому пристрій може зняти деталь із конвеєра, тільки якщо знаходиться в стані «вільний». Якщо перший пристрій вільний, то деталь обробляється на ньому. По закінченні оброблення деталь залишає систему. Якщо перший пристрій зайнятий у момент надходження деталі, деталь по конвеєру надходить до другого пристрою. Інтервал проходження деталі між пристроями дорівнює 1 хвилину. Якщо при прямуванні деталі по конвеєру всі пристрої були зайняті, вона повертається до першого пристрою з затримкою 5 хвилину.

Метою моделювання є визначення часу перебування деталі в системі, завантаження обслуговуючих пристроїв і числа зайнятих пристроїв.

□ 9. Складіть формалізовану модель системи засобами мереж Петрі для наступної задачі:

Експериментальна роботизована гнучка виробнича система має два верстати із числовим пультом керування, три роботи, пункт прибуття і склад оброблених деталей. Деталі прибувають на пункт прибуття кожні 40 секунд згідно з експоненціальним законом розподілу, захоплюються одним з вільних роботів і переміщуються ним до першого верстата, після чого робот звільняється. Після завершення обробки на першому верстаті деталь захоплюється одним з роботів і переміщується на другий верстат, а після обробки на другому верстаті – одним з роботів переміщується на склад оброблених деталей. Кожний з верстатів може одночасно обробляти до трьох деталей.

Час переміщення робота між пунктом прибуття і першим верстатом, першим і другим верстатом, другим верстатом і пунктом зберігання оброблених деталей складає відповідно 6, 7, і 5 секунд незалежно від того, холостий це хід, чи ні. Роботу потрібний час 8 ± 1 секунд на захоплення або вивільнення деталей. Час обробки на першому верстаті розподілений за нормальним законом із середнім значення 60 секунд і має стандартне відхилення 10 секунд. Середній час обробки на другому верстаті дорівнює 100 секунд і має експоненціальний закон розподілу.

Метою моделювання є визначення коефіцієнтів завантаження роботів і верстатів, максимальної кількості деталей у місці зберігання на ділянці прибуття.

□ 10. Складіть мережу Петрі для такої задачі.

Для забезпечення надійності АСУ ТП у ній використовується два комп'ютери. Перший комп'ютер виконує обробку даних про технологічний процес і виробітку керуючих сигналів, а друга знаходиться в «гарячому резерві». Дані надходять через 10 ± 2 секунд, обробляються протягом 3 секунд, потім посилається керуючий сигнал, що підтримує заданий темп процесу. Якщо до моменту посилки наступного набору даних не отриманий керуючий сигнал, то інтенсивність виконання технологічного процесу зменшується вдвічі і дані посилаються через 20 ± 4 секунд. Основний комп'ютер кожні 30 секунд посилає резервному комп'ютеру сигнал про працездатність. Відсутність сигналу означає необхідність включення резервного комп'ютеру замість основного. Характеристики обох комп'ютерів однакові. Підключення резервного комп'ютеру займає 5 секунд, після цього він заміняє основний комп'ютер до відновлення, а процес повертається до нормального темпу. Відмови комп'ютерів відбуваються через 300 ± 30 секунд. Відновлення комп'ютерів займає 100 секунд. Резервний комп'ютер абсолютно надійний.

Метою моделювання є визначення таких величин: середній час перебування технологічного процесу в загальмованому стані і середнє кількість пропущених через відмови даних.

□ 11. Складіть мережу Петрі для такої задачі.

В африканському порту танкери завантажуються сировою нафтою, що морським шляхом доставляють потім по призначенню. Потужності порту дозволяють завантажувати не більш трьох танкерів одночасно. Танкери, що прибувають у порт через кожні 11 ± 7 годин, відносяться до трьох різних типів. Значення відносної частоти появи танкерів даного типу і часу, необхідного на вантаження, приведені нижче:

Тип	Відносна частота	Час вантаження, годин
1	0,25	18 ± 2
2	0,55	24 ± 3
3	0,20	36 ± 4

У порту є один буксир, послугами якого користуються всі танкери при причалювання та відчалюванні. Причалювання та відчалювання займають приблизно 1 годину, причому, якщо послуг буксира потребують відразу декілька танкерів, пріоритет віддається операції причалювання. Судновласник пропонує дирекції порту укласти контракт на перевезення нафти в Англію і забезпечити виконання умов контракту за допомогою п'ятих танкерів особливого, четвертого типу, що на вантаження потребують 21 ± 3 годин. Після вантаження танкер відчалює і впливає в Англію, там розвантажуються і потім знову повертається в африканський порт для вантаження. Час циклу обертання танкера, включаючи час розвантаження, складає 240 ± 24 годин. Фактором, що ускладнює процес перевезення нафти, є шторми, яким піддається порт. Інтервал часу між штормами має експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням 48 годин, причому шторм продовжується 4 ± 2 години. Під час шторму буксир не працює.

Перед укладанням контракту керівництво порту вирішило визначити вплив, що вчинять п'ять додаткових танкерів на час перебування в порту інших судів. Отже, метою моделювання є визначення середнього та максимального часу перебування в порту додаткових танкерів і вже працюючих танкерів трьох типів.

3.9. Контрольні запитання

- 1) З яких елементів складається мережа масового обслуговування?
- 2) Як скласти мережу масового обслуговування за умовою задачі?
- 3) За якими правилами здійснюється функціонування мережі масового обслуговування?
- 4) Які системи підлягають формалізації засобами мереж масового обслуговування?
- 5) Що означає термін «блокування пристрою»? «блокування маршруту»?

- 6) В яких випадках використовуються мережі масового обслуговування з блокуванням?
- 7) З яких елементів складається мережа Петрі?
- 8) Як побудувати мережу Петрі?
- 9) Що є умовою запуску переходу мережі Петрі?
- 10) У чому полягає запуск переходу мережі Петрі?
- 11) Що описує маркірування мережі Петрі?
- 12) У чому різниця звичайної мережі Петрі і мережі Петрі з часовими затримками?
- 13) Як здійснюється запуск переходів мережі Петрі з часовою затримкою?
- 14) За якими правилами здійснюється функціонування мережі Петрі з часовими затримками?
- 15) Дайте визначення багатоканального переходу мережі Петрі.
- 16) За якими правилами здійснюється функціонування мережі Петрі з багатоканальними переходами?
- 17) За яких умов виникає конфлікт у мережі Петрі?
- 18) Дайте визначення конфліктних переходів мережі Петрі?
- 19) Які способи розв'язання конфлікту Ви знаєте?
- 20) За якими правилами здійснюється функціонування мережі Петрі з конфліктними переходами?
- 21) Дайте визначення інформаційного зв'язку мережі Петрі.
- 22) Сформулюйте правило запуску переходу з інформаційним зв'язком.
- 23) За якими правилами здійснюється функціонування мережі Петрі з інформаційними зв'язками?
- 24) Як побудувати подію «надходження об'єктів»?
- 25) Як побудувати подію «зборка»?
- 26) Як побудувати подію «зайняти один з двох вільних пристроїв»?
- 27) Як побудувати подію «зайняти половину використовуваного ресурсу»?
- 28) Як побудувати подію «поломка»?
- 29) Які системи підлягають формалізації засобами мереж Петрі?

Розділ 4

АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Аналітичні моделі мереж МО виходять з таких *припущень*:

1) Випадкова величина «час обробки вимоги каналом обслуговування СМО» є випадковою величиною, яка розподілена за експоненціальним законом з відомим параметром. Параметр розподілу дорівнює інтенсивності обробки вимоги одним каналом СМО.

2) Випадкова величина «час надходження вимоги в мережу МО» є випадковою величиною, яка розподілена за експоненціальним законом з відомим параметром. Параметр розподілу дорівнює інтенсивності надходження вимог до мережі МО.

3) Усі черги необмеженої величини. При моделюванні це припущення означає, що в системі не виникає ситуації «відсутнє місце в черзі СМО».

4) Відомі ймовірності слідування вимоги з однієї СМО до іншої, або до неї ж самої. Допускаються складні маршрути вимог із розгалуженнями та поверненнями, проте не допускаються блокування маршрутів.

4.1. Аналітичне моделювання розімкнутих мереж масового обслуговування

Вхідними змінними аналітичної моделі розімкнутої мережі МО є:

- кількість n систем масового обслуговування СМО₁, СМО₂, ..., СМО_n, що складають мережу МО;
- інтенсивність I_0 надходження вимог до мережі МО;
- матрицею ймовірностей $\|p_{ij}\|$, елемент якої p_{ij} - це ймовірність слідування вимоги зі СМО_i у СМО_j;
- кількість каналів обслуговування r_i у СМО_i;
- інтенсивність m_i обслуговування вимог кожним каналом СМО_i.

Вихідними змінними аналітичної моделі розімкнутої мережі МО є:

- середня довжина черги СМО_i;
- середній час очікування в черзі СМО_i;
- середня кількість зайнятих пристроїв в СМО_i;
- середня кількість вимог в СМО_i;
- середній час обслуговування в СМО_i;
- середній час обслуговування в мережі МО.

Дослідження розімкнутої мережі МО проводять при наявності сталого режиму. У сталому режимі інтенсивність надходження вимог до СМО_i дорівнює інтенсивності, з якою вимоги залишають СМО_i. Такий

режим у розімкнутій мережі МО можливий, якщо для кожної СМО_i інтенсивність вхідного в СМО_i потоку вимог менша інтенсивності їх обслуговування:

$$I_i < m_i \cdot r_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (4.1)$$

Вхідний у СМО_i потік вимог складається із вимог, що виходять із СМО_j ($j=1..n$) і з ймовірністю p_{ji} попадають у СМО_i, та з частки вхідного потоку p_{0i} , що надходить до мережі МО ззовні. Отже, інтенсивності I_i задовольняють системі рівностей:

$$I_i = \sum_{j=0}^n p_{ji} \cdot I_j \quad i=1, \dots, n \quad (4.2)$$

Уведемо коефіцієнти передачі e_i як долю вхідного потоку вимог, що надходить до СМО_i:

$$I_i = e_i \cdot I_0, \quad i=1, \dots, n. \quad (4.3)$$

Число e_i є середня кількість разів, що вимога проходить через СМО_i з того моменту як вона надійшла до мережі МО до того моменту, коли вона залишила мережу МО. Підставимо (4.3) до системи рівнянь (4.2) і отримаємо систему рівнянь для відшукування коефіцієнтів передачі e_i :

$$e_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^n p_{ji} \cdot I_j \quad i=1, \dots, n. \quad (4.4)$$

Звідси видно, що значення e_i цілком залежать від значень p_{ij} , які задають маршрути слідування вимог по мережі МО.

Умова сталого режиму (4.1) при підстановці (4.3) перетворюється в систему нерівностей:

$$I_0 < \frac{m_i \cdot r_i}{e_i}, \quad i=1, \dots, n, \quad (4.5)$$

Ймовірність того, що в багатоканальній СМО з необмеженою чергою знаходиться k вимог, є функція від аргумента k :

$$p(k) = \left(\frac{I}{m}\right)^k \cdot C \cdot \begin{cases} \frac{1}{k!} & \text{при } k \leq r \\ \frac{1}{r! \cdot r^{k-r}} & \text{при } k > r \end{cases}, \quad (4.6)$$

де I - інтенсивність надходження вимог до СМО, m - інтенсивність обслуговування в каналі СМО, r - кількість каналів, C - нормуючий множник. Нормуючий множник C знаходиться з умови, що сума усіх ймовірностей можливих станів системи дорівнює одиниці:

$$C \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{I}{m}\right)^k \frac{1}{k!} + \sum_{k=r+1}^{\infty} \left(\frac{I}{m}\right)^k \frac{1}{r! \cdot r^{k-r}} \right) = 1.$$

Звідси, за допомогою формули суми геометричної прогресії, знаходимо формулу для розрахунку нормуючого множника:

$$C = \left[\left(\frac{l}{m} \right)^r \cdot \frac{1}{r! \left(1 - \frac{l}{m \cdot r} \right)} + \sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{l}{m} \right)^k \cdot \frac{1}{k!} \right]^{-1}. \quad (4.7)$$

З теорії відомо, що в розімкнутій мережі МО окремі СМО ведуть себе незалежно одна від одної. Тому ймовірність $p(k_1, \dots, k_n)$ того, що в СМО₁ знаходиться k_1 вимог, в СМО₂ знаходиться k_2 вимог, ... в СМО_n знаходиться k_n вимог, дорівнює добутку ймовірностей $p_i(k_i)$ того, що в СМО_i знаходиться k_i вимог:

$$p(k_1, \dots, k_n) = \prod_{i=1}^n p_i(k_i). \quad (4.8)$$

Функції $p_i(k)$, які визначають ймовірності знаходження k вимог в СМО_i, розраховуються так, наче СМО_i відокремлена від інших СМО, а саме за формулами (4.6), (4.7). З урахуванням (4.3) маємо наступні формули для розрахунку ймовірностей $p_i(k)$:

$$p_i(k) = \left(\frac{e_i l_0}{m_i} \right)^{k_i} \cdot C_i \cdot \begin{cases} \frac{1}{k!} & \text{при } k \leq r_i \\ \frac{1}{r_i! r_i^{k-r_i}} & \text{при } k > r_i \end{cases} \quad (4.9)$$

$$C_i = \left[\left(\frac{e_i l_0}{m_i} \right)^{r_i} \cdot \frac{1}{r_i! \left(1 - \frac{e_i l_0}{m_i r_i} \right)} + \sum_{k=0}^{r_i-1} \left(\frac{e_i l_0}{m_i} \right)^k \cdot \frac{1}{k!} \right]^{-1} \quad (4.10)$$

Оскільки значення функції $p_i(k)$ являється ймовірністю знаходження k вимог в СМО_i, то значення, які вона може приймати, належать відрізьку $[0;1]$. Цей факт використовується для перевірки правильності розрахунку значення функції $p_i(k)$.

Правильність розрахунку нормуючих множників C_i перевіряється підрахунком суми всіх ймовірностей:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_i(k) = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Знання ймовірностей $p_i(k)$ дозволяє обчислити основні показники ефективності функціонування розімкненої мережі МО:

- 1) середня кількість вимог у СМО_i знаходиться як математичне сподівання випадкової величини "кількість вимог у черзі"

$$L_i = \sum_{j=r_i+1}^{\infty} (j - r_i) p_i(j); \quad (4.11)$$

- 2) середня кількість зайнятих пристроїв у СМО_i знаходиться як відношення інтенсивності надходження вимог до інтенсивності обслуговування вимог одним пристроєм

$$R_i = \frac{e_i \cdot I_0}{m_i}; \quad (4.12)$$

- 3) середня кількість вимог, що перебувають у СМО_i, знаходиться як сума кількості вимог у черзі та у пристроях

$$M_i = L_i + R_i; \quad (4.13)$$

- 4) середній час очікування в СМО_i знаходиться за другою формулою Літтла [Лабскер]

$$Q_i = \frac{L_i}{e_i \cdot I_0}; \quad (4.14)$$

- 5) середній час перебування вимог у СМО_i знаходиться за першою формулою Літтла [Лабскер]

$$T_i = \frac{M_i}{e_i \cdot I_0}; \quad (4.15)$$

- б) середній час перебування вимог у мережі МО знаходиться як сума часу перебування у кожній СМО з урахуванням кількості разів e_i , що вимога проходить через СМО_i

$$T = \sum_{i=1}^n e_i \cdot T_i. \quad (4.16)$$

Послідовність розрахунку розімкнутої мережі масового обслуговування представлена на рисунку 4.1.

Аналітичне моделювання розімкнутої мережі масового обслуговування	Формування множини вхідних даних
	Розрахунок коефіцієнтів передачі
	Перевірка умови сталого режиму
	Розрахунок нормуючих множників для кожної СМО окремо
	Визначення функцій, що задають ймовірності знаходження k вимог в СМО _i
	Розрахунок показників ефективності функціонування мережі масового обслуговування
	Аналіз отриманих результатів моделювання

Рисунок 4.1. Послідовність дій, що виконують у випадку аналітичного моделювання розімкнутої мережі масового обслуговування

4.2. Аналітичне моделювання замкнутих мереж масового обслуговування

Вхідними змінними аналітичної моделі замкнутої мережі MO_ϵ :

- кількість n систем масового обслуговування $СМО_1, СМО_2, \dots, СМО_n$, що складають мережу MO ;
- кількість N вимог в мережі MO ;
- матрицею ймовірностей $\|p_{ij}\|$, елемент якої p_{ij} – це ймовірність слідування вимоги із $СМО_i$ у $СМО_j$;
- кількість каналів обслуговування r_i в $СМО_i$;
- інтенсивність μ_i обслуговування вимог кожним каналом $СМО_i$.

Вихідними змінними аналітичної моделі замкнутої мережі MO_ϵ :

- середня довжина черги $СМО_i$;
- середня кількість зайнятих пристроїв в $СМО_i$;
- інтенсивність надходження вимог до $СМО_i$;
- середня кількість вимог в $СМО_i$;
- середній час очікування в черзі $СМО_i$;
- середній час обслуговування в $СМО_i$.

В замкнутій мережі MO , оскільки кількість вимог в ній незмінна, сталий режим існує за будь яких значень вхідних змінних. Тому перевірка на існування сталого режиму не потрібна.

Маршрут вимоги в замкнутій мережі не має ні початку ні кінця, проте для подальших розрахунків зручно вважати, що початком маршруту є, наприклад, $СМО_1$. Тоді визначимо *коефіцієнти передачі* e_i як долю потоку вимог I_1 , що надходить до $СМО_i$:

$$I_i = e_i \cdot I_1, \quad i=2, \dots, n. \quad (4.17)$$

Очевидно, $e_1=1$. Інші e_i показують середню кількість разів, що вимога проходить через $СМО_i$ $i=2, \dots, n$, з тих пір як вона вийшла з $СМО_1$ до тих пір, поки вона знову з'явилась в цій $СМО$.

У сталому режимі середня кількість вимог, що надходить до $СМО_i$, дорівнює середній кількості вимог, що залишають її, тому значення I_i задовольняють системі рівностей:

$$I_i = \sum_{j=1}^n p_{ji} \cdot I_j \quad i=1, \dots, n \quad (4.18)$$

Після підстановки (4.17) у (4.18) дістаємо систему рівнянь для відшукування коефіцієнтів передачі e_i :

$$e_i = \sum_{j=1}^n p_{ji} \cdot e_j \quad i=1, \dots, n \quad (4.19)$$

Ця система має безліч розв'язків, але якщо пригадати, що $e_l=1$, то отримаємо єдиний розв'язок.

Стан замкнутої мережі МО описується кількістю вимог k_i в кожній СМО_i, але у випадку замкнутої мережі МО сумарна кількість вимог повинна дорівнювати одному й тому самому числу N :

$$\sum_{i=1}^n k_i = N.$$

Наприклад, для мережі, що складається з двох СМО ($n=2$) і обслуговує три вимоги ($N=3$), можливі стани описуються парами чисел (0;3), (1;2), (2;1), (3;0). Тобто в першій СМО – 0 вимог, а в другій – 3 вимоги; в першій СМО – 1 вимога, а в другій – 2 вимоги і т.д.

Отже, в замкнутої мережі МО окремі СМО залежать одна від одної і формула (4.8) у цьому випадку не вірна.

Ймовірність $p(k_1, \dots, k_n)$ стану замкнутої мережі (k_1, \dots, k_n) дорівнює добутку функцій $p_i(k_i)$, значення яких залежать від змінних k_i , e_i , m_i , r_i , і нормуючого множника $C(N)$, значення якого залежить від кількості вимог в мережі N :

$$p(k_1, \dots, k_n) = C(N) \cdot \prod_{i=1}^n p_i(k_i), \quad (4.20)$$

де

$$p_i(k) = \left(\frac{e_i}{m_i} \right)^k \cdot \begin{cases} \frac{1}{k!} \text{ при } k \leq r_i \\ \frac{1}{r_i! r_i^{k-r_i}} \text{ при } k > r_i \end{cases}, \quad (4.21)$$

Функції $p_i(k)$ у випадку замкнутої мережі масового обслуговування не мають фізичного змісту такого, як у випадку розімкнутої мережі масового обслуговування, і можуть приймати будь-яке значення.

Позначенням $C(N)$ підкреслюють, що значення нормуючого множника $C(N)$ залежить від кількості вимог N в мережі масового обслуговування.

Нормуючий множник знайдемо з умови, що сума всіх ймовірностей повинна дорівнювати одиниці:

$$\sum_{(k_1, \dots, k_n)} p(k_1, \dots, k_n) = C(N) \sum_{(k_1, \dots, k_n)} \prod_{i=1}^n p_i(k_i) = 1, \quad (4.22)$$

Звідси,

$$C(N) = \left(\sum_{(k_1, \dots, k_n)} \prod_{i=1}^n p_i(k_i) \right)^{-1}, \quad (4.23)$$

де підсумовування проводиться по всіх можливих станах мережі МО.

Наприклад, для замкнутої мережі, що складається з двох СМО, формула (4.23) набуває вигляду:

$$C(N) = \left(\sum_{a=0}^N p_1(a) \cdot p_2(N-a) \right)^{-1}, \quad (4.24)$$

оскільки всі можливі стани – це такі, що в першій СМО a вимог ($a=0, 1 \dots N$), а в другій - $N-a$ вимог. Для замкнутої мережі, що складається з трьох СМО, всі можливі стани – це такі, що в першій СМО a вимог, в другій - b вимог, а в третій – решта, тобто $N-a-b$. Тому формула (4.23) набуває вигляду:

$$C(N) = \left(\sum_{a=0}^N p_1(a) \cdot \sum_{b=0}^{N-a} p_2(b) p_3(N-a-b) \right)^{-1}. \quad (4.25)$$

Після того як розрахований нормуючий множник, значення ймовірностей $p(k_1, \dots, k_n)$ є відомими (див. формулу 4.20). Ймовірність того, що в СМО _{i} знаходиться рівно j вимог складається з можливостей “в СМО _{i} j вимог, а в інших СМО розподіляється решта вимог”, тобто:

$$P_{СМО_i}(j) = \sum_{(k_1, \dots, j, \dots, k_n)} p(k_1, \dots, j, \dots, k_n) \quad (4.26)$$

Наприклад, для замкнутої мережі, що складається з двох СМО, ймовірність того, що в першій СМО – j вимог, дорівнює

$$P_{СМО_1}(j) = p(j, N-j) = C(N) p_1(j) p_2(N-j). \quad (4.27)$$

А ймовірність того, що в другій СМО – j вимог, дорівнює

$$P_{СМО_2}(j) = p(j, N-j) = C(N) p_1(N-j) p_2(j). \quad (4.28)$$

Для замкнутої мережі, що складається з трьох СМО, ймовірність того, що в першій СМО – j вимог, дорівнює

$$P_{СМО_1}(j) = \sum_{a=0}^{N-j} p(j, a, N-j-a) = C(N) \sum_{a=0}^{N-j} p_1(j) p_2(a) p_3(N-j-a). \quad (4.29)$$

Ймовірність того, що в другій СМО – j вимог, дорівнює

$$P_{СМО_2}(j) = \sum_{a=0}^{N-j} p(a, j, N-j-a) = C(N) \sum_{a=0}^{N-j} p_1(a) p_2(j) p_3(N-j-a). \quad (4.30)$$

Ймовірність того, що в третій СМО – j вимог, дорівнює

$$P_{СМО_3}(j) = \sum_{a=0}^{N-j} p(a, N-j-a, j) = C(N) \sum_{a=0}^{N-j} p_1(a) p_2(N-j-a) p_3(j). \quad (4.31)$$

Оскільки функції $P_{СМО_i}(j)$ являються ймовірностями знаходження j вимог в СМО _{i} , то її значення належать відрізьку $[0;1]$.

Правильність розрахунку нормуючого множника перевіряється підрахунком суми усіх ймовірностей:

$$\sum_{j=0}^N P_{СМО_i}(j) = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

Знання ймовірностей $P_{CMO_i}(j)$ дозволяє обчислити основні показники ефективності функціонування розімкненої мережі МО:

- 1) середня кількість вимог у черзі СМО_i розраховується як математичне сподівання випадкової величини „кількість вимог у черзі”:

$$L_i = \sum_{j=r_i+1}^N (j - r_i) \cdot P_{CMO_i}(j), \quad (4.32)$$

- 2) середня кількість зайнятих пристроїв у СМО_i розраховується як загальна кількість пристроїв мінус середня кількість вільних пристроїв:

$$R_i = r_i - \sum_{j=0}^{r_i-1} (r_i - j) P_{CMO_i}(j); \quad (4.33)$$

- 3) середня кількість вимог у СМО_i розраховується як сума кількості вимог у черзі і у пристроях:

$$M_i = L_i + R_i; \quad (4.34)$$

- 4) інтенсивність вихідного потоку вимог у СМО_i:

$$I_i = R_i \cdot m_i; \quad (4.35)$$

- 5) середній час перебування вимоги в СМО_i:

$$T_i = \frac{M_i}{I_i} \text{ (друга формула Літтла);} \quad (4.36)$$

- 6) середній час очікування в черзі СМО_i:

$$Q_i = \frac{L_i}{I_i} \text{ (перша формула Літтла).} \quad (4.37)$$

Отримані результати ретельно аналізують. Спочатку намагаються перевірити результати розрахунків, щоб мати певну степінь довіри до них. Наприклад, якщо середня довжина черги деякої СМО_i значна, а канали обслуговування її майже вільні, то це свідчить про неправильність виконаних розрахунків. Якщо сума вимог, що перебувають у різних СМО замкнутої мережі МО, не дорівнює заданому числу N , то це також свідчить про неправильність розрахунків і т.д. Після такої перевірки дослідник має певну довіру до результатів розрахунків і може використати їх для якісної оцінки ефективності функціонування заданої мережі МО і запропонувати заходи щодо поліпшення її роботи. Наприклад, якщо канали обслуговування майже вільні, можна запропонувати зменшити кількість каналів обслуговування, або збільшити інтенсивність надходження вимог до даної СМО і т.і.

Наприкінці зауважимо, що основне призначення розрахунків мереж МО – якісний аналіз їх функціонування. Не варто вважати, що, якщо в розрахунках знайдене значення середньої довжини черги 18,3, то в реальній системі не може спостерігатись значення 16. Але якщо в одній СМО середня довжина черги вдвічі більше за середню довжину чергу в іншій,

то і в реальній системі черга першої СМО буде майже вдвічі більша за чергу в другій СМО.

Послідовність розрахунку замкнутої мережі масового обслуговування представлена на рисунку 4.2.

Аналітичне моделювання замкнутої мережі масового обслуговування	Формування множини вхідних даних
	Розрахунок коефіцієнтів передачі
	Розрахунок нормуючого множника для мережі МО
	Визначення допоміжних функцій $p_i(k)$ для кожної СМО _{<i>i</i>}
	Визначення функцій, що задають ймовірності знаходження k вимог в СМО _{<i>i</i>}
	Розрахунок показників ефективності функціонування мережі масового обслуговування
	Аналіз отриманих результатів моделювання

Рисунок 4.2. Послідовність дій, що виконують у випадку аналітичного моделювання замкнутої мережі масового обслуговування

4.3. Аналітичне дослідження властивостей мереж Петрі

Теорія та дослідження властивостей мереж Петрі викладені у [Питерсон].

Для математичного описування процесів, що відбуваються в мережі Петрі необхідно перейти від текстових назв переходів та позицій до нумерованих їх назв (рис. 4.3).

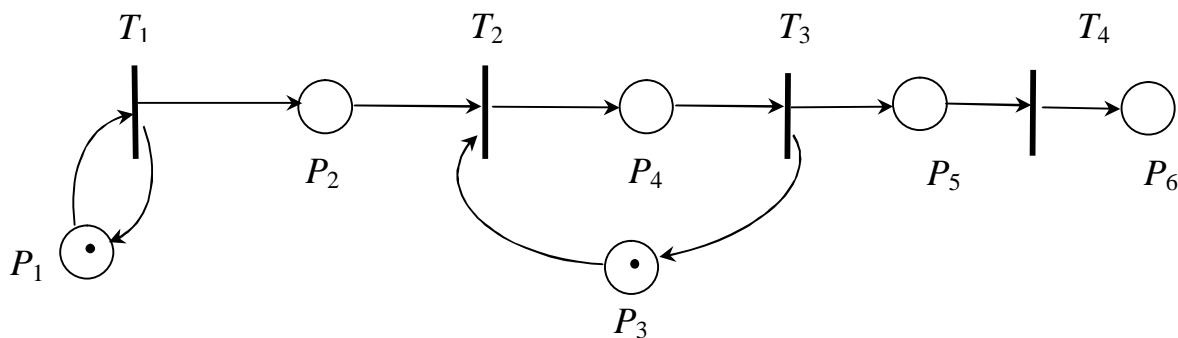


Рисунок 4.3. Формалізована мережа Петрі, яка представляє процес обслуговування клієнтів банкоматом

Зв'язки між позиціями та переходами зручно представити за допомогою матриці входів та матриці виходів. У відповідність кожному j -тому рядочку матриці поставимо перехід T_j , а кожному i -тому стовпчику – позицію P_i . Матрицю входів $D^{3/4}$ складемо з елементів $D^{3/4}_{ji}$, які дорівнюють кількості зв'язків між позицією P_i та переходом T_j . А матрицю виходів

D^+ – з елементів D^+_{ji} , які дорівнюють кількості зв'язків між переходом T_j та позицією P_i . Складемо, наприклад, матриці входів та виходів для мережі Петрі, представленій на рисунку 4.2:

$$D^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кількість маркерів в позиціях складає вектор, який називається *маркіруванням*. В графічному представленні мережі Петрі зображується тільки початкове маркірування. В процесі функціонування мережі Петрі маркірування змінюється за простими правилами:

- § якщо у вхідних позиціях переходу T_j є маркери у кількості рівній кількості зв'язків, то виконана *умова запуску переходу T_j* ;
- § якщо умова запуску переходу T_j виконана, то виконується *запуск переходу*: з усіх вхідних позицій переходу T_j маркери видаляються у кількості рівній кількості зв'язків, а в усі вихідні позиції переходу T_j маркери додаються у кількості рівній кількості зв'язків.

Так, для нашого прикладу початкове маркірування представляється вектором $M=(0,1,0,0)$. В результаті послідовного запуску переходів $T_1 - T_2 - T_1 - T_3 - T_1 - T_4 - T_2 - T_3 - T_4 - T_2 - T_3 - T_4$ маркірування мережі Петрі змінюється наступним чином:

$$\begin{aligned} & (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \xrightarrow{T_1} (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \xrightarrow{T_2} (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) \xrightarrow{T_1} \\ & \xrightarrow{T_1} (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) \xrightarrow{T_3} (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0) \xrightarrow{T_1} (1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0) \xrightarrow{T_4} \\ & \xrightarrow{T_4} (1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1) \xrightarrow{T_2} (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1) \xrightarrow{T_3} (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1) \xrightarrow{T_4} \\ & \xrightarrow{T_4} (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2) \xrightarrow{T_2} (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2) \xrightarrow{T_3} (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2) \xrightarrow{T_4} \\ & \xrightarrow{T_4} (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 3) \end{aligned}$$

Введення матриці входів та матриці виходів дозволяє сформулювати правила функціонування мережі Петрі у матричному вигляді:

- § якщо кожна компонента вектора маркірування M_i не менша за елемент матриці входів $D^{\text{вх}}_{ji}$, то умова запуску переходу T_j виконана;
- § якщо умова запуску переходу T_j виконана, то виконується запуск переходу: з кожної компоненти вектора маркірування M_i віднімається значення матриці входів $D^{\text{вх}}_{ji}$ і додається значення матриці виходів $D^{\text{вих}}_{ji}$.

Іншими словами, якщо вектор маркірування не менший за j -рядочок матриці входів, то умова запуску переходу T_j виконана. якщо умова запуску переходу T_j виконана, то з вектора маркірування віднімається j -рядочок матриці входів і додається j -рядочок матриці виходів.

Визначення j -рядочка матриці математично виражається добутком вектора e_j , всі компоненти якого рівні нулю, а j -компонента рівна 1, і матриці. Наприклад, для переходу T_3 (див. рис. 4.3) маємо:

$$e_2 D^- = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0).$$

Отже, у векторному вигляді запуск переходу здійснюється за умови:

$$M \geq e_j \cdot D^- . \quad (4.38)$$

А результат запуску переходу знаходиться за формулою:

$$M' = M - e_j D^- + e_j D^+ = M + e_j (D^+ - D^-) = M + e_j D . \quad (4.39)$$

Матрицю $D = D^+ - D^-$ називають *матрицею змінювань*.

Припустимо, що потрібно знайти результат запуску послідовності переходів $T_1 - T_2 - T_1$:

$$M_1 = M + e_1 D,$$

$$M_2 = M_1 + e_2 D = M + e_1 D + e_2 D = M + (e_1 + e_2) D,$$

$$M_3 = M_2 + e_1 D = M + (e_1 + e_2) D + e_1 D = M + (2e_1 + e_2) D = M + v D$$

Зауважимо, що вектор запусків переходів $v = 2e_1 + e_2$ складається з компонент $(2, 1, 0, 0)$. Якщо згадати послідовність переходів, яка запускалась $(T_1 - T_2 - T_1)$, то стане ясно, що *вектор запусків переходів* складається з компонентів, що дорівнюють кількості запусків відповідних переходів:

$$v_i = \sum_j k_j e_j , \quad (4.40)$$

де k_j – кількість переходів T_j у заданій послідовності переходів.

Наприклад, результат запуску послідовності переходів $T_1 - T_2 - T_1 - T_3 - T_1 - T_4 - T_2 - T_3 - T_4 - T_2 - T_3 - T_4$, що розглядалася вище, може знайдений матричним способом так:

$$v = (3 \ 3 \ 3 \ 3),$$

$$D = D^+ - D^- = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M' = M + v D = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) + (3 \ 3 \ 3 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) + (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3) = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 3)$$

Аналітичне дослідження мереж Петрі дозволяє з'ясувати тільки загальні властивості систем, які вони описують. Такими загальними властивостями являються k -обмеженість, досяжність, зберігання та активність.

Якщо кількість маркерів в будь-якій позиції мережі Петрі не перевищує k маркерів, то мережа являється k – обмеженою. Наприклад, мережа Петрі, наведена на рисунку 4.3. не являється k -обмеженою, оскільки в позиції P_2 може виникнути будь-яка велика кількість маркерів.

В мережах Петрі є маркірування, що не можуть з’явитись ні при якій послідовності подій. Такі маркірування являються недосяжними (принаймні з даного початкового маркірування), всі інші маркірування - досяжні. Наприклад, в мережі Петрі, яка представляє процес обслуговування клієнтів в банкоматі (див. рис. 4.3), в позиції P_2 («банкомат вільний») неможлива поява більше одного маркера. Тобто, якщо на початку моделювання існував один банкомат, то в процесі моделювання банкоматів не може стати два, три чи більше.

Досяжністю мережі Петрі називається множина досяжних маркірувань. Нехай потрібно з’ясувати, чи являється маркірування M' досяжним. Складемо матричне рівняння

$$M' = M + v \cdot D, \quad (4.38)$$

де M – відоме початкове маркірування, D – матриця змінювань, v – невідомий вектор запусків переходів. Якщо знайдений з матричного рівняння вектор v має від’ємні або нецілі компоненти, то ясно, що маркірування M' не може бути досяжним. Якщо усі компоненти знайденого вектора v невід’ємні цілі, то потрібне додаткове дослідження досяжності маркірування M' , оскільки воно може бути в цьому випадку як досяжним, так і недосяжним. Існує класичний приклад для доведення того, що існування невід’ємного цілого вектора запуску переходів, що задовольняє рівнянню (4.38), являється тільки необхідною, але не достатньою умовою.

Приклад. Спробуємо з’ясувати матричним способом, чи являється маркірування $M'=(0,0,0,1)$ досяжним для мережі Петрі, яка представлена на рисунку 4.4.

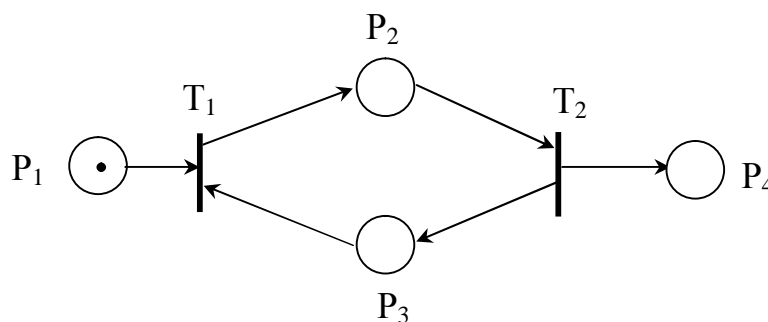


Рисунок 4.4. Мережа Петрі до прикладу 3

Складемо матрицю змінювань

$$D = D^+ - D^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'яжемо матричне рівняння (4.38):

$$M' = M + v \cdot D \Rightarrow (0 \ 0 \ 0 \ 1) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) + (v_1 \ v_2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1 \ 0 \ 0 \ 1) = (-v_1 \ v_1 - v_2 \ -v_1 + v_2 \ v_2) \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 1 \end{cases}$$

Отже, знайдений вектор запуску переходів $v=(1,1)$, компоненти якого невід'ємні цілі числа. Це означає, що маркірування $M'=(0,0,0,1)$ може бути досягнуте послідовністю, в якій перехід T_1 присутній один раз і перехід T_2 - один раз. Проте ні одна з послідовностей $T_1 - T_2$ або $T_2 - T_1$ не може бути реалізована в даній мережі Петрі, оскільки в початковому маркіруванні не виконана умова запуску ні переходу T_1 , ні переходу T_2 .

Таким чином, дослідження досяжності матричним способом дає цілком доведену відповідь „недосяжне” тільки у випадку, коли розв'язок рівняння (4.38) або не існує, або серед компонент розв'язку є від'ємні або нецілі числа:

Маркірування M' являється *недосяжним*, якщо в результаті розв'язання матричного рівняння

$$M' = M + v \cdot D$$

з'ясовано, що розв'язку не існує, або вектор v знайдений та серед його компонент є або нецілі, або від'ємні числа.

В деяких мережах Петрі спостерігається зберігання сумарної кількості маркерів в процесі функціонування.

Якщо в мережі Петрі неможливе виникнення і знищення ресурсів, то мережа володіє властивістю *зберігання*. Математичне визначення властивості зберігання формулюється так: мережа Петрі являється зберезуваною, якщо існує вектор w , $w_i > 0$ для всіх i , такий, що для будь-якого досяжного маркірування M'

$$M \cdot w = M' \cdot w. \quad (4.41)$$

Нехай M' - довільне досяжне маркірування, тоді існує такий вектор запусків переходів v , що:

$$M' = M + v \cdot D. \quad (4.42)$$

Підставимо (4.42) в (4.41):

$$M \cdot w = (M + v \cdot D) \cdot w.$$

Звідси,

$$M \cdot w = M \cdot w + v \cdot D \cdot w.$$

Отже, для довільного вектора v повинно виконуватись

$$0 = v \cdot D \cdot w.$$

Це можливо тільки за умови, що

$$0 = D \cdot w.$$

Маємо необхідну і достатню умову зберезуваної мережі Петрі:

Мережа Петрі володіє властивістю зберігання тоді і тільки тоді, коли існує вектор w , $w_i > 0$ для всіх i , такий, що

$$D \cdot w = 0, \quad (4.43)$$

де D – матриця змінювань.

Приклад

Перевіримо, чи володіє мережа Петрі, яка представлена на рисунку 4.3, властивістю зберігання.

$$D \cdot w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 0 \\ -w_1 - w_2 + w_3 = 0 \\ w_3 - w_4 + w_5 = 0 \\ -w_5 + w_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Оскільки серед компонентів вектора w є нульові, мережа Петрі не є збережуваною. Дійсно, оскільки у позиції P_6 накопичується будь-яка кількість маркерів, то мережа Петрі не є k -обмеженою, а значить не є збережуваною.

Зауважимо, що будь-яка збережувана мережа Петрі є також k -обмеженою. І навпаки, якщо не існує такого k , що мережа Петрі являється k -обмеженою, то мережа Петрі не являється збережуваною. Так, мережа Петрі, що представлена на рисунку 4.3, не є k -обмеженою і тому без проведення дослідження можна стверджувати, що мережа Петрі не володіє властивістю зберігання. Якщо з будь-якого досяжного початкового стану можливий перехід в будь-який інший досяжний стан, то мережа Петрі володіє властивістю *активності*. При дослідженні активності мережі Петрі вивчають рівні активності переходів.

Перехід T_j має *активність рівня 0*, якщо він ніколи не може бути запущений.

Перехід T_j має *активність рівня 1*, якщо існує маркірування (досягнене з початкового), яке дозволяє запуск переходу T_j .

Перехід T_j має *активність рівня 2*, якщо для довільного цілого числа n існує послідовність запусків переходів, в якій перехід T_j присутній принаймні n раз.

Перехід T_j має *активність рівня 3*, якщо існує нескінченна послідовність запусків переходів, в якій перехід T_j присутній необмежено багато разів.

Перехід T_j має *активність рівня 4*, якщо для довільного маркірування M , що є досяжним з початкового маркірування, існує послідовність запусків переходів, яка призводить до маркірування, що дозволяє запуск переходу T_j .

Приклад

Дослідження активності переходів пояснимо на прикладі мережі Петрі, що представлена на рисунку 4.5.

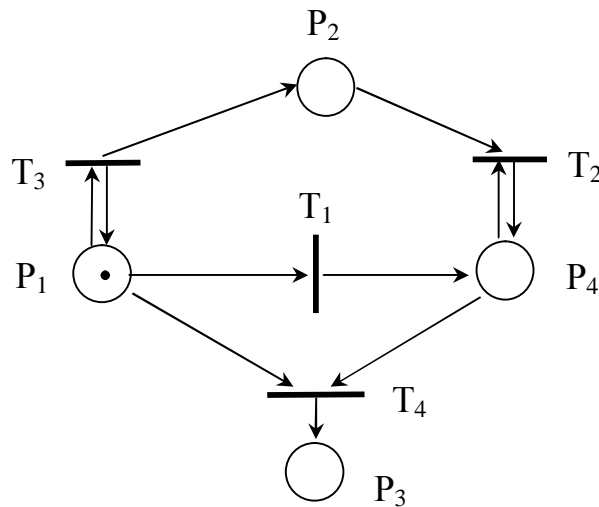


Рисунок 4.5. Мережа Петрі до прикладу

Перехід T_1 може бути запущений тільки один раз, після цього маркер з позиції P_1 зникає назавжди. Отже, перехід T_1 має рівень активності 1.

Оскільки маркер в позиції P_4 може з'явитись тільки в результаті запуску переходу T_1 , а запуск цього переходу вимагає вилучення маркера з позиції P_1 , то маркірування, при якому маркер знаходиться і в позиції P_1 , і в позиції P_4 не виникне ніколи. Значить умова запуску переходу T_4 не може бути виконана ніколи. Отже, перехід T_1 має активність 0.

Перехід T_3 може бути запущений нескінченну кількість разів, але як тільки буде запущений перехід T_1 перехід T_3 вже ніколи не запуститься. Тому перехід T_1 активність рівня 3, але не має активність рівня 4.

Перехід T_2 може бути запущений будь-яку кількість разів, але не може бути запущений нескінченну кількість разів. Дійсно, для того, щоб запустити перехід T_2 n разів, потрібно спочатку запустити перехід T_3 n раз, потім запустити перехід T_1 один раз і тільки після цього будуть виконані умови запуску переходу T_2 n разів. Як тільки n накопичених у позиції P_1 будуть вичерпані, умова запуску переходу T_2 зникає назавжди. Тому перехід T_2 активність рівня 2, але не має активність рівня 3.

Таким чином, дослідження мереж Петрі матричним способом дозволяє перевіряти умову запуску переходу та знаходити результат запуску переходу, знаходити результат запуску послідовності переходів, з'ясувати, чи є маркірування недосяжним та чи володіє мережа Петрі властивістю зберігання.

Дерево досяжності представляє множину досяжних маркірувань мережі Петрі. Дерево досяжності розпочинається з початкового маркірування, а закінчується термінальним або дублюючим маркіруванням. *Термінальним* маркіруванням називається маркірування, в якому жоден з пе-

реходів мережі Петрі не запускається. Назва термінальне походить від англійського слова *terminate*, що в перекладі означає обрубувати. Дублюючим маркіруванням називається маркірування, що раніше зустрічалося в дереві досяжності. Якщо в деякій позиції мережі Петрі спостерігається зростання кількості маркерів до нескінченності, то для зображення цього факту використовують символ ω в цій позиції. Символ ω в позиції M_j маркірування M з'являється тоді, коли на путі до маркірування M спостерігається маркірування M' , в якому всі значення, крім j -ого співпадають не перевищують значення маркірування M , а j -е значення M'_j менше за значення M_j :

$$M'_k \leq M_k, \quad k \neq j$$

$$M'_j < M_j$$

Одного разу з'явившись, символ ω уже не змінюється і не зникає в дереві досяжності: додавання або віднімання від нескінченності є нескінченність.

Приклад 1. Побудуємо дерево досяжності для мережі, представленої на рисунку 4.6.

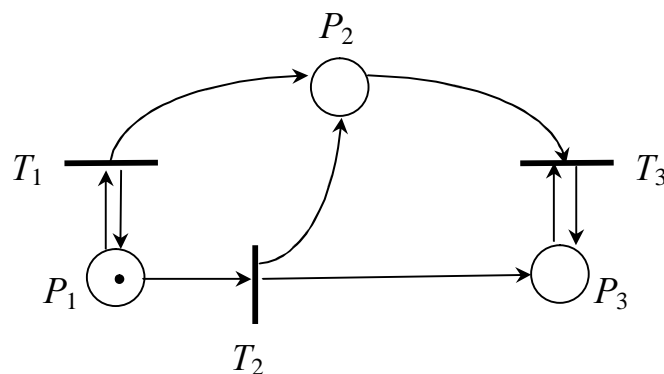


Рисунок 4.6. Мережа Петрі до прикладу 1

Початкове маркірування $M=(1,0,0)$ дозволяє запуск переходів T_1 та T_2 (див. рис. 4.4). Запуск переходу T_1 призводить до маркірування $M=(1,1,0)$, компоненти якого всі, крім другої, співпадають з компонентами початкового маркірування. Крім того, в другій компоненті спостерігається зростання кількості маркерів. Отже, в цьому місці з'являється символ ω . Маркірування $M=(1,\omega,0)$ знову дозволяє запуск переходів T_1 та T_2 , що приводить до дублюючого маркірувань $M=(1,\omega,0)$ та маркірування $M=(0,\omega,1)$. Маркірування $M=(0,\omega,1)$ дозволяє запуск тільки переходу T_3 , що призводить до дублюючого маркірування $M=(0,\omega,1)$.

Запуск переходу T_2 з початкового маркірування призводить до маркірування $M=(0,1,1)$, яке дозволяє тільки запуск переходу T_3 . В результаті запуску переходу T_3 виникає маркірування $M=(0,0,1)$, яке є термінальною.

На рисунку 4.7 представлено дерево досяжності даної мережі Петрі.

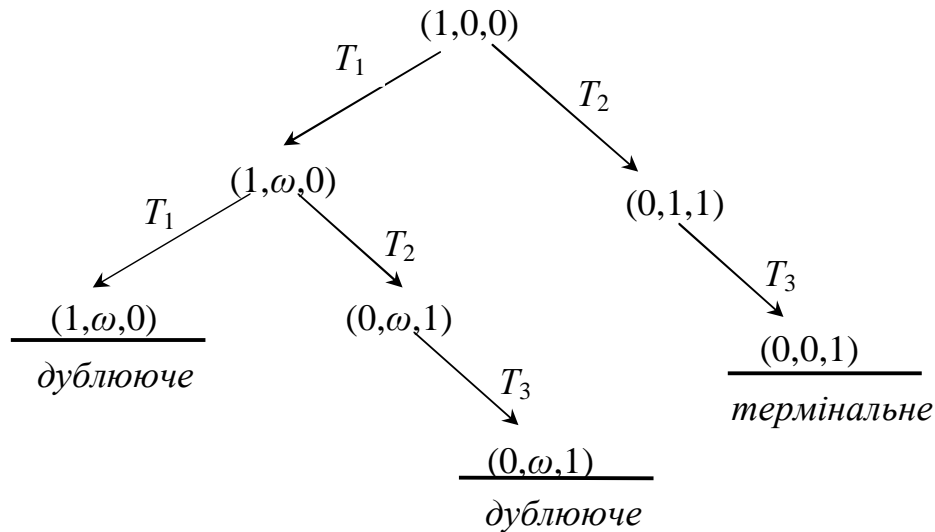


Рисунок 4.7. Дерево досяжності мережі Петрі, представленої на рисунку 4.4.

Викладемо алгоритм побудови дерева досяжності [Питерсон]. Кожне маркірування дерева досяжності класифікується як початкове, граничне (те, що підлягає обробці), термінальне, дублююче та внутрішнє. Внутрішнім є маркірування дерева досяжності, що не є початковим, дублюючим або термінальним. Обробка M – граничне маркірування здійснюється за наступними правилами:

- Якщо в дереві досяжності є інше маркірування M' , що не являється граничним, таке, що $M'=M$, то маркірування M – дублююче.
- Якщо для маркірування M жоден з переходів мережі Петрі не запускається, то маркірування M – термінальне.
- Для всякого дозволеного переходу T_n створити маркірування X дерева досяжності та дугу, що йде від M до X , і відмітити її символом T_n . Об'явити маркірування M – внутрішнім, а маркірування X – граничним. Значення X_j маркірування X визначити таким чином:

- якщо в позиції j маркірування M знаходиться символ ω , то в позиції j маркірування X теж поставити символ ω :

$$M_j = \omega \Rightarrow X_j = \omega;$$

- якщо на путі від початкового маркірування існує маркірування M' таке, що $M'_k \leq X_k$, $k \neq j$, $M'_j < X_j$, то поставити в позиції j маркірування X символ ω :

$$M'_k \leq X_k, \quad k \neq j, \quad M'_j < X_j \Rightarrow X_j = \omega;$$

- інакше присвоїти позиції j маркірування X результат запуску переходу T_n :

$$X_j = M_j + D_{nj}.$$

Алгоритм побудови дерева досяжності закінчується, коли всі маркірування його термінальні, дублюючі або внутрішні.

Приклад

Розглянемо наступну мережу Петрі (рис. 4.8)

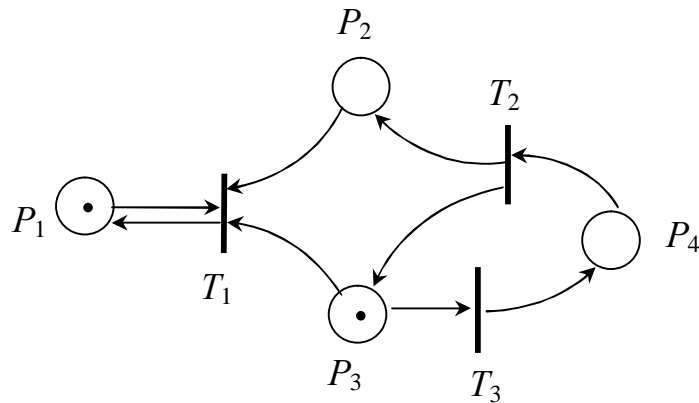


Рисунок 4.8. Мережа Петрі до прикладу 2

Побудуємо дерево досяжності (рис.4.9). В початковому маркіруванні дозволеним є тільки запуск переходу T_3 . Запуск цього переходу приводить до маркірування $M=(1,0,0,1)$, яке дозволяє запуск тільки переходу T_2 . Результатом запуск переходу T_2 є маркірування $M=(1,1,1,0)$.

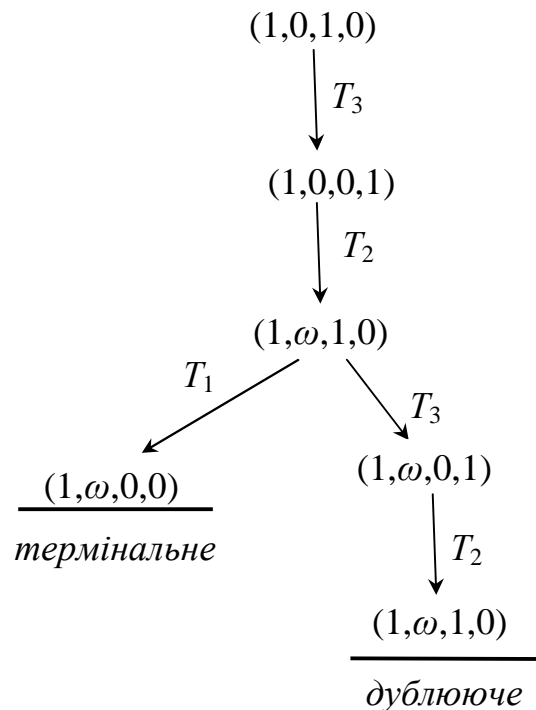


Рисунок 4.9. Дерево досяжності мережі Петрі, представлена на рисунку 4.8.

Порівнюючи це маркірування з маркіруванням $M=(1,0,1,0)$, яке є на шляху до розглядуваного, приходимо до висновку, що в позиції M_2 спостерігається зростання кількості маркерів. Тому в цій позиції з'являється символ нескінченності ω :

$$(1,1,1,0) \geq (1,0,1,0) \Rightarrow M' \geq M \Rightarrow M' = (1, \omega, 1, 0).$$

Маркірування $(1, \omega, 1, 0)$ дозволяє запуск переходів T_1 та T_3 . Запуск переходу T_1 призводить до маркірування $(1, \omega, 0, 0)$, яке є термінальним. А запуск переходу T_3 - до маркірування $(1, \omega, 0, 1)$, яке дозволяє запуск тільки переходу T_2 . Запуск переходу T_2 призводить до маркірування $(1, \omega, 1, 0)$, яке є дублюючим.

Дерево досяжності, що побудоване, використовують для дослідження властивостей мережі Петрі.

Мережа Петрі k -обмежена тоді і тільки тоді, коли в її дереві досяжності відсутній символ ω . Розташування символу ω вказує, які позиції мережі необмежені. Число k визначається найбільшим значенням кількості маркерів, яке присутнє у дереві досяжності.

Якщо мережа Петрі k -обмежена, можливо, вона володіє властивістю зберігання. Щоб дослідити, чи є мережа Петрі збережуваною, потрібно для кожного маркірування, яке присутнє у дереві досяжності, скласти систему рівнянь

$$\begin{cases} w_1 \cdot M_1^{(1)} + w_2 \cdot M_i^{(1)} + \dots + w_p \cdot M_p^{(1)} = s \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_1 \cdot M_1^{(m)} + w_2 \cdot M_i^{(m)} + \dots + w_p \cdot M_p^{(m)} = s \end{cases}, \quad (4.44)$$

де p – кількість позицій мережі Петрі, m – кількість маркірувань в дереві досяжності мережі Петрі, s – невідома величина.

Якщо система рівнянь (4.42) має розв'язок, усі значення якого цілі невід'ємні числа:

$$s > 0, s \in \mathbb{Z}, w_i > 0, w_i \in \mathbb{Z}, i=1, \dots, p, \quad (4.45)$$

то мережа Петрі володіє властивістю зберігання.

Приклад

Розглянемо наступну мережу Петрі (рис. 4.10)

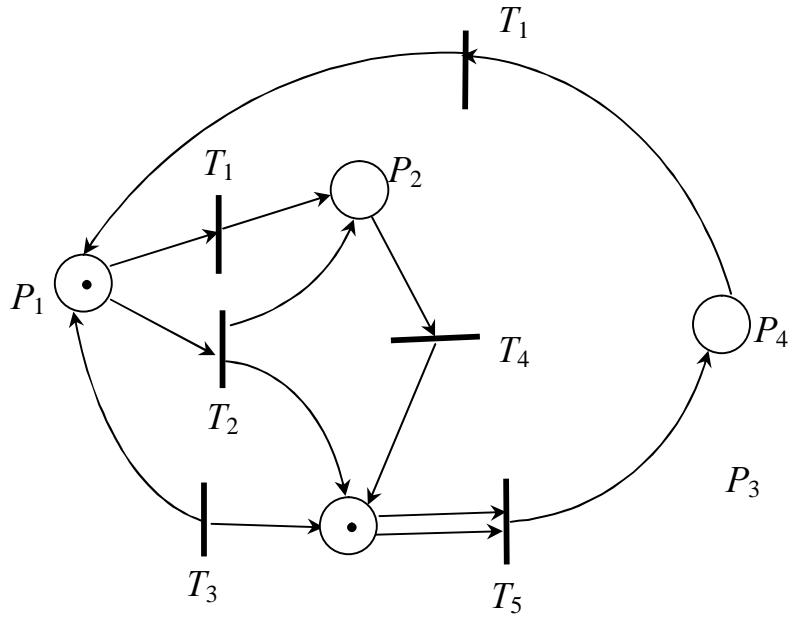


Рисунок 4.10. Мережа Петрі до прикладу 3.

Побудуємо дерево досяжності (рис. 4.11). В початковому маркіруванні дозволеним є тільки запуск переходу T_3 . Запуск цього переходу приводить до маркірування $M=(1,0,0,1)$, яке дозволяє запуск тільки переходу T_2 . Результатом запуск переходу T_2 є маркірування $M=(1,1,1,0)$. Порівнюючи це маркірування з маркіруванням $M=(1,0,1,0)$, яке є на шляху до розглядуваного, приходимо до висновку, що в позиції M_2 спостерігається зростання кількості маркерів. Тому в цій позиції з'являється символ нескінченності ω :

$$(1,1,1,0) \geq (1,0,1,0) \Rightarrow M' \geq M \Rightarrow M' = (1, \omega, 1, 0).$$

Маркірування $(1, \omega, 1, 0)$ дозволяє запуск переходів T_1 та T_3 . Запуск переходу T_1 призводить до маркірування $(1, \omega, 0, 0)$, яке є термінальним. А запуск переходу T_3 - до маркірування $(1, \omega, 0, 1)$, яке дозволяє запуск тільки переходу T_3 .

У дереві досяжності символ ω відсутній, найбільше спостережуване значення кількості маркерів дорівнює 2. Тому мережа Петрі є 2-обмеженою. З'ясуємо, чи є вона збережуваною. Складемо рівняння (4.44):

$$\begin{cases} w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot 0 + w_4 \cdot 0 = s \\ w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 0 + w_4 \cdot 0 = s \\ w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot 1 + w_4 \cdot 0 = s \\ w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 + w_4 \cdot 0 = s \\ w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot 2 + w_4 \cdot 0 = s \\ w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot 0 + w_4 \cdot 1 = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = s \\ w_2 = s \\ w_3 = s \\ w_2 + w_3 = s \\ 2w_3 = s \\ w_4 = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = s \\ w_2 = s \\ w_3 = s \\ 2s = s \\ 2s = s \\ w_4 = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 = 0 \\ w_3 = 0 \\ s = 0 \\ w_4 = 0 \end{cases}$$

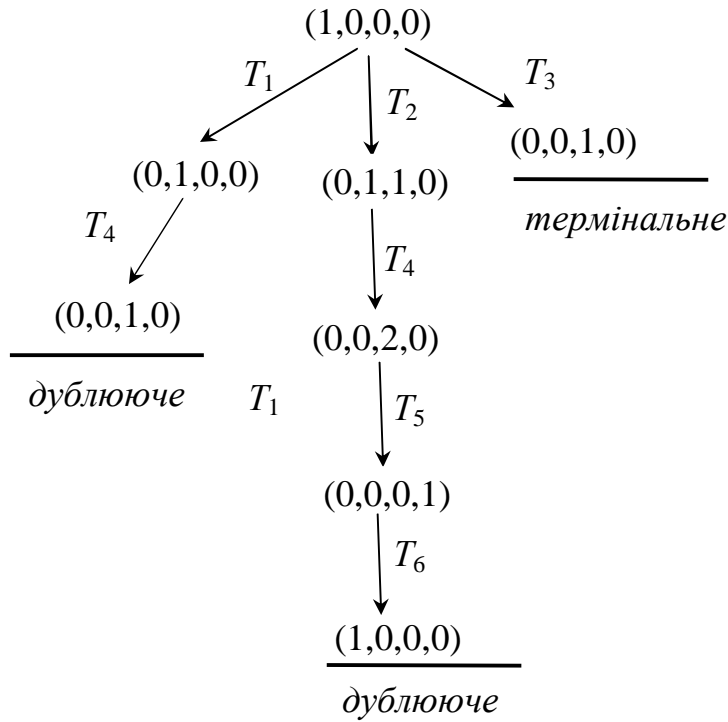


Рисунок 4.11. Дерево досяжності мережі Петрі, представленої на рисунку 4.10.

Оскільки компоненти розв'язку не задовольняють умові (4.45), то мережа Петрі не являється збережуваною.

Якщо маркірування M' присутнє в дереві досяжності мережі Петрі, то воно являється досяжним. Якщо в дереві досяжності присутнє маркірування M'' таке, що $M'' \geq M'$, то маркірування M' покривається. Наприклад, маркірування $(1, \omega, 1, 0)$ покриває маркірування $(1, 15, 1, 0)$.

Приклад

Розглянемо наступну мережу Петрі (рис. 4.12) на досяжність маркірування $M=(0, 14, 1, 7)$.

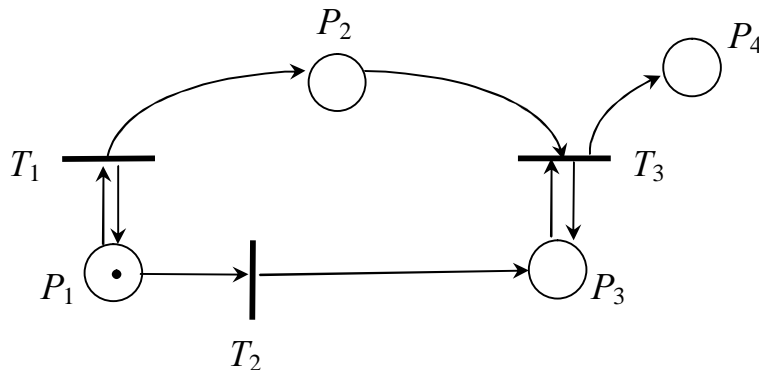


Рисунок 4.12. Мережа Петрі до прикладу 4

Побудуємо дерево досяжності (рис. 4.13).

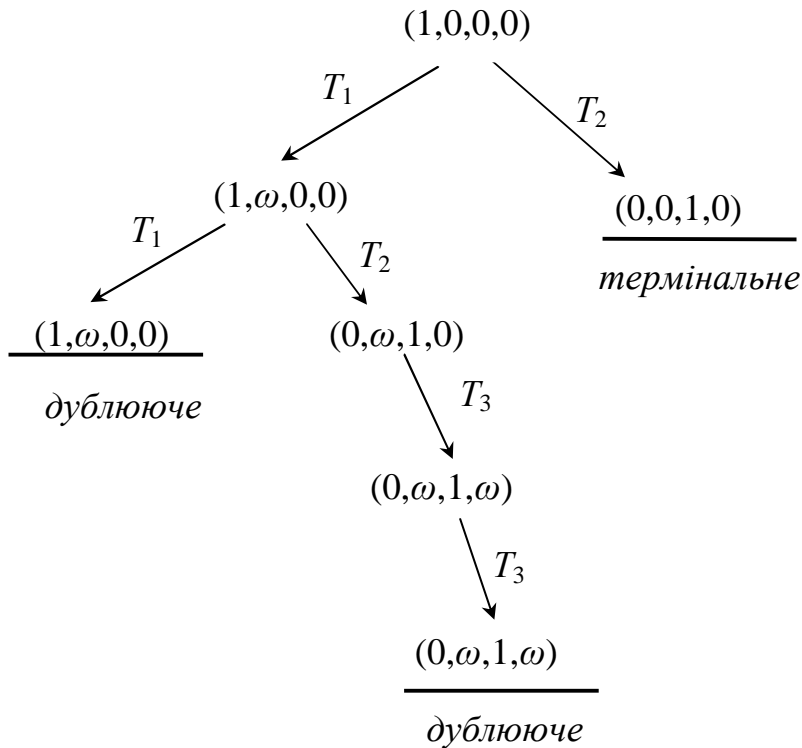


Рисунок 4.13. Дерево досяжності мережі Петрі, представленої на рисунку 4.12.

Оскільки в дереві досяжності присутнє маркірування $M'=(0,\omega,1,\omega)$, то маркірування $M=(0,14,1,7)$ покривається мережею Петрі. Крім того, з дерева досяжності видно, що маркірування M' досягається в результаті кількох запусків переходу T_1 , потім декількох запусків переходу T_2 та декількох запусків переходу T_3 . З огляду на мережу Петрі, можна побудувати послідовність переходів, що забезпечує досяжність маркірування $M=(0,14,1,7)$:

$$T_1 \overline{42} \overline{43} \overline{21} - T_2 - T_1 \overline{42} \overline{43} \overline{7}.$$

Тобто перехід T_1 потрібно запустити 21 раз і результатом цього буде маркірування $(1,21,0,0)$. Потім запустити перехід T_2 і отримати маркірування $(0,21,1,0)$. Нарешті запустити 7 раз перехід T_3 і отримати маркірування $(0,14,1,7)$.

Таким чином, за допомогою дерева досяжності досліджуються такі властивості мережі Петрі як k -обмеженість, збережуваність та покриття маркірування. Досяжність маркірування не може бути досліджена досконалим, оскільки з дерева досяжності залишається невідомою послідовність переходів, що призводить до заданого маркірування. Порівняння способів аналітичного дослідження мереж Петрі наведено на рисунку 4.14, звідки слідує, що обидва способи мають недоліки і переваги.

Аналітичне дослідження властивостей мережі Петрі	Властивість	Спосіб дослідження	
		Матричний підхід	Дерево досяжності
	k -обмеженість	не досліджується	необхідна і достатня умова
	зберігання	необхідна і достатня умова	необхідна і достатня умова
	досяжність	тільки необхідна умова	послідовність переходів залишається невідомою
	активність	не досліджується	не досліджується

Рисунок 4.14. Порівняння способів аналітичного дослідження властивостей мережі Петрі

4.4. Приклади розв'язання задач

■ **Задача 1.** Визначити мінімальну кількість каналів обслуговування, при якому можливий сталий режим у наступній розімкнутій мережі МО (рисунок 4.15), якщо $\lambda_0=10$, $\mu_1=2$, $\mu_2=4$, $\mu_3=1$, $\mu_4=4$:

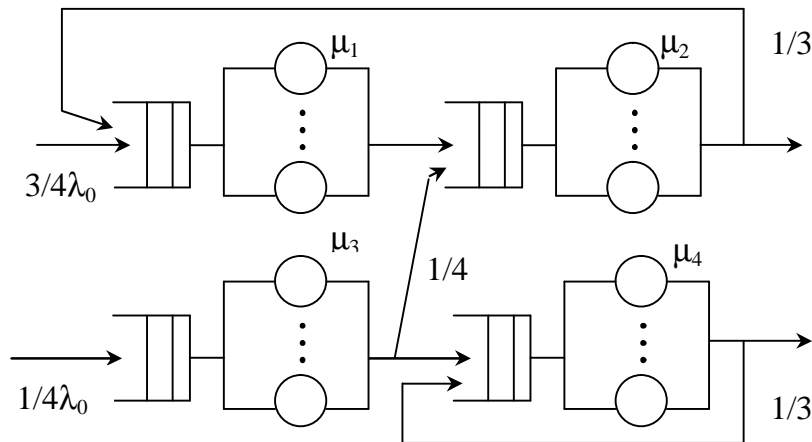


Рисунок 4.15. Мережа МО до умови задачі 1

Розв'язання. Необхідна кількість каналів обслуговування знаходиться з умови сталого режиму (4.1). Для того, щоб знайти невідомі інтенсивності надходження вимог I_i до кожної СМО S_i , $i=1,2,3,4$, знайдемо коефіцієнти передачі e_i із системи рівнянь (4.3). Складемо перше рівняння. До першої СМО надходить $3/4$ вхідного потоку та $1/3$ потоку з другої СМО, тому маємо:

$$e_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{3}e_2. \quad (4.46)$$

До другої СМО надходить весь потік вимог із першої СМО та 1/4 потоку з третьої СМО, отже маємо:

$$e_2 = e_1 + \frac{1}{4}e_3. \quad (4.47)$$

До третьої СМО надходить 1/4 вхідного потоку, тому:

$$e_3 = \frac{1}{4}. \quad (4.48)$$

До четвертої СМО надходить 3/4 потоку з третьої СМО та 1/3 потоку з четвертої СМО, отже:

$$e_4 = \frac{3}{4}e_3 + \frac{1}{3}e_4. \quad (4.49)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (4.46), (4.47), (4.48), (4.49) знаходимо:

$$e_1 = \frac{37}{32}, e_2 = \frac{39}{32}, e_3 = \frac{1}{4}, e_4 = \frac{9}{32}.$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти передачі e_i та відомі з умов задачі $\lambda_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ та μ_4 , до нерівності (4.1) і знаходимо такі умови для кількості каналів обслуговування:

$$\frac{37}{32} \cdot 10 < 2 \cdot r_1,$$

$$\frac{39}{32} \cdot 10 < 4 \cdot r_2,$$

$$\frac{1}{4} \cdot 10 < 1 \cdot r_3,$$

$$\frac{9}{32} \cdot 10 < 4 \cdot r_4.$$

Звідси знаходимо, що $r_1 > \frac{185}{32}, r_2 > \frac{195}{64}, r_3 > \frac{5}{2}, r_4 > \frac{45}{64}$. Тому мінімальна кількість каналів обслуговування в першій СМО $r_1=6$, в другій СМО $r_2=4$, у третій СМО $r_3=3$ та в четвертій $r_4=1$.

Відповідь: мінімальна кількість каналів обслуговування, при якій у даній мережі МО можливий сталий режим роботи, дорівнює шість каналів для першої СМО, чотири канали для другої СМО, три канали для третьої СМО та один канал для четвертої СМО.

■ **Задача 2.** На обробляючу ділянку цеху поступають деталі в середньому через 50 хвилин. Первинна обробка деталей відбувається на одному з двох станків. Перший станок обробляє деталь в середньому 30 хвилин, і має 3% браку, другий - 80 хвилин і має 8% браку. Усі браковані деталі повертаються на другий станок на повторну обробку. При надходженні деталі поступають на перший і другий станок з однаковими ймовірностями. Вторинну обробку проводять також два станки із середнім часом обробки 90 хвилин. Визначити завантаження станків.

Розв'язання. Оскільки на первинній обробці деталей між двома станками відбувається повернення бракованих деталей, то доведеться моделювати їх не однією двоканальною СМО, а двома одноканальними СМО з інтенсивностями надходження деталей в кожну - $1/2I_0$. За умовами задачі $I_0=1/50$, інтенсивність обробки деталей в першій СМО – $1/30$, у другій СМО – $1/80$. Імовірність того, що вимога потрапляє з першої СМО в другу $p_{12}=0,03$, а ймовірність того, що вимога після обробки в другій СМО знову в неї повертається $p_{22}=0,08$. Вторинну обробку деталей моделюємо двоканальною СМО з інтенсивністю обробки в каналах обслуговування $1/90$. Отже маємо розімкнуту мережу МО, що представлена на рисунку 4.16:

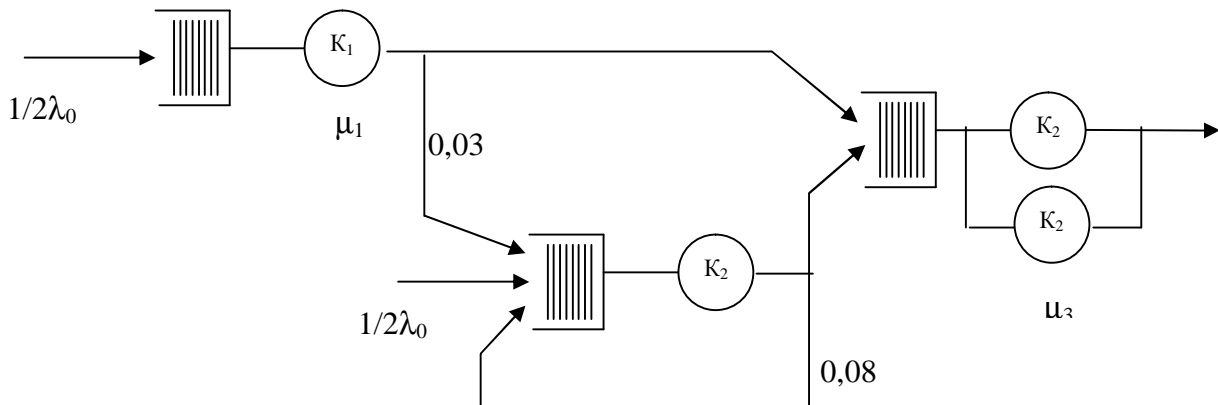


Рисунок 4.16. Мережа МО до задачі 2.

Знайдемо коефіцієнти передачі із системи рівнянь (див. формулу 4.3):

$$e_1 = \frac{1}{2}$$

$$e_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{100}e_1 + \frac{8}{100}e_2$$

$$e_3 = \frac{97}{100}e_1 + \frac{92}{100}e_2$$

Маємо

$$e_1 = \frac{1}{2}, e_2 = \frac{103}{184}e_2, e_3 = 1.$$

Перевіримо, чи виконана умова сталого режиму в розглядуваній мережі МО (див. формулу 4.5):

$$\frac{m_1 r_1}{e_1} = \frac{1/30}{1/2} = 0,067, \frac{m_2 r_2}{e_2} = \frac{1/80}{103/184} = 0,022, \frac{m_3 r_3}{e_3} = \frac{(1/90) \cdot 2}{1} = 0,022, \text{ а}$$

$$I_0 = 1/50 = 0,02,$$

тому умова сталого режиму виконана.

Завантаження станків характеризує середня кількість зайнятих пристроїв в СМО_i. За формулою (4.14) розраховуємо ці показники:

$$R_1 = \frac{3}{10}, R_2 = \frac{103}{115}, R_3 = \frac{9}{5} \text{ або } R_1 = 0,3, R_2 = 0,9, R_3 = 1,8.$$

Звідси видно, що канал першої СМО не завантажений навіть наполовину, канал другої СМО завантажений майже повністю, канали третьої СМО також завантажені майже повністю. Більшого завантаження першої СМО можна досягти, перерозподіливши вхідний потік. Наприклад, нехай в першу СМО надходить 3/4 вхідного потоку вимог, у другу – 1/4. Тоді матимемо:

$$R_1 = 0,45, R_2 = 0,47, R_3 = 1,8.$$

Відповідь: на первинній обробці деталей завантаження першого станка дорівнює 0,3, другого – 0,9; на вторинній обробці завантаження двох станків дорівнює 1,8. Для підвищення завантаження першого станка на первинній обробці можна направити туди більший вхідний потік деталей. Наприклад, при надходженні деталей на перший станок первинної обробки з ймовірністю 3/4 та на другий станок з ймовірністю 1/4, завантаження першого станка збільшується до 0,45, а другого – зменшується до 0,47.

■ **Задача 3.** Розподілений банк даних системи збору інформації організований на базі двох комп'ютерів, з'єднаних дуплексним каналом зв'язку. Запит, що поступає, обробляється на першому комп'ютері та з ймовірністю 50% необхідна інформація визначається на місці. Інакше необхідна посилка на другий комп'ютер. Запити надходять в середньому через 10 секунд, обробка запиту в комп'ютері займає приблизно 9 секунд. Вважаємо, що передача по каналу зв'язку здійснюється миттєво. Визначити середній час обслуговування запиту в цій системі збору інформації.

Розв'язання. Описану в умовах задачі систему можна моделювати мережею МО, що складається з двох СМО: перша СМО – це обслуговування запиту в першому комп'ютері, друга СМО – обслуговування запиту в другому комп'ютері. Запити надходять в середньому через 10с, значить інтенсивність надходження вимог $I_0=1/10$, причому весь потік вимог, що надходить, потрапляє до першої СМО. З ймовірністю 0,5 необхідна обробка запиту в другому комп'ютері, це значить, що вимога потрапляє в другу СМО з ймовірністю 0,5. Значить $p_{12}=1/2$. Інтенсивність обслуговування в першому комп'ютері дорівнює інтенсивності обслуговування в другому комп'ютері: $m_1=m_2=1/9$. Отже маємо мережу МО, представлену на рисунку 4.17.

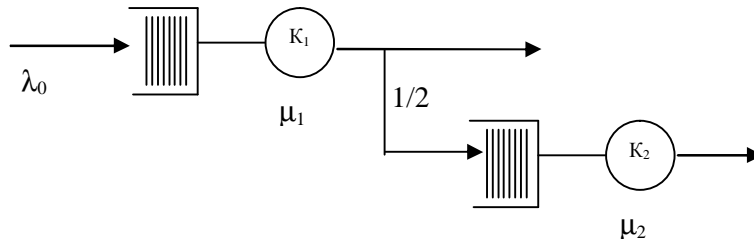


Рисунок 4.17. Мережа МО до задачі 3

Коефіцієнти передачі для даної мережі МО рівні $e_1=1$, $e_2=1/2$ і умова сталого режиму виконана.

Розрахуємо нормуючі множники за формулою (4.10). Оскільки кількість каналів дорівнює один, ця формула значно спрощується:

$$p_i(0) = \left(\left(\frac{e_i I_0}{m_i} \right) \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{e_i I_0}{m_i} \right)} + 1 \right)^{-1} \quad i=1,2, \quad (4.50)$$

За цією формулою знаходимо $p_1(0)=0,1$, $p_2(0)=0,55$.

Функції (4.10) у випадку одноканальних СМО набувають вигляду:

$$p_i(k_i) = \left(\frac{e_i I_0}{m_i} \right)^{k_i} \cdot p_i(0). \quad (4.51)$$

Для розглядуваної задачі

$$p_1(k) = \left(\frac{1/10}{1/9} \right)^k \cdot 0,1, \quad p_2(k) = \left(\frac{1/2 \cdot 1/10}{1/9} \right)^k \cdot 0,55.$$

Середній час обслуговування запиту в системі збору інформації характеризує час перебування вимоги в мережі МО T (див. формулу (4.16)). Для розрахунку цього показника знадобляться всі інші показники ефективності роботи мережі МО (формули (4.11) – (4.16)).

Середня кількість вимог в СМО_{*i*} за формулою (4.11) дорівнює:

$$L_i = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) p_i(k)$$

Звідси $L_1=0,81$, $L_2=0,4$

Середня кількість зайнятих пристроїв в СМО_{*i*} за формулою (4.12) дорівнює: $R_1=0,9$, $R_2=0,45$.

Середня кількість вимог в СМО_{*i*} за формулою (4.13) дорівнює: $M_1=1,71$, $M_2=0,85$.

Середній час очікування вимог в СМО_{*i*} за формулою (4.14) дорівнює: $Q_1=8,1$ с, $Q_2=8$ с.

Середній час перебування вимог в СМО_{*i*} за формулою (4.15) дорівнює: $T_1=17$ с, $T_2=17$ с.

Середній час перебування вимог у мережі МО за формулою (4.16) дорівнює: $T=25,6$ с.

Відповідь: середній час обслуговування запиту в розглядуваній системі збору інформації складає близько 98с, тобто півтори хвилини. Причиною такого становища є завелика кількість вимог у першому комп'ютері. Зменшити це значення можна, якщо збільшити інтенсивність обслуговування запитів у першому комп'ютері, або збільшити кількість комп'ютерів при первинній обробці запитів.

■ **Задача 4.** В експлуатації знаходиться 3 пристрої. Кожний пристрій приходить в непридатність у середньому через 10 днів і відновлюється в середньому через 30 днів, причому в ремонті може знаходитись тільки один пристрій. Визначить ймовірність того, що всі пристрої знаходяться в експлуатації, та ймовірність того, що всі пристрої знаходяться в ремонті.

Розв'язання. В даній задачі об'єктом обслуговування є пристрої, які або експлуатуються, або ремонтуються. Оскільки пристроїв завжди три, то дана система моделюється замкнутою мережею МО з кількістю вимог $N=3$. В експлуатації одночасно можуть знаходитись всі три пристрої, причому кожний з пристроїв закінчує своє перебування в експлуатації у середньому через 10 днів. Тому моделюємо перебування пристроїв в експлуатації трьох-канальною СМО з інтенсивністю обслуговування в кожному каналі $m_1=1/10$. Зауважимо, що ця СМО не може мати вимог у черзі, тому що в мережі МО знаходиться тільки три вимоги. Дійсно, черга в трьох-канальній СМО виникає тільки за умови, що в ній знаходиться більше трьох вимог (4,5 і більше). Тому на рисунку 4.18 ця СМО зображена без черги.

Перебування пристроїв в ремонті моделюємо другою СМО. Оскільки в умові задачі сказано, що в ремонті може знаходитись тільки один пристрій, то ця СМО має тільки один канал обслуговування. Інші пристрої, що зламались, але не можуть ремонтуватись, очікують звільнення ремонтного місця в черзі. Інтенсивність обслуговування в другій СМО $m_2=1/30$. Отже, умовам задачі відповідає мережа МО, представлена на рисунку 4.18.

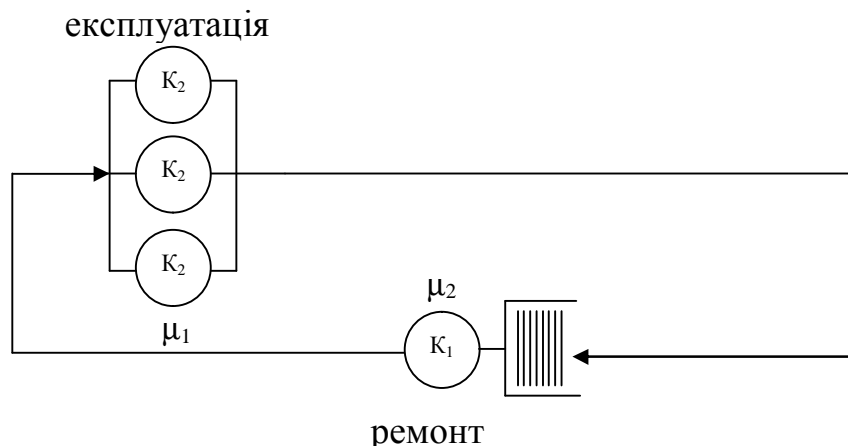


Рисунок 4.18. Мережа МО до задачі 4.

Коефіцієнти передачі дорівнюють $e_1=1$, $e_2=e_1=1$ (див. формули 4.19). Знайдемо функції $p_1(a)$ та $p_2(b)$ за формулою (4.21):

$$p_1(a) = \left(\frac{e_1}{m_1}\right)^a \cdot \frac{1}{a!} = 10^a \cdot \frac{1}{a!},$$

$$p_2(b) = \left(\frac{e_2}{m_2}\right)^b = 30^b$$

Для розрахунку нормуючого множника $C(N)$ скористаємось формулою 4.24:

$$C(N) = \left(\sum_{a=0}^3 p_1(a) \cdot p_2(3-a)\right)^{-1} = \left(\sum_{a=0}^3 10^a \frac{1}{a!} 30^{3-a}\right)^{-1} = \frac{3}{113000} = 0,000027.$$

Ймовірність того, що всі пристрої знаходяться в експлуатації, тобто в СМО₁, дорівнює $P(k_1=3)=p(3,0)$, а ймовірність того, що всі пристрої знаходяться в ремонті, тобто в СМО₂ - $P(k_2=3)=p(0,3)$ (див. 4.27):

$$p(3,0) = C(N) \cdot p_1(3)p_2(0) = \frac{3}{113000} \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot 30^0 = \frac{1}{226} = 0,0045$$

$$p(0,3) = C(N) \cdot p_1(0)p_2(3) = \frac{1}{113000} \cdot 10^0 \cdot \frac{1}{0!} 30^3 = \frac{81}{113} = 0,717$$

Відповідь: Ймовірність того, що всі пристрої знаходяться в експлуатації, складає 0,005. Ймовірність того, що всі пристрої знаходяться в ремонті, - 0,7. Оскільки ймовірність того, що жодний з пристроїв не працює, досить велика, потрібно підвищити інтенсивність ремонту або збільшити кількість ремонтних працівників.

■ **Задача 5.** Транспортний цех об'єднання обслуговує три філії А, В і С. Вантажівки перевозять вироби з А в В і з В в С, повертаючись потім в А без вантажу. Навантаження в А займає в середньому 20 хвилин, переїзд з А в В триває в середньому 30 хвилин, навантаження у В – 20 хвилин, переїзд у С – 40 хвилин, і переїзд в А – 10 хвилин. Якщо до моменту навантаження в А і В відсутні вироби, вантажівки йдуть далі по маршруту. На лінії працює 8 вантажівок. Ймовірність того, що вироби на момент навантаження відсутні в А – 0,2, відсутні в В – 0,25.

Визначити частоту порожніх перегонів вантажівок між А і В, В і С.

Розв'язання. В даній задачі об'єктом обслуговування є вантажівки. Обслуговування "із А в В" триває 20+30+20 хвилин, якщо вантаж на момент прибуття машини в А є, та 30 хвилин, якщо його не має. Тому обслуговування "із А в В" моделюється двома СМО: СМО₁, що моделює навантажений переїзд із А в В, та СМО₂, що моделює порожній переїзд з А в В. Так само, обслуговування "із В в С" моделюється СМО₃, що моделює навантажений переїзд із В в С і триває 20+40+20 хвилин, та СМО₄, що моделює порожній переїзд із В в С і триває 40 хвилин. Обслуговування „із С в

А” моделюється однією СМО – СМО₅, що моделює переїзд вантажівки із С в А і триває 10 хвилин. Ймовірність потрапляння в СМО₂ за умовами задачі складає 0,2, в СМО₄ – 0,25.

Замкнута мережа масового обслуговування, що моделює дану систему, представлена на рисунку 4.19.

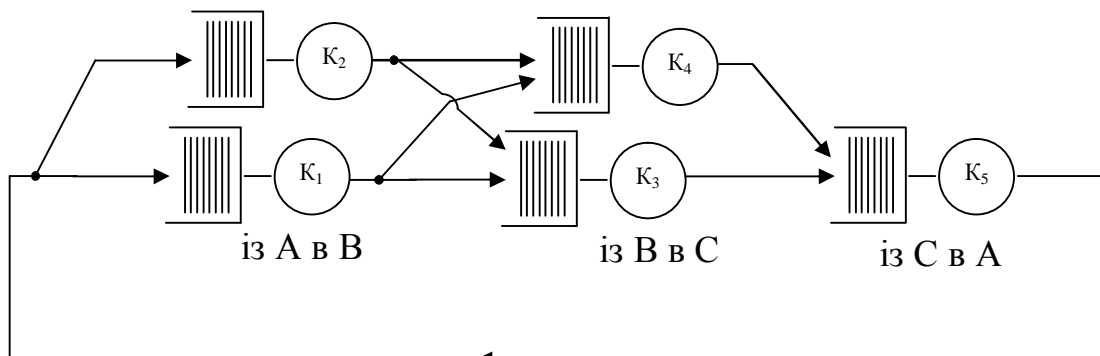


Рисунок 4.19. Мережа МО до задачі 5

Замкнуту мережу МО, що складена, описують такі вхідні змінні: $N=8$, $n=5$, $\mu_1=1/(20+30)$ $\mu_2=1/30$ $\mu_3=1/(20+40)$ $\mu_4=1/40$ $\mu_5=1/10$, $r_1=r_2=r_3=r_4=r_5=1$, $p_{52}=0,2$, $p_{14}=p_{24}=0,25$.

Частота порожніх перегонів із А в В визначається часткою вантажівок, що їдуть пустими з А в В. Якщо M_1 – кількість вантажівок, що їдуть із А в В – навантаженими, M_2 – кількість вантажівок, що їдуть із А в В – порожніми, то частота порожніх перегонів з А в В складає:

$$h_{AB} = \frac{M_2}{M_1 + M_2}.$$

Так само, частота порожніх перегонів із В в С складає:

$$h_{BC} = \frac{M_4}{M_3 + M_4}.$$

В обох формулах M_i – це кількість вимог в СМО_{*i*}, яку потрібно знаходити за формулою (4.31).

Коефіцієнти передачі знаходимо з системи (4.19), в якій прийнято $e_5=1$ (тобто за початок і кінець маршруту вимоги умовно прийнято СМО₅):

$$\begin{aligned} e_1 &= 0,8e_5 & e_1 &= 0,8 \\ e_2 &= 0,2e_5 & e_2 &= 0,2 \\ e_3 &= 0,75e_1 + 0,75e_2 \Rightarrow & e_3 &= 0,75 \\ e_4 &= 0,25e_1 + 0,25e_2 & e_4 &= 0,25 \\ e_5 &= 1 & e_5 &= 1 \end{aligned}$$

Запишемо функції (4.21) для кожної з п’яти СМО:

$$\begin{aligned} p_1(a) &= (0,8 \cdot 50)^a = 40^a & p_2(a) &= (0,2 \cdot 30)^a = 6^a & p_3(a) &= (0,75 \cdot 60)^a = 45^a \\ p_4(a) &= (0,25 \cdot 40)^a = 10^a & p_5(a) &= (10)^a \end{aligned}$$

За формулою (4.23) знайдемо нормуючий множник:

$$\left(\sum_{a=0}^8 40^a \sum_{b=0}^{8-a} 6^b \sum_{g=0}^{8-a-b} 45^g \sum_{d=0}^{8-a-b-g} 10^d \cdot 10^{8-a-b-g-d} \right)^{-1} = \frac{1}{179000487473571} = 5,587 \cdot 10^{-15}$$

Складемо функції (4.26) для СМО₁, СМО₂, СМО₃, СМО₄:

$$P(k_1 = j) = 5,587 \cdot 10^{-15} \cdot 40^j \sum_{b=0}^{8-j} 6^b \sum_{g=0}^{8-j-b} 45^g \sum_{d=0}^{8-j-b-g} 10^d \cdot 10^{8-j-b-g-d}$$

$$P(k_2 = j) = 5,587 \cdot 10^{-15} \cdot 6^j \sum_{b=0}^{8-j} 40^b \sum_{g=0}^{8-j-b} 45^g \sum_{d=0}^{8-j-b-g} 10^d \cdot 10^{8-j-b-g-d}$$

$$P(k_3 = j) = 5,587 \cdot 10^{-15} \cdot 45^j \sum_{b=0}^{8-j} 6^b \sum_{g=0}^{8-j-b} 40^g \sum_{d=0}^{8-j-b-g} 10^d \cdot 10^{8-j-b-g-d}$$

$$P(k_4 = j) = 5,587 \cdot 10^{-15} \cdot 10^j \sum_{b=0}^{8-j} 6^b \sum_{g=0}^{8-j-b} 45^g \sum_{d=0}^{8-j-b-g} 40^d \cdot 10^{8-j-b-g-d}$$

Далі за формулами (4.32) розраховуємо середні кількості вимог в СМО₁, СМО₂, СМО₃, СМО₄:

$$L_i = \sum_{j=2}^8 (j-1) \cdot P(k_i = j) \quad i=1,2,3,4 \Rightarrow$$

$$L_1 = 2,182, \quad L_2 = 0,017, \quad L_3 = 3,42, \quad L_4 = 0,051.$$

За формулами (4.33) знаходимо середню кількість зайнятих каналів в цих СМО:

$$R_i = 1 - P(k_i = 0), \quad i = 1,2,3,4 \Rightarrow$$

$$R_1 = 0,821, \quad R_2 = 0,123, \quad R_3 = 0,923, \quad R_4 = 0,205.$$

Сумуємо знайдені величини за формулами (4.34) та знаходимо середні кількості вимог в СМО:

$$M_1 = 3,003, \quad M_2 = 0,14, \quad M_3 = 4,344, \quad M_4 = 0,257.$$

Обчислюємо частоти порожніх перегонів:

$$h_{AB} = \frac{0,14}{3,003 + 0,14} = 0,045 \quad h_{BC} = \frac{0,257}{4,344 + 0,257} = 0,056.$$

Знайдені частоти порожніх перегонів є невеликими – близько 4,5% для пунктів А і В та близько 5,5% для пунктів В і С.

Відповідь: частота порожніх перегонів вантажівок між А і В складає 4,5%, а між В і С – 5,5%.

■ **Задача 4.** Складіть мережу Петрі для наступної задачі та дослідіть, чи являється вона збережуваною.

Виробничий процес обслуговують три пристрої, які час від часу страждають від поломки. Якщо є запасний справний пристрій, то поламааний пристрій вилучається з виробничого процесу і відправляється на ремонткування, а замість нього у виробничий процес встановлюється запасний пристрій. Після ремонту пристрій знову може бути використаний у виробничому процесі.

Розв’язання. Виділимо множину подій, що виникають у системі:

- виникла поломка в одному з пристроїв;
- заміна несправного пристрою на відремонтований;
- ремонт пристрою.

Подія „виникла поломка в одному з пристроїв” здійснюється за умови, що є працюючий пристрій. Подія „заміна несправного пристрою на відремонтований” здійснюється за умови, що є неспівний пристрій і є відремонтований пристрій. Отже, множина умов:

- є працюючий пристрій;
- є зламаний пристрій;
- є відремонтований пристрій;
- є вилучений з виробництва пристрій;

З’єднуємо події та умови і отримуємо мережу Петрі, яка представлена на рисунку 4.20.

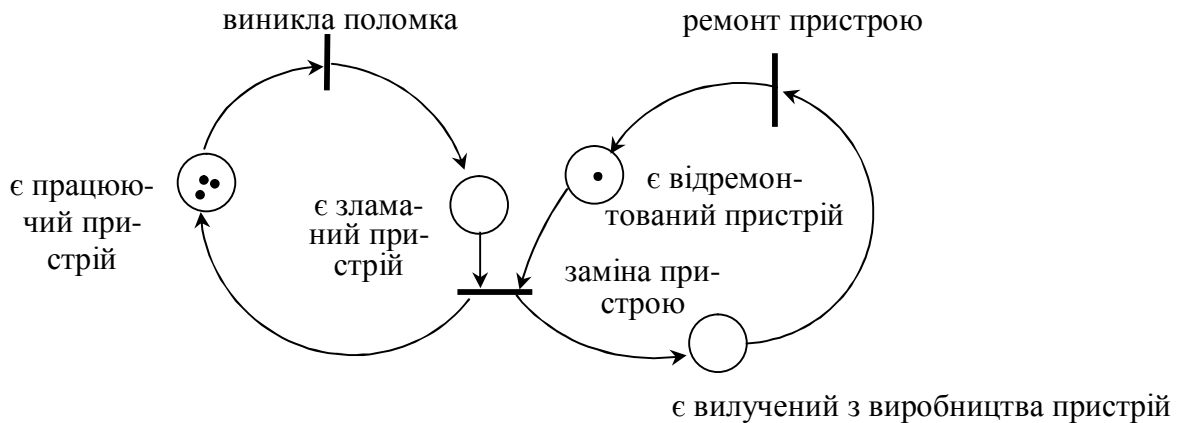


Рисунок 4.20. Мережа Петрі, що представляє процес виникнення та усунення несправностей

Пронумеруємо позиції та переходи (рис. 4.21) та складемо матриці входів та виходів.

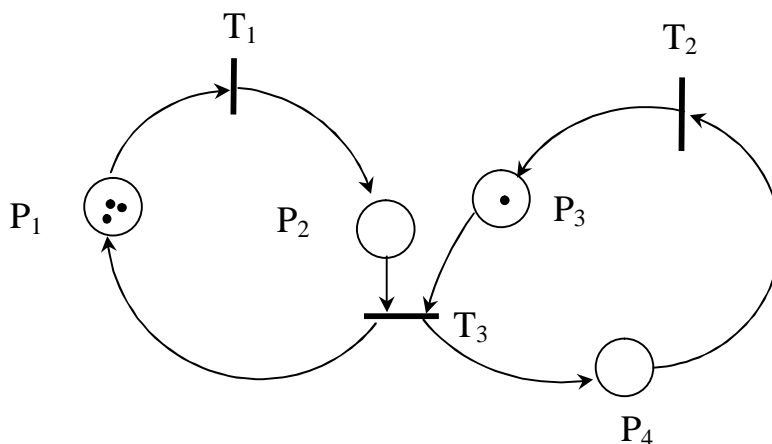


Рисунок 4.21. Формалізована мережа Петрі, що представляє процес виникнення та усунення несправностей

Покажемо, що мережа Петрі, яка представлена на рисунку 4.21, володіє властивістю зберігання:

Складемо матрицю змінювань:

$$D = D^+ - D^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо систему рівнянь для відшукування вектора w , який задовольняє умові (4.41):

$$D \cdot w = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -w_1 + w_2 = 0 \\ -w_3 + w_4 = 0 \\ w_1 - w_2 - w_3 + w_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_2 = w_1 \\ w_4 = w_3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Оскільки усі компоненти вектора w цілі додатні числа, досліджувана мережа Петрі являється збережуваною. Зауважимо, що властивість зберігання має фізичний зміст. Наприклад, в даній мережі Петрі, сумарна кількість маркерів в позиціях за будь-якого досяжного маркірування, дорівнює 4. Тобто, загальна кількість поламаних та справних пристроїв в розглядуваній системі завжди складає 4.

4.5. Завдання для самостійної роботи

□ 1. Знайдіть, при якій кількості каналів можливий сталий режим в мережі МО, яка представлена на рисунку 4.22, при заданих наступних параметрах $\lambda_0=10$, $\mu_1=2$, $\mu_2=4$, $\mu_3=1$, $\mu_4=4$:

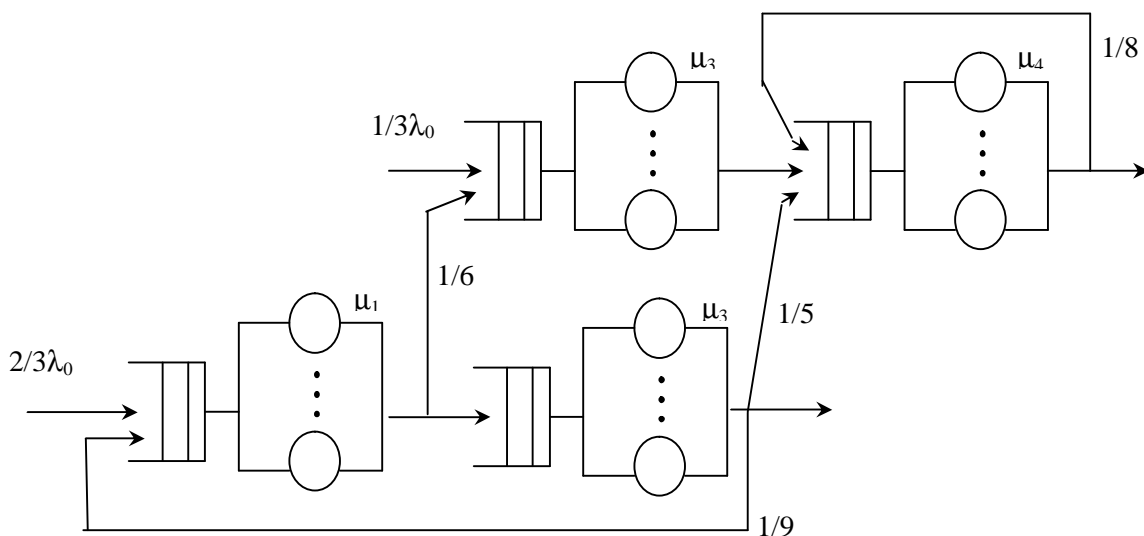


Рисунок 4.22. Мережа МО до завдання 1

□ 2. Телевізори, що зібрані, на заключній стадії виробництва проходять ряд пунктів контролю. В останньому з цих пунктів здійснюється перевірка настроювання телевізорів. Якщо при перевірці виявилось, що телевізор працює неякісно, він направляється в пункт настроювання, де настроюється наново. Після повторного настроювання телевізор знову направляється в останній пункт контролю для перевірки якості настроювання. Телевізори, що відразу або після декількох повернень у пункт настроювання пройшли фазу заключної перевірки, направляються в цех упакування. Середній час між надходженнями телевізорів у пункт контролю дорівнює 5,5 хвилин. У пункті заключної перевірки паралельно працюють два контролери. Час, необхідний на перевірку одного телевізора, складає в середньому 9 хвилин. У середньому 85% телевізорів проходять перевірку успішно з першого пред'явлення і направляються на упакування. Інші 15% повертаються в пункт настроювання, який обслуговується одним робітником. Час настроювання в середньому дорівнює 30 хвилин.

Визначити час, що витрачається на обслуговування кожного телевізора на останньому етапі виробництва, а також завантаження контролерів і настроювача.

□ 3. Проведіть розрахунки задачі 5 при такій зміні в її умовах: “Якщо в пункті В не має вантажу, то вантажівка повертається в пункт А обмінаючи пункт С”. Як зміниться мережа МО, що моделює цю задачу? Як вплине введена зміна на частоту порожніх перегонів із А в В? із В в С? Зробіть висновки.

□ 4. Майстерня по ремонту машин складається з цеху ремонту, у який надходять і ремонтуються вузли, і цеху контролю, в якому відремонтовані вузли перевіряються і випускаються з майстерні або направляються на доробку. У цеху ремонту є три однакових робочих місця, а в цеху контролю знаходиться один контролер. Вузли потрапляють у систему через інтервали часу, що розподілені за експоненціальним законом з математичним сподіванням 10 од. часу. Час ремонту вузла в середньому складає 22 од. часу. Перевірка вузла займає приблизно 6 од. часу. Після перевірки вузол відправляється на доробку з ймовірністю 0,15. Спрямовані на доробку вузли стають у чергу до цеху ремонту.

Визначити такі величини: 1) завантаження робочих місць та контролера; 2) середній час очікування в цеху ремонту; 3) загальний час обслуговування вузла в майстерні.

□ 5. Шість верстатів виконують завдання, які надходять із інших відділів цеху у середньому одне завдання на годину. Завдання, виконані на верстаті, вважаються такими, що залишили систему. Верстати страждають від поломок, при яких вони не можуть продовжувати виконання за-

вдань. Інтервали між поломками окремого верстата мають експоненціальний розподіл з математичним сподіванням 18. Коли верстат ламається, починається процес усунення поломки, що складається з трьох фаз. Тривалість кожної фази є випадкова величина, що має експоненціальний розподіл з математичним сподіванням $2/3$ години. Після усунення поломки процес виконання завдань верстатом продовжується.

Визначити середню кількість верстатів, що знаходяться в робочому стані та середній час усунення поломки окремого верстата.

□ 6. Потік вимог на одержання книг є пуассонівським потоком з інтенсивністю 25 вимог за годину. Вимоги приймає один бібліотекар. Приймання вимоги займає інтервал часу, розподілений за експоненціальним законом із середнім часом 1 хвилина. З імовірністю 0,25 надходять вимоги на наукову літературу, з імовірністю 0,45 – на художню, з імовірністю 0,3 – на періодичні видання. Згідно з типом вимоги направляються до відділів наукової літератури, художньої літератури і періодичних видань. У цих відділах працюють відповідно 3 особи, 2 особи і 2 особи. Час пошуку книги складає в середньому 30 хвилин у науковому і художньому відділах, а час пошуку літератури у відділі періодичних видань - в середньому 25 хвилин. Потім замовлена література надходить у відділ видачі літератури, де працює 2 бібліотекаря. Час видачі літератури складає в середньому 2 хвилини.

Визначити середній час виконання замовлення.

□ 7. Скласти матрицю входів та матрицю виходів для наступної мережі Петрі (рис. 4.23). Знайти результат запуску послідовності переходів T_1 - T_2 - T_3 .

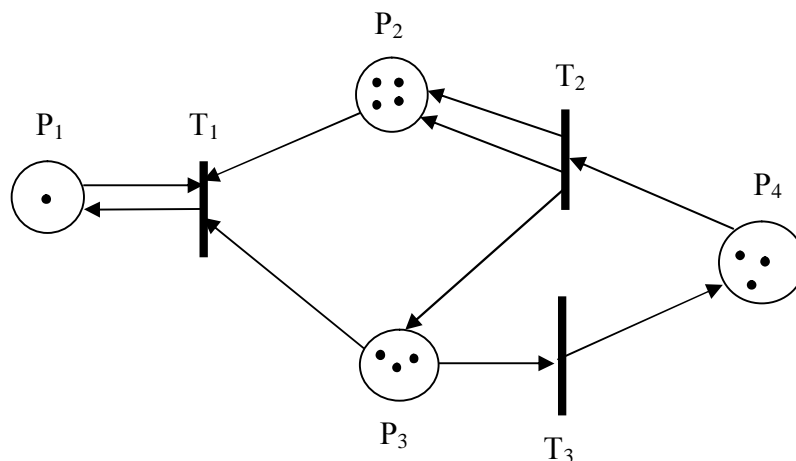


Рисунок 4.23. Мережа Петрі до завдання 7

□ 8. Складіть матриці входів та виходів для мережі Петрі, яка представлена на рисунку 4.24, та знайдіть результат запуску такої послідовності переходів: $T_1 T_2 T_3 T_2$.

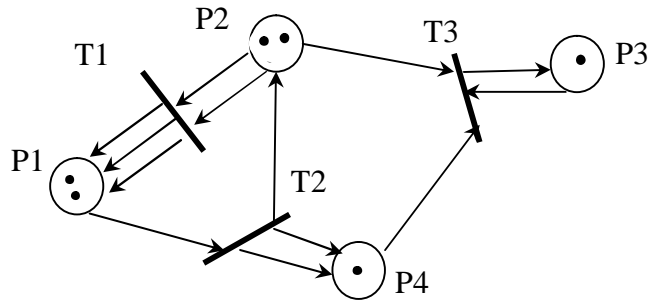


Рисунок 4.24. Мережа Петрі до завдання 8

□ 9. Складіть матриці входів та виходів для мережі Петрі, яка представлена на рисунку 4.25, та знайдіть результат запуску такої послідовності переходів: $T_3 T_2 T_1 T_2$.

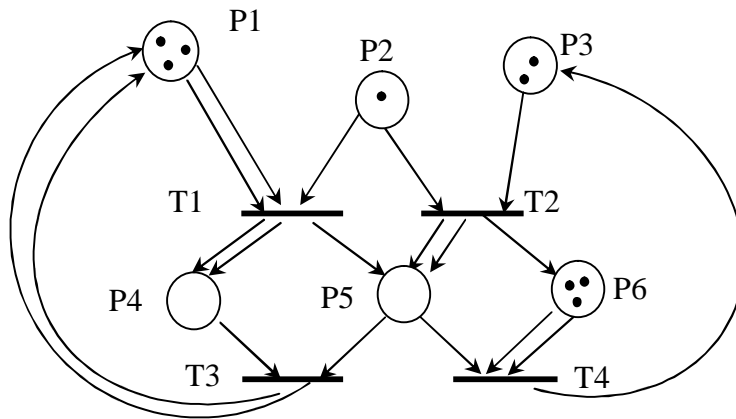


Рисунок 4.25. Мережа Петрі до завдання 9

□ 10. Скласти матрицю входів та матрицю виходів для мережі Петрі, що відповідає самостійному завданню 7 розділу 3. Дослідіть властивості складеної мережі Петрі матричним способом. Чи досягне маркірування, що відповідає стану системи, коли всі верстати зламані? усі верстати працездатні?

□ 11. Побудувати дерево досяжності для мережі Петрі, яка представлена на рисунку 4.26.

□ 12. Побудувати дерево досяжності для мережі Петрі, яка була побудована в задачі 7 розділу 3 (див. рис. 3.34), та дослідити властивості мережі Петрі.

□ 13. Побудувати дерево досяжності для мережі Петрі, що відповідає самостійному завданню 9 розділу 3. Дослідіть властивості складеної мережі Петрі. В яких маркіруваннях виникає символ ω ? Яким місцям роботизованої виробничої системи вони відповідають? З'ясуйте рівні активності переходів. Зробіть висновки про властивості системи, що досліджується.

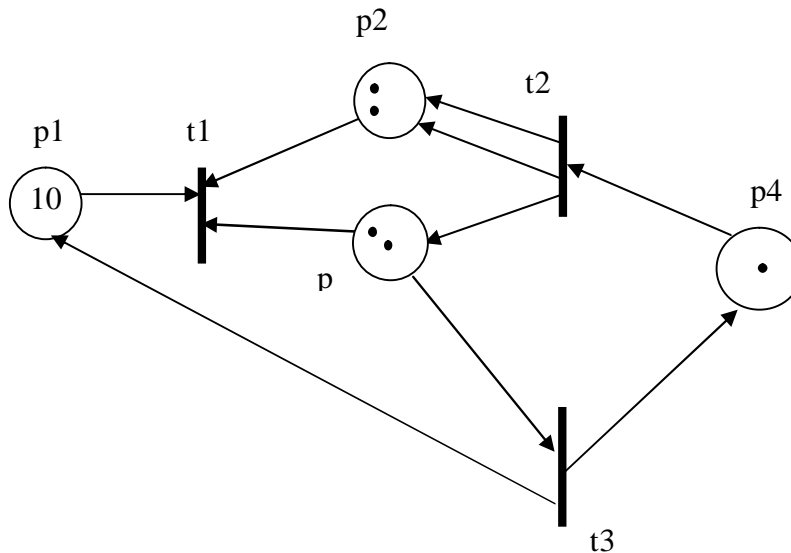


Рисунок 4.26. Мережа Петрі до завдання 11

□ 14. Побудувати дерево досяжності для мережі Петрі, що відповідає самостійному завданню 11 розділу 3. Дослідіть властивості складеної мережі Петрі. Чи є досяжним маркірування, при якому танкери всіх типів знаходять в порту? Чи являється мережа Петрі k -обмеженою? Зробіть висновки про властивості системи, що досліджується.

4.6. Контрольні запитання

- 1) За яких припущень розглядаються аналітичні моделі мереж масового обслуговування?
- 2) Які параметри задають розімкнуту мережу МО? замкнуту мережу МО?
- 3) Як розраховується нормуючий множник у випадку розімкнутої мережі МО? у випадку замкнутої мережі МО? Як перевірити правильність розрахунку нормуючого множника?
- 4) Що таке коефіцієнти передачі? Як вони знаходяться у випадку розімкнутої мережі МО? у випадку замкнутої мережі МО?
- 5) Як знаходяться ймовірності станів розімкнутої мережі МО? замкнутої мережі МО?
- 6) Які вихідні характеристики розімкнутої мережі МО? Як вони розраховуються?
- 7) Які вихідні характеристики замкнутої мережі МО? Як вони розраховуються?
- 8) Як перевірити правильність розрахунків?
- 9) Які висновки можна зробити на основі зроблених розрахунків вихідних характеристик мережі МО?
- 10) З яких елементів складається мережа Петрі?

- 11) У чому полягає умова запуску переходу?
- 12) Як здійснюється запуск переходу?
- 13) Як складається матриця входів? матриця виходів? матриця змінювань?
- 14) Які властивості мереж Петрі Ви знаєте?
- 15) Як виконується дослідження збережуваності мережі Петрі?
- 16) Як виконується дослідження досяжності маркірування мережі Петрі?
- 17) Як визначається рівень активності переходу мережі Петрі?
- 18) У чому полягає обмеженість застосування матричного підходу до дослідження властивостей мереж Петрі?
- 19) Що називають деревом досяжності мережі Петрі?
- 20) Як складається дерево досяжності мережі Петрі?
- 21) Опишіть алгоритм складання дерева досяжності.
- 22) Які властивості мережі Петрі можна дослідити за допомогою дерева досяжності?
- 23) Як виконується дослідження збережуваності мережі Петрі?
- 24) Як виконується дослідження досяжності маркірування мережі Петрі?
- 25) Що розуміють під покриттям маркірування?
- 26) У чому полягає обмеженість застосування дерева досяжності до дослідження властивостей мереж Петрі?

Розділ 5

ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Необхідність у використанні імітаційного моделювання може виникнути з наступних причин:

- 1) методи аналітичного моделювання не можуть бути використані через складність моделі;
- 2) застосування методів аналітичного моделювання дасть результати, які не задовольняють меті дослідження системи;
- 3) застосування методів імітаційного моделювання дозволяє універсалізувати рішення множини задач, що розглядається.

Імітаційне моделювання системи передбачає, що процес функціонування системи **відтворюється** за допомогою алгоритму, який реалізується за допомогою комп'ютера.

Англійський термін імітаційного моделювання „simulation modeling” підказує суть цього методу. Моделлю системи у разі імітації є комп'ютерна програма, яка прикидається (симулює), що вона є реальна система.

Будь-яка реальна система функціонує в часі, змінювання якого відбувається незалежно від людини. Якщо дослідник збирається відтворювати функціонування системи, то йому доведеться, по-перше, моделювати змінювання часу, і тільки, по-друге, моделювати зміни в моделі відповідно до змінювання часу.

Особливо корисною виявилась імітація для дослідження стохастичних систем, в яких переплітається вплив багатьох випадкових величин. Моделювання випадкових величин в комп'ютерних програмах пов'язано із побудовою генераторів випадкових величин. Тому від дослідника, який займається проблемами імітаційного моделювання систем, потрібно насамперед досконале знання методів та способів побудови генераторів випадкових величин.

5.1. Генератори випадкових величин

Способи генерування випадкових величин

Імітаційні моделі складних систем містять випадкові величини, що мають різні закони розподілу. При побудові алгоритму імітації ці випадкові величини реалізуються генераторами випадкових чисел. Від якості генераторів випадкових чисел, що використовуються, залежить точність результатів імітаційного моделювання.

Відомі наступні способи генерування випадкових величин:

- § зберігання у комп'ютері таблиці випадкових чисел і отримання потім з неї даних для імітаційного моделювання;
- § використання деякого фізичного пристрою, наприклад електронної лампи, для генерації випадкового шуму;

§ застосування рекурсивних формул коли на підставі i -того випадкового числа обчислюється $i+1$ -ше випадкове число.

Недоліком першого способу є зберігання великого обсягу інформації та повільна швидкість. Недоліком другого способу - неможливість направлено експерименту з параметрами моделі. Третій спосіб не має недоліків попередніх способів і в теперішній час є найбільш прийнятним.

Генерування рівномірно розподілених в інтервалі (0;1) випадкових величин на основі рекурсивних формул

Генератори випадкових чисел, що рівномірно розподілені на інтервалі (0; 1), зазвичай є вбудованими в програмне забезпечення. Тому досліднику, як правило, не доводиться самостійно будувати такі генератори. Але розуміти, як побудовані такі генератори випадкових чисел і уміти перевірити, чи задовольняють вбудовані генератори властивостям, які йому потрібні для цілей моделювання, необхідно.

До генераторів випадкових чисел, що використовуються у цілях імітаційного моделювання, висуваються наступні вимоги:

- 1) числа рівномірно розподілені на інтервалі (0;1) і незалежні;
- 2) генерується достатньо велика кількість чисел, що не повторюються;
- 3) послідовність випадкових чисел може бути відтворена;
- 4) швидкодія;
- 5) обсяг пам'яті, що використовується, достатньо малий.

Очевидно, що комп'ютер може генерувати хоч і велику, але обмежену кількість чисел на інтервалі (0;1). Розглянемо, як той факт, що генеровані за допомогою комп'ютера числа не досить щільно займають заданий інтервал, впливає на основні характеристики випадкової величини.

Неперервна випадкова величина ζ , яка рівномірно розподілена на інтервалі (0;1) має:

$$\text{щільність розподілу } f(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq 1, \\ 0, x < 0, x > 1; \end{cases}$$

$$\text{математичне сподівання } M(x) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2};$$

$$\text{дисперсію } D(x) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}.$$

Комп'ютер оперує з n -розрядними числами, тому замість неперервної сукупності рівномірних випадкових чисел інтервал (0;1) використовується дискретна послідовність 2^n випадкових чисел ζ_i :

$$z_i = \frac{i}{2^n - 1}, \quad i=0, \dots, 2^n - 1.$$

Випадкові числа ζ_i приймають i -те значення з ймовірністю $p_i = \frac{1}{2^n}$.

Обчислимо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Z :

$$M(V) = \sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{i}{2^n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n(2^n-1)} \cdot \frac{(2^n-1)2^n}{2} = \frac{1}{2}, \quad (5.1)$$

$$D(V) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \left(\frac{i}{2^n-1} - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2^n} \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\frac{i^2}{(2^n-1)^2} - \frac{i}{2^n-1} + \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{2^n+1}{2^n-1} \quad (5.2)$$

Отже, математичне сподівання дискретної випадкової величини Z співпадає з математичним сподіванням неперервної випадкової величини x , а дисперсія відрізняється множителем, який при достатньо великих n близький до 1:

$$\frac{2^n+1}{2^n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Таким чином, основні характеристики генерованої за допомогою комп'ютера випадкової величини співпадають з основними характеристиками неперервної випадкової величини, що являється підґрунтям використання таких генераторів випадкових чисел для цілей імітації.

Розглянемо алгоритми генерування випадкових величин. Широко поширений конгруентний метод, що використовує такі рекурсивні рівняння:

$$z_{i+1} = (az_i + b) \pmod{c}, \quad i=1, \dots \quad (5.3)$$

$$z_{i+1} = z_{i+1} / c.$$

де a, b, c – параметри генератора, z_0 – початкове значення генератора, \pmod{c} – операція розрахунку залишку від ділення на число c .

З формул (5.3) видно, що генероване випадкове число z_i не перевищує число c , тому при діленні його на c отримуємо випадкове число ζ_i , яке міститься в інтервалі $(0;1)$. Зручно покласти $c=S^B$, де $S=2$ для двійкової системи числення, B – кількість біт в машинному слові. Тоді обчислення залишку від ділення на c зводиться до виділення c молодших розрядів дільника, а перетворення цілого числа $z_i \leq c$ в нормоване випадкове число z_i здійснюється постановкою ліворуч від z_i двійкової коми.

Вибір констант a, b, c являється об'єктом постійних досліджень. Для цілей імітаційного моделювання важливо, щоб генератор випадкових чисел забезпечував якнайдовшу послідовність різних випадкових чисел. Дійсно, з формули (5.3) випливає, що як тільки в послідовності значень z_i зустрінеться число, яке спостерігалось раніше, уся послідовність значень повторюється. Тобто спостерігається циклічність значень z_i . Кількість неповторюваних чисел в одному циклі називається *періодом* генератора випадкових величин.

Припустимо в (5.3) $b=0$, тоді максимальний період циклу, рівний 2^{B-2} чисел, буде отриманий на B -бітовому комп'ютері у випадку, якщо $c=2^B$, $a=1+4k$, для цілих додатних k та непарних z_0 . Нехай $b \neq 0$, тоді період ци-

клу рівний 2^b , b – просте число відносно c , $a=1+4k$, , для цілих додатних k [Прицкер].

Перевірку генератора випадкових чисел на періодичність виконують, визначаючи довжину періоду P псевдовипадкової послідовності. Розглянемо для простоти прикладу генератор $z_{i+1} = 5z_i \pmod{16}$, який забезпечує відповідно теорії довжину періоду $2^{4-2} = 4$. Нехай $z_0=9$, тоді маємо наступну послідовність значень z_i : 9, 13, 1, 5, 9, 13, 1, 5, 9, ... Звідси, $P=4$. Нехай $z_0=11$, тоді послідовність значень z_i така: 11, 7, 3, 15, 11, 5, 7, 3, 15... Знову маємо $P=4$. Для визначення довжини періоду запам'ятовують одне з випадкових значень. Потім продовжують генерувати випадкові числа і порівнюють з числом, яке запам'ятовано. Підрахована кількість випадкових чисел до першого збігу з числом, яке запам'ятовано, дорівнює довжині періоду.

Тестування генераторів рівномірно розподілених в інтервалі (0,1) випадкових чисел

Якість генератора випадкових чисел перевіряють за допомогою машинного експерименту. Розрізняють тести двох типів – емпіричні та теоретичні.

Емпіричні тести основані на перевірці випадкових чисел, які сформував генератор, за допомогою статистичних тестів. Найбільш поширеними є перевірки на рівномірність, на випадковість та на кореляцію.

Перевірку на рівномірність виконують методами ідентифікації закону розподілу з використанням критерію узгодження χ^2 (див. розділ 2.2). Весь інтервал (0;1) розбивається на m рівних частин і спостерігається кількість влучень в j -тий інтервал N_j , $j = 1, \dots, m$ ($\sum N_j = N$). За критерієм χ^2 оцінюється узгодження з теоретично очікуваною кількістю влучень в інтервал N/m . Рекомендована кількість інтервалів $m=20 \div 50$, кількість генерованих випадкових чисел $N=(10^2 \div 10^5)m$.

Перевірку на випадковість виконують за *критерієм серій*. За цим критерієм перевіряється незалежність випадкових значень, але не їх рівномірність. Нехай маємо послідовність значень z_i . Будемо спостерігати довжину зростаючої послідовності випадкових значень. Наприклад, для послідовності генерованих значень 0,23; 0,05; 0,35; 0,37; 0,89; 0,54; 0,98; 0,13; 0,46;... маємо на початку серію довжиною 1, потім серію довжиною 4, потім серію довжиною 2 і т.д. Підрахована кількість серій довжиною 1 складає значення r_1 , кількість серій довжиною 2 – значення r_2 , кількість серій довжиною 3 – значення r_3 , і т.д., кількість серій довжиною не менше 6 - значення r_6 . Значення статистичного критерію R розраховується за формулою [Кельтон, Лоу]:

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 a_{ij} (r_i - Nb_i)(r_j - Nb_j), \quad (5.4)$$

де a_{ij} елементи матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4529,4 & 9044,9 & 13568 & 18091 & 22617 & 27892 \\ 9044,9 & 18097 & 27139 & 36187 & 45234 & 55789 \\ 13568 & 27139 & 40721 & 54281 & 67852 & 83685 \\ 18091 & 38187 & 54281 & 72414 & 90470 & 111580 \\ 22615 & 45234 & 67852 & 90470 & 113262 & 139476 \\ 27892 & 55789 & 83685 & 111580 & 139476 & 172860 \end{pmatrix},$$

а b_i елементи матриці

$$b = \left(\frac{1}{6} \quad \frac{5}{24} \quad \frac{11}{120} \quad \frac{19}{720} \quad \frac{29}{5040} \quad \frac{1}{840} \right).$$

При достатньо великій кількості спостережуваних значень (більше 4000) значення статистичного критерію R має бути меншим за значення критерію χ^2 з 6 ступенями вільності і довірчою ймовірністю 0,9 ($\chi^2=10,6$).

Перевірка кореляції полягає у визначенні кореляції між послідовностями випадкових значень, що розділені інтервалом довжиною j , тобто послідовностями $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \dots \zeta_h$ і $\zeta_{1+j}, \zeta_{2+j}, \zeta_{3+j} \dots \zeta_{h+j}$. Оцінка кореляції для кожного $j=1,2 \dots v$ виконується за формулою:

$$r_j = \left(\frac{1}{h} \sum_{i=1}^h z_i z_{i+j} - M(z) \cdot M(z) \right) \cdot \frac{1}{D(z)}. \quad (5.5)$$

Оскільки $M(z)=1/2$, $D(z)=1/12$ (див. (5.1), (5.2)), то (5.5) приймає наступний вид:

$$r_j = \frac{12}{h} \sum_{i=1}^h z_i z_{i+j} - 3, \quad j=1,2 \dots v \quad (5.6)$$

Теоретично очікуване значення кореляції дорівнює нулю, оскільки послідовності випадкових чисел повинні бути незалежними. Для перевірки гіпотези $\rho_j=0$ використовують статистичний критерій [Кельтон, Лоу]:

$$A_j = \frac{r_j}{\sqrt{D(r_j)}}, \quad j=1,2 \dots v \quad (5.7)$$

де $D(r_j) = \frac{13h-6}{h^2}$ – оцінка дисперсії значення ρ_j .

Якщо усі спостережувані значення $|A_j| < 1,645$, то гіпотеза приймається, а значить послідовності випадкових чисел можна вважати незалежними.

Теоретичні тести виконують перевірку генератора випадкових величин ґрунтуючись тільки на значеннях параметрів, які використовуються при генеруванні. У такому випадку дослідженню підлягають формули генерування випадкових значень (5.3). Наприклад, досліджується значення математичного сподівання та дисперсії і порівнюється з $\frac{1}{2}$ та $\frac{1}{12}$ відповідно. Рівномірність випадкових значень перевіряється у теоретичних тестах

за допомогою зображення пар випадкових чисел (ζ_i, ζ_{i+1}) в одиничному квадраті координатної площини (або трійок чисел $(\zeta_i, \zeta_{i+1}, \zeta_{i+2})$ в одиничному кубі). Якщо числа рівномірно заповнюють площу квадрата (простір кубу), то параметри генератора випадкових чисел задовільні.

Наприкінці зауважимо, що не існує кінцевого набору тестів, що гарантує придатність кінцевої випадкової послідовності взагалі. Для даного набору тестів завжди існує послідовність, що задовольняє йому, але повністю непридатна для ряду окремих випадків. Однак проблем у зв'язку з цим не виникає, тому що дослідник не потребує додаткових властивостей випадковості. Тестуванню генераторів випадкових чисел потрібно приділити увагу рівно настільки, наскільки статична змістовність результатів імітаційного моделювання залежить від якості генератора випадкових чисел.

Методи генерування випадкової величини із заданим розподілом

Для генерування випадкового числа r , розподіленого за заданим законом $F(x)$, використовують такі методи (рисунок 5.1):

- § метод оберненої функції;
- § табличний метод;
- § метод, оснований на функціональних властивостях законів розподілу.

В основі *методу оберненої функції* лежить той факт, що випадкова величина $\zeta = F(r)$ є рівномірно розподіленою величиною на інтервалі $(0;1)$. Доведемо це. Нехай є послідовність випадкових чисел r_1, \dots, r_n , що мають закон розподілу:

$$F(x) = P(r \leq x). \quad (5.8)$$

Сформуємо нову послідовність випадкових чисел $V_i = F(r_i), \dots, V_n = F(r_n)$. Оскільки значення функції розподілу належать інтервалу $(0;1)$, то $V \in (0,1)$. Знайдемо закон розподілу $G(y)$ випадкової величини V :

$$G(y) = P(V \leq y) = P(F(r) \leq y) = P(F^{-1}(F(r)) \leq F^{-1}(y)) = P(r \leq F^{-1}(y)). \quad (5.9)$$

Звідси, приймаючи до уваги (5.8) маємо:

$$G(y) = P(r \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y. \quad (5.10)$$

Таким чином доведено, що випадкова величина $\zeta = F(r)$ має рівномірний розподіл $G(y)$ і належить інтервалу $(0;1)$. Звідси, випадкову величину r , розподілену за заданим законом розподілу $F(x)$, можна отримати у такий спосіб: спочатку генерувати випадкову рівномірно розподілену величину ζ , потім перетворити її у випадкову величину $r = F^{-1}(V)$ (рис. 5.2).

ГЕНЕРУВАННЯ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

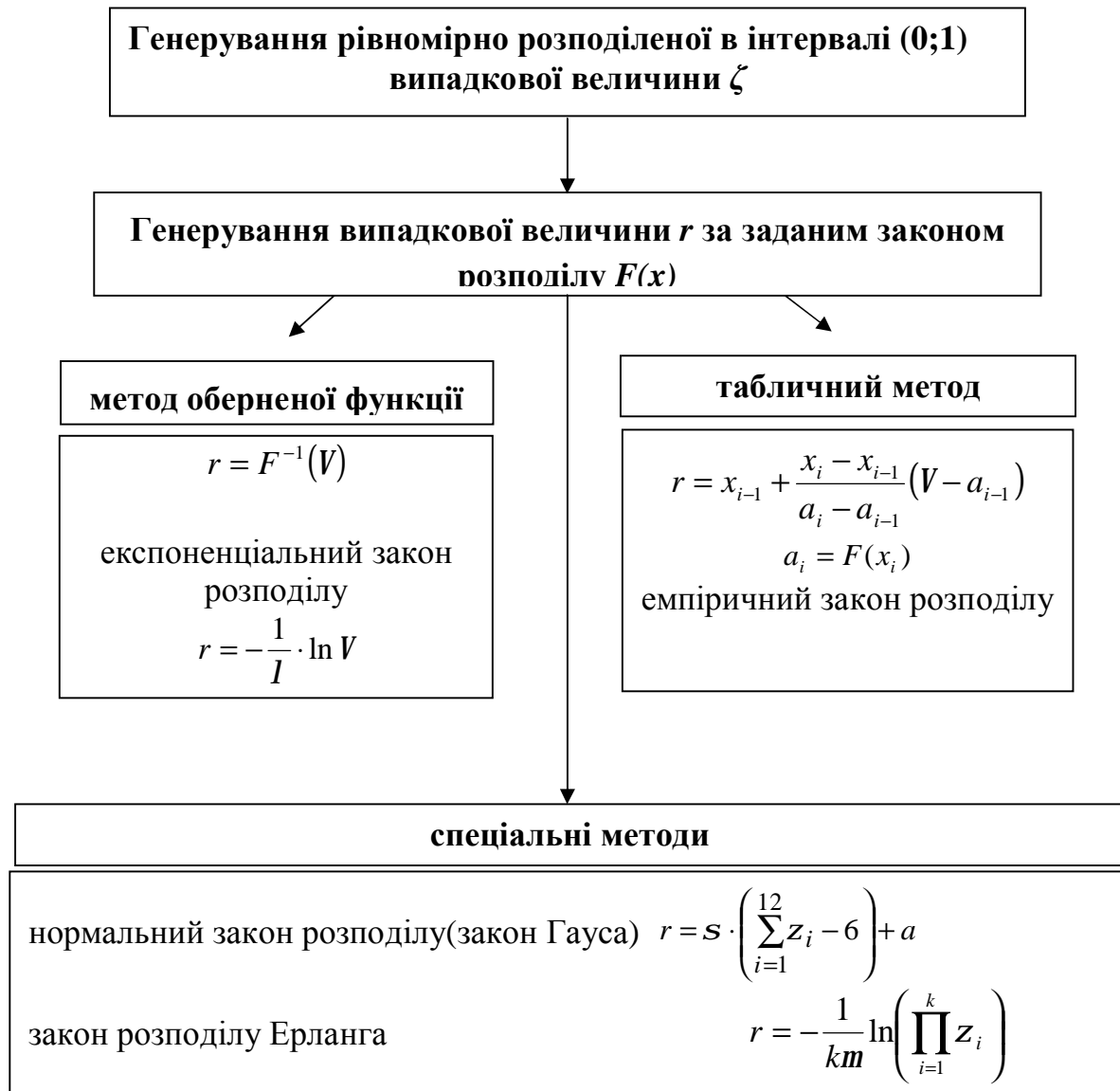


Рисунок 5.1. Генерування випадкової величини

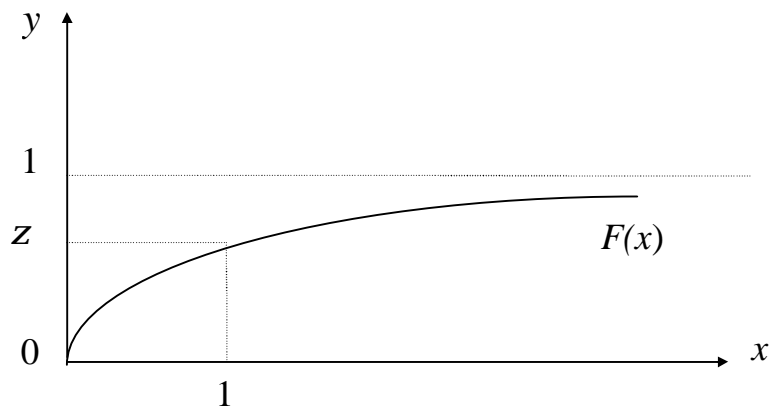


Рисунок 5.2. Генерування випадкової величини методом оберненої функції

Приклад 1. Для того, щоб отримати випадкову величину, яка розподілена за експоненціальним законом із параметром λ , потрібно розв'язати рівняння $V = F(r)$:

$$V = 1 - e^{-\lambda r} \Leftrightarrow r = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - V). \quad (5.11)$$

Величина $1 - z$ є випадкова величина, рівномірно розподілена на $(0,1)$. Тому цю дію робити не слід. Отже, маємо таку формулу для генерування випадкової величини, що має експоненціальний закон розподілу з параметром λ :

$$r = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln V. \quad (5.12)$$

Приклад 2. Метод оберненої функції можна використовувати для дискретних розподілів. Нехай, наприклад, випадкова величина r приймає значення a_1, a_2, \dots, a_n з ймовірностями відповідно p_1, p_2, \dots, p_n ($\sum_{i=1}^n p_i = 1$). Побудуємо функцію закону розподілу $F(x)$ (рис. 5.3).

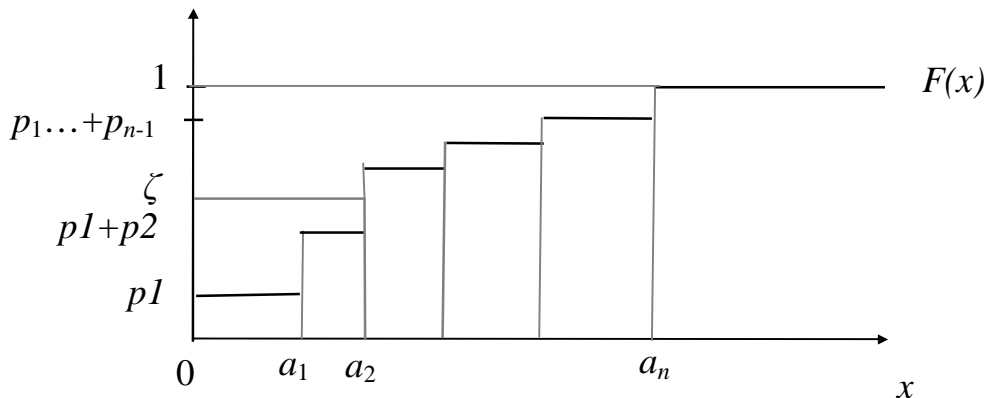


Рисунок 5.3. Використання методу оберненої функції для генерування дискретної випадкової величини.

Використовуючи метод оберненої функції отримуємо формулу для генерування дискретної випадкової величини r :

$$r = \begin{cases} a_1, & \text{якщо } 0 < V \leq p_1 \\ a_2, & \text{якщо } p_1 < V \leq p_1 + p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n, & \text{якщо } \sum_{i=1}^{n-1} p_i < V \leq 1 \end{cases} \quad (5.13)$$

Складність у використанні методу оберненої функції полягає у пошуку оберненого перетворення F^{-1} . У деяких випадках, наприклад, у ви-

падку нормального закону розподілу, таке перетворення взагалі не може бути знайдено у вигляді відомих математичних функцій. Крім того, використання складних функцій при обчисленні $F^{-1}(\zeta)$, таких як логарифм, значно впливає на швидкодію генератора випадкових чисел.

Табличний метод являється продовженням методу оберненої функції, який виходить з того, що функція закону розподілу $F(x)$ задається кусково-лінійним наближенням таблицею (x_i, a_i) , де $a_i = F(x_i)$ (рис. 5.4). Обернене перетворення F^{-1} також має кусково-лінійний вид. Припустимо, що випадкова величина Z потрапила в i -тий інтервал. Тоді на підставі подібності трикутників знаходимо відношення:

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} = \frac{r - a_{i-1}}{V - a_{i-1}}. \quad (5.14)$$

Звідси знаходимо формули для відшукування випадкової величини r :

$$r = x_{i-1} + \frac{x_i - x_{i-1}}{a_i - a_{i-1}}(V - a_{i-1}), \text{ якщо } a_{i-1} < V \leq a_i. \quad (5.15)$$

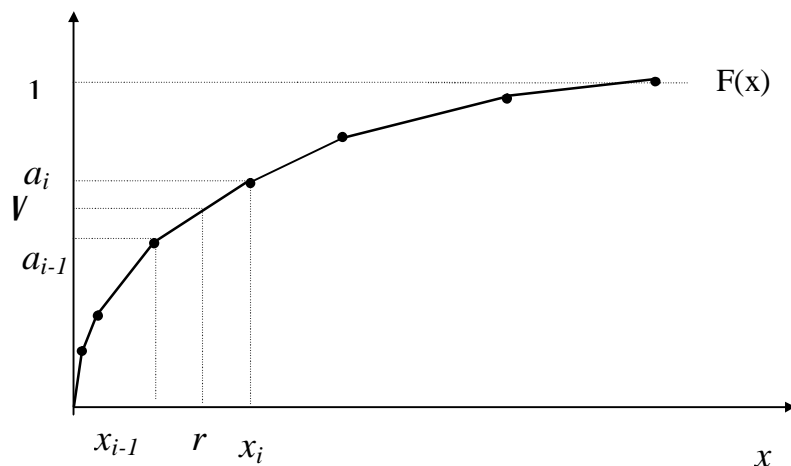


Рисунок 5.4. Табличний метод генерування випадкового числа r , що має закон розподілу $F(x)$

Табличний метод дозволяє генерувати випадкові числа з любым заданим законом розподілу. Задану точність можна отримати при збільшенні кількості інтервалів (x_{i-1}, x_i) . Нескладні операції лінійного перетворення забезпечують швидкодію цього методу. Можливо цьому багато мов імітаційного моделювання, в тому числі і самий популярний з них - GPSS, використовують при генеруванні випадкових чисел табличний метод.

Приклад

Табличний метод використовується для генерування випадкових чисел, що мають емпіричний закон розподілу.

Припустимо, що емпіричний закон розподілу задано парами чисел (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$. З'єднаємо дані пари чисел прямими лініями і отримаємо кусочно-лінійне наближення істинної функції закону розподілу. Для по-

будованого таким чином наближення функції закону розподілу використовують табличний метод генерування випадкових чисел (див. приклад 2).

Методи, які використовують спеціальні властивості законів розподілу. Наприклад, для генерування нормально розподілених чисел використовується *метод полярних координат* Марсальї і Брея [Кельтон, Лоу]. За цим методом для того, щоб отримати нормально розподілену випадкову величини з математичним сподіванням 0 і дисперсією 1 потрібно виконати наступні кроки:

1) згенерувати дві рівномірно розподілені в інтервалі (0;1) випадкові величини ζ_1, ζ_2 ,

2) перетворити величини ζ_1, ζ_2 у величини α_1, α_2 , які розподілені рівномірно в інтервалі (-1; 1), за допомогою лінійного перетворення:

$$a_i = 2z_i - 1, \quad i = 1, 2; \quad (5.16)$$

3) якщо $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 1$, то знову генерувати величини α_1, α_2 ; якщо величина $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq 1$, то сформувати величину

$$b = \sqrt{\frac{-2 \ln(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}; \quad (5.17)$$

4) сформувати величини

$$g_i = a_i \cdot b, \quad i = 1, 2. \quad (5.18)$$

Величини γ_1, γ_2 є незалежними нормально розподіленими випадковими величинами із математичним сподіванням 0 і дисперсією 1.

Для того, щоб отримати нормально розподілену величину з математичним сподіванням a та дисперсією S^2 , потрібно перетворити випадкову величину g за формулою:

$$r = S \cdot g + a. \quad (5.19)$$

Іншим прикладом застосування метода, оснований на спеціальних властивостях розподілу – є випадкова величина, яка має розподіл Ерланга. За визначенням ця величина є результатом суми k незалежних випадкових величин, розподілених за експоненціальним закон з однаковим параметром. Звідси формула генерування такої випадкової величини:

$$r = -\frac{1}{km} \sum_{i=1}^k \ln(z_i) = -\frac{1}{km} \ln \left(\prod_{i=1}^k z_i \right) \quad (5.20)$$

Перевірка якості генератора випадкових величин за заданим законом розподілу є складною задачею. Основні перевірки - на відповідність закону розподілу та на періодичність. Оцінку відповідності закону розподілу проводять за допомогою критеріїв узгодження.

Безперечно, якість генераторів випадкових чисел впливає на якість результатів моделювання. Неправильно побудований генератор випадкових чисел спричиняє низку помилок, що призводить не тільки до значної похибки у результатах моделювання, але й до алгоритму імітації, що не відповідає алгоритму функціонування реальної системи.

5.2. Алгоритми імітації процесів функціонування дискретних систем

Алгоритм, який відтворює функціонування системи, за допомогою комп'ютерної програми називається *алгоритмом імітації*.

Побудова алгоритму імітації складається з побудови:

- 1) алгоритму просування модельного часу;
- 2) алгоритму просування стану моделі в залежності від часу;
- 3) алгоритму збирання інформації про поведінку моделі у процесі імітації.

Просування модельного часу та просування стану моделі в залежності від часу становлять єдину задачу побудови алгоритму імітації. Якщо дослідник для реалізації алгоритму імітації використовує імітаційну мову моделювання, то моделюючий алгоритм закладений в самий засіб реалізації, і досліднику тільки корисно знати як він здійснюється, щоб не допустити помилки у застосуванні тієї або іншої імітаційної мови. Якщо ж дослідник використовує універсальну мову програмування, то задачу побудови моделюючого алгоритму йому потрібно вирішувати самостійно.

Узагальнена схема алгоритму імітації представлена на рисунку 5.5

Узагальнена схема алгоритму імітації

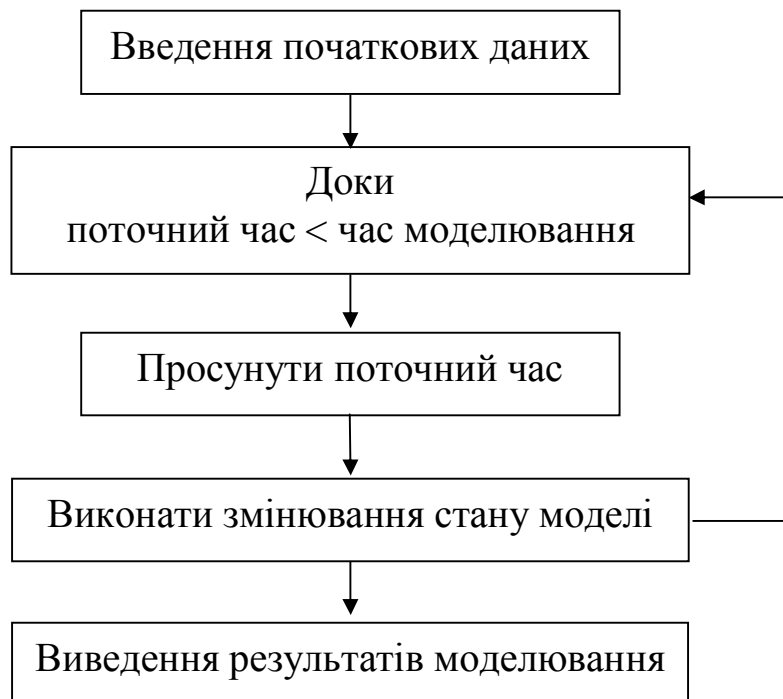


Рисунок 5.5. Узагальнена схема алгоритму імітації

Розглянемо відомі способи побудови алгоритмів імітації.

Способи побудови алгоритму просування модельного часу

Існують три способи просування модельного часу:

- за принципом Dt ,
- за принципом найближчої події,
- за принципом послідовного проведення об'єктів уздовж моделі.

Принцип Dt

Весь інтервал часу, протягом якого моделюється система, поділяється на рівні інтервали довжиною $Dt = const$. При кожному просуванні модельного часу на величину Dt послідовно визначаються всі зміни, що відбуваються в моделі. Величина одного інтервалу Dt повинна бути настільки малою, щоб в одному інтервалі Dt відбувалось не більш однієї події. В протилежному випадку логіка алгоритму імітації порушується і функціонування моделі суттєво відрізняється від функціонування реальної системи.

Принцип Dt є найбільш універсальним, але частіше він використовується для моделювання неперервних динамічних систем, оскільки вимагає у порівнянні з іншими способами більших затрат комп'ютерного часу при тій же точності моделювання.

Принцип найближчої події

Дискретні системи, імітаційне моделювання яких розглядається, мають певну особливість: змінювання стану в таких системах відбувається тільки в деякі моменти часу, а в усі інші моменти часу система не змінюється. Змінювання стану моделі спричиняється виникненням певної події у системі. Наприклад, подія «надходження деталі до технологічного процесу» спричиняє збільшення кількості деталей у системі, подія «виникнення поломки обладнання» спричиняє відправку поламаного обладнання до ремонту і т.д. Процес функціонування системи розглядається як послідовність подій, що відбуваються у моделі.

За принципом найближчої події модельний час просувається від моменту виникнення однієї події до моменту виникнення іншої, і після кожного просування часу реалізуються зміни стану моделі, відповідні до події, що виникла. Використання принципу найближчої події вимагає від дослідника побудови спеціальної процедури визначення моменту найближчої події, але при цьому він отримує вигреш у затратах комп'ютерного часу, оскільки пропускається моделювання системи у моменти часу, коли події не відбуваються.

Розглянемо, наприклад, одноканальну СМО (рисунок 5.6) з чергою обмеженої довжини. В системі спостерігаються дві події: V - надходження вимоги, W - звільнення каналу обслуговування. Представимо моменти часу, коли спостерігалась подія V , та моменти часу, коли спостерігалась подія W . Упорядкуємо моменти виконання подій V і W на вісі модельного

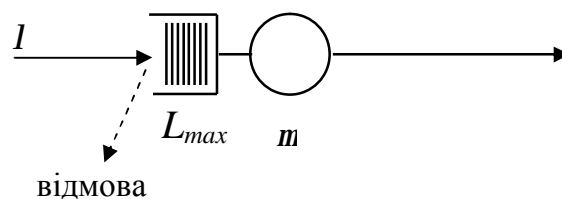
часу t_m . На першому кроці алгоритму імітації встановлюється момент модельного часу t_{m1} та реалізується подія V_1 ; на другому – момент модельного часу t_{m2} та реалізується подія W_1 , на третьому – t_{m3} та реалізуються події V_2 і W_2 у відповідності з пріоритетом процесів, і т.д.

Для дискретних систем просування модельного часу за принципом найближчої події є найефективнішим способом.

Принцип послідовного проведення об'єктів уздовж моделі

За принципом послідовного проведення об'єктів [Советов, Яковлев] уздовж моделі алгоритм просування часу не будується. Кожний об'єкт проводиться по моделі з моменту його надходження у модель до моменту виходу з моделі. Історія кожного проведення запам'ятовується, так що наступний об'єкт проводиться уздовж моделі з урахуванням історії попередніх проведенень. Такий алгоритм імітації дозволяє моделювати систему тільки в моменти виникнення подій, не займаючись побудовою алгоритму просування модельного часу. Проте використовується він дуже рідко, оскільки часто призводить до складних заплутаних алгоритмів.

Упорядкування подій у модельному часі



Подія „надходження вимоги” (V) у реальному часі

Подія „закінчилось обслуговування у каналі” (W) у реальному часі

Події V і W у модельному часі

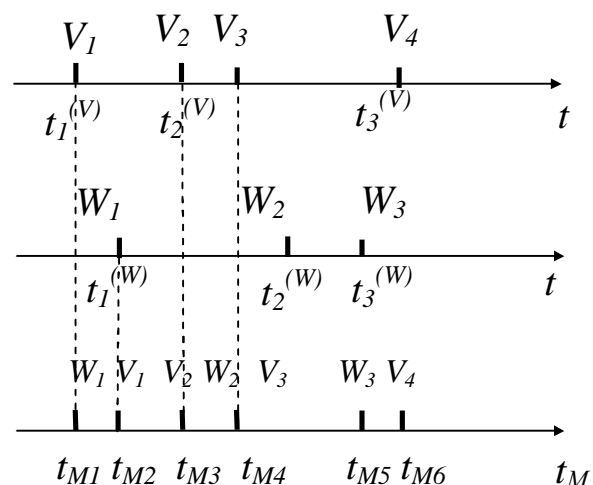


Рисунок 5.6. Упорядкування подій у модельному часі

Способи побудови алгоритму просування стану моделі в залежності від часу

Процес функціонування імітаційної моделі може бути описаний з точки зору:

- 1) змінювання стану системи, що відбуваються в момент появи подій;
- 2) дій, які виконуються елементами системи;
- 3) процесу, який відбувається у системі.

У відповідності з означеними способами опису функціонування моделі існують три способи просування стану моделі в часі:

- орієнтований на події;
- орієнтований на дії;
- процесно-орієнтований.

Спосіб, орієнтований на події

При підході, орієнтованому на події, дослідник визначає і описує події, які виникають у моделі. Імітація здійснюється виконанням упорядкованої у часі послідовності логічно взаємозв'язаних подій.

Проілюструємо на прикладі одноканальної СМО з чергою обмеженої довжини (див. рисунок 5.6). Стан системи описується станом каналу обслуговування та станом черги. Змінювання стану системи відбувається у моменти, коли у систему надходить вимога і коли закінчився процес обслуговування вимоги у каналі. Назвемо ці події подія «надходження» та подія «закінчилось обслуговування у каналі».

Подія «надходження» складається з таких дій:

- якщо канал обслуговування в стані вільний установити канал обслуговування у стан «зайнятий», запам'ятати момент виходу вимоги з каналу у момент часу – поточний момент часу плюс тривалість обслуговування у каналі;
- інакше
 - якщо є вільне місце у черзі, то зайняти місце у черзі;
 - інакше збільшити кількість не обслугованих вимог на одиницю;
- генерувати момент надходження наступної вимоги у СМО.

Подія «закінчилось обслуговування у каналі» складається з таких дій:

- збільшити кількість обслугованих вимог на одиницю;
- якщо черга вимог не пуста, перемістити одну вимогу із черги у канал обслуговування, запам'ятати момент виходу вимоги з каналу у момент часу - поточний момент часу плюс тривалість обслуговування у каналі;
- інакше установити канал у стан «вільний» вільний стан, запам'ятати момент виходу вимоги з каналу у момент часу, що більший за час моделювання (тобто у найближчий час вихід вимоги із каналу не очікується).

Після виконання події «надходження» запам'ятовуються моменти виникнення наступних подій «надходження» та «закінчилось обслугову-

вання у каналі». З цих двох моментів часу вибирається найменший і запам'ятовується, яка саме подія відповідає цьому моменту. Модельний час просувається у визначений момент найближчої події і виконується відповідна йому подія.

При виконанні події «закінчилось обслуговування у каналі» запам'ятовується момент наступної події «закінчилось обслуговування у каналі» або запам'ятовується, що найближчим часом не очікується звільнення каналу.

Таким чином, події виконуються в упорядкованій у часі послідовності, а модельний час просувається від одного моменту виникнення події до найближчого наступного.

Програма, яка здійснює імітацію одноканальної СМО, що розглядається, складається з таких дій:

- 1) ввести початкові значення змінних - поточний часу, час моделювання, стан каналу, момент надходження вимоги у систему, момент звільнення каналу обслуговування;
- 2) доки поточний час менший за час моделювання
- 3) знайти найменший із моментів часу «момент надходження вимоги у систему» та «момент звільнення каналу обслуговування» і запам'ятати, якій події він відповідає;
- 4) просунути поточний час у момент найближчої події;
- 5) виконати подію, яка відповідає моменту найближчої події.
- 6) вивести результати моделювання – кількість обслугованих вимог та кількість не обслугованих вимог протягом часу моделювання.

Лістинг програми мовою Object Pascal наведений у лістингу 5.1. Результати роботи програми наведені на рисунку 5.7.

-----Лістинг 5.1. Моделювання системи масового обслуговування-----

```
unit MO;  
interface
```

```
uses
```

```
Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,  
Dialogs, StdCtrls, Generator;
```

```
type
```

```
TForm1 = class(TForm)  
Label1: TLabel;  
Edit1: TEdit;  
Label2: TLabel;  
Edit2: TEdit;  
Label3: TLabel;  
Edit3: TEdit;
```

```

Button1: TButton;
Label4: TLabel;
Edit4: TEdit;
Label5: TLabel;
Edit5: TEdit;
Label6: TLabel;
Edit6: TEdit;
Edit7: TEdit;
Label7: TLabel;
Edit8: TEdit;
Label8: TLabel;
Button2: TButton;
Edit9: TEdit;
Edit10: TEdit;
Edit11: TEdit;
Edit12: TEdit;
Edit13: TEdit;
Edit14: TEdit;
Edit15: TEdit;
procedure Edit1Change(Sender: TObject);
procedure Edit2Change(Sender: TObject);
procedure Edit3Change(Sender: TObject);
procedure Button1Click(Sender: TObject);
procedure Edit7Change(Sender: TObject);
procedure Button2Click(Sender: TObject);
private
TimeMod: Double;{ Private declarations }
TimeServ: Double;
TimeEnt: Double;
TimeCurrent: Double;
NumServ:Double;
NumAll: Double;
NumUnServ:Double;
MaxQue: Integer;
procedure LoadAndDrawPicture(const FileName:String);
procedure EventEnter(var aDevice: Integer;
var aTimeExit:Double; var aTimeAct: Double; var aCurQue: Integer);
procedure EventExit(var aDevice: Integer;
var aTimeExit:Double; var aTimeAct: Double; var aCurQue: Integer);
public
{ Public declarations }
end;

var
Form1: TForm1;
implementation
{ $R *.dfm }

```

```

procedure TForm1.Edit1Change(Sender: TObject);
begin
TimeMod:=StrToFloat(Edit1.Text);
end;

procedure TForm1.Edit2Change(Sender: TObject);
begin
TimeEnt:=StrToFloat(Edit2.Text);
end;

procedure TForm1.Edit3Change(Sender: TObject);
begin
TimeServ:=StrToFloat(Edit3.Text);
end;

procedure TForm1.LoadAndDrawPicture(const FileName:String);
var Picture: TPicture;
begin
Picture:=TPicture.Create;
Picture.LoadFromFile(FileName);
Canvas.StretchDraw(Classes.Rect(80,200,width,height),Picture.Graphic);
end;

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var Device,sob,CurQue:Integer;
TimeExit,TimeAct,min,AverageQueue,AverageDevice: Double;
begin
Randomize;
//Введення початкових даних
TimeCurrent:=0;
NumServ:=0; NumUnServ:=0; NumAll:=0;
Device:=0; TimeExit:= TimeMod+1; TimeAct:=5;
min:=TimeAct; sob:=1; CurQue:=0; AverageQueue:=0; AverageDevice:=0;
while TimeCurrent<TimeMod do
begin
// Пошук моменту найближчої події
min:=TimeExit; sob:=2;
if TimeAct<min then
begin min:=TimeAct;sob:=1; end;
//Збирання статистичних даних про довжину черги
AverageQueue:= AverageQueue+CurQue*(min-TimeCurrent);
AverageDevice:= AverageDevice+Device*(min-TimeCurrent);
//Просування часу
TimeCurrent:=min;

if sob=1 then
EventEnter(Device, TimeExit, TimeAct, CurQue);
if sob=2 then

```

```

        EventExit(Device, TimeExit, TimeAct, CurQue);
        //Виведення результатів моделювання
Application.ProcessMessages;
Edit4.Text:=FloatToStr(TimeCurrent);
Edit14.Text:=FloatToStr(NumServ);
Edit13.Text:=FloatToStr(NumUnServ);
Edit12.Text:=FloatToStr(AverageQueue/TimeMod);
Edit11.Text:= IntToStr(CurQue);
Edit10.Text:= IntToStr(Device);
end;
Edit5.Text:=FloatToStr(NumUnServ/(NumServ+NumUnServ));
Edit6.Text:= FloatToStr(AverageDevice/TimeMod);
Edit8.Text:=Edit12.Text;
Edit9.Text:=FloatToStr(NumAll);
Edit15.Text:= Edit6.Text;
end;
        //Подія "надходження вимоги до СМО"
procedure TForm1.EventEnter(var aDevice: Integer;
        var aTimeExit:Double; var aTimeAct: Double; var aCurQue: Integer);
begin
if aDevice=0 then
begin
aDevice:=1;
aTimeExit:=TimeCurrent+GenExp(TimeServ);
end
else if aCurQue<MaxQue then
aCurQue:=aCurQue+1
else NumUnServ:=NumUnServ+1;
aTimeAct:=TimeCurrent+GenExp(TimeEnt);
NumAll:=NumAll+1;
end;

        //Подія "закінчилась обробка вимоги в каналі СМО"
procedure TForm1.EventExit(var aDevice: Integer;
        var aTimeExit:Double; var aTimeAct: Double; var aCurQue: Integer);
begin
NumServ:=NumServ+1;
if aCurQue>0 then
begin
aCurQue:=aCurQue-1;
aDevice:=1;
aTimeExit:=TimeCurrent+GenExp(TimeServ);
end
else
begin
aDevice:=0;
aTimeExit:=TimeMod+1;
end;
end;
end;

```

```

procedure TForm1.Edit7Change(Sender: TObject);
begin
MaxQue:=StrToInt(Edit7.Text);
end;

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
begin
LoadAndDrawPicture('SMO3.bmp');
end;
end.

//Функції генераторів випадкових чисел
unit Generator;
interface
function GenExp(parametr: Double): Double;
function GenNorm(mean: Double; stdev: Double): Double;
function GenUnif(left: Double; righth: Double): Double;

implementation
Function GenExp(parametr: Double): Double;
begin
result:=-parametr*ln(random);
end;

Function GenNorm(mean: Double; stdev: Double): Double;
var i: integer;
sum: double;
begin
sum:=0;
for i:=1 to 12 do
sum:=sum+random;
result:=stdev*sum+mean;
end;

Function GenUnif(left: Double; righth: Double): Double;
begin
result:=left+(righth-left)*random;
end;
end.

```

Спосіб, орієнтований на події, при побудові алгоритмів імітації дискретних систем засобами універсальних мов програмування виявляється найефективнішим.

Результати моделювання системи масового обслуговування:

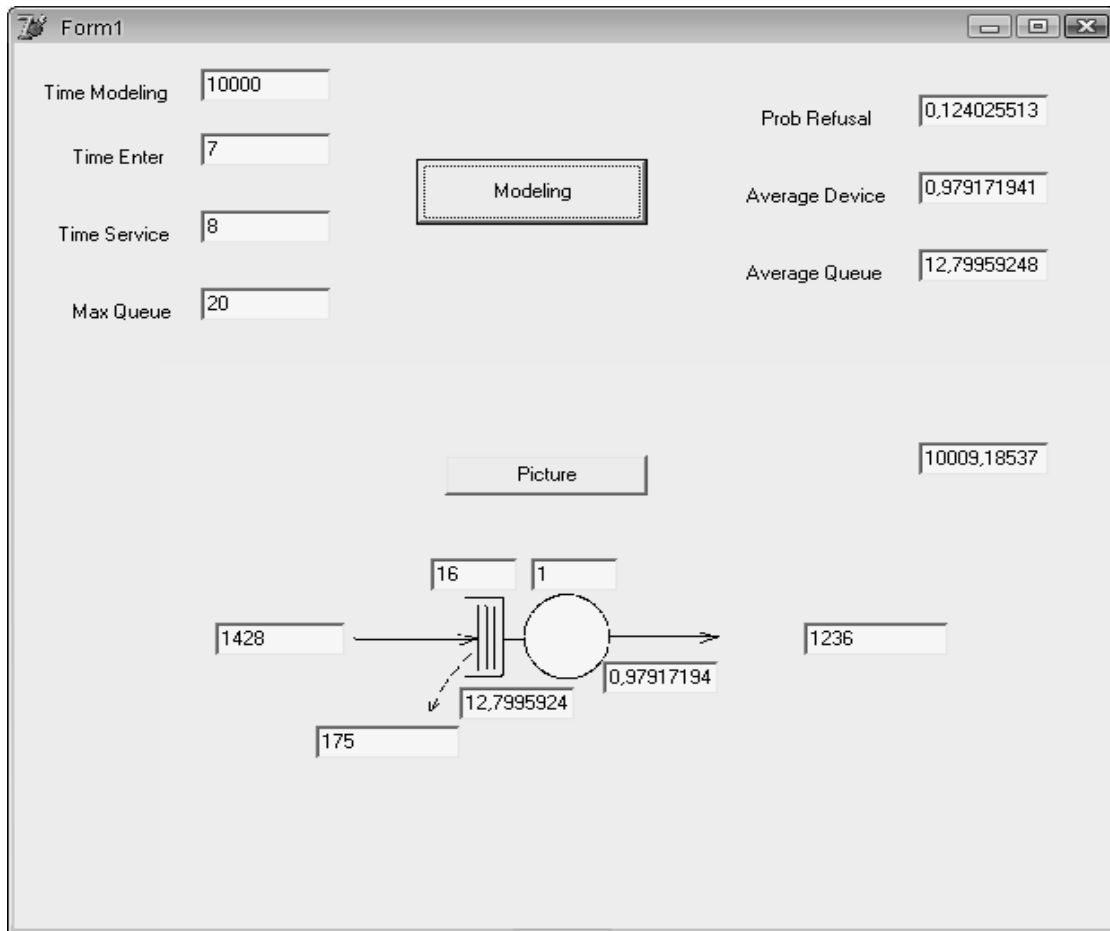


Рисунок 5.7. Результати запуску програми, представлені у лістингу 5.1.

Спосіб, орієнтований на дії

При іншому підході, основаному на описуванні дій, що виникають у системі, дослідник визначає і описує дії елементів системи та умови початку і кінця кожної дії. Умови початку і кінця кожної дії перевіряються після чергового просування модельного часу. Якщо умова початку дії виконується, то виконується дія. Для того, щоб була виконана кожна дія, сканування умов здійснюється для всієї множини дій при кожному просуванні модельного часу. Цей підхід найбільш ефективний, коли тривалість дії залежить від того, наскільки стан всієї системи задовольняє заданим умовам. В інших випадках більш ефективним виявляється підхід, орієнтований на події. Взагалі, оскільки сканувати умови початку і кінця дій потрібно після кожного просування модельного часу і для кожної дії, спосіб побудови моделюючого алгоритму, орієнтований на дії, має обмежене застосування в імітації дискретних систем.

Спосіб, орієнтований на процес

При процесно-орієнтованому підході описують процес проходження об'єктів уздовж моделі, використовуючи кінцевий набір операторів. Послідовність операторів потім транслюється у відповідну послідовність по-

дій і далі моделювання здійснюється як при підході, орієнтованому на події. Тому цей спосіб важко реалізувати самостійно, користуючись тільки універсальними мовами програмування. Використання його передбачає знання мов імітаційного моделювання, найбільш популярними з яких є *GPSS* та *SIMULA*. При цьому виходить компактна програма, що легко читається, зручна для коректування та налагодження. Моделювання мовою *GPSS* розглядається у розділі 8.1.

Використання процесно-орієнтованих мов моделювання повертає дослідників простотою складання програми. Однак, оскільки набір операторів обмежений, можливості дослідника, який створює імітаційну модель засобами мови моделювання, сильно обмежені вибором пропонувананих операторів.

Користування універсальними мовами програмування надає досліднику необмежені можливості при побудові імітаційного алгоритму, а студенту – можливість удосконалення навичок програмування. Гнучкість, яка досягається при користуванні універсальними мовами програмування, не може бути досягнута при користуванні спеціальним програмним забезпеченням. Тому, чим більше дослідник володіє навичками програмування, тим частіше при побудові алгоритму імітації він обирає універсальні мови програмування.

Способи побудови алгоритму збору інформації

Для побудови алгоритму збору інформації про поведінку моделі у процесі імітації використовують статистичні методи. Так, статистичну оцінку ймовірності відмови обслуговування знаходять як відношення кількості відмов до загальної кількості вимог, що надійшли до мережі масового обслуговування:

$$P = \frac{N_{unserv}}{N_{all}}, \quad (5.21)$$

де N_{unserv} – кількість відмов протягом часу моделювання T_{mod} , N_{all} – загальна кількість вимог, що надійшли на обслуговування у мережу масового обслуговування протягом часу моделювання T_{mod} .

Статистичну оцінку середньої довжини черги мережі масового обслуговування знаходять як середнє значення динамічної випадкової величини за формулою:

$$L_{aver} = \frac{\sum L_i \Delta t_i}{T_{mod}}, \quad (5.22)$$

де L_i – значення довжини черги, Δt_i – інтервал часу, протягом якого спостерігалось значення L_i , T_{mod} – загальний час спостереження.

Якщо інтервали часу Δt_i відрізняються мало, то можна припустити,

що $\Delta t_i \approx \Delta t$ для всіх i . Тоді формула для розрахунку середнього значення (5.22) приймає наближений вид:

$$L_{aver} = \frac{\sum_i L_i \Delta t_i}{T_{mod}} \approx \frac{\sum_i L_i \cdot \Delta t}{n \cdot \Delta t} = \frac{\sum_i L_i}{n}, \quad (5.23)$$

де n – кількість інтервалів Δt , що міститься в загальному часі спостереження T_{mod} .

Приклад. Нехай значення довжини черги приймає спостережувані значення, що представлені на рисунку 5.8 і модельний час просувається за принципом до найближчої події. Підрахунок середньої довжини черги за формулою (5.23) дасть наступний результат:

$$L_{aver} = \frac{\sum_i L_i}{n} = \frac{0+1+2+3+2+3}{6} = 1,8 \approx 2.$$

Але з рисунку видно, що більшість часу довжина черги мала значення 3, тому очікуване значення середньої довжини черги повинно наближатись швидше до значення 3, чим до значення 2. Помилка у результаті пов'язана із тим, що у формулі (5.23) не враховується тривалість часу, протягом якого спостерігалось значення 3, 2,1 або 0.

Якщо модельний час просувається за принципом Δt , то (в даному випадку $\Delta t = 1$) і за формулою (5.23) маємо:

$$L_{aver} = \frac{\sum_i L_i}{n} = \frac{0+1+2+\sum_{i=1}^{17} 3+2+\sum_{i=1}^{10} 3}{1 \cdot 31} = 2,8 \approx 3.$$

Тобто отримуємо правильний результат.

Нехай тепер знову модельний час просувається за принципом до найближчої події. Розрахуємо середню довжину черги за формулою (5.22):

$$L_{aver} = \frac{\sum_i L_i \Delta t_i}{T_{mod}} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 17 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 10}{31} = 2,8 \approx 3.$$

Отже, значення, отримане за формулою (5.21), є правильним.

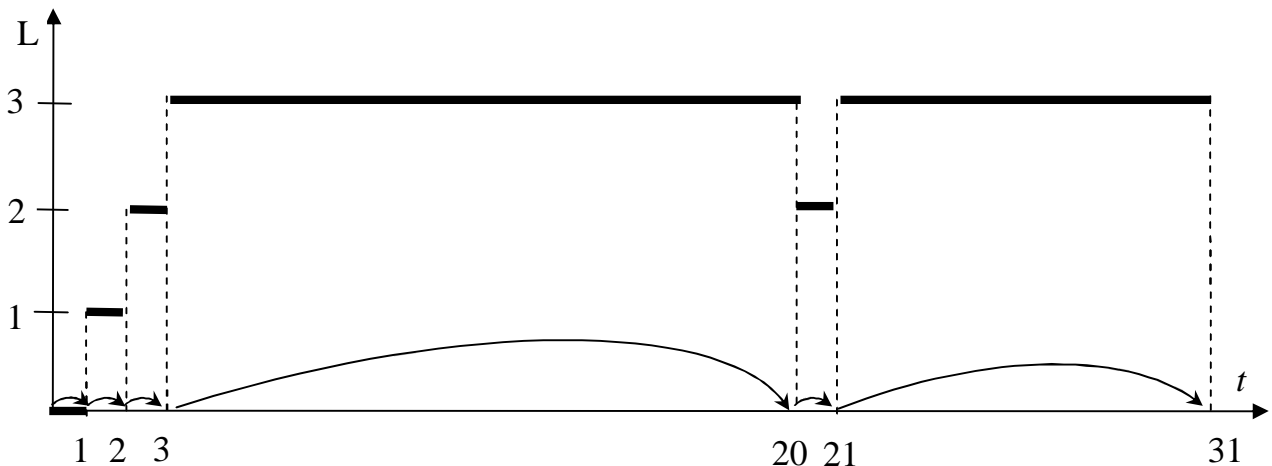


Рисунок 5.8. Спостереження довжини черги мережі масового обслуговування

Отже, якщо просування часу організовано в алгоритмі імітації за принципом Δt , то для розрахунку середньої довжини черги можна використовувати формулу (5.23). Якщо в алгоритмі імітації просування модельного часу організовано за принципом до найближчої події, то для правильного розрахунку середньої довжини черги потрібно використовувати формулу (5.22).

Для статистичної оцінки середнього очікування вимог у черзі мережі масового обслуговування підраховують сумарне очікування вимог у черзі і ділять його потім на кількість обслугованих вимог:

$$Q_{aver} = \frac{\sum_i L_i \Delta t_i}{N_{serv}}, \quad (5.24)$$

де L_i – кількість вимог, що очікують обслуговування, Δt_i – інтервал часу, протягом якого спостерігалось значення L_i , N_{serv} – кількість вимог, обслугованих протягом часу спостереження.

Формулу (5.24) можна вивести також, використовуючи формулу Літтла (4.14):

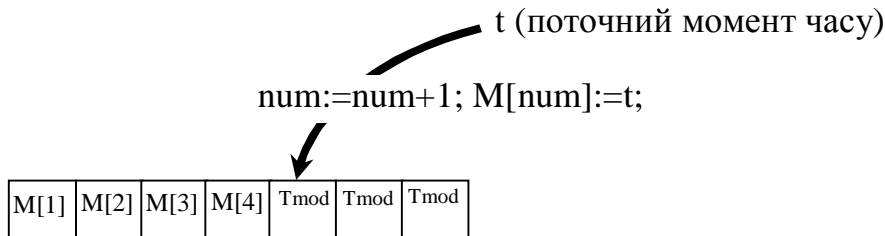
$$Q_{aver} = \frac{L_{aver}}{I} = \frac{\sum_i L_i \Delta t_i}{T_{mod}} \cdot \frac{1}{\frac{N_{serv}}{T_{mod}}} = \frac{\sum_i L_i \Delta t_i}{N_{serv}}, \quad (5.25)$$

де $I = \frac{N_{serv}}{T_{mod}}$ – інтенсивність виходу вимоги з системи масового обслуговування, до якої відноситься досліджувана черга.

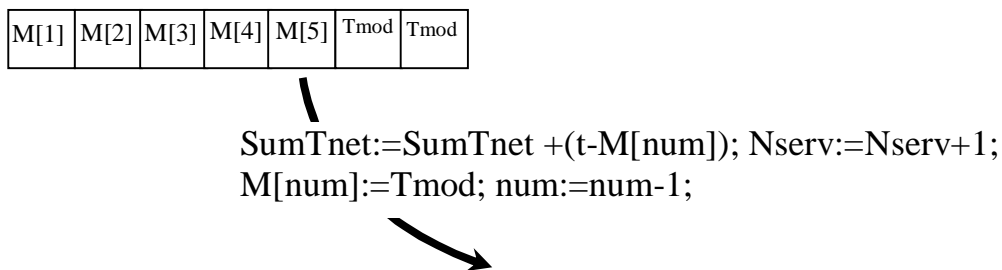
У більш складних випадках потрібно розраховувати середній час очікування вимоги в черзі, користуючись масивом черги вимог. Розмір такого масиву дорівнює максимальній кількості вимог, що можуть знаходитись у черзі. Коли вимога надходить до черги, у масиві закріплюється місце за вимогою у відповідності до правила упорядкування вимог у черзі і в цьому місці запам'ятовується момент часу, в який вимога надійшла до черги. Коли вимога залишає чергу, місце у масиві, яке займала вимога, звільняється. Найлегше організувати такий спосіб спостереження за часом очікування вимог, коли задане правило упорядкування у черзі LIFO (last input first output). Дійсно, коли вимога надходить до черги, у масиві займається наступне за останнім непустим елементом масиву місце. Коли вимога залишає чергу, звільняється останнє непусте місце масиву (рисунок 5.9).

Підрахування середнього часу обслуговування в мережі масового обслуговування за допомогою масива значень

Момент надходження вимоги до мережі:



Момент виходу вимоги з мережі:



Виведення результатів моделювання:

$$T_{net} := \text{SumTnet} / N_{serv}$$

Рисунок 5.9. Підрахування середнього часу обслуговування в мережі масового обслуговування за допомогою масива значень

За допомогою масиву значень підраховується також така величина, як середній час обслуговування вимоги в мережі масового обслуговування. В цьому випадку в масиві значень зберігається час надходження вимоги до мережі. Коли вимога надходить до мережі, час надходження запам'ятовується у виділеному елементі масиву. Коли вимога залишає мережу, підраховується час, який вимога знаходилась у мережі, як різниця між поточним моментом часу (тобто моментом виходу вимоги з мережі) і часом надходження вимоги в мережу, що міститься у відповідному елементі масиву:

$$T_{net} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{serv}} (t - t_{enter})_i}{N_{serv}}. \quad (5.26)$$

де i – номер спостереження, N_{serv} – кількість вимог, що обслуговані мережею масового обслуговування, t_{enter} – час надходження вимоги до мережі масового обслуговування.

У лістингу 5.1 (див. лістинг 5.1) здійснюється розрахунок середньої довжини черги за формулою (5.22), ймовірності відмови за формулою (5.21) та середнього завантаження пристрою за формулою:

$$R_{aver} = \frac{\sum_i R_i \Delta t_i}{T_{mod}}, \quad (5.27)$$

де R_i – значення змінної, що характеризує зайнятість пристрою ($R_i=1$, якщо пристрій зайнятий і $R_i=0$, якщо пристрій вільний), Δt_i – інтервал часу, протягом якого спостерігалось значення R_i , T_{mod} – загальний час спостереження.

5.3. Імітаційне моделювання мереж масового обслуговування

Алгоритм імітації мережі масового обслуговування складається з опису елементів моделі, опису стану елементів моделі та опису множини подій.

Елементами мережі масового обслуговування являються:

- § вхідний потік,
- § система масового обслуговування,
- § зв'язок.

Вхідний потік описується інтервалом надходження вимог у мережу, що може бути випадковою або детермінованою величиною, а також номером СМО, до якої надходить вимога. Стан вхідного потоку описується моментом часу надходження наступної вимоги у мережу масового обслуговування. Якщо інтервал часу надходження вимог до мережі є випадкова величина з відомим законом розподілу, то для її розрахунку будується генератор випадкових чисел так, як це було пояснено в розділі 5.1.

Система масового обслуговування, що складається з паралельно з'єднаних пристроїв та черги перед ними, описується кількістю пристроїв та обмеженням на максимальну довжину черги.

Черга характеризується обмеженням на максимальну кількість вимог, що може міститись у ній, та, можливо, правилом упорядкування вимог у черзі (FIFO, LIFO, пріоритети). Стан черги описується кількістю вимог, що містяться у черзі, та, можливо, порядком їх розташування у черзі і моментами надходження вимог до черги.

Кожний пристрій системи масового обслуговування характеризується тривалістю обслуговування вимоги та станом пристрою. Стан пристрою описується його станом на поточний момент часу - вільний, зайнятий або заблокований та моментом виходу з пристрою вимоги, для якої процес обслуговування закінчився. Якщо пристрій вільний, то вимоги в пристрої не має і тому вихід вимоги з пристрою не очікується, звідси, момент виходу вимоги з пристрою, що знаходиться у стані вільний, – не-

скінченність. Якщо пристрій блокований, то хоч вимога у пристрої присутня, вихід вимоги з пристрою залежить від перебігу подій в сусідніх елементах мережі масового обслуговування і не залежить від пристрою. Звідси, момент виходу вимоги з пристрою, що блокований, - нескінченність.

Зв'язок призначений для опису маршруту вимог між системами масового обслуговування. Зв'язок описується указуванням С,МО від якої рухається вимога, та указуванням СМО, до якої рухається вимога. Стан зв'язка може бути блокований та неблокований. Блокування зв'язку може здійснюватись з різних причин і може відноситись до різних елементів мережної імітаційної моделі. Умова блокування може бути задана також за станом не одного, а декількох елементів мережі масового обслуговування, і взагалі може бути дуже складною. Зв'язок може мати розгалуження. В цьому разі указується не одна СМО, до якої рухається вимога, а декілька СМО разом із значеннями ймовірностей, заданими для кожної гілки маршруту вимог. Рішення про вибір маршруту приймається за значенням рівномірно розподіленого на інтервалі (0;1) випадкового числа.

Множина подій мережі масового обслуговування складається з подій двох типів:

- § надходження вимоги в мережу масового обслуговування;
- § вихід вимоги, для якої закінчився час обслуговування, з системи масового обслуговування.

Упорядкування подій у часі здійснюється способом, орієнтованим на події. Просування часу здійснюється за принципом до найближчої події.

Об'єктно-орієнтований підхід

Об'єктно-орієнтований підхід до побудови імітаційних моделей мереж масового обслуговування дозволяє складати програми, що можуть легко стати універсальними програми імітації мереж масового обслуговування. Час, що витрачається на побудову одного об'єкта надолужується під час створення однотипних екземплярів об'єкта.

Розглянемо побудову алгоритму імітації мережі масового обслуговування на основі об'єктно-орієнтованого підходу. Виберемо об'єкти, з яких складається мережа масового обслуговування:

- § об'єкт «вхідний потік»,
- § об'єкт «СМО»,
- § об'єкт «маршрут»
- § об'єкт «маршрут входу»
- § об'єкт «маршрут виходу»

Об'єкт «вхідний потік» призначений для створення вхідного потоку вимог із заданим середнім значенням інтервалу надходження вимог у мережу МО. Об'єкт «СМО» призначений для створення системи масового обслуговування, що характеризується заданою кількістю пристроїв, обме-

женням на довжину черги, тривалістю обслуговування вимоги в пристрої. Дані про значення цих змінних присвоюються екземпляру об'єкта в момент його створення за допомогою методу Create.

Об'єкт «маршрут» призначений для створення зв'язків між СМО. Об'єкти «маршрут входу» та «маршрут виходу» призначені для створення зв'язків між зовнішнім середовищем та мережею масового обслуговування.

Кожний об'єкт має поле «вхід» та «вихід». Передача вимоги уздовж маршруту від однієї СМО до іншої означає, що вимога, яка знаходиться на виході об'єкта, що означений на початку маршруту, передається на вхід об'єкта, що означений на кінці маршруту. Наприклад, передача зі СМО1 до СМО2 означає зникнення вимоги на виході СМО1 і поява вимоги на вході СМО2.

Об'єкти мають методи, що виконують властиві об'єктам дії. Так, об'єкт «СМО» містить методи «зайняти СМО» та «звільнити СМО», а також методи «повідомити про середню кількість зайнятих пристроїв у СМО», «повідомити про стан черги СМО» та інші. Об'єкт «маршрут» має метод «передати вимогу», а також метод «повідомити про кількість не обслуговуваних вимог».

Після того як об'єкт «СМО» полагоджений, до головної програми, яка здійснює імітаційне моделювання, підключається модуль, що містить опис об'єкта «СМО», і різні СМО створюються як екземпляри об'єкту «СМО» в результаті виконання двох рядочків програми:

```
var smo1: TSMO;
```

```
.  
. .  
. .
```

```
smo1:=TSMO.Create(5,10,GetTimeMod,2);
```

Перший параметр конструктора об'єкта TSMO задає кількість пристроїв у СМО, другий – обмеження на довжину черги, третій – час моделювання, четвертий – середній час обслуговування.

Аналогічно створюються екземпляри об'єкту «маршрут»:

```
var join: TJoin;
```

```
.  
. .  
. .
```

```
join:=TJoin.Create(smo1,smo2);
```

Перший параметр конструктора об'єкта Tjoin указує СМО, що являється «входом» маршруту, другий параметр – СМО, що являється «виходом» маршруту.

Таким чином, створюючи СМО та маршрути між ними, можна створити будь-яку мережу масового обслуговування.

Об'єктно-орієнтований підхід до побудови алгоритму імітації розглянемо на прикладі мережі масового обслуговування, що складається з трьох СМО (рис. 5.10), і має розгалуження маршруту після першої СМО.

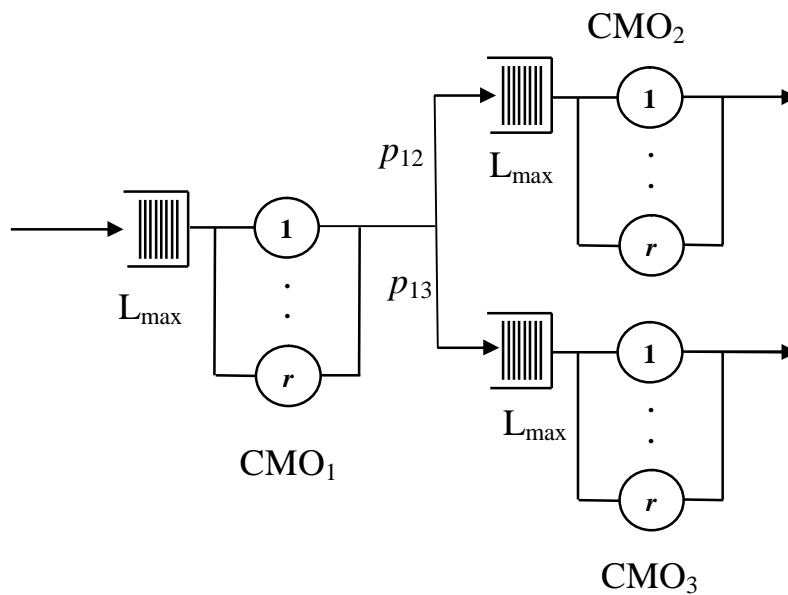


Рисунок 5.10. Мережа масового обслуговування до лістингу 5.2

Реалізація алгоритму мовою Object Pascal представлена в лістингу 5.2. Об'єкт «вхідний потік» описаний у модулі SystEntry. Об'єкт «СМО» описаний у модулі SystService і має назву TSMO. Об'єкти «маршрут», «маршрут входу» та «маршрут виходу» описані в модулі Join.

-----Лістинг 5.2. Моделювання мережі масового обслуговування-----

```

unit imitMO;

interface
uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, SystService, SystEntry, join;

type
  TForm1 = class(TForm)
    Edit1: TEdit;
    Label1: TLabel;
    Edit2: TEdit;
    Label2: TLabel;
    Button1: TButton;
    Edit3: TEdit;
    Edit4: TEdit;
    Edit5: TEdit;
    Edit6: TEdit;
  end;
    
```



```

Edit7: TEdit;
Label3: TLabel;
Label4: TLabel;
Label5: TLabel;
Label6: TLabel;
Label7: TLabel;
Label8: TLabel;
Edit8: TEdit;
Label9: TLabel;
Label10: TLabel;
Edit9: TEdit;
Edit10: TEdit;
Label11: TLabel;
Edit11: TEdit;
Label12: TLabel;
Label13: TLabel;
procedure Edit1Change(Sender: TObject);
procedure Button1Click(Sender: TObject);

```

```

private
  TimeMod,t: Double;{ Private declarations }
public
  function GetTimeMod: Double;
  function GetTimeNow: Double;

  { Public declarations }
end;

```

```

var
  Form1: TForm1;

```

```

implementation

```

```

{ $R *.dfm }

```

```

function TForm1.GetTimeMod: Double;
begin
  result:=TimeMod;
end;

```

```

function TForm1.GetTimeNow: Double;
begin
  result:=t;
end;

```

```

procedure TForm1.Edit1Change(Sender: TObject);
begin

```

```

TimeMod:=StrToFloat(Edit1.Text);
t:=0;
end;

```

```

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var smo: array of TSMO;
    NumSMO: integer;
    systEntry: TSystEntry;
    join: array of TJoin;
    joinIn: TJoinIN;
    joinOut: TJoinOUT;
    tmin: double;
    event: integer;
    AverQue,AverDevices: array of double;
    i: integer;
    prob,choice: double;
begin
    NumSMO:=3; //кількість СМО
    choice:=0.7; //ймовірність вибору маршруту
    SetLength(smo,NumSMO);
    SetLength(join,NumSMO-1);
    SetLength(AverQue,NumSMO);
    SetLength(AverDevices,NumSMO);
    prob:=0;
    for i:=0 to NumSMO-1 do
        AverQue[i]:=0;
    for i:=0 to NumSMO-1 do
        AverDevices[i]:=0;
        //структура мережі масового обслуговування
    systEntry:=TsystEntry.Create(0.1); //створення вхідного потоку вимог
    smo[0]:=TSMO.Create(5,10,GetTimeMod,1.2); //створення СМО1
    joinIn:=TJoinIN.Create(systEntry,smo[0]); // створення маршруту до СМО1
    smo[1]:=TSMO.Create(7,8,GetTimeMod,2); //створення СМО2
    join[0]:=TJoin.Create(smo[0],smo[1]); //створення маршруту від СМО1 до СМО2
    smo[2]:=TSMO.Create(2,1,GetTimeMod,1); //створення СМО3
    join[1]:=TJoin.Create(smo[0],smo[2]); //створення маршруту від СМО2 до
СМО3
    joinOut:=TJoinOUT.Create(smo[NumSMO-1]); //створення маршруту на вихід
системи
    t:=0; // початкове значення модельного часу
    while t<GetTimeMod do
        begin
        tmin:=systEntry.GetMinTime;
        event:=0;
        for i:=0 to NumSMO-1 do
        if smo[i].GetMinTime<tmin then

```

```

        begin
        tmin:=smo[i].GetMinTime;
        event:=i+1;
        end;
for i:=0 to NumSMO-1 do
begin
AverQue[i]:=AverQue[i]+((tmin-t)/GetTimeMod)*smo[i].GetStateQue;
AverDevices[i]:=AverDevices[i]+((tmin-
t)/GetTimeMod)*smo[i].GetAverLoadChannel;
end;

t:=tmin; //просування часу в момент найближчої події
case event of
0: begin
    systEntry.Arrival(GetTimeNow);
    joinIn.send;
    smo[0].Seize(GetTimeNow);
end;
1: begin
    if random<choice then //вибір маршруту слідування
    begin
    smo[0].Releize(smo[0].GetMinChannel,GetTimeMod,GetTimeNow);
    join[0].send;
    smo[1].Seize(GetTimeNow);
    end
    else
    begin
    smo[0].Releize(smo[0].GetMinChannel,GetTimeMod,GetTimeNow);
    join[1].send;
    smo[2].Seize(GetTimeNow);
    end ;
end;
2: begin
    smo[1].Releize(smo[1].GetMinChannel,GetTimeMod,GetTimeNow);
    joinOut.send;
end ;
3: begin
    smo[2].Releize(smo[2].GetMinChannel,GetTimeMod,GetTimeNow);
    joinOut.send;
end ;
end;
prob:=joinIn.GetNumUnServ;
for i:=0 to NumSMO-2 do
    prob:=prob+join[i].GetNumUnServ;
prob:=prob/systEntry.GetNumArrival;

Application.ProcessMessages;

```

```

Edit2.Text:=FloatToStr(GetTimeNow);
Edit3.Text:=FloatToStr(prob);
Edit4.Text:=FloatToStr(joinOut.GetNumService);
Edit5.Text:=IntToStr(systEntry.GetNumArrival);
Edit6.Text:=FloatToStr(AverQue[0]);
Edit7.Text:=FloatToStr(AverDevices[0]);
Edit8.Text:=IntToStr(joinIn.GetNumUnServ);
Edit9.Text:=FloatToStr(AverQue[1]);
Edit10.Text:=FloatToStr(AverDevices[1]);
Edit11.Text:=IntToStr(join[0].GetNumUnServ);
Edit12.Text:=FloatToStr(AverQue[2]);
Edit13.Text:=FloatToStr(AverDevices[2]);
Edit14.Text:=IntToStr(join[1].GetNumUnServ);
end;

for i:=0 to NumSMO-1 do smo[i].Free; //знищення об'єктів
for i:=0 to NumSMO-2 do join[i].Free;
systEntry.Free;
joinIn.Free;
joinOut.Free;
end;
end.

unit SystEntry;
interface
uses Generator;

Type
TsystEntry=class // об'єкт «вхідний потік вимог»
private
Exit:boolean;
Entry:boolean;
Interval:double; //інтервал часу, з яким мають надходити вимоги з вхідного по-
току
TimeExit:double;//момент часу, в який вимога має вийти з вхідного потоку
NumArrival: integer;//загальна кількість вимог, що створена вхідним потоком
вимог
public
Constructor Create(aInterval:double);
//в конструкторі об'єкта «вхідний потік вимог» задається
// значення середнього інтервалу часу aInterval, з яким надходять вимоги
procedure Arrival(at:double);
//формує момент часу TimeExit в залежності від поточного моменту часу at
procedure EntryInSyst;
function GetMinTime:double;
function GetNumArrival:integer;
procedure SetExit(aEnt:boolean);
procedure SetEntry(aEx:boolean);
end;

```

implementation

```
Constructor TsystEntry.Create;
begin
inherited Create;
Entry:=true;
Exit:=false;
Interval:=aInterval;
end;

procedure TsystEntry.Arrival(at:double);
begin

    TimeExit:=at+GenExp(Interval);
//інтервал часу між надходження вимог заданий за експоненціальним законом
розподілу
    Exit:=true;
    NumArrival:=NumArrival+1;

end;

procedure TsystEntry.EntryInSyst;
begin
Exit:=true;
Entry:=true;
end;

function TsystEntry.GetMinTime:double;
begin
    result:=TimeExit;
end;

function TsystEntry.GetNumArrival:integer;
begin
    result:=NumArrival;
end;

procedure TsystEntry.SetExit(aEnt:boolean);
begin
Exit:=aEnt;
end;

procedure TsystEntry.SetEntry(aEx:boolean);
begin
Entry:=aEx;
end;
end.
```

```

unit SystService;
interface
  uses Generator;

  Type
  TSMO=class //об'єкт «система масового обслуговування»
  private
  NumChannel, MaxQueue: integer; //кількість пристроїв обслуговування
  TimeFinServ: Array of Double; //
  StateChannel: Array of integer; //поточний стан пристроїв
  StateQueue: integer; //поточний стан черги
  Serv: double;
  Entry: boolean;
  Exit: boolean;
  tmin:double;
  minChannel:integer;
  block: boolean;
  public
  Constructor Create(aNum:integer;aMax:integer;aTimeMod:double;aServ:double);
  // в конструкторі об'єкта «система масового обслуговування» задаються
  // значення кількості пристроїв обслуговування aNum,
  // обмеження на довжину черги aMax,
  // середня тривалість обслуговування aServ,
  // значення часу моделювання aTimeMod
  procedure Seize(at:double);
  // зайняти СМО
  procedure Releize(aChannel:integer;aTimeMod:double;at:double);
  //звільнити СМО
  function GetStateQue:integer;
  procedure SeizeChannel(aChannel:integer;at:double);
  //зайняти пристрій з номером aChannel
  procedure ReleizeChannel(aChannel:integer;aTimeMod:double);
  //звільнити пристрій з номером aChannel
  procedure NextTime; //запам'ятати найближчу події у СМО
  function GetStateChannel(aNum:integer):integer;
  procedure SetExit(aEnt:boolean);
  procedure SetEntry(aEx:boolean);
  function GetMinTime:double;
  function GetMinChannel:integer;
  function GetNumChannel:integer;
  function GetAverLoadChannel:double; //підрахувати середню кількість зайнятих
  пристроїв
  function GetBlock:boolean; //повідомити про стан блокування
end;

implementation

```

```

Constructor TSMO.Create;
var i: integer;
begin
  inherited Create;
  StateQueue:=0; //початковий стан черги
  MaxQueue:=aMax;
  NumChannel:=aNum;
  Serv:=aServ;
  Entry:=False;
  Exit:=False;
  block:=false; // в початковий момент блокування маршруту відсутнє
  SetLength(TimeFinServ, NumChannel);
  SetLength(StateChannel, NumChannel);
  for i:=0 to NumChannel-1 do
    begin
      TimeFinServ[i]:=aTimeMod;
      StateChannel[i]:=0; //початковий стан пристроїв - вільний
    end;
  NextTime; // формувати найближчу подію в СМО
end;
procedure TSMO.Seize(at:double);
var j:boolean; i:integer;
begin
  if Entry=true then begin
    j:= false; i:=1;
    while (i<=NumChannel) and (j=false) do
      if StateChannel[i-1]=0 then
        begin
          j:=true;
          SeizeChannel(i,at);
          NextTime; // змінити найближчу подію в СМО
          Entry:=false;
        end else i:=i+1;
      end;
    if (j=false) and (MaxQueue>0) then begin
      StateQueue:= StateQueue+1;
      Entry:=false;
      if StateQueue=MaxQueue then block:=true;
    end;
  end;
end;

procedure TSMO.Releize(aChannel:integer;aTimeMod:double;at:double);
begin
  if StateQueue>0 then begin
    StateQueue:= StateQueue-1;
  end;

```

```

        if block=true then block:=false;
        SeizeChannel(aChannel,at);
        NextTime;
    end else begin
        ReleizeChannel(aChannel,aTimeMod);
        NextTime;
        end;
    Exit:=true;
end;

function TSMO.GetStateQue:integer;
begin
result:=StateQueue;
end;

procedure TSMO.SeizeChannel(aChannel:integer;at:double);
begin
StateChannel[aChannel-1]:=1;
TimeFinServ[aChannel-1]:=at+GenExp(Serv);
end;

procedure TSMO.ReleizeChannel(aChannel:integer;aTimeMod:double);
begin
StateChannel[aChannel-1]:=0;
TimeFinServ[aChannel-1]:=aTimeMod;
end;

function TSMO.GetStateChannel(aNum:integer):integer;
begin
result:=StateChannel[aNum-1];
end;

function TSMO.GetAverLoadChannel:double;
var sum,i: integer;
begin
sum:=0;
for i:=1 to GetNumChannel do
begin
sum:=sum+StateChannel[i-1];
end;
result:=sum;
end;

function TSMO.GetNumChannel:integer;
begin
result:=NumChannel;
end;

```



```

function TSMO.GetBlock:boolean;
begin
result:=block;
end;

procedure TSMO.SetExit(aEnt:boolean);
begin
Exit:=aEnt;
end;

procedure TSMO.SetEntry(aEx:boolean);
begin
Entry:=aEx;
end;

procedure TSMO.NextTime;
var i: integer;
begin
tmin:=TimeFinServ[0];
minChannel:=1;
if NumChannel>1 then
begin
for i:=1 to NumChannel do
begin
if TimeFinServ[i-1]<tmin then
begin
tmin:=TimeFinServ[i-1];
minChannel:=i;
end;
end;
end;
end;

function TSMO.GetMinTime:double;
begin
result:=tmin;
end;

function TSMO.GetMinChannel:integer;
begin
result:=minChannel;
end;

end.

unit join;

```

```

interface
  uses SystService,SystEntry;

  Type
  TJoin=class //об'єкт «маршрут», що передає вимогу від СМО (EntrySmo) до СМО
  (ExitSmo)
  private
  EntrySmo: TSMO;
  ExitSmo: TSMO;
  State:boolean;
  NumUnServ: integer;
  public
  Constructor Create(aSmoEntry:TSMO;aSmoExit:TSMO);
  //у конструкторі об'єкту «маршрут» задаються СМО EntrySmo, з якої вимога ви-
  ходить,
  // та СМО ExitSmo, до якої вимога надходить
  procedure send; //здійснює передачу вимоги уздовж заданого маршруту
  function GetState: boolean;
  function GetNumUnServ: integer;
  end;

  Type
  TJoinIN=class //об'єкт «маршрут входу», що передає вимогу від вхідного потоку
  до СМО
  private
  Entry: TsystEntry;
  ExitSmo: TSMO;
  State:boolean;
  NumUnServ: integer;
  public
  Constructor Create(aEntry:TsystEntry;aSmoExit:TSMO);
  //у конструкторі задається вхідний потік, з якого вимога виходить,
  // та СМО, до якої вимога надходить
  procedure send;
  function GetState: boolean;
  function GetNumUnServ: integer;
  end;

  Type
  TJoinOUT=class //об'єкт «маршрут виходу», що передає вимогу із СМО на вихід
  із мережі МО
  private
  EntrySmo: TSMO;
  State:boolean;
  NumService:integer;
  public
  Constructor Create(aSmoEntry:TSMO);

```

```
//у конструкторі задається СМО, з якої вимога виходить
procedure send;
function GetNumService: integer;
end;
```

implementation

```
Constructor TJoin.Create;
begin
EntrySmo:=aSmoEntry;
ExitSmo:=aSmoExit;
State:=true;
NumUnServ:=0;
end;
```

```
Constructor TJoinOUT.Create;
begin
EntrySmo:=aSmoEntry;
NumService:=0;
State:=true;
end;
```

```
Constructor TJoinIN.Create;
begin
Entry:=aEntry;
ExitSmo:=aSmoExit;
State:=true;
NumUnServ:=0;
end;
```

```
procedure TJoin.send;
begin
if GetState=true then begin
    EntrySmo.SetExit(false);
    ExitSmo.SetEntry(true);
    end else NumUnServ:=NumUnServ+1;
end;
```

```
procedure TJoinIN.send;
begin
if GetState=true then begin
    Entry.SetExit(false);
    ExitSmo.SetEntry(true);
    end else NumUnServ:=NumUnServ+1;
end;
```

```
procedure TJoinOUT.send;
begin
if State=true then begin
    EntrySmo.SetExit(false);
    NumService:=NumService+1;
    end;
end;

function TJoinIN.GetState: boolean;
begin
if ExitSmo.GetBlock=true then result:=false else result:= true;
end;

function TJoinIn.GetNumUnServ: integer;
begin
result:=NumUnServ;
end;

function TJoin.GetState: boolean;
begin
if ExitSmo.GetBlock=true then result:=false else result:= true;
end;

function TJoin.GetNumUnServ: integer;
begin
result:=NumUnServ;
end;

function TJoinOUT.GetNumService: integer;
begin
result:=NumService;
end;

end.
```

Результати запуску програми наведені на рисунку 5.11.

Parameter	Value
TimeModeling	1000
TimeNow	1000
Probability of Refusal	0.210363972856262
NumArrival	4863
NumServices	3820
NumUnServices	872
SMO 1	
Average Queue	6.36621518527719
Average Loading Devices	4.88565257474155
SMO 2	
Average Queue	1.10354692799381
Average Loading Devices	5.48495142600718
SMO 3	
Average Queue	0.116430021676067
Average Loading Devices	1.01856858723175
NumUnServices	130

Рисунок 5.11. Результати запуску програми, представленої у лістингу 5.2

Верифікація мережі масового обслуговування здійснюється спостереженням змінювання вихідних змінних моделі при змінюванні вхідних змінних моделі і порівнянням їх із очікуваним змінюванням. Наприклад, при зменшенні інтервалу часу, з яким вимоги надходять у мережу масового обслуговування, очікується зменшення кількості вимог у її чергах та зменшення завантаження пристроїв. При збільшенні тривалості обслуговування вимог у пристроях деякої системи масового обслуговування очікується збільшення середньої кількості вимог у черзі цієї СМО та збільшення середнього завантаження пристроїв цієї СМО. Результати верифікації моделі мережі масового обслуговування (див. рис. 5.10) представлені у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1.

Верифікація моделі масового обслуговування

Прогон	Значення вхідних змінних											Значення вихідних змінних моделі										
	Середній інтервал надходження вимог	Кількість пристроїв в СМО1	Обмеження на довжину черги СМО1	Середня тривалість обслуговування в СМО1	Кількість пристроїв в СМО2	Обмеження на довжину черги СМО2	Середня тривалість обслуговування в СМО2	Кількість пристроїв в СМО3	Обмеження на довжину черги СМО3	Середня тривалість обслуговування в СМО3	Ймовірність вибору маршруту	Кількість вимог, що надійшли в мережу	Кількість не обслугованих в СМО ₁	Кількість не обслугованих в СМО ₂	Кількість не обслугованих в СМО ₃	Ймовірність відмови	Середня довжина черги в СМО ₁	Середня кількість зайнятих пристроїв СМО ₁	Середня довжина черги в СМО ₂	Середня кількість зайнятих пристроїв СМО ₂	Середня довжина черги в СМО ₃	Середня кількість зайнятих пристроїв СМО ₃
1	0,2	5	10	1,2	7	8	2	2	1	1	0,7	4863	872	21	130	0,20	6,3	4,9	1,1	5,5	0,10	1,0
2	0,4	5	10	1,2	7	8	2	2	1	1	0,7	2470	1	0	38	0,02	0,4	3,0	0,2	3,5	0,05	0,7
3	0,2	5	10	0,6	7	8	2	2	1	1	0,7	4981	5	293	254	0,11	0,4	3,1	3,2	6,5	0,18	1,2
4	0,2	5	10	1,2	9	8	2	2	1	1	0,7	4804	782	1	148	0,20	5,9	4,9	0,2	5,6	0,14	1,1
5	0,2	5	10	1,2	7	8	2	3	1	1	0,7	4963	803	56	63	0,18	6,0	4,9	1,5	5,7	0,05	1,2
6	0,2	9	10	1,2	9	8	2	3	1	1	0,7	4813	9	60	75	0,03	0,4	6,0	1,0	7,0	0,05	1,3
7	2	9	0	1,2	9	8	2	3	1	1	0,7	479	0	0	0	0	0	0,6	0	0,7	0	0,1
8	2	3	0	1,2	9	0	2	3	0	1	0,7	478	0	0	0	0	0	0,5	0	0,7	0	0,1
9	0,2	5	10	1,2	7	2	2	3	1	1	0,0	4805	765	0	1572	0,50	5,8	4,9	0	0	0,40	2,5
10	0,2	5	10	1,2	7	2	2	3	1	1	1,0	4855	788	1072	0	0,40	6,2	4,9	0,7	6,2	0	0

При початкових значення вхідних змінних спостерігається значна ймовірність відмови близько 0,2, висока зайнятість пристроїв першої СМО - 4,9 з 5 пристроїв, неповна зайнятість пристроїв другої СМО - 5,5 пристроїв в середньому з 7 пристроїв і недостатня зайнятість пристроїв третьої СМО - 1 з 2 пристроїв в середньому. За час моделювання, який складає 1000 одиниць модельного часу, надійшло близько 5000 вимог, що відповідає середньому інтервалу надходження вимог 0,2 одиниці модельного часу.

При збільшенні інтервалу надходження вимог вдвічі спостерігається суттєве зменшення ймовірності відмови майже до нуля та зменшення завантаження усіх СМО - до 3 в першій СМО, до 3,5 в другій СМО і до 0,7 - в третій СМО. Середні довжини черг в усіх СМО досягли значень, які менші за одиницю. Таке зменшення завантаження усіх СМО цілком пояснюється зменшенням кількості вимог, що надійшли на обслуговування в мережу МО.

При зменшенні середньої тривалості обслуговування вимоги пристроєм першої СМО вдвічі спостерігається значне зменшення кількості вимог, які не обслуговані першою СМО і значне збільшення кількості ви-

мог, які не обслуговані другою та третьою СМО через обмеження кількості місць у черзі. Оскільки вимоги обробляються першою СМО швидше, середня кількість зайнятих пристроїв у цій СМО зменшилась майже до 3 пристроїв. У той же час, оскільки до другої та третьої СМО потрапляє більше вимог, спостерігається логічне збільшення завантаження цих СМО - до 6,5 пристроїв у другій СМО і до 1,2 пристрої у третій СМО. Ймовірність відмови в цілому в мережі зменшилась до 0,1.

Збільшення кількості пристроїв у другій СМО з 7 до 9 у порівнянні з початковими результати призводять до скорочення кількості не обслугованих другою СМО вимог до 1 вимоги, проте середня кількість зайнятих пристроїв майже не змінилась, що пояснюється великою кількістю вимог, яким відмовлено в обслуговуванні першою СМО. А з кількістю вимог, які все ж таки пройшли обслуговування в першій СМО, легко справляються 6 пристроїв другої СМО. Ймовірність відмови в мережі МО залишилась на рівні 0,2 через велику кількість вимог, яким відмовлено в обслуговуванні першою СМО.

Збільшення кількості пристроїв у третій СМО до трьох призводить до не суттєвого зменшення середньої довжини черги до 0,05 та до невеликого збільшення середньої кількості зайнятих пристроїв у цій СМО до 1,2 пристрої через недостатню кількість вимог, які надходять на обслуговування у третю СМО. Ймовірність відмови дещо зменшується до 0,18.

Одночасне збільшення кількості пристроїв у першій СМО до 9 пристроїв, до 9 пристроїв у другій СМО і до 3 - у третій СМО призводить до суттєвого очікуваного зменшення ймовірності відмови до 0,03.

Збільшення інтервалу надходження вимог до 2 одиниць модельного часу призводить до нульових значень ймовірності відмови та середніх довжин черг у всіх СМО, що цілком пояснюється зменшенням кількості вимог, що надходять на обслуговування. На нульове значення ймовірності відмови при такій малій інтенсивності надходження вимог не впливає ні зменшення максимальної довжини черги в першій СМО до нуля ні зменшення кількості пристроїв в першій СМО до трьох.

Зменшення ймовірності надходження вимог з першої СМО до другої СМО до 0, що фактично означає закриття маршруту СМО1-СМО2, призводить до значного збільшення кількості вимог, яким відмовлено в обслуговуванні третьою СМО, збільшення завантаження пристроїв та черги третьої СМО - до 2,5 пристроїв в середньому та до 0,4 вимоги в середньому відповідно.

Закриття маршруту СМО1-СМО3 призводить до значного збільшення кількості вимог, яким відмовлено в обслуговуванні другою СМО, збільшення завантаження пристроїв та черги другої СМО - до 6,2 пристроїв в середньому та до 0,7 вимоги в середньому відповідно.

Отже, змінювання значень вхідних змінних моделі призводить до логічного змінювання вихідних змінних моделі. Тому за результатами верифікації моделі робимо висновок про відповідність функціонування моделі функціонуванню реальної системи. Модель може бути використана для отримання практичних результатів.

5.4. Імітаційне моделювання мережі Петрі з часовими затримками

Імітаційні моделі складних систем складають на основі мереж Петрі з часовими затримками, побудова яких розглядалась у розділі 3.3. Математична теорія мереж Петрі з часовими затримками розглянута у [Зайцев].

Алгоритм імітації мережі Петрі складається з опису елементів моделі та опису правил зміни стану елементів.

Елементами мережі Петрі являються:

- § позиція,
- § перехід,
- § зв'язок.

Стан позиції повністю описується кількістю маркерів у позиції.

Перехід характеризується часовою затримкою та множиною вхідних позицій. Стан переходу повністю описується моментами виходу маркерів з переходу. Зв'язок описується позицією або переходом, які на вході та на виході зв'язка. Зв'язок може з'єднувати тільки позицію та перехід або перехід та позицію. Отже, опис елементів мережі Петрі набагато простіший за опис елементів мережі масового обслуговування.

Стан елементів мережі Петрі змінюється за правилами запуску переходів. Оскільки переходи відповідають подіям, що відбуваються в реальній системі, при подуві алгоритму імітації мережі Петрі не потрібно описувати алгоритми здійснення подій. Замість цього описується алгоритм запуску переходу мережі Петрі.

Алгоритм імітації мережі Петрі реалізує упорядковану в часі послідовність запусків переходів і може бути побудований за двома принципами. Перший ґрунтується на тому, що структура мережі Петрі задається за допомогою матриць – матриці входів, матриці виходів та вектора маркірування. Другий ґрунтується на об'єктно-орієнтованому підході до побудови програм.

Розглянемо побудову алгоритму імітації часової мережі Петрі, що ґрунтується на матричному описі структури мережі Петрі. Нехай задана мережа Петрі, матриця входів якої D_{ji}^{34} , матриця виходів – D^+ , вектор маркірування – M . Умова запуску переходу T_j в матричному перекладі формулюється так: якщо кожна з компонент вектора маркірування більша або

рівна відповідній компоненті вектора, який є j -рядочком матриці входів, то умова запуску переходу T_j виконана:

$$M_i \geq D_{ji}^{3/4} \text{ для усіх } i. \quad (5.28)$$

Запуск переходу T_j з часовою затримкою здійснюється у два етапи. Спочатку здійснюється вхід маркерів у перехід T_j і запам'ятовується момент виходу маркерів з переходу t_{out_j} . Вхід маркерів у перехід матричним способом здійснюється відніманням від вектору маркірування M j -рядочку матриці входів $D^{3/4}$:

$$M_i^c = M_i - D_{ji}^{3/4} \text{ для усіх } i \text{ та для заданого } j. \quad (5.29)$$

У момент часу t_{out_j} здійснюється вихід маркерів з переходу, що у матричному перекладі приймає вид:

$$M_i^a = M_i^c + D_{ji}^+ \text{ для усіх } i \text{ та для заданого } j. \quad (5.30)$$

Тобто, до вектору маркірування додається j -рядочок матриці виходів D^+ .

Стан моделі в кожний момент часу повністю описується маркіруванням мережі Петрі та моментами часу виходу маркерів з переходів із часовими затримками. Просування модельного часу в мережі Петрі здійснюється за принципом найближчої події. З усіх моментів часу виходу маркерів з переходів t_{out_j} вибирається найменший t_{min} і запам'ятовується відповідний перехід j_{min} :

$$t_{min} := \min_j t_{out_j}, \quad j_{min} : t_{out_{j_{min}}} = t_{min}.$$

Поточний момент часу t встановлюється у вибране найменше значення t_{min} і здійснюється запуск переходу:

$$t := t_{min},$$

$$M_i := M_i + D_{j_{min}i}^+ \text{ для усіх } i$$

Розглянемо алгоритм імітації мережі Петрі з часовими затримками на прикладі мережі Петрі, що представлена на рисунку 5.12. Дана мережа Петрі моделює процес обслуговування вимог мережею масового обслуговування, що складається з трьох пристроїв обслуговування та двох черг, одна з яких має обмежену довжину.

Перехід «надходження вимог» має часову затримку $t_{надх}$. Переходи, що моделюють обробку вимоги у пристроях обслуговування, мають часову затримку $t_{обсл}$. Переходи «обслуговування у пристрої К1» та «відмова» являються конфліктними. Оскільки за змістом моделі вимога спочатку намагається обслуговуватись у пристрої К1, для переходу «обслуговування у пристрої К1» заданий більший пріоритет у порівнянні з переходом «відмова». Для інших переходів задана нульова часова затримка.

Отже, мережа Петрі, представлена на рисунку 5.12 є мережею Петрі з переходами, для яких задані часові затримками, та з конфліктними переходами, для яких заданий пріоритет запуску.

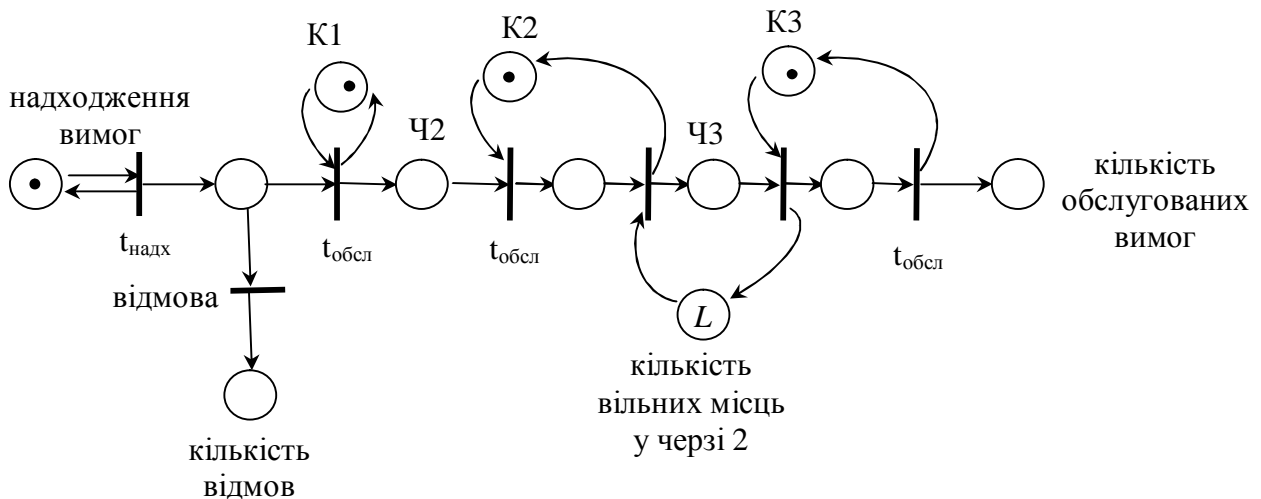


Рисунок 5.12. Мережа Петрі з часовими затримками, що моделює мережу масового обслуговування

Алгоритм реалізації звичайної мережі Петрі складається з таких дій:

- * ввести вектор маркірування M , матрицю входів $D^{3/4}$, матрицю виходів D^+ ,
 час моделювання $Tmod$;
- * $t:=0$;
- * доки $t < Tmod$:
 - для кожного переходу T_j :
 - § якщо $M_i \geq D^{3/4}_{ji}$ для усіх i (умова запуску переходу виконана),
 - § то $M_i := M_i - D^{3/4}_{ji}$ для усіх i (з вхідних позицій переходу T_j відняти маркери),
 - § запам'ятати час виходу маркерів з переходу t_{out_j} ;
 - визначити момент найближчої події $t_{min} := \min\{t_{out_j}\}$ та відповідний йому номер переходу J_{min} ;
 - просунути поточний час на момент найближчої події: $t := t_{min}$;
 - $M_i := M_i + D^+_{J_{min},i}$ для усіх i (добавити у вихідні позиції переходу $T_{J_{min}}$ маркери);
 - $t_{out_{J_{min}}} := Tmod$ (запам'ятати, що з переходу $T_{J_{min}}$ не очікується вихід маркерів);
- зібрати статистику про функціонування моделі;
- кінець.

Зауважимо, що в наведеному алгоритмі присутній неявний пріоритет запуску переходів, оскільки перевірка умови запуску переходів здійснюється у тому порядку, у якому вони занумеровані. Так, якщо перехід «обслуговування каналом К1» буде мати номер менший за номер переходу «відмова»,

то спочатку завжди буде перевірятись умова запуску переходу «обслуговування каналом К1» і тільки після цього умова запуску переходу «відмова», що означає пріоритет запуску переходу «обслуговування каналом К1». Якщо нумерація переходів не буде відповідати їх пріоритету, то наведений алгоритм імітації мережі Петрі призводитиме до неправильних результатів. Тому при користуванні наведеним алгоритмом імітації слід пам'ятати, що нумерація переходів повинна співпадати з пріоритетом запуску переходів: перехід з більшим пріоритетом повинен мати менший номер.

5.5. Імітаційне моделювання мережі Петрі з конфліктними переходами

Якщо переходи мають спільну вхідну позицію і кількість маркерів у цій позиції недостатня для того, щоб одночасно запустити переходи, то переходи являються конфліктними. Способи розв'язання конфліктів розглядались у пункті 3.4.

Алгоритм імітації мережі Петрі з конфліктними переходами ускладнюється тим, що спочатку перевіряється умова запуску переходів, потім розв'язується конфлікт між переходами, для яких одночасно виконана умова запуску, і, нарешті, виконується запуск переходу.

Неявний спосіб завдання пріоритету в алгоритмі імітації розглядався у пункті 5.3. Розглянемо ймовірнісний спосіб розв'язування конфліктів. Припустимо, що мережа Петрі, для якої складається алгоритм імітації має вид, представлений на рисунку 5.13.

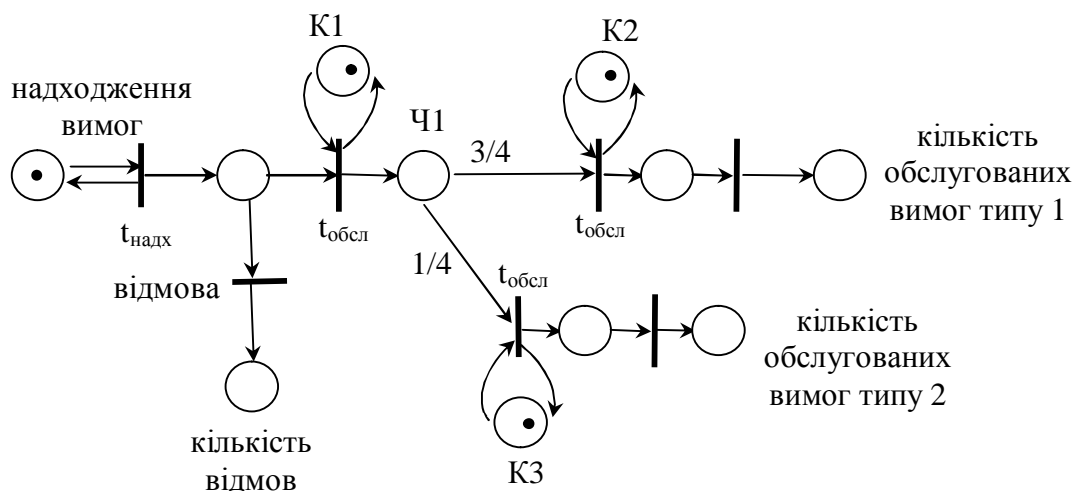


Рисунок 5.13. Мережа Петрі з часовими затримками та з конфліктними переходами

Конфлікт між переходами «обслуговування вимоги в каналі К2» та «обслуговування в каналі К3» розв'язується указуванням ймовірності запуску переходів - $\frac{1}{4}$ та $\frac{3}{4}$ відповідно.

Алгоритм імітації мережі Петрі з конфліктними переходами складається з таких дій:

- * ввести вектор маркірування M , матрицю входів $D^{\frac{3}{4}}$, матрицю виходів D^+ , час моделювання $Tmod$; ймовірності запуску конфліктних переходів q ;
- * $t:=0$;
- * доки $t < Tmod$:
 - для кожного переходу T_j :
 - $k:=0$;
 - якщо $M_i \geq D^{\frac{3}{4}}_{ji}$ для усіх i (умова запуску переходу виконана), то
 - § $k:=k+1$;
 - § запам'ятати номер переходу в масиві $V_k:=j$,
 - якщо $k=1$ (конфлікт відсутній), то
 - $J:=V_1$,
 - $M_i:=M_i - D^{\frac{3}{4}}_{ji}$ для усіх i (з вхідних позицій переходу T_j відняти маркери),
 - запам'ятати час виходу маркерів з переходу t_out_j ;
 - якщо $k > 1$ (розв'язання конфлікту), то
 - знайти $N:=$ випадкове число від 1 до k ,
 - $F:=0$; $N:=0$
 - для кожного V_j
 - $r:=$ випадкове число від 0 до 1;
 - $F:= F + V_j$ (розрахувати ймовірність запуску переходу V_j);
 - якщо $F < r$, то
 - $J:=V_N$,
 - $M_i:=M_i - D^{\frac{3}{4}}_{ji}$ для усіх i (з вхідних позицій переходу T_j відняти маркери),
 - запам'ятати час виходу маркерів з переходу t_out_j ;
 - вийти з циклу;
 - інакше передчасне закінчення моделювання;
 - визначити найменший з часів виходу маркерів $t_min:=\min\{t_out_j\}$ та відповідний йому номер переходу $Jmin$;
 - просунути поточний час на цей момент часу: $t:=t_min$;
 - $M_i:=M_i + D^+_{Jmin,i}$ для усіх i (добавити у вихідні позиції переходу T_{Jmin} маркери);
 - $t_out_{Jmin}:=Tmod$ (запам'ятати, що з переходу T_{Jmin} не очікується вихід маркерів);
 - зібрати статистику про функціонування моделі.
- * вивести результати;
- * кінець.

- якщо $M_i \geq D_{J_i}^{3/4}$ для усіх i (умова запуску переходу виконана), то
 - $M_i^c = M_i - D_{J_i}^{3/4}$ для усіх i (з вхідних позицій переходу T_J відняти маркери),
 - запам'ятати час виходу маркерів з переходу T_J в кінець масиву $t_{out_J}[n+1] := t + t_{обр}$, n – номер останнього елемента масиву t_{out_J} ;
 - $k := k + 1$;

§ визначити найменший з часів виходу маркерів $t_{min} := \min\{t_{out_{J,k}}\}$ та відповідний йому номер переходу J_{min} та номер каналу N_{min} ;

§ просунути поточний час на момент найближчої події: $t := t_{min}$;

§ $M_i^c = M_i + D_{J_{min},i}^+$ для усіх i (добавити у вихідні позиції переходу $T_{J_{min}}$ маркери);

§ для кожного i від N_{min} до n :

- $t_{out_{J_{min},i}} := t_{out_{J_{min},i+1}}$ (видалити момент часу $t_{out_{J_{min},N_{min}}}$ з масиву $t_{out_{J_{min}}}$);
- $t_{out_{J_{min},n}} := T_{mod}$;

* зібрати статистику про функціонування моделі.

* кінець.

Матричний підхід до побудови алгоритму імітації мережі Петрі ефективний тільки при відносно невеликій кількості переходів та позицій. При великій кількості переходів та позицій матриці входів та виходів містять, як правило, велику кількість нулів, перегляд яких при кожному просуванні модельного часу гальмує процес імітації.

Об'єктно-орієнтований підхід дозволяє задати структурні зв'язки між елементами мережі Петрі за допомогою об'єктів типу зв'язок. Перевірка умови запуску переходу в цьому випадку здійснюється тільки для позицій, що являються для переходу вхідними. На основі об'єктно-орієнтованого підходу побудована універсальна система імітаційного моделювання PTRSIM, що розглядається у розділі 8.2.

5.7. Приклади розв'язання задач

■ **Задача 1.** Побудувати генератор випадкової величини, що має експоненціальний закон розподілу з параметром 2.

Розв'язання. Скористаємось методом оберненої функції. За формулою (5.12) отримуємо:

$$r = -\frac{1}{2} \cdot \ln V,$$

де z є випадкова величина, рівномірно розподілена на $(0;1)$.

Відповідь: $r = -\frac{1}{2} \cdot \ln V$, де z є випадкова величина, рівномірно розподілена на $(0;1)$.

■ **Задача 2.** Побудувати генератор випадкової величини r , що приймає значення 0, 1, 2 з ймовірностями 0,25, 0,5 та 0,25 відповідно.

Розв'язання. За формулою (5.13) для генерування дискретної випадкової величини отримуємо:

$$r = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 < V \leq 0,25 \\ 1, & \text{якщо } 0,25 < V \leq 0,75 \\ 2, & \text{якщо } 0,75 < V \leq 1 \end{cases}$$

де z є випадкова величина, рівномірно розподілена на $(0;1)$.

Відповідь: $r = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 < V \leq 0,25 \\ 1, & \text{якщо } 0,25 < V \leq 0,75 \\ 2, & \text{якщо } 0,75 < V \leq 1 \end{cases}$, де z є випадкова величина, рівномірно розподілена на $(0;1)$.

вномірно розподілена на $(0;1)$.

■ **Задача 3.** Побудувати генератор випадкових чисел, якщо відомі значення закону розподілу випадкової величини: $F(0)=0$, $F(0,5)=0,27$, $F(1)=0,5$, $F(1,5)=0,73$, $F(2)=0,88$, $F(2,5)=0,96$, $F(3)=0,98$, $F(3,5)=0,99$, $F(4)=1,0$

Розв'язання. Для побудови заданого генератору випадкових чисел скористаємось табличним методом. За формулами (5.15) знаходимо:

$$r = \frac{0,5}{0,27} \cdot V, \text{ якщо } 0 < V \leq 0,27;$$

$$r = 0,5 + \frac{0,5}{0,23} (V - 0,27), \text{ якщо } 0,27 < V \leq 0,5;$$

$$r = 1 + \frac{0,5}{0,23} (V - 0,5), \text{ якщо } 0,5 < V \leq 0,73;$$

$$r = 1,5 + \frac{0,5}{0,15} (V - 0,73), \text{ якщо } 0,73 < V \leq 0,88;$$

$$r = 2 + \frac{0,5}{0,8} (V - 0,88), \text{ якщо } 0,88 < V \leq 0,96;$$

$$r = 2,5 + \frac{0,5}{0,02} (V - 0,96), \text{ якщо } 0,96 < V \leq 0,98;$$

$$r = 3 + \frac{0,5}{0,01} (V - 0,98), \text{ якщо } 0,98 < V \leq 0,99;$$

$$r = 3,5 + \frac{0,5}{0,01} (V - 0,99), \text{ якщо } 0,99 < V \leq 1;$$

Відповідь: відповіддю є вісім отриманих формул.

■ **Задача 4.** Побудувати генератор випадкових чисел, нормально розподілених з математичним сподіванням 10 та середнім квадратичним відхиленням 2.

Розв'язання. Скористаємось формулами (5.16), 5.19). За умовами задачі математичне сподівання $a=10$, а середнє квадратичне відхилення $\sigma=2$. Тому маємо таку формулу

$$r = 2\gamma + 10,$$

величина γ у розрахована за формулами (5.16), (5.18).

Відповідь: генератор нормально розподілених випадкових чисел з математичним сподіванням 10 та середнім квадратичним відхиленням 2 задається формулою $r = 2\gamma + 10$.

■ **Задача 5.** Побудувати алгоритм імітації наступної мережі МО, що представлена на рисунку 5.15. Метою моделювання є визначення ймовірності відмови та середніх довжин черг.

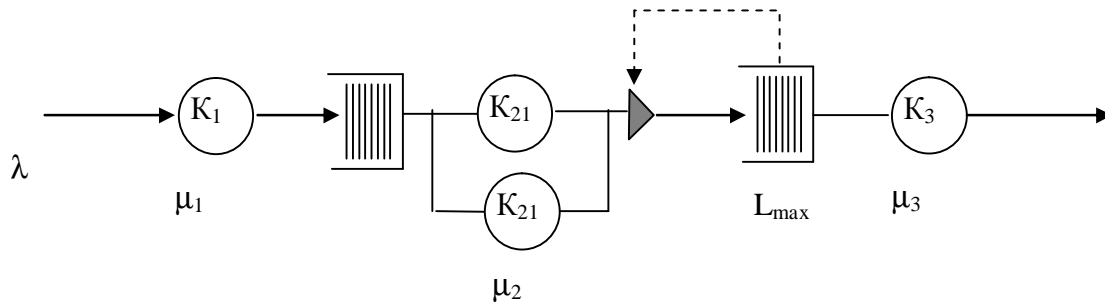


Рисунок 5.15. Мережа МО до умови задачі 5

Розв'язання. Виділимо елементи системи: канал СМО1 – Канал1, канали СМО2 – Канал21 та Канал22, канал СМО3 – Канал3, черга СМО2 – Черга1, черга СМО3 – Черга2.

Параметри системи: інтервал надходження - $t_{надх} = -\frac{1}{l} \ln(z)$; інтервал обслуговування в Каналі1 - $t_{об_в_к1} = -\frac{1}{m_1} \ln(z)$; інтервал обслуговування в Каналі2i - $t_{об_в_к2} = -\frac{1}{m_2} \ln(z)$; інтервал обслуговування в Каналі3 - $t_{об_в_к3} = -\frac{1}{m_3} \ln(z)$; максимальне значення довжини черги СМО2 – L_{max} .

Нехай змінна t – це поточний момент часу.

Для опису стану системи в момент часу t введемо наступні змінні. Змінна T_0 – це час надходження вимоги до мережі МО. Стан каналів обслуговування опишемо змінними Z^* та T^* , де $*$ – номер каналу. Змінна Z^* приймає значення 0, якщо Канал $*$ вільний, значення 1, якщо Канал $*$ зайнятий та значення 2, якщо Канал $*$ заблокований. Змінна T^* - це час закінчення обслуговування в каналі $*$.

Стан черги опишемо змінною L^* - кількість вимог у Черзі $*$.

Для збору інформації про систему введемо змінні: $N_{необ}$ – кількість не обслугованих вимог на момент часу t , $N_{об}$ - кількість обслугованих вимог на момент часу t .

Виділимо події, які виникають у системі:

- надходження вимоги до мережі МО (подія 1);
- закінчилось обслуговування вимоги в каналі СМО1 (подія 2);
- закінчилось обслуговування вимоги в каналі СМО2 (подія 3);
- закінчилось обслуговування вимоги в каналі СМО3 (подія 4);

Опишемо дії, що складають кожну подію.

Подія 1 «Надходження вимоги до мережі МО»

- якщо Канал1 вільний, то зайняти канал $Z1:=1$, запам'ятати час закінчення обслуговування в Каналі1 $T1:=t+toб_в_к1$;
- інакше кількість не обслугованих вимог збільшити на одиницю $N_{необсл}:=N_{необсл}+1$
- генерувати наступний момент надходження вимоги до мережі МО $T0:=t+ t_{надх}$.

Подія 2 «Закінчилось обслуговування вимоги в каналі СМО1»

- для $i=1,2$
 - якщо Канал2 i вільний, то запам'ятати номер каналу $Num:=i$;
 - інакше $Num:=0$
- якщо $Num \neq 0$, то зайняти Канал2 Num $Z2Num:=1$, запам'ятати час закінчення обслуговування в Канал2 Num $T2Num:=t+toб_в_к2Num$, звільнити Канал1 $Z1:=0$, $T1:=Tmod$;
- інакше збільшити кількість вимог в черзі на одну $L1:=L1+1$, звільнити Канал1 $Z1:=0$, $T1:=Tmod$.

Подія 3 «Закінчилось обслуговування вимоги в каналі СМО2»

- для $i=1,2$
 - якщо $t=T2i$, то
 - § якщо Канал3 вільний, то зайняти канал $Z3:=1$, запам'ятати час закінчення обслуговування в Каналі3 $T3:=t+toб_в_к3$;
 - якщо черга СМО2 непушта $L1>0$ запам'ятати час закінчення обслуговування в Каналі2 i $T2i:=t+toб_в_к2$, зменшити довжину черги на одиницю $L1:=L1-1$;
 - інакше звільнити Канал2 i $Z2i:=0$, $T2i:=Tmod$;
 - § інакше
 - якщо є вільне місце в черзі СМО3 $L2<Lmax$, то $L2:=L2+1$, звільнити Канал2 i $Z2i:=0$, $T2i:=Tmod$;
 - інакше заблокувати Канал2 i $Z2i:=2$, $T2i:=Tmod$;
 - інакше помилка.

Подія 4 „Закінчилось обслуговування вимоги в каналі СМО3”

- збільшити кількість обслугованих вимог на один $N_{об} := N_{об} + 1$
- якщо черга непушта $L_2 > 0$, то зайняти канал $Z_3 := 1$, запам'ятати час закінчення обслуговування в Каналі3 $T_3 := t + t_{об_в_к3}$;
- для $i = 1, 2$
 - якщо канал другої СМО заблокований $T_{2i} = 2$, то
 - якщо черга СМО2 непушта $L_1 > 0$ запам'ятати час закінчення обслуговування в Каналі2і $T_{2i} := t + t_{об_в_к2}$, зменшити довжину черги на одиницю $L_1 := L_1 - 1$;
 - інакше звільнити Канал2і $Z_{2i} := 0$, $T_{2i} := T_{mod}$;
 - інакше зменшити чергу СМО3 на одиницю $L_2 := L_2 - 1$.

Процедура «Визначення моменту найближчої події»

- $t_{min} := T_0$, запам'ятати подію 1 $sob := 1$;
- якщо $T_1 < t_{min}$, то $t_{min} := T_1$, запам'ятати подію 2 $sob := 2$;
- для $i = 1, 2$
 - якщо $T_{2i} < t_{min}$, то $t_{min} := T_{2i}$, запам'ятати подію 3 $sob := 3$;
- якщо $T_3 < t_{min}$, то $t_{min} := T_3$, запам'ятати подію 4 $sob := 4$;
- інакше помилка.

Програма «Імітація»

- введення початкових значень – $t := 0$, $T_{mod} := 1000$, $T_0 := 2$, $Z_1 := 0$, $T_1 := T_{mod}$, $L_1 := 0$, $Z_{21} := 0$, $T_{21} := T_{mod}$, $Z_{22} := 1$, $T_{22} := 0$, $L_2 := 0$, $Z_3 := 0$, $T_3 := T_{mod}$;
- доки не вичерпаний час моделювання $t < T_{mod}$
 - виконати процедуру „Визначення моменту найближчої події”;
 - зібрати статистичний матеріал ($черга1 := черга1 + L_1 * (t_{min} - t)$, $черга2 := черга2 + L_2 * (t_{min} - t)$);
 - просунути час у момент найближчої події $t := t_{min}$;
 - якщо подія 1 $sob = 1$, то виконати подію 1;
 - якщо подія 2 $sob = 2$, то виконати подію 2;
 - якщо подія 3 $sob = 3$, то виконати подію 3;
 - якщо подія 4 $sob = 4$, то виконати подію 4;
- виведення результатів моделювання - ймовірність відмови $:= N_{необ} / (N_{необ} + N_{об})$, середня довжина черги1 $:= черга1 / T_{mod}$, середня довжина черги2 $:= черга2 / T_{mod}$.

Відповідь: відповіддю є складений алгоритм імітації.

■ **Задача 6.** Побудувати алгоритм імітації наступної мережі МО, що представлена на рисунку 5.16. Метою моделювання є визначення завантаження каналів обслуговування, середньої довжини черг та ймовірності відмови в обслуговуванні.

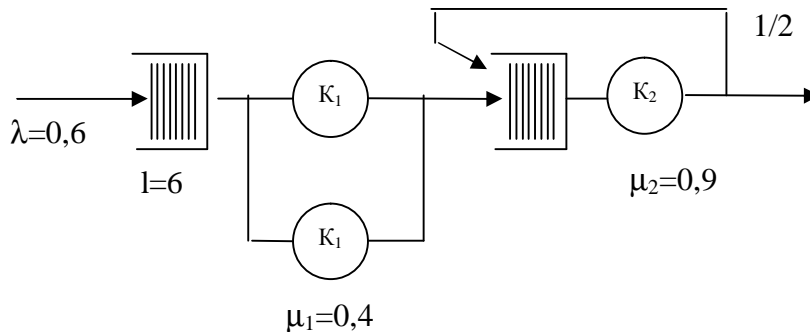


Рисунок 5.16. Мережа МО до умови задачі 6

Розв'язання. Skorистаємось об'єктно-орієнтованим підходом для побудови алгоритму імітації мережі МО та програмою (див. лістинг 5.2). Мережа масового обслуговування за умовою задачі складається з двох СМО: СМО1 із двома каналами обслуговування і чергою обмеженої довжини 6 місць та СМО2 з одним каналом обслуговування і чергою необмеженої довжини. Надходження в мережу відбувається з інтенсивністю 0,6 вимог/одиницю часу за експоненціальним законом розподілу. Тривалість обслуговування вимог каналом першої СМО відбувається протягом часу, який має експоненціальний розподіл із середнім значенням $1/0,4$ одиниць часу. Тривалість обслуговування вимог каналом другої СМО відбувається протягом часу, який має експоненціальний розподіл із середнім значенням $1/0,9$ одиниць часу. Таким чином, структура мережі масового обслуговування представляється наступним фрагментом програми:

```
//структура мережі масового обслуговування
systEntry:=TsystEntry.Create(1/0.6); //створення вхідного потоку вимог
smo[0]:=TSMO.Create(2,6,GetTimeMod,1/0.4); //створення СМО1
joinIn:=TJoinIN.Create(systEntry,smo[0]); // створення маршруту до
СМО1
smo[1]:=TSMO.Create(1,1000,GetTimeMod,1/0.6); //створення СМО2
join[0]:=TJoin.Create(smo[0],smo[1]); //створення маршруту від
СМО1 до СМО2
join[1]:=TJoin.Create(smo[1],smo[1]); //створення маршруту від
СМО2 до СМО2
joinOut:=TJoinOUT.Create(smo[NumSMO-1]); //створення маршруту
на вихід системи
```

Виділимо події, які виникають у системі:

- надходження вимоги до мережі МО (подія 0);
- закінчилось обслуговування вимоги в каналі СМО1 (подія 1);
- закінчилось обслуговування вимоги в каналі СМО2 (подія 2).

Подія 2 містить в собі випадковий вибір маршруту слідування: з ймовірністю 0,5 відбувається слідування вимоги на вихід системи, в іншому випадку відбувається слідування вимоги до СМО2 на повторне обслуговування.

Опишемо дії, що складають кожну подію.

Подія 0 «Надходження вимоги до мережі МО»

- створити вимогу на вході системи;
- передати вимогу на вхід СМО1;
- зайняти СМО1.

Подія 1 «Закінчилось обслуговування вимоги в каналі СМО1 (або надходження вимоги до СМО2)»

- вивільнити вимогу зі СМО1;
- передати вимогу до СМО2;
- зайняти СМО2.

Подія 2 «Закінчилось обслуговування вимоги в каналі СМО2»

- генерувати випадкове рівномірно розподілене на інтервалі (0;1) число ζ ;
 - якщо $\zeta < 0,5$, то
 - § вивільнити вимогу зі СМО2;
 - § передати вимогу на вихід системи;
 - інакше
 - § вивільнити вимогу зі СМО2;
 - § передати вимогу на вхід СМО2;
 - § зайняти СМО2.

Імітація функціонування мережі МО представляється наступним фрагментом програми:

```
NumSMO:=2; //кількість СМО
choice:=0.5; //ймовірність вибору маршруту
t:=0; // початкове значення модельного часу
while t<GetTimeMod do
begin
tmin:=systEntry.GetMinTime;
event:=0;
for i:=0 to NumSMO-1 do
if smof[i].GetMinTime<tmin then
begin
tmin:=smof[i].GetMinTime;
```

```

        event:=i+1;
        end;
    for i:=0 to NumSMO-1 do
    begin
        AverQue[i]:=AverQue[i]+((tmin-t)/GetTimeMod)*smo[i].GetStateQue;
        AverDevices[i]:=AverDevices[i]+((tmin-
t)/GetTimeMod)*smo[i].GetAverLoadChannel;
        end;

t:=tmin; //просування часу в момент найближчої події
case event of
0: begin
    systEntry.Arrival(GetTimeNow);
    joinIn.send;
    smo[0].Seize(GetTimeNow);
    end;
1: begin
    smo[0].Releize(smo[0].GetMinChannel,GetTimeMod,GetTimeNow);
    join[0].send;
    smo[1].Seize(GetTimeNow);
    end;
2: begin
    if random<choice then //вибір маршруту слідування
    begin
        smo[1].Releize(smo[1].GetMinChannel,GetTimeMod,GetTimeNow);
        joinOut.send;
        end
    else
    begin
        smo[1].Releize(smo[1].GetMinChannel,GetTimeMod,GetTimeNow);
        join[1].send;
        smo[1].Seize(GetTimeNow);
        end;
    end ;
prob:=joinIn.GetNumUnServ;
for i:=0 to NumSMO-2 do
    prob:=prob+join[i].GetNumUnServ;
prob:=prob/systEntry.GetNumArrival;

```

Відповідь: відповіддю є складений алгоритм імітації.

■ **Задача 7.** Складіть мережу МО відповідно до умов наступної задачі та побудуйте алгоритм імітації:

У системі передачі даних здійснюється обмін пакетами даних між пунктами А і В по дуплексному каналу зв'язку. Пакети надходять у пункти системи від абонентів з інтервалами часу між ними 10 ± 3 мс. Передача пакета займає в середньому 10 мс. У пунктах є буферні реєстри, що можуть зберігати два пакети (включаючи переданий). У випадку приходу пакета в

момент зайнятості реєстрів пунктам системи дається вихід на супутникову напівдуплексну лінію зв'язку, що здійснює передачу пакетів даних за 10 ± 5 мс. При зайнятості супутникової лінії пакет одержує відмову.

Метою моделювання є визначення долі загублених через зайнятість каналів зв'язку пакетів даних, частоти викликів супутникової лінії та її завантаження.

Розв'язання. Об'єктами обслуговування в даній задачі є пакети даних, тобто вони є вимогами. Обслуговування виконують дуплексний канал зв'язку та супутникова напівдуплексна лінія зв'язку. Передачу пакетів даних між пунктами А і В по дуплексному каналу зв'язку моделюють дві одноканальні СМО з чергою обмеженої довжини. Одна з них (СМО₁) здійснює зв'язок в напрямку АВ, а друга (СМО₂) - в напрямку ВА. Зв'язок по напівдуплексному супутниковому каналу моделює одноканальна СМО без черги (СМО₃), яка здійснює зв'язок або в напрямку АВ, або в напрямку ВА. Управління каналами зв'язку здійснюється за допомогою блокування супутникової лінії при наявності в буферних реєстрах дуплексного каналу вільних місць. Схема мережі МО представлена на рисунку 5.17.

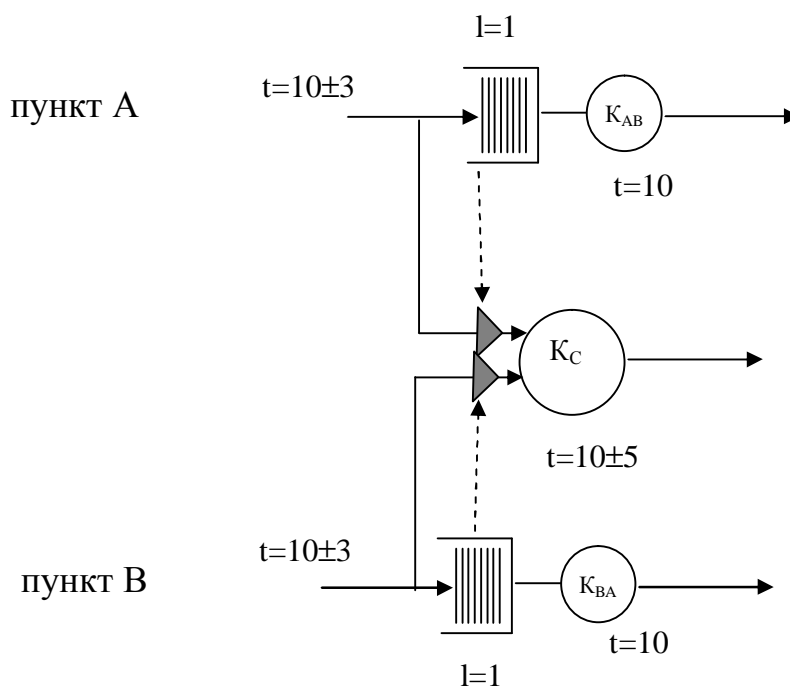


Рисунок 5.17. Мережа МО до задачі 7

Виділимо елементи системи: черга СМО1 – Черга АВ, канал СМО1 – Канал АВ, черга СМО2 – Черга ВА, канал СМО2 – Канал ВА, канал СМО3 – Канал С.

Нехай змінна t – це поточний момент часу. Для опису стану системи в момент часу t введемо наступні змінні.

Надходження вимоги до мережі МО описують змінні T_{0A} та T_{0B} – час надходження з пункту А та з пункту В відповідно. Стан каналів обслу-

говування опишемо змінними Z^* та T^* , де $*$ – номер каналу. Змінна Z^* приймає значення 0, якщо Канал * вільний, значення 1, якщо Канал * зайнятий. Змінна T^* – це час закінчення обслуговування в Каналі * .

Стан черги опишемо змінною L^* – кількість вимог у Черзі * .

Для збору інформації про систему введемо змінні: N_{AB} – кількість обслугованих вимог Каналом АВ на момент t , N_{BA} – кількість обслугованих вимог Каналом ВА на момент t , N_C – кількість обслугованих вимог в Каналі С на момент часу t , $N_{необсл}$ – кількість не обслугованих вимог збільшити на одиницю, R_C – час роботи супутникової лінії.

Виділимо події, які виникають у системі:

- надходження вимоги з пункту А (подія 1);
- надходження вимоги з пункту В (подія 2);
- закінчилось обслуговування вимоги в Каналі АВ (подія 3);
- закінчилось обслуговування вимоги Каналі ВА (подія 4);
- закінчилось обслуговування вимоги в Каналі С (подія 5).

Подія 2 аналогічна події 1, а подія 4 аналогічна події 3, тому опишемо тільки дії, що складають події 1, 3 та 5.

Подія 1 «Надходження вимоги з пункту А»

- якщо Канал АВ вільний, то зайняти канал $Z_{AB}:=1$, запам'ятати час закінчення обслуговування в Каналі АВ $T_{AB}:=t+t_{об_в_кAB}$;
- інакше
 - якщо в Черзі АВ є вільне місце $L_{AB}<1$, то збільшити кількість вимог в черзі на одиницю;
 - інакше
 - § якщо Канал С вільний, то зайняти канал $Z_C:=1$, запам'ятати час закінчення обслуговування в Каналі АВ $T_C:=t+t_{об_в_кC}$, запам'ятати час роботи супутникової лінії $R_C:=R_C+t_{об_в_кC}$;
 - § інакше кількість не обслугованих вимог збільшити на одиницю $N_{необсл}:=N_{необсл}+1$;
- генерувати наступний момент надходження вимоги до мережі МО $T_0:=t+t_{надх}$.

Подія 3 «Закінчилось обслуговування вимоги в Каналі АВ»

- збільшити кількість обслугованих вимог в Каналі АВ на одиницю $N_{AB}:=N_{AB}+1$;
- якщо в Черзі АВ є вимоги $L_{AB}>0$, то
 - зменшити кількість вимог в черзі на одиницю $L_{AB}:=L_{AB}-1$;
 - зайняти Канал АВ $Z_{AB}:=1$;
 - запам'ятати час закінчення обслуговування в Каналі АВ $T_{AB}:=t+t_{об_в_кAB}$;
- інакше звільнити Канал АВ $Z_{AB}:=0$; $T_{AB}:=T_{mod}+1$;

Подія 5 «Закінчилось обслуговування вимоги в КаналіС»

- збільшити кількість обслугованих вимог в КаналіАВ на одиницю $N_C := N_C + 1$;
- звільнити КаналС $Z_C := 0$; $T_C := T_{mod} + 1$;

Процедура «Визначення моменту найближчої події»

- $t_{min} := T_{0A}$, запам'ятати подію 1 $sob := 1$;
- якщо $T_{0B} < t_{min}$, то $t_{min} := T_{0B}$, запам'ятати подію 2 $sob := 2$;
- якщо $T_{AB} < t_{min}$, то $t_{min} := T_{AB}$, запам'ятати подію 3 $sob := 3$;
- якщо $T_{BA} < t_{min}$, то $t_{min} := T_{BA}$, запам'ятати подію 4 $sob := 4$;
- якщо $T_C < t_{min}$, то $t_{min} := T_C$, запам'ятати подію 5 $sob := 5$.

Програма «Імітація»

- введення початкових значень – $t := 0$, $T_{mod} := 5000$, $T_{0A} := 2$, $T_{0B} := 2$, $L1 := 0$, $Z1 := 0$, $T1 := T_{mod}$, $L2 := 0$, $Z2 := 0$, $T2 := T_{mod}$, $Z3 := 0$, $T3 := T_{mod}$, всі інші змінні $:= 0$;
- доки не вичерпаний час моделювання $t < T_{mod}$
 - виконати процедуру «Визначення моменту найближчої події»;
 - установити поточний час у момент найближчої події $t := t_{min}$;
 - зібрати статистичний матеріал (завантаження1 := завантаження1 + R1, черга2 := черга2 + L2, индекс := индекс + 1);
 - якщо подія 1 $sob = 1$, то виконати подію 1;
 - якщо подія 2 $sob = 2$, то виконати подію 2;
 - якщо подія 3 $sob = 3$, то виконати подію 3;
- виведення результатів моделювання – частка загублених пакетів даних $:= N_{необсл} / (N_{необсл} + N_{AB} + N_{BA} + N_C)$, частота викликів супутникової лінії $:= N_C / (N_{необсл} + N_{AB} + N_{BA} + N_C)$, завантаження супутникової лінії $:= R_C / T_{mod}$.

Відповідь: відповіддю є складений алгоритм імітації.

■ **Задача 8.** Складіть матриці входів та виходів для мережі Петрі, яка представлена на рисунку 5.18, та знайдіть результат запуску такої послідовності переходів: $T_1 T_3 T_2 T_1$.

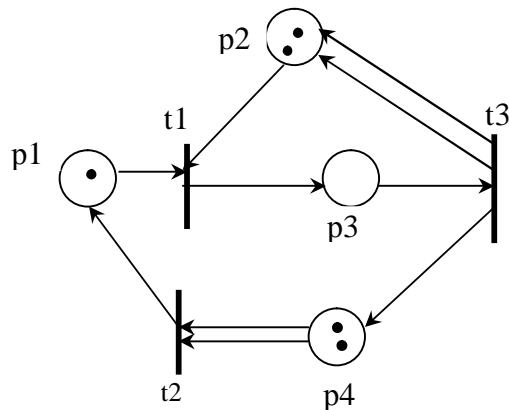


Рисунок 5.18. Мережа Петрі до задачі 8

Розв'язання. Складаємо початковий вектор маркірування : $M=(1, 2, 0, 2)$. За кількістю зв'язків, що має i -позиція з j -переходом, формуємо матрицю входів (j – номер рядочка, i – номер стовпчика):

$$D^{\text{вх}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

За кількістю зв'язків, що має j -перехід з i -позицією, формуємо матрицю виходів (j – номер рядочка, i – номер стовпчика):

$$D^{\text{вих}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Перевіряємо умову запуску переходу T_1 порівнюючи кожен компоненту вектора маркірування з відповідними елементами першого рядочка матриці входів (див. формулу (5.1)):

$$(1, 2, 0, 2) \geq (1, 1, 0, 0).$$

Отже, умова запуску переходу T_1 виконана. Знаходимо результат запуску переходу T_1 віднімаючи від компонент вектора маркірування елементи першого рядочка матриці входів та додаючи елементи першого рядочка матриці виходів (див. формулу (5.2)):

$$M=(1, 2, 0, 2)-(1, 1, 0, 0)+(0, 0, 1, 0)=(0, 1, 1, 2).$$

Перевіряємо умову запуску переходу T_3 порівнюючи компоненти вектора маркірування з відповідними елементами третього рядочка матриці входів:

$$(0, 1, 1, 2) \geq (0, 0, 1, 0).$$

Знаходимо результат запуску переходу T_1 віднімаючи від компонент вектора маркірування елементи третього рядочка матриці входів та додаючи елементи третього рядочка матриці виходів:

$$M=(0, 1, 1, 2)-(0, 0, 1, 0)+(0, 2, 0, 1)=(0, 3, 0, 3).$$

Перевіряємо умову запуску переходу T_2 порівнюючи компоненти вектора маркірування з відповідними елементами другого рядочка матриці входів:

$$(0, 3, 0, 3) \geq (0, 0, 0, 2).$$

Знаходимо результат запуску переходу T_1 віднімаючи від компонент вектора маркірування елементи третього рядочка матриці входів та додаючи елементи третього рядочка матриці виходів:

$$M=(0, 3, 0, 3)-(0, 0, 0, 2)+(1, 0, 0, 0)=(1, 3, 0, 1).$$

Перевіряємо умову запуску переходу T_1 :

$$(1, 3, 0, 1) \geq (1, 1, 0, 0).$$

Знаходимо результат запуску переходу T_1 :

$$M=(1, 3, 0, 1)-(1, 1, 0, 0)+(0, 0, 1, 0)=(0, 2, 1, 1).$$

Відповідь: для даної мережі Петрі матриця входів та матриця є такими:

$$D^{3/4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результатом запуску послідовності переходів $T_1 T_3 T_2 T_1$ є маркірування $M=(0, 2, 1, 1)$.

■ **Задача 9.** Складіть алгоритм імітації мережі Петрі, що представлена на рисунку 5.19.

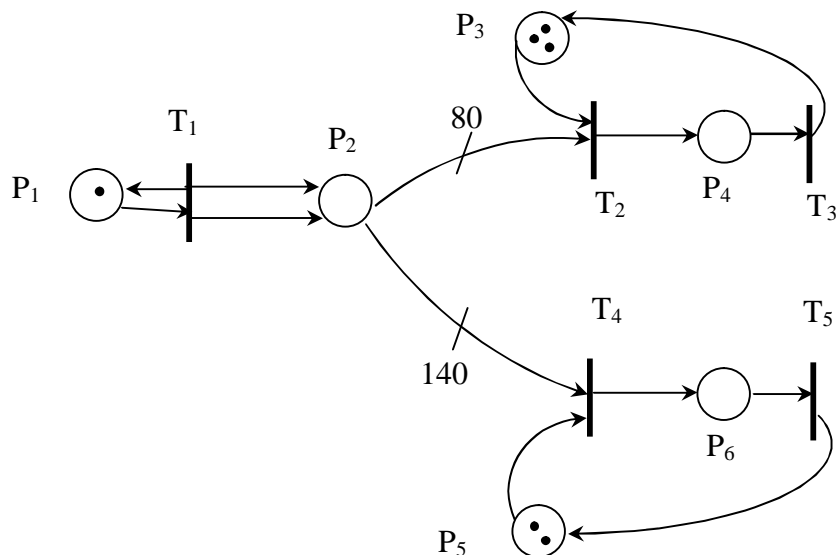


Рисунок 5.19. Мережа Петрі до задачі 9

Задані такі часові затримки переходів:

$$T_1 = \frac{1}{120}, T_2 = T_4 = 0, T_3 = T_5 = \begin{cases} 2, & \text{if } t < 2 \\ t, & \text{if } 2 \leq t \leq 4, \\ 4, & \text{if } t > 4 \end{cases}$$

де $t = 1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{12} V_i - 6 \right) + 3$ є нормально розподіленою величиною з середнім значенням 3 та середнім квадратичним відхиленням 1.

Розв'язання. Складаємо початковий вектор маркірування: $M=(1, 0, 3, 0, 2; 0)$. За кількістю зв'язків, що має i -позиція з j -переходом, формуємо матрицю входів (j – номер рядочка, i – номер стовпчика). За кількістю зв'язків, що має j -перехід з i -позицією, формуємо матрицю виходів (j – номер рядочка, i – номер стовпчика):

$$D^{3/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D^+ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Час затримки задамо у вигляді вектора: $T=(T_1; T_2; T_3; T_4; T_5)$.

Мережа Петрі, що розглядається, має конфліктні переходи T_2 і T_4 , тому алгоритм імітації повинен передбачити розв'язання конфліктної ситуації. Оскільки в умові задачі нічого не сказано про пріоритет запуску переходів, то для розв'язання конфлікту пропонується рівномірнісний спосіб: при одночасному виконанні умові запуску переходу T_2 і T_4 рішення про вибір переходу, який запускається в даний момент, приймається за значенням випадкового рівномірно розподіленого в інтервалі $(0;1)$ числа ζ . Якщо генероване число ζ менше за 0,5 – приймається рішення про запуск переходу T_2 , в протилежному випадку – про запуск переходу T_4 .

Оскільки в мережі Петрі, що розглядається, є багатоканальні переходи T_2, T_3, T_4, T_5 , та скористаємось алгоритмом імітації мережі Петрі з багатоканальними переходами, який доповнимо розв'язанням конфлікту.

Алгоритм реалізації даної мережі Петрі складається з таких дій:

- * ввести вектор маркірування M , матрицю входів $D^{3/4}$, матрицю виходів D^+ ,
 - час моделювання $Tmod$;
- * поточний час $t:=0$;
- * доки $t < Tmod$:
 - для кожного переходу T_j :
 - $k:=0$;
 - якщо $M_i \geq D^{3/4}_{ji}$ для усіх i (умова запуску переходу виконана), то
 - § $k:=k+1$;
 - § запам'ятати номер переходу в масиві $V_k:=j$,
 - якщо $k=1$ (конфлікт відсутній), то:
 - $J:=V_1$;
 - доки $m=0$ виконувати багатократний запуск переходу T_J :
 - § $m:=0$;
 - § якщо $M_i \geq D^{3/4}_{Ji}$ для усіх i (умова запуску переходу виконана), то
 - $M_i^c = M_i - D^{3/4}_{Ji}$ для усіх i (з вхідних позицій переходу T_J відняти маркери),
 - запам'ятати час виходу маркерів з переходу T_J в кінець масиву $t_out_J[n+1] := t + t_{обр}$, n – номер останнього елементу масиву t_out_J ;
 - $m:=m+1$;
 - якщо $k > 1$ (розв'язання конфлікту), то
 - знайти $N:=$ випадкове число від 1 до k ,
 - $J:=V_N$,

- доки $m=0$ виконувати багатократний запуск переходу T_J :

§ $m:=0$;

§ якщо $M_i \geq D^{3/4}_{J_i}$ для усіх i (умова запуску переходу виконана), то

- $M_i^c = M_i - D^{3/4}_{J_i}$ для усіх i (з вхідних позицій переходу T_J відняти маркери),
- запам'ятати час виходу маркерів з переходу T_J в кінець масиву $t_out_J[n+1] := t + t_{обр}$, n – номер останнього елементу масиву t_out_J ;
- $m:=m+1$;

- інакше передчасне закінчення моделювання;
- визначити найменший з часів виходу маркерів $t_min := \min\{t_out_{J,k}\}$ та відповідний йому номер переходу J_{min} та номер каналу N_{min} ;
- просунути поточний час на момент найближчої події: $t := t_min$;
- $M_i^c = M_i + D^+_{J_{min},i}$ для усіх i (добавити у вихідні позиції переходу $T_{J_{min}}$ маркери);

§ для кожного i від N_{min} до n :

- $t_out_{J_{min},i} := t_out_{J_{min},i+1}$ (видалити момент часу $t_out_{J_{min},N_{min}}$ з масиву $t_out_{J_{min}}$);
- $t_out_{J_{min},n} := T_{mod}$;

* зібрати статистику про функціонування моделі.

* кінець.

Відповідь: відповіддю є складений алгоритм.

■ **Задача 10.** Складіть алгоритм імітації мережі Петрі, що представлена на рисунку 5.20.

Розв'язання. Початковий вектор маркірування має значення: $M=(1, 0, 70, 1, 0; 0; 0)$. Складаємо матрицю входів та матрицю виходів:

$$D^{3/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Час затримки задамо у вигляді вектора: $T=(T_1; T_2; T_3; T_4; T_5; T_6)$.

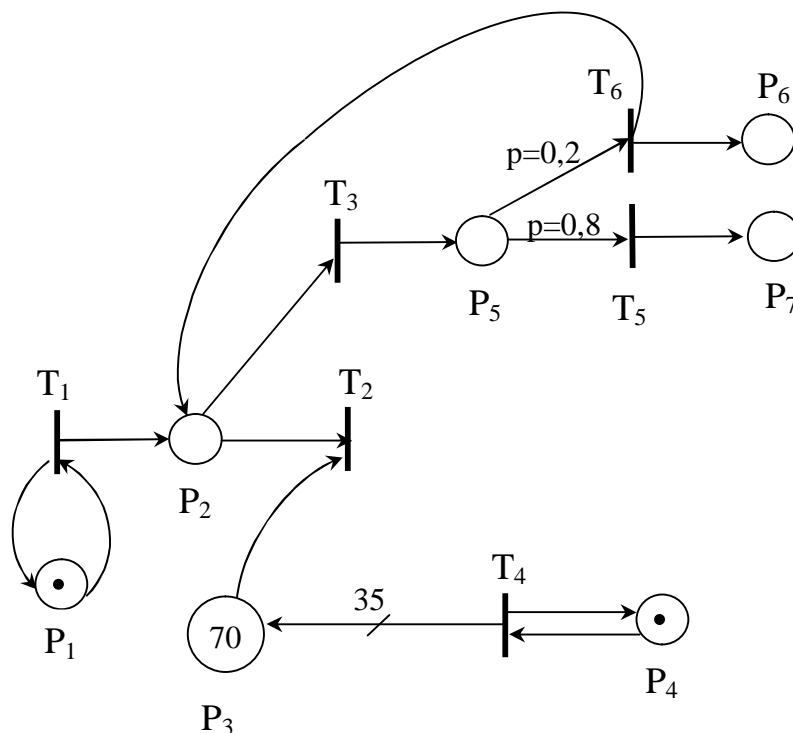


Рисунок 5.20. Мережа Петрі до задачі 3

Алгоритм імітації даної мережі Петрі складається з таких дій:

- * ввести вектор маркірування M , матрицю входів $D^{3/4}$, матрицю виходів D^+ ,
 час моделювання T_{mod} ;
- * $t:=0$;
- * доки $t < T_{mod}$:
 - для кожного переходу T_j :
 - $k:=0$;
 - якщо $M_i \geq D^{3/4}_{ji}$ для усіх i (умова запуску переходу виконана),
 то
 § $k:=k+1$;
 - запам'ятати номер переходу в масиві $V_k:=j$;
 - якщо $k=1$, то
 - $J:=V_1$,
 - $M_i:=M_i - D^{3/4}_{ji}$ для усіх i (з вхідних позицій переходу T_j відняти маркери),
 - запам'ятати час виходу маркерів з переходу t_{out_j} ;
 - якщо $k > 1$ знайти $N:=$ випадкове число від 1 до k ,
 $J:=V_N$,
 $M_i:=M_i - D^{3/4}_{ji}$ для усіх i (з вхідних позицій переходу T_j відняти маркери),
 запам'ятати час виходу маркерів з переходу t_{out_j} ;
 - інакше передчасне закінчення моделювання.

- визначити найменший з часів виходу маркерів $t_{\min} := \min\{t_{\text{out}_j}\}$ та відповідний йому номер переходу J_{\min} ;
 - просунути поточний час на цей момент часу: $t := t_{\min}$;
 - $M_i := M_i + D^+_{J_{\min}, i}$ для усіх i (добавити у вихідні позиції переходу $T_{J_{\min}}$ маркери);
- * зібрати статистику про функціонування моделі.
- * кінець.

Відповідь: відповіддю є складений алгоритм.

5.8. Завдання для самостійної роботи

- 1. Побудувати генератор випадкових чисел, які розподілені за експоненціальним законом із математичним сподіванням 30.
- 2. Побудувати генератор нормально розподілених випадкових чисел з математичним сподіванням 3 та дисперсією 2.
- 3. Побудувати генератор випадкових чисел, що мають емпіричний закон розподілу із значеннями: $F(8)=0,02$, $F(9)=0,07$, $F(10)=0,16$, $F(11)=0,31$, $F(12)=0,5$, $F(13)=0,70$, $F(14)=0,84$, $F(15)=0,93$, $F(16)=0,98$, $F(17)=0,99$, $F(18)=1,0$.
- 4. Побудувати генератор нормально розподілених випадкових чисел з математичним сподіванням 30 та дисперсією 15, але не менших 1 та не більших 60.
- 5. Побудувати генератор випадкової величини r , що приймає значення 10, 15, 20, 25, 30 з ймовірностями 0,2, 0,3, 0,1, 0,1 та 0,3 відповідно.
- 6. Побудувати генератор логнормально розподілених випадкових чисел з математичним сподіванням 12 та дисперсією 3.
- 7. Побудувати генератор випадкових чисел, які мають трикутний закон розподілу на інтервалі (1;12) з модою 3.
- 8. Побудувати алгоритм імітації мережі масового обслуговування, що представлена на рисунку 5.21. Метою моделювання є визначення ймовірності відмови та середньої завантаженості резервного каналу обслуговування K_3 .

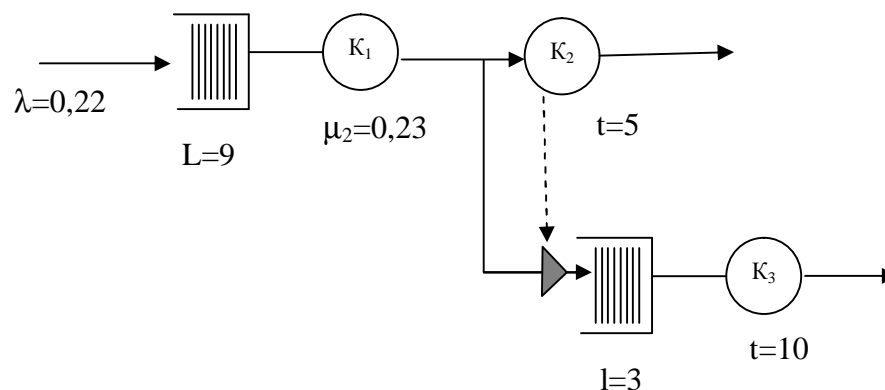


Рисунок 5.21. Мережа МО до завдання 8

□ 9. Побудувати алгоритм імітації мережі масового обслуговування, що представлена на рисунку 5.22. Метою моделювання є визначення завантаження каналів обслуговування та середнього часу обслуговування вимоги в мережі масового обслуговування.

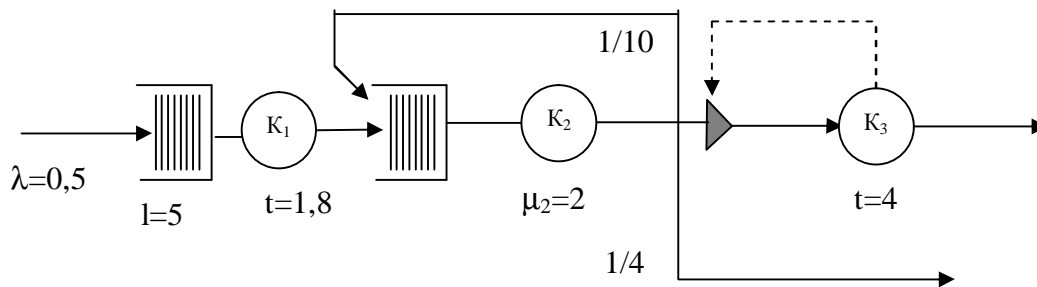


Рисунок 5.22. Мережа МО до завдання 9

□ 10. Складіть мережу масового обслуговування відповідно до умов наступної задачі та побудуйте алгоритм імітації:

Магістральний канал передачі даних складається із загального накопичувача та двох каналів – основного і резервного. Повідомлення поступають в систему через 9 ± 5 секунд і чекають в накопичувачі передачі. У нормальному режимі роботи повідомлення передаються по основному каналу за 7 ± 3 секунд. В основному каналі через інтервали часу 200 ± 35 секунд трапляються збої. Якщо збій трапляється під час передачі повідомлення, то відбувається його переривання. При цьому за 2 секунди запускається резервний канал, який передає повідомлення з самого початку. Відновлення основного каналу займає 70 ± 7 секунд. До відновлення основного каналу повідомлення передаються по резервному каналу. Після відновлення резервний канал відключається і основний канал продовжує роботу із чергового повідомлення.

Прибуток від передачі одного повідомлення через основний канал складає 50 грошових одиниць, а при передачі через резервний канал – 25 грошових одиниць. Існує можливість підвищити надійність роботи основного каналу. При збільшенні середнього часу напрацювання на відмову на k секунд прибуток з кожного повідомлення зменшується на $0,03k$ грошових одиниць.

Метою моделювання є визначення завантаження резервного та основного каналу та частоти переривання повідомлень.

□ 11. Складіть мережу масового обслуговування відповідно до умов наступної задачі та побудуйте алгоритм імітації:

Розглядається модель банку, у якому два касири сидять у помешканні, а два обслуговують клієнтів, що під'їжджають на автомобілях. Частина клієнтів, що надходять у банк, намагається спочатку обслуговатися у автомобільних касирів. Час між надходженнями клієнтів цих клієнтів розподілено за експоненціальним законом з математичним сподіванням 0,75 хвилин. У черзі до першого касира можуть знаходитись три автомобілі, а в

черзі до другого – чотири. Час обслуговування першим автомобільним касиром нормально розподілено з математичним сподіванням 0,5 хвилин і середньоквадратичним відхиленням 0,25 хвилин. Тривалість обслуговування другим касиром розподілена рівномірно на інтервалі $0,2 \pm 0,1$ хвилин. Якщо клієнт, що приїхав на автомобілі, не може стати в чергу до автомобільних касирів через відсутність вільного місця, він залишає машину на стоянці і йде до касирів, що сидять у помешканні банку. Інша частина клієнтів йде зразу на обслуговування до касирів у помешканні банку і стають в одну чергу з клієнтами, що прибули на автомобілях. Інтервал між їхніми прибуттями має експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням 0,5 хвилин. До обох касирів стоїть одна черга. У черзі не може стояти більш 7 клієнтів. Клієнти, що прийшли в банк, коли черга заповнена повністю, не обслуговуються і залишають банк. Час обслуговування в обох касирів у помешканні банку має трикутний розподіл на інтервалі $0,1 \pm 1,2$ хвилин з модою 0,4 хвилин.

Метою моделювання є визначення завантаження автомобільних касирів і касирів у банку, середніх довжини черг, а також ймовірності того, що клієнт піде з банку не обслугованим.

□ 12. Складіть мережу масового обслуговування відповідно до умов наступної задачі та побудуйте алгоритм імітації:

У банку для автомобілістів є два віконця, кожне з яких обслуговується одним касиром і має окрему під'їзну смугу. Обидві смуги розташовані поруч. З попередніх спостережень відомо, що інтервали часу між прибуттям клієнтів у годину пік мають експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням, рівним 2,5 хвилин. Тривалість обслуговування в обох касирів однакова і може бути представлена випадковою величиною, яка розподілена за експоненціальним законом з математичним сподіванням 1,5 хвилин. Клієнти намагаються вибрати більш коротку чергу. Після того як клієнт в'їхав у банк, він не може залишити його, доки не буде обслугований. Через обмежене місце на кожній смузі може знаходитися не більш трьох автомобілів. У банку, таким чином, не може знаходитися більш восьми автомобілів, включаючи автомобілі двох клієнтів, що обслуговуються в поточний момент касиром. Якщо місце перед банком заповнено до границі, то клієнт, що прибув, вважається втраченим, тому що він відразу ж виїжджає.

Метою моделювання є визначення: 1) середнього завантаження кожного касира; 2) середньої кількості клієнтів у банку; 3) середнього часу перебування клієнта в банку; 4) середньої кількості клієнтів у кожній черзі; 5) відсоток клієнтів, яким відмовлено в обслуговуванні.

□ 15. Складіть алгоритм реалізації мережі Петрі, що представляє формалізовану модель системи конвеєрної зборки деталей (див. рис 3.27). Оцініть значення ймовірності пропуску секції та середньої довжини черг по кожному типу деталей.

□ 16. Складіть алгоритм реалізації мережі Петрі, яка представлена на рисунку 5.23. Часові затримки переходів указані на рисунку. Метою моделювання є визначення зайнятості оперативної пам'яті.

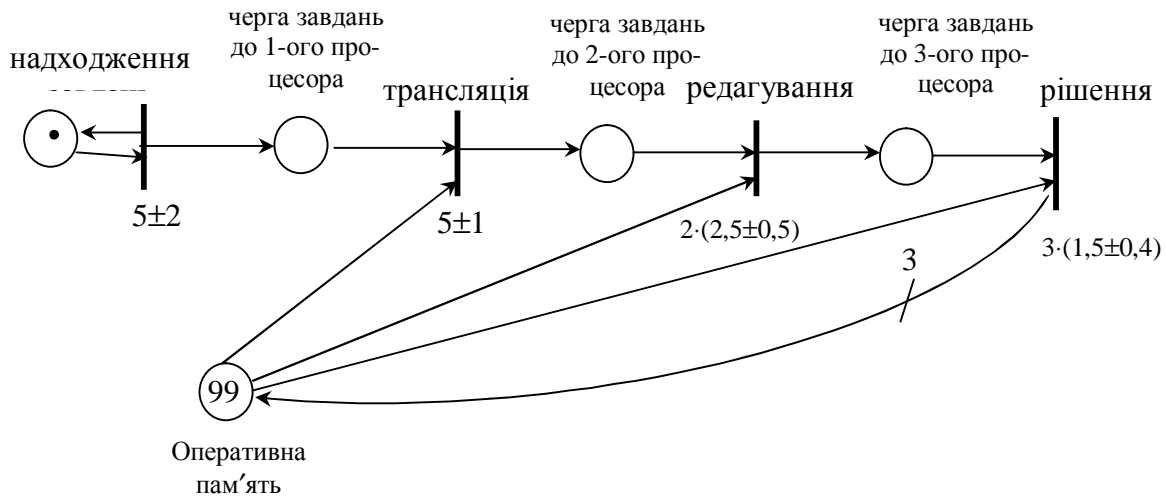


Рисунок 5.23. Модель системи, яка представлена мережею Петрі, до задачі 16

□ 21. Складіть алгоритм реалізації мережі Петрі, яка представлена на рисунку 5.24. Часові затримки переходів указані на рисунку.

Метою моделювання є визначення зайнятості черг по кожному типу завдань та завантаження комп'ютера.

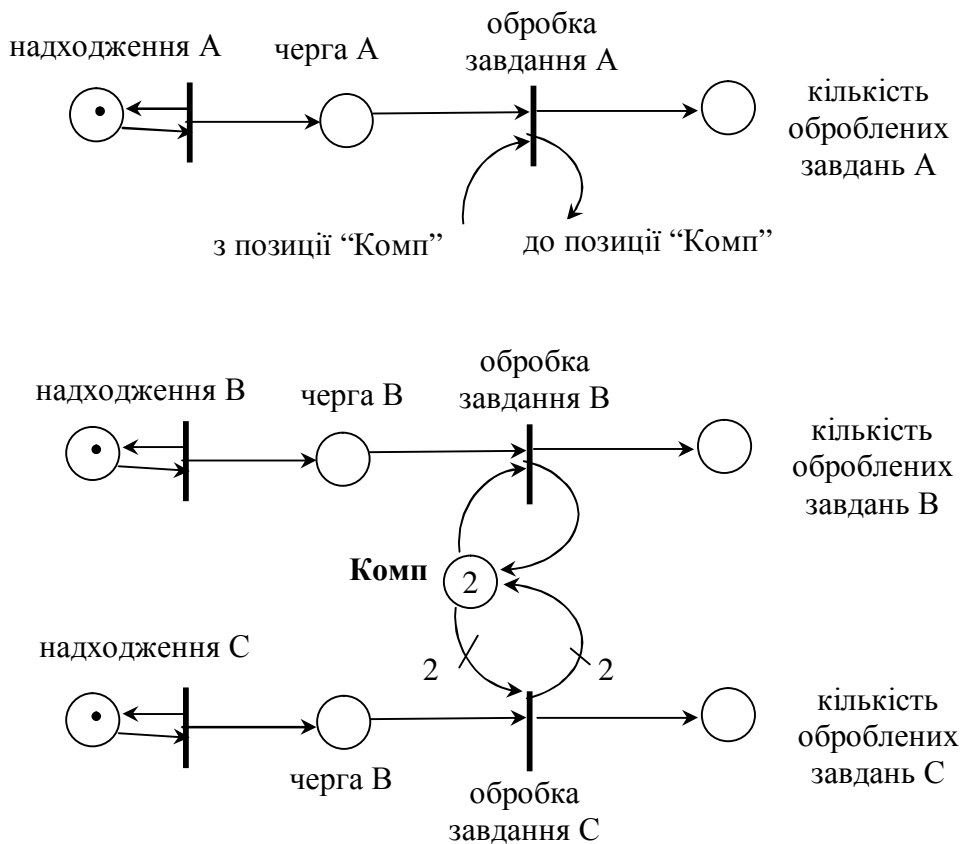


Рисунок 5.24. СП-модель до задачі 21

□ 22. Складіть алгоритм реалізації мережі Петрі, що представляє формалізовану модель системи перевезення вантажів літаками двох типів (див. рис 3.32). Які спостерігаються значення середнього часу очікування контейнерів із вантажами та середнього завантаження великих та маленьких літаків протягом часу моделювання 240 годин?

□ 23. Складіть алгоритм реалізації мережі Петрі, що представляє формалізовану модель системи транспортного руху у двох напрямках, керованого світлофорами (див. рис 3.33). Які спостерігаються значення середнього часу очікування автомобілів в обох напрямках руху протягом часу моделювання 8 годин?

□ 24. Складіть алгоритм реалізації мережі Петрі, що представляє формалізовану модель транспортної системи, що складається з бульдозера, навантажувачів та самоскидів (див. рис 3.34). Які спостерігаються значення середньої та максимальної кількості партій вантажу, що очікують завантаження, середнього завантаження самоскидів та середнього завантаження навантажувачів протягом часу моделювання 8 годин?

5.9. Контрольні запитання

- 1) За яких умов до мережі МО не можуть бути застосовані аналітичні методи моделювання?
- 2) За яких умов виникає необхідність в імітаційних методах моделювання?
- 3) Що значить імітувати?
- 4) Що таке мережева імітаційна модель?
- 5) Які елементи складають імітаційну модель мережі масового обслуговування? Опишіть їх.
- 6) Які є способи просування модельного часу?
- 7) Який із способів просування модельного часу є найприйнятнішим при імітації дискретних систем? Поясніть чому.
- 8) Які є способи просування стану моделі в часі?
- 9) Який із способів просування стану моделі в часі є найприйнятнішим на Вашу думку при імітації дискретних систем? Поясніть свою думку.
- 10) Поясніть об'єктно-орієнтований підхід до побудови алгоритму імітації мережі масового обслуговування.
- 11) Як описати об'єкт «СМО» мовою програмування Object Pascal?
- 12) Як змінити об'єкт «маршрут», наведений у лістингу 5.2, щоб урахувати блокування маршруту?
- 13) Які елементи складають імітаційну модель мережі Петрі? Опишіть їх.
- 14) Чому дорівнюють компоненти вектора початкового маркірування?
- 15) Як задається матриця входів мережі Петрі? матриця виходів?
- 16) Що означає $D_{2,6}^{3/4}=2$? $D_{3,9}^+=15$?

- 17) Як за допомогою матриці входів перевіряється умова запуску j -переходу мережі Петрі?
- 18) Як за допомогою матриць знаходиться результат запуску j -переходу мережі Петрі?
- 19) Якою змінною описується стан мережі Петрі?
- 20) З яких дій складається реалізація переходу мережі Петрі з часовою затримкою?
- 21) Чим відрізняється реалізація багатоканального переходу мережі Петрі від одноканального?
- 22) Чим відрізняється реалізація переходу мережі Петрі з інформаційними зв'язками від реалізації звичайного переходу з часовою затримкою?
- 23) З яких дій складається алгоритм імітації простої мережі Петрі? мережі Петрі з конфліктними переходами? мережі Петрі з багатоканальними переходами?
- 24) Як реалізується неявний пріоритет запуску конфліктних переходів мережі Петрі?
- 25) Запропонуйте об'єкти для імітаційного моделювання мережі Петрі об'єктно-орієнтованим підходом.

Розділ 6

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ІМІТАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

6.1. Планування та проведення факторних експериментів

Модель системи призначена для отримання інформації про властивості реального об'єкта. Ця інформація накопичується в результаті проведення ряду експериментів. Теорія планування експерименту займається проблемами одержання найбільшої кількості інформації про реальний об'єкт при мінімальних витратах комп'ютерного часу і часу дослідника. Тактичне планування допомагає визначити умови проведення одного експерименту, стратегічне планування - серії експериментів.

Експериментування є процес використання моделі з метою отримання і аналізу інформації про властивості модельованої системи. Спеціальні засоби планування експериментів дозволяють скласти план проведення експериментів, що забезпечує збір необхідної для отримання обґрунтованих висновків інформації, при мінімальних витратах.

На першому етапі планування дослідник задає:

- кількість варійованих *факторів* (факторами в теорії планування експериментів називають вхідні змінні, вплив яких на вихідну змінну, що називається *відгуком моделі*, досліджується);
- кількість рівнів кожного фактора (*рівнями* називають ті кількісні або якісні значення фактора, при яких можливо проводити експеримент);
- область змінювання факторів;
- необхідну точність та довірчу ймовірність вимірювання відгуку моделі.

Кількість рівнів найчастіше приймають рівним двом, що відповідає припущенню про лінійну залежність відгуку моделі від факторів. Замітимо, що таке припущення майже завжди можна зробити при достатньо невеликих інтервалах варіювання факторів. Надалі розглядається саме випадок двох рівнів для кожного з факторів: $q=2$.

На другому етапі приступають до *тактичного планування* експерименту, метою якого є визначення таких умов експерименту, що забезпечать вимір відгуку моделі з заданою точністю та довірчою ймовірністю. В результаті цього етапу планування повинні бути визначені тривалість одного прогону (в одиницях модельного часу) і кількість прогонів.

На третьому етапі приступають до *стратегічного планування* експериментів, метою якого є визначення такої серії експериментів, що забезпечить отримання бажаної інформації про відгук моделі при мінімальних витратах. В результаті цього етапу планування потрібно визначити тип аналізу, який буде використаний, та побудувати матрицю планування відповідно до обраного типу аналізу та заданої кількості факторів.

Тактичне планування факторних експериментів

Визначення кількості прогонів

Домовимось називати одним експериментом отримання одного значення відгуку моделі із заданою точністю e і довірчою ймовірністю b за результатами p прогонів моделі. Нагадаємо, що значення y вважається заданим з точністю e і довірчою ймовірністю b , якщо:

$$P\left(|M(y) - \bar{y}| < e\right) = b, \quad (6.1)$$

де $\bar{y} = \sum_{i=1}^p y_i / p$ є середнє значення y . Якщо, наприклад, $P\left(|M(y) - \bar{y}| < 0,01\right) = 0,95$, це значить, що у 95 відсотках експериментів знайдене середнє значення відгуку моделі відхиляється від теоретичного (ідеального) значення відгуку моделі не більше як на 0,01.

При збільшенні кількості прогонів p теоретично можливо досягнути скільки завгодно малої заданої точності. Практично розмір вибірки p визначають за умови заданих e і b , і, можливо, відомого закону розподілу відгуку моделі.

Припустимо, що про закон розподілу відгуку y нічого не відомо. Тоді для оцінки розміру вибірки можна використати нерівність Чебишева:

$$P\left(|M(y) - \bar{y}| \geq e\right) = \frac{D(\bar{y})}{e^2}, \quad (6.2)$$

де $D(\bar{y})$ - дисперсія середнього значення \bar{y} , що дорівнює:

$$D(\bar{y}) = D\left(\frac{\sum_{i=1}^p y_i}{p}\right) = \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^p D(y) = \frac{1}{p} \cdot D(y) = \frac{s^2}{p}. \quad (6.3)$$

Підставимо (6.2) у (6.1):

$$b = P\left(|M(y) - \bar{y}| < e\right) = 1 - P\left(|M(y) - \bar{y}| \geq e\right) \geq 1 - \frac{D(\bar{y})}{e^2}. \quad (6.4)$$

Звідси,

$$b \geq 1 - \frac{D(\bar{y})}{e^2} \Rightarrow \frac{D(\bar{y})}{e^2} \geq 1 - b. \quad (6.5)$$

Підставимо (6.3) у (6.5):

$$\frac{s^2(y)}{pe^2} \geq 1 - b \Rightarrow p \leq \frac{s^2}{e^2(1 - b)}. \quad (6.6)$$

Отже, якщо про закон розподілу відгуку моделі нічого не відомо, то оцінка кількості прогонів, яка необхідна для забезпечення точності e при довірчій ймовірності b , здійснюється за нерівністю Чебишева за формулою:

$$p = \frac{s^2}{e^2(1 - b)}, \quad (6.7)$$

де s^2 – дисперсія відгуку моделі, β – довірча ймовірність, ε – точність вимірювання відгуку моделі.

Наприклад, при довірчій ймовірності $b=0,95$ та точності $e=s$ з (6.7) розраховуємо, що потрібно $p=20$ прогонів, а при $b=0,95$ та $e=s/2$ потрібно 80 прогонів.

Для більш точної оцінки розміру вибірки необхідно знати закон розподілу \bar{y} . Знання закону розподілу дозволяє розрахувати ймовірність влучення в інтервал за формулою:

$$P(|M(y) - \bar{y}| < e) = \int_{-e}^e f(M(y) - \bar{y}) d\bar{y} \quad (6.8)$$

Найчастіше на підставі центральної граничної теореми припускають нормальний закон розподілу \bar{y} з параметрами:

$$M(\bar{y}) = M(y), \quad D(\bar{y}) = \frac{D(y)}{p} = \frac{s^2}{p}. \quad (6.9)$$

Ймовірність влучення в інтервал розраховується за формулою:

$$P(|M(y) - \bar{y}| < e) = 2\Phi\left(\frac{e}{\sqrt{D(\bar{y})}}\right) - 1, \quad (6.10)$$

де $\Phi(t_j) = \frac{1}{2p} \int_0^1 \exp\left(-\frac{t_j^2}{2}\right) dt_j$ - функція Лапласа.

Таким чином, з формул (6.1), (6.10), знаходимо:

$$b = P(|M(y) - \bar{y}| < e) = 2\Phi(t_j) - 1, \quad (6.11)$$

де $t_j = \frac{e}{\sqrt{D(\bar{y})}}$ – аргумент функції Лапласа.

З (6.11) випливає, що аргумент функції Лапласа задовольняє умовам:

$$\Phi(t_j) = \frac{1+b}{2}, \quad (6.12)$$

$$t_j = \frac{e}{\sqrt{D(\bar{y})}}. \quad (6.13)$$

Підставимо (6.9) у (6.13):

$$t_j = \frac{e}{\sqrt{D(\bar{y})}} = \frac{e}{\sqrt{\frac{D(y)}{p}}} = \frac{e\sqrt{p}}{s} \quad (6.14)$$

Звідси,

$$t_j = \frac{e\sqrt{p}}{s} \Rightarrow \sqrt{p} = \frac{t_j \cdot s}{e} \Rightarrow p = \frac{s^2 t_j^2}{e^2}. \quad (6.15)$$

Таким чином, за умови, що закон розподілу відгуку моделі нормальний, оцінку кількості прогонів, що забезпечує задану точність результату виконують за *центральною граничною теоремою* за формулою:

$$p = \frac{s^2 \cdot t_j^2}{e^2} \quad (6.16)$$

де s^2 – дисперсія відгуку моделі, e – точність вимірювання. t_j - аргумент функції Лапласа такий, що $\Phi(t_j) = \frac{1+b}{2}$,

Значенню довірчої ймовірності $b=0,95$ відповідає значення аргументу функції Лапласа $t_j=1,96$. Отже, для забезпечення точності $e=s$ нормально розподіленого відгуку моделі потрібно $p=1,96^2 \approx 4$ прогонів, а для забезпечення точності $e=s/2$ потрібно $p=1,96^2 \cdot 4 \approx 16$ прогонів.

Порівняємо оцінку розміру вибірки по нерівності Чебишева та центральній граничній теоремі за допомогою таблиці 6.1. З цієї таблиці слідує, що переважне використання оцінки розміру вибірки по центральній граничній теоремі з зростанням точності сильно зростає.

Таблиця 6.1

**Порівняння оцінки кількості прогонів
за нерівністю Чебишева та за центральною граничною теоремою**

e	$\frac{s^2}{e^2(1-0.95)}$	$\frac{s^2 \cdot 1.96^2}{e^2}$
s	20	4
$s/2$	80	15
$s/4$	320	61
$s/6$	720	138
$s/8$	1280	246
$s/10$	2000	384

Таким чином, з ростом точності розбіжність між оцінкою кількості прогонів за нерівністю Чебишева та за центральною граничною теоремою сильно зростає. Кількість прогонів, що розрахована за формулою (6.15), значно менша за кількість прогонів, що розрахована за формулою (6.7). Але користуватися формулою (6.15) можна тільки за умови нормального закону розподілу відгуку моделі.

Обсяг вибірки, що визначений за нерівністю Чебишева або за центральною граничною теоремою, може виявитись занадто великим, щоб бути реалізованим при наявних ресурсах для проведення експериментів. В такому випадку дослідник змушений шукати способи зменшення розміру вибірки. Один з них – використання правила автоматичної зупинки експе-

рименту по досягненні заданого довірчого інтервалу. Нехай, наприклад, розмір вибірки оцінюється за формулою (6.16), тоді точність, що досягається в результаті p прогонів, визначається виразом:

$$e = \frac{t_j S}{\sqrt{p}} \quad (6.17)$$

Правило автоматичної зупинки полягає в тому, що для кожного поточного значення p обчислюється поточне значення σ і величина $\frac{t_j S}{\sqrt{p}}$ порівнюється із заданим значенням ε_0 . Якщо досягнута умова $\frac{t_j S}{\sqrt{p}} \leq \varepsilon_0$, то експеримент зупиняється. Таким чином, експеримент буде не надто великим і не надто малим. Недолік цього способу полягає, по-перше, в тому, що вимагаються витрати машинного часу для обчислень і перевірки умови зупинки, по-друге, в тому, що при деяких початкових умовах можливий передчасний вихід з експерименту.

Інший спосіб - використання *методів зменшення дисперсії*. Справа в тому, що в двох наведених формулах для визначення розміру вибірки є залежність $p \sim \sigma^2$. Тому, якщо вдасться зменшити S в 2 рази, то p зменшиться в 4 рази, а якщо зменшити в 5 раз, то p зменшиться в 25 раз! [Шеннон].

Метод корельованих вибірок використовують для задач, в яких потрібно порівняти дві або більше альтернатив. Нехай порівнюють A і B . Для порівняння потрібно оцінити різницю середніх значень $\bar{Z} = \bar{A} - \bar{B}$. При чисто випадкових і незалежних A і B дисперсія $D(Z) = D(A) + D(B)$. А при залежних середнє значення теж $\bar{Z} = \bar{A} - \bar{B}$. Але його дисперсія $D(Z) = D(A) + D(B) - 2COV(A, B)$. Отже, якщо $COV(A, B) > 0$, і достатньо велика, то дисперсія результату буде значно зменшена. Для отримання такої кореляції достатньо використати одну і ту ж послідовність випадкових чисел при експериментуванні з обома альтернативами.

Метод компенсації полягає в тому, що для невідомого y будуються дві оцінки y_1 і y_2 так, що y_1 має від'ємну кореляцію з y_2 . Тоді при відборі остаточної оцінки $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, її дисперсія $D(y) = \frac{1}{4}(s_{y_1}^2 + s_{y_2}^2) + \frac{1}{2}cov(y_1, y_2)$ буде меншою, ніж у випадку незалежних y_1, y_2 . Наприклад, для одноканальної СМО від'ємно корельовані вибірки одержуються, якщо в наступному експерименті замінити місцями послідовність випадкових чисел, що відповідають інтервалам обслуговування і інтервалам надходження вимог:

$$S_i = T_i^{наст}, T_i = S_i^{наст}.$$

Також від'ємно корельовані вибірки одержують, якщо: $T_i^{наст} = 1 - T_i$, $S_i^{наст} = 1 - S_i$. В обох випадках метод дасть зменшення розміру вибірки в 2 рази.

Метод стратифікованих вибірок полягає в тому, що вся вибірка розбивається на декілька вибірок меншого об'єму і результати оцінювання по частковим вибіркам, або стратам, об'єднуються після цього в єдину оцінку. Розбиття здійснюється так, щоб елементи в кожній страті мали меншу дисперсію, ніж вся сукупність. Краще вибрати розміри страт так, щоб дисперсії в них були приблизно однакові. З кожної страти потрібно вибрати необхідне кількість вибірових значень:

$$\text{кількість вибірових значень} \approx \frac{\text{ймовірність влучання в страту} \cdot \sqrt{\text{дисперсія в середині страти}}}{\text{...}}$$

Методи зменшення дисперсії вимагають значних зусиль дослідника по їхній реалізації, однак в деяких окремих випадках вони дадуть фантастичні результати. В нинішній час вони використовуються значно менше, ніж того, напевно, заслуговують.

Визначення тривалості одного прогону

Для статистичних спостережень підходять тільки ті значення відгуку моделі, що відносяться до сталого стану системи. Якщо з часом середнє значення відгуку моделі прямує до деякого стаціонарного значення, то в досліджуваній системі існує сталий стан. Час, протягом якого система приходить до сталого стану, називається *перехідним періодом*. Тривалість перехідного періоду може бути визначена за результатами пробних експериментів з моделлю системи. З цією метою будують графік залежності досліджуваного відгуку моделі y від тривалості прогону t (рис. 6.1). Взагалі, тривалість перехідного періоду визначають по декільком пробним прогонам і вибирають найбільше спостережуване значення перехідного періоду.

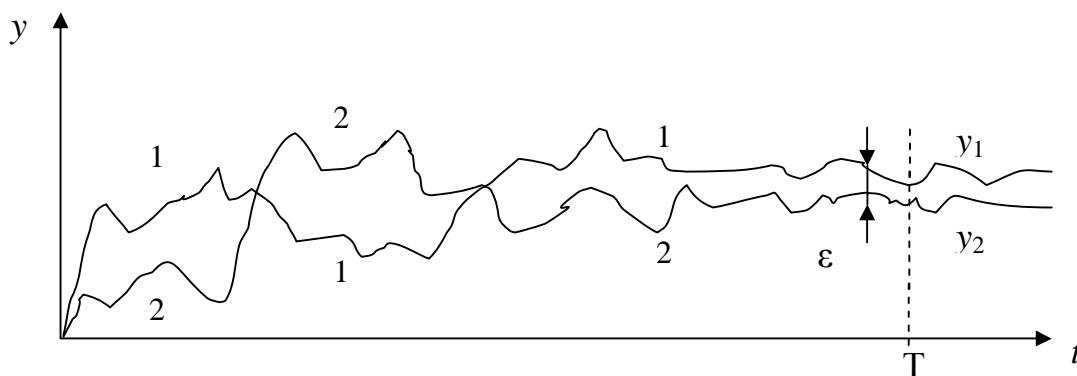


Рисунок. 6.1. Визначення тривалості одного прогону

Зрозуміло, що спостереження за відгуком моделі протягом часу перехідного періоду, сильно впливають на середнє значення відгуку моделі. Для того, щоб зменшити цей вплив, виконують одну або комбінацію таких дій:

- вибирають такі початкові умови моделі, що зменшують її перехідний період;
- вилучають значення перехідного періоду при обчисленні середнього значення відгуку моделі;
- використовують такі тривалі прогони, щоб кількість даних, що потрапили в перехідний період, була незначною у порівнянні з кількістю даних сталого стану.

Отже, один експеримент полягає у відшуванні одного значення відгуку моделі у із заданою точністю і ймовірністю оцінки.

Серія експериментів проводиться з метою вивчення впливу факторів $x_i (i = 1, \dots, k)$ на значення відгуку моделі Y .

Стратегічне планування факторних експериментів

Однофакторні плани експериментів дозволяють досліджувати вплив одного фактора на відгук моделі. *Багатофакторні* плани експериментів будують з урахуванням сумісного впливу факторів на відгук моделі. Такі плани дозволяють досліджувати вплив не тільки кожного фактора, але й вплив взаємодій різних факторів.

Якщо приймається, що фактор може неперервно змінюватись в заданому інтервалі, то цей фактор *кількісний*. Якщо приймається, що фактор має декілька дискретних значень, то цей фактор *якісний*. Наприклад, якщо фактор «інтенсивність надходження вимог до мережі МО» в ході експериментування приймає значення 3,5 та 7,5, то це кількісний фактор. Але якщо в ході експериментування цей фактор приймає значення в середньому 4,3 за експоненціальним законом та за нормальним законом, то цей фактор – якісний. Тут підкреслені два значення відповідно на двох рівнях означеного фактора.

При дослідженні впливу якісних факторів метою експерименту є якісна оцінка впливу факторів, тобто відповідь на запитання «впливає чи не впливає значення фактора на відгук моделі». При дослідженні впливу кількісних факторів метою експерименту є кількісна оцінка впливу факторів. Для якісної оцінки впливу факторів використовують *дисперсійний* аналіз, а для кількісної оцінки впливу факторів - *регресійний* аналіз.

6.2. Регресійний аналіз впливу факторів

Метою регресійного аналізу являється кількісна оцінка впливу фактора. Основні питання, на які дає відповідь регресійний аналіз впливу фактора, формулюються так: який з факторів спричиняє найбільший вплив? найменший вплив? яким чином потрібно змінювати значення факторів, щоб досягти збільшення або зменшення значення відгуку моделі на задану величину?

При проведенні експериментів по багатофакторному плану спочатку перетворюють вхідні змінні X_i , що змінюються в межах (X_{i_min}, X_{i_max}) , в нові змінні x_i , що змінюються в межах $(-1, +1)$ за формулою:

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta_i}, \quad (6.18)$$

де $X_{i0} = \frac{X_{i_max} + X_{i_min}}{2}$, $\Delta_i = \frac{X_{i_max} - X_{i_min}}{2}$.

Далі будують *матрицю планування* за наступними правилами:

- * кількість рядків матриці планування дорівнює кількості стовпчиків і дорівнює 2^k , де число k - кількість факторів;
- * перший стовпчик матриці відповідає фіктивній змінній x_0 і всі значення його рівні $+1$;
- * наступний стовпчик, відповідний фактору x_1 , заповнюють з чергуванням значень -1 і $+1$;
- * наступні за ним стовпчики заповнюють, змінюючи кількість змін знаків вдвічі;
- * після цього заповнюють стовпчики, що відповідають взаємодіям факторів, помножуючи стовпчики заданих факторів.

Складемо, наприклад, матрицю планування для двох факторів має вид:

2^2	x_0	x_1	x_2	x_1x_2
1	+	-	-	+
2	+	+	-	-
3	+	-	+	-
4	+	+	+	+

В лівому верхньому кутку матриці вказується тип експерименту, який складається з двох цифр. Цифра 2, що завжди стоїть в основі, означає два рівні для кожного фактора (-1) та $(+1)$. Цифра, що стоїть в показнику степені, означає кількість факторів. Тип експерименту представляє число, яке дорівнює кількості експериментів в плані. Так, для двох факторів кількість експериментів складає $2^2=4$, для трьох факторів кількість експериментів складає $2^3=8$.

За матрицею планування проводиться серія експериментів. Кожний рядочок матриці планування відповідає окремому експерименту, проведеному при відповідних значеннях факторів. Так, для наведеної матриці планування типу 2^2 перший експеримент проводиться при мінімальних значеннях факторів x_1, x_2 , другий експеримент – при максимальному значенні фактора x_1 та мінімальному значення фактора x_2 . В третьому експерименті встановлюються значення факторів мінімальне для x_1 та максимальне для x_2 . В четвертому експерименті обидва фактори встановлюються в

максимальні значення. Результат кожного експерименту має бути отриманий із заданою довірчою ймовірністю та із заданою точністю і розрахований як середнє значення по декільком прогонах.

Результати експериментів записуються в стовпчик поруч із матрицею планування:

2^2	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+	-	-	+	y_1
2	+	+	-	-	y_2
3	+	-	+	-	y_3
4	+	+	+	+	y_4

Кожному стовпчику матриці планування відповідає доданок рівняння регресії, що буде побудоване за результатами експериментів. Плану факторного експерименту типу 2^2 відповідає рівняння регресії виду:
 $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2$.

План факторного експерименту типу 2^3 (2 рівня для кожного фактора та 3 фактори) має вид:

2^3	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	+	+	+	+	+	+	+	+	y_1
2	+	-	+	+	-	-	+	-	y_2
3	+	+	-	+	-	+	-	-	y_3
4	+	-	-	+	+	-	-	+	y_4
5	+	+	+	-	+	-	-	-	y_5
6	+	-	+	-	-	+	-	+	y_6
7	+	+	-	-	-	-	+	-	y_7
8	+	-	-	-	+	+	+	+	y_8

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_1x_2 + b_5x_1x_3 + b_6x_2x_3 + b_7x_1x_2x_3$$

Відповідне рівняння регресії наведене в останньому рядочку плану.

Будь-якій матриці планування, яка складена таким способом, властиві наступні визначні властивості:

- 1) сума елементів будь-якого стовпчика, окрім першого, дорівнює нулю;
- 2) сума квадратів елементів будь-якого стовпчика дорівнює числу рядків;
- 3) добуток двох різноманітних стовпчиків дорівнює нулю.

Наведемо виведення формул для відшукування коефіцієнтів регресії. Припустимо, що рівняння регресії має вид: $y = b_0 + \sum_j b_j x_j$. Для простоти ви-

кладення прийняте позначення x_j для всіх стовпчиків - стовпчиків факторів і стовпчиків добутоків факторів. Так що стовпчик, наприклад, $x_1x_2x_3$ плану ти-

пу 2^3 позначається x_7 . Коефіцієнти рівняння регресії відшукуються так, щоб забезпечити найменше значення критерію найменших квадратів:

$$F(b) = \sum_{i=1}^N (y_i^{pez} - y_i^{exc})^2 = \sum_{i=1}^N \left(b_0 + \sum_j b_j x_j - y_j \right)^2 \rightarrow \min, \quad (6.19)$$

де сумування виконується по всім експериментам.

Необхідною і достатньою умовою мінімуму являється рівність нулю частинних похідних:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial b_0} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (6.20)$$

Звідси знаходимо

$$\begin{cases} \sum_i 2 \left(b_0 + \sum_j b_j x_{ij} - y_i \right) = 0 \\ \sum_i 2 \left(b_0 + \sum_j b_j x_{ij} - y_j \right) x_{ik} = 0, \quad k = 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (6.21)$$

Розкриваємо дужки і враховуємо, що

$$\sum_{i=1}^N b_0 = b_0 N,$$

$$\sum_i b_0 x_{ik} = b_0 \sum_i x_{ik} = 0, \quad (\text{визначна властивість 1})$$

$$\sum_i \sum_j b_j x_{ij} = \sum_j b_j \sum_i x_{ij} = 0, \quad (\text{властивість 1})$$

$$\sum_i \sum_j b_j x_{ij} x_{ik} = \sum_j b_j \sum_i x_{ij} x_{ik} = b_k \sum_i x_{ik}^2 = b_k N, \quad (\text{властивості 2,3}).$$

Маємо

$$\begin{cases} b_0 N = \sum_i y_i \\ b_k N = \sum_i y_i x_{ik}, \quad k = 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (6.22)$$

З (6.22) знаходимо формули для відшукування коефіцієнтів рівняння регресії:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{\sum_i y_i}{N} \\ b_k &= \frac{\sum_i y_i x_{ik}}{N}, \quad k = 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Отже, коефіцієнт рівняння регресії дорівнює добутку стовпчику результатів на відповідний стовпчик матриці планування, поділеному на кількість експериментів:

$$b_k = \frac{\sum y_i x_{ik}}{N}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (6.24)$$

Зі збільшенням кількості факторів розмір матриці планування і обсяг експерименту сильно зростає. Разом з цим в рівнянні регресії сильно збільшується кількість доданків, що описують взаємодії факторів. Інтерес же дослідника представляють доданки, що описують фактори. Тому при великому числі факторів нехтують деякою частиною рівняння регресії, що описує складні взаємодії факторів.

Для цього будують не повний план експерименту, а дробовий. *Дробовий* план факторного експерименту виходить з повного плану прирівнюванням лінійних ефектів до ефектів взаємодії. Кожна введена рівність зменшує план вдвічі. Тому, якщо повний план типу 2^k і введено m рівностей, то виходить дробовий план типу 2^{k-m} .

Нехай, наприклад, вихідний план 2^3 . Введемо $x_3 = x_1 x_2$. Це означає, що у повному плані 2^3 слід залишити тільки ті стовпчики, для яких виконана введена рівність (див. повний план 2^3). Маємо такий дробовий план:

2^{3-1}	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1 x_2$	y
1	+	+	+	+	y_1
2	+	-	+	-	y_6
3	+	+	-	-	y_7
4	+	-	-	+	y_4

Відповідне рівняння регресії має вид: $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$.

Побудувати дробовий план можна і не складаючи дробовий план. Для цього спочатку потрібно з'ясувати, які фактори і взаємодії залишилися в плані після прирівнювання. Якщо $x_3 = x_1 x_2$, то звідси слідують такі рівності:

$$\begin{aligned} x_3 x_1 &= x_2, \\ x_3 x_2 &= x_1, \\ x_0 &= x_1 x_2 x_3, \end{aligned}$$

оскільки $x_i^2 = x_0$ для $i = 1, 2, 3$.

Це означає, що залишилися стовпчики x_0, x_1, x_2, x_3 . Перші стовпчики матриці планування заповнюються по тим же правилам, що і при побудові повного плану. Наступні стовпчики заповнюються як добутки відповідних стовпчиків. Наприклад, стовпчик x_3 при складанні дробового плану 2^{3-1} , заповнюється як добуток стовпчиків x_1, x_2 .

Побудуємо дробовий факторний план типу 2^{5-2} . Введемо рівності $x_2x_3=x_1x_4$ і $x_5=x_2x_3$. Помножуючи послідовно на $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1x_2, x_1x_3$ і т. д. виведемо наступні рівності:

$$\begin{aligned}x_5 &= x_2x_3 = x_1x_4 = x_1x_2x_3x_4x_5, \\x_4 &= x_1x_5 = x_1x_2x_3 = x_2x_3x_4x_5, \\x_3 &= x_2x_5 = x_1x_2x_4 = x_1x_3x_4x_5, \\x_2 &= x_3x_5 = x_1x_3x_4 = x_1x_2x_4x_5, \\x_1 &= x_4x_5 = x_2x_3x_4 = x_1x_2x_3x_5, \\x_0 &= x_1x_4x_5 = x_2x_3x_5 = x_1x_2x_3x_4, \\x_1x_2 &= x_3x_4 = x_2x_4x_5 = x_1x_3x_5, \\x_1x_3 &= x_2x_4 = x_3x_4x_5 = x_1x_2x_5.\end{aligned}$$

Будуємо матрицю планування (при цьому стовпчик x_4 заповнюється за допомогою рівності $x_4 = x_1x_2x_3$, а стовпчик x_5 – з допомогою рівності $x_5 = x_2x_3$):

2^{5-2}	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1x_2	x_1x_3	y
1	+	+	+	+	+	+	+	+	y_1
2	+	-	+	+	-	+	-	-	y_2
3	+	+	-	+	-	-	-	+	y_3
4	+	-	-	+	+	-	+	-	y_4
5	+	+	+	-	-	-	+	-	y_5
6	+	-	+	-	+	-	-	+	y_6
7	+	+	-	-	+	+	-	-	y_7
8	+	-	-	-	-	+	+	+	y_8

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_1x_2 + b_7x_1x_3$$

Оскільки визначні властивості матриці планування зберігаються, то коефіцієнти рівняння регресії знаходяться за формулами (6.13) і у випадку дробового факторного плану проведення експериментів.

Статистична обробка результатів факторних експериментів

Статистичну обробку результатів факторного експерименту проводять в декілька етапів. На початку обробки виконують оцінку *відтворюваності* експерименту за критерієм Кохрена [Ситник, Орленко] (який також називають критерієм Кочрена [Гмурман]). Для цього розраховують максимальне та сумарне значення регресії :

$$D_j = \frac{\sum_{i=1}^p (y_{ij} - y_j)^2}{p-1}, \quad D_\Sigma = \sum_{j=1}^N D_j, \quad D_{\max} = \max_j D_j \quad (6.25)$$

де y_{ij} - i -е спостереження відгуку моделі в j -ому експерименті. Далі обчислюють спостережуване значення критерію Кочрена:

$$G = \frac{D_{\max}}{D_\Sigma} \quad (6.26)$$

Спостережуване значення критерію Кочрена порівнюють з його табличним значенням $G_{кр}$, знайденим при рівні значущості $\alpha=0,05$, кількості експериментів N і кількості ступенів вільності $m=p-1$. Якщо $G < G_{кр}$, то експеримент є відтворюваним, і величину $D = \frac{1}{N} \sum_j D_j$ можна вважати оцінкою генеральної сукупності. Якщо виявилось, що $G > G_{кр}$, то необхідно збільшити кількість прогонів або зменшити інтервал варіювання факторів (збільшити точність вимірів).

Тільки якщо експеримент є відтворюваним переходять до наступного етапу статистичної обробки результатів. На цьому етапі оцінюють значущість коефіцієнтів рівняння регресії за критерієм Ст'юдента. Спостережуване значення критерію Ст'юдента знаходять за формулою

$$t_j = |b_j| \sqrt{\frac{Np}{D}}, \quad (6.27)$$

яке потім порівнюють з табличним значенням $t_{кр}$, знайденим при рівні значущості $\alpha=0,05$ і кількості ступенів вільності $m=N(p-1)$. Коефіцієнт b_j вважається значущим, якщо відповідне значення $t_j > t_{кр}$. Інші $N-L$ коефіцієнтів приймаються незначущими і виключаються з рівняння регресії.

Якщо всі або всі, крім b_0 , коефіцієнти рівняння регресії виявилися незначущими, це значить, що інтервали варіювання факторів вибрані надто маленькими і їх слід збільшити.

Якщо всі коефіцієнти рівняння регресії виявились значущими, то наступний етап статистичної обробки результатів факторного експерименту не виконують, і вважають обробку результатів закінченою.

Якщо є незначущі коефіцієнти рівняння регресії, то переходять до третього етапу статистичної обробки результатів факторного експерименту перевіряють адекватність отриманого рівняння регресії результатам експерименту за критерієм Фішера. Для цього розраховують дисперсію адекватності за формулою:

$$D_{ад} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i^{екс} - y_i^{рег})^2}{N - L}, \quad (6.28)$$

де $y_i^{рег}$ - обчислене за регресійним рівнянням значення i -ого експерименту, L - кількість значущих коефіцієнтів лінійної регресії.

Спостережуване значення критерію Фішера визначають за формулою:

$$F = \frac{D_{ад}}{D}. \quad (6.29)$$

Якщо $F < 1$, то модель адекватна. Якщо $F \geq 1$, то слід звернутися до таблиці критерію Фішера. Критичне значення $F_{кр}$ відшуковують при рівні значущості $\alpha=0,05$ та кількості ступенів вільності $m_1=N(p-1)$ та $m_2=N-1$.

Якщо $F < F_{кр}$, то модель адекватна, якщо $F > F_{кр}$, то модель не адекватна, і необхідно перейти до більш складної моделі (від дробового до повного плану або від лінійного до квадратичного рівняння) або зменшити інтервал варіювання факторів.

6.3. Дисперсійний аналіз впливу факторів

Метою дисперсійного аналізу являється визначення впливу фактора на рівні «впливає» або «не впливає». Основне питання, на яке дає відповідь дисперсійний аналіз впливу фактора, формулюється так: різниця у значеннях відгуку моделі, отриманих при різних значеннях фактора обумовлена випадковістю, чи пояснюється виключно дією фактора?

Нехай кількість прогонів у кожному експерименті дорівнює p (кількість рівнів $q=2$). Тоді загальна кількість прогонів при проведенні експерименту дорівнює $(p \times 2)$. Нехай $y_{i,j}$, $i=1, \dots, p$, $j=1, 2$ - результат j -ого експерименту в i -тому спостереженні. Виділимо складову \bar{y} , що присутня в кожному результаті $y_{i,j}$, і є складовою частиною результату j -того експерименту $\bar{y}_j = \bar{y} + d_j$, та складову e_{ij} , що залежить від випадкових причин:

$$y_{ij} = \bar{y} + d_j + e_{ij}. \quad (6.30)$$

Зауважимо, що представлення (6.30) являється коректним тільки за припущенням, що величина e_{ij} є нормально розподіленою випадковою величиною з нульовим середнім та дисперсією, однаковою для всіх рівнів. В інших випадках розклад (6.30) приймає більш складний вигляд.

Ідея факторного експерименту полягає у перевірці чи являється величина δ_j у розкладі (6.30) достатньо малою величиною. Дійсно, якщо $\delta_j = 0$, то $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \bar{y}$, тобто змінювання значення фактора не спричиняє змінювання значення відгуку моделі. На практиці рівність нулю ніколи не досягається, і оцінити, чи значення δ_j достатньо мале, щоб вважати його вклад у значення відгуку моделі малим, можна тільки із застосуванням методу дисперсійного аналізу.

6.3.1. Однофакторний експеримент у випадку якісних факторів

План однофакторного експерименту має вид:

Рівень фактора	1	2	
Кількість спостережень на кожному рівні дорівнює p	y_{11}	y_{12}	
	y_{21}	y_{22}	
	
	y_{p1}	y_{p2}	
Середні значення	\bar{y}_1	\bar{y}_2	\bar{y}

Середні значення обчислюються за формулами:

$$\bar{y}_j = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p y_{ij}, \quad \bar{y} = \frac{1}{p \cdot 2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^2 y_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \bar{y}_j. \quad (6.31)$$

Дисперсійний аналіз

Основна ідея дисперсійного аналізу полягає в порівнянні факторної дисперсії, що обумовлена впливом фактора, та залишкової дисперсії, що обумовлена впливом випадкових причин. Якщо різниця між цими дисперсіями значна, то фактор здійснює вплив на відгук моделі y .

Введемо величини

$$S_{заг} = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^p (y_{ij} - \bar{y})^2, \quad S_{факт} = p \cdot \sum_{j=1}^2 (\bar{y}_j - \bar{y})^2, \quad S_{залиш} = \sum_{i=1}^p (y_{i1} - \bar{y}_1)^2 + \sum_{i=1}^p (y_{i2} - \bar{y}_2)^2 \quad (6.32)$$

Можна довести, що

$$S_{заг} = S_{факт} + S_{залиш}. \quad (6.33)$$

Достатньо обчислити дві величини за формулами (6.32), а третя тоді знаходиться з рівняння (6.33).

Якщо фактор має великий вплив, то розрізняються його середні \bar{y}_1 та \bar{y}_2 . При цьому чим більше різниця, тим більший вплив. Тому $S_{факт}$ характеризує вплив фактора. Вплив випадкових величин характеризується $S_{залиш}$. Визначимо загальну, факторну та залишкову дисперсії:

$$d_{заг} = \frac{S_{заг}}{2 \cdot p - 1}, \quad d_{факт} = S_{факт}, \quad d_{залиш} = \frac{S_{залиш}}{2(p-1)} \quad (6.34)$$

У формулах (6.34) в знаменнику кожного виразу стоїть кількість ступенів вільності. Порівняння факторної та залишкової дисперсії проводять за величиною критерію Фішера, що спостерігається в експерименті:

$$F = \frac{d_{факт}}{d_{залиш}} \quad (6.35)$$

Критичне значення критерію Фішера $F_{кр}$ знаходять на основі рівня значимості $\alpha = 0,05$, ступенів вільності числівника $k_1 = q - 1 = 1$ та ступенів вільності знаменника $k_2 = q(p - 1) = 2(p - 1)$. Якщо $F > F_{кр}$, то середні \bar{y}_1 та \bar{y}_2 розрізняються значимо і вплив фактора є значимим. В протилежному випадку вплив фактора визнається не значимим, а різниця у середніх значеннях пояснюється випадковими причинами.

Зрозуміло, що оцінка впливу фактора проводиться тільки для заданих рівнів і висновки про вплив факторів відноситься тільки до цих значень факторів. Для того, щоб отримати загальну картину впливу факторів, потрібно провести експерименти для інших рівнів факторів, які допускаються для даної моделі.

6.3.2. Багатофакторний експеримент у випадку якісних факторів

Дослідження впливу декількох факторів можна отримати, дослідивши вплив кожного фактору окремо так, як це було описано вище. Але кількість експериментів при такому підході швидко зростає із збільшенням кількості факторів. Щоб уникнути цього, проводять експерименти за багатофакторними планами з урахуванням сумісного впливу факторів. Такий багатофакторний план у випадку двох факторів має вид:

2^2	A_1	A_2	Дисперсійний аналіз	
			дисперсія	кількість ступенів вільності
B_1	$y_1(A_1, B_1), \dots, y_4(A_1, B_1)$	$y_1(A_2, B_1), \dots, y_4(A_2, B_1)$	фактор A	1
B_2	$y_1(A_1, B_2), \dots, y_4(A_1, B_2)$	$y_1(A_2, B_2), \dots, y_4(A_2, B_2)$	фактор B	1
			фактор AB залишкова	1 15-3=12
	$p=8$	$N_{np}=16$	загальна	16-3=13

Тут A і B – два фактори, вплив яких на відгук моделі у досліджується, $y_k(A_i, B_j)$ – результат k -того спостереження на i -тому рівні фактора A та на j -тому рівні фактора B . Загальне кількість прогонів в цьому плані $N_{np}=16$ при кількості повторень для кожного рівня $p=8$. Якби експериментування проводили окремо для кожного фактору, то кількість прогонів була б $N_{np}=8 \cdot 2 \cdot 2=32$, тобто вдвічі більша. Крім того з'явилася можливість дослідження впливу взаємодії факторів A і B . Верхній рівень фактору взаємодії AB визначається експериментами: $y_1(A_1, B_1), \dots, y_4(A_1, B_1), y_1(A_2, B_2), \dots, y_4(A_2, B_2)$. Нижній рівень – експериментами: $y_1(A_1, B_2), \dots, y_4(A_1, B_2), y_1(A_2, B_1), \dots, y_4(A_2, B_1)$. Дисперсійний аналіз впливу кожного фактору проводиться таким чином, як для одного фактору, за формулами (6.32)–(6.35). Відрізняється тільки кількість ступенів вільності, що використовується у формулах (6.35) та при визначенні критерію Фішера. Щоб не виникло помилок, значення ступенів вільності указані в плані.

Багатофакторний план у випадку трьох якісних факторів має вид:

2^3	A_1		A_2		Дисперсійний аналіз	
	C_1	C_2	C_1	C_2	дисперсія	кількість ступенів вільності
B_1	$y_1(A_1, B_1, C_1) \dots y_3$	$y_1 \dots y_3$	$y_1 \dots y_3$	$y_1 \dots y_3$	ефект A	1
B_2	$y_1 \dots y_3$	$y_1 \dots y_3$	$y_1 \dots y_3$	$y_1 \dots y_3$	ефект B	1
					ефект C	1
					ефект AB	1
					ефект AC	1
					ефект BC	1
					ефект ABC	1
					залишкова	$23-7=16$
	$p=12$		$N_{np}=24$		загальна	$24-1=23$

Кількість повторень для кожного рівня в цьому плані $p=12$, а кількість прогонів $N_{np}=24$. Якби досліджували окремо кожний фактор по однофакторному плану, то загальна кількість прогонів було б $N_{np}=12 \cdot 2 \cdot 3=72$. Звідси бачимо, що при збільшенні числа факторів різниця в обсязі експерименту при проведенні по багатофакторному і однофакторному плану сильно зростає. Тому експериментування з імітаційними моделями проводять саме по багатофакторним планам.

6.4. Приклади розв'язання задач

■ **Задача 1.** Визначить розмір вибірки відгуку моделі, необхідний для забезпечення точності 0,01 при довірчій ймовірності 0,95, якщо закон розподілу відгуку моделі невизначений, а дисперсія його дорівнює $1,2 \cdot 10^{-4}$.

Розв'язання. Оскільки закон розподілу відгуку моделі невизначений, то для визначення розміру вибірки потрібно скористатись формулою (6.7). За умовою задачі точність $\epsilon=0,01$, довірна ймовірність $\beta=0,95$, дисперсія $\sigma^2=1,2 \cdot 10^{-4}$, отже

$$p = \frac{1,2 \cdot 10^{-4}}{0,01^2(1-0,95)} = 24$$

Відповідь: необхідний розмір вибірки складає 24 прогони.

■ **Задача 2.** Визначить розмір вибірки відгуку моделі, необхідний для забезпечення точності 3 при довірчій ймовірності 0,95, якщо закон розподілу відгуку моделі нормальний, а середнє квадратичне відхилення його дорівнює 6.

Розв'язання. Закон розподілу відгуку моделі нормальний, тому для визначення розміру вибірки можна скористатись формулою (6.15). За умовою задачі точність $\varepsilon=3$, довірча ймовірність $\beta=0,95$, середнє квадратичне відхилення $\sigma=6$, отже

$$p = \frac{6^2 \cdot 1,96^2}{3^2} \approx 16$$

Відповідь: необхідний розмір вибірки складає 16 прогонів.

■ **Задача 3.** Результати експерименту наведені у таблиці:

$x=5$	33,8	11,7	28,3	10,1	10,7	14,1	6,0	9,5
$x=7$	4,4	11,0	1,9	6,4	8,1	23,1	23,7	44,4

Визначить, чи впливає даний фактор на відгук моделі?

Розв'язання. Кількість прогонів складає 8. Розрахуємо середні значення за формулами (6.31):

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_{i1} = 15,525, \quad \bar{y}_2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_{i2} = 15,375, \quad \bar{y} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \bar{y}_j = 15,45.$$

Для оцінки впливу фактору виконаємо дисперсійний аналіз. За формулами (6.32) знайдемо величини:

$$S_{\text{факт}} = 8 \cdot \sum_{j=1}^2 (\bar{y}_j - \bar{y})^2 = 0,09, \quad S_{\text{залиш}} = \sum_{i=1}^p (y_{i1} - \bar{y}_1)^2 + \sum_{i=1}^p (y_{i2} - \bar{y}_2)^2 = 2120.$$

Потім за формулами (6.29) визначимо факторну та залишкову дисперсії:

$$d_{\text{факт}} = S_{\text{факт}} = 0,09, \quad d_{\text{залиш}} = \frac{S_{\text{залиш}}}{2(8-1)} = 151,404.$$

Значення критерію Фішера визначається за формулою (6.35):

$$F = \frac{d_{\text{факт}}}{d_{\text{залиш}}} = 0,00059$$

Критичне значення критерію Фішера знайдемо зі статистичних таблиць при значеннях параметрів $\alpha = 0,05$, $k_1 = 1$ та $k_2 = 2(p-1) = 14$:

$$F_{\text{кр}} = 4,6.$$

Оскільки $F < F_{\text{кр}}$, то вплив фактора є незначущим. Різниця в значеннях відгуку моделі пов'язана з випадковим її характером і не пов'язана зі зміною значення фактора.

Відповідь: Вплив досліджуваного фактора на відгук моделі є незначущим.

■ **Задача 4.** Оцінити вплив факторів «наявність блокування» та «наявність обмеження на чергу» на загальний час обробки вимоги в мережі МО за даними факторного експерименту:

	черга обмежена	черга необмежена
блокування є	6,3; 9,7; 8,8; 9,9	11,4; 10,2; 2,0; 7,3
блокування відсутнє	17,5; 14,0; 14,5; 14,1	8,7; 13,2; 10,4; 9,0

Розв'язання. Нехай фактор A – «наявність обмеження на чергу», фактор B – «наявність блокування», відгук моделі – загальний час обробки вимоги в мережі МО. Для кожного фактору маємо два рівні, отже $q=2$, і вісім прогонів, отже $p=8$. Результати експериментів, які наведені в таблиці, відповідають багатofакторному плану у випадку двох якісних факторів:

2^2	A_1	A_2	Дисперсійний аналіз	
			дисперсія	кількість ступенів вільності
B_1	6,3; 9,7; 8,8; 9,9	11,4; 10,2; 2,0; 7,3	фактор A	1
B_2	17,5; 14,0; 14,5; 14,1	8,7; 13,2; 10,4; 9,0	фактор B	1
			фактор AB	1
			залишкова	$15-3=12$
	$p=8$	$N_{np}=16$	загальна	$16-1=15$

Для оцінки впливу факторів проведемо дисперсійний аналіз. Для фактору A маємо такі розрахунки:

$$\bar{y}_1 = 11,85, \quad \bar{y}_2 = 9,025, \quad \bar{y} = 10,438.$$

$$S_{\text{факт}} = 31,922, \quad S_{\text{залиш}} = 175,935.$$

$$d_{\text{факт}} = S_{\text{факт}} = 31,922 \quad d_{\text{залиш}} = \frac{S_{\text{залиш}}}{12} = 14,661.$$

Зауважимо, що в знаменнику залишкової дисперсії стоїть кількість ступенів вільності 12, а не 14, як в однофакторному дисперсійному аналізі.

$$F = \frac{d_{\text{факт}}}{d_{\text{залиш}}} = 2,177$$

Критичне значення критерію Фішера (при кількості ступенів вільності знаменника 12, а не 14):

$$F_{\text{кр}} = 4,747.$$

Оскільки $F < F_{\text{кр}}$, то вплив фактора A є незначущим. Різниця в значеннях відгуку моделі пов'язана з випадковим її характером і не пов'язана зі зміною значення фактора.

Для фактору B маємо такі розрахунки:

$$\bar{y}_1 = 8,2 \quad \bar{y}_2 = 12,675, \quad \bar{y} = 10,438.$$

$$S_{\text{факт}} = 80,103, \quad S_{\text{залиш}} = 127,755.$$

$$d_{\text{факт}} = S_{\text{факт}} = 80,103 \quad d_{\text{залиш}} = \frac{S_{\text{залиш}}}{12} = 10,646.$$

Зауважимо, що в знаменнику залишкової дисперсії стоїть кількість ступенів вільності 12, а не 14, як в однофакторному дисперсійному аналізі.

$$F = \frac{d_{\text{факт}}}{d_{\text{залиш}}} = 7,524$$

Критичне значення критерію Фішера:

$$F_{кр} = 4,747.$$

Оскільки $F > F_{кр}$, то вплив фактора B є значущим. Різниця в значеннях відгуку моделі пов'язана зі зміною значення фактора і не може бути спричинена тільки її випадковим характером.

Для фактору AB маємо такі розрахунки:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= 9,5 & \bar{y}_2 &= 11,375, & \bar{y} &= 10,438. \\ S_{факт} &= 14,063, & S_{залиш} &= 193,795. \\ d_{факт} &= S_{факт} = 14,063 & d_{залиш} &= \frac{S_{залиш}}{12} = 16,15. \end{aligned}$$

Зауважимо, що в знаменнику залишкової дисперсії стоїть кількість ступенів вільності 12, а не 14, як в однофакторному дисперсійному аналізі.

$$F = \frac{d_{факт}}{d_{залиш}} = 0,871$$

Критичне значення критерію Фішера:

$$F_{кр} = 4,747.$$

Оскільки $F < F_{кр}$, то вплив фактора AB є незначущим.

Відповідь: на загальний час обробки в мережі МО значний вплив спричиняє фактор «наявність блокування», проте вплив фактора «наявність обмеження на чергу», є не значним. Оцінка взаємодії цих двох факторів показала, що вона є незначною.

■ **Задача 5.** Побудуйте багатофакторний план проведення експериментів у випадку трьох факторів так, щоб кількість прогонів для кожного фактору була не менше 21.

Розв'язання. В багатофакторному плані для трьох факторів кількість прогонів для кожного фактору залежить від кількості прогонів для однієї комбінації факторів. У прикладі, який наведений в теоретичних відомостях цього розділу, кількість прогонів для однієї комбінації факторів складає 3. Якщо це число збільшити до 6, то кількість прогонів для кожного фактору збільшиться до 24. Тому план, який вимагається за умовами задачі, має вид:

2^3	A_1		A_2		Дисперсійний аналіз	
	C_1	C_2	C_1	C_2	дисперсія	кількість ступенів вільності
B_1	$y_1(A_1, B_1, C_1), \dots, y_6$	y_1, \dots, y_6	y_1, \dots, y_6	y_1, \dots, y_6	ефект A ефект B ефект C	1 1 1

B_2	y_1, \dots, y_6	y_1, \dots, y_6	y_1, \dots, y_6	y_1, \dots, y_6	ефект AB	1
					ефект AC	1
					ефект BC	1
					ефект ABC	1
					залишкова	$47-7=40$
$p=24$		$N_{np}=48$		загальна	$48-1=47$	

Відповідь: відповіддю є складений план. Загальна кількість прогонів в цьому плані складає 48 прогонів.

■ **Задача 6.** Метою проведення експериментів з мережею МО (рис. 6.2) є оцінка середньої довжини черги L у другій СМО. В ході експериментів змінювали інтенсивність надходження I та інтенсивність обробки μ_2 .

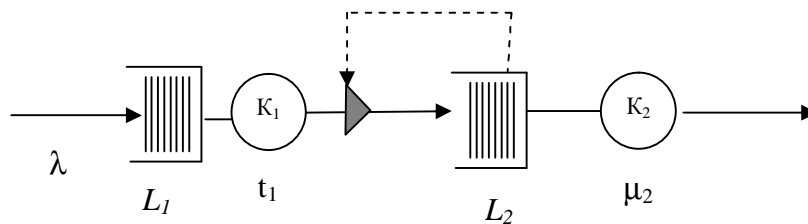


Рис. 6.2. Мережа МО до задачі 6.

Результати експериментів, які проводились, наведені в таблиці:

I	μ_2	L
20	15	4
15	15	5
20	5	18
15	5	17

Знайдіть рівняння регресії та зробіть висновки про вплив вхідних змінних моделі на вихідну змінну. Як потрібно змінювати інтенсивність надходження вимог та інтенсивність обслуговування їх в каналі другої СМО, щоб зменшити довжину черги другої СМО?

Розв'язання. Результати експериментів відповідають повному факторному плану для двох факторів. Нехай $X_1=I$, $X_2=\mu_2$. Формули (6.18) приймають вигляд:

$$x_1 = \frac{X_1 - 17,5}{2,5}, \quad x_2 = \frac{X_2 - 10}{5}.$$

Складаємо матрицю планування ПФЕ:

2^2	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	y
	+	+	+	+	4
	+	-	+	-	5
	+	+	-	-	18
	+	-	-	+	17

Знаходимо коефіцієнти регресійного рівняння за формулами (6.24):

$$b_0 = \frac{\sum y}{4} = \frac{4+5+18+17}{4} = 11 \qquad b_2 = \frac{\sum yx_2}{4} = \frac{4+5-18-17}{4} = -\frac{13}{2}$$

$$b_1 = \frac{\sum yx_1}{4} = \frac{4-5+18-17}{4} = 0 \qquad b_3 = \frac{\sum yx_1x_2}{4} = \frac{4-5-18+17}{4} = -\frac{1}{2}$$

Складаємо рівняння регресії:

$$y = 11 - \frac{13}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2.$$

$$\text{Тут } x_1 = \frac{X_1 - 17,5}{2,5}, x_2 = \frac{X_2 - 10}{5}.$$

З рівняння регресії слідує, що інтенсивність вхідного потоку вимог (фактор x_1) мало впливає на довжину черги в СМО2 (відгуку y), а інтенсивність обслуговування (фактор x_2) – сильно впливає. Цей висновок не суперечить змісту моделі.

Знак «мінус» свідчить про те, що при збільшенні значення фактору x_2 значення y буде зменшуватися. Дійсно, при збільшенні інтенсивності обслуговування довжина черги в СМО2 має зменшуватись. Після такої перевірки степінь довіри до знайденого рівняння регресії зростає.

Рівняння регресії може бути використане для відшукування наближеного значення відгуку моделі в тій області, для якої воно складене. Наприклад, при $l=18$ і $m=12$ маємо:

$$y = 11 - \frac{13}{2} \left(\frac{12-10}{5} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{18-17,5}{2,5} \right) \left(\frac{12-10}{5} \right) = 8,36$$

Відповідь: Рівняння регресії відгуку моделі в області проведення експериментів має вигляд: $L = 11 - \frac{13}{2} \cdot \frac{m-10}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{l-17,5}{2,5} \cdot \frac{m-10}{5}$. Для зменшення довжини черги потрібно збільшувати інтенсивність обслуговування в другій СМО.

■ **Задача 7.** Складіть рівняння регресії відгуку моделі за такими результатами факторного експерименту:

X_1	X_2	X_3	y
0,01	30	1,5	15
0,01	55	0,5	31
0,03	30	0,5	11
0,03	55	1,5	39

Розв'язання. З таблиці результатів експериментів робимо висновок про те, що експерименти проводились при двох значеннях кожного фактору – максимальному і мінімальному. Область проведення експериментів $X_1 \in (0,01; 0,03)$, $X_2 \in (30; 50)$, $X_3 \in (0,5; 1,5)$. Перетворимо за формулами

(6.18) початкові змінні в допоміжні, які змінюються в області $(-1;1)$:

$$x_1 = \frac{X_1 - 0,02}{0,01}, \quad x_2 = \frac{X_2 - 40}{10}, \quad x_3 = \frac{X_3 - 1,0}{0,5}.$$

Таблиця результатів експериментів приймає вигляд:

x_1	x_2	x_3	y
-	-	+	15
-	+	-	31
+	-	-	11
+	+	+	39

Експериментів тільки чотири при кількості факторів три. Отже, це результати дробового факторного експерименту. Складемо матрицю планування ДФЕ типу 2^{3-1} :

2^{3-1}	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1 x_2$	y
1	+	-	-	+	15
2	+	-	+	-	31
3	+	+	-	-	11
4	+	+	+	+	39

Коефіцієнти рівняння регресії знаходимо за формулами (6.24)

$$b_0 = \frac{15 + 31 + 11 + 39}{4} = 24, \quad b_1 = \frac{-15 - 31 + 11 + 39}{4} = 1,$$

$$b_2 = \frac{-15 + 31 - 11 + 39}{4} = 11, \quad b_3 = \frac{15 - 31 - 11 + 39}{4} = 3.$$

Відповідне рівняння регресії має вид: $y = 24 + x_1 + 11x_2 + 3x_3$, де

$$x_1 = \frac{X_1 - 0,02}{0,01}, \quad x_2 = \frac{X_2 - 40}{10}, \quad x_3 = \frac{X_3 - 1,0}{0,5}.$$

Аналізуючи отримане рівняння регресії, можна зробити висновок про те, що фактор x_2 спричиняє на відгук моделі вплив набагато більший, ніж фактор x_1 або x_3 .

Рівняння регресії може бути використане для наближених розрахунків відгуку моделі в області проведення експериментів. Наприклад, якщо $X_1=0,023$, $X_2=35$, $X_3=1,2$, то з огляду на те, що ця точка належить області проведення експериментів, розраховуємо:

$$y = 24 + \frac{0,023 - 0,02}{0,01} + 11 \cdot \frac{35 - 40}{10} + 3 \cdot \frac{1,2 - 1,0}{0,5} = 24 + 0,3 - 11 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,4 = 20.$$

Відповідь: результати експериментів відповідають наступному рівнянню регресії:

$$y = 24 + x_1 + 11x_2 + 3x_3, \quad \text{де } x_1 = \frac{X_1 - 0,02}{0,01}, \quad x_2 = \frac{X_2 - 40}{10}, \quad x_3 = \frac{X_3 - 1,0}{0,5}.$$

З цього рівняння слідує, що при збільшенні на одиницю значення фактора x_1 , значення відгуку моделі збільшиться на одиницю, при збільшенні на одиницю значення фактора x_2 , значення відгуку моделі збільшиться на 11 одиниць, а при збільшенні на одиницю значення фактора x_3 , значення відгуку моделі збільшиться на 3 одиниці. Тобто вплив фактора x_2 вдесятеро більший за вплив фактора x_1 та втричі більший за вплив фактора x_3 .

■ **Задача 8.** Побудуйте план дробового факторного експерименту 2^{5-2} , який використовує співвідношення $x_5=x_1x_2x_3$, $x_2=x_3x_4$. Складіть відповідне цьому плану рівняння регресії.

Розв'язання. Помножуючи послідовно на $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1x_2, x_1x_3$ і т. д. виведемо наступні рівності:

$$\begin{aligned}x_5 &= x_1x_4 = x_1x_2x_3 = x_2x_3x_4x_5, \\x_4 &= x_1x_5 = x_2x_3 = x_1x_2x_3x_4x_5, \\x_3 &= x_2x_4 = x_1x_2x_5 = x_1x_3x_4x_5, \\x_2 &= x_3x_4 = x_1x_3x_5 = x_1x_2x_4x_5, \\x_1 &= x_4x_5 = x_2x_3x_5 = x_1x_2x_3x_4, \\x_0 &= x_2x_3x_4 = x_1x_4x_5 = x_1x_2x_3x_5, \\x_1x_3 &= x_2x_5 = x_1x_2x_4 = x_3x_4x_5, \\x_1x_2 &= x_3x_5 = x_1x_3x_4 = x_2x_4x_5\end{aligned}$$

Будуємо матрицю планування (при цьому стовпчик x_4 заповнюється за допомогою рівності $x_4=x_2x_3$ а стовпчик x_5 – за допомогою рівності $x_5=x_1x_4$):

2^{5-2}	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1x_2	x_1x_3	y
1	+	+	+	+	+	+	+	+	y_1
2	+	-	+	+	+	-	-	-	y_2
3	+	+	-	+	-	-	-	+	y_3
4	+	-	-	+	-	+	+	-	y_4
5	+	+	+	-	-	-	+	-	y_5
6	+	-	+	-	-	+	-	+	y_6
7	+	+	-	-	+	+	-	-	y_7
8	+	-	-	-	+	-	+	+	y_8

Відповідне цьому плану рівняння регресії має вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_1x_2 + b_7x_1x_3.$$

Відповідь: відповіддю є складений план.

■ **Задача 9.** В результаті проведення повного факторного експерименту типу 2^3 при кількості прогонів чотири отримані наступні середні значення відгуку моделі y_i та значення дисперсій D_i :

x_1	x_2	x_3	y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}	y_{j4}
-	-	-	174,6	181,0	167,7	207,7
+	-	-	102,0	159,9	102,6	111,7
-	+	-	211,8	191,8	198,8	152,0
+	+	-	115,4	103,3	137,2	137,2
-	-	+	264,0	286,0	313,7	283,0
+	-	+	275,2	254,9	201,3	232,9
-	+	+	287,5	308,6	279,7	288,7
+	+	+	189,4	251,3	178,2	202,3

Проведіть статистичну обробку результатів факторного експерименту та зробіть висновки про вплив факторів на відгук моделі.

Розв'язання. Розрахуємо середні значення та дисперсії відгуку моделі у кожному експерименті:

y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}	y_{j4}	$y_j = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 y_{ji}$	$D_j = \frac{1}{4-1} \sum_{i=1}^4 (y_{ji} - y_j)^2$
174,6	181,0	167,7	207,7	182,8	306,2
102,0	159,9	102,6	111,7	119,0	759,9
211,8	191,8	198,8	152,0	188,6	663,5
115,4	103,3	137,2	137,2	123,3	282,8
264,0	286,0	313,7	283,0	286,7	420,1
275,2	254,9	201,3	232,9	241,1	1003,2
287,5	308,6	279,7	288,7	291,1	150,9
189,4	251,3	178,2	202,3	205,3	1037,8

Кількість прогонів складає чотири, а кількість експериментів вісім, тому у формулах (6.24-6.28) $p=4$, а $N=8$.

1) Знаходимо значення критерію Кочрена за формулами (6.24), (6.21):

$$D_{\max} = 1037,8$$

$$D_{\Sigma} = 4624,4$$

$$G = \frac{1037,8}{4624,4} \approx 0,224$$

При $\alpha=0,05$, $p-1=4-1=3$, маємо $G_{кр}=0,4377$. Оскільки $0,224 < 0,4377$, то факторний експеримент є відтворюваним і величина $D = \frac{4624,4}{8} = 578,05$ є оцінкою дисперсії генеральної сукупності.

2) Знаходимо коефіцієнти рівняння регресії за формулами:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \frac{\sum y_i}{8} = 204,73 & b_3 &= \frac{\sum x_{i3}y_i}{8} = 51,31 & b_6 &= \frac{\sum x_{i2}x_{i3}y_i}{8} = -5,18 \\
 b_1 &= \frac{\sum x_{i1}y_i}{8} = -32,56 & b_4 &= \frac{\sum x_{i1}x_{i2}y_i}{8} = 11,10 & b_7 &= \frac{\sum x_{i1}x_{i2}x_{i3}y_i}{8} = -4,83 \\
 b_2 &= \frac{\sum x_{i2}y_i}{8} = -2,66 & b_5 &= \frac{\sum x_{i1}x_{i3}y_i}{8} = -0,30 & & &
 \end{aligned}$$

Складаємо відповідне до матриці планування рівняння регресії:

$$y^{pez} = 204,73 - 32,56x_1 - 2,66x_2 + 51,31x_3 + 11,10x_1x_2 - 0,30x_1x_3 - 5,18x_2x_3 - 4,83x_1x_2x_3 \quad (6.31)$$

При $\alpha=0,05$, числі ступенів вільності $N(p-1)=8 \cdot 3=24$, маємо $t_{kp}=1,71$. Оцінюємо значимість коефіцієнтів b_j за формулою (6.22):

$$t_0 = 204,73 \sqrt{\frac{8 \cdot 4}{578,05}} = 48,17 > 1,71 \Rightarrow b_0 \text{ є значимим, } t_1 = 7,66 > 1,71 \Rightarrow b_1 \text{ є значимим,}$$

МИМ,

$$\begin{aligned}
 t_2 &= 0,63 < 1,71 \Rightarrow b_2 \text{ є незначимим,} & t_3 &= 12,07 > 1,71 \Rightarrow b_3 \text{ є значимим,} \\
 t_4 &= 2,61 > 1,71 \Rightarrow b_4 \text{ є значимим,} & t_5 &= 0,07 < 1,71 \Rightarrow b_5 \text{ є незначимим,} \\
 t_6 &= 1,21 < 1,71 \Rightarrow b_6 \text{ є незначимим,} & t_7 &= 1,14 > 1,71 \Rightarrow b_7 \text{ є незначимим.}
 \end{aligned}$$

Помітимо, що не значимими є обов'язково найменші коефіцієнти b_j . Але визначити, скільки найменших коефіцієнтів в рівнянні є незначущими, можна тільки за допомогою критерію Ст'юдента. Викреслюємо незначущі доданки з виразу (6.31) і одержуємо наступне рівняння регресії:

$$y^{pez} = 204,73 - 32,56x_1 + 51,31x_3 + 11,10x_1x_2. \quad (6.32)$$

Підставляючи відповідні значення факторів у рівняння (6.32), знаходимо значення відгуку моделі в кожному експерименті, обчислене по рівнянню регресії. Наприклад, в першому експерименті $x_1=-1, x_2=-1, x_3=-1$. Звідси, $y^{pez} = 204,73 + 32,56 - 51,31 + 11,10x_1x_2$. Розраховуємо y_j^{pez} і заносимо їх у таблицю результатів експериментів:

x_1	x_2	x_3	y	y^{pez}
-	-	-	182,8	197,1
+	-	-	119,0	109,8
-	+	-	188,6	174,9
+	+	-	123,3	132,0
-	-	+	286,7	299,7
+	-	+	241,1	212,4
-	+	+	291,1	277,5
+	+	+	205,3	234,6

3) Знаходимо значення адекватності дисперсії адекватності за формулою (6.23):

$$D_{ad} = \frac{1}{8-4} \sum_{i=1}^8 (y_i - y_i^{pez})^2 = \frac{2593,8}{4} = 648,45$$

Обчислюємо значення критерію Фішера за формулою (6.24):

$$F = \frac{D_{ad}}{D} = \frac{648,45}{578,05} = 1,12$$

Критичне значення критерію Фішера при рівні значимості 0,05 і кількості ступенів вільності $8 \cdot (4-1)=24$ та $4-1=3$ складає

$$F_{кр} = qF(0,95, 24, 3) = 8,64.$$

Оскільки $F < F_{кр}$, рівняння регресії (6.32) визнається адекватним результатам факторного експерименту.

Відповідь: при статистичній обробці результатів експериментів виявився не значимим вплив факторів x_2 , x_1x_3 , x_2x_3 та $x_1x_2x_3$. Відповідні до цих факторів доданки у рівнянні регресії вилучені і отримано рівняння регресії, яке адекватне результатам експериментів:

$$y^{pez} = 204,73 - 32,56x_1 + 51,31x_3 + 11,10x_1x_2.$$

З цього рівняння слідує, що при збільшенні на одиницю значення фактора x_1 , значення відгуку моделі зменшиться на 32,56 одиниць, а при збільшенні на одиницю значення фактора x_3 , значення відгуку моделі збільшиться на 51,31 одиниці.

6.5. Завдання для самостійної роботи

□ 1. Визначить розмір вибірки відгуку моделі, необхідний для забезпечення точності 3 при довірчій ймовірності 0,95, якщо закон розподілу відгуку моделі нормальний, а дисперсія його дорівнює 126.

□ 2. Визначить розмір вибірки відгуку моделі, необхідний для забезпечення точності 0,05 при довірчій ймовірності 0,95, якщо закон розподілу відгуку моделі невизначений, а середнє квадратичне відхилення його дорівнює 0,05.

□ 3. Результати експерименту наведені у таблиці:

$x=0,1$	12, 6	7,9	10,9	7,9	7,5	10,8
$x=0,3$	4,5	9,1	6,3	13,2	2,5	9,5

Визначить, чи впливає даний фактор на відгук моделі?

□ 4. Оцінити вплив факторів «наявність резервного каналу» та «наявність обмеження на чергу» на ймовірність відмови в обробці вимоги в мережі МО за даними факторного експерименту:

	черга обмежена	черга необмежена
резервний канал наявний	0,23; 0,22; 0,24; 0,15; 0,51; 0,31	0,12; 0,13; 0,16; 0,11; 0,04; 0,24
резервний канал відсутній	0,30; 0,31; 0,35; 0,39; 0,18; 0,42	0,70; 0,54; 0,25; 0,27; 0,28; 0,57

□ 5. Побудуйте багатфакторний план проведення експериментів для двох факторів так, щоб кількість прогонів для кожного фактору була не менше 15.

□ 6. Складіть рівняння регресії відгуку моделі за такими результатами факторного експерименту:

X_1	X_2	X_3	y
0,01	30	1,5	15
0,01	55	0,5	31
0,03	30	0,5	11
0,03	55	1,5	19
0,01	30	0,5	9
0,01	55	1,5	25
0,03	30	1,5	12
0,03	55	0,5	33

Зробіть висновки про вплив факторів на відгук моделі.

□ 7. Побудуйте план дробового факторного експерименту 2^{4-1} , який використовує співвідношення $x_2 = x_3 x_4$. Складіть відповідне до цього плану рівняння регресії.

□ 8. Метою проведення експериментів з мережею МО (рис. 6.3) є оцінка середньої довжини черги L у другій СМО. В ході експериментів змінювали середній час обробки t_1, t_2, t_3 в пристроях обслугований K_1, K_2, K_3 відповідно.

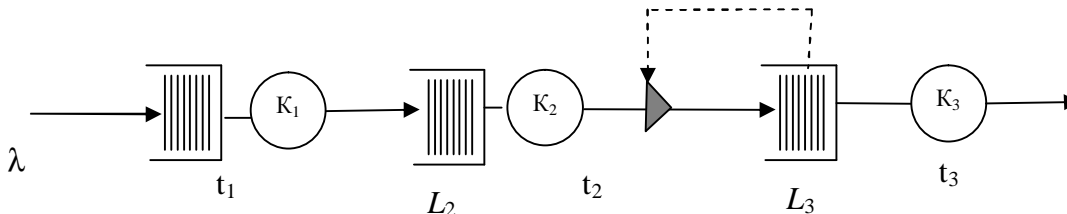


Рис. 6.3. Мережа МО до задачі 6.

Результати експериментів, які проводились, наведені в таблиці:

t_1	t_2	t_3	L
10	5	6	1,8
6	5	6	7,5
10	3	6	2,5
6	3	6	9,2
10	5	4	0,3
6	5	4	0,8
10	3	4	0,4
6	3	4	0,7

Знайдіть рівняння регресії та зробіть висновки про вплив вхідних змінних моделі на вихідну змінну.

□ 9. В результаті проведення дробового факторного експерименту типу 2^{4-1} при кількості прогонів п'ятнадцять отримані наступні середні значення відгуку моделі y_i та значення дисперсій D_i :

x_1	x_2	x_3	x_4	y_j	D_j
-	-	-	+	-18,27	1,92
+	-	-	+	-25,3	2,5
-	+	-	-	8,28	0,69
+	+	-	-	2,08	0,13
-	-	+	-	55,62	6,42
+	-	+	-	48,29	5,03
-	+	+	+	28,04	2,12
+	+	+	+	20,83	1,86

Проведіть статистичну обробку результатів експериментів та зробіть висновки про вплив факторів.

□ 10. Проведіть факторний експеримент з імітаційною моделлю системи передачі даних (див. завдання 11 розділу 4) з метою визначення впливу тривалості обслуговування клієнта касиром банку (автомобільним та касира у приміщенні банку) на значення ймовірності того, що клієнт піде з банку не обслугованим.

□ 11. Проведіть факторний експеримент з імітаційною моделлю системи перевезення вантажів літаками двох типів (див. завдання 22 розділу 4) з метою визначення впливу пріоритету літаків на середній час очікування контейнерів із вантажами.

□ 12. Проведіть факторний експеримент з імітаційною моделлю системи транспортного руху у двох напрямках, керованого світлофорами

(див. завдання 23 розділу 4) з метою визначення впливу тривалості горіння зеленого світла у першому та другому напрямках на середній час очікування автомобілів в обох напрямках руху.

□ 13. Проведіть факторний експеримент з імітаційною моделлю системи, що складається з бульдозера, навантажувачів та самоскидів (див. завдання 24 розділу 4) з метою визначення факторів, що впливають на середнє завантаження самоскидів.

6.6. Контрольні запитання

- 1) Чим визначається структура експерименту?
- 2) Які фактори вважаються кількісними і які якісними?
- 3) Які задачі тактичного планування експериментів?
- 4) Які задачі стратегічного планування експериментів?
- 5) Як побудувати план повного факторного експерименту (ПФЕ) у випадку якісних факторів?
- 6) Яким чином виконується дисперсійний аналіз результатів факторного експерименту?
- 7) Як побудувати план повного факторного експерименту (ПФЕ) у випадку кількісних факторів?
- 8) Як побудувати план дробового факторного експерименту (ДФЕ)?
- 9) Які властивості притаманні матриці планування?
- 10) Як виконуються експерименти за матрицею планування?
- 11) Як скласти регресійне рівняння відгуку моделі по заповненій матриці планування?
- 12) Яким чином виконується регресійний аналіз результатів факторного експерименту?
- 13) Що таке відтворюваність експерименту?
- 14) Чим оцінюється значимість коефіцієнта регресії?
- 15) За яким критерієм оцінюють адекватність регресійного рівняння результатам експерименту?
- 16) Які висновки про функціонування моделі можна зробити з регресійного рівняння відгуку моделі?
- 17) Порівняйте обробку результатів імітаційного та аналітичного моделювання.

Розділ 7

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ІМІТАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

7.1. Пошук оптимальних значень за допомогою серії факторних експериментів

У багатьох випадках ціллю моделювання є відшукування таких величин або рівнів факторів, при яких відгук моделі досягає оптимальних значень. При імітаційному моделюванні відшукування таких оптимальних значень можливо тільки експериментальними методами.

Для пошуку оптимальних значень використовується метод найшвидкішого підйому. В околі заданої точки будується апроксимація поверхні відгуку моделі за допомогою повного чи дробового факторного експерименту. По збудованій лінійній функції визначається напрямок найшвидкішого підйому до точки оптимуму. Потім робиться невеличкий крок у цьому напрямку і процедура повторюється. Поблизу оптимальної точки нахили, визначувані коефіцієнтами рівняння регресії, стають близькими до нуля.

Успіх цього методу сильно залежить від вибору початкової точки і ніколи не можна стверджувати, що знайдений глобальний оптимум, оскільки досліджується тільки локальна область зміни факторів. Через це пошук оптимальних значень факторів потрібно робити при різноманітних початкових точках.

Крок вибирається більшим за розміри області проведення факторного експерименту в початковій точці. Пробні експерименти ставляться в напрямку найшвидкішого підйому доти, поки не буде визначене найліпше значення відгуку моделі в цьому напрямку (рис.7.1). У найліпшій точці знову ставиться факторний експеримент і в напрямку найшвидкішого підйому ставляться пробні експерименти. Пошук продовжується доти, доки найліпше значення відгуку моделі не співпаде з точкою, в якій проводився експеримент. Проілюструємо цей спосіб на наступному прикладі пошуку максимуму.

Приклад

Досліджується вплив п'ятьох факторів. У якості початкової обрана точка $X_{10} = 25$, $X_{20} = 10$, $X_{30} = 1$, $X_{40} = 7$, $X_{50} = 125$. В області варіювання факторів, що визначена наступними значеннями $\Delta_1 = 12$, $\Delta_2 = 5$, $\Delta_3 = 0,5$, $\Delta_4 = 2$, $\Delta_5 = 15$, - проведений дробовий факторний експеримент типу 2^{5-2} і знайдено наступне рівняння регресії:

$$y = 1,8 - 2,3x_1 + 25,6x_2 - 3,2x_3 - 15,9x_4 + 8,2x_5.$$

Фактор, для якого добуток $|b_i \Delta_i|$ є найбільшим, приймається за базовий: $|b_{\text{баз}} \cdot \Delta_{\text{баз}}| = \max_i |b_i \cdot \Delta_i|$. Крок для проведення пробних експериментів визначається формулою:

$$d_i = \frac{\Delta_{\text{баз}}}{b_{\text{баз}}} b_i, \quad |b_{\text{баз}} \cdot \Delta_{\text{баз}}| = \max_i |b_i \cdot \Delta_i|. \quad (7.1)$$

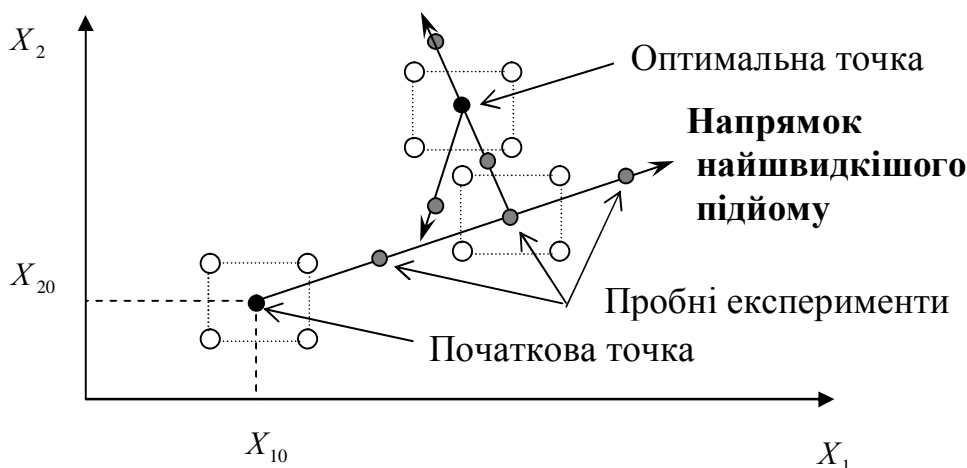


Рис.7.1. Відшукування оптимальних значень факторів за допомогою ряду факторних експериментів

Результати проведення пробних експериментів представляються таблицею 7.1. Результат кожного пробного експерименту утворюється як результат p прогонів імітаційної моделі, який має задану точність і довірчу ймовірність.

Таблиця 7.1.

Проведення експериментів у напрямку нашвидшого підйому

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	y
b_i	-2,3	25,6	-3,2	-15,9	8,2	
$b_i \Delta x_i$	-27,6	128	-1,6	-31,8	123	
δ_i	-4,2	46,8	5,9	29,1	15	
Округлення	-4	47	6	30	15	
Початкова точка	25	10	41	7	125	1,8
Пробний експеримент						
№1	21	57	46	37	140	456,3
№2	17	104	52	67	155	760,9
№3	13	151	58	97	170	907,9
№4	9	198	64	127	185	897,3

У точці $X_1=13$, $X_2=151$, $X_3=58$, $X_4=67$, $X_5=155$ потрібно знову провести факторний експеримент, і в напрямку найшвидкішого підйому провести пробні експерименти. Пошук закінчується, якщо найбільше значення відгуку моделі співпадає з початковою точкою.

Наприкінці зауважимо, що методи оптимізації приводять до успіху тільки за умови, що оптимальне значення відгуку моделі в досліджуваній області існує. Тому вони вимагають від дослідника ретельного попереднього дослідження імітаційної моделі. А успішне розв'язання задачі оптимізації як правило свідчить про неабиякий досвід та інтуїцію дослідника у роботі з моделлю.

7.2. Методи групового урахування аргументів

Успіх методу найшвидкішого підйому залежить від вибору початкових точок і потребує великої кількості експериментів. В результаті кропіткої роботи дослідник одержить числові значення оптимуму, проте функціональні зв'язки між вхідними та вихідними змінними залишаться скритими.

Відомо [Ивахненко,1982], що фізичні моделі, до яких відносяться й імітаційні моделі, дієві для використання в цілях короткострокового прогнозу, тобто 5-10% від часу спостереження. Для цілей довгострокового прогнозу дієвими виявляються нефізичні моделі. Такі моделі можна отримати методами групового врахування аргументів або, як їх іще називають, методами самоорганізації моделей.

Якщо використати результати імітаційного моделювання як результати спостереження при самоорганізації моделей, то 1) з'ясуємо функціональні зв'язки між вхідними та вихідними змінними, 2) отримаємо оптимальні значення при меншій кількості експериментів.

Технологія відшукування оптимальних значень, запропонована в [Стеценко, 2004] складається з таких етапів:

1. Відбір даних про поведінку імітаційної моделі.
2. Вибір опорних функцій.
3. Пошук функціональної залежності вихідних та вхідних змінних методами самоорганізації моделей.
4. Дослідження функції на екстремум класичними методами математичного аналізу.
5. Аналіз результатів та формулювання висновків.

Технологія відшукування оптимальних значень імітаційної моделі випробовувалась на прикладі моделі управління дорожнім рухом на перехрестті. У двох напрямках до перехресття надходять машини із відомою інтенсивністю. При зеленому світлі машини переїжджають перехресття із відомою часовою затримкою. При жовтому світлі – очікують. Управління світлофорами складається з таких інтервалів: зелене світло в першому напрямку, жовте світло в обох напрямках, зелене світло в другому напрямку, жовте світло

в обох напрямках. Жовте світло в обох напрямках горить для того, щоб машини, які в'їхали на перехрестя, залишили його і це відома величина для кожного перехрестя. Задача моделювання полягає в тому, щоб знайти значення горіння зеленого світла в першому та другому напрямках, які забезпечують найменшу кількість машин, що очікують переїзду:

$$z = \max(L_1, L_2), \quad (7.2)$$

де L_1 – середня кількість машин, що очікують переїзду в першому напрямку, L_2 – в другому напрямку.

Вибір цієї задачі обумовлений, по-перше тим, що в цій задачі, очевидно, існують оптимальні значення вхідних змінних, по-друге тим, що при зростаючій кількості автомобілів на дорогах задача управління дорожнім рухом актуальна сама по собі.

Формальна модель системи складається у вигляді мережі Петрі з часовими затримками, багатоканальними переходами, конфліктними переходами та інформаційними зв'язками. Реалізація моделі здійснюється на основі алгоритму імітації мережі Петрі з часовими затримками, що розглядався у розділах 5.4-5.6. Значення часу горіння зеленого світла в першому напрямку – t_1 та значення часу горіння зеленого світла в другому напрямку – t_2 є шуканими величинами.

Відбір даних про поведінку імітаційної моделі. Дані спостережень збирались в області значень вхідних змінних, де вихідна величина має сталий характер. Така область може бути задана або обмеженням значення вихідної величини, або рівняннями, що виходять з фізичного змісту моделі. Так, область допустимих значень змінних t_1, t_2 задається умовою, що кількість машин, яка може проїхати в i -ому напрямку в одиницю часу, має бути більшою за кількість машин, яка надходить в цьому ж напрямку в одиницю часу:

$$\frac{t_i}{t_1 + t_2 + 2 \cdot T_{\text{жовт}}} \cdot \frac{1}{T_{\text{переїзду}}} > \frac{1}{T_{i_надх}}, \quad i = 1, 2 \quad (7.3)$$

Наприклад, для значень параметрів $T_{\text{жовт}} = 5$ секунд, $T_{\text{переїзду}} = 0,5$ секунд, $T_{1\text{надх}} = 1$ секунда, $T_{2\text{надх}} = 4$ секунди область допустимих значень має вигляд, який представлений на рисунку 7.2.

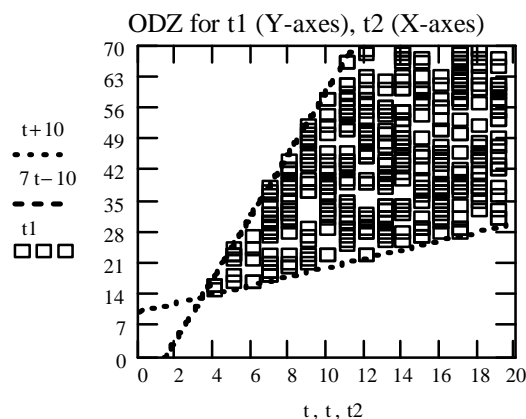


Рисунок 7.2. Область допустимих значень вхідних змінних, знайдена з умов (2)

В області допустимих значень випадковим чином було вибрано 60 точок в межах $t_1\hat{I}(13;600)$, $t_2\hat{I}(6;150)$. Для кожної точки проведений експеримент, в результаті якого отримане середнє значення відгуку моделі z з точністю на рівні 5%.

Вибір опорних функцій. Для відшукування оптимальних значень застосовувався однорядний алгоритм самоорганізації моделей з опорними функціями виду:

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= (t_1 + t_2 + 10)^n, & n &= 1, 2, 3, 4; \\ f(t_1, t_2) &= \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^n, & n &= 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned} \quad (7.4)$$

де t_1 – час горіння зеленого світла в першому напрямку; t_2 – час горіння зеленого світла в другому напрямку; t_1+t_2+10 – тривалість циклу управління.

Однорядний алгоритм самоорганізації моделей розглядається детально в розділі 9.2 даного навчального підручника.

Пошук функціональної залежності вихідних та вхідних змінних методами самоорганізації моделей. Оскільки кількість змінних невелика, то для відшукування моделі оптимальної складності використовувався однорядний алгоритм МГВА [Ивахненко, 1985] з послідовним застосуванням зовнішніх критеріїв. На першому етапі здійснювався відбір найкращих моделей за критерієм регулярності у кількості, яка складає $\frac{2^{N-1} - 2}{N - 1}$, де 2^{N-1} - початкова кількість моделей. На другому етапі здійснювався відбір найкращої моделі за критерієм мінімуму зсуву. Для указаних на рисунку 1 числових значень параметрів моделі отримана така функція:

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= 38,022 - 0,008 \cdot (t_1 + t_2) + 0,0005 \cdot (t_1 + t_2 + 10)^2 - \\ &- 9,157 \cdot \frac{t_1}{t_2} + 0,053 \cdot \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^4 - 0,0044 \cdot \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^5 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Досягнуте значення критерію мінімуму зсуву складає 0,404, а глибина критерію складає 3,717.

Дослідження функції на екстремум класичними методами математичного аналізу. Класичними методами математичного аналізу для функціональної залежності (7.5) знайдені оптимальні значення $t_{1_opt}=60$, $t_{2_opt}=14$, при яких досягається мінімальне значення вихідної змінної $z_{opt}=7,9$. Реалізація значень 60 та 14 в імітаційній моделі дала значення відгуку моделі $z=8,2$. На рисунку 7.3 показана область значень вхідних змінних, при яких значення відгуку моделі відхиляється від оптимального менше ніж на одиницю. З рисунку видно, що ця область простирається в межах

$$t_1\hat{I}(23;105), t_2\hat{I}(5;24) \text{ уздовж лінії } \frac{t_1}{t_2} = \frac{t_{1_opt}}{t_{2_opt}}.$$

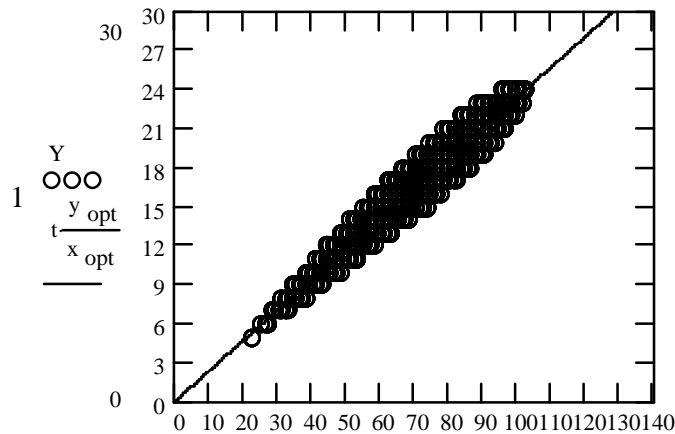


Рисунок 7.3. Область значень $(t_1 ; t_2)$, для яких $|y - y_{opt}| < 1$

Аналіз результатів та формулювання висновків. В результаті дослідження імітаційної моделі перехрестя знайдена функціональна залежність (7.5), з якої слідує, що найбільша кількість машин, що очікують переїзду в першому та другому напрямках, залежить від тривалості циклу управління та від співвідношення часу горіння зеленого світла в першому та другому напрямках. Знайдені оптимальні значення часу горіння зеленого світла в першому та другому напрямках. Значення часу горіння зеленого світла в першому та другому напрямках, які забезпечують близький до оптимального відгук моделі, мають таке саме співвідношення, як і оптимальні значення. Область значень вхідних змінних, при яких значення відгуку моделі відхиляється від оптимального менше ніж на одиницю, включає велику кількість варіантів. Це забезпечує можливість координації сусідніх перехресть при управлінні дорожнім рухом.

Застосування методів самоорганізації для імітаційних моделей дозволяє отримати детальну картину поведінки системи в області допустимих значень, здійснити дослідження функціональних зв'язків вхідних та вихідних змінних та знайти оптимальні значення вхідних змінних.

7.3. Еволюційні методи пошуку оптимальних значень

На основі системи імітаційного моделювання CrossRoad розроблена інформаційна технологія визначення оптимальних параметрів управління транспортним рухом через світлофорні об'єкти міста [Стеценко, Батора, 2007]. Оптимізація параметрів управління світлофорних об'єктів на ділянці транспортного руху здійснюється методами евристичного пошуку з застосуванням еволюційної стратегії [Кельтон]. Елементом популяції являється набір параметрів управління по два параметри (червоне та зелене світло) для кожного світлофорного об'єкта, що включається в розглядувану систему транспортного руху:

$$A = (r_1, g_1, r_2, g_2, \dots, r_n, g_n),$$

де r_j, g_j – тривалості першої та третьої фази управління відповідно на j -ому перехресті, n – кількість перехресть.

Початкова популяція (генерування 0) формується з випадкових значень, розкиданих в області допустимих значень параметрів. Кожний елемент популяції запускається у «життя», тобто в імітаційну модель транспортного руху. Результатом такої життєдіяльності елемента популяції є відгук моделі (7.2). Набори параметрів, які виявились «неспроможними», тобто дістали в процесі імітації великі значення відгуку моделі, «гинуть» або знищуються. Таким чином за значенням відгуку моделі здійснюється відбір елементів популяції. Елементи популяції, що пройшли відбір, допускаються до схрещування. Схрещування здійснюється для випадково обраних пар елементів популяції склеюванням частин наборів параметрів. При цьому доцільно не розривати параметри, що відносяться до одного перехрестя. Нехай для схрещування обрані елементи популяції A_j та A_k . В результаті роботи оператора кроссовера випадковим чином обираються перехрестя, параметри яких в елементі-нащадку будуть прийняті такими, як в елементі A_j , інші перехрестя елемента-нащадка приймають значення параметрів такі, як в елементі A_k :

$$\left. \begin{aligned} A^{(j)} &= (r_1^{(j)} \quad g_1^{(j)} \quad r_2^{(j)} \quad g_2^{(j)} \quad \dots \quad r_{n-1}^{(j)} \quad g_{n-1}^{(j)} \quad r_n^{(j)} \quad g_n^{(j)}) \\ A^{(k)} &= (r_1^{(k)} \quad g_1^{(k)} \quad r_2^{(k)} \quad g_2^{(k)} \quad \dots \quad r_{n-1}^{(k)} \quad g_{n-1}^{(k)} \quad r_n^{(k)} \quad g_n^{(k)}) \\ A^{(m)} &= (r_1^{(j)} \quad g_1^{(j)} \quad r_2^{(k)} \quad g_2^{(k)} \quad \dots \quad r_{n-1}^{(k)} \quad g_{n-1}^{(k)} \quad r_n^{(j)} \quad g_n^{(j)}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Мутація здійснюється додаванням випадкового відхилення до результату, який отриманий в результаті схрещування, додаванням з рівною ймовірністю -1, 0 або 1:

$$A = (r_1 + x_1, \quad g_1 + x_2, \quad r_2 + x_3, \quad g_2 + x_4, \quad \dots \quad r_n + x_{2n-1}, \quad g_n + x_{2n}),$$

де x_i – випадкова величина, що приймає значення -1, 0, 1 з рівною ймовірністю.

Кожна наступна популяція (генерування j) формується з елементів, що пройшли відбір на попередньому генеруванні (генерування $j-1$), та з елементів, що створені в результаті схрещування та мутації. В правилі зупинення еволюційного пошуку користувач задає кількість генерувань.

Такі параметри моделі, як кількість рядів руху, середній час на подолання відстані від одного перехрестя до іншого, тривалість горіння жовтого світла являються відомими величинами. Інтенсивність руху, ймовірність вибору маршруту являються величинами, що залежать від пори року, дня тижня, часу доби, погодних умов та інших факторів. Тому ці параметри потрібно визначати з використанням автоматичних пристроїв.

Модель групи перехресть центра міста Черкаси, введена засобами системи CrossRoads, та результати моделювання представлені на рисунку 7.4. Для кожного перехрестя введені наступні параметри:

а) параметри світлофорного об'єкти:

- тривалість горіння червоного світла;
- тривалість горіння жовтого світла;
- тривалість горіння зеленого світла;
- тривалість горіння жовтого світла;

б) параметри руху в i -ому напрямку ($i = 1,2,3,4$):

- ймовірність руху автомобіля наліво;
- ймовірність руху автомобіля направо;
- ймовірність руху автомобіля прямо;
- середнє значення інтервалу часу, з яким автомобілі надходять до перехрестя;
- середнє значення інтервалу часу, з яким автомобілі залишають перехрестя при зеленому світлі світлофора.

Таким чином, для кожного перехрестя повинні бути визначені 9 параметрів транспортного руху. З результатів моделювання, представлених на рисунку 7.4 видно, що на перехрестях уздовж бульвару Шевченка утворюються черги автомобілів. Для таких перехресть у системі CrossRoads передбачений пошук оптимальних значень параметрів управління за допомогою серії експериментів. Результати експериментування з перехрестям „Шевченка - Смілянська ” наведені на рисунку 7.5.

Результати використання оптимізації для системи перехресть центральної частини міста Черкаси представлені на рисунку 7.5. Такі параметри моделі, як кількість рядів руху, середній час на подолання відстані від одного перехрестя до іншого, тривалість горіння жовтого світла являються відомими величинами. Інтенсивність руху, ймовірність вибору маршруту являються величинами, що залежать від пори року, дня тижня, часу доби, погодних умов та інших факторів. Тому ці параметри потрібно визначати з використанням автоматичних пристроїв.

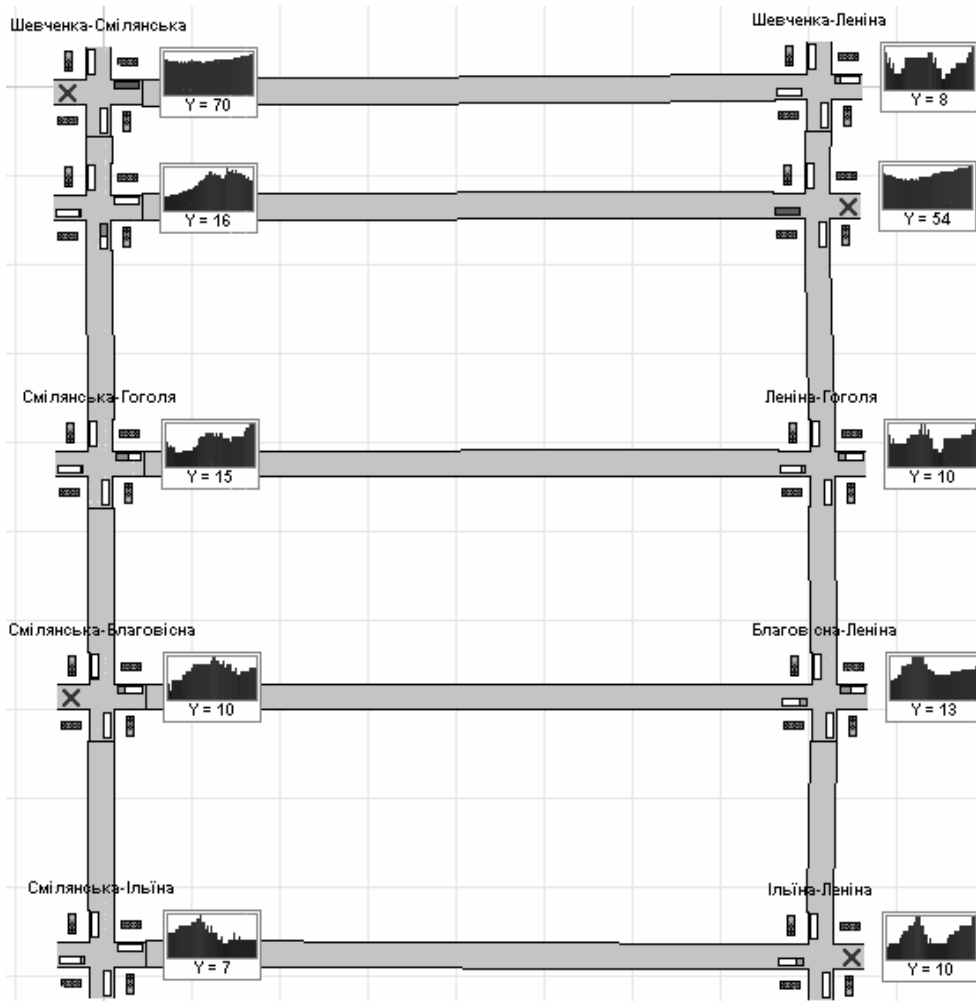


Рисунок 7.4. Результати моделювання системи перехресть

genetic algorithm

Параметри

Параметр	№	Гранична величина	Початкова величина	Величина функції	Величина об'єктивної функції	Час обчислення	Y
Параметр1	1	4 25 0 10	4 60 0 5	4 20 0 1	- 30 0 0	4 14 0 10	79
Параметр2	2	4 25 0 10	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 17 0 15	78
Параметр3	3	4 25 0 14	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 16 0 15	78
Параметр4	4	4 25 0 16	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 16 0 0	78
Параметр5	5	4 25 0 15	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 17 0 0	78
Параметр6	6	4 25 0 16	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 17 0 15	78
Параметр7	7	4 25 0 16	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 14 0 15	78
Параметр8	8	4 25 0 16	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 16 0 15	78
Параметр9	9	4 25 0 14	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 16 0 15	78
Параметр10	10	4 25 0 14	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 16 0 10	78
Параметр11	11	4 25 0 10	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 17 0 15	78
Параметр12	12	4 25 0 10	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 16 0 0	78
Параметр13	13	4 25 0 16	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 14 0 15	78
Параметр14	14	4 25 0 14	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 16 0 22	78
Параметр15	15	4 25 0 10	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 14 0 10	78
Параметр16	16	4 25 0 16	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 15 0 15	78
Параметр17	17	4 25 0 16	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 16 0 15	78
Параметр18	18	4 25 0 10	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 16 0 15	78
Параметр19	19	4 25 0 15	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 16 0 10	78
Параметр20	20	4 25 0 16	4 60 0 5	4 60 0 7	- 30 0 0	4 14 0 15	78

Час: 12.2.2006.4.25

Інструменти:

Рисунок 7.5. Результати визначення оптимальних параметрів управління системи перехресть

7.4. Завдання для самостійної роботи

□1. Розробити програму, яка відшукує оптимальне значення функції багатьох змінних еволюційним методом. Дослідити вплив кількості елементів в популяції, кількість генерованих поколінь, способу формування нової популяції на точність визначення оптимального значення.

□2. Для умов задачі 9 розділу 5.8 визначте оптимальні значення параметрів моделі, що забезпечують найбільшу ефективність мережі масового обслуговування. Будемо вважати, що мережа має найбільшу ефективність, якщо вона забезпечує найбільшу кількість обслугованих вимог при найменшій кількості не обслугованих вимог. Використайте градієнтний метод пошук оптимального значення.

□3. Для умов задачі 12 розділу 5.8 визначте оптимальні значення параметрів моделі обслуговування клієнтів у банку, що забезпечують найбільшу ефективність його роботи. Будемо вважати, що банк має найбільшу ефективність, якщо він забезпечує найбільшу кількість обслугованих клієнтів при найменшій кількості не обслугованих клієнтів. Використайте градієнтний метод пошуку оптимального значення.

□4. Для умов задачі 2 розділу 4.5 визначте оптимальні значення параметрів моделі, що забезпечують найбільшу ефективність виробництва. Будемо вважати, що виробництво має найбільшу ефективність, якщо вона забезпечує найбільшу кількість обслугованих вимог при найменшій кількості не обслугованих вимог. Використайте градієнтний метод пошук оптимального значення.

□5. Для умов самостійного завдання 24 розділу 5.8 визначте оптимальні значення параметрів моделі транспортного руху у двох напрямках, що забезпечують найменше сумарне середнє очікування автомобілів. Параметрами моделі вважати тривалості горіння зеленого світла у першому та другому напрямках. Використайте еволюційний метод пошуку оптимального значення.

7.5. Контрольні запитання

1) Опишіть процес побудови ряду повних чи дробових експериментів з метою оптимізації відгуку моделі.

2) Як визначається крок просування в напрямку найшвидшого підйому?

3) За якої умови процес відшукування оптимального значення відгуку моделі закінчується як успішний?

4) Наведіть приклад, коли задача відшукування оптимального значення відгуку моделі не може бути розв'язана.

5) У чому полягає ідея відшукування оптимального значення методами групового урахування аргументів?

6) Які дії виконують для ідея відшукування оптимального значення методами групового урахування аргументів?

7) У чому полягає ідея еволюційного методу пошуку оптимальних значень?

8) Як формується наступне покоління еволюційного методу пошуку оптимальних значень?

9) Від яких параметрів залежить якість пошуку оптимального значення еволюційним методом?

Розділ 8

ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ

Історія розвитку засобів імітаційного моделювання охоплює час з 50-их років ХХ століття до теперішнього часу. Відомі фахівці в галузі імітаційного моделювання Р.Ненсі та Ф.Ківіат у своїх працях визначили кілька етапів розвитку засобів імітаційного моделювання. Перший етап охоплює 1955-1960 роки. В цей час імітаційні моделі розроблялися на основі універсальних мов програмування FORTRAN і ALGOL. Вражаюче, але деякі бібліотеки алгоритмів моделювання, написані мовою FORTRAN, є актуальними і сьогодні в науковому світі. Мова ALGOL відома тим, що в ній вперше було введено поняття процедури. Поява цієї мови програмування внесла корінні зміни в концепцію програмування і відкрила шлях до об'єктного програмування.

Другий етап охоплює роки 1961-1965, коли з'явилися перші мови моделювання GPSS, SIMSCRIPT, SIMULA CSL, SQL. Саме в ці роки розроблена концепція дискретних мов моделювання, за якою мови ділилися на орієнтовані на події, на певні види діяльності та на процеси. Стали уніфіковані об'єкти, необхідні для моделювання, такі як черги та генератори випадкових величин.

На третьому етапі розвитку засобів імітаційного моделювання, що тривав з 1966 по 1970 роки, з'явилось друге покоління мов моделювання – GPSS V, SIMSCRIPT II.5, SIMULA 67. Ці мови були орієнтовані на комп'ютери третього покоління. У мові SIMULA 67, яка є універсальною мовою, вперше введено поняття об'єкта та дії, що виконується об'єктом, а також поняття класів, як множини споріднених об'єктів. Таким чином, мова SIMULA 67 випередила свій час більш ніж на 20 років.

Четвертий етап, що продовжувався з 1971 по 1978 роки, став етапом вдосконалення мов моделювання. В ці роки з'явилися непевно-дискретні мови моделювання, наприклад, ASCL.

П'ятий етап розвитку засобів імітаційного моделювання тривав з 1979 по 1984 роки і став етапом розвитку технологій моделювання. В цей час створюються інтегровані засоби імітаційного моделювання. Змінилась концепція моделювання, відтепер це єдиний процес побудови та дослідження моделей, що має програмну підтримку. Особлива увага приділяється аналізу властивостей моделі – чутливості, надійності, достовірності результатів моделювання.

У наступні роки з'явилися персональні комп'ютери, тому шостий етап (1985-1994 роки) – це етап перенесення програмного забезпечення імітаційного моделювання на персональні комп'ютери, а також розробки графічного інтерфейсу для візуалізації та анімації процесів моделювання.

Сьомий етап охоплює роки з 1995 по 1998 роки. В цей час розроблюються засоби технологічної підтримки процесів розподіленого імітаційного моделювання на мультипроцесорних обчислювальних системах і в комп'ютерних мережах.

Інший погляд на етапи розвитку засобів моделювання представив Б. Шмідт (B. Schmidt). Він визначає п'ять поколінь програмних засобів моделювання:

I етап (50-ті роки XX століття) – програмування моделей мовами високого рівня без спеціальної підтримки завдань моделювання (мови FORTRAN і ALGOL);

II етап (60-ті роки XX століття) – спеціалізована підтримка моделювання у вигляді виразів мови, генераторів випадкових чисел, засобів подання результатів (мови GPSS, SIMSCRIPT, SIMULA);

III етап (70-ті роки XX століття) – розвиток можливостей проведення неперервно-дискретного моделювання (мова ASCL);

IV етап (80-ті роки XX століття) – орієнтація на конкретні галузі, розвиток можливостей анімації (мови SIMFACTORY, XCELL);

V етап (90-роки XX століття) – розробка графічного інтерфейсу, інтегрованих середовищ, призначених для створення і редагування моделей, планування і проведення експериментів, керування моделюванням та аналізу результатів моделювання (мови SIMPLEX II, SIMPLE++).

В Україні відомими розробками в галузі технологій імітаційного моделювання є наступні розробки [Томашевський, 2005].

Мова моделювання СЛЭНГ, автором якої є Л.А.Калениченко, створювалась в Інституті Кібернетики Академії наук України протягом 1966-1968 років. Мова СЛЭНГ використовувалась під час розробки компонентів обчислювальних машин і систем, призначених для виконання завдань планування виробництва, для оцінювання показників надійності складних систем.

Система АЛСИМ-БЭСМ, що була створена у 1973 році в Інституті кібернетики під керівництвом д.т.н. В.В.Литвинова. Система призначалась для моделювання обчислювальних систем і мереж і використовувалась під час виконання завдань радіолокації, протиповітряної оборони, аналізу і розподілу ресурсів.

Система НЕДИС, автором якої є В.В.Гусев, створювалась в Інституті кібернетики у 1973-1975 роки. Використовувалась система для проектування обчислювальних машин і систем, передачі даних, моделювання надзвичайних ситуацій у вугільних шахтах і процесів на залізничному транспорті, проектуванні засобів і систем космічної техніки, оптимізації технологічних процесів у суднобудуванні.

Комплекс АЛСИМ-2, що створювався під керівництвом В.В.Литвинова у 1979-1980 роках. Комплекс АЛСИМ-2 широко використовувався для дослідження процесів функціонування військово-морських баз Тихоокеанського узбережжя та під час розробки проекту їх автоматизації.

Система імітаційного моделювання ICIM, яка розроблена у 1994 році в „Національному технічному університеті „КПІ”. Основне призначення системи ICIM, що має генератор імітаційних GPSS програм, – моделювання дискретних систем, які можна представити засобами мереж масового обслуговування.

Системи НЕДИС-90, що створювалась протягом 1991-1993 років. Система призначалась для проектування в реальному часі проблемно-орієнтованих мов. На основі НЕДИС розроблені проблемно-орієнтовані пакети моделювання СИМПО, САУККС, ПАРК, МЕРЕЖА, КОМПЛЕКС.

Сучасний етап розвитку програмного забезпечення імітаційного моделювання характеризується інтенсивним розвитком методів паралельного моделювання, розвитком веб-технологій, побудовою систем моделювання з використанням методів штучного інтелекту. Методи паралельного програмування використовуються для підвищення швидкодії імітаційних програм та для реалізації імітаційних моделей великих і складних систем, що вимагають великих обсягів пам'яті.

Якщо на початку розвитку засобів імітаційного моделювання існувала думка, що створення мов імітаційного моделювання дозволить неспеціалістам у галузі імітаційного моделювання створювати моделі систем і використовувати їх для розв'язання задач, то наразі стало зрозумілим, що моделювання процесів можуть виконувати тільки спеціалісти в галузі моделювання. Тому на теперішній момент більш розвиненим є напрямок створення проблемно-орієнтованих систем моделювання, що охоплює різноманіття систем певної галузі. Так, існують системи моделювання телекомунікаційних систем, виробничих систем...

Більшість колективів, що займаються моделюванням систем, розробляють пакети програм, пристосовані для потреб конкретного колективу і для задач, що розв'язуються цим колективом. На кафедрі комп'ютерних технологій Черкаського державного технологічного університету розроблені система імітаційного моделювання PTRSIM, що є універсальною системою моделювання систем засобами мереж Петрі, і система моделювання транспортного руху через перехрестя міста CrossRoads, що є проблемно-орієнтованою системою.

8.1. Мова імітаційного моделювання GPSS

GPSS (General Purpose Simulation System) – система моделювання складних об'єктів загального призначення, що розроблена Джеффри Гордоном приблизно у 1960 році. Спочатку розроблювалась і підтримувалась компанією IBM. Наразі існують версії різних розробників, сама сучасна з яких - GPSS World – версія GPSS для персональних EOM та ОС Windows, що розроблена компанією Minuteman Software.

Версія GPSS World для ОС Windows має розширені можливості, такі як середовище користувача з інтегрованими функціями роботи в Інтернет.

GPSS World являється об'єктно-орієнтованою мовою. Можливості візуального представлення інформації мови GPSS World дозволяють спостерігати та фіксувати внутрішні механізми функціонування моделей. Інтерактивність мови GPSS World дозволяє одночасно досліджувати та управляти процесами моделювання. Вбудовані засоби аналізу даних дозволяють легко розрахувати довірчі інтервали і провести дисперсійний аналіз. Також є можливість автоматично створювати та виконувати складні оптимізуючі експерименти.

GPSS World оснащений рядом анімаційних можливостей від абстрактної візуалізації до високо реалістичних динамічних зображень. Вбудована в GPSS World функція комплексної стилізованої анімації забезпечена великою кількістю вікон, що динамічно відображають об'єкти GPSS у процесі моделювання по мірі змінювання їх стану.

Зовнішній інтерфейс, який має GPSS World, може підтримувати анімаційні пакети, що управляють трасировочними даними. Таким способом можуть бути розроблені фотореалістичні анімації. Для використання цього інтерфейсу необхідно створити вихідний потік, вміст і форматування даних якого задовольняють правилам використовуваного анімаційного пакета.

GPSS World має набір PLUS-процедур динамічного виклику, що дозволяють викликати функції із зовнішніх виконуваних файлів. Це забезпечує оперативний зв'язок з анімаційними пакетами інших розробників. PLUS – це невелика, але ефективна процедурна мова програмування, створена з 12 типів операторів. Її ефективність забезпечується великою бібліотекою процедур, яка містить математичні функції та функції-маніпуляції зі строками, а також великий набір імовірнісних розподілів.

Модель у GPSS World визначається як послідовність операторів. Це оператори GPSS, оператори PLUS-процедур або оператори PLUS-експериментів. За виключенням списків даних функції, всі оператори GPSS повинні складатися з одного текстового рядка довжиною до 250 символів. Довільний оператор GPSS може входити в модель і зберігатися у файлі моделі або може бути переданий процесу моделювання в інтерактивному режимі.

Мова GPSS являється мовою загального призначення для моделювання мереж масового обслуговування, що набула широкого розповсюдження завдяки книзі [Шрайбер], в якій розглядається велика кількість прикладів моделювання систем різного призначення мовою GPSS.

Вимоги, що надходять на обслуговування у мережу масового обслуговування, в мові GPSS називаються транзактами. Так, в моделі виробничої лінії транзакти – це деталі, що надійшли на обробку. Процес обслуго-

вування, що проходить транзакт, описується за допомогою операторів мови GPSS з моменту надходження транзакту в мережу до моменту його зникнення з мережі. Таким чином, оператори мови GPSS описують логіку проходження транзакту пристрої та черги мережі масового обслуговування. Формалізація процесів функціонування систем засобами мереж масового обслуговування розглядалась у розділі 3.1, 3.2 даного навчального підручника.

Основні правила мови GPSS

Для описану імітаційної моделі на мові GPSS корисно представити її у вигляді схеми, на якій з'єднані елементи СМО – пристрої, накопичувачі, вузли та джерела. Опис моделі на мові GPSS є сукупність операторів (блоків), що характеризують процеси обробки вимог – виникнення транзактів, затримки їх в пристроях, очікування транзактів в черзі, виведення із СМО. В мові є також оператори, що змінюють параметри вимог.

Кожний транзакт, присутній в моделі, може мати до 12 параметрів. Існують оператори, за допомогою яких можна змінювати значення довільних параметрів транзактів, та оператори, виконання яких залежить від значення того чи іншого параметра обслуговуваного транзакта.

Транзакт переміщується від одного пристрою до іншого у чіткій відповідності до послідовності операторів в GPSS-програмі. Для передачі транзакта до іншого, крім наступного, оператора існують спеціальні оператори передачі управління. Моделювання здійснюється мовою GPSS на основі подійного підходу з просуванням часу до найближчої події. Правильна послідовність подій у часі забезпечується інтерпретатором GPSSPC.

Структура операторів GPSS

В записі оператора виділяють три частини: мітка, назва, поле змінних.

Приклад оператора:

AAA ADVANCE 20, 5 затримка транзакта на час 20±5
<мітка> <назва> <поле змінних> <коментарі>

В полі змінних виділяють підполя, що розділяються комами. Підполя слугують для вказування стандартних числових атрибутів (СЧА), символів, що позначають мітки, ідентифікаторів, вказівників різновидів операторів и т.і. Підполя можуть бути пустими. Після останнього непустиого поля через пропуск може бути розміщений коментар.

Стандартні числові атрибути слугують для скорочення визначення різних величин, що описують модель.

Приклади СЧА: V2 – змінна V2; Q4 – довжина черги з номером 4; X5 – величина з номером 5, що зберігається; FN7 – функція з номером 7; P4 – значення параметра з номером 4; *6 – те, що міститься, у параметрі з номером 6; S*3 (або FN*3) – пам'ять (або функція), визначена в параметрі з номером 3.

Основні оператори мови GPSS

Основні оператори мови GPSS приведені у вигляді прикладів з конкретними значеннями підполей у полі змінних.

GENERATE 15,6,120,50,1 – генерація транзактів, інтервали часу між надходженнями транзактів розподілені рівномірно в діапазоні (15-6, 15+6), перший транзакт з'явиться із затримкою в 120 одиниць модельного часу, всього буде створено 50 транзактів, пріоритет транзактів рівний одиниці.

GENERATE 15,6,120,,1 – те ж, але кількість генерованих транзактів необмежена.

GENERATE 6, FN\$FFF,120,50,1 – те ж, але інтервал часу між появами транзактів є ціла частина добутку числа 6 та значення функції FFF.

FTIM FUNCTION RN1,C4

0,0/0.1,0.8/0.5,1.6/1.0,1.9

- опис функції FTIM, її аргументом являється випадкова величина (на це указує значення RN1), рівномірно розподілена в діапазоні (0,1), функція являється неперервною числовою (вказівник C), заданою чотирма точками: (0;0), (0.1; 0.8), (0.5, 1.6), (1.0; 1.9).

FTIM FUNCTION *2,D4

0,12/1,9/2,8/3,6

- те ж, але аргументом являється значення другого параметру транзакта, для якого розраховується значення дискретної величини (D) числової функції FTIM, заданої чотирма вузловими точками. Це поточне значення округляється до найближчого значення аргументу у вузловій точці.

QUEUE QAA – оператор реєстрації черги, довжина черги QAA збільшується на одиницю.

QUEUE QAA,2 – те ж, але довжина черги QAA збільшується на 2 одиниці.

DEPART QAA – оператор реєстрації черги, довжина черги QAA зменшується на одиницю.

DEPART QAA,4 – те ж, але довжина черги QAA зменшується на 4 одиниці.

SEIZE DEV – зайняття пристрою DEV транзактом; якщо пристрій зайнятий, то транзакт затримується в черзі до цього пристрою.

ADVANCE A,B – затримка транзакта на час, визначений вмістом полів A та B, зміст величин, які записані в цих підполях, такий же, як і в блоці GENERATE.

RELEASE DEV – звільнення пристрою DEV транзактом.

ENTER MEM,12 – зайняття транзактом 12 одиниць ємності в накопичувачі MEM.

LEAVE MEM,*2 – звільнення k одиниць пам'яті в накопичувачі MEM, де k - значення 2-го параметра транзакта.

WORK STORAGE 40 – опис блоку пристроїв WORK ємністю 40 одиниць.

TERMINATE 1 – видалення транзакта з системи, при цьому значення підсумкового лічильника зменшується на одиницю, а моделювання закінчується, якщо значення лічильника стане рівним або менше нуля.

PRIORITY 3 – транзакту присвоюється пріоритет 3.

SPLIT 3,LLL,6 – копіювання транзактів, в даному випадку створюються три копії вихідного транзакта, вихідний транзакт направляється до наступного по порядку блоку, а створені копії - до блоку з міткою LLL, номери копій транзактів записуються у параметр 6.

ASSEMBLE – знищує транзакти копії та залишає тільки транзакт оригінал.

ASSIGN 2,APP – змінювання параметрів транзактів, в даному випадку другий параметр транзакта отримує значення APP.

ASSIGN 3+,V4 – змінювання значення третього параметра транзакту - до нього додається значення V4.

TRANSFER ,MIT – безумовна передача управління оператору з міткою (номером) MIT.

TRANSFER BOTH,LAB1,ONE – перехід до оператора з міткою LAB1, якщо він неможливий, то до оператора з міткою ONE, якщо і він неможливий, то транзакт затримується до наступного моменту модельного часу, в який повторюються указані спроби переходу.

TRANSFER .4,AAA,END – транзакт з ймовірністю 0,4 переходить до оператору з міткою END та з ймовірністю 0,6 до оператору з міткою AAA.

TRANSFER PICK,FIN7,FIN21 – перехід із рівною ймовірністю до операторів з номерами FIN7, FIN 7+1, FIN 7+2, . . . , FIN 21.

TRANSFER FN,AAA,2 – перехід до оператору, мітка якого рівна сумі значень функції AAA і числа 2.

TRANSFER P,4,41 – перехід до оператору, мітка якого рівна сумі значень параметра з номером 4 транзакта і числа 41.

TRANSFER SBR,PRC,7 – перехід до оператора PRC із записом в параметр з номером 7 транзакта мітки даного оператора.

LOOP 6,MIT – організація циклу – кожний раз при вході в оператор LOOP перевіряється значення шостого параметру: якщо значення не дорівнює нулю, то транзакт переходить до блока з міткою MIT, а значення параметра зменшується на одиницю. Якщо значення шостого параметру при вході в блок LOOP дорівнює нулю, то транзакт слідує в наступний за блоком LOOP перехід.

TEST E V7,K256,END – перехід за умовою (умовна передача управління): в позиціях 13-18 записується знак відношення, в перших двох підполях поля змінних записуються величини, що порівнюються. Якщо умо-

ва виконується, то перехід не виконується, інакше – перехід здійснюється до оператора з міткою LAB. Символи відношень: G - більше, L - менше, E - дорівнює, NE – не дорівнює, LE - менше або дорівнює, GE - більше або дорівнює. В даному прикладі перехід не виконується, якщо $V7 = 256$, інакше перехід виконується до оператора з номером END.

START 100,,25 – занесення значення 100 в ітоговий лічильник, вивід накоплених статистичних даних виконується з інтервалом змінювання вмісту ітогового лічильника в 25 одиниць.

TABULATE MAT7 – у відповідний інтервал гістограми з іменем MAT7 добавляється одиниця.

MAT7 TABLE P3,8,1,5 – опис таблиці (гістограми) MAT7, призначеної для табулювання величини, значення якої знаходяться у третьому параметрі транзакта, який входить до оператора TABULATE MAT7, верхня границя лівого інтервалу гістограми рівна 8, ширина кожного наступного інтервалу рівна 1, всього інтервалів 5.

5 VARIABLE X2 - K25 – розрахунковий оператор, в даному випадку з величини за номером 2, що зберігається, віднімається число 25 і результат присвоюється змінній за номером 5.

SAVEVALUE 5+,*3 – величина за номером 5, що зберігається, збільшується на значення третього параметра транзакта.

Більшість інформації, що обробляється інтерпретатором мови GPSS, недоступна користувачу, проте до деякої інформації доступ забезпечений за допомогою стандартних числових атрибутів. Стандартні числові атрибути поділяють на системні та атрибути транзактів. До системних атрибутів відносяться такі величини як поточний модельний час, поточна довжина черги і т.і. До атрибутів транзактів відносяться, наприклад, величини пріоритету транзакту, загальний час його обробки та інші. Звернення до атрибуту має вигляд «ім'я атрибуту_номер атрибуту» або «ім'я атрибуту_\$_ім'я пристрою», де під ім'ям пристрою мається на увазі ім'я черги або пристрою, або блоку пристроїв. Наведемо найважливіші стандартні числові атрибути. Позначення «*» означає номер або ім'я пристрою, до якого відноситься значення атрибуту.

C1 – поточне значення відносного модельного часу,

M1 – час перебування в моделі транзакта, що в даний момент обробляється інтерпретатором GPSS,

TG1 – поточне значення лічильника завершення,

PR – пріоритет транзакта, що в даний момент обробляється інтерпретатором GPSS,

F* – ідентифікатор зайнятості пристрою в даний момент модельного часу,

FC* – кількість зайнять пристрою,

FR* – коефіцієнт завантаження пристрою, виражений в частках тисячі,

FT* – ціла частина значення середнього час у затримки транзакту у пристрої,

R* – місткість незаповненої частини блоку пристроїв,

S* – місткість заповненої частини блоку пристроїв,

SC* – лічильник кількості входів до блоку пристроїв,

SM* – максимальна спостережувана зайнята місткість блоку пристроїв,

SR* – коефіцієнт завантаження блоку пристроїв, виражений в частках тисячі,

ST* – ціла частина середнього часу перебування транзакта в блоці пристроїв,

Q* – поточне значення довжини черги,

QC* – кількість входів до черги,

QM* – максимальне спостережуване значення довжини черги,

QT* – ціла частина середнього перебування в черзі транзактів.

Більш детальну інформацію щодо моделювання систем мовою GPSS можна отримати в [Томашевський, 2001].

8.2. Система імітаційного моделювання PTRSIM

Система імітаційного моделювання PTRSIM створена на кафедрі комп'ютерних технологій Черкаського державного технологічного університету у 2006 році [Стеценко, Бойко 2006]. Основною ідеєю системи є автоматизація імітаційного моделювання систем, представлених мережами Петрі. Мережі Петрі являються універсальним засобом формалізації дискретно-подійних процесів. Насамперед важливо, що мережами Петрі можуть бути представлені процеси управління, які іншими системами імітації (GPSS, Arena) не представляються.

Технологія імітаційного моделювання PTRSIM складається з таких етапів:

- 1) побудова формалізованої моделі засобами мереж Петрі;
- 2) введення моделі в імітаційну систему PTRSIM;
- 3) перевірка моделі на відповідність задуму моделювання;
- 4) виконання імітації при заданих значеннях параметрів;
- 5) виведення результатів імітації;
- 6) формулювання висновків і пропозицій.

Етапи 2-5 виконуються у тісній взаємодії розробника моделі з імітаційною системою PTRSIM

Побудова формалізованої моделі системи засобами мереж Петрі. Для того, щоб представити систему у вигляді мережі Петрі, потрібно: виділити події, що виникають в системі; з'ясувати умови, при яких виникає кожна з подій; з'ясувати зміни, які відбуваються в системі при здійсненні кожної події; представити графічно зв'язки між подіями та умовами. В графічному

представленні мережі Петрі подіям відповідають переходи, умовам – позиції. Корисно позначати позиції та переходи не літерами, а іменами «пристрій», «датчик», «надходження даних», «виконання завдання» і ті., які підказують зв'язок того чи іншого фрагменту мережі Петрі з реальною системою.

В імітаційній системі PTRSIM реалізуються мережі Петрі:

- 1) з часовими затримками, які можуть бути задані детермінованим або випадковим числом;
- 2) з інформаційними зв'язками;
- 3) з розгалуженнями маршрутів;
- 4) зі зв'язками, кількість яких визначена цілим числом;
- 5) зі зв'язками, кількість яких залежить від поточного маркірування мережі Петрі.

Відмітимо декілька моментів, важливих для коректного представлення моделей в системі PTRSIM.

1. Запуск переходів здійснюється у два етапи. Спочатку за умови виконання умови запуску переходу маркери із усіх вхідних позицій переходу віднімаються і запам'ятовується момент виходу маркерів як поточний час моделювання плюс час затримки переходу. У момент виходу маркерів здійснюється додавання маркерів в усі вихідні позиції переходу. Фрагмент мережі Петрі, що представляє процес обслуговування об'єктів двома пристроями, має вигляд як на рисунку 8.1. Перехід «обслуговування» захоплює маркер з черги об'єктів за наявності маркеру в позиції «вільні пристрої». Максимальна кількість маркерів, що обслуговуються, дорівнює двом. Зауважимо, що такий підхід дозволяє моделювати обслуговування об'єктів паралельно багатьма пристроями лише одним переходом мережі Петрі.

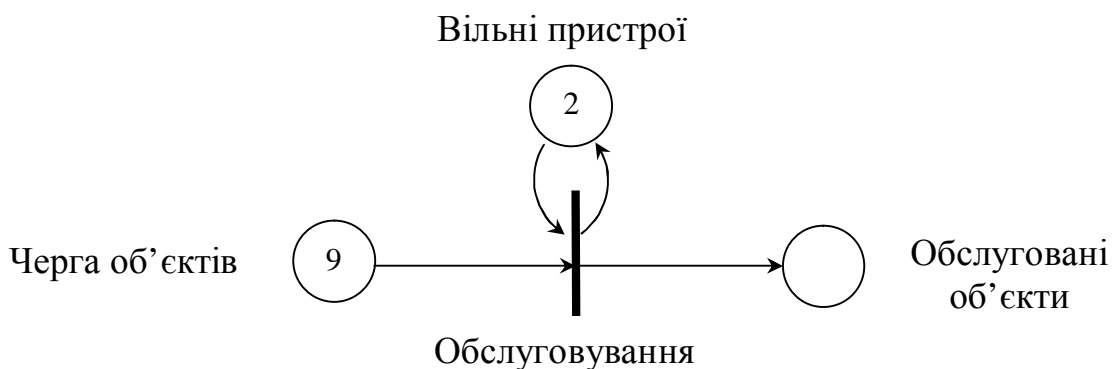


Рисунок 8.1 Фрагмент мережі Петрі, що моделює обслуговування об'єктів двома пристроями

2. Наявність інформаційних зв'язків дозволяє моделювати події, які виконуються за умови наявності дозволу. Наприклад, переїзд перехрестя автомобілі здійснюють при наявності зеленого світла (рисунок 8.2). Інформаційний зв'язок означає, що наявність маркерів у вхідній позиції є обов'язковою для виконання умови запуску переходу, але при запуску переходу маркери з такої вхідної позиції не віднімаються.

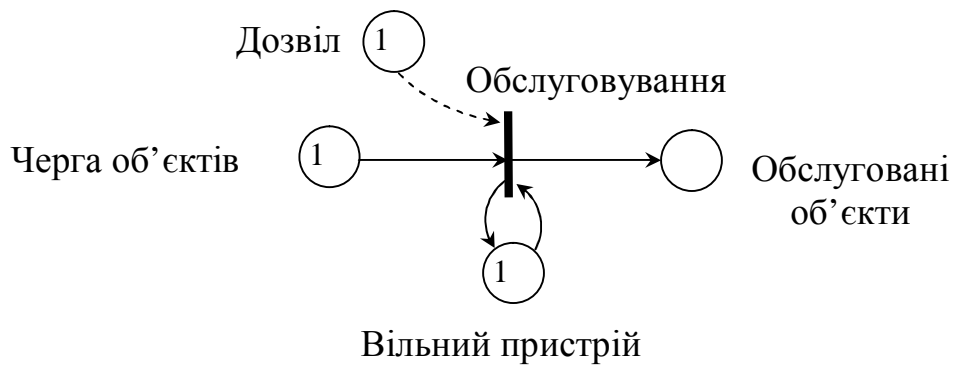


Рисунок 8.2. Фрагмент мережі Петрі, що моделює обслуговування об'єктів при наявності дозволу

3. Розгалуження маршрутів маркерів здійснюється указуванням таких параметрів переходів як пріоритет та вага. Якщо перехід 1 має пріоритет більший ніж перехід 2, то першим запускається перехід 1. Наприклад, фрагмент мережі Петрі, що реалізує обслуговування об'єктів двома пристроями – основним та резервним, має вигляд, представлений на рисунку 8.3. Подія „пріоритет 2” моделює обслуговування основним пристроєм, а подія „пріоритет 1” – обслуговування резервним пристроєм.

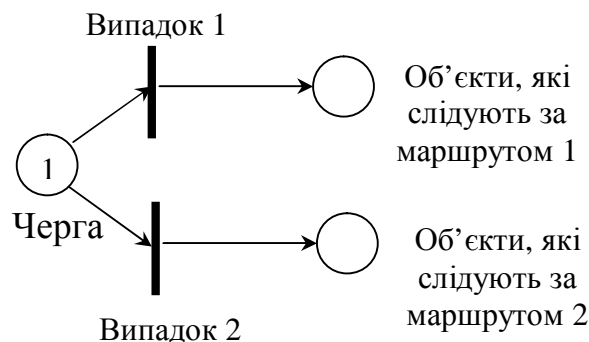


Рисунок 8.3. Фрагмент мережі Петрі, що моделює обслуговування об'єктів двома пристроями, один з яких основний, а другий - резервний

Якщо перехід 1 має вагу a , а перехід 2 має вагу b , то перехід 1 запускається з ймовірністю $\frac{a}{a+b}$, а перехід 2 – з ймовірністю $\frac{b}{a+b}$. На рисунку 8.4 представлений фрагмент мережі Петрі, в якому переходи „випадок 1” та „випадок 2” запускаються випадково з ймовірностями, що розраховуються за заданими у параметрах переходів вагами. Наприклад, якщо для події „випадок 1” указана вага, що дорівнює 9, а для переходу „випадок 2” указана вага, що дорівнює 1, то перехід „випадок 1” матиме ймовірність запуску 0,9, а перехід „випадок 2” – ймовірність 0,1.

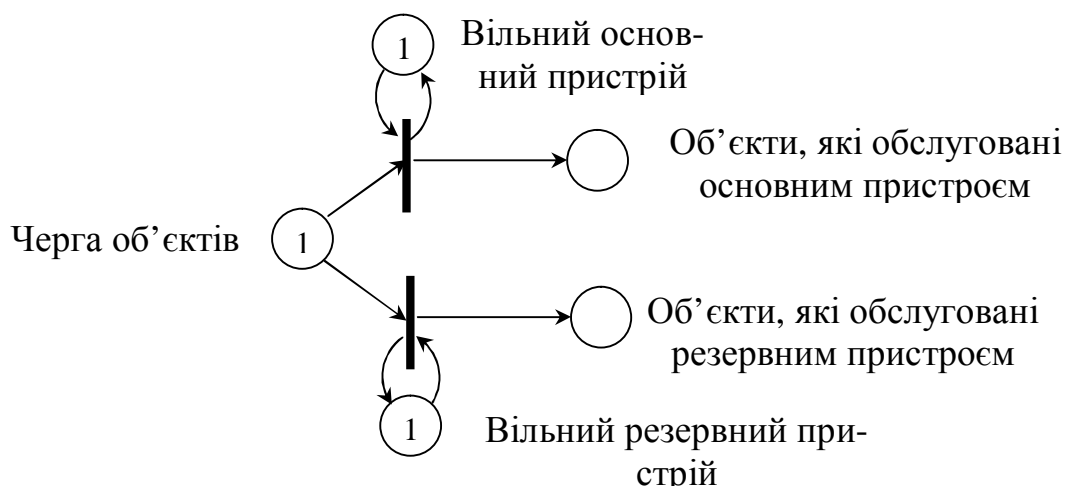


Рисунок 8.4. Фрагмент мережі Петрі, що моделює розгалуження маршрутів об'єктів за ймовірностями

4. Можливості моделювання систем мережами Петрі значно розширюються, якщо припустити, що кількість зв'язків між об'єктами мережі Петрі являється довільним цілим числом. В системі PTRSIM такий зв'язок позначається стрілкою з косою рискою та надписом, що дорівнює кількості зв'язків. Наприклад, мережа Петрі, що моделює процес надходження та збирання деталей двох типів, приймає вигляд як на рисунку 8.5. Деталі першого типу надходять з відомою часовою затримкою по 10 штук разом, а деталі другого типу надходять 20 штук разом також з відомою часовою затримкою. У процесі збирання задіяні одночасно дві деталі першого типу та чотири деталі другого типу.

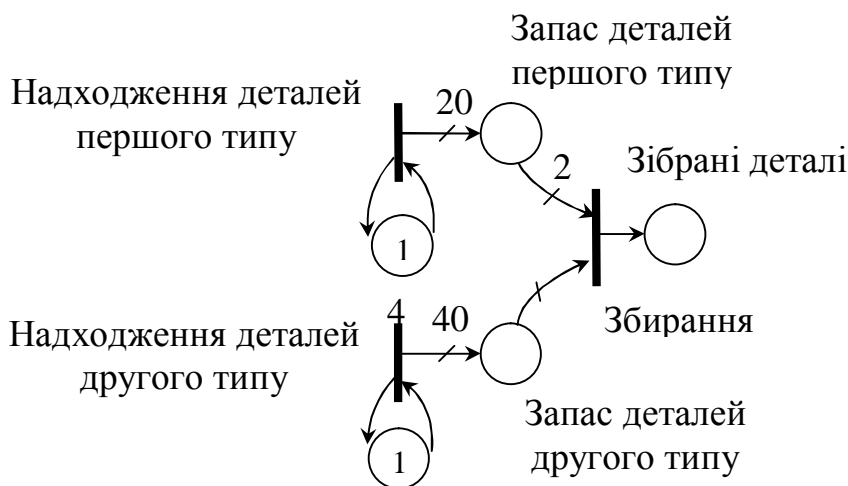


Рисунок 8.5. Фрагмент мережі Петрі, що моделює процес надходження та збирання деталей різного типу

5. В системах управління часто виникає ситуація, коли стан підсистеми управління залежить від поточного стану всієї системи. Наприклад, кількість товарів, які постачаються, може залежати від кількості невдоволеного попиту. Кількість товарів, які постачаються, може залежати від по-

точного стану запасу товарів. Такі моделі в системі PTRSIM реалізуються з використанням зв'язків у кількості, яка залежить від поточного маркірування мережі Петрі (рисунок 8.6). Формула, що визначає кількість зв'язків, передбачає використання маркірувань окремих позицій мережі Петрі, цілих чисел та арифметичних дій між ними.

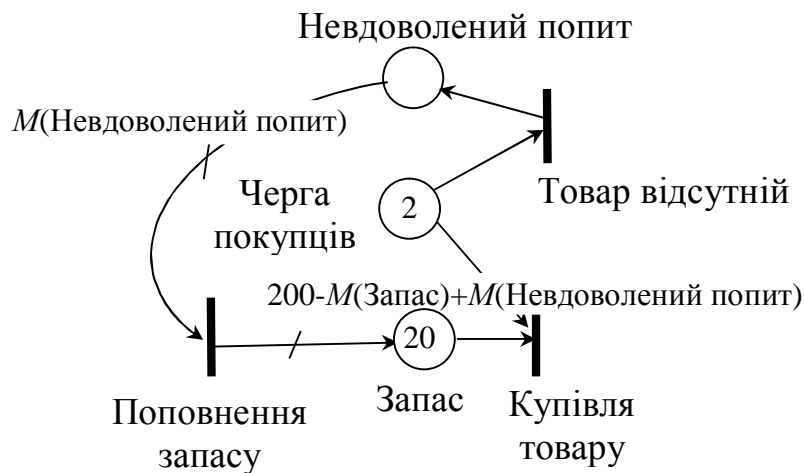


Рисунок 8.6. Фрагмент мережі Петрі, що моделює гнучку стратегію управління запасами товарів

Введення моделі в імітаційну систему PTRSIM. Система забезпечена зручним графічним інтерфейсом введення моделі. Конструктивними елементами моделі є позиції, переходи та зв'язки мережі Петрі. Розробник моделі обирає піктограми елементів за допомогою миші і розміщує їх в робочу область. Подвійним натисканням миші на піктограмі викликається діалогове вікно, в якому уточнюються параметри елементів. Передбачена можливість збільшення або зменшення масштабу зображення моделі, а також прокрутки зображення для перегляду різних частин систем, якщо вона не може поміститися на екрані. Розробник моделі може перетягувати елементи мережі Петрі на екрані, знищувати їх або копіювати.

Для введення великих моделей, які містять фрагменти, що повторюються, передбачена можливість копіювання фрагментів мережі Петрі і вставки їх у потрібне розробнику моделі місце. Копіювання фрагментів мережі Петрі значно прискорює і полегшує введення великих моделей. Один раз налагоджений фрагмент мережі Петрі може успішно використовуватись в інших моделях.

Перевірка моделі на відповідність задуму моделювання. Анімаційні можливості системи дозволяють розробнику моделі перевірити, чи працює модель системи так, як він планував, і відшукати помилку у своїх міркуваннях. В режимі анімації позиції, переходи і зв'язки динамічно змінюють свій колір і параметри у ході імітації по мірі просування модельного часу, який також представлений на екрані монітора. Елементи управ-

ління анімацією дозволяють прискорити або уповільнити її перебіг, а також зупинити моделювання і внести зміни в модель «на ходу». Дослідження змінювання системи в модельному часі, реакції системи на змінювання параметрів надає розробнику моделі можливості упевнитись, що модель працює у відповідності до його розуміння алгоритму імітації.

Виконання імітації при заданих значеннях параметрів. При виконанні робочих прогонів моделі анімацію відключають, оскільки вона уповільнює їх виконання. Дані перехідного періоду при необхідності вилучаються указуванням інтервалу розгону моделі.

Виведення результатів імітації. Статистичні можливості системи забезпечують підраховування середнього значення кількості маркерів у позиції, сумарного значення часу роботи переходу, середнього завантаження переходу, а також виведення графіків змінювання середнього значення кількості маркерів у позиції та середнього завантаження переходу в залежності від часу моделювання. Позиції та переходи, для яких повинні збиратися статистичні дані, указуються розробником моделі.

Формулювання висновків і пропозицій. Висновки та пропозиції щодо поліпшення системи формулюються на основі ретельного статистичного дослідження моделі та за результатами факторного експерименту.

8.3. Пакет імітаційного моделювання Arena

Одним із найбільш ефективних сучасних інструментів імітаційного моделювання є система Arena, що створена Кельтоном у 1998 році [Кельтон] та постачається компанією Systems Modeling Corporation [Systems Modeling Corporation]. Система Arena дозволяє будувати імітаційні моделі з великої кількості базових конструктивних елементів, відстежувати процес імітації, проводити аналіз результатів моделювання та виконувати оптимізацію відгуку моделі. Імітаційні Arena-моделі можуть бути побудовані для різних сфер діяльності - виробничих технологічних операцій, складського обліку, банківської діяльності, обслуговування клієнтів у маркеті і т.д. і т.п.

Основа технології Arena - мова моделювання SIMAN і система Cinema Animation. Мова SIMAN, що вперше реалізована у 1982 році, є надзвичайно гнучкою та виразною мовою моделювання. Вона постійно удосконалюється шляхом додавання в нього нових можливостей. Для відображення результатів моделювання використовується анімаційна система Cinema animation, яка відома на ринку з 1984 року. Процес моделювання організований таким чином. Спочатку користувач будує у візуальному редакторі системи Arena модель, поєднуючи потрібні конструктивні елементи. За необхідності параметри конструктивних елементів уточнюються. Коли здійснюється запуск моделі, система Arena генерує відповідний до моделі код на мові SIMAN, який автоматично запускається.

Інтерфейс системи Arena 9.0

Вікно додатку розділене на три області:

- вікно робочого поля;
- вікно параметрів модулів;
- вікно проекту.
- Вікно проекту включає декілька панелей:
- Basic Process (панель основних процесів) - містить модулі, які використовуються для моделювання;
- Reports (панель звітів) - панель повідомлень: містить повідомлення, які відображають результати імітаційного моделювання;
- Navigate (панель навігації) - панель управління дозволяє відображати всі види моделі, включаючи управління через ієрархічні підмоделі.

Вікно робочого поля представляє зображення моделі, включаючи блок-схему процесу, анімацію і інші елементи.

Вікно властивостей модуля використовуються для настройки параметрів моделі таких як: час, витрати і інші параметри.

Конструктивні елементи пакету Arena

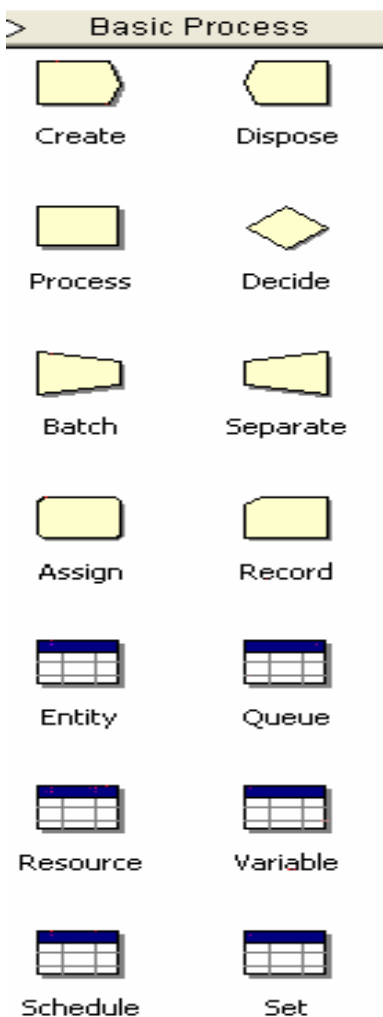


Рисунок 8.7. Панель основних процесів

На рисунку 8.7 представлена панель основних процесів *Basic Process*.

Модуль *Create* є відправною точкою для вимоги в імітаційній моделі. Вимоги – це об’єкти, які обробляються в системі. Наприклад, документи у сфері бізнесу, клієнти у сфері обслуговування, деталі у сфері виробництва. Створення вимоги модулем відбувається за розкладом, або ж ґрунтуючись на значенні часу між прибуттям вимог в модель. Залишаючи модуль, вимога починає оброблятися в системі. Тип створеної вимоги визначається в цьому модулі. Параметри модуля та їх призначення:

Name – унікальне ім’я модуля, яке буде відображено в блок схемі.

Entity Type – назва типу вимоги, який створюватиметься модулем.

Type – спосіб формування потоку прибуття. Type може мати значення Random (використовується експоненціальний розподіл з середнім значенням, визначеним користувачем), Schedule (визначається модулем Schedule), Constant (використовуватиметься, визначене користувачем, постійне значення) або Expression (потік прибуття формуватиметься по певному виразу).

Value – визначає середнє значення експоненціального розподілу (Random) або постійне значення часу між прибуттям вимоги (якщо Type = Constant).

Schedule Name – ім'я розкладу, який визначає характер прибуття вимоги в систему.

Expression – задає тип розподілу або вираз, що визначає час між прибуттями вимоги в модель.

Units – Одиниці вимірювання часу між прибуттям (день, година, хвилина, секунда).

Entities per arrival – Кількість вимог, яка входить в систему за одне прибуття.

Max arrivals – Максимальна кількість вимог, яке може створити цей модуль.

First Creation – Час, через який прибуде перша вимога в модель від початку симуляції.

Модуль **Process** є основним модулем процесу обробки в імітаційній моделі. Процесом обробки вважається, наприклад, перевірка документів, виконання замовлень, обслуговування клієнтів, обробка деталей У модулі є опції використання ресурсів. Окрім стандартного модуля Process, можна використовувати підмодель, додаючи їй особливу, визначену користувачем, ієрархічну логічну схему. У модулі можна також задавати додаткові вартісні і тимчасові характеристики процесу обробки об'єкта. Параметри модуля та їх значення:

Name – унікальне ім'я модуля, яке відображається в блок схемі.

Type – визначає логічну схему модуля. Standard означає, що логічна схема знаходиться усередині модуля і залежить від параметра Action. Submodel показує, що логічна схема знаходитиметься нижче в ієрархічній моделі. Підмодель може містити будь-яку кількість логічних модулів.

Action – тип обробки що відбувається усередині модуля. Delay просто показує про те, що процес займає деякий час і не відображає використання ресурсів. Seize Delay указує на те, що в цьому модулі були розміщені ресурси і відбуватиметься затримка, ресурси захоплюватимуться (тобто будуть зайняті обробкою вимоги), і їх звільнення буде відбувається пізніше. Seize Delay Release указує на те, що ресурс(-и) були захоплені, а потім через час звільнилися. Delay Release означає, що ресурси до цього були захоплені вимогою, а в такому модулі вимога затримається і звільнить ресурс. Всі ці параметри доступні тільки тоді, коли Type = Standard.

Priority – значення пріоритету модулів що використовують один і той же ресурс де завгодно в моделі. Ця властивість не доступна, якщо Action = Delay або Delay Release, або коли Type = Submodel.

Resources – визначає ресурси або групи ресурсів, які оброблятимуть вимогу в цьому модулі (див. Модуль Process - Ресурси).

Delay Type – тип розподілу або процедура, що визначає параметри затримки.

Units – Одиниці вимірювання часу затримки(день, година, хвилина, секунда).

Allocation – Визначає вартісні характеристики обробки. Value Added - означає враховувати вартісні характеристики, а Non-Value Added не враховувати.

Minimum – мінімальне значення для рівномірного і трикутного розподілу.

Maximum – максимальне значення для рівномірного і трикутного розподілу.

Value – середнє значення для нормального і трикутного розподілу або значення для постійної тимчасової затримки.

Std Dev – стандартне відхилення для нормального розподілу.

Expression – вираз, що визначає значення тимчасової затримки, якщо Delay Type = Expression.

Модуль ***Decide*** дозволяє враховувати прийняття рішень в моделі. Наприклад, розділення справ на термінові справи і нетермінові, перенаправлення недороблених або зроблених неправильно робіт на доопрацювання та інше. Модуль включає опції прийняття рішень заснованих на умові By Condition (наприклад, якщо тип вимоги Car) або заснованих на вірогідності By Chance (наприклад, 75% - true, а 25% - false). Умови можуть бути засновані на значенні атрибуту Attribute, значенні змінної Variable, типі об'єкта Entity Type або засновані на виразі Expression. Якщо поставлена умова не виконується те, об'єкт покидатиме модуль через вітку False. Параметри модуля та їх значення:

Name – унікальне ім'я модуля, яке відображається в блок схемі.

Type – тип ухвалення рішення. *By Chance* - вибір напряму ґрунтується на ймовірності. *By Condition* - перевірка на виконання умови

Percent True – значення, що визначає відсоток вимог, який підуть по напряму True

If – Тип умови, яка перевірятиметься на виконання.

Named – ім'я змінної, атрибуту або типу вимоги, який перевірятимуться при вході вимоги в модуль.

Is – математичний знак умови, наприклад більше, менше, рівно і т.д.

Value – значення, з яким порівнюватиметься атрибут або змінна вимоги, що прийшла. Якщо тип умови - Expression, то у виразі повинен стояти знак умови, наприклад Color<> Red

Даний модуль дозволяє виконувати перевірку не тільки однієї умови, але і декілька. Це досягається за допомогою властивості Type N-way by Chance/by Condition. Залежно від умови об'єкт йде по потрібній вітці.

Модуль **Batch** відповідає за механізм угруповання в імітаційній моделі. Наприклад, зібрати необхідну кількість даних, перш ніж починати їх обробку, зібрати раніше розділені копії одної форми, з'єднати пацієнта і його лікарняну карту прийому до лікаря. Угруповання може бути постійним або тимчасовим. Тимчасово згруповані комплекти пізніше можуть бути роз'єднані за допомогою модуля *Separate*. Комплекти можуть складатися з будь-якої кількості вхідних об'єктів, визначеної користувачем. Якщо указано правило групування *By Attribute*, то з'єднуються тільки об'єкти, що мають однакове значення указанного атрибуту. Тимчасові і вартісні характеристики вимоги, які входять у групу, можуть бути рівні сумі характеристик вимоги, які увійшли до групи, або їх добутку.

Об'єкт обслуговування прибуває в модуль, стає в чергу і залишається там до тих пір, поки в модулі не буде набрано задану кількість вимог. Коли збереться потрібна кількість вимог створюється вимога, яка представляє комплект. Параметри модуля та їх значення:

Name – унікальне ім'я модуля, яке відображається в блок схемі.

Type – Спосіб угруповання вимоги, може бути *Temporary* (тимчасова), *Permanent* (постійна).

Batch Size – кількість об'єктів, які утворюють один комплект.

Rule – Визначає, за якою ознакою групуватимуться. Якщо *Rule* = *Any Entity*, це означає що перші 3 (якщо *Batch Size* = 3) вимоги будуть згруповані. Якщо *Rule* = *By Attribute*, то об'єднуюватиметься задана кількість вимог з певним атрибутом. Наприклад, якщо *Attribute Name* = *Color*, то всі вимоги, які мають однаковий атрибут *Color*, будуть згруповані.

Attribute Name – ім'я атрибуту, за значенням якого групуватимуться об'єкти.

Модуль **Separate** може використовуватися як для створення копій вхідної вимоги, так і для розділення раніше згрупованих вимог. Наприклад, для роз'єднання раніше згрупованих комплектів документів, для паралельної обробки рахунків і документів по одному замовленню. Правило для розділення вартісних і часових характеристик копій вимоги і розділеної вимоги визначається користувачем. Коли тимчасово згрупована вимога прибуває в модуль, вони розкладаються на складену вимогу. Вимога покидає модуль в тій же послідовності, в якій вони додавалися в комплект. Якщо модуль створює копії вимоги, то користувач може задати кількість дублікатів вимоги. У дубльованій вимоги значення атрибуту, а також анімаційна картинка такі ж, як і оригіналу. Оригінальна вимога також покидає модуль. Параметри модуля та їх значення:

Name – унікальне ім'я модуля, яке відображається в блок схемі.

of Duplic – Кількість створюваних копій вхідної вимоги.

Type – спосіб розділення вхідної в модуль вимоги. *Duplicate Original*

- просто робить дублікати вхідної вимоги. **Split Existing Batch** вимагає щоб вхідна вимога була заздалегідь тимчасово згрупована.

Cost to Duplicates – розділення вартісних і тимчасових характеристик вхідної вимоги між тими, що виходять. Це значення визначається користувачем у відсотках, тобто скільки відсотків від вартісних і тимчасових характеристик вхідної вимоги піде копіям (характеристики між копіями діляться порівну).

Allocation Rule – метод розділення вартості і часу, якщо вибраний **Type=Split Existing Batch**. **Retain Original Entity Values** - зберігає оригінальні значення вимоги. **Take All Representative Values** – всім вимогам присвоюється однакове значення. **Take Specific Representative Values** - вимога приймає специфічне значення.

Модуль **Assign** призначений для змінювання поточного значення змінної, для присвоєння атрибуту об'єкту, типу об'єкта, для змінювання графічного зображення об'єкта, для визначення тривалості обробки об'єкта обслуговування. Наприклад, для встановлення пріоритету для клієнтів; для визначення часу обробки об'єкта обслуговування, що залежить від атрибуту вимоги; для присвоєння типу об'єкта, значення якого використовується потім в блоці **Decide**. У одному модулі можна зробити тільки одне призначення. Параметри модуля та їх значення:

Name – унікальне ім'я модуля, яке відображається в блок схемі.

Type – тип призначення, яке здійснюватиметься. **Other** може включати вбудовані в **Arena** змінні такі, як місткість ресурсу або кінцевий час симуляції.

Variable Name – ім'я змінної, яка змінюватиметься в цьому модулі.

Attribute Name – ім'я атрибуту, який змінюватиметься в цьому модулі.

Entity Type – новий тип вимоги, який привласнюється заявці в цьому модулі.

Entity Picture – нова анімаційна картинка для вимоги, яка пройшла цей модуль.

Other – ім'я змінної в системі, яка змінюється.

New Value – привласнюване нове значення для атрибуту, змінної.

Модуль **Record** призначений для збору статистики в імітаційній моделі. Наприклад, для підрахування, яка кількість замовлень була виконана із запізненням, підрахування кількості роботи, що здійснюється за одну годину. Модуль може збирати різні типи статистики, включаючи час між виходами вимоги з модуля, статистику вимоги (час циклу, вартість), статистику за період часу (період часу від заданої точки до теперішнього моменту). Також доступний кількісний тип статистики. Параметри модуля та їх значення:

Name – унікальне ім'я модуля, яке відображається в блок схемі.

Type – визначає тип статистики, яка збиратиметься. *Count* - збільшуватиме або зменшуватиме статистику на задане значення. *Entity Statistics* збиратиме загальну статистику про вимогу, наприклад, час циклу, вартісні характеристики і т.д. *Time Interval* рахуватиме різницю між значенням атрибуту і поточним часом моделювання. *Time Between* відстежуватиме час між входженням вимоги в модуль. *Expression* просто фіксуватиме значення визначуване виразом.

Attribute Name – ім'я атрибуту, значення якого використовуватиметься для інтервальної статистики.

Value – значення, яке додаватиметься до статистики, коли в модуль прибуватиме вимога.

Модуль *Dispose* є вихідною точкою з імітаційної моделі. Наприклад, клієнти покидають відділ, закінчення бізнес-процесу. Статистика про вимогу може збиратися до того моменту поки вона не вийде з системи. Параметри модуля та їх значення:

Name – унікальне ім'я модуля, яке відображається в блок схемі.

Record Entity Statistics – визначає, чи вестиметься статистика про вихід вимоги з системи.

Інші модулі, представлені в панелі основних процесів, призначені для введення допоміжних даних моделі.

Модуль *Entity* визначає тип вимоги і її анімаційну картинку в імітаційному процесі, також визначає вартісну інформацію. Для кожного джерела повинен бути визначений тип вимоги, який він генерує. Параметри модуля та їх значення:

Entity Type – назва типу вимоги.

Initial Picture – графічне представлення вимоги на початку імітаційного процесу. Це значення може бути згодом змінене за допомогою модуля *Assign*. Проглянути анімаційні картинки можна так: *Edit/ Entity picture*.

Holding Cost/Hour – погодинна вартість обробки вимоги в системі. Ця вартість враховується, коли вимога знаходиться в системі, або в черзі, або в стадії обробки.

Initial VA Cost – значення, що привласнюється атрибуту вимоги «додаткова вартість». Значення атрибуту збільшуватиметься кожного разу, як тільки вимога оброблятиметься процесом з додатковою вартістю.

Initial NVA Cost – значення, що привласнюється атрибуту вимоги «не додаткова вартість». Значення атрибуту збільшуватиметься кожного разу, як тільки вимога оброблятиметься процесом з не додатковою вартістю.

Модуль *Queue* призначений для зміни правила розстановки вимоги в черзі. За умовчанням тип черги *First in First out*. Параметри модуля та їх значення:

Name – унікальне ім'я модуля, що відображається в блок схемі моделі.

Attribute Name – ім'я атрибуту, значення якого враховуватиметься, якщо тип = Lowest Attribute Value або Highest Attribute Value.

Type – правило розстановки об'єктів в черзі. First in First out – перший увійшов, перший вийшов. Last in first out - останній прийшов, перший вийшов. Lowest Attribute Value - перший вийде з черги той, значення атрибуту у якого нижче. Highest Attribute Value - перший вийде з черги той, значення атрибуту у якого найвище.

Модуль **Resource** призначений для визначення ресурсів і їх властивостей в імітаційному процесі. Ресурсом може бути, наприклад, клерк, продавець, робочий, верстат, телефонна лінія, комп'ютер та інше. Модуль включає вартісну інформацію про ресурси і місткість ресурсів. Ресурси можуть мати фіксовану місткість або ж засновану на розкладі. У ресурсів з фіксованою місткістю протягом імітаційного процесу місткість змінюватися не може. Параметри модуля та їх значення:

Name – ім'я ресурсу.

Type – метод, що визначає місткість ресурсу. Fixed Capacity - фіксована місткість ресурсу. Based on Schedule - місткість ресурсу визначається модулем Schedule.

Capacity – кількість ресурсів, що знаходяться в системі.

Schedule Name – ім'я модуля Schedule, який визначає місткість ресурсу, якщо Type = Based on Schedule.

Busy / Hour – погодинна вартість обробки об'єкта ресурсом. Час враховується тільки тоді, коли ресурс зайнятий обробкою і припиняє враховуватися, коли ресурс звільняється.

Idle / Hour – Вартість ресурсу, коли він не зайнятий.

Per Use – Вартість обробки ресурсом одного об'єкта (не залежить від часу).

Модуль **Schedule** використовується разом з модулем Resource для визначення місткості ресурсу. Також модуль використовується разом з модулем Create для завдання розкладу прибуття вимоги. Параметри модуля та їх значення:

Name – назва розкладу.

Type – тип розкладу, який може бути Capacity (розклад для ресурсів), Arrival (для модуля Create) або Other (різноманітні тимчасові затримки або чинники).

Time Units – масштаб осі часу в графіці розкладу.

Модуль **Set** описує групу ресурсів, що використовуються в модулі Process. У групі можуть знаходитися декілька ресурсів. Модуль Set автоматично створює ресурси, місткість яких за умовчанням рівна 1 і без вся-

кої вартісної інформації. Отже, якщо для ресурсів тих, що входять до групи не потрібно вартісної інформації і місткість більше 1, то можна обійтися створенням тільки модуля Set. Можливе застосування модуля для організації роботи групи працівників, наприклад, по черзі. Параметри модуля та їх значення:

Name - назва групи.

Members - перераховує ресурси, що входять до групи. Порядок перерахування ресурсів важливий, коли в модулі Process використовується правило вибору Cyclical або Preferred Order.

Resource Name - назви ресурсів що входять до групи.

Модуль *Variable* визначає значення змінної. Змінні, що відносяться до модуля Decide або Assign, можуть використовуватися у виразах. Наприклад, Привласнення серійного номера для ідентифікації продукції, кількість документів оброблюваних в годину. Якщо змінна не описана в модулі Variable, то її значення рівне 0. Параметри модуля та їх значення:

Name – ім'я змінної

Initial Value – первинне значення змінної. Це значення надалі може мінятися модулем Assign.

Rows – кількість рядків в розмірній змінній.

Columns – кількість стовпців в розмірній змінній.

Clear Option – визначає час, коли значення змінної скидається в початкове значення.

Statistics – скидає змінну в початкове значення у будь-який момент, коли статистика була розчищена.

System – скидає змінну в початкове значення у будь-який момент, коли система була розчищена.

None – ніколи не скидає змінну в початкове значення, виключаючи передуючу першій реплікації.

Statistics – визначає, чи вестиметься статистика по цій змінній.

Окрім панелі основних процесів Basic Process система Arena має панель допоміжних процесів Advanced Process. Панель процесів Advanced Process містить модулі, які призначені для виконання спеціальних логічних функцій, наприклад, пов'язаних із координацією руху об'єктів обслуговування у різних частинах системи або із вибором черги при наявності в системі декількох черг. Оскільки ці блоки використовуються не часто, опишемо тільки деякі з них.

Блок Hold призначений для здійснення затримки процесу обслуговування об'єктів до виконання указаної умови або до надходження заданого сигналу.

Блок Signal призначений для генерування значення сигналу, що використовується в блоці Hold.

Система Arena має ще одну, третю, панель процесів Advanced Transfer, що містить модулі, які використовуються для опису процесів передачі об'єктів обслуговування із однієї частини системи в іншу, такі як, наприклад, конвеєри.

Ведення моделі

Введення моделі в системі Arena здійснюється простим перетягуванням потрібних модулів із панелі процесів (Basic Process, Advanced Process або Advanced Transfer) у вікно робочого поля. Параметри модулів, такі як час затримки, вид закону розподілу, кількість пристроїв, кількість одночасно обслуговуваних об'єктів та інші, задаються у вікні параметрів модулів. Між модулями указуються з'єднання у відповідності до логіки функціонування моделі.

Виконання моделювання

Перед тим, як розпочати процес імітації потрібно зайти в меню Run, підменю Setup і ввести в установки Replication Parameters час моделювання (Replication Length) та одиниці в яких він вимірюється (Time Units), а також одиниці часу, в яких будуть представлені результати моделювання (Basic Time Units). Бажано також ввести в установки Project Parameters ім'я проекту (Project Title) обрати статистичні дані, що збираються (Entities, Queues, Resources, Processes, а також Costing).

Запуск імітації здійснюється вибором команди Go меню Run. Для перевірки моделі зручно скористатись командою Step, що запускає покрокову імітацію модельованого процесу. Управління процесом імітації здійснюють команди Pause - тимчасова зупинка процесу імітації, Fast Forward - швидка імітація, End - повернення до корегування моделі або нового запуску.

Виведення результатів моделювання

В результаті успішної імітації моделі пакетом Arena створюються звіти про результати моделювання. Переглянути їх можна скориставшись панеллю звітів *Reports*. На панелі звітів представлено декілька видів звітів. Звіт «Короткий огляд категорій» і звіти по чотирьох категоріях, такі як Вимоги, Процеси, Черги і Ресурси.

За допомогою панелі звітів можна проглянути короткий огляд категорій *Category Overview*. Звіт *Category Overview* відображає підсумкову інформацію про вимоги, процеси, черги і ресурси. Також показує інформацію про заданих користувачем змінних і інформацію, зібрану модулем Record.

Звіт про вимоги *Entities* поділений на декілька частин. У частині звіту *Cycle Time* показаний середній, максимальний і мінімальний час існування вимоги. Час існування вимоги вважається з моменту її прибуття в систему і до того моменту, коли вимога потрапляє в модуль Dispose. Нижче представляється гістограма середнього часу циклу для кожного типу вимоги.

У частині *NVA Cost*: показано середнє, максимальнє і мінімальнє значення не додаткової вартості вимоги за кожним типом вимоги. Не додаткова вартість розраховується на підставі значення *NVA Time*.

У частині *Total Cost*: показано середнє, максимальнє і мінімальнє значення загальної вартості вимоги за кожним типом вимоги. Загальна вартість обчислюється шляхом складання вартості очікування, додаткової вартості і не додаткової вартості для кожної вимоги. Нижче представляється порівняльні гістограми середніх значень загальної вартості вимоги для кожного типу вимоги.

У частині *VA Cost* показано середнє, максимальнє і мінімальнє значення додаткової вартості вимоги за кожним типом вимоги. Додаткова вартість розраховується на підставі *VA Time*.

У частині *Wait Cost* показано середнє, максимальнє і мінімальнє значення вартості очікування вимоги за кожним типом вимоги. Вартість очікування підраховується виходячи з часу очікування, вартості ресурсу і вартістю знаходження вимоги в системі.

У частині *Wait Time* показано середнє, максимальнє і мінімальнє значення часу очікування вимоги за кожним типом вимоги. Час очікування - це період часу з моменту надходження вимоги в чергу (або у модулі *Process* чекає ресурс, або в модулі *Batch* чекає угруповання) і до моменту виходу з неї (почне оброблятися, або буде згрупована).

У частині *WIP (Work In Process)* показано середнє, максимальнє і мінімальнє значення часу очікування вимоги за кожним типом вимоги.

Звіт про процеси *Processes* поділений на декілька частин. У частині *Cycle Time* звіту показаний середній, максимальний і мінімальний час циклу процесу. Час циклу процесу вважається з моменту прибуття в модуль *Process* і до того моменту, коли об'єкт покидає модуль. У розділі представляється гістограма середнього часу циклу для кожного процесу.

У частині *NVA Cost* показано середнє, максимальнє і мінімальнє значення не додаткової вартості об'єкта по процесу. Не додаткова вартість розраховується на підставі *NVA Time*.

У частині *Total Cost* показано середнє, максимальнє і мінімальнє значення загальної вартості вимоги по процесу. Загальна вартість обчислюється шляхом складання вартості очікування, додаткової вартості і не додаткової вартості для кожної вимоги. У розділі представляється порівняльні гістограми середніх значень загальної вартості вимоги для кожного типу вимоги.

У частині *VA Cost* показано середнє, максимальнє і мінімальнє значення додаткової вартості вимоги за кожним типом вимоги. Додаткова вартість розраховується на підставі *VA Time*.

У частині *Wait Cost* показано середнє, максимальне і мінімальне значення вартості очікування вимоги за кожним типом вимоги. Вартість очікування підраховується виходячи з часу очікування, вартості ресурсу і вартістю знаходження вимоги в системі.

У частині *Wait Time* показано середнє, максимальне і мінімальне значення часу очікування вимоги за кожним типом вимоги. Час очікування - це період часу з моменту надходження вимоги в чергу (або у модулі Process чекає ресурс, або в модулі Batch чекає угруповання) і до моменту виходу з неї (почне оброблятися, або буде згрупована).

У частині *WIP* показано середнє, максимальне і мінімальне значення часу очікування вимоги за кожним типом вимоги.

Виконання анімації

Анімація об'єкта обслуговування виконується за допомогою параметру Entity Picture, що задається в блоці Entity. Анімаційну картинку об'єкта обслуговування можна вибрати із переліку запропонованих картинок або із бібліотеки анімаційних картинок. При запуску моделі користувач спостерігатиме рух об'єктів обслуговування від одного блоку моделі до іншого.

Анімація ресурсу виконується за допомогою панелі Resources. У вікні, що з'явиться після виклику панелі Resources, потрібно вибрати ресурс із списку ресурсів моделі. Потім обрати картинку для зображення стану «вільний» у списку картинок і перемістити її до вікна Idle. Так само обрати картинку для зображення стану «зайнятий» і перемістити її до вікна Busy. Якщо бажаної картинка в запропонованому списку не знайдено, можна скористатись бібліотеками картинок, які містяться у папці C:\Program Files\Rockwell Software\Arena у файлах з розширенням .plb. Після вибору усіх картинок ресурсу як зайнятого, так і вільного, анімаційна картинка розташовується курсором миші у потрібному користувачу місці. Розтягуванням анімаційної картинка користувач може змінювати її розміри.

Анімація черги виконується за допомогою панелі Queues. Після заповнення діалогового вікна картинка розміщується користувачем на моделі.

Візуальне зображення гістограми виконується за допомогою панелі Histograms. Зображення гістограми сильно залежить від масштабу, який обрав користувач, тому вибирати його потрібно ретельно.

Візуальне зображення значення змінної виконується за допомогою панелі Variables. Скористатись цією візуалізацією можна тільки якщо у моделі була введена змінна типу Variable.

Візуальне графічне зображення динаміки змінювання виконується за допомогою панелі Plot. Може бути виведена, наприклад, динаміка зміню-

вання кількості об'єктів у черзі, динаміка змінювання часу обслуговування об'єктів у моделі і т.і.

Пакет Arena містить програми, призначені для дослідження властивостей системи Input Analyzer, Output Analyzer, Process Analyzer. Професійна версія пакету містить також програму, що підтримує пошук оптимальних значень параметрів системи.

8.4. Приклади розв'язання задач

Задача 1. Розглянемо можливості мови на прикладі моделювання роботи служби замовлення таксі, взятий з [Томашевський,2001].

Служба замовлення таксі має 5 каналів для одночасного прийняття замовлень по телефону. Час між спробами виклику таксі розподілений за законом Ерланга другого порядку із середнім 180 секунд. Абонент витрачає 30 секунд для набирання номера і, якщо застає всі канали служби замовлення зайнятими або після з'єднання з'ясовує, що черга на обслуговування перевищує 10 замовлень (в такому випадку замовлення не приймаються), то через 60 секунд він повторює набирання номера. Після п'яти спроб абонент припиняє набирання. Служба замовлення таксі має у своєму розпорядженні 30 машин таксі для обслуговування замовлень. Час, витрачений на проїзд до клієнта, залежить від відстані до нього. Ймовірності можливих відстаней розподіляються таким чином: 2 км – з імовірністю 0,1, 8 км - з імовірністю 0,2, 9 км – з імовірністю 0,25, 11 км - з імовірністю 0,17, 12 км – з імовірністю 0,23, 20 км – з імовірністю 0,05. Вартість проїзду до клієнта клієнтом не сплачується. Швидкість руху машин рівномірно розподілена в інтервалі 45 ± 5 км/год. Час обслуговування клієнта рівномірно розподілений в інтервалі 50 ± 20 хвилин. Вартість попереднього замовлення складає 2 гривні, вартість проїзду 1 км складає 2 гривні.

Метою моделювання є визначення такої кількості операторів-телефоністів та водіїв таксі, при якій максимізується прибуток служби замовлення.

За умовою задачі надходження замовлення здійснюється за законом Ерланга другого порядку із середнім значенням 180, що еквівалентно двом затримка за експоненціальним законом із середнім значенням 90. Тому надходження замовлень моделюється двома операторами: оператором GENERATE 90, FN\$DIS, де DIS – ім'я функції, що задає експоненціальний розподіл, та оператором ADVANCE 90, FN\$DIS.

Набирання номера моделюється звичайною затримкою транзакта на 30 секунд: ADVANCE 30

Зайняття телефоніста (одного з п'яти) моделюється наступним фрагментом:

```
TEL      STORAGE      5
          ENTER        TEL
          ADVANCE      30
          LEAVE        TEL
```

Але за умовою задачі, якщо всі телефоністи зайняті, то клієнт із затримкою 60 секунд передзвонює, при чому, якщо всі п'ять спроб додзвонитися виявилися невдалими, то клієнт припиняє дзвонити у цю службу таксі. Тому ускладнимо цей фрагмент наступним чином. Введемо цикл, який здійснює додзвони. Кількість здійснюваних циклів залежить від значення, наприклад, першого параметру, в якому потрібно запам'ятати бажану кількість спроб додзвону. Розгалуження подій «відповідь телефоніста» або відмова реалізуємо за допомогою оператора TRANSFER BOTH,VIDP,VIDM. При виході невдалого клієнта з системи доцільно підраховувати загальну їх кількість. Для цього використовується блок SAVEVALUE NEOBSL+,1, який збільшує значення змінної з ім'ям NEOBSL на одиницю кожний раз, як до нього надходить транзакт. Вихід невдалого клієнта з системи обслуговування здійснюється оператором TERMINATE. Таким чином отримуємо наступний фрагмент програми:

```
TEL      STORAGE      5
DOZVON  ADVANCE      30
          TRANSFER    BOTH,VIDP,VIDM
VIDP    ENTER        TEL
          ADVANCE      30
          LEAVE        TEL
VIDM    ADVANCE      60
          LOOP        1,DOZVON
          TERMINATE
```

Але за умовою задачі клієнт відмовляється від обслуговування також, якщо дізнався, що черга клієнтів на машини таксі надто велика (більша 10). Отже, навіть якщо клієнт додзвонився, він може відмовитись від замовлення, якщо черга надто велика. Перевірку черги можна здійснити за допомогою порівняння стандартного параметра транзакта «кількість транзактів у черзі» із заданим числом 10. Порівняння у мові GPSS здійснюється за допомогою блоку TEST L Q\$KLIENT,10,VIDM – якщо значення параметру Q\$KLIENT менше (L) 10, то транзакт прямує до наступного опе-

ратора, в противному випадку – до оператора з міткою VIDM. Якщо замовлення все ж таки прийняте, то служба замовлення бере плату з клієнта за попереднє обслуговування і ставить клієнта у чергу на обслуговування. Підраховування доходу служби замовлення здійснюється оператором SAVEVALUE DOHOD+,2000. Перехід до обслуговування клієнта здійснюється оператором безумовного переходу TRANSFER ,OBSL. Отже, остаточно фрагмент програми, що моделює обслуговування клієнтів у телефоністів, приймає вигляд:

```

TEL      STORAGE      5
           DOZVON ADVANCE      30
           TRANSFER      BOTH,VIDP,VIDM
VIDP     ENTER        TEL
           ADVANCE        30
           LEAVE         TEL
           TEST L         Q$KLIENT,10,VIDM
           SAVEVALUE     DOHOD+,2000.
VIDM     ADVANCE        60
           LOOP          1,DOZVON
           TERMINATE

```

Обслуговування клієнта машинами таксі передбачає очікування в черзі з ім'ям клієнт, зайняття машини таксі, слідування машини таксі до клієнта, поїздка машини таксі за замовленням клієнта, звільнення машини таксі, сплачування клієнтом за проїзд, підраховування кількості обслугованих клієнтів та вихід клієнта із системи. Час обслуговування за умовою задачі має рівномірний розподіл від 1800 до 4200 секунд і задається функцією DOBSL, оскільки його значення використовується для розрахунку вартості проїзду. Функція DOBSL задається у форматі C2 як неперервна і задана двома точками. Час, що таксі витрачає на слідування до клієнта не даний, але відомі швидкість машини та відстань до клієнта. Тому час слідування машини до клієнта задається змінною CHAS, яка розраховується як частка відстані до клієнта та швидкості. Відстань до клієнта за умовою задачі має дискретний розподіл, який в програмі задається у вигляді функції розподілу VIDST, що визначається шістьма точками (формат D6). Швидкість має рівномірний розподіл і задається функцією розподілу DSP-EED двома точками (формат C2). Вартість проїзду задається змінною COST і розраховується як множина кількості метрів, що проїхав клієнт, на вартість одного метра. Отже, фрагмент програми, що моделює обслуговування клієнта машинами таксі має вигляд:

```

DOBSL  FUNCTION  RN2,C2
0.,1800/.9999,4200
DSPEED FUNCTION  RN3,C2
0.,11.111/.9999,13.888
VIDST  FUNCTION  RN4,D6
0.1,5000/0.3,8000/0.55,9000/0.72,11000/0.95,12000/1.00,20000
CHAS   VARIABLE  FN$VIDST/FN$DSPEED
COST   VARIABLE  FN$DOBSL#FN$DSPEED#0.2
OBSL   QUEUE     KLIENT
        ENTER     TAXI

DEPART  KLIENT
ADVANCE V$CHAS
ADVANCE FN$DOBSL
LEAVE   TAXI
SAVEVALUE DOHOD+,V$COST
SAVEVALUE KLOBS+,1

```

Фрагмент програми, що відповідає за час моделювання протягом 240 годин має вигляд:

```

GENERATE 864000
TERMINATE 1

```

Такі фрагменти програми GPSS називають лічильниками часу. Він спрацьовує таким чином. Через час 864000 з блоку GENERATE вийде транзакт і при виході його з системи лічильник транзактів TERMINATE зменшиться на одиницю. Нульова кількість транзактів в лічильнику транзактів означає завершення моделювання.

Реалізація моделі засобами мови GPSS представлена на рисунку 8.8. Результати моделювання представлені на рисунку 8.9. З результатів моделювання (час моделювання 240 годин) випливає, що кількість не обслугованих за 10 діб замовлень складає 2788 замовлень (29% усієї кількості замовлень), обслугованих замовлень – 6793 замовлення (71% усієї кількості замовлень). Середнє завантаження машин таксі велике 0,998 (29,9 машини з 30), а завантаження телефоністів – мале 0,198 (1 телефоніст із 5 телефоністів).


```

GPSS World - [TAXI1]
File Edit Search View Command Window Help
[Icons]

TAXI STORAGE 30 ;кількість машин таксі
TEL STORAGE 5 ;кількість телефоністів
DIS FUNCTION RN1,C24 ;функція експоненціального закону розподілу
0.,0./ .100,.104/.200,.222/.3,.355/.4,.509/.5,.69/.6,.915/.7,1.2/.750,1.38
.8,1.6/.84,1.83/.88,2.12/.9,2.3/.92,2.52/.94,2.81/.95,2.99/.96,3.2
.97,3.5/.98,3.9/.99,4.6/.995,5.3/.998,6.2/.999,7/.9998,8
DOBSL FUNCTION RN2,C2 ;функція час обслуговування клієнта в секундах
0.,1800/.9999,4200
DSPEED FUNCTION RN3,C2
0.,11.111/.9999,13.888 ;функція швидкості руху машини в метрах на секунду
VIDST FUNCTION RN4,D6 ;функція, що задає відстань до клієнта в метрах
0.1,5000/0.3,8000/0.55,9000/0.72,11000/0.95,12000/1.00,20000
CHAS VARIABLE FN$VIDST/FN$DSPEED ;час руху машини до клієнта
COST VARIABLE FN$DOBSL#FN$DSPEED#0.2 ;вартість обслуговування в копійках за метр
GENERATE 90, FN$DIS ;з'явився клієнт, що бажає таксі
ADVANCE 90, FN$DIS ;затримка ерлангового розподілу
ASSIGN 1,5 ;не більше п'яти спроб набирання номера
DOZVON ADVANCE 30 ;набирання номера
TRANSFER BOTH,VIDP,VIDM ;якщо телефоніст вільний то відповідь інакше відмова
VIDP ENTER TEL ;зайняти телефоніста
ADVANCE 30 ;тривалість розмови в секундах
LEAVE TEL ;звільнити телефоніста
TEST L Q$KLIENT,10,VIDM ;якщо черга на машини більше 10, то відмова
SAVEVALUE DOHOD+,200 ;підрахувати дохід за попереднє замовлення
TRANSFER ,OBSL ;перейти до обслуговування
VIDM ADVANCE 60 ;затримка після невдалого дзвінка
LOOP 1,DOZVON ;цикл, що здійснює дозвон
SAVEVALUE NEOBSL+,1 ;підрахувати необслугованих клієнтів
TERMINATE ;вихід із системи клієнта, що не дозвонився
OBSL QUEUE KLIENT ;очікувати вільне таксі
ENTER TAXI ;таксі виконує замовлення
DEPART KLIENT ;зменшити кількість очікуючих клієнтів на одиницю
ADVANCE V$CHAS ;таксі прямує до клієнта
ADVANCE FN$DOBSL ;таксі обслуговує клієнта
LEAVE TAXI ;звільнити таксі
SAVEVALUE DOHOD+,V$COST ;підрахувати дохід за обслуговування
SAVEVALUE KLOBS+,1 ;підрахувати кількість обслугованих клієнтів
TERMINATE ;вихід із системи клієнта, що обслуговувався
GENERATE 864000 ;час моделювання 240 годин
TERMINATE 1

```

Рисунок 8.8. Реалізація моделі засобами мови GPSS

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT	COUNT	RETRY
	1	GENERATE	9627		0	0
	2	ADVANCE	9627		4	0
	3	ASSIGN	9623		0	0
DOZVON	4	ADVANCE	28823		0	0
	5	TRANSFER	28823		0	0
VIDP	6	ENTER	28487		0	0
	7	ADVANCE	28487		1	0
	8	LEAVE	28486		0	0
	9	TEST	28486		0	0
	10	SAVEVALUE	6833		0	0
	11	TRANSFER	6833		0	0
VIDM	12	ADVANCE	21989		1	0
	13	LOOP	21988		0	0
	14	SAVEVALUE	2788		0	0
	15	TERMINATE	2788		0	0
OBSL	16	QUEUE	6833		10	0
	17	ENTER	6823		0	0
	18	DEPART	6823		0	0
	19	ADVANCE	6823		2	0
	20	ADVANCE	6821		28	0
	21	LEAVE	6793		0	0
	22	SAVEVALUE	6793		0	0
	23	SAVEVALUE	6793		0	0
	24	TERMINATE	6793		0	0
	25	GENERATE	1		0	0
	26	TERMINATE	1		0	0

QUEUE	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY (0)	AVE. CONT.	AVE. TIME	AVE. (-0)	RETRY
KLIENT	10	10	6833	30	9.306	1176.647	1181.835	0

STORAGE	CAP.	REM.	MIN.	MAX.	ENTRIES	AVL.	AVE. C.	UTIL.	RETRY	DELAY
TAXI	30	0	0	30	6823	1	29.949	0.998	0	10
TEL	5	4	0	5	28487	1	0.989	0.198	0	0

SAVEVALUE	RETRY	VALUE
DOHOD	0	52311875.943
KLOBS	0	6793.000
NEOBSL	0	2788.000

Рисунок 8.9. Фрагмент звіту про результати моделювання

Задача 2. Розглянемо наступну задачу, текст якої взятий з [Прицкер]:

У великому універмазі планується ввести систему управління запасами радіоприймачів. Час між надходженнями замовлень на радіоприймачі має експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням 0,2 тижні. Якщо покупцю знадобився радіоприймач тоді, коли його в запасі немає, він у 80% випадків відправляється в інший найближчий магазин, представляючи тим самим продаж, що не відбувся для даного універмагу. У 20% таких випадків робиться повторне замовлення, і покупці чекають надходження наступної партії вантажу. Магазин використовує періодичну систему перегляду стану запасів, у якому запас проглядається кожні 4тижні і приймається рішення про необхідність здійснення замовлення. Стратегія прийняття рішення складається в розміщенні замовлення на доставку 72 радіоприймачів при досягненні контрольного рівня запасу. Поточний стан запасу визначається як наявний запас плюс замовлені раніше приймачі і мінус невдоволений попит. Якщо поточний стан запасів менше або дорівнює 18 радіоприймачам (контрольний рівень запасу), здійснюється розміщення замовлення. Час доставки (час між розміщенням замовлення і його одержання) постійний і складає 3 тижні. Початкові умови: стан запасу - 72 радіоприймача, невдоволеного попиту немає.

Визначити середню кількість радіоприймачів у запасі, частку нездійснених продаж, середній час між продажами, що не здійснилися, та частоту поповнень запасу.

Представимо модель розглядуваної системи засобами мереж Петрі. Виділимо події, які відбуваються в підсистемі обслуговування покупців:

- * надійшов покупець;
- * покупка радіоприймача;
- * товар відсутній.

Подія «надійшов покупець» відбувається з часовою затримкою $t = 0,2 \cdot \ln 2$. Подія «покупка радіоприймача» здійснюється за умов, що є замовлення в черзі покупців і є радіоприймач в запасі. Якщо ця подія не здійснюється, то здійснюється подія «товар відсутній». В результаті здійснення цієї події маркер надходить до позиції «замовлення?», з якої з імовірністю 0,8 надходить до позиції «невдоволений попит» і з імовірністю 0,2 - до позиції «замовлені радіоприймачі». Це відповідає умові задачі про те, що 80% покупців, які не змогли придбати радіоприймач, відправляються в інший магазин і тільки 20% покупців погоджуються очікувати надходження радіоприймачів до магазину і роблять замовлення.

Виділимо події, які відбуваються в підсистемі контролю та прийняття рішення про поповнення запасу:

- * настав час контролю стану запасу;
- * прийняття рішення про поповнення запасу;

- * здійснення контролю запасу;
- * контроль стану запасу закінчився.

Подія «настав час контролю запасу» відбувається кожні 4 тижні. Визначається поточне значення запасу за формулою:

$$k = \text{«поточний запас»} =$$

$$\text{«запас»} + \text{«замовлені радіоприймачі»} - \text{«невдоволений попит»},$$

де «запас» – це кількість маркерів у позиції «запас», «замовлені радіоприймачі» – це кількість маркерів у позиції «замовлені радіоприймачі», «невдоволений попит» – це кількість маркерів у позиції «невдоволений попит».

Рішення про задовільний стан запасу приймається, якщо позиція ««поточний запас» містить більше 19 маркерів. Інакше приймається рішення про незадовільний стан запасу і здійснюється подія «прийняття рішення про поновлення запасу».

Виділимо події, які відбуваються в підсистемі поповнення запасу:

- * доставка товару.

Доставка товару здійснюється за умови, що є рішення про поповнення запасу, протягом 3 тижнів. Кількість доставлених товарів складає 72 радіоприймачі.

Після таких міркувань отримуємо мережу Петрі, яка представлена на рисунку 8.10. За умовою задачі метою моделювання є визначення середньої кількості радіоприймачів у запасі та середній час між продажами, що не здійснилися. Середню кількість радіоприймачів в запасі знайдемо, спостерігаючи середню кількість маркерів у позиції «запас»:

$$Z = \frac{\sum_i (M(\text{запас})_i \cdot \Delta t_i)}{T_{\text{mod}}},$$

де $M(\text{запас})_i$ – значення маркірування в позиції «запас» протягом часу Δt_i , T_{mod} – загальний час моделювання.

Середній час між продажами, що не здійснилися, знайдемо, спостерігаючи відношення часу моделювання до загальної кількості невдоволеного попиту:

$$T_{\text{нездійсн}} = \frac{T_{\text{mod}}}{M(\text{загальний_невдоволений_попит})}.$$

Частку нездійснених продаж знайдемо, спостерігаючи загальний невдоволений попит у відношенні до загального попиту на радіоприймачі:

$$P_{\text{нездійсн}} = \frac{M(\text{загальний_невдоволений_попит})}{M(\text{загальний_попит})}.$$

Частоту поповнень запасу знайдемо спостерігаючи кількість поповнень запасу у відношенні до часу моделювання:

$$H = \frac{M(\text{загальний_невдоволений_попит})}{T_{\text{mod}}}.$$

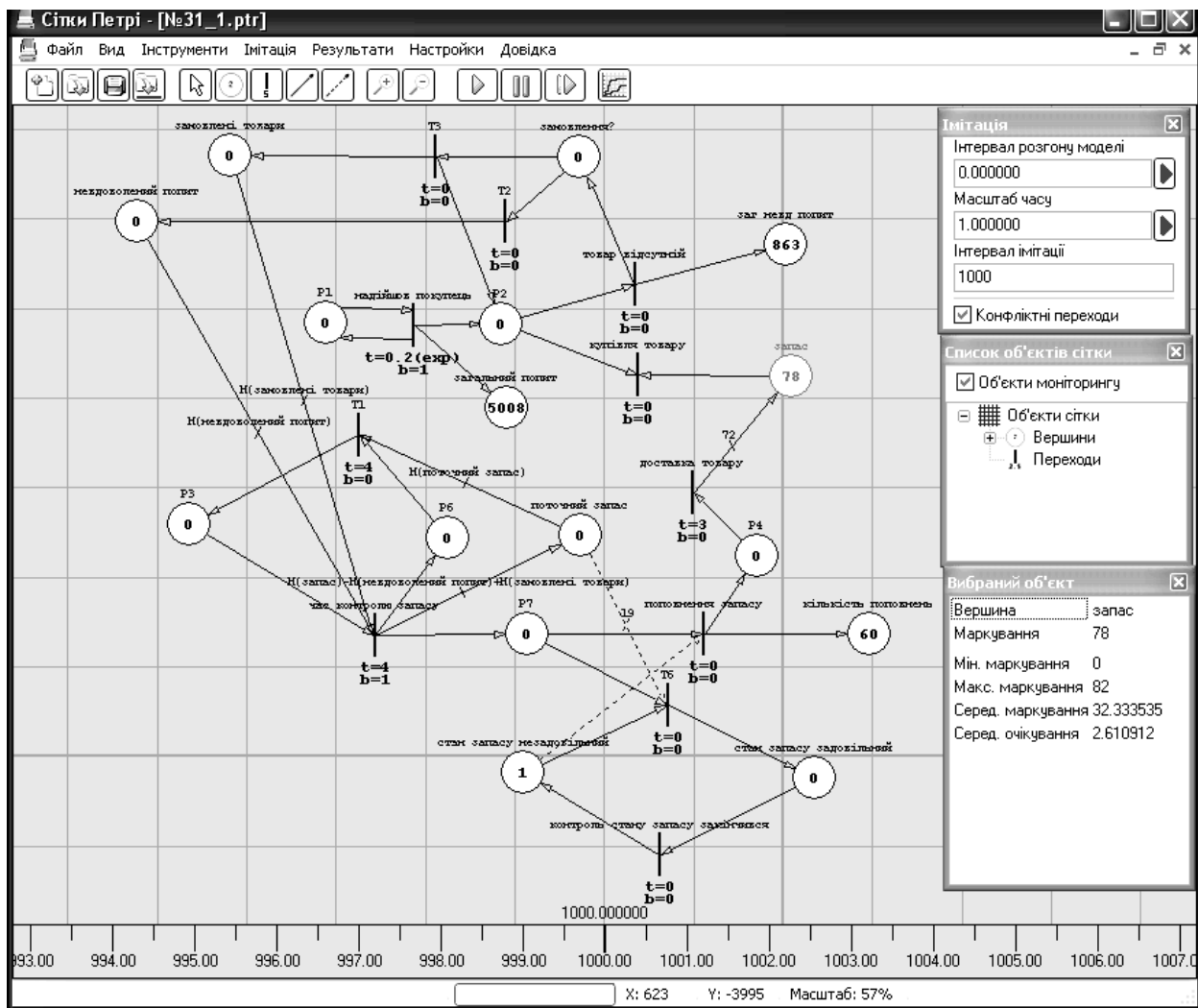


Рисунок 8.11. Результати моделювання системи постачання та продажу радіоприймачів в системі PTRSIM

При початкових значеннях параметрів моделі спостерігається загальний невдоволений попит у розмірі 863 радіоприймачі при загальній кількості попиту 5008 радіоприймачів. Отже, частка нездійснених продажів близько 17%, а середній час між нездійсненими продажами складає трохи більше 1 тижня (1,16 тижня). Середній запас радіоприймачів в магазині протягом часу моделювання 1000 тижнів складає близько 32 радіоприймачів. Максимальне спостережуване значення запасу складає 82 радіоприймачі. Частота поповнень запасу складає близько 0,06 поповнень/тиждень.

При збільшенні інтервалу надходження покупців до 0,4 тижні загальний невдоволений попит зменшився до 70 радіоприймачів при загальній кількості попиту 2482 радіоприймачів. Отже, частка нездійснених продажів зменшилась до 2%, а середній час між нездійсненими продажами збільшився до 0,2 тижні. Спостережуваний середній запас радіоприймачів складає близько 39 радіоприймачів. Максимальне спостережуване значення запасу складає 85 радіоприймачів. Частота поповнень запасу зменшилась до 0,03 поповнень/тиждень.

При зменшенні інтервалу надходження покупців до 0,1 тижня загальний невдоволений попит збільшився до 5786 радіоприймачі при загальній кількості попиту 9903 радіоприймачів. Отже, частка нездійснених продаж збільшилась до 58%, а середній час між нездійсненими продажами зменшився до 0,2 тижня. Спостережуваний середній запас радіоприймачів зменшився майже вдвічі (до 20 радіоприймачів). Максимальне спостережуване значення запасу зменшилось до 74 радіоприймачів. Частота поповнень запасу збільшилась до 0,07 поповнень/тиждень.

При збільшенні інтервалу між контролями запасу до 8 тижнів показники моделі майже не змінились. Але при збільшенні інтервалу між контролями запасу до 12 тижнів частка нездійснених продаж збільшилась до 51%, середній час між нездійсненими продажами збільшився до 2,5 тижнів. Частота поповнень запасу зменшилась до 0,04 поповнень/тиждень, внаслідок чого спостережуваний середній запас радіоприймачів зменшився майже вдвічі (до 21 радіоприймача) та максимальне спостережуване значення запасу зменшилось до 72 радіоприймачів.

При зменшенні кількості товарів, які доставляються, вдвічі частка нездійснених продаж збільшилась незначно до 23%, середній час між нездійсненими продажами збільшився також незначно до 1,2 тижні. Проте частота поповнень запасу зменшилась до 0,01 поповнень/тиждень, внаслідок чого спостережуваний середній запас радіоприймачів зменшився більше ніж удвічі (до 16 радіоприймачів) та максимальне спостережуване значення запасу зменшилось до 72 радіоприймачів.

Зменшення контрольного рівня запасу до 9 радіоприймачі призводить до збільшення частки нездійснених продаж до 30% і збільшення середнього часу між нездійсненими продажами до 1,5 тижні. Частота поповнень запасу зменшилась незначно до 0,05 поповнень/тиждень, внаслідок чого спостережуваний середній запас радіоприймачів зменшився більше до 28 радіоприймачів та максимальне спостережуване значення запасу зменшилось до 72 радіоприймачів.

На рисунку 8.12 представлений графік змінювання стану запасів при початкових значеннях параметрів.

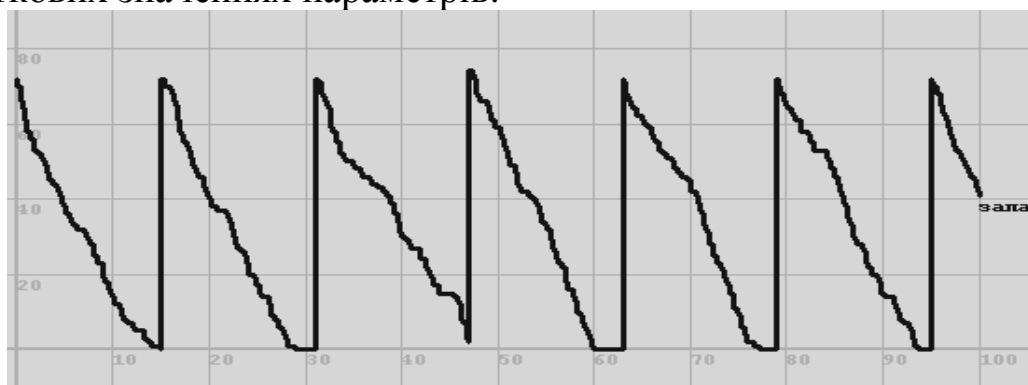


Рисунок 8.12. Графік змінювання стану запасів при початкових значеннях параметрів, представлений засобами системи PTRSIM

З наведених результатів перевірки моделі слідує, що модель функціонує у відповідності до задуму, і реалізація моделі в системі PTRSIM є успішною. Побудована модель може бути використана для дослідження оптимальної стратегії контролю та поповнення запасів товарів.

Задача 3. Розглянемо наступну задачу, текст якої взятий з [Томашевський, 2001]:

Експериментальна роботизована гнучка виробнича система має два верстати із числовим пультом керування, три роботи, пункт прибуття і склад оброблених деталей. Деталі прибувають на пункт прибуття кожні 40 секунд згідно з експоненціальним законом розподілу, захоплюються одним з вільних роботів і переміщуються ним до першого верстата, після чого робот звільняється. Після завершення обробки на першому верстаті деталь захоплюється одним з роботів і переміщується на другий верстат, а після обробки на другому верстаті – одним з роботів переміщується на склад оброблених деталей. Кожний з верстатів може одночасно обробляти до трьох деталей.

Час переміщення робота між пунктом прибуття і першим верстатом, першим і другим верстатом, другим верстатом і пунктом зберігання оброблених деталей складає відповідно 6, 7, і 5 секунд незалежно від того, холостий це хід, чи ні. Роботу потрібний час 8 ± 1 секунд на захоплення або вивільнення деталей. Час обробки на першому верстаті розподілений за нормальним законом із середнім значення 60 секунд і має стандартне відхилення 10 секунд. Середній час обробки на другому верстаті дорівнює 100 секунд і має експоненціальний закон розподілу.

Визначить найкращий (з точки зору підвищення пропускної здатності гнучкої виробничої системи) спосіб закріплення роботів до операцій. Можливі варіанти закріплення:

1) по одному роботу на кожний з трьох шляхів переміщення деталей (пункт прибуття – перший верстат, перший верстат – другий верстат, другий верстат, склад);

2) кожний робот може використовуватися на кожному шляху переміщення деталей.

Знайдіть коефіцієнти завантаження роботів і верстатів, максимальну та середню кількість деталей в очікуванні, середній час обробки деталі та середній час очікування деталі.

Розв'язання. Представимо процес проходження деталі за допомогою блоків Arena (рисунок 8.13). Вважатимемо спочатку, що три роботи закріплені по одному на кожний з трьох шляхів переміщення деталей.

Надходження деталей моделює блок Create з параметрами Name=pributtya, Entity type=detal, Type=Random(Expo), Value=40, Units=seconds. Захоплення деталі роботом, переміщення її до першого ве-

рстата та вивільнення робота моделює блок Process з параметрами Name=do verstata 1, Type=Standard, Action=Seize Delay Release, Resources=Robot 1, Delay Type=Uniform, Units=Seconds, Minimum=22, Maximum=24. Зауважимо, що в ресурсах указуються всі ресурси, що необхідні для обслуговування однієї деталі. В даному випадку це тільки один ресурс «Робот 1», але можна було б додати, наприклад ресурс «Працівник 1». Одночасно з переліком ресурсів в блоці Resources створюються рядки, що описують властивості цих ресурсів. Тут, наприклад, можна змінити кількість одночасно обслуговуваних деталей, що задає параметр Capacity. Але в даному випадку робот переміщує деталі по одній, тому залишаємо параметр Capacity рівним 1.

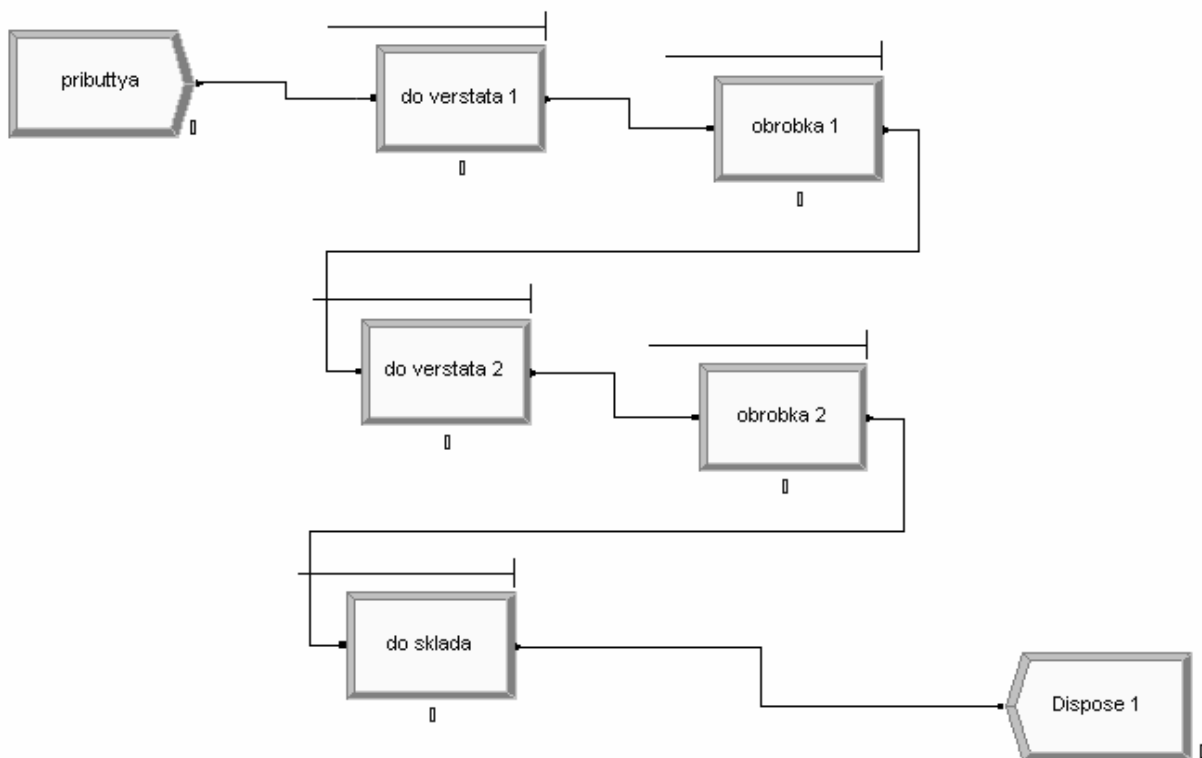


Рисунок 8.13. Модель робототехнічної системи, представлена засобами пакету Arena

Обробку деталі першим верстатом моделює блок Process з параметрами Name=obrobka 1, Type=Standard, Action=Seize Delay Release, Resources=verstat 1, Delay Type=Normal, Units=Seconds, Value=60, Std Dev=10 (рис. 8.14). Щоб верстат обслуговував одночасно три деталі, потрібно зайти в блок Resources і встановити параметр Capacity=3 для ресурсу з ім'ям verstat 1.

Захоплення деталі роботом, переміщення її до другого верстата та вивільнення робота моделює блок Process з параметрами Name=do verstata 1, Type=Standard, Action=Seize Delay Release, Resources= Robot 2, Delay Type=Uniform, Units=Seconds, Minimum=22, Maximum=24 (див. рис 8.14).

Обробку деталі другим верстатом моделює блок Process з параметрами Name=obrobka 2, Type=Standard, Action=Seize Delay Release, Resources=verstat 1, Delay Type=Expression, Units=Seconds, Expression=Exp(100) (див. рис 8.14). В блоці Resources потрібно встановити Capacity=3 для ресурсу з ім'ям verstat 2.

Захоплення деталі роботом, переміщення її до складу та вивільнення робота моделює блок Process з параметрами Name=do sklada, Type=Standard, Action=Seize Delay Release, Resources=Robot 3, Delay Type=Uniform, Units=Seconds, Minimum=19, Maximum=23 (див. рис 8.14).

Вивільнення деталі з процесу обслуговування здійснюється блоком Dispose.

Process - Basic Process														
	Name	Type	Action	Priority	Resources	Delay Type	Units	Allocation	Min	Value	Max	Std Dev	Expression	Re
1	do verstata 1	Standard	Seize Delay Release	Medium(2)	1 rows	Uniform	Seconds	Value Added	20	6	24	2	1	<input checked="" type="checkbox"/>
2	obrobka 1	Standard	Seize Delay Release	Medium(2)	1 rows	Normal	Seconds	Value Added	5	60	1.5	10	1	<input checked="" type="checkbox"/>
3	do verstata 2	Standard	Seize Delay Release	Medium(2)	1 rows	Uniform	Seconds	Value Added	21	6	25	2	1	<input checked="" type="checkbox"/>
4	obrobka 2	Standard	Seize Delay Release	Medium(2)	1 rows	Expression	Seconds	Value Added	5	100	1.5	10	EXPO(100)	<input checked="" type="checkbox"/>
5	do sklada	Standard	Seize Delay Release	Medium(2)	1 rows	Uniform	Seconds	Value Added	19	6	23	2	1	<input checked="" type="checkbox"/>

Рисунок 8.14. Параметри блоків Process

В результаті імітації побудованої моделі протягом 8 годин отримані такі результати (рис. 8.15, 8.16, 8.17):

- кількість оброблених деталей – 716 деталей;
- середнє завантаження першого верстата – 0,51;
- середня кількість деталей на обробці на першому верстаті – 1,52;
- максимальна кількість деталей на обробці на першому верстаті –
- середнє завантаження другого верстата – 0,81;
- середня кількість деталей на обробці на другому верстаті – 2,43;
- максимальна кількість деталей на обробці на другому верстаті –
- середнє завантаження першого робота – 0,56;
- середнє завантаження другого робота – 0,55;
- середнє завантаження третього робота – 0,55;
- середній час обробки однієї деталі – 314 с;
- середній час очікування однієї деталі – 90с, з них в очікуванні вільного робота – 6с, в очікуванні вільного першого верстата – 4с, в очікуванні вільного другого верстата – 80с;

Entity

Time

VA Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
detal	223.62	4,16627	104.06	922.25
NVA Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
detal	0	0,000000000	0	0
Wait Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
detal	90.1243	30,36628	0	379.23
Transfer Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
detal	0	0,000000000	0	0
Other Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
detal	0	0,000000000	0	0
Total Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
detal	313.74	30,90654	104.06	1,097.47

Other

Number In	Value
detal	728
Number Out	Value
detal	716

Рисунок 8.15. Звіт про результати моделювання Category by Replication

Process Detail Summary

Time per Entity

	Total Time	VA Time	Wait Time
do sklada	23,08	21,00	2,08
do verstata 1	24,27	22,02	2,25
do verstata 2	24,76	22,90	1,85
obrobka 1	64,53	60,20	4,33
obrobka 2	177,25	97,42	79,83

Рисунок 8.16. Звіт про результати моделювання Processes

Resource Detail Summary

Subreport: Summary

Usage

	Inst Util	Num Busy
Robot 1	0,56	0,56
Robot 2	0,55	0,55
Robot 3	0,55	0,55
verstat 1	0,51	1,52
verstat 2	0,81	2,43

Рисунок 8.17. Звіт про результати моделювання Resources

Змінимо закріплення роботів до операцій так, що кожний з вільних роботів може використовуватися на кожному шляху переміщення деталей. Для цього в моделі, яка складена, параметр Resources для процесів do verstata 1, do verstata 1, do sklada, потрібно задати як множина ресурсів, тобто тип Set, з ім'ям Set Robot (рисунок 8.18). Потім за допомогою блоку Set задати елементи множини ресурсів Robot 1, Robot 2, Robot 3. (рисунок 8.19).

	Type	Set Name	Quantity	Selection Rule	Save Attribute
1	Set	Set Robot	1	Cyclical	

Рисунок 8.18. Параметри блоку Resources для альтернативної моделі

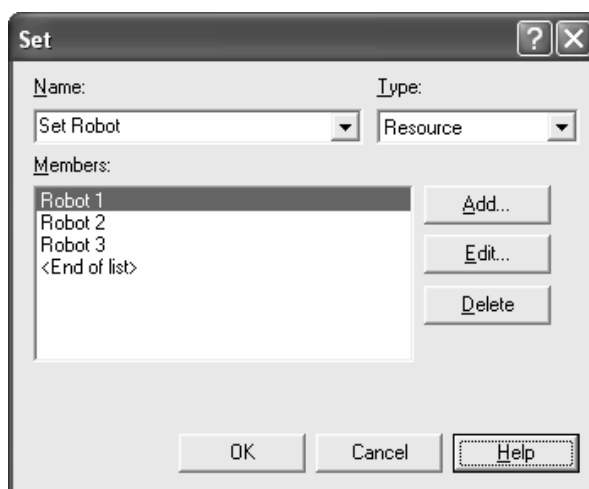


Рисунок 8.19. Параметри блоку Set

В результаті імітації альтернативної моделі протягом 8 годин отримані такі результати:

- кількість оброблених деталей – 745 деталей;
- середнє завантаження першого верстата – 0,52;
- середня кількість деталей на обробці на першому верстаті – 1,56;
- середнє завантаження другого верстата – 0,80;
- середня кількість деталей на обробці на першому верстаті – 2,40;
- середнє завантаження першого робота – 0,57;
- середнє завантаження другого робота – 0,60;
- середнє завантаження третього робота – 0,54;
- середній час обробки однієї деталі – 356 с;
- середній час очікування однієї деталі – 137с, з них в очікуванні вільного робота – 35с, в очікуванні вільного першого верстата – 1с, в очікуванні вільного другого верстата – 101с.

Таким чином, в результаті моделювання встановлено, що з точки зору зменшення часу очікування деталі, а також середнього часу обробки однієї деталі вдалим являється закріплення роботів по одному роботу на кожний з трьох шляхів. Запропонований альтернативний спосіб закріплення роботів призводить до збільшення часу обробки деталі на 12%.

8.5. Завдання для самостійної роботи

Розв'яжіть задачі моделювання 1-14 з використанням програмного забезпечення, яке на Вашу думку найбільш пристосоване для розв'язання задачі.

□ **Задача 1.** У приватній телефонній мережі для здійснення зовнішнього виклику необхідна наявність телефонних ліній двох типів: 1) лінія для переговорів (голосова), називана надалі Л1, 2) лінія для передачі цифрової інформації (номера телефону), називана надалі Л2. Оскільки передача номера займає значно менший час, чим розмова, у мережі встановлено 10 ліній Л1 і одна лінія Л2. Як показали результати статистичних досліджень, інтервали часу між зовнішніми викликами розподілені за експоненціальним з математичним сподіванням 1 хвилин (мінімум дорівнює 0 хвилин, а максимум дорівнює 60 хвилин). Якщо всі лінії Л1 зайняті в момент виклику, абонент «повисає» на телефоні і набирає набраний номер знову з інтервалом T хвилин, де T - нормально розподілена величина з очікуванням 15 хвилин, середньоквадратичним відхиленням 2 хвилин, мінімумом 0 і максимумом 60 хвилин. При вільній лінії Л1 абонент, якщо це необхідно, очікує звільнення лінії Л2. Лінія Л1 займається на час очікування лінії Л2. Коли лінії обох типів вільні, абонент набирає номер, причому час набору номера розподілений за експоненціальним законом з очікуванням 0,2 хвилин, мінімумом 0,1 хвилин і максимумом 0,5 хвилин лінія Л2 звільняється, а лінія Л1 займається на весь час розмови, що розподілений за експоненціальним законом з математичним сподіванням 10 хвилин, мінімумом 3 хвилини і максимумом 30 хвилин.

Визначити статистичні характеристики наступних величин:

- тривалості набору номера;
- тривалості телефонної розмови;
- загального часу здійснення зв'язку;
- завантаження ліній Л1 і Л2;
- частоти невдалих спроб здійснення зв'язку.

□ **Задача 2.** У хімчистці виконується обробка костюмів-двоєк. Костюми надходять у середньому з інтервалом 10 хвилин. Всі костюми спочатку проходять обробку у оператора 1. Якщо оператор зайнятий, то костюми очікують у черзі з дисципліною обслуговування FIFO. Після обробки у оператора 1 одна частина костюму (піджак) надходить до оператора 2, а інша частина (брюки) - до оператора 3. Під час обробки піджака оператором 2 ймовірність його пошкодження складає 0,05, а ймовірність пошкодження брюк оператором 3 – 0,1. Після обробки у оператора 2 піджаки надходять у чергу до оператора 4. Брюки після обробки оператором 3 надходять теж до оператора 4, але в іншу чергу. Оператор 4 збирає частини

костюму в один костюм. Якщо обидві частини зібраного костюму не пошкоджені, костюм повертається клієнту. Якщо одна або обидві частини костюму пошкоджені, костюм надходить до відділу роботи з клієнтами, де працює оператор 5. Всі інтервали часу за припущенням мають експоненціальний розподілу Середні значення часу обробки кожним оператором указані у таблиці.

Номер оператора	Середній час обслуговування, хвилини
1	6 (костюм)
2	5 (піджак)
3	4 (брюки)
4	5 (непошкоджений костюм)
4	8 (пошкоджений костюм)
5	12 (костюм)

Визначити:

- максимальний та середній час перебування костюмів у хімчистці для обох типів костюмів – пошкоджених та непошкоджених;
- максимальну та середню довжину кожної черги;
- коефіцієнт завантаження кожного оператора.

□ Задача 3. На складальну ділянку цеху підприємства через інтервали часу, розподілені за експоненціальним законом із середнім значенням 10 хвилин, надходять партії, кожна з яких складається з трьох деталей. Половина всіх деталей, що надходять, перед зборкою повинна пройти попередню обробку протягом 7 хвилин. На зборку подаються оброблена і необроблена деталі. Процес зборки займає усього 6 хвилин. Потім виріб надходить на регулювання, що продовжується в середньому 8 хвилин (час виконання її розподілений за експоненціальним законом). У результаті зборки можлива поява 4% бракованих виробів, що не надходять на регулювання, а направляються знову на попередню обробку.

Визначити:

- місця виникнення черг;
- середнє та максимальне значення черг в місцях їх виникнення;
- середню кількість деталей, що знаходиться на складальній ділянці цеху

Запропонувати заходи для зменшення черг деталей і знайти середню кількість деталей, що знаходиться на складальній ділянці цеху, для змінної системи.

□ Задача 4. На обробну ділянку цеху надходять деталі в середньому через 50 хвилин. Первинна обробка деталей відбувається на одному із двох верстатів. Перший верстат обробляє деталь у середньому 40 хвилин і має до

4% браку, другий - відповідно 60 хвилин і 8% браку. Всі браковані деталі повертаються на повторну обробку на другий верстат. Деталі, що потрапили в розряд бракованих двічі, вважаються відходами. Вторинну обробку проводять також два верстати в середньому 100 хвилин кожний. Причому перший верстат обробляє наявні в накопичувачі після первинної обробки деталі, а другий верстат підключається при наявності в накопичувачі більше трьох деталей. Всі інтервали часу мають експоненціальний розподіл.

Визначити:

- завантаження другого верстата на вторинній обробці і можливість появи відходів;
- вплив зменшення умови підключення другого верстату до двох або одної деталі на завантаження другого верстата на вторинній обробці.

□ Задача 5. На маршруті приміського сполучення працюють два мікроавтобуси (А і В), кожний з яких має n місць. Мікроавтобус А користується більшою популярністю, ніж автобус В, оскільки водій мікроавтобуса А їздить акуратніше і швидше. Тому пасажир, який підійшов до зупинки, сідає в мікроавтобус В тільки у випадку, коли автобуса А немає. Мікроавтобус відправляється на маршрут, якщо всі місця в ньому зайняті. Пасажири підходять до зупинки через $0,5 \pm 0,2$ хвилин і, якщо немає мікроавтобусів, утворюють чергу. Якщо черга більша, ніж 30 осіб, то пасажир не стає у чергу і йде до іншого маршруту. Припускається, що всі пасажири їдуть до кінця маршруту. На проходження маршруту мікроавтобус А витрачає 20 ± 5 хвилин, а мікроавтобус В – 30 ± 5 хвилин. Після того, як пасажири звільнили автобус (протягом часу 5 ± 1 хвилин), він їде у зворотному напрямку тим же чином.

Плата за проїзд складає 2 гривні. Авто підприємство стільки ж втрачає (недоотримує), якщо пасажир, прийшовши на зупинку, не стає у чергу і обирає інший маршрут.

Визначити:

- час очікування пасажирів у черзі;
- кількість місць n (не більше 25), при якому час очікування в черзі пасажирів буде мінімальним;
- виручку автопідприємства за день від маршруту, якщо мікроавтобуси працюють 10 годин на добу.

□ Задача 6. Виробнича система складається з п'яти автоматизованих робочих місць. На теперішній момент міста 1,2,3,4,5 включають відповідно 3,2,4,3 і 1 однакових станків. Роботи надходять у систему з інтервалами, що є незалежними величинами, що розподілені за експоненціальним законом із середнім значенням 0,25 години. Існує три типи робіт: 1,2 і 3, що виникають із ймовірностями 0,3, 0,5 і 0,2. Для робіт 1,2,3 потрібно ви-

конання 4,3 та 5 завдань відповідно. Завдання повинні виконуватися на указаних місцях у визначеному порядку. Для різних типів робіт використовуються наступні технологічні маршрути:

Тип роботи	Робочі місця у відповідності до технологічного маршруту
1	3,1,2,5,
2	4,1,3
3	2,5,1,4,3

Отже, якщо надходить робота типу 2, то буде виконано три завдання: перше – на 4-ому робочому місці, друге – на 1-ому робочому місці, а третє – на 3-ому робочому відповідності. якщо робота надійшла на певне робоче місце у той момент, коли всі станки, закріплені за цим робочим місцем, зайняті, то займає місце у черзі очікування цього робочого місця за правилом FIFO. Час виконання завдання на кожному станку є незалежною випадковою величиною, що має закон розподілу Ерланга 2-ого порядку із середнім значенням, що залежить від типу роботи та від робочого місця, за яким закріплений станок. Середній час обслуговування для кожного типу робіт та кожного завдання за дані в наступній таблиці:

Тип роботи	Середній час обслуговування кожного завдання у відповідності до технологічного маршруту роботи, години
1	0,5; 0,6; 0,85; 0,5
2	1,1; 0,8; 0,75;
3	1,24; 0,25; 0,7; 0,9; 1,0

Таким чином, для роботи 2 потрібний час для виконання 1,1 година на робочому місці 4, 0,8 години на робочому місці 1 та 0,75 години на третьому робочому місці.

Визначити:

- середній час. витрачений роботами на очікування;
- середній час виконання роботи;
- коефіцієнти завантаження робочих місць.

□ Задача 7. Кораблі надходять до гавані із часом між надходженнями, що є випадковою величиною з експоненціальним розподілом і середнім значенням 1,25 дня. У гавані є док з двома якірними стоянками та двома кранами для розвантаження кораблів. Кораблі, що надійшли у момент, коли обидві якірні стоянки зайняті, очікують у черзі з дисципліною обслуговування FIFO, Час, потрібний для розвантаження одним краном одного корабля, рівномірно розподілений між 0,5 та 1,5 дня. Якщо у гавані тільки корабель, розвантаженням корабля займаються обидва крани і час розван-

таження (час, що залишився) зменшується вдвічі. Якщо надходить ще один корабель, то один кран без затримки відправляється його розвантажувати. Інший кран продовжує розвантажувати корабель, що надійшов раніше, а час, що залишився на його обслуговування збільшується вдвічі.

Визначити:

- мінімальний, максимальний та середній часу обслуговування кораблів у гавані;
- завантаження якірних стоянок та кранів.

□ Задача 8. У кар'єрі вантажівки доставляють руду від трьох екскаваторів до одної дробівки. Вантажівки приписані до певних екскаваторів, так що кожна вантажівка завжди повертається до свого екскаватора після того, як вивантажила руду біля дробівки. Використовуються вантажівки двох видів; вантажопідймальністю 20 і 50 тон. Вантажопідймальність впливає на час вантаження машин екскаватором, час переїзду до дробівки, час розвантаження та час повернення до екскаватору. Числові характеристики цих величин наведені у таблиці.

Процес	Час для 20-тонної вантажівки	Час для 50-тонної вантажівки
Вантаження	Випадкова величина з експоненціальним розподілом із середнім значенням 5 хвилин	Випадкова величина з експоненціальним розподілом із середнім значенням 10 хвилин
Переїзду до дробівки	Постійна величина 2,5 хвилини	Постійна величина 3 хвилини
Розвантаження	Випадкова величина з експоненціальним розподілом із середнім значенням 5 хвилин	Випадкова величина з експоненціальним розподілом із середнім значенням 4 хвилини
Повернення до екскаватору	Постійна величина 1,5 хвилини	Постійна величина 2 хвилини

До кожного екскаватору закріплені дві вантажівки 20-тонна та 50-тонна. Всі черги до екскаваторів мають дисципліну обслуговування FIFO. У черзі до дробівки машини стоять у порядку зменшення їх вантажопідймальності, а при однаковій вантажопідймальності – за правилом FIFO.

Визначити:

- середню кількість вантажівок у кожного екскаватора та у дробівки;
- завантаження кожного екскаватора та дробівки.

□ Задача 9. Студентське кафе в університеті намагається поліпшити якість обслуговування. У час найбільшого напливу клієнтів, що спостеріга-

ється з 11.30 до 13.00, клієнти надходять групами по 1, 2, 3 та 4 студенти з ймовірностями 0,5; 0,3; 0,1 та 0,1 відповідно. Інтервали часу між прибуттям груп клієнтів мають експоненціальний закон розподілу з середнім значенням 30 секунд. Кожний клієнт обирає один із трьох маршрутів по кафетерію:

- § пункт видачі гарячих блюд, пункт видачі напоїв, каса;
- § пункт видачі холодних закусок, пункт видачі напоїв, каса;
- § пункт видачі напоїв, каса.

Ймовірності вибору маршрутів складають 0,8; 0,15 та 0,05 відповідно. На видачі гарячих блюд та на видачі холодних закусок клієнтів обслуговують по одному. На видачі напоїв організовано самообслуговування так, що на цьому пункті ніколи не виникає черга. На пункті каса клієнтів обслуговують дві каси. У кожній касі своя черга клієнтів. З двох черг студенти обирають ту, що більш коротка. Перехід клієнтів з однієї черги в іншу не можливий.

Час обслуговування у пункті видачі гарячих блюд розподілений рівномірно в інтервалі від 50 до 120, у пункті видачі холодних закусок – рівномірно від 60 до 180, у пункті видачі напоїв – від 5 до 20. Час обслуговування у пункті каса розраховується в залежності від того на яких пунктах побував клієнт до каси. Якщо клієнт обслуговувався у пункті видачі гарячих блюд, то до часу його обслуговування на касі додається випадкова величина, що рівномірно розподілена в інтервалі від 20 до 40. Якщо клієнт обслуговувався у пункті видачі холодних блюд, то до часу його обслуговування на касі додається випадкова величина, що рівномірно розподілена в інтервалі від 5 до 15. Якщо клієнт обслуговувався у пункті видачі напоїв, то до часу його обслуговування на касі додається випадкова величина, що рівномірно розподілена в інтервалі від 5 до 10.

- Визначити максимальний та середній часу очікування в усіх чергах;
- максимальну та середню кількість клієнтів в усіх чергах;
- максимальний та середній час очікування клієнта у чергах окремо по кожному маршруту;
- максимальну кількість клієнтів в кафетерії;
- середню кількість клієнтів в кафетерії.

□ Задача 10. П'ятиповерхову офісну будівлю обслуговує один ліфт. Інтервали часу між надходженням людей на перший поверх є випадковою величиною, що розподілена за експоненціальним законом із середнім значенням 1 хвилина. Для кожного з інших поверхів ймовірність того, що людина прямує саме на цей поверх, дорівнює 0,25. Час, потрібний для переміщення ліфту на один поверх складає 15 секунд. Час, потрібний для завантаження та розвантаження ліфту, не враховується. На певному поверсі людина залишається протягом часу, що є випадковою величиною рівномі-

рно розподіленою в інтервалі від 15 до 120 хвилин. Коли людина залишає поверх (2,3,4,5), то з ймовірністю 0,7 вона прямує на перший поверх і з ймовірністю 0,1 прямує на один із інших поверхів. Місткість ліфту – 6 людей. Якщо людина не вміщується у ліфт, то вона залишається в очікуванні ліфту на своєму поверсі. На початку моделювання ліфт знаходиться на першому поверсі.

Ліфт має таку логіку управління:

§ ліфт піднімається уверх, якщо в ньому є пасажир, що прямує на верхні поверхи, або на верхньому поверсі є людина, що очікує ліфту;

§ ліфт спускається униз, якщо в ньому є пасажир, що прямує на нижні поверхи, або на нижньому поверсі є людина, що очікує ліфту;

§ якщо ліфт прямує уверх і проходить повз поверху, на якому ліфт очікує пасажир, що прямує униз, то ліфт не зупиняється;

§ якщо ліфт вільний, то він знаходиться на першому поверсі;

§ на кожному поверсі ліфт визначає, куди він прямує далі – уверх чи вниз, між поверхами ліфт не змінює напрямку руху.

Визначити:

- середній час очікування в усіх чергах (на кожному поверсі у двох напрямках вверх і униз);
- долю часу, коли ліфт перевозить пасажирів, коли рухається без пасажирів, коли не рухається;
- максимальну та середню кількість людей у ліфті;
- долю пасажирів, що не могли сісти у ліфт з причини його переповнення.

□ Задача 11. Флот, що складається з 15 танкерів, здійснює перевезення сирої нафти з Валдизу (штат Аляска) у Сіетл (штат Вашингтон). Передбачається, що всі танкери при необхідності можуть бути завантажені у Валдизі одночасно. У Сіетлі є тільки один розвантажувальний док, із якого що розвантажуються нафта поступає в сховище, а потім по трубопроводі - на очисну установку. Нафта поступає в сховище з танкеру, що розвантажуються в доці, з постійною швидкістю 300 тб/день. Сховище безупинно постачає сировою нафтою очисну установку з постійною швидкістю 150тб/день. Розвантажувальний док працює з 6.00 до 24.00. Правила безпеки вимагають припинення розвантаження в момент закриття доку. Розвантаження танкера закінчується, коли об'єм нафти, що залишилася у танкері, стає менше 7,5тб. Ємність сховища дорівнює 200тб. Коли сховище заповнене до границі, розвантаження переривається доти, поки обсяг нафти в сховище не знизиться до 80% його ємності. Коли сховище стає майже порожнім (менше 5тб), постачання очисної установки припиняється доти, поки об'єм нафти в сховище не стане рівним 50тб. Це робиться для усуну-

нення можливості частих припинень і запусків очисної установки. Характеристики танкерів наступні: номінальна вантажність дорівнює 150тб; час у дорозі завантаженого танкера розподілений нормально з математичним сподіванням 5,0 днів і середньоквадратичним відхиленням 1,5 дня; час у дорозі порожнього танкера розподілений нормально з математичним сподіванням 4,0 днів і середньоквадратичним відхиленням 1,0 день; час навантаження розподілений рівномірно на інтервалі від 2,9 до 3,1 дня. Початкові умови відповідають ситуації, коли сховище заповнене наполовину, а танкери прибувають під навантаження з інтервалом 0,5 дня, починаючи з нульового моменту часу.

Одержати статистичні характеристики наступних величин:

- використання розвантажувального і навантажувального доку;
- час, протягом якого очисна установка постачається нафтою;
- об'єм нафти в сховищі;
- тривалість повного рейсу танкера;
- час очікування танкера;
- кількість танкерів, що очікують розвантаження.

□ Задача 12. У лікарню поступають хворі таких трьох типів: 1) хворі, що пройшли попереднє обстеження і направлені на лікування; 2) хворі, що бажають потрапити в лікарню, але не пройшли цілком попереднє обстеження; 3) хворі, які тільки що поступили на попереднє обстеження. Часи обслуговування хворих різноманітних типів у приймальному відділенні розподілені відповідно до такої таблиці:

<i>Тип хворого</i>	<i>Відносна частота</i>	<i>Середній час реєстрації, хв</i>
1	0,9 до 10.00 і 0,5 після 10.00	15
2	0,1 у будь-який час від 0.00 до 10.00	40
3	0,4 після 10.00	30

При надходженні в приймальне відділення хворий стає в чергу, якщо обидва чергових лікарі зайняті. Лікар, що звільнився, вибирає в першу чергу тих хворих, що вже пройшли попереднє обстеження. Після заповнення різноманітних форм у приймальне відділення хворі 1 типу ідуть прямо в палату, а хворі типів 2 і 3 направляються в лабораторію. Троє супровідних розводять хворих по палатах. Хворим не дозволяється направлятися в палату без супровідного. Якщо всі супровідні зайняті, хворі очікують їхнього звільнення в приймальному відділенні. Як тільки хворий доставлений у палату, він вважається таким, що закінчив процес прийому

до лікарні. Супровідному потребується 3 од. часу для того, щоб повернутися в приймальне відділення після доставки хворого в палату. Хворі, що спрямовуються в лабораторію, не потребують супроводу. Після прибуття в лабораторію хворі стають у чергу в реєстратуру. Після реєстрації вони ідуть у кімнату очікування, де чекають виклику до одного з двох лаборантів. Після здачі аналізів хворі або повертаються в приймальне відділення (якщо їх приймають у лікарню), або залишають лікарню (якщо їм було призначено тільки попереднє обстеження). Після повернення в приймальне відділення хворий, що здав аналізи, розглядається як хворий типу 1. Приймальне відділення відкрите з 7.00 до 17.00. Проте попередні обстеження (тип 3) не призначаються до 10.00 через ранкове переобтяження лабораторії. Хворі, що поступають після 16.00, направляються в профілакторій. Проте хворі типу 2, що повертаються з лабораторії, приймаються до 17.00, тобто доти, поки чергові лікарі не закінчать роботу і приймальне відділення не закриється. У наступній таблиці приводяться дані по тривалості дій (хв):

<i>Величина</i>	<i>Розподіл</i>
Час між прибуттями в приймальне відділення	експоненціальний з математичним сподіванням 15
Час проходження в палату	Рівномірний від 3 до 8
Час проходження з приймального відділення в лабораторію або з лабораторії в приймальне відділення	Рівномірний від 2 до 5
Час обслуговування в реєстратуру лабораторії	Ерланга з математичним сподіванням 4,5 і $k=3$
Час проведення аналізу в лабораторії	Ерланга з математичним сподіванням 4 і $k=2$

Визначити:

- час, проведений хворим у системі, тобто інтервал часу, починаючи з надходження і закінчуючи доставкою в палату (для хворих типу 1 і 2) або виходом із лабораторії (для хворих типу 3);
- середні та максимальні довжини черг хворих;
- інтервал між прибуттями хворих у лабораторію.

Припустити, що всі черги мають необмежену довжину й організовані за правилом FIFO.

□ Задача 13. У цеху є шість верстатів, що здійснюють різні операції. За попередньою оцінкою час виконання роботи на кожному верстаті розпо-

ділений за експоненціальним законом з математичним сподіванням, рівним 20 хвилин, причому значення часу виконання роботи округляється до цілого і не може бути менше 1 хвилини. Дійсний час виконання роботи дорівнює часу по попередній оцінці плюс випадкова величина, що має нормальний розподіл із нульовим математичним сподіванням і середньоквадратичним відхиленням, рівним 0,3, від часу по попередній оцінці (ця випадкова компонента є білим шумом). Відзначимо, що виробництво в цеху організовано таким чином, що середній час виконання роботи на кожному верстаті однаковий. Роботи в цех поступають з інтервалом, який має експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням 25 хвилин. Інтервал між надходженням робіт округляється до цілого і не може бути менше 1 хвилини. Кожна робота складається з набору операцій, здійснюваних на розміщених у цеху верстатах. Кількість операцій, із яких складаються роботи, нормально розподілена з математичним сподіванням, рівним 4 хвилин, і середньоквадратичним відхиленням, рівним 1 хвилині. При цьому жодна з робіт не може містити менше трьох і більш шести операцій. Ймовірності включення k операцій у роботу можуть бути отримані з таблиць нормального розподілу і мають такі значення:

Кількість операцій, з яких складається робота	Ймовірність
3	0,3085
4	0,3830
5	0,2417
6	0,0668

Маршрут роботи призначається випадковим способом. Єдиним керуючим параметром із погляду планувальника є порядок, у якому виконуються роботи. У даній системі пропонується такий спосіб визначення порядку. Пріоритетними є роботи з негативним рівнем. Рівень роботи визначається як час готовності мінус поточний час, мінус оцінка часу виконання операцій, що залишилися, мінус час, що враховує фактор безпеки. Таким чином, роботи перед кожним верстатом діляться на два класи, причому роботи в кожному класі упорядковані в порядку зростання оцінки часу їхнього виконання.

Визначити статистичні характеристики:

- часу виконання роботи,
- завантаження верстатів, кількість робіт у чергах;
- середній інтервал часу між надходженнями робіт;
- кількість робіт, виконаних із запізненням, тобто після часу готовності; середнє «запізнення» робіт до моменту готовності.

Замініть процедуру визначення часу готовності, збільшивши його на середнє «запізнення» і проаналізуйте результати.

□ Задача 14. В оптовому магазині використовується нова процедура обслуговування клієнтів. Клієнти, що потрапляють у магазин, визначають по каталогу найменування товарів, які вони хотіли б придбати. Після цього клієнт обслуговується клерком, що йде на розташований поруч склад і приносить необхідний товар. Кожний із клерків може обслуговувати одночасно не більш шести клієнтів. Час, що витрачає клерк на дорогу до складу, рівномірно розподілений на інтервалі від 0,5 хвилин до 1,5 хвилин. Час пошуку товару потрібного найменування залежить від числа найменувань, які клерк повинний знайти на складі. Цей час нормально розподілений із математичним сподіванням, рівним потроєному числу шуканих найменувань, і середньоквадратичним відхиленням, рівним 0,2 математичного сподівання. Отже, якщо, наприклад, із складу треба взяти товар одного найменування, час на його пошук буде нормально розподілено з математичним сподіванням, рівним 3 хвилин, і середньоквадратичним відхиленням, рівним 0,6 хвилин. Час повернення зі складу рівномірно розподілений на інтервалі від 0,5 до 1,5 хвилин. Після повернення зі складу клерк розраховується з усіма клієнтами, яких він обслуговує. Час розрахунку з клієнтом рівномірно розподілений на інтервалі від 1 до 3 хвилин. Розрахунок відбувається в тому порядку, у якому до клерка поступали вимоги на товар. Інтервали між моментами надходження вимог на товари від клієнтів мають експоненціальний розподіл з математичним сподіванням 2 хвилини. Клієнтів у магазині обслуговують три клерки.

Визначити наступні величини:

- завантаження клерків;
- час, необхідний на обслуговування одного клієнта з моменту подачі вимоги на товар до оплати рахунку на покупку;
- кількість вимог, що задовольняються клерком за один вихід на склад.

Замініть процедуру обслуговування клієнтів таким чином, що у випадку обслуговування тільки одного клієнта клерк чекає протягом 1 хвилини можливої появи інших клієнтів перед тим, як відправитися на склад. Визначите вплив цієї стратегії обслуговування на характеристики часу очікування клієнта і завантаження клерків. Введіть ймовірність доставки неправильно обраного клерком товару, рівну 0,15. Коли це відбувається, клерк негайно повертається на склад для відшукування товару потрібного найменування. Крім того, із ймовірністю 0,1 замовленого товару може на виявитися на складі. Коли це відбувається, клієнт із ймовірністю 0,25 замовляє інше найменування. Оцініть вплив цих уточнень моделі на завантаження клерка і час очікування клієнта.

8.6. Контрольні запитання

1. При яких умовах можливе використання мови GPSS для цілей моделювання?
2. Які оператори GPSS Ви знаєте?
3. Побудуйте фрагмент GPSS-програми для моделювання одноканальної СМО.
4. Який оператор здійснює передачу управління в мові GPSS?
5. Який фрагмент GPSS-програми відповідає за запуск моделі?
6. Як мова GPSS дозволяє моделювати розгалуження маршрутів в системі масового обслуговування?
7. Як моделюється багатоканальна система масового обслуговування засобами мови GPSS?
8. Що Вам здалося найбільш зручним в мові GPSS?
9. Які моменти використання мови GPSS Ви вважаєте незручними?
10. Які конструктивні елементи системи імітаційного моделювання PTRSIM?
11. Що таке інформаційний зв'язок? Наведіть приклади використання інформаційних зв'язків.
12. Які генератори випадкових чисел вбудовані в систему PTRSIM? Яких генераторів випадкових чисел не вистачає?
13. Які можливості системи PTRSIM розширюють межі її використання для цілей імітаційного моделювання систем?
14. Які зручності інтерфейсу системи PTRSIM на Вашу думку є найбільш вдалимими?
15. Які конструктивні елементи програмного забезпечення Arena?
16. При яких умовах можливе дослідження системи засобами програмного забезпечення Arena?
17. Як можливість створення ієрархічної моделі розширює межі використання пакету Arena для цілей імітаційного моделювання систем?
18. Які генератори випадкових чисел вбудовані в Arena?
19. Які зручності інтерфейсу системи Arena на Вашу думку є найбільш вдалимими?
20. Які складові частини пакету Arena?
21. Що є найважчим на Вашу думку в оволодінні засобами пакету Arena?

Розділ 9

МЕТОДИ САМООРГАНІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ

9.1. Основні поняття теорії самоорганізації моделей

Методи самоорганізації моделей застосовують з метою отримання моделі довгострокового прогнозу за результатами спостережень над об'єктом дослідження. Під самоорганізацією моделей розіумють вибір з великої кількості моделей-претендентів єдиної моделі оптимальної складності (МОС), яка володіє певними властивостями, що сформульовані у вигляді критеріїв.

Основна ідея самоорганізації моделей заключається в тому, що всі дані про об'єкт спостереження поділяють на дві частини A і B . Частину таблиці даних A використовують для визначення параметрів моделі і називають *навчальною послідовністю даних*. Частину таблиці даних B використовують при виборі моделі оптимальної складності і називають *перевірочною послідовністю даних*. До частини таблиці даних B можуть відноситися тільки дані, які не використовувались при визначенні параметрів моделі-претендента, тобто які не входили до частини B .

За даними навчальної послідовності даних без додаткової зовнішньої інформації принципово неможливо знайти єдину модель оптимальної складності. Дійсно, середньоквадратична похибка $D^2(A)$ зі збільшенням складності моделі S завжди зменшується (рис. 9.1) і досягає нуля. Наприклад, через n точок завжди можна провести поліном $n-1$ степеня.

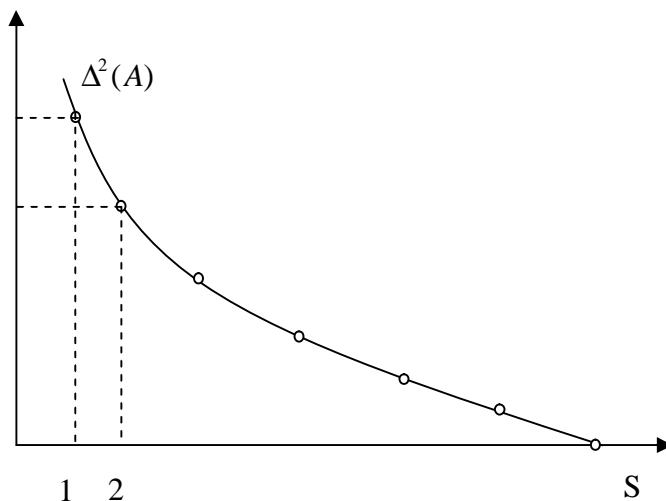


Рисунок 9.1. Залежність внутрішнього критерію від складності моделі

Складність моделі визначається мінімальною кількістю даних спостережень, необхідною для визначення всіх параметрів моделі за умови точних даних. Наприклад, для визначення двох параметрів b_0 , b_1

найпростішої моделі, що описується лінійним рівнянням $y=b_0+b_1x$ потрібно мінімум два спостереження (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , для визначення трьох параметрів моделі, що описується квадратичним рівнянням $y=b_0+b_1x+b_2x^2$ потрібно мінімум три спостереження. Тому квадратична модель складаніша за лінійну. Але у випадку декількох змінних $x_j, j=1, \dots, n$ маємо декілька лінійних моделей виду $y=b_0+b_1x_j$. Як упорядкувати моделі за складністю, якщо вони мають однакову складність?

Критерій, що використовується для визначення параметрів моделі, називають *внутрішнім критерієм*. Найчастіше внутрішнім критерієм слугує середньо-квадратична похибка, що визначається за формулою:

$$\Delta^2(A) = \frac{\sum_{i=1}^{N_A} (y_i^{табл} - y_i^M)^2}{\sum_{i=1}^{N_A} (y_i^{табл})^2} \rightarrow \min, \quad (9.1)$$

де $y_i^{табл}$ – табличне значення вихідної змінної y в точці x_i , y_i^M – значення вихідної змінної y в точці x_i , яке розраховане за моделлю, N_A – кількість точок.

Значення внутрішнього критерію з ростом складності моделі завжди зменшується, тобто чим складніша модель, тим вона точніша.

Критерій, що обчислюється за інформацією, яка не використовувалась при визначенні параметрів моделі, називається *зовнішнім критерієм*.

Принцип самоорганізації моделей [Ивахненко,1985]: при поступовому збільшенні складності моделі значення зовнішніх критеріїв спочатку падає, досягає мінімуму, а потім або залишається постійним, або починає збільшуватися (рис. 9.2). Мінімуму зовнішнього критерія відповідає *модель оптимальної складності*.

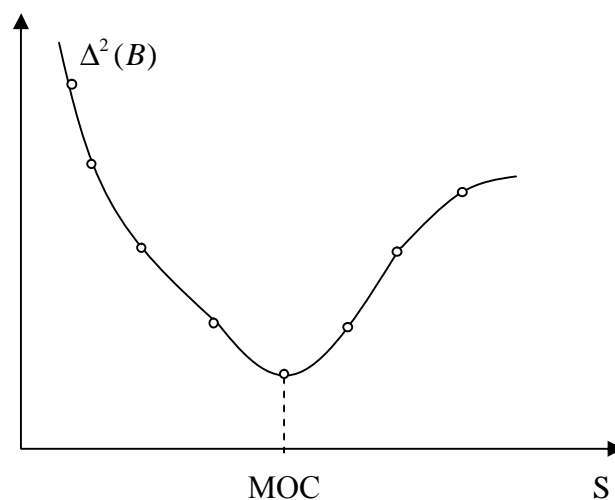


Рисунок 9.2. Залежність зовнішнього критерію від складності моделі

Зовнішні критерії селекції моделей

Вибір зовнішнього критерія здійснюється дослідником в залежності від задачі, яка розв'язується. Досвід багатьох дослідників свідчить, що найпоширене застосування мають наступні зовнішні критерії.

Критерій регулярності потребує, щоб середньоквадратична помилка, розрахована за даними частини таблиці B , була мінімальна (рис.9.3):

$$\Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{табл} - y_M)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{табл})_i^2} \rightarrow \min, \quad (9.2)$$

де $(y_{табл})_i$ - табличні значення вихідної змінної в точці x_i таблиці даних B , $i=1, \dots, N_B$;

$(y_M)_i$ - значення вихідної змінної в точці x_i таблиці даних B , $i=1, \dots, N_B$, що розраховане за моделлю, що була отримана за даними частини таблиці A .

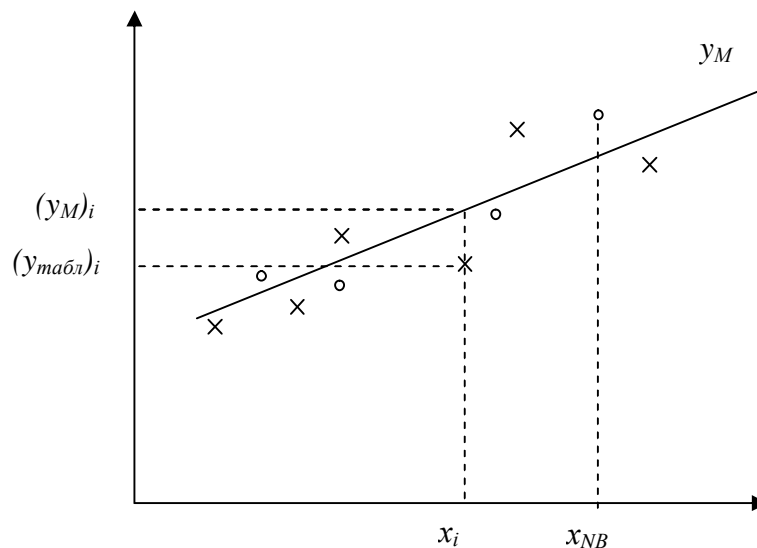


Рисунок 9.3. Розрахунок критерію регулярності:

' - точки частини таблиці даних A , ° - точки частини таблиці даних B

Критерій мінімуму зсуву потребує, щоб моделі, які отримані на частинах таблиці A і B , якомога менше відрізнялися одна від одної на інтервалі екстраполяції $(x_1; x_{aN})$ (рис.7.4):

$$n_{зсув}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{aN} (y_A - y_B)_i^2}{a \cdot \sum_{i=1}^N (y_{табл})_i^2} \rightarrow \min, \quad (9.3)$$

де $(y_{табл})_i$ - табличні дані вихідної змінної в усіх точках таблиці даних $i=1, \dots, N$ ($N=N_A+N_B$); y_A -модель, отримана на частині таблиці даних A ; $(y_A)_i$

– значення вихідної змінної, розраховане по моделі y_A в точці x_i $i=1, \dots, aN$; y_B -модель, отримана на частині таблиці даних B ; $(y_B)_i$ - значення вихідної змінної, розраховане по моделі y_B в точці x_i $i=1, \dots, aN$; a - коефіцієнт екстраполяції, який приймає значення $a=1,0 \div 3,0$.

Зауважимо, що критерій мінімуму зсуву використовується майже в усіх алгоритмах самоорганізації моделей. Критерій регулярності використовується, як правило, в комбінації з критерієм мінімуму зсуву. Інші критерії такі як критерій балансу змінних, критерій точності короткострокового прогнозу, критерій точності покрокового інтегрування, мають обмежене використання. Для вивчення цих критеріїв рекомендуємо читачеві скористатись спеціальною літературою [Ивахненко,1985]

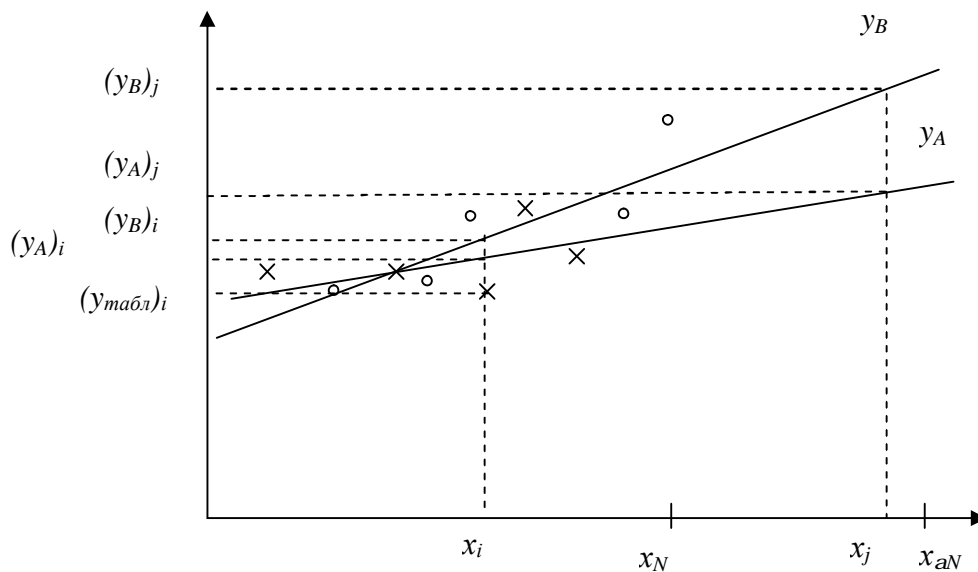


Рисунок 9.4. Розрахунок критерію мінімуму зсуву:

' - точки частини таблиці даних A , ° - точки частини таблиці даних B

Поділ таблиці даних на навчальну (A) та перевірочну (B) частини

Поділ таблиці даних на частини A і B мало впливає на значення критерію мінімуму зсуву і впливає на значення критерію регулярності.

Оптимальний (з погляду завадостійкості вибору моделі) поділ точок на частини A і B у випадку критерію регулярності відповідає поділу у відношенні $N_A:N_B=2:1$, при чому точки частини B - це точки з меншою дисперсією вихідної величини, а точки A - це точки з більшою дисперсією вихідної величини.

У випадку критерію мінімуму зсуву найкращий (з погляду завадостійкості вибору моделі) результат дає поділ таблиці даних у відношенні $N_A:N_B=1:1$, тобто на рівні частини. Оптимальний поділ множини точок можна знайти за правилом «максиміну»: найкращий поділ точок таблиці даних на дві різні множини відповідає максимальному з усіх значень мінімуму критерію мінімуму зсуву.

Визначення параметрів моделі за даними навчальної послідовності

Якщо внутрішній критерій – критерій найменших квадратів, то відшукання параметрів моделі здійснюється так, як в задачі апроксимації функціональної залежності, що розглядалась у розділі 2.2 даного навчального підручника.

Припустимо, що ставиться задача знаходження рівняння виду:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_2 + b_4 x_1^2 + b_5 x_2^2. \quad (9.4)$$

Тоді таблицю вихідних даних: $x_{1i}, x_{2i}, y_i, i=1, \dots, N$ потрібно доповнити даними $x_{1i} \cdot x_{2i}, x_{1i}^2, x_{2i}^2$. У результаті утвориться матриця даних X про вхідні змінні, що складається зі стовпчиків $1, x_{1i}, x_{2i}, x_{1i} \cdot x_{2i}, x_{1i}^2, x_{2i}^2$. Кожний стовпчик відповідає коефіцієнту $b_j, j=0,1,2,3,4,5$ рівняння моделі. Система умовних рівнянь приймає вид:

$$X \cdot b = y. \quad (9.5)$$

Для отримання системи нормальних рівнянь потрібно помножити зліва обидві частини рівняння на X^T :

$$X^T \cdot X \cdot b = X^T y. \quad (9.6)$$

Матриця $X^T \cdot X$ є квадратна матриця і обов'язково симетрична. Тому завжди існує розв'язок системи нормальних рівнянь:

$$b = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T y. \quad (9.7)$$

Підставив параметри, що знайдені, у (9.4), отримаємо модель.

9.2. Алгоритми самоорганізації моделей

Алгоритми самоорганізації розрізняють:

- за ансамблем зовнішніх критеріїв, використовуваних для пошуку моделі оптимальної складності;
- за набором базисних функцій, використовуваних для побудови моделей претендентів;
- за способом перебору моделей-претендентів.

Однорядні (комбінаторні) алгоритми самоорганізації моделей організують повний перебір множини моделей-претендентів і використовуються, коли кількість моделей-претендентів відносно невелика. Модель оптимальної складності в цьому випадку визначається мінімумом зовнішнього критерію.

Багаторядні (порогові) алгоритми самоорганізації моделей організують неповний перебір множини моделей-претендентів і використовуються, коли кількість моделей-претендентів надто велика для того, щоб здійснити повний перебір. Модель оптимальної складності в цьому випадку знаходиться швидко, але не точно за рахунок того, що деякі моделі при переборі просто пропускаються.

Завадостійкість алгоритму самоорганізації оцінюється за результатами пошуку наперед відомої моделі за даними, що мають нормально розподілену заваду із середнім значенням 0:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i + \Delta x_i, i = 1 \dots n & y_i &= y_i + \Delta y_i, i = 1 \dots n \\ \sum_{j=1}^n \Delta x_j &= 0 & \sum_{j=1}^n \Delta y_j &= 0 \end{aligned} \quad (9.8)$$

де x_i – i -те спостереження вхідної змінної моделі, Δx_i – i -те значення випадкової величини, що має нормальний закон розподілу із нульовим середнім значенням і середнім квадратичним відхиленням, що складає δ -частину значення x_i , δ – рівень завади, y_i – i -те спостереження вихідної змінної моделі, Δy_i – i -те значення випадкової величини, що має нормальний закон розподілу із нульовим середнім значенням і середнім квадратичним відхиленням, що складає δ -частину значення y_i .

При поступовому зростанні рівня завад δ спостерігають, чи відрізняється модель оптимальної складності, що визначена алгоритмом самоорганізації, від істинної моделі не більше як на 5%. Найбільший рівень завад, при якому алгоритм самоорганізації визначає модель правильно, вважається характеристикою завадостійкості алгоритму. Рекомендований рівень завад, який повинен витримувати алгоритм самоорганізації, складає 5%.

Наприклад, для перевірки завадостійкості дослідник вибрав істинну модель у вигляді:

$$f(x) = 1 + 3x_1 - 4x_2 + 2x_1^2 - x_2^2$$

Наступний крок, який потрібно зробити, – сформулювати таблицю даних. Завдаючи значення вхідних змінних випадковим чином у деякій області і додаючи до них похибку, отримаємо таблицю даних вхідних змінних:

$$\begin{aligned} x_{1i} &= x_{1i} + \zeta_i, \\ x_{2i} &= x_{2i} + \xi_i, \\ y_i &= f(x_i) + \eta_i, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

де ζ , ξ , η – нормально розподілені випадкові величини з нульовим середнім значенням та середнім квадратичним відхиленням, що складає $d \cdot |\max x_1|$, $d \cdot |\max x_2|$, $d \cdot |\max y|$ відповідно.

9.3. Однорядний алгоритм самоорганізації моделей

Модель оптимальної складності в однорядному алгоритмі самоорганізації моделей визначається на основі повного перебору моделей з множини моделей-претендентів. Якщо моделі упорядковані за рівнем зростання складності, то перебір моделей продовжується, доки спостерігається зменшення значення зовнішнього критерію із зростанням складності моделі. Якщо моделі не упорядковані, то модель оптимальної складності ви-

значається мінімальним значенням зовнішнього критерію (рисунок 9.5). Оскільки упорядкування моделей представляє собою важку задачу, то при відносно невеликій кількості моделей в множині моделей-претендентів простіше перебрати усі моделі без упорядкування.

Однорядний (комбінаторний) алгоритм самоорганізації моделей

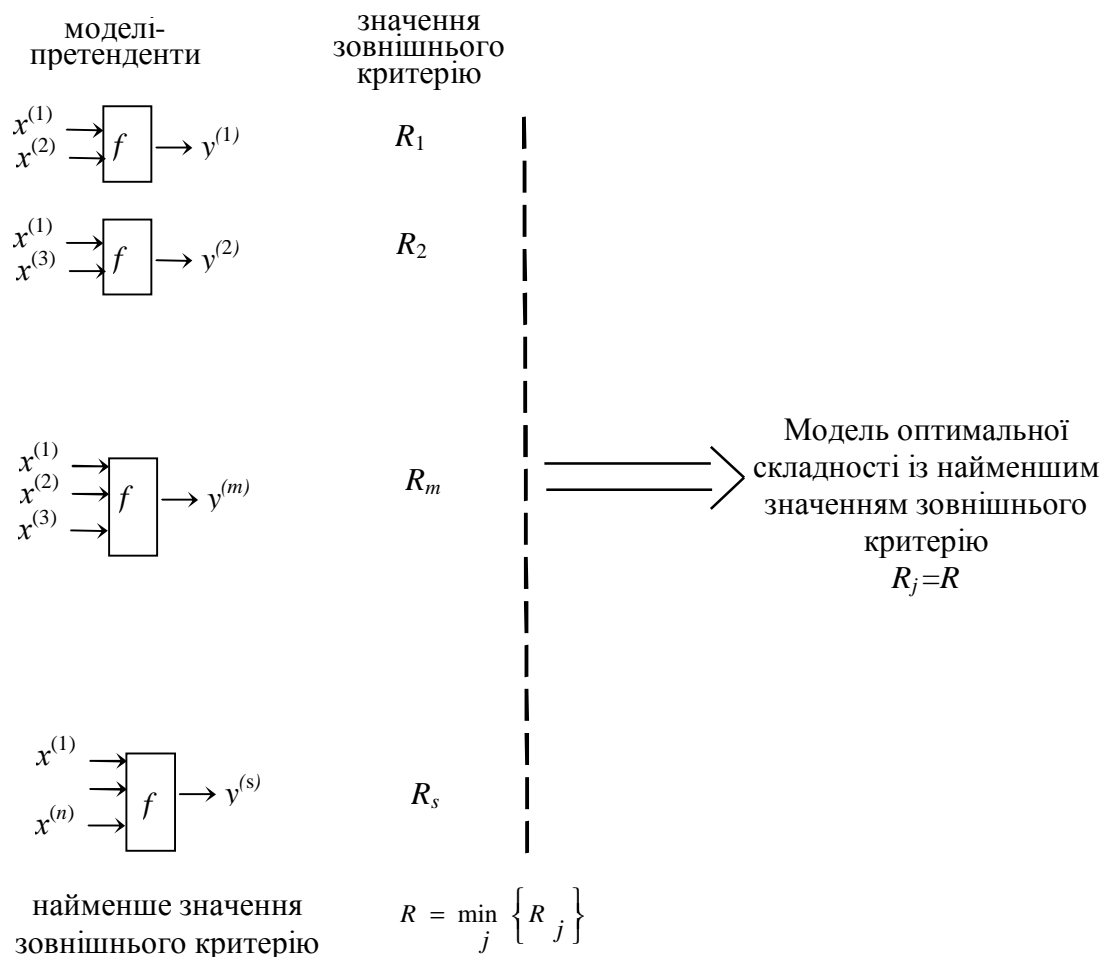


Рисунок 9.5. Структура однорядного алгоритму самоорганізації моделей

Для того, щоб побудувати однорядний алгоритм потрібно:

- § визначити зовнішні критерії, за якими здійснюється вибір моделі оптимальної складності;
- § визначити опорні функції,
- § визначити спосіб розподілу таблиці даних,
- § сформуванати множини моделей-претендентів,
- § для кожної моделі-претендента визначити параметри моделі і розрахувати значення зовнішнього критерію,
- § за найменшим значенням зовнішнього критерію вибрати модель оптимальної складності,
- § уточнити параметри моделі оптимальної складності з урахуванням усієї таблиці даних.

Вибір зовнішніх критеріїв

Дослідження впливу рівня завад на значення зовнішнього критерію показало, що зі збільшенням рівня завад мінімум критерію регулярності прямує до більш простих моделей і тому визначає модель оптимальної складності неправильно. При тому ж збільшенні рівня завад мінімум критерію мінімуму зсуву залишається стійким і визначає модель оптимальної складності правильно. Спостерігається тільки логічне збільшення самого значення критерію мінімуму зсуву при збільшенні рівня завад. Звідси, використання критерію мінімуму зсуву має пріоритетне використання в алгоритмах самоорганізації.

Використання декількох критеріїв підвищує точність визначення моделі оптимальної складності і робить вибір моделі більш однозначним. Дослідження завадостійкості алгоритмів самоорганізації показало, що найбільш завадостійким являється однорядний алгоритм, в якому спочатку вибираються декілька ліпших моделей за критерієм мінімуму зсуву, а потім з цих моделей вибирається найліпша модель за критерієм регулярності. Такі алгоритми називають *алгоритмами з послідовним використанням критеріїв*. Замість критерію регулярності використовують також критерій балансу або критерій покрокового інтегрування.

Вибір опорних функцій

Вид опорних функцій являється припущенням дослідника про вид шуканої моделі. Від правильного вибору опорних функцій в найбільшій мірі залежить успіх алгоритму самоорганізації. Потрібно пам'ятати, що

- поліноміальні моделі являються найбільш універсальним представленням функціональної залежності, але не завжди вірним;
- дробно-раціональна функціональна залежність не може бути представлена лінійною залежністю або поліноміальною залежністю;
- функціональна залежність, що має періодичний характер, представляється тригонометричними функціями.

Опорні функції повинні бути лінійно незалежними одна від одної. Наприклад, наступний вибір опорних функцій являється, очевидно, не допустимим:

$$f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2, f_3(x) = x_1 + x_2.$$

Проте наступний вибір опорних функцій являється допустимим:

$$f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2, f_3(x) = x_1^2 + x_2^2.$$

Формування множини моделей-претендентів

Множина моделей-претендентів будується наступним чином. Нехай обрані опорні функції $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$. Тоді найскладніша модель має вигляд:

$$f(x) = b_0 + b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \dots + b_k f_k(x) \quad (9.9)$$

Перебір усіх моделей здійснюється методом занулення коефіцієнтів у (9.9). Поставимо у відповідність кожній моделі вектор v , компонента якого v_i дорівнює одиниці, якщо доданок виду $b_i f_i(x)$ присутній у моделі і дорівнює нулю, якщо доданок виду $b_i f_i(x)$ відсутній у моделі. Множина моделей-претендентів визначається повним перебором усіх можливих комбінацій 1 і 0 у ненульових компонентах вектора v , окрім комбінації $(1,0,\dots,0)$, оскільки модель виду $f(x) = b_0$ не розглядається.

Наприклад, якщо найскладніша модель представляється функціональною залежністю виду

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 \sin t + b_3 \cos t, \quad (9.10)$$

множина моделей-претендентів представляється наступними сьома моделями:

$$\begin{aligned} y &= b_0 + b_1 x, \\ y &= b_0 + b_1 \sin t, \\ y &= b_0 + b_1 \cos t, \\ y &= b_0 + b_1 x + b_2 \sin t, \\ y &= b_0 + b_1 x + b_2 \cos t, \\ y &= b_0 + b_1 \sin t + b_2 \cos t \\ y &= b_0 + b_1 x + b_2 \sin t + b_3 \cos t. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Зверніть увагу, що однакові позначення коефіцієнтів b в (9.11) не означають, що значення цих коефіцієнтів однакові. Позначення коефіцієнтів мають схематичний характер.

Наведеній множині моделей-претендентів відповідає множина векторів v , що зручно представляється наступною матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

Моделі в множині моделей-претендентів слід упорядковувати за зростанням рівня складності, що визначається кількістю доданків моделі та рівнем складності доданків.

Кількість моделей у множині моделей-претендентів повністю визначається кількістю обраних опорних функцій і складає $2^k - 1$, де k – кількість опорних функцій. Зауважимо, що при зростанні кількості опорних функцій кількість моделей у множині моделей-претендентів сильно зростає. Так, при $k=6$ кількість моделей складає 63, а при $k=10$ кількість моделей складає 1023.

Способи розподілу таблиці даних на навчальну та перевірочну послідовності даних

Розподіл таблиці даних здійснюється дослідником з урахуванням особливостей задачі, що розв'язується. Розподіл характеризується кількістю точок навчальної та перевірочної послідовності даних та способом, за яким приймається рішення про приналежність точки до навчальної чи перевірочної послідовності даних.

Кількість точок даних навчальної та перевірочної послідовності даних визначається такою, що забезпечує найбільшу завадостійкість алгоритму. З усіх можливих розподілів при рівному співвідношенні кількості даних у частинах A і B оптимальним вважається той, що забезпечує найбільше значення мінімуму зовнішнього критерію (принцип мінімакса).

Спосіб розподілу повинен відповідати декільком вимогам:

- * дані навчальної та перевірочної послідовності даних повинні покривати усю область даних;
- * дані кожної послідовності даних повинні бути лінійно незалежними;
- * якщо відома точність табличних даних, то більш точні дані відбирають до перевірочної послідовності даних (частини B), а менш точні дані – до навчальної послідовності даних (частини A).

Всі способи можна поділити на детерміновані та стохастичні. Детермінований спосіб означає, що точки вибираються за деяким правилом. Наприклад, кожна друга точка послідовності даних відноситься до навчальної послідовності, а всі інші – до перевірочної послідовності.

Випадковий (стохастичний) вибір точок даних використовують, щоб перевірити стійкість обраної моделі оптимальної складності по відношенню до вибору точок даних.

Дослідження впливу розподілу даних на значення зовнішнього критерію показали, що розподіл таблиці даних сильно впливає на значення критерію регулярності і не сильно впливає на значення критерію мінімуму зсуву.

Узагальнена схема алгоритму представлена на рисунку 9.6. Реалізація алгоритму засобами програмного забезпечення Mathcad 2000 Professional представлена на рисунках 9.7– 9.13.

Розподіл таблиці даних здійснюється програмою випадковим чином у заданому співвідношенні $N_A/N_B=2$. Оскільки на значення критерію мінімуму зсуву розподіл таблиці даних не впливає, а на значення критерію регулярності – впливає, то розподіл таблиці даних обирається так, щоб отримати найточніше значення критерію регулярності. Коефіцієнт екстраполяції вибраний у розмірі 2 у відповідності до рекомендацій, що значення екстраполяції належить інтервалу (1; 3).



Рисунок 9.6. Узагальнена схема однорядного алгоритму самоорганізації моделей з послідовним використанням зовнішніх критеріїв

По-перше здійснюється відбір моделей за критерієм регулярності. Потім з K штук обраних найліпших моделей здійснюється вибір оптимальної моделі за критерієм мінімуму зсуву. Якість отриманої моделі перевіряється по-перше, за досягнутим значенням зовнішнього критерію, по-друге, за значенням глибини критерію, по-третє, за результатами аналізу отриманої функціональної залежності. Значення зовнішнього критерію повинно досягати значення, не більшого за 0,05. Значення глибини критерію повинно бути великим і чим більше, тим ліпше знайдена модель. Аналіз отриманої функціональної залежності не повинен суперечити логічним зв'язкам, наявним у моделі.

Дослідження *завадостійкості* алгоритму при зростанні рівня завад показало, що алгоритм витримує рівень завад не більше 5%. Завади задавались у вигляді нормально розподіленої випадкової величини із середнім значенням 0 і відхиленням 0,05 від самого значення. Також вимагалось, щоб сума усіх завад була рівна 0:

$$\begin{aligned}x_i &= x_i + \Delta x_i, i = 1 \dots n \\ \Delta x_i &= rnorm(1, 0, 0.05 | x_i |)_0, i = 1, \dots, n-1 \\ \Delta x_n &= -\sum_{h=1}^{n-1} \Delta x_h\end{aligned} \quad (9.13)$$

Для перевірки використовувалась функція виду:

$$f(x) = x_1 - x_2 + \frac{2}{x_1} - \frac{3}{x_2}.$$

Алгоритм самоорганізації при кількості даних в таблиці спостережень 20 і рівні завад спостережень 6% отримав функцію виду:

$$f(x) = -0.016 + 1.007x_1 - 0.995x_2 + \frac{2.106}{x_1} - \frac{3.087}{x_2}.$$

Отже, похибка у визначенні коефіцієнтів не перевищує 5% і результат визначення функції є вірним.

Рівень завад 5%, який витримує запропонований алгоритм самоорганізації, відповідає загальноприйнятому рівню завад 5% і тому приймається до використання.

Оскільки кількість моделей у множині моделей-претендентів зі збільшенням кількості параметрів моделі, що відшуковуються, сильно зростає, то однорядні алгоритми самоорганізації використовують при відносно невеликій кількості параметрів - до двадцяти. При більшій кількості параметрів повний перебір моделей із множини моделей-претендентів втрачає свою доцільність і рекомендується використовувати багаторядні алгоритми самоорганізації, які основані на неповному переборі моделей.

ОДНОРЯДНИЙ АЛГОРИТМ САМООРГАНІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ з послідовним застосуванням критерію мінімуму зсуву та критерію регулярності

Зчитування таблиці даних

$D := \text{READPRN}(\text{"datNeruh.pm"})$ Дані об'єкта дослідження

$D := \text{READPRN}(\text{"datFun.pm"})$ Дані для дослідження завадостійкості алгоритму

$d := \text{cols}(D)$ $s := \text{rows}(D)$

$D =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	-3	-1	3	4	3	3	3	1	3	-4	2
1	1	1	-1	-5	4	-1	-3	-4	-1	3	-1	1
2	-1.04	-7.879	0.977	9.383	-0.253	7.741	8.466	7.759	7.57	-0.362	-0.44	-1

Розподіл таблиці даних на таблиці А і В у відношенні $m:n$

$m := 2$ $n := 1$ $ob := \text{floor}\left(\frac{d \cdot m}{m + n}\right)$

```

DD :=
  r ← rows(D)
  j ← floor(md(d))
  a ← D ⌊j
  A ← augment(submatrix(D,0,r-1,0,j-1),submatrix(D,0,r-1,j+1,d-1)) if 0 < j < d-1
  otherwise
    A ← submatrix(D,0,r-1,1,d-1) if j = 0
    A ← submatrix(D,0,r-1,0,d-2) otherwise
  D ← A
  d ← d-1
  k ← 1
  while k < ob
    j ← floor(md(d))
    a ← augment(a,D ⌊j )
    A ← augment(submatrix(D,0,r-1,0,j-1),submatrix(D,0,r-1,j+1,d-1)) if 0 < j < d-1
    otherwise
      A ← submatrix(D,0,r-1,1,d-1) if j = 0
      A ← submatrix(D,0,r-1,0,d-2) otherwise
    D ← A
    d ← d-1
    k ← k+1
  b ← D
  (
    a
    b
  )
  
```

Рисунок 9.7. Mathcad-програма однорядного алгоритму самоорганізації моделей.
Розподіл таблиці даних на частини А і В

Формування таблиці даних для обчислення критерію мінімуму зсуву із заданим коефіцієнтом екстраполяції альфа

$\alpha := 1.5$ $rC := \text{rows}(tC)$

```
tC :=
for i ∈ 0..rC - 1
  Max ← max[(tCT)⟨i⟩]
  Min ← min[(tCT)⟨i⟩]
  I ← (Max - Min) · α / floor(α · d - d)
  for j ∈ 0..d - 1 + floor(α · d - d)
    Ci,j ← tCi,j if j < d
    Ci,j ← Max + I · (j - d + 1) otherwise
C
```

Опорні функції: $\text{FunModel}(t) :=$ $\begin{bmatrix} 1 \\ t_0 \\ t_1 \\ \frac{1}{t_0} \\ \frac{1}{t_1} \\ (t_0)^2 \\ (t_1)^2 \\ \frac{1}{(t_0)^2} \\ \frac{1}{(t_1)^2} \end{bmatrix}$ $\text{FunModel}(t)_5 \rightarrow (t_0)^2$

Кількість параметрів найскладнішої моделі $N := \text{length}\left[\text{FunModel}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right]$

$i := 0..nA - 1$

$j := 0..N - 1$

$DA_{i,j} := \text{FunModel}(tA^{\langle i \rangle})_j$

$i := 0..nB - 1$

$j := 0..N - 1$

$DB_{i,j} := \text{FunModel}(tB^{\langle i \rangle})_j$

$i := 0..d - 1$

Рисунок 9.8. Mathcad-програма однорядного алгоритму самоорганізації моделей. Формування опорних функцій

Формування множини моделей-претендентів

$$\begin{array}{l}
 I(k) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..k-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} a_j \leftarrow 1 \\ j \leftarrow j+1 \end{array} \right. \\ \quad \left| a \end{array} \right. \\
 O(k) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..k-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} a_j \leftarrow 0 \\ j \leftarrow j+1 \end{array} \right. \\ \quad \left| a \end{array} \right. \\
 \text{AllModels} := \left| \begin{array}{l} C \leftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{for } j \in 1..N-2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 2^j \\ D \leftarrow \text{augment}(I(k), C) \\ E \leftarrow \text{augment}(O(k), C) \\ C \leftarrow \text{stack}(D, E) \\ j \leftarrow j+1 \end{array} \right. \\ C \leftarrow \text{augment}(I(2^{N-1}), C) \\ C \leftarrow \text{submatrix}(C^T, 0, N-1, 0, 2^{N-1}-2) \\ C \end{array} \right.
 \end{array}$$

Відшукування коефіцієнтів моделі. Структура моделі задана параметром *Model*.
Таблиця задана параметрами *A* та *y*:

$$\begin{array}{l}
 \text{Fun}(t, \text{Model}, A, y) := \left| \begin{array}{l} B \leftarrow \left| \begin{array}{l} X \leftarrow \left| \begin{array}{l} C \leftarrow A^{(0)} \\ \text{for } j \in 1..N-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} C \leftarrow \text{augment}(C, A^{(j)}) \text{ if } \text{Model}_j = 1 \\ j \leftarrow j+1 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \quad \left| C \end{array} \right. \\ \quad \left| (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y \end{array} \right. \\ m \leftarrow 1 \\ b \leftarrow B_0 \\ \text{for } j \in 1..N-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{if } \text{Model}_j = 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} b \leftarrow b + B_m \cdot \text{FunModel}(t)_j \\ m \leftarrow m+1 \end{array} \right. \\ \quad \left| j \leftarrow j+1 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ b \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рисунок 9.9. Mathcad-програма однорядного алгоритму самоорганізації моделей.
Відшукування коефіцієнтів моделі-претендента

Формування моделі, подуваній на чатисні таблиці даних А

$$\text{FunA}(t, a) := \text{Fun}(t, a, \text{DA}, yA)$$

Формування моделі, подуваній на чатисні таблиці даних В

$$\text{FunB}(t, a) := \text{Fun}(t, a, \text{DB}, yB)$$

Формування різниці моделей А і В

$$\text{FunAB}(t, a) := \text{FunA}(t, a) - \text{FunB}(t, a)$$

Формування моделі, подуваній на чатисні таблиці даних А

$$\text{FunR}(t, a) := \text{Fun}(t, a, \text{DR}, yR)$$

Обчислення зовнішнього критерію (критерію мінімуму зсуву)

$$V := \left| \begin{array}{l} nC \leftarrow \text{cols}(tC) \\ nB \leftarrow \text{cols}(tB) \\ nAll \leftarrow \text{cols}(\text{AllModels}) \\ rAll \leftarrow \text{rows}(\text{AllModels}) \\ \text{for } k \in 0..nAll - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..rAll - 1 \\ \quad a_j \leftarrow \text{AllModels}_{j,k} \\ \quad \sum_{i=0}^{nC-1} (\text{FunAB}(tC \langle i \rangle, a))^2 \\ w_k \leftarrow \frac{\quad}{\alpha \cdot \sum_{i=0}^{d-1} (yC_i)^2} \end{array} \right. \\ \quad w \end{array} \right.$$

Сортування моделей за зменшенням критерію мінімуму зсуву

$$\text{AllModels} := \text{stack}(\text{AllModels}, V^T)$$

$$\text{AllModels} := \text{rsort}(\text{AllModels}, N)$$

$$\text{AllModelsTr} := \text{AllModels}^T$$

$$\text{cols}(\text{AllModels}) = 255$$

$$\text{AllModelsTr} := \text{reverse}(\text{AllModelsTr})$$

$$\text{AllModels} := \text{AllModelsTr}^T$$

Відбір ліпших К моделей (за критерієм мінімуму зсуву)

$$K := \text{floor}\left(\frac{2^{N-1} - 2}{N - 1}\right) \quad K = 31$$

$$V := \text{submatrix}(\text{AllModels}, N, N, 2^{N-1} - 2 - 10, 2^{N-1} - 2)^T$$

$$\text{AllModels} := \text{submatrix}(\text{AllModels}, 0, N - 1, 2^{N-1} - 2 - 10, 2^{N-1} - 2)$$

Рисунок 9.10. Mathcad-програма однорядного алгоритму самоорганізації моделей.
Відбір найліпших моделей за значенням критерію мінімуму зсуву

Обчислення зовнішнього критерію(критерію регулярності)

```

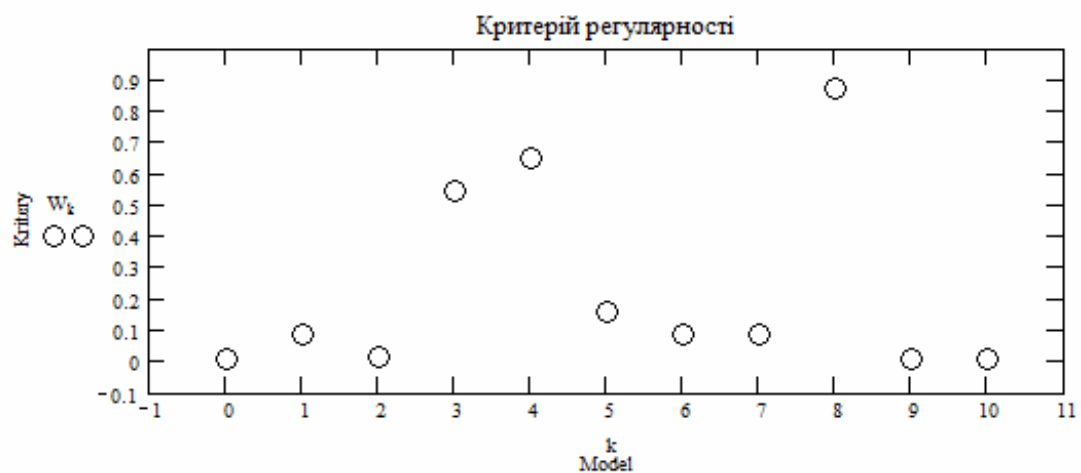
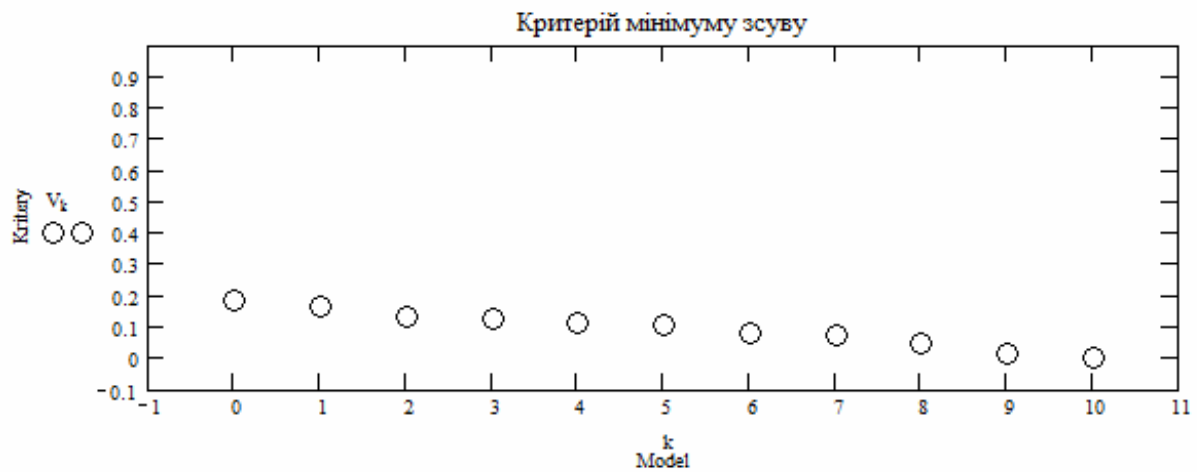
W := | nB ← cols(tB)
      nAll ← cols(AllModels)
      rAll ← rows(AllModels)
      for k ∈ 0..nAll - 1
        for j ∈ 0..rAll - 1
          a_j ← AllModels_{j,k}
          ∑_{i=0}^{nB-1} (y_{B_i} - FunB(tB_{(i)}, a))^2
        v_k ← -----
              ∑_{i=0}^{nB-1} (y_{B_i})^2
      v

```

```
RES := stack(AllModels, v^T, W^T)
```

	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	0	0	0	
2	1	1	1	0	0	1	
3	0	0	1	1	0	1	
4	1	0	0	0	0	0	
5	0	0	0	0	0	0	
6	0	0	0	0	0	0	
7	1	1	0	0	0	0	
8	0	0	1	1	1	0	
9	0.187	0.166	0.133	0.124	0.114	0.107	
10	6.897·10 ⁻³	0.088	0.017	0.543	0.651	0.16	

Рисунок 9.11. Mathcad-програма однорядного алгоритму самоорганізації моделей. Розрахунок критерію регулярності



Пошук моделі оптимальної складності за глобальним мінімумом

```

opt :=
  for i ∈ 0.. rows(W) - 1
    if Wi = min(W)
      k ← i
      break
    i ← i + 1 otherwise
  k
  opt = 10

```

Досягнуте значення критерію мінімуму зсуву $V_{opt} = 3.739 \times 10^{-3}$

Досягнуте значення критерію регулярності $W_{opt} = 5.774 \times 10^{-3}$

$j := 0.. N - 1$

$a_j := AllModels_{j,opt}$

Структура оптимальної моделі $a^T = (1 1 1 1 1 0 0 0 0)$

Рисунок 9.12. Mathcad-програма однорядного алгоритму самоорганізації моделей. Формування результатів пошуку моделі оптимальної складності

Необхідне для символічних обчислень перетворення

WRITEPRN("a.pm") := a

m := READPRN("a.pm")

$$\text{FunA}(t,m) \rightarrow -0.15439718245808690801 + 0.98053017197997388078 \cdot t_0 - 0.96671665758403062119 \cdot t_1 + \frac{2.2843781031047502022}{t_0} - \frac{3.2900416858278268467}{t_1}$$

$$\text{FunB}(t,m) \rightarrow 0.1835950423499285960 + 1.0172325528143004875 \cdot t_0 - 1.0227567639853252573 \cdot t_1 + \frac{1.8999730536268281872}{t_0} - \frac{3.0376743841409366228}{t_1}$$

Уточнення коефіцієнтів моделі за всією таблицею даних

$$\text{FunR}(t,m) \rightarrow -\left(1.627250053633286188 \cdot 10^{-2}\right) + 1.0074224263679135003 \cdot t_0 - 0.99475141517774930344 \cdot t_1 + \frac{2.1059719672710360140}{t_0} - \frac{3.0874308827247866333}{t_1}$$

Послідовне застосування критеріїв дає стійкий результат. Так, для функції $z=2/x+x-3/y-y$ отриманий результат $z=-0.016+1,007x-0.995y+2.106/x-3.087/y$. Похибка в коефіцієнтах не перевищує 5%. Досягнуто значення критерію мінімуму зсуву 0,0037, критерію регулярності 0,0058.

**Рисунок 9.13. Mathcad-програма однорядного алгоритму самоорганізації моделей.
Символьне представлення результатів пошуку моделі оптимальної складності**

9.4. Багаторядний алгоритм самоорганізації моделей

Ідея багаторядного алгоритму ґрунтується на ідеях селективного відбору, застосовуваних біологами при схрещуванні особин для отримання гібридного різновиду із заданими властивостями. *Гіпотеза селекції* стверджує, що алгоритм масової селекції рослин або тварин являється оптимальним алгоритмом обробки інформації у складних задачах [Ивахненко,1982].

Багаторядний алгоритм організовує перегляд моделей зі зростанням складності від одного ряду (покоління) до іншого. В результаті такого перегляду деякі моделі виявляються пропущеними, що, з одного боку скорочує обсяг розрахунків, з іншого – спричиняє неточне визначення моделі оптимальної складності. Дійсно, якщо модель оптимальної складності виявилась пропущеною, то багаторядний алгоритм не зможе виявити її як найліпшу.

На першому ряду багаторядного алгоритму формуються усі можливі пари змінних зі вхідних змінних системи і складаються моделі, що містять ці пари змінних (рисунок 9.14). З усіх моделей першого ряду вибираються декілька ліпших за значенням зовнішнього критерію і тільки вони допускаються до другого ряду. На другому ряді формуються усі можливі пари моделей першого ряду і складаються моделі другого ряду. Якість кожної моделі оцінюється за значенням зовнішнього критерію і декілька найліпших відбираються для наступного ряду і т.д. Нарощування рядів відбувається до тих пір, доки з переходом до наступного ряду відбувається зменшення значення зовнішнього критерію. Модель оптимальної складності вибирається як найліпша у найліпшому ряду.

Для того, щоб побудувати багаторядний алгоритм потрібно:

- § визначити зовнішній критерій, за яким здійснюється вибір моделі оптимальної складності;
- § визначити вид моделі, використовувану для пари змінних на кожному ряду алгоритму;
- § визначити спосіб розподілу таблиці даних;
- § визначити кількість моделей, що переходять з одного ряду до наступного;
- § для кожної моделі ряду визначити параметри моделі і розрахувати значення зовнішнього критерію;
- § за значенням зовнішнього критерію вибрати найліпші моделі, що переходять до наступного ряду;
- § формувати таблицю даних, що є вихідною таблицею для наступного ряду;
- § нарощувати кількість рядів, доки зростання складності моделі призводить до зменшення значення зовнішнього критерію;
- § визначити модель оптимальної складності як найліпшу модель найліпшого ряду.

Вибір найліпших моделей за значенням зовнішнього критерію

Кожна j -та модель i -ого ряду оцінюється за допомогою зовнішнього критерію, що розраховується з використанням частини таблиці даних B . Позначимо розраховане значення критерію R_{ij} . Найменше значення критерію, досягнуте на даному ряду називається *критерієм ряду*:

$$R_i = \min_j \{R_{ij}\} \quad (9.16)$$

З усіх моделей ряду вибирається K штук найліпших за значенням зовнішнього критерію, які переходять у наступний ряд. Інші моделі, які не проявили себе як найліпші, знищуються. Відбір моделей, що переходять до наступного ряду, називається *порогом* (див. рисунок 9.2). Число K має бути не меншим за три для того, щоб у наступному ряді існувала можливість сформулювати більше однієї моделі.

Формування таблиці даних наступного ряду

Для тих моделей, що виявились найліпшими на першому ряду, формується таблиця даних наступним чином. Значення вхідних змінних $x_i^{(s)}$ пропускаються через найліпші моделі першого ряду і отримуються значення вихідних змінних моделей першого ряду:

$$z_i^{(s)} = b_0 + b_1 x_i^{(2)} + b_2 x_i^{(5)}, i = 1, \dots$$

$$y^{(2)} = b_0 + b_1 x^{(6)} + b_2 x^{(9)}$$

$$z^{(1)} = b_0 + b_1 y^{(1)} + b_2 y^{(2)} = b_0 + b_1 (b_0 + b_1 x^{(2)} + b_2 x^{(5)}) + b_2 (b_0 + b_1 x^{(6)} + b_2 x^{(9)})$$

Перехід до наступного ($j+1$) ряду здійснюється за умови, що значення критерію ряду зменшується:

$$R_j < R_{j-1}, \quad (9.17)$$

Іншими словами, доки ускладнення моделі спричиняє поліпшення значення критерію. Якщо значення критерію ряду більше за значення критерію попереднього ряду, то алгоритм зупиняється і відшукується єдина найліпша модель з моделей попереднього ряду. Саме ця модель вважається моделлю оптимальної складності.

Зауважимо, що в багаторядних алгоритмах складність моделі зростає при переході від одного ряду до іншого, оскільки зростає кількість шуканих параметрів. Якщо на першому ряду отримані моделі виду:

$$z^{(1)} = b_0 + b_1 x^{(2)} + b_2 x^{(5)}$$

$$z^{(2)} = b_0 + b_1 x^{(6)} + b_2 x^{(9)}$$

То модель другого ряду має вид:

$$w^{(1)} = b_0 + b_1 z^{(1)} + b_2 z^{(2)} = b_0 + b_1 (b_0 + b_1 x^{(2)} + b_2 x^{(5)}) + b_2 (b_0 + b_1 x^{(6)} + b_2 x^{(9)}),$$

де значення коефіцієнтів b в усіх моделях різні, а позначення схематичне(!).

Формування результату пошуку моделі оптимальної складності

Припустимо, що модель оптимальної складності знайдена на третьому ряду багаторядного алгоритму самоорганізації моделей:

$$y^{(k)} = b_{03} + b_{13} w^{(i)} + b_{23} w^{(j)},$$

де $w^{(i)}$, $w^{(j)}$ – змінні другого ряду.

Залежність змінних другого ряду від змінних першого ряду представляється функціональними залежностями:

$$w^{(i)} = b_{02} + b_{12} z^{(m)} + b_{22} z^{(n)}, \quad w^{(j)} = b_{02} + b_{12} z^{(g)} + b_{22} z^{(h)},$$

де $z^{(m)}$, $z^{(n)}$, $z^{(g)}$, $z^{(h)}$ – змінні другого ряду.

Нарешті, залежність змінних першого ряду представляється функціональними залежностями від вихідних змінних моделі:

$$z^{(m)} = b_{01} + b_{11} x^{(s)} + b_{21} x^{(p)}, \quad z^{(n)} = b_{01} + b_{11} x^{(q)} + b_{21} x^{(r)},$$

$$z^{(g)} = b_{01} + b_{11} x^{(u)} + b_{21} x^{(l)}, \quad z^{(h)} = b_{01} + b_{11} x^{(v)} + b_{21} x^{(f)},$$

Тому, модель оптимальної складності представляється через вихідні дані наступним чином:

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= b_{03} + b_{13} w^{(i)} + b_{23} w^{(j)} = \\ &= b_{03} + b_{13} (b_{02} + b_{12} z^{(m)} + b_{22} z^{(n)}) + b_{23} (b_{02} + b_{12} z^{(g)} + b_{22} z^{(h)}) = \\ &= b_{03} + b_{13} (b_{02} + b_{12} (b_{01} + b_{11} x^{(s)} + b_{21} x^{(p)}) + b_{22} (b_{01} + b_{11} x^{(q)} + b_{21} x^{(r)})) + \\ &+ b_{23} (b_{02} + b_{12} (b_{01} + b_{11} x^{(u)} + b_{21} x^{(l)}) + b_{22} (b_{01} + b_{11} x^{(v)} + b_{21} x^{(f)})) \end{aligned}$$

Отже, символічне представлення моделі оптимальної складності, яка знайдена, у багаторядному алгоритмі набагато складніше ніж в однорядному алгоритмі і потребує розробки спеціального алгоритму для виведення результату. Якщо багаторядний алгоритм використовується для прогнозування, то замість виведення символічного результату обмежуються чисельним виведенням результатів прогнозу.

На рисунку 9.15 наведена узагальнена схема багаторядного алгоритму самоорганізації моделей



Рис. 9.15. Узагальнена схема багаторядного алгоритму самоорганізації моделей

9.5. Приклади розв'язання задач

■ **Задача 1.** Таблиця даних складається з шести точок **(2;2,2)**, **(3;2,3)**, **(4;2,6)**, **(5;2,5)**, **(6;2,6)**, **(7;3,2)**, де жирним шрифтом позначені точки навчальної послідовності даних. Побудуйте найпростішу модель, яка задовольняла б цим даним, і визначить для неї критерій регулярності.

Розв'язання. За даними навчаючої послідовності та формулою (7.11) знаходимо модель:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = (A^T A)^{-1} A^T \begin{pmatrix} 2,2 \\ 2,3 \\ 2,5 \\ 2,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

Звідси, $y_M = 2 + 0,1x$.

За даними перевіркою послідовності даних обчислюємо значення критерію регулярності за формулою (7.1): $y_M(4) = 2,4$, $y_M(7) = 2,7$

$$\Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{табл}} - y_M)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{табл}})_i^2} = \frac{(2,6 - 2,4)^2 + (2,7 - 3,2)^2}{2,6^2 + 3,2^2} = 0,017.$$

Відповідь: $y_M = 2 + 0,1x$, $D^2(B) = 0,017$.

■ **Задача 2.** Таблиця даних складається з чотирьох точок **(0;1,5)**, (1;2), **(2;2,2)**, (3;2,9), де жирним шрифтом позначені точки навчаючої послідовності даних. Побудуйте найпростішу модель, яка задовольняла б цим даним, і визначить для неї критерій мінімуму зсуву. Коефіцієнт екстраполяції візьміть рівним 2.

Розв'язання. За даними навчаючої послідовності знаходимо модель A :

$$y_A = 1,5 + 0,35x.$$

За даними перевіркою послідовності даних знаходимо модель B :

$$y_B = 1,55 + 0,45x.$$

За умовою задачі коефіцієнт екстраполяції дорівнює 2, тому збільшимо таблицю даних вдвічі наступними точками $x=4$, $x=5$, $x=6$ та $x=7$. Розраховуємо значення моделей A та B для всіх восьми точок та заповнюємо таблицю:

	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$	$x=7$
y	1,5	2	2,2	2,9				
y_A	1,5	1,85	2,2	2,55	2,9	3,25	3,6	3,95
y_B	1,55	2	2,45	2,9	3,35	3,8	4,25	4,7

В першому рядочку цієї матриці указані чотири табличних значення відгуку моделі. За формулою(7.2) обчислюємо значення критерію мінімуму зсуву:

$$n_{\text{зсув}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^8 (y_A - y_B)_i^2}{2 \cdot \sum_{i=1}^8 (y_{\text{табл}})_i^2} = \frac{1,7}{39} = 0,044$$

Відповідь: $y_A=1,5+0,35x$, $n^2_{зсуву}=0,044$.

■ **Задача 3.** Для даної таблиці спостережень побудувати найпростішу модель та оцінити її якість за критерієм регулярності:

x	-4	-2	0	2
y	0	3	5	9

Розв'язання. Поділимо таблицю даних на частини А і В у відношенні приблизно 2:3, тобто три точки віднесемо до частини А і одну точку до частини – В. Нехай точка (0;5) – точка частини В, а інші точки - частина даних А. За даними навчаючої послідовності (частини А) побудуємо найпростішу модель:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = (A^T A)^{-1} A^T \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Тобто, $y_M=6+1,5x$.

За даними перевіркою послідовності даних (частини В) обчислюємо значення критерію регулярності за формулою (7.1): $y_M(0)=6$.

$$\Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{табл} - y_M)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{табл})_i^2} = \frac{(5-6)^2}{5^2} = 0,04.$$

Приймаючи до уваги, що значення критерію близьке до 0,05, робимо висновок про достатню якість побудованої моделі.

Відповідь: моделлю системи може бути функціональна залежність $y_M=6+1,5x$, якість якої оцінюється значенням критерію регулярності 0,04.

■ **Задача 4.** Для даної таблиці спостережень побудувати найпростішу модель та оцінити її якість за критерієм критерій мінімуму зсуву. Прийняти коефіцієнт екстраполяції рівним 2.

x	-2	0	2	4
y	3	1	0	2

Розв'язання. Поділимо таблицю даних на частини А і В у відношенні 1:1, тобто дві точки віднесемо до частини А і дві точки до частини В. Нехай точки (0;1) та (4;2) – частина даних В, а інші точки - частина даних А.

За даними навчаючої послідовності знаходимо модель А:

$$y_A=1,5-0,75x.$$

За даними перевіркою послідовності даних знаходимо модель В:

$$y_B = 1 + 0,25x.$$

За умовою задачі коефіцієнт екстраполяції дорівнює 2, тому збільшуємо таблицю даних вдвічі наступними точками $x=-6$, $x=-4$, $x=6$ та $x=8$. Розраховуємо значення моделей А та В для всіх восьми точок та заповнюємо таблицю:

	$x=-6$	$x=-4$	$x=-2$	$x=0$	$x=2$	$x=4$	$x=6$	$x=8$
y			3	1	0	2		
y_A	6	4,5	3	1,5	0	-1,5	-3	-4,5
y_B	-0,5	0	0,5	1	1,5	5	2,5	3

В першому рядочку цієї матриці указані чотири табличних значення відгуку моделі. Обчислюємо значення критерію мінімуму зсуву за формулою (7.2):

$$n_{\text{зсуву}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^8 (y_A - y_B)_i^2}{2 \cdot \sum_{i=1}^8 (y_{\text{табл}})_i^2} = \frac{6,5^2 + 4,5^2 + 2,5^2 + 0,5^2 + 1,5^2 + 3,5^2 + 5,5^2 + 7,5^2}{2 \cdot (9+1+0+4)} = \frac{170}{28} = 6,07$$

Відповідь: побудована найпростіша модель системи $y_A = 1,5 - 0,75x$, якість якої оцінюється значенням критерію мінімуму зсуву 6,07. Оскільки значення критерію мінімуму зсуву завелике, то модель не може бути прийнятною. Причиною такого результату може бути те, що задані точки не відповідають лінійній залежності.

■ **Задача 5.** Для даної таблиці спостережень побудувати модель та оцінити її якість за критерієм регулярності:

x	-4	-2	-1	0	1	2
y	0	3	6	5	2	1

Розв'язання. Помітимо, що дані відповідають швидше нелінійній залежності, ніж лінійній, тому припустимо модель у вигляді поліному другого ступеню.

Поділимо таблицю даних на частини А і В у відношенні 2:1, тобто чотири точки віднесемо до частини А і дві точки до частини – В. Нехай точки $(-2;3)$ та $(0;5)$ – частина даних В, а інші точки - частина даних А. За даними навчаючої послідовності (частини А) знаходимо модель:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 16 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = (A^T A)^{-1} A^T \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ -1,1 \\ -0,6 \end{pmatrix}.$$

Звідси, $y_M = 4,8 - 1,1x - 0,6x^2$.

За даними перевірконої послідовності даних (частини В) обчислюємо значення критерію регулярності: $y_M(-2)=4,6$, $y_M(0)=4,8$

$$\Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{табл}} - y_M)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{\text{табл}})_i^2} = \frac{(3-4,6)^2 + (5-4,8)^2}{3^2 + 5^2} = 0,08.$$

■ **Задача 6.** Таблиця даних А складається з десяти точок (0,-1), (1;-3), (2;-3), (3;-1), (4;0), (5;1), (6;2), (7;2), (8;4), (9;6). Знайдіть коефіцієнти моделі, яка задовольняла б вказаним точкам і мала вигляд: $y_t=b_0+b_1y_{t-2}$.

Розв'язання. Розмістимо дані задачі в таблиці:

	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$t=6$	$t=7$	$t=8$	$t=9$
y_t	-1	-3	-3	-1	0	1	2	2	4	6
y_{t-2}			-1	-3	-3	-1	0	1	2	2

Починаючи з моменту часу $t=2$ є відомими як значення y_t , так і y_{t-2} . Скористаємось цією частиною таблиці для відшукування коефіцієнтів рівняння $y_t=b_0+b_1y_{t-2}$.

Розмістимо дані так, як буде зручно для розрахунків:

y_{t-2}	-1	-3	-3	-1	0	1	2	2
y_t	-3	-1	0	1	2	2	4	6

Складаємо матрицю системи умовних рівнянь та знаходимо параметри моделі:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \\ 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = (A^T A)^{-1} A^T \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,794 \\ 0,117 \end{pmatrix}.$$

Отже, $y_t=1,794+1,117y_{t-2}$.

Відповідь: $y_t=1,794+1,117y_{t-2}$.

■ **Задача 7.** Таблиця перевірконої послідовності даних складається з п'яти точок:

x_1	-4	-2	0	2	4
x_2	-3	-1	1	3	5
y	-6,8	-0,3	4,3	6,7	8,8

За даними навчальної послідовності даних знайдені коефіцієнти таких моделей:

- 1) $y_M = -0,13 - 0,2x_1 + 2,2x_2$;
- 2) $y_M = 2,2 - 0,2x_1^2 + 2x_2$;
- 3) $y_M = 0,27 - 0,25x_1 + 0,07x_2^2$
- 4) $y_M = 2,06 - 0,2x_1^2 - 0,03x_1x_2 + 2x_2$;

Для даної множини моделей визначить модель оптимальної складності за критерієм регулярності.

Розв'язання. Для кожної моделі розрахуємо її значення в точках перевірконої послідовності даних, а потім обчислимо значення критерію регулярності за формулою (7.1).

Для першої моделі маємо:

$y_{табл}$	-6,8	-0,3	4,3	6,7	8,8
y_M	-6	-1,9	2,1	6,1	10,2

$$\text{Значення критерію } \Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{табл} - y_M)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{табл})_i^2} = 0,051.$$

Для другої моделі маємо:

$y_{табл}$	-6,8	-0,3	4,3	6,7	8,8
y_M	-7,2	-0,7	4,17	7,3	8,7

$$\text{Значення критерію } \Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{табл} - y_M)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{табл})_i^2} = 0,0036.$$

Для третьої моделі маємо:

$y_{табл}$	-6,8	-0,3	4,3	6,7	8,8
y_M	1,9	0,84	0,35	0,42	1,07

$$\text{Значення критерію } \Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{табл} - y_M)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{табл})_i^2} = 0,9.$$

Для четвертої моделі маємо:

$y_{табл}$	-6,8	-0,3	4,3	6,7	8,8
y_M	-7,7	-0,85	4,1	7,1	8,3

$$\text{Значення критерію } \Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{табл} - y_M)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} (y_{табл})_i^2} = 0,0077.$$

Найменше значення критерію 0,0036 досягається для другої моделі $y_M = 2,2 - 0,2x_1^2 + 2x_2$. Отже, за даної множини моделі-претендентів, ця модель і є моделлю оптимальної складності.

Відповідь: моделлю оптимальної складності є друга з запропонованих моделей: $y_M = 2,2 - 0,2x_1^2 + 2x_2$. Досягнуте значення критерію регулярності складає 0,0036.

9.6. Завдання для самостійної роботи

□ 1. Таблиця даних складається з чотирьох точок **(2;2,2)**, (3;2,4), **(4;2,4)**, (5;2,8), де жирним шрифтом позначені точки навчаючої послідовності даних. Побудуйте найпростішу модель, яка задовольняла б цим даним, і визначить для неї критерій мінімуму зсуву. Коефіцієнт екстраполяції візьміть рівним 2.

□ 2. Нехай таблиця даних складається з шести точок **(0;1,8)**, **(1;2,0)**, (2;2,5), **(3;1,9)**, **(4;2,1)**, (5;2,3), де жирним шрифтом позначені точки навчаючої послідовності даних. Побудуйте найпростішу модель, яка задовольняла б цим даним, і визначить для неї критерій регулярності.

□ 3. Таблиця даних А складається з дев'яти точок (1;-1), (2;-2), (3;-3), (4;0), (5;1), (6;2), (7;2), (8;4), (9;5). Знайдіть коефіцієнти моделі, яка задовольняла б вказаним точкам і мала вигляд: $y_t = b_0 + b_1 y_{t-1}$.

□ 4. Для даної таблиці спостережень побудувати модель та оцінити її якість за критерієм мінімуму зсуву. Прийняти коефіцієнт екстраполяції рівним 2.

x	-2	0	2	4
y	12	5	0	-3

□ 5. Для даної таблиці спостережень побудувати модель та оцінити її якість за критерієм регулярності:

x	0	1	2	3	4
y	7	3	1	0	-3

□ 6. Для даної таблиці спостережень побудувати модель та оцінити її якість за критерієм мінімуму зсуву. Прийняти коефіцієнт екстраполяції рівним 1,5.

x	-1	0	1	2	3	4
y	5	2	0	1	4	6

□ 7. Таблиця даних А складається з восьми точок (0,-3), (1;-1), (2;2), (3;3), (4;8), (5;10), (6;16), (7;21). Знайдіть коефіцієнти моделі, яка задовольняла б вказаним точкам і мала вигляд: $y_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2}$.

□ 8. Таблиця перевірконої послідовності даних складається з чотирьох точок:

x_1	-2	0	1	3
x_2	2	-1	0	1
y	-8,3	-0,2	1,6	5,9

За даними навчальної послідовності даних знайдені коефіцієнти таких моделей:

- 1) $y_M = -1,4 + 0,3x_1 - 2x_2$;
- 2) $y_M = -3,9 + 0,3x_1^2 + 2,1x_1x_2$;
- 3) $y_M = 0,9 - 0,5x_2^2 + 2x_1x_2$
- 4) $y_M = 1,5 - 0,05x_1^2 + 2x_1x_2 - 0,55x_2^2$;

Для даної множини моделей визначити модель оптимальної складності за критерієм регулярності.

9.7. Контрольні запитання

- 1) У чому полягає основна ідея самоорганізації моделей?
- 2) Для чого використовують навчальну послідовність даних? перевірконую послідовність даних?
- 3) Як поділити таблицю даних на навчальну та перевірконую частини?
- 4) Чим визначається складність моделі?
- 5) Дайте поняття внутрішнього критерію та зовнішнього критерію.
- 6) Чим визначається модель оптимальної складності?
- 7) Які Ви знаєте зовнішні критерії?
- 8) За якою формулою розраховується внутрішній критерій?
- 9) За якою формулою розраховується критерій регулярності?
- 10) За якою формулою розраховується критерій мінімуму зсуву?
- 11) Що таке коефіцієнт екстраполяції?
- 12) Як визначити параметри моделі за табличними даними?
- 13) Які алгоритми самоорганізації Ви знаєте?
- 14) Опишіть, які дії виконуються в однорядному (комбінаторному) алгоритмі самоорганізації.
- 15) Опишіть, які дії виконуються в багаторядному алгоритмі самоорганізації.
- 16) Які класифікації алгоритмів самоорганізації Ви знаєте?

Розділ 10

ЗАВДАННЯ ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

10.1. Лабораторна робота «Перевірка генератора випадкових чисел на відповідність закону розподілу»

Завдання до роботи

Згенерувати 10000 випадкових чисел способом, указаним у варіанті. Побудувати гістограму частот, знайти середнє і дисперсію цих випадкових чисел. По виду гістограми частот визначити вид закону розподілу. Відповідність заданому закону розподілу перевірити за допомогою критерію згоди χ^2 .

Варіанти

1) Згенерувати випадкове число по формулі $x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln \xi_i$, де ξ_i - випадкове число, рівномірно розподілене в інтервалі (0;1). Числа ξ_i можна створювати за допомогою убудованого в мову програмування генератора випадкових чисел. Перевірити на відповідність експоненційному закону розподілу $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Перевірку зробити при різних значеннях λ .

2) Згенерувати випадкове число по формулах:

$$x_i = sm_i + a$$

$$m_i = \sum_{i=1}^{12} x_i - 6,$$

де ξ_i - випадкове число, рівномірно розподілене в інтервалі (0;1). Числа ξ_i можна створювати за допомогою убудованого в мову програмування генератора випадкових чисел. Перевірити на відповідність нормальному закону розподілу:

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2s^2}\right).$$

Перевірку зробити при різних значеннях a і σ .

3) Згенерувати випадкове число за формулою $z_{i+1} = az_i \pmod{c}$, $x_{i+1} = z_{i+1} / c$, де $a=5^{13}$, $c=2^{31}$. Перевірити на відповідність рівномірному закону розподілу в інтервалі (0;1). Перевірку зробити при різних значеннях a і c .

Хід виконання роботи

- 1) вивчити теоретичні відомості (розділ 2.1);
- 2) разом з викладачем вибрати варіант завдання;
- 3) виконати аналітичний розрахунок мережі МО;
- 4) перевірити відповідність результатів розрахунку розумному змісту моделі;
- 5) скласти та оформити звіт.

Зміст звіту

- 1) завдання до роботи;
- 2) лістинг програми;
- 3) результати перевірки ГВЧ при різних параметрах: а) значення середнього і дисперсії; б) гістограма частот; в) значення критерію згоди χ^2 ; г) висновок про відповідність закону розподілу;
- 4) висновки про результати перевірки ГВЧ

10.2. Лабораторна робота «Ідентифікація об'єкта за даними спостережень»

Завдання до роботи

Скласти програму ідентифікації об'єкта за даними спостережень функціями, які дані у варіанті завдання. Перевірити програму на даних, які точно або приблизно відповідають наперед відомій моделі. Ідентифікувати об'єкт за даними спостережень, які наведені у варіанті завдання. Проаналізувати результати. Оформити звіт та здати лабораторну роботу.

Варіанти

1) Використати функції виду $y = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ для ідентифікації об'єкта за такими даними спостережень:

x	1	5	9	13	17	21	25	29
y	312,89	1612	4225	8043	12900	18560	24740	31070
x	33	37	41	45	49	53	57	61
y	37160	42510	46600	48820	48510	44960	37370	24910

2) Використати функції виду $y = b_0 + b_1 \sin x + b_2 \cos x + \dots + b_{2n-1} \sin^n x + b_{2n} \cos^n x$ для ідентифікації об'єкта за такими даними спостережень:

x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8
y	1,79	2,005	2,225	2,41	2,526	2,553	2,489	2,349
x	3,2	3,6	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6
y	2,161	1,954	1,76	1,603	1,504	1,478	1,531	1,661

3) Використати функції виду $y = b_0 + b_1 \frac{1}{x} + \dots + b_n \frac{1}{x^n}$ для ідентифікації об'єкта за такими даними спостережень:

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	14	18,222	18	17,216	16,444	15,778	15,219	14,749
x	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5
y	14,352	14,014	13,722	13,469	13,248	13,052	12,879	12,724

4) Використати функції виду $y = b_0 \cdot x^{b_1} \cdot z^{b_2}$ для ідентифікації об'єкта за такими даними спостережень:

y	6.0	8.5	11	14.5	18.5	23	28.5	35
x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
z	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9
y	42	50.5	60	70.5	82.5	96	110.5	127
x	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
z	9.5	10	10.5	11	11.5	12	12.5	13

Хід виконання роботи

- 1) вивчити теоретичні відомості (розділ 2.2);
- 2) разом з викладачем вибрати варіант завдання;
- 3) скласти програму, яка реалізує методи ідентифікації даного об'єкта;
- 4) отримати результати при різній степені складності обраної моделі та за методом найменших квадратів обрати найкращу;
- 5) зробити висновки щодо отриманих результатів та використаних методів ідентифікації;
- 6) скласти й оформити звіт.

Зміст звіту

- 1) завдання до роботи;
- 2) лістинг програми;
- 3) результати ідентифікації різними функціями: а) функція з визначеними коефіцієнтами; б) таблиця заданих значень відгуку моделі та значень відгуку моделі, розрахованих за функцією; в) значення критерію найменших квадратів; г) графік функції.
- 4) висновки про результати ідентифікації.

10.3. Лабораторна робота «Дослідження мережі масового обслуговування аналітичними методами»

Завдання до роботи

Дослідити обраний варіант мережі МО аналітичними методами і зробити висновки про ефективності її роботи.

Варіанти

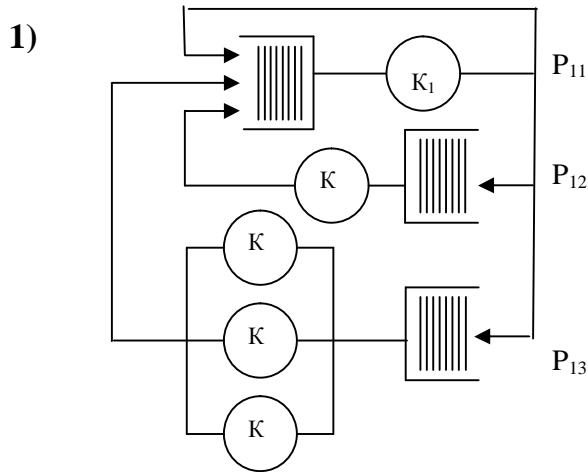
Варіанти завдань представлені на рисунках 10.1, 10.2.

Хід виконання роботи

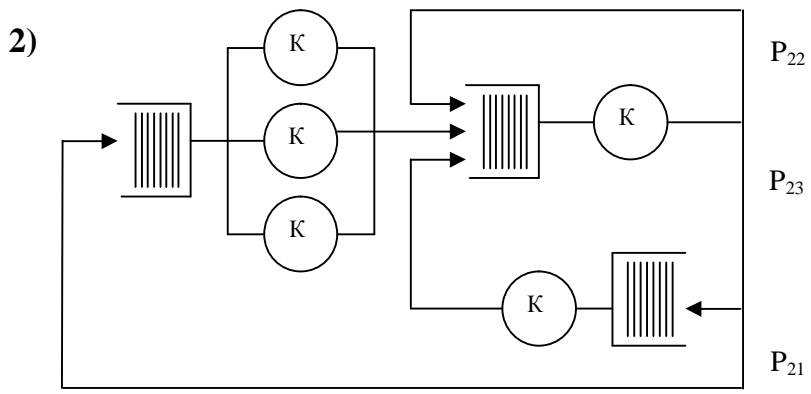
- 1) вивчити теоретичні відомості (розділ 4);
- 2) разом з викладачем вибрати варіант завдання;
- 3) виконати аналітичний розрахунок мережі МО;
- 4) перевірити відповідність результатів розрахунку розумному змісту моделі;
- 5) скласти та оформити звіт.

Зміст звіту

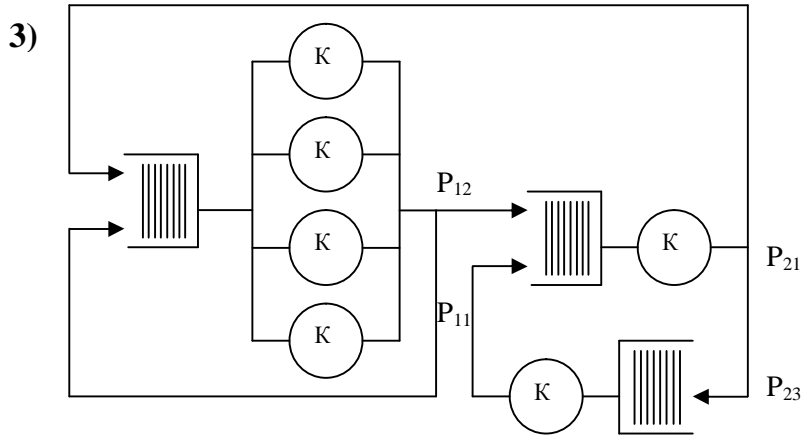
- 1) завдання до роботи;
- 2) опис розрахунку обраного варіанта мережі МО;
- 3) програма виконання розрахунку на вибір студента або з використанням відомої алгоритмічної мови програмування (Pascal, C) або з використанням математичного програмного забезпечення(Mathcad, Matlab);
- 4) висновки про переваги та недоліки освоєних методів дослідження мережі МО, про отримані результати дослідження.



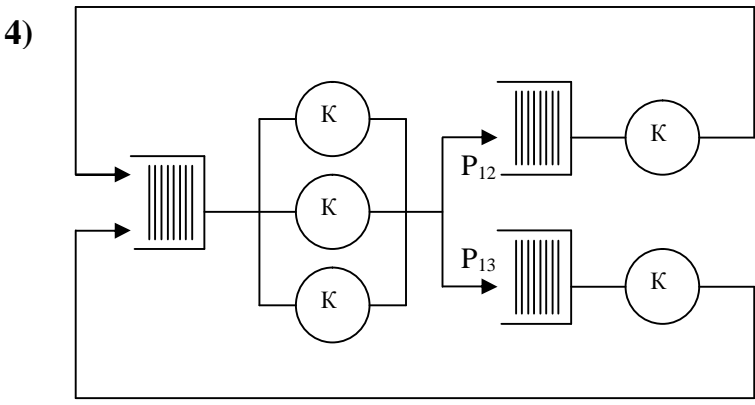
$N=6; P_{11}=0,1; P_{12}=0,3;$
 $\frac{1}{m_1}=0,8; \frac{1}{m_2}=0,3;$
 $\frac{1}{m_3}=1,2.$



$N=8; P_{22}=0,05;$
 $P_{23}=0,6; \frac{1}{m_1}=0,3;$
 $\frac{1}{m_2}=0,9; \frac{1}{m_3}=0,4.$



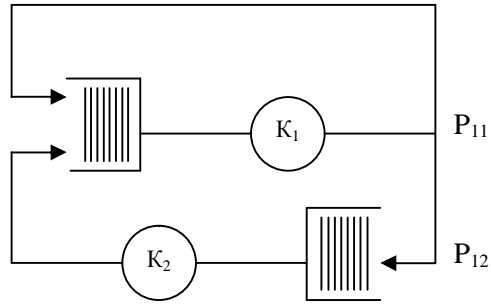
$N=8; P_{21}=0,3; P_{12}=0,8;$
 $\frac{1}{m_1}=0,15; \frac{1}{m_2}=0,8;$
 $\frac{1}{m_3}=0,2.$



$N=7; P_{13}=0,4;$
 $\frac{1}{m_1}=0,2;$
 $\frac{1}{m_2}=0,2; \frac{1}{m_3}=0,4.$

Рисунок 10.1. Варіанти 1, 2, 3, 4 до лабораторної роботи

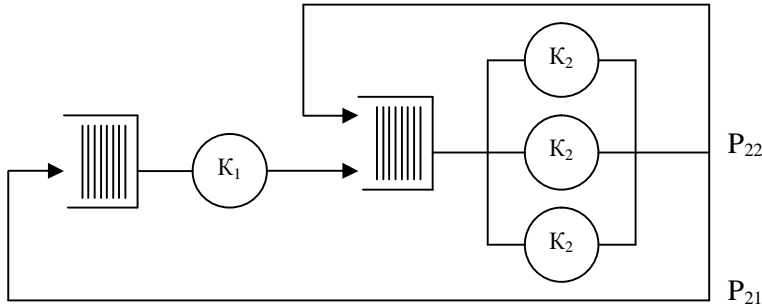
5)



$$N=20; P_{11}=0,23;$$

$$\frac{1}{m_1}=0,8; \frac{1}{m_2}=0,6.$$

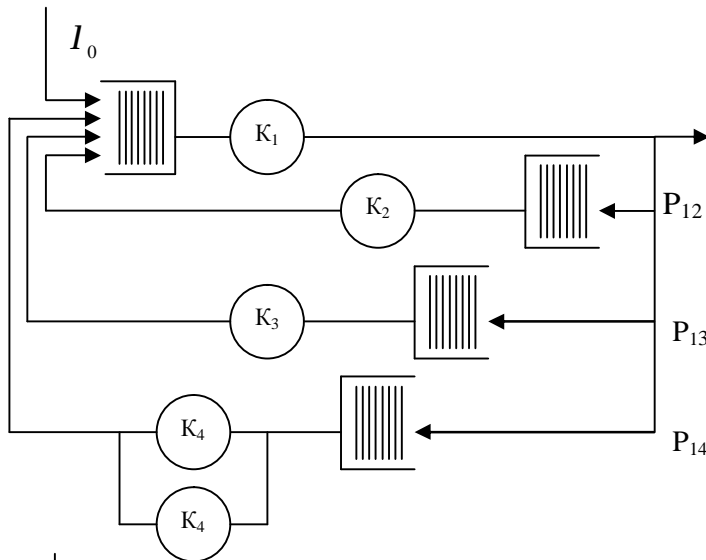
6)



$$N=20; P_{22}=0,2;$$

$$\frac{1}{m_1}=0,8; \frac{1}{m_2}=0,3.$$

7)



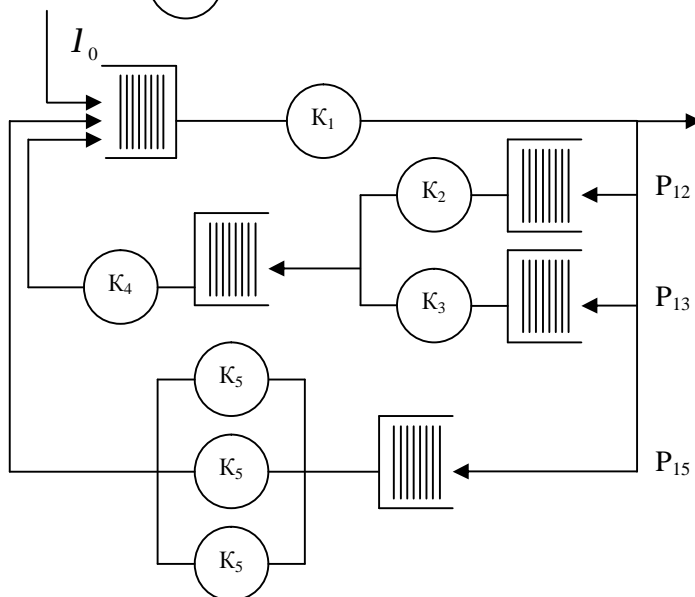
$$P_{12}=0,15; P_{13}=0,13;$$

$$P_{14}=0,3; I_0=0,6;$$

$$\frac{1}{m_1}=0,6; \frac{1}{m_2}=0,3;$$

$$\frac{1}{m_3}=0,4; \frac{1}{m_4}=0,1.$$

8)



$$P_{15}=P_{12}=0,15; I_0=0,6;$$

$$P_{13}=0,35; \frac{1}{m_2}=0,6;$$

$$\frac{1}{m_1}=0,5; \frac{1}{m_3}=0,5;$$

$$\frac{1}{m_4}=0,05; \frac{1}{m_z}=0,1$$

Рисунок 10.2. Варіанти 5, 6, 7, 8 до лабораторної роботи

10.4. Лабораторна робота

«Дослідження мережі МО імітаційними методами. Складання алгоритму імітації і його реалізація»

Завдання до роботи:

Дослідити обраний варіант мережі МО імітаційними методами. Вважати показниками ефективності мережі МО ймовірність відмови в обслуговуванні, середні довжини черг в накопичувачах та середній час очікування в чергах.

Варіанти

Варіанти завдань представлені на рисунках 10.3,10.4.

Хід виконання роботи:

- 1) вивчити теоретичні відомості (розділ 5.3);
- 2) разом з викладачем вибрати варіант завдання;
- 3) побудувати алгоритм імітації і виконати його реалізацію на відомій алгоритмічній мові програмування;
- 4) перевірити відповідність результатів моделювання задуму моделі;
- 5) скласти й оформити звіт.

Зміст звіту:

- 1) завдання до роботи;
- 2) програма, що реалізує алгоритм імітації з необхідними поясненнями;
- 3) результати дослідження відповідності задуму моделювання, що містять у собі результати прогонів програми при:
 - а) вхідних значеннях параметрів l, m, l ;
 - б) зміненому в декілька раз параметрі l ;
 - в) зміненому в декілька раз параметрі m ;
 - г) зміненому в декілька раз параметрі l ;
 - д) збільшеному в два рази часу моделювання;
- 4) висновки про переваги та недоліки дослідження мережі МО імітаційними методами, обраного способу побудови алгоритму імітації, отриманих результатах дослідження.

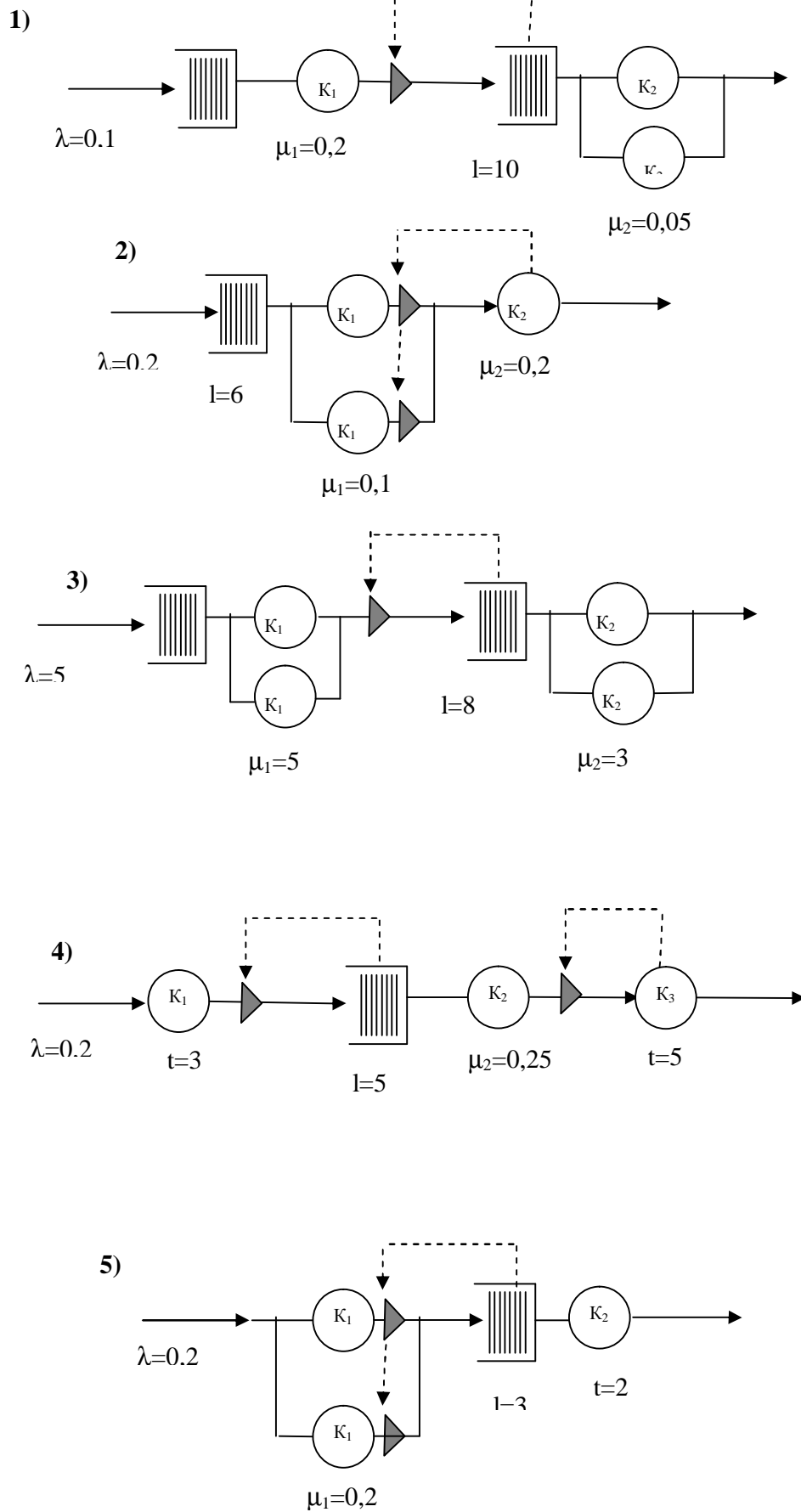


Рисунок 10.3. Варіанти 1,2,3,4,5 до лабораторної роботи

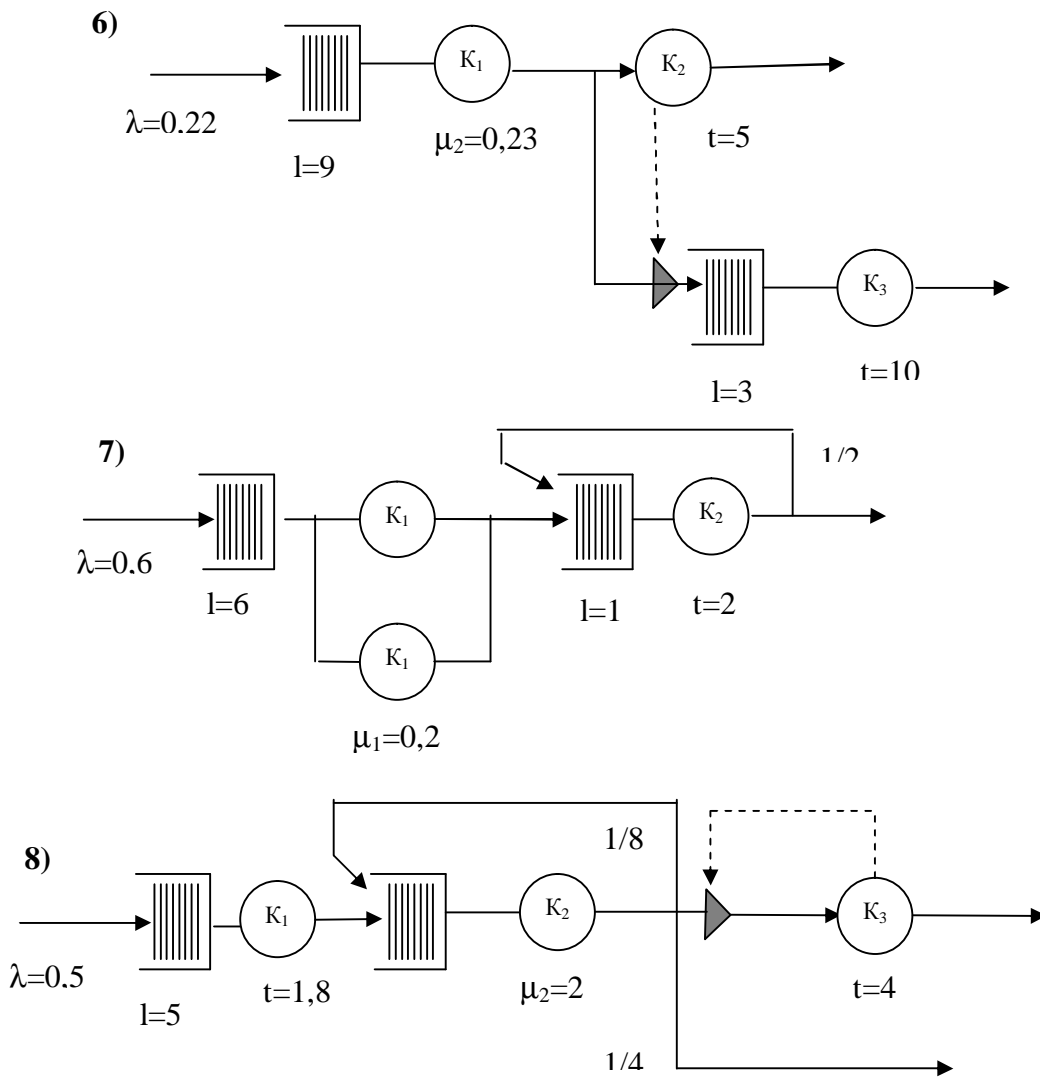


Рисунок 10.4. Варіанти 6,7,8 до лабораторної роботи

10.5. Лабораторна робота

«Дослідження мережі Петрі імітаційними методами. Складання алгоритму імітації і його реалізація»

Завдання до роботи

Скласти мережу Петрі для мережі МО, яка була досліджена в лабораторній роботі 3. Побудувати і провести експеримент з імітаційною моделлю мережі МО, яка опрацьована при виконанні лабораторних робіт 3 та 4, з метою оптимізації досліджуваного відгуку моделі.

Хід виконання роботи

- 1) вивчити теоретичні відомості (розділи 5.4,5.5,5.6);
- 2) скласти мережу Петрі для мережі МО (див. рис. 3.7а,б), перевірити правильність її складання разом з викладачем;

- 3) побудувати алгоритм імітації мережі Петрі і здійснити його перевірку, змінюючи значення вхідних змінних моделі;
- 4) отримати значення вихідних характеристик моделі;
- 5) порівняти значення вихідних характеристик моделі, отримані за допомогою різних способів формалізації - мереж МО та мереж Петрі;
- 6) зробити висновки щодо використання різних способів формалізації моделі;
- 7) скласти й оформити звіт.

Зміст звіту

- 1) завдання до роботи;
- 2) мережа Петрі з поясненнями основних її переходів та позицій;
- 3) лістинг програми імітації мережі Петрі;
- 4) результати перевірки правильності алгоритму імітації;
- 5) значення вихідних характеристик моделі в порівнянні з тими, що були отримані в лабораторній роботі 3;
- 6) висновки про збігання або не збігання значень вихідних характеристик моделі, отриманих за допомогою різних способів формалізації - мереж МО та мереж Петрі; про переваги та недоліки використання мереж Петрі для формалізації процесів функціонування дискретних систем.

10.6. Лабораторна робота «Планування і проведення машинних експериментів з імітаційною моделлю системи»

Завдання до роботи

Спланувати і провести експеримент з імітаційною моделлю системи, побудованій при виконанні лабораторної роботи 3 або 4.

Варіанти

Варіанти, що представлені у таблиці 10.1, обираються студентом разом з викладачем.

Таблиця 10.1

Варіанти до лабораторної роботи

№ варіанта	Відгук моделі	План експерименту
1	ймовірність відмови	ПФЕ
2	ймовірність відмови	ДФЕ
3	середня довжина черги	ПФЕ
4	середня довжина черги	ДФЕ
5	середній час очікування	ПФЕ
6	середній час очікування	ДФЕ

Хід виконання роботи

- 1) вивчити теоретичні відомості (розділ 6.2);
- 2) провести тактичне планування експерименту;
- 3) провести стратегічне планування експерименту;
- 4) провести серію експериментів у відповідності з побудованим планом;
- 5) на основі отриманих результатів побудувати регресійне рівняння відгуку моделі, пояснити результати моделювання;
- 6) скласти й оформити звіт.

Зміст звіту

- 1) завдання до роботи;
- 2) формальна модель системи (мережа МО або мережа Петрі);
- 3) результати тактичного планування експерименту;
- 4) результати стратегічного планування експериментів;
- 5) результати проведення серії експериментів;
- 6) регресійне рівняння відгуку моделі;
- 7) результати дослідження, отримані з регресійного рівняння відгуку; .
- 8) висновки про переваги використання методів планування при проведенні серії експериментів, про отримані результати моделювання, про точність отриманих результатів.

10.7. Лабораторна робота «Відшукування моделі оптимальної складності методами самоорганізації моделей»

Завдання до роботи

Для визначення параметрів моделі за даними навчальної послідовності потрібно використати програму, яку було складено на лабораторній роботі «Ідентифікація об'єкта за даними спостережень».

1) Скласти програму відшукування моделі оптимальної складності використовуючи в залежності від варіанту завдання однорядний або багаторядний алгоритм самоорганізації моделей, критерій регулярності, критерій мінімуму зсуву або комбінований критерій, а також заданий клас опорних функцій.

2) Перевірити програму на даних, які точно або приблизно відповідають наперед відомій моделі.

3) Знайти модель оптимальної складності, що відповідає наведеним у варіанті завдання даним.

4) Проаналізувати результати.

5) Оформити звіт та здати лабораторну роботу.

Варіанти

Перша підгрупа виконує завдання за допомогою однорядного алгоритму самоорганізації моделей, а друга – за допомогою багаторядного алгоритму.

1) Використати функції виду $y = b_0 + b_1x + b_2x^2 \dots + b_5x^5$ та критерій мінімуму зсуву для пошуку моделі оптимальної складності самоорганізації моделей за такими даними спостережень:

x	1	5	9	13	17	21	25	29
y	312,89	1612	4225	8043	12900	18560	24740	31070
x	33	37	41	45	49	53	57	61
y	37160	42510	46600	48820	48510	44960	37370	24910

2) Використати функції виду

$y = b_0 + b_1 \sin x + b_2 \cos x + \dots + b_{2n-1} \sin^n x + b_{2n} \cos^n x$ та комбінований критерій для пошуку моделі оптимальної складності самоорганізації моделей за такими даними спостережень:

x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8
y	1,79	2,005	2,225	2,41	2,526	2,553	2,489	2,349
x	3,2	3,6	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6
y	2,161	1,954	1,76	1,603	1,504	1,478	1,531	1,661

3) Використати функції виду $y = b_0 + b_1 \frac{1}{x} + \dots + b_n \frac{1}{x^n}$ та критерій мінімуму зсуву для пошуку моделі оптимальної складності самоорганізації моделей за такими даними спостережень:

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	14	18,222	18	17,216	16,444	15,778	15,219	14,749
x	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5
y	14,352	14,014	13,722	13,469	13,248	13,052	12,879	12,724

Хід виконання роботи

- 1) вивчити теоретичні відомості (розділ 9);
- 2) виконати розподіл даних на навчальну та перевірочну послідовності;
- 3) скласти програму відшукування моделі оптимальної складності;

- 4) перевірити програму, яку склали, за даними, що відповідають наперед відомій функції а) точно, б) з похибкою у 5%, в) з похибкою у 10%;
- 5) визначити завадостійкість побудованого алгоритму самоорганізації моделей;
- 6) дослідити вплив розподілу даних на відшукання істинної моделі;

Зміст звіту

- 1) завдання до роботи;
- 2) лістинг програми;
- 3) результати перевірки алгоритму: а) дані та функція, якій вони точно відповідають; б) знайдена модель оптимальної складної за даними, які точно відповідають наперед відомій функції; в) дані та функція, якій вони відповідають з точністю 5% (10%); г) знайдена модель оптимальної складної за даними, які відповідають наперед відомій функції з точністю 5% (10%);
- 4) результати пошуку моделі оптимальної складності: а) графік внутрішнього та зовнішнього критерію в залежності від складності моделі; б) функція з визначеними коефіцієнтами; в) таблиця заданих значень відгуку моделі та значень відгуку моделі, розрахованих за функцією;
- 5) висновки про результати застосування методів самоорганізації моделей.

Розділ 11

ЗАВДАННЯ ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТУ

11.1 Вказівки до виконання курсового проекту

Для виконання курсового проекту кожному студенту видається завдання, що містить текстовий опис об'єкта моделювання і чисельні дані про змінні та параметри об'єкта моделювання, а також про впливи зовнішнього середовища, характеристики процесу функціонування об'єкта, що необхідно оцінити в процесі моделювання.

Студент, закінчуючи черговий етап роботи (відповідно до графіка виконання курсового проекту), подає готовий матеріал (описи, схеми алгоритмів і програм, машинні роздруківки і т.п.) для перевірки правильності отриманих проміжних результатів і напрямку ходу подальших робіт із моделювання процесу функціонування конкретної системи.

У ході виконання курсового проекту студент повинний виконати формалізацію опису об'єкта моделювання в термінах відомих математичних схем, розробити алгоритм імітації роботи моделі, виконати перевірку алгоритму імітації, одержати статистичні оцінки заданих характеристик моделі, побудувати і провести факторний експеримент із заданою ціллю.

Після ряду прогонів моделі, яка побудована, і отримання результатів факторного експерименту з необхідною точністю необхідно провести їх інтерпретацію й аналіз у термінах об'єкта моделювання, а потім оформити пояснювальну записку курсового проекту.

За результатом виконання курсового проекту оформлюється пояснювальна записка, що містить опис розробленого алгоритмічного і програмного забезпечення моделювання системи, результатів факторного експерименту з моделлю системи, рекомендацій по використанню моделі при дослідженні і розробці реальної системи, та, документацію з алгоритмів і програм моделювання.

11.2. Рекомендований зміст пояснювальної записки курсового проекту

Пояснювальна записка оформлюється згідно вимог до оформлення технічної документації. Для складання пояснювальної записки рекомендуються наступні розділи:

Вступ

1. Постановка задачі.

2. Концептуальної моделі системи.

3. Формалізація моделі системи.

4. Алгоритмізація моделі системи і її машинна реалізація.

5. Верифікація моделі.

6. Дослідження моделі.

7. Інтерпретація результатів моделювання системи, формулювання висновків та пропозицій

Висновки

Додатки (лістинги програм, лістинги результатів моделювання, результатів проведення факторного експерименту)

У вступі указується актуальність і мета дослідження, що проводиться у курсовому проекті. У постановці задачі наводиться текст завдання до курсового проекту. Концептуальна модель системи представляє деталізоване представлення системи, що моделюється, в якому виділяються і описуються підсистеми, елементи та зв'язки між елементами системи. Доцільно використовувати при описі концептуальної системи рисунки, що представляють структурні зв'язки системи, маршрути слідування об'єктів обслуговування і т.і.

Формалізація моделі системи виконується з використанням засобів мереж масового обслуговування і мереж Петрі (див. розділ 3). Для опису формалізованої моделі рекомендується використовувати приклади, розв'язанні в розділі 3.

В описі побудови алгоритму імітаційної моделі указуються обрані виконавцем способи просування модельного часу та способи просування стану моделі в часі (див. розділ 5), наводиться детальний опис алгоритму з описування найважливіших змінних, що використовувалися в алгоритмі, указується обране програмне забезпечення для реалізації моделі.

У розділі „Верифікація моделі” описуються результати перевірки відповідності побудованого алгоритму імітації алгоритму функціонування моделі системи. Указуються значення змінних, при яких виконувалась перевірка і відповідне змінювання вихідних змінних.

Дослідження моделі проводиться методами регресійного або дисперсійного аналізу (див. розділ 6). У пояснювальній записці указуються

- 1) відгук моделі, що досліджується;
- 2) фактори, вплив яких досліджується, та області змінювання факторів;
- 3) матриця планування, за якою проводився експеримент;
- 4) результати експериментів;
- 5) опис статистичної обробки результатів факторного експерименту;
- 6) висновки про вплив факторів.

У заключному розділі усі числові результати, які отримані в ході моделювання, набувають словесної інтерпретації, осмислюються і формують-

ся у висновки та пропозиції щодо поліпшення функціонування системи, яка досліджується.

У висновках указується імітаційна модель системи, що побудована, та результати її дослідження. Також описуються припущення, які були зроблені, та умови задачі, які не набули відтворення в імітаційній моделі в зв'язку з їх складністю. Формулюється висновок про успішне або не успішне імітаційне моделювання системи. Надаються пропозиції щодо подальшого дослідження системи.

11.3. Варіанти завдань до курсового проекту

Завдання до курсового проектування складені за відомими навчальними підручниками та посібниками з моделювання систем [Прицкер], [Кельтон], [Томашевський].

Рівень складності DE

Завдання 1. На складальну ділянку цеху підприємства через інтервали часу, які розподілені за експоненціальним законом із середнім значенням 10 хвилин, надходять партії, кожна з яких складається з трьох деталей. Половина всіх деталей, що надходять, перед зборкою повинна пройти попередню обробку протягом 7 хвилин. На зборку подаються оброблена і необроблена деталі. Процес зборки займає усього 6 хвилин. Потім виріб надходить на регулювання, що продовжується в середньому 8 хвилин (час виконання її розподілений за експоненціальним законом). У результаті зборки можлива поява 4% бракованих виробів, що не надходять на регулювання, а направляються знову на попередню обробку.

Визначити можливі місця появи черг і їхні статистичні характеристики. Виявити причини виникнення черг, запропонувати заходи для їх усунення і знайти середню кількість деталей, що знаходиться на складальній ділянці цеху, для зміненої системи.

Завдання 2. На комплектувальний конвеєр складального цеху кожні 5 ± 1 хвилин надходять 5 виробів першого типу і кожні 20 ± 7 хвилин надходять 20 виробів другого типу. Конвеєр складається із секцій, що вміщують по 10 виробів кожного типу. Комплектація починається тільки при наявності деталей обох типів у необхідній кількості і триває 10 хвилин. При недостатці деталей секція конвеєра залишається порожньою.

Визначити ймовірність пропуску секції, середні і максимальні черги по кожному типу виробів. Визначити економічну доцільність переходу на секції по 20 виробів із часом комплектації 20 хвилин.

Завдання 3. У системі передачі даних здійснюється обмін пакетами даних між пунктами А і В по дуплексному каналу зв'язку. Пакети надхо-

дять у пункти системи від абонентів з інтервалами часу між ними 10 ± 3 мс. Передача пакета займає 10 мс. У пунктах є буферні регістри, що можуть зберігати два пакети (включаючи переданий). У випадку приходу пакета в момент зайнятості регістрів пунктам системи дається вихід на супутникову напівдуплексну лінію зв'язку, що здійснює передачу пакетів даних за 10 ± 5 мс. При зайнятості супутникової лінії пакет одержує відмову.

Визначити частоту викликів супутникової лінії і її завантаження. У випадку можливості відмов визначити необхідний для безвідмовної роботи системи обсяг буферних регістрів.

Завдання 4. Спеціалізована обчислювальна система складається з трьох процесорів і загальної оперативної пам'яті. Завдання, що надходять на обробку через інтервали часу 5 ± 2 хвилин, займають обсяг оперативної пам'яті розміром у сторінку. Після трансляції першим процесором протягом 5 ± 1 хвилин їхній обсяг збільшується до двох сторінок і вони надходять в оперативну пам'ять. Потім після редагування в другому процесорі, що займає $2,5 \pm 0,5$ хвилин на сторінку, обсяг зростає до трьох сторінок. Відредаговані завдання через оперативну пам'ять надходять у третій процесор на рішення, що потребує $1,5 \pm 0,4$ хвилин на сторінку, і залишають систему, минаючи оперативну пам'ять.

Визначити характеристики заняття оперативної пам'яті по всім трьом видам завдань.

Завдання 5. З ливарного цеху на ділянку обробки і зборки надходять заготовки через 20 ± 5 хвилин. Третина з них обробляється протягом 60 хвилин і надходить на комплектацію. Дві третини заготовок обробляється за 30 хвилин перед комплектацією, що потребує наявності однієї деталі першого типу і двох деталей другого. Після цього всі три деталі подаються на зборку, що займає 60 ± 2 хвилин для першої деталі і 60 ± 8 хвилин для двох інших, причому вони беруть участь у зборці одночасно. При наявності на виході одночасно всіх трьох деталей виріб залишає ділянку.

Визначити місця утворення і характеристики можливих черг.

Завдання 6. На обчислювальний центр через 300 ± 100 хвилин надходять завдання довжиною 500 ± 200 байт. Швидкість введення, виведення й обробки завдань - 100 байт/хвилин. Завдання проходять послідовно введення, обробку і виведення, буферуючись перед кожною операцією. Після виведення 5% завдань виявляються виконаними неправильно внаслідок збоїв і повертаються на введення. Для прискорення обробки завдання в чергах розташовуються по зростанню їхньої довжини, тобто короткі повідомлення обслуговують у першу чергу. Завдання, виконані невірною, повертаються на введення і в усіх чергах обслуговуються першими.

Визначити необхідну ємність буферів і функцію розподілу часу обслуговування завдань.

Завдання 7. Розподілений банк даних системи збору інформації організований на базі двох комп'ютерів, сполучених дуплексним каналом зв'язку. Запит, що надходить, обробляється на першому комп'ютері і з ймовірністю 50% необхідна інформація виявляється на місці. У протилежному випадку необхідне посилання запиту в другий комп'ютер. Запити надходять через 10 ± 3 секунд, первинна обробка запиту займає 2 секунди, видача відповіді потребує 18 ± 2 секунди, передача по каналу зв'язку займає 3 секунди. Часові характеристики обох комп'ютерів однакові.

Визначити середній час і функцію розподілу часу обробки запиту в інформаційній системі, завантаження комп'ютерів.

Завдання 8. Деталі, необхідні для роботи цеху, знаходяться на цеховому і центральному складах. На цеховому складі зберігається 20 комплектів деталей, потреба в яких виникає через 60 ± 10 хвилин і становить один комплект. У випадку зниження запасів до трьох комплектів формується протягом 60 хвилин вимога на поповнення запасів цехового складу до повного обсягу в 20 комплектів, яка посилається на центральний склад, де протягом 60 ± 20 хвилин відбувається комплектування і за 60 ± 5 хвилин здійснюється доставка деталей у цех.

Визначити ймовірність простою цеху через відсутність деталей і середнє завантаження цехового складу. Визначити момент поповнення запасу цехового складу, при якому ймовірність простою цеху буде дорівнювати нулю.

Рівень складності ВС

Завдання 9. На обробну ділянку цеху надходять деталі в середньому через 50 хвилин. Первинна обробка деталей відбувається на одному із двох верстатів. Перший верстат обробляє деталь у середньому 40 хвилин і має до 4% браку, другий - відповідно 60 хвилин і 8% браку. Всі браковані деталі повертаються на повторну обробку на другий верстат. Деталі, що потрапили в розряд бракованих двічі, вважаються відходами. Вторинну обробку проводять також два верстати в середньому 100 хвилин кожний. Причому перший верстат обробляє наявні в накопичувачі після первинної обробки деталі, а другий верстат підключається при наявності в накопичувачі більше трьох деталей. Всі інтервали часу розподілені за експоненціальним законом.

Визначити завантаження другого верстата на вторинній обробці і можливість появи відходів. Визначити, як вплине зменшення умови підключення другого верстату до двох або одної деталі на завантаження другого верстата на вторинній обробці.

Завдання 10. На регульовальну ділянку цеху через випадкові інтервали часу надходять по два агрегати в середньому через кожні 30 хвилин. Первин-

не регулювання здійснюється для двох агрегатів одночасно і займає біля 30 хвилин. Якщо в момент приходу агрегатів попередня партія не була оброблена, агрегати на регулювання не приймаються. Агрегати, які одержали відмову, після первинного регулювання надходять у проміжний накопичувач. З накопичувача агрегати, що пройшли первинне регулювання, надходять попарно на вторинне регулювання, яке виконується в середньому за 30 хвилин, а ті, що не пройшли первинне регулювання, надходять на повне регулювання, що займає 100 хвилин для одного агрегату. Всі величини задані середніми значеннями, розподілені за експоненціальним законом.

Визначити ймовірність відмови в первинному регулюванні і завантаження накопичувача агрегатами, що потребують повного регулювання. Визначити параметри і ввести в систему накопичувач, що забезпечує безвідмовне обслуговування агрегатів, що надходять.

Завдання 11. Система передачі даних забезпечує передачу пакетів даних із пункту А в пункт С через транзитний пункт В. У пункті А пакети надходять через 10 ± 5 мс. Тут вони буферуються в накопичувачі ємністю 20 пакетів і передаються по будь-якій із двох ліній АВ1-за час 20 мс або АВ2-за час 20 ± 5 мс. У пункті В вони знову буферуються в накопичувачі ємністю 25 пакетів і далі передаються по лініях ВС1 (за 25 ± 3 мс) і ВС2 (за 25 мс). Причому пакети з АВ1 надходять у ВС1, а з АВ2 - в ВС2. Щоб не було переповнення накопичувача, у пункті В вводиться граничне значення його ємності - 20 пакетів. При досягненні чергою граничного значення відбувається підключення резервної апаратури і час передачі знижується для ліній ВС1 і ВС2 до 15 мс.

Визначити ймовірність підключення резервної апаратури і характеристики черги пакетів у пункті В. У випадку можливості його переповнення визначити необхідне для нормальної роботи граничне значення ємності накопичувача.

Завдання 12. На ділянку термічної обробки виконуються цементация і загартовування шестерен, що надходять через 10 ± 5 хвилин. Цементация займає 10 ± 7 хвилин, а загартовування - 10 ± 6 хвилин. Якість визначається сумарним часом обробки. Шестерні з часом обробки більше 25 хвилин залишають ділянку, із часом обробки від 20 до 25 хвилин передаються на повторне загартовування і при часі обробки менше 20 хвилин повинні пройти повторну повну обробку. Деталі із сумарним часом обробки менше 20 хвилин вважають другим сортом.

Визначити функцію розподілу часу обробки і ймовірності повторення повної і часткової обробки. При виході продукції без повторної обробки менше 90% забезпечити на ділянці заходи, що дають гарантований вихід продукції першого сорту 90%.

Завдання 13. Магістраль передачі даних складається з двох каналів (основного і резервного) і загального накопичувача. При нормальній роботі повідомлення передаються по основному каналі за 7 ± 3 секунд. У основному каналі відбуваються збої через інтервали часу 200 ± 35 секунд. Якщо збій відбувається під час передачі, то за 2 секунд включається резервний канал, що передає перерване повідомлення із самого початку. Відновлення основного каналу займає 23 ± 7 секунд. Після відновлення резервний канал виключається й основний канал продовжує роботу з чергового повідомлення. Повідомлення надходять через 9 ± 4 секунд і залишаються в накопичувачі до закінчення передачі. У випадку збою передане повідомлення передається повторно по резервному каналу.

Визначити завантаження резервного каналу, частоту відмов каналу і число перерваних повідомлень. Визначити функцію розподілу часу передачі повідомлень по магістралі.

Завдання 14. Транспортний цех об'єднання обслуговує три філії А, В і С. Вантажівки перевозять вироби з А в В і з В в С, повертаючись потім в А без вантажу. Навантаження в А займає 20 хвилин, переїзд з А в В триває 30 хвилин, розвантаження і навантаження у В - 40 хвилин, переїзд у С - 30 хвилин, розвантаження в С - 20 хвилин і переїзд в А - 20 хвилин. Якщо до моменту навантаження в А і В відсутні вироби, вантажівки ідуть далі по маршруту. Вироби в А випускаються партіями по 1000 штук через 20 ± 3 хвилин, у В - такими ж партіями через 20 ± 5 хвилин. На лінії працює 8 вантажівок, кожна перевозить 1000 виробів. У початковий момент усі вантажівки знаходяться в А.

Визначити частоту порожніх перегонів вантажівок між А і В, В і С і порівняти з характеристиками, отриманими при рівномірному початковому розподілі вантажівок між філіями й операціями.

Завдання 15. На обробку до інформаційної системи приймаються три класи завдань А, В і С. Завдання класів А і В можуть вирішуватися інформаційною системою одночасно, а завдання класу С вимагають, щоб система була вільна від інших завдань. Завдання класу А надходять через 20 ± 5 хвилин, класу В - через 20 ± 10 хвилин і класу С - через 30 ± 10 хвилин і потребують для виконання: клас А - 20 ± 5 хвилин, клас В - 21 ± 3 хвилин і клас С - 28 ± 5 хвилин. Завдання класів А і В можуть дозавантажуватись до задачі, що вирішується.

Визначити завантаження інформаційної системи. Розглянути різноманітні засоби управління чергами і визначити той із них, при якому число завдань у чергах мінімально.

Завдання 16. У системі передачі цифрової інформації передається мовлення в цифровому виді. Мовні пакети передаються через два транзитних

канали, буферуючись у накопичувачах перед кожним каналом. Час передачі пакета по каналу складає 5 мс. Пакети надходять через 6 ± 3 мс. Пакети, що передавалися більш 10 мс, на виході системи знищуються, тому що їхня поява у декодері значно знизить якість переданого мовлення. Знищення більш 30% пакетів неприпустимо. При досягненні такого рівня система за рахунок ресурсів прискорює передачу до 4 мс на канал. При зниженні рівня до прийняттого відбувається відключення ресурсів.

Визначити частоту знищення пакетів і частоту підключення ресурсу.

Завдання 17. Вантажі прибувають для відправлення в аеропорт у контейнерах із швидкістю два контейнери в 1 хв. вантажному аеропорту немає фіксованого розкладу, а літаки відправляються в міру їхнього повного завантаження. У розпорядженні є два типи літаків для перевезення вантажів. Є три літаки з вантажопідіймальністю 80 контейнерів і два літаки з вантажопідіймальністю 140 контейнерів. Час польоту кожного літака туди й назад розподілено нормально з математичним сподіванням 3 години, середньоквадратичним відхиленням 1 година, мінімумом 2 години, максимумом 4 години. Керуючим аеропортом намагається якнайчастіше використовувати літаки меншої вантажопідіймальності. Літаки, що піднімають 140 контейнерів, використовуються тільки тоді, коли інших немає в наявності.

Визначити статистичні оцінки часу чекання контейнерів із вантажами і завантаження літаків обох типів. Припустити при цьому, що часом завантаження можна зневажити. Змінити систему, увівши час завантаження 1 хв на конвеєр, і проаналізувати результати.

Завдання 18. Магістральний канал передачі даних складається із загального накопичувача та двох каналів – основного і резервного. Повідомлення поступають в систему через 9 ± 5 секунд і чекають в накопичувачі передачі. У нормальному режимі роботи повідомлення передаються по основному каналу за 7 ± 3 секунд. В основному каналі через інтервали часу 200 ± 35 секунд трапляються збої. Якщо збій трапляється під час передачі повідомлення, то відбувається його переривання. При цьому за 2 секунди запускається резервний канал, який передає повідомлення з самого початку. Відновлення основного каналу займає 70 ± 7 секунд. До відновлення основного каналу повідомлення передаються по резервному каналу. Після відновлення резервний канал відключається і основний канал продовжує роботу із чергового повідомлення.

Прибуток від передачі одного повідомлення через основний канал складає 50 грошових одиниць, а при передачі через резервний канал – 25 грошових одиниць. Існує можливість підвищити надійність роботи основного каналу. При збільшенні середнього часу напрацювання на відмову на k секунд прибуток з кожного повідомлення зменшується на $0,03k$ грошових одиниць.

Визначить найкращий режим роботи системи, відповідні завантаження резервного та основного каналу, частоту переривання повідомлень і функцію розподілу часу передачі повідомлень по магістралі.

Завдання 19. Філія банку з п'ятьма касами обслуговує клієнтів протягом робочого дня. Інтервали часу між надходженням клієнтів є випадкова величина, що має експоненціальний закон розподілу із середнім значенням 1 хвилина. Час обслуговування клієнтів є випадкова величина, що має експоненціальний розподіл із середнім значенням 4,5 хвилини.

До кожної каси формується окрема черга. Клієнт, що надійшов на обслуговування, обирає найкоротшу чергу, при цьому, якщо найкоротших черг декілька, то клієнт обирає ту, що зліва.

В зв'язку з тим, що керівництво банку цікавлять поточні витрати та якість послуг, що надаються клієнтам, ставиться питання про можливість зменшення кількості кас.

Рівень складності А

Завдання 20. На обробку до інформаційної системи приймаються три класи завдань А, В і С. Виходячи з наявності оперативної пам'яті ЕОМ завдання класів А і В можуть виконуватися одночасно. Тобто завдання класу А можуть виконуватися паралельно із завданням свого класу або із завданням класу В. Аналогічно, завдання класу В можуть виконуватися паралельно із завданням свого класу або із завданням класу А. Завдання класу С монополізують інформаційну систему. Завдання класу А поступають через інтервали часу, які розподілені за експоненціальним законом з інтенсивністю 0,2 завдання/хвилину, класу В - з інтенсивністю 0,066 завдання/хвилину середньому через 15 хвилин і виконуються: клас А –протягом інтервалу часу, що є випадковою величиною, яка розподілена за експоненціальним законом з інтенсивністю 0,25 завдання/хвилину, клас В - з інтенсивністю 0,166 завдання/хвилину, клас С - з інтенсивністю 0,083 завдання/хвилину.

Дисципліна обслуговування визначається комбінацією пріоритетів завдань. Можливі такі комбінації:

- А – вищий, В – середній, С – низький;
 - § В – вищий, А – середній, С – низький;
 - § С – вищий, В – середній, А – низький;
 - § С – вищий, А – середній, В – низький;
 - § С – вищий, А і В – низький;

Метою моделювання є визначення впливу різних дисциплін обслуговування при різних значеннях інтенсивності надходження на такі параметри інформаційної системи:

- § середня час обслуговування завдання в системі;
- § середня кількість завдань, що очікують обслуговування;
- § середній час очікування в чергах.

Завдання 21. У хімчистці виконується обробка костюмів-двоєк. Костюми надходять у середньому з інтервалом 10 хвилин. Всі костюми спочатку проходять обробку у оператора 1. Якщо оператор зайнятий, то костюми очікують у черзі з дисципліною обслуговування FIFO. Після обробки у оператора 1 одна частина костюму (піджак) надходить до оператора 2, а інша частина (брюки) - до оператора 3. Під час обробки піджака оператором 2 ймовірність його пошкодження складає 0,05, а ймовірність пошкодження брюк оператором 3 – 0,1. Після обробки у оператора 2 піджаки надходять у чергу до оператора 4. Брюки після обробки оператором 3 надходять теж до оператора 4, але в іншу чергу. Оператор 4 збирає частини костюму в один костюм. Якщо обидві частини зібраного костюму не пошкоджені, костюм повертається клієнту. Якщо одна або обидві частини костюму пошкоджені, костюм надходить до відділу роботи з клієнтами, де працює оператор 5. Всі інтервали часу за припущенням мають експоненціальний розподіл. Середні значення часу обробки кожним оператором указані у таблиці.

Номер оператора	Середній час обслуговування, хвилини
1	6 (костюм)
2	5 (піджак)
3	4 (брюки)
4	5 (непошкоджений костюм)
4	8 (пошкоджений костюм)
5	12 (костюм)

Визначити:

- максимальний та середній час перебування костюмів у хімчистці для обох типів костюмів – пошкоджених та непошкоджених;
- максимальну та середню довжину кожної черги;
- коефіцієнт завантаження кожного оператора.

Завдання 22. Студентське кафе в університеті намагається поліпшити якість обслуговування. У час найбільшого напливу клієнтів, що спостерігається з 11.30 до 13.00, клієнти надходять групами по 1, 2, 3 та 4 студенти з ймовірностями 0,5; 0,3; 0,1 та 0,1 відповідно. Інтервали часу між прибуттям груп клієнтів мають експоненціальний закон розподілу з середнім значенням 30 секунд. Кожний клієнт обирає один із трьох маршрутів по кафетерію:

- § пункт видачі гарячих блюд, пункт видачі напоїв, каса;
- § пункт видачі холодних закусок, пункт видачі напоїв, каса;
- § пункт видачі напоїв, каса.

Ймовірності вибору маршрутів складають 0,8; 0,15 та 0,05 відповідно. На видачі гарячих блюд та на видачі холодних закусок клієнтів обслугову-

ють по одному. На видачі напоїв організовано самообслуговування так, що на цьому пункті ніколи не виникає черга. На пункті каса клієнтів обслуговують дві каси. У кожній касі своя черга клієнтів. З двох черг студенти обирають ту, що більш коротка. Перехід клієнтів з однієї черги в іншу не можливий.

Час обслуговування у пункті видачі гарячих блюд розподілений рівномірно в інтервалі від 50 до 120, у пункті видачі холодних закусок – рівномірно від 60 до 180, у пункті видачі напоїв – від 5 до 20. Час обслуговування у пункті каса розраховується в залежності від того на яких пунктах побував клієнт до каси. Якщо клієнт обслуговувався у пункті видачі гарячих блюд, то до часу його обслуговування на касі додається випадкова величина, що рівномірно розподілена в інтервалі від 20 до 40. Якщо клієнт обслуговувався у пункті видачі холодних блюд, то до часу його обслуговування на касі додається випадкова величина, що рівномірно розподілена в інтервалі від 5 до 15. Якщо клієнт обслуговувався у пункті видачі напоїв, то до часу його обслуговування на касі додається випадкова величина, що рівномірно розподілена в інтервалі від 5 до 10.

Визначити максимальний та середній часу очікування в усіх чергах; максимальну та середню кількість клієнтів в усіх чергах; максимальний та середній час очікування клієнта у чергах окремо по кожному маршруту; максимальну кількість клієнтів в кафетерії; середню кількість клієнтів в кафетерії.

Завдання 23. П'ятиповерхову офісну будівлю обслуговує один ліфт. Інтервали часу між надходженням людей на перший поверх є випадковою величиною, що розподілена за експоненціальним законом із середнім значенням 1 хвилина. Для кожного з інших поверхів ймовірність того, що людина прямує саме на цей поверх, дорівнює 0,25. Час, потрібний для переміщення ліфту на один поверх складає 15 секунд. Час, потрібний для завантаження та розвантаження ліфту, не враховується. На певному поверсі людина залишається протягом часу, що є випадковою величиною рівномірно розподіленою в інтервалі від 15 до 120 хвилин. Коли людина залишає поверх (2,3,4,5), то з ймовірністю 0,7 вона прямує на перший поверх і з ймовірністю 0,1 прямує на один із інших поверхів. Місткість ліфту – 6 людей. Якщо людина не вміщується у ліфт, то вона залишається в очікуванні ліфту на своєму поверсі. На початку моделювання ліфт знаходиться на першому поверсі.

Ліфт має таку логіку управління:

§ ліфт піднімається уверх, якщо в ньому є пасажир, що прямує на верхні поверхи, або на верхньому поверсі є людина, що очікує ліфту;

§ ліфт спускається униз, якщо в ньому є пасажир, що прямує на нижні поверхи, або на нижньому поверсі є людина, що очікує ліфту;

§ якщо ліфт прямує уверх і проходить повз поверху, на якому ліфт очікує пасажир, що прямує униз, то ліфт не зупиняється;

§ якщо ліфт вільний, то він знаходиться на першому поверсі;

§ на кожному поверсі ліфт визначає, куди він прямує далі – уверх чи вниз, між поверхами ліфт не змінює напрямок руху.

Визначити середній час очікування в усіх чергах (на кожному поверсі у двох напрямках вгору і вниз); долю часу, коли ліфт перевозить пасажирів, коли рухається без пасажирів, коли не рухається; максимальну та середню кількість людей у ліфті; долю пасажирів, що не могли сісти у ліфт з причини його переповнення.

Завдання 24. У вузол комутації повідомлень, що складає з вхідного буфера, процесора, двох вихідних буферів і двох вихідних ліній, надходять повідомлення з двох напрямків. Повідомлення з одного напрямку надходять у вхідний буфер, обробляються в процесорі, буферуються у вихідному буфері першої лінії і передаються по вихідній лінії. Повідомлення з другого напрямку обробляються аналогічно, але передаються по другій вихідній лінії. Застосований метод контролю потоків потребує одночасної присутності в системі не більш трьох повідомлень на кожному напрямку. Повідомлення надходять через інтервали 15 ± 7 мс. Час обробки в процесорі дорівнює 7 мс на повідомлення, час передачі по вихідній лінії дорівнює 15 ± 5 мс. Якщо повідомлення надходить при наявності трьох повідомлень у напрямку, то воно одержує відмову.

Визначити завантаження пристроїв і ймовірність відмови в обслуговуванні через переповнення буфера напрямку. Визначити зміни у функції розподілу часу передачі при знятті обмежень, внесених методом контролю потоків.

Завдання 25. Для забезпечення надійності АСУ ТП у ній використовується два комп'ютери. Перший комп'ютер виконує обробку даних про технологічний процес і генерування керуючих сигналів, а другий знаходиться в "гарячому резерві". Дані до АСУ надходять через 10 ± 2 секунди, обробляються протягом 3 секунд, потім посиляється керуючий сигнал, що підтримує заданий темп процесу. Якщо до моменту посилки наступного набору даних не отриманий керуючий сигнал, то інтенсивність виконання технологічного процесу зменшується вдвічі і дані посиляються через 20 ± 4 секунд. Основний комп'ютер кожні 30 секунд посиляє резервній ЕОМ сигнал про працездатність. Відсутність сигналу означає необхідність включення резервного комп'ютеру замість основного. Характеристики обох комп'ютерів однакові. Підключення резервного комп'ютеру займає 5 секунд, після цього він заміняє основний комп'ютер до відновлення, а процес повертається до нормального темпу. Відмови комп'ютера відбуваються через 300 ± 30 секунд. Відновлення комп'ютера займає 100 секунд. Резервний комп'ютер абсолютно надійний.

Визначити середній час перебування технологічного процесу в загальмованому стані і середню кількість пропущених через відмови даних.

Завдання 26. Зібрані телевізори на заключній стадії виробництва проходять ряд пунктів контролю. У останньому з цих пунктів здійснюється перевірка налаштування телевізорів. Якщо при перевірці виявилось, що телевізор працює неякісно, він направляється в пункт налаштування, де налаштується наново. Після переналаштування телевізор знову направляється в останній пункт контролю для перевірки якості налаштування. Телевізори, що відразу або після декількох повернень у пункт налаштування пройшли фазу заключної перевірки, направляються в цех упакування. Час між надходженнями телевізорів у пункт контролю для заключної перевірки розподілено рівномірно на інтервалі 3,5-7,5 хвилин. У пункті заключної перевірки паралельно працюють два контролера. Час, необхідний на перевірку одного телевізора, розподілено рівномірно на інтервалі 6-12 хвилин. У середньому 85% телевізорів проходять перевірку успішно з першого пред'явлення і направляються на упакування. Інші 15% повертаються в пункт налаштування, який обслуговується одним робітником. Час налаштування розподілено рівномірно на інтервалі 20-40 хвилин.

Визначити час, що витрачається на обслуговування кожного телевізора на останньому етапі виробництва, а також завантаження контролерів і налаштувача. Ввести такі зміни в модель і проаналізувати результати: 1) на пункт контролю одночасно прибувають щоразу два телевізори; 2) налаштувач направляє 40% налаштованих телевізорів прямо на упакування, а 60% із них - контролеру; 3) додайте ще один етап контролю, у результаті якого знижується на 0,1 ймовірність напрямку телевізора до налаштувача; додатковий етап здійснюється протягом 5 хвилин.

Завдання 27. Система, що моделюється, складається з одного бульдозера, чотирьох самоскидів і двох механізованих навантажувачів. Бульдозер згрібає землю до навантажувачів. Для початку навантаження перед навантажувачами повинні лежати хоча б дві купи землі. Час, що витрачається бульдозером на підготовку фронту робіт до початку навантаження, має розподіл Ерланга і складається із суми двох експоненціальних величин, кожна з яких має математичне сподівання, рівне 4 (це відповідає розподілу Ерланга з математичним сподіванням 8 і дисперсією 32). Крім наявності землі для початку навантаження потрібно навантажувач і порожній самоскид. Час навантаження має експоненціальний розподіл з математичним сподіванням 14 хвилин для 1-ого навантажувача і 12 хвилин для другого. Після того, як самоскид завантажений, він їде до місця розвантаження, розвантажується і знову повертається на вантаження. Час перебування самоскида в дорозі розподілено нормально, причому у завантаженому стані він витрачає на дорогу в середньому 22 хвилини, а в порожньому - 18 хвилин. Серед-

ноквадратичне відхилення в обох випадках дорівнює 23 хвилини. Час розвантаження розподілено рівномірно на інтервалі від 2 до 8 хвилин. Після вантаження кожного самоскида навантажувач повинний «відпочивати» протягом 5 хвилин, а потім знову може приступати до вантаження.

Визначити характеристики черг партій вантажу, самоскидів і навантажувачів. Дослідити можливість зменшення черг.

Завдання 28. У кар'єрі вантажівки доставляють руду від трьох екскаваторів до одної дробівки. Вантажівки приписані до певних екскаваторів, так що кожна вантажівка завжди повертається до свого екскаватора після того, як вивантажила руду біля дробівки. Використовуються вантажівки двох видів; вантажопідіймальністю 20 і 50 тон. Вантажопідіймальність впливає на час вантаження машин екскаватором, час переїзду до дробівки, час розвантаження та час повернення до екскаватору. Числові характеристики цих величин наведені у таблиці.

<i>Процес</i>	<i>Час для 20-тонної вантажівки</i>	<i>Час для 50-тонної вантажівки</i>
Вантаження	Випадкова величина з експоненціальним розподілом із середнім значенням 5 хвилин	Випадкова величина з експоненціальним розподілом із середнім значенням 10 хвилин
Переїзду до дробівки	Постійна величина 2,5 хвилини	Постійна величина 3 хвилини
Розвантаження	Випадкова величина з експоненціальним розподілом із середнім значенням 5 хвилин	Випадкова величина з експоненціальним розподілом із середнім значенням 4 хвилини
Повернення до екскаватору	Постійна величина 1,5 хвилини	Постійна величина 2 хвилини

До кожного екскаватору закріплені дві вантажівки 20-тонна та 50-тонна. Всі черги до екскаваторів мають дисципліну обслуговування FIFO. У черзі до дробівки машини стоять у порядку зменшення їх вантажопідіймальності, а при однаковій вантажопідіймальності – за правилом FIFO.

Метою моделювання є визначення:

- середньої кількості вантажівок у кожного екскаватора та у дробівки;
- коефіцієнти завантаження кожного екскаватора та дробівки.

Завдання 29. У супермаркеті планується ввести систему управління запасами холодильників. Час між надходженнями замовлень на холодильники має експоненціальний розподіл з математичним сподіванням 0,2 тижні. Якщо покупцю знадобився холодильник тоді, коли його в запасі немає,

він у 80% випадків відправляється в інший найближчий магазин, представляючи тим самим продаж, що не відбувся для даного універмагу. У 20% таких випадків робиться повторне замовлення, і покупці чекають надходження наступної партії вантажу. Магазин використовує періодичну систему перегляду стану запасів, у якому запас проглядається кожні 4 тижні і приймається рішення про необхідність здійснення замовлення. Стратегія прийняття рішення складається в розміщенні замовлення, що доводить запас до контрольного рівня, що складає 72 холодильники. Поточний стан запасу визначається як наявний запас плюс замовлені раніше приймачі і мінус невдоволений попит. Якщо поточний стан запасів менше або дорівнює 18 холодильникам (точка замовлення), здійснюється розміщення замовлення. Час доставки (час між розміщенням замовлення і його одержання) постійний і складає 3 тижні. Початкові умови: стан запасу - 72 холодильника, невдоволеного попиту немає.

Визначити середню кількість холодильників у запасі, середній час між продажами, що не здійснилися.

Завдання 30. В африканському порту танкери завантажуються сировиною нафтою, що морським шляхом доставляють потім по призначенню. Потужності порту дозволяють завантажувати не більш трьох танкерів одночасно. Танкери, що прибувають у порт через кожні 11 ± 7 годин, відносяться до трьох різних типів. Значення відносної частоти появи танкерів даного типу і часу, необхідного на вантаження, приведені нижче:

<i>Тип</i>	<i>Відносна частота</i>	<i>Час вантаження, годин</i>
1	0,25	18 ± 2
2	0,55	24 ± 3
3	0,20	36 ± 4

У порту є один буксир, послугами якого користуються всі танкери при причалюванні та відчалюванні. Причалювання та відчалювання займають приблизно 1 годину, причому, якщо послуг буксира потребують відразу декілька танкерів, пріоритет віддається операції причалювання. Судновласник пропонує дирекції порту укласти контракт на перевезення нафти в Англію і забезпечити виконання умов контракту за допомогою п'ятиох танкерів особливого, четвертого типу, що на вантаження потребують 21 ± 3 годин. Після вантаження танкер відчалює і впливає в Англію, там розвантажуються і потім знову повертається в африканський порт для вантаження. Час циклу обертання танкера, включаючи час розвантаження, складає 240 ± 24 годин. Фактором, що ускладнює процес перевезення нафти, є шторми, яким піддається порт. Інтервал часу між штормами має експоненціаль-

льний розподіл з математичним сподіванням 48 годин, причому шторм продовжується 4 ± 2 години. Під час шторму буксир не працює.

Перед укладанням контракту керівництво порту вирішило визначити вплив, що вчинять п'ять додаткових танкерів на час перебування в порту інших судів. Оцінювані величини - час перебування в порту додаткових танкерів і вже працюючих танкерів трьох типів.

Завдання 31. Досліджувана система являє собою потік транспорту в двох напрямках по дорозі з двостороннім рухом, одна сторона якої закрита в зв'язку з ремонтом протягом 500 метрів. Світлофори, розміщені на обох кінцях односторонньої ділянки, управляють рухом на ньому. Світлофори відкривають рух на ділянці в одному з напрямків протягом заданого проміжку часу. Коли загоряється зелене світло, машини слідуєть по ділянці з інтервалом 2 секунди. Автомобіль, що під'їжджає до ділянки, їде по ньому без затримки, якщо горить зелене світло і перед світлофором немає машин. Автомобілі під'їжджають до світлофорів через інтервали часу, які мають експоненціальний розподіл з математичним сподіванням 12 секунд для 1-ого напрямку і 9 секунд для 2-ого напрямку. Світлофор має такий цикл: зелений у 1-ом напрямку, червоний в обох напрямках, зелений у 2-ом напрямку, червоний в обох напрямках. Червоне світло горить в обох напрямках протягом 55 секунд для того, щоб автомобілі, що слідуєть через ділянку дороги, яка ремонтуєтьься, змогли покинути його до переключення зеленого світла на інший напрямок.

Визначити такі значення «зелених» інтервалів для обох напрямків, при яких середній час очікування всіх автомобілів буде мінімальним.

Завдання 32. Майстерня по ремонту машин складаєтьься з цеху ремонту, у який надходять і ремонтуєтьься вузли, і цеху контролю, в якому відремонтовані вузли перевіряєтьься і випускаєтьься з майстерні або направляєтьься на доробку. У цеху ремонту є три однакових (рівнобіжних) робочих місця, а в цеху контролю знаходиться один контролер. Вузли потрапляють у систему через розподілені за експоненціальним законом інтервали часу з математичним сподіванням 10,25 одиниць часу. Час ремонту вузла має ерланговий розподіл із математичним сподіванням 22 і дисперсією 242. У цеху ремонту в першу чергу обслуговуютьься вузли з найменшим часом ремонту. Черга відремонтованих вузлів до контролеру упорядкована за правилом FIFO. Перевірка вузла займає 6 од. часу. Після перевірки вузол відправляєтьься на доробку з ймовірністю p_n , де $p=0,15$, а n кількість разів, що вузол направляєтьься на доробку. Спрямовані на доробку вузли стають у чергу до цеху ремонту. Задаютьься такі початкові умови: 1) два робочих місця в цеху ремонту зайняті на обслуговуванні, яке закінчать через 1,0 і 1,5 одиниць часу відповідно; 2) перше надходження вузла станетьься в нульовий момент часу; 3) контролер вільний.

Визначити такі величини: 1) завантаження обслуговуючих пристроїв; 2) математичне сподівання, середньоквадратичне відхилення і гістограму загального часу чекання вузлів, що ремонтуються; 3) середнє число вузлів у системі; 4) математичне сподівання, середньоквадратичне відхилення і гістограму якості циклів ремонту кожного вузла. Змініте правило диспетчерування вузлів в цеху ремонту так, щоб повернуті на доробку вузли оброблялись перед вузлами, що надійшли знову, а серед вузлів, що повернулися на доробку, пріоритет віддавався б тим, що провели в системі найбільший час, і проаналізуйте результати.

Завдання 33. Конвеєрна система складається з п'яťох обслуговуючих пристроїв, розташованих уздовж стрічки конвеєра. Деталі надходять на опрацювання на першій пристрій із постійною швидкістю, рівної 4 одиниці за 1 хвилину. Тривалість обслуговування на кожному пристрої розподілена за експоненціальним законом з математичним сподіванням 1 хвилину. Вільного місця перед кожним конвеєром немає, тому пристрій може зняти деталь із конвеєра, тільки якщо знаходиться в стані «вільний». Якщо першій пристрій вільний, то деталь обробляється на ньому. По закінченні оброблення деталь залишає систему. Якщо першій пристрій зайнятий у момент надходження деталі, деталь по конвеєру надходить до другого пристрою. Інтервал проходження деталі між пристроями дорівнює 1 хвилину. Якщо при прямуванні деталі по конвеєру всі пристрої були зайняті, вона повертається до першого пристрою з затримкою 5 хвилин.

Визначити статистичні характеристики часу перебування деталі в системі, завантаження обслуговуючих пристроїв і числа зайнятих пристроїв. Оцінити, наскільки поліпшиться робота конвеєра, якщо перед кожним пристроєм буде буфер для однієї деталі. На основі отриманих результатів визначити найкраще розміщення перед кожним із п'яťох пристроїв буферів із сумарною ємністю десять деталей. Дайте ваші рекомендації щодо того, як оцінити поступку між зменшенням числа обслуговуючих пристроїв на конвеєрі і збільшенням розміру буфера перед кожним пристроєм.

Завдання 34. Розглядається модель банку, у якому два касири сидять у помешканні, а два обслуговують клієнтів, що підїжджають на автомобілях. Частина клієнтів, що надходять у банк, намагається спочатку обслужитися в автомобільних касирів. Час між надходженнями клієнтів цих клієнтів розподілено за експоненціальним законом з математичним сподіванням 0,75 хвилини перед автомобільними касирами обмежено. У черзі до першого касира можуть знаходитися три автомобілі, а в черзі до другого - чотири. Час обслуговування першим автомобільним касиром нормально розподілено з математичним сподіванням 0,5 хвилину і середньоквадратичним відхиленням 0,25 хвилину. Тривалість обслуговування другим касиром розподілена рівномірно на інтервалі $0,2 \pm 1,0$ хвилину. Якщо прибулий на автомо-

білі клієнт не може встати в чергу до автомобільних касирів через відсутність вільного місця, він залишає машину на стоянці і йде до касирів, що сидять у будівлі банку. Відзначимо, що ці касири починають роботу на годину пізніше автомобільних. Інша частина клієнтів поступає прямо на обслуговування до касирів у помешканні банку. Інтервал між їхніми прибуттями розподілено за експоненціальним законом з математичним сподіванням 0,5 хвилина. встають в одну чергу з клієнтами, що прибули на автомобілях. До обох касирів стоїть одна черга. У черзі не може стояти більш 7 клієнтів. Клієнти, що надійшли в банк, коли черга заповнена до границі, не обслуговуються і залишають банк. Час обслуговування в обох касирів у будівлі банку має трикутний розподіл на інтервалі $0,1 \pm 1,2$ хвилина із модою 0,4 хвилина.

Визначите завантаження автомобільних касирів і касирів у банку, середні довжини черг, а також ймовірність того, що клієнт піде з банку не обслугованим. Модифікуйте модель із метою урахування операції оформлення кредиту для ряду клієнтів, що обслуговуються касирами в приміщенні банку. Оформлення кредиту здійснюється управителем банку і стосується тільки нових клієнтів, що складають 10% клієнтів даної категорії. Управитель одержує від клієнта необхідну інформацію і відкриває кредит, що займає від 2 до 5 хвилин (розподіл рівномірний). Час оформлення кредиту розподілений за експоненціальним законом з математичним сподіванням 5 хвилин. Упродовж цього часу клієнт очікує в окремій кімнаті. Керуючий може одночасно оформляти кредит необмеженій кількості клієнтів. Після оформлення кредиту клієнт, що його оформив, знову обслуговується управителем, причому йому віддається перевага перед тими клієнтами, що ще не були в управителя. Перед тим, як виписати кредитну картку (це займає 1 хвилина), управитель повинний закінчити поточне опитування іншого клієнта. П'ять відсотків клієнтів одержують відмову в кредиті і не потрапляють до касирів. Час, необхідний на негативну відповідь, розподілений за експоненціальним законом очікуванням 10 хвилин.

Завдання 35. У банку для автомобілістів є два віконця, кожне з яких обслуговується одним касиром і має окрему під'їзну смугу. Обидві смуги розташовані поруч. З попередніх спостережень відомо, що інтервали часу між прибуттям клієнтів у годину пік розподілені за експоненціальним законом з математичним сподіванням, рівним 0,5 одиниць часу. Через те, що банк буває переобтяжений тільки в годину пік, то аналізується тільки цей період. Тривалість обслуговування в обох касирів однакова і розподілена за експоненціальним законом з математичним сподіванням, рівним 0,3 одиниць часу. Відомо також, що при рівній довжині черг, а також при відсутності черг, клієнти віддають перевагу першій смузі. В усіх інших випадках клієнти вибирають більш коротку чергу. Після того, як клієнт в'їхав у банк,

він не може залишити його, доки не буде обслугований. Проте він може перемінити чергу, якщо стоїть останнім і різниця в довжині черг при цьому складає не менше двох автомобілів. Через обмежене місце на кожній смузі може знаходитися не більш трьох автомобілів. У банку, таким чином, не може знаходитися більш восьми автомобілів, включаючи автомобілі двох клієнтів, що обслуговуються в поточний момент касиром. Якщо місце перед банком заповнено до границі, то клієнт, що прибув, вважається втраченим, тому що він відразу ж виїжджає. Початкові умови такі: 1) обидва касири зайняті, тривалість обслуговування для кожного касира нормально розподілена з математичним сподіванням, рівним 1 одиниць часу, і середньоквадратичним відхиленням, рівним 0,3 одиниць часу; 2) прибуття першого клієнта заплановано на момент часу 0,1 одиниць часу; 3) у кожній черзі очікують по два автомобіля.

Визначити такі величини: 1) середнє завантаження кожного касира; 2) середнє число клієнтів у банку; 3) середній інтервал часу між від'їздами клієнтів від вікон; 4) середній час перебування клієнта в банку; 5) середня кількість клієнтів у кожній черзі; 6) відсоток клієнтів, яким відмовлено в обслуговуванні; 7) кількість змін під'їзних смуг.

Модифікуйте модель, увівши подію «від'їзд автомобіля від банку на вулицю». Автомобілі, що від'їжджають від банку, можуть потрапити на вулицю тільки при достатньому інтервалі між автомобілями, що їдуть по ній. Автомобілі рухаються по вулиці з інтервалом, рівномірно розподіленим від 0,3 до 0,5 хвилини. Між банком і вулицею може вмістити не більш трьох автомобілів, що очікують можливості виїзду на вулицю. Як ці зміни вплинуть на вихідні характеристики моделі.

Завдання 36. В оптовому магазині використовується нова процедура обслуговування клієнтів. Клієнти, потрапляючи в магазин, визначають по каталогу найменування товарів, які вони хотіли б придбати. Після цього клієнт обслуговується клерком, що йде на розташований поруч склад і приносить необхідний товар. Кожний із клерків може обслуговувати одночасно не більш шести клієнтів. Час, що витрачає клерк на дорогу до складу, рівномірно розподілений на інтервалі від 0,5 до 1,5 хвилини. Час пошуку товару потрібного найменування залежить від числа найменувань, які клерк повинний знайти на складі. Цей час нормально розподілений із математичним сподіванням, рівним потроєному числу шуканих найменувань, і середньоквадратичним відхиленням, рівним 0,2 математичного сподівання. Отже, якщо, наприклад, із складу треба взяти товар одного найменування, час на його пошук буде нормально розподілено з математичним сподіванням, рівним 3 хвилини, і середньоквадратичним відхиленням, рівним 0,6 хвилини. Час повернення зі складу рівномірно розподілений на інтервалі від 0,5 до 1,5 хвилин. Після повернення зі складу клерк розраховується з

усіма клієнтами, яких він обслуговує. Час розрахунку з клієнтом рівномірно розподілений на інтервалі від 1 до 3 хвилин. Розрахунок відбувається в тому порядку, у якому до клерка поступали вимоги на товар. Інтервали між моментами надходження вимог на товари від клієнтів розподілені за експоненціальним законом з математичним сподіванням, рівним 2 хвилини. Клієнтів у магазині обслуговують три клерки.

Визначити такі величини: 1) завантаження клерків; 2) час, необхідний на обслуговування одного клієнта з моменту подачі вимоги на товар до оплати рахунку на покупку; 3) кількість вимог, що задовольняються клерком за один вихід на склад.

Змініте процедуру обслуговування клієнтів таким чином, що у випадку обслуговування тільки одного клієнта клерк чекає протягом 1 хв можливої появи інших клієнтів перед тим, як відправитися на склад. Визначите вплив цієї стратегії обслуговування на характеристики часу очікування клієнта і завантаження клерків. Введіть ймовірність доставки неправильно обраного клерком товару, рівну 0,15. Коли це відбувається, клерк негайно повертається на склад для відшукування товару потрібного найменування. Крім того, із ймовірністю 0,1 викликаного товару може не виявитися на складі. Коли це відбувається, клієнт із ймовірністю 0,25 замовляє інше найменування. Оцініть вплив цих уточнень моделі на завантаження клерка і час очікування клієнта.

Завдання 37. У цеху є шість верстатів, що здійснюють різні операції. За попередньою оцінкою час виконання роботи на кожному верстаті розподілено за експоненціальним законом з математичним сподіванням, рівним 20 хвилин, причому значення часу виконання роботи округляється до цілого і не може бути менше 1 хвилини. Дійсний час виконання роботи дорівнює часу по попередній оцінці плюс випадкова величина, що має нормальний розподіл із нульовим математичним сподіванням і середньоквадратичним відхиленням, рівним 0,3 хвилини, від часу по попередній оцінці (ця випадкова компонента є білим шумом). Відзначимо, що виробництво в цеху організовано таким чином, що середній час виконання роботи на кожному верстаті однаковий. Роботи в цех поступають з інтервалом, розподіленим за експоненціальним законом з математичним сподіванням, рівним 25 хвилин. Інтервал між надходженням робіт округляється до цілого і не може бути менше 1 хвилини. Кожна робота складається з набору операцій, здійснюваних на розміщених у цеху верстатах. Число операцій, із яких складаються роботи, нормально розподілена з математичним сподіванням, рівним 4 хвилини, і середньоквадратичним відхиленням, рівним 1 хвилині. При цьому жодна з робіт не може містити менше трьох і більш шести операцій. Ймовірності включення k операцій у роботу можуть бути отримані з таблиць нормального розподілу і мають такі значення:

<i>Кількість операцій на роботу</i>	<i>Ймовірність</i>
3	0,3085
4	0,3830
5	0,2417
6	0,0668

Маршрут роботи призначається випадковим способом. Єдиним керуючим параметром із погляду планувальника є порядок, у якому виконуються роботи. У даній системі пропонується такий спосіб визначення порядку. Пріоритетними є роботи з негативним рівнем. Рівень роботи визначається як час готовності мінус поточний час, мінус оцінка часу виконання операцій, що залишилися, мінус час, що враховує фактор безпеки. Таким чином, роботи перед кожним верстатом діляться на два класи, причому роботи в кожному класі упорядковані в порядку зростання оцінки часу їхнього виконання.

Визначити статистичні характеристики часу виконання роботи, завантаження верстатів, кількість робіт у чергах; середній інтервал часу між надходженнями робіт; кількість робіт, виконаних із запізненням, тобто після часу готовності; середнє «запізнення» робіт до моменту готовності. Змініть процедуру визначення часу готовності, збільшивши його на середнє «запізнення» і проаналізуйте результати.

Завдання 38. У лікарню поступають хворі таких трьох типів: 1) хворі, що пройшли попереднє обстеження і направлені на лікування; 2) хворі, що бажають потрапити в лікарню, але не пройшли цілком попереднє обстеження; 3) хворі, які тільки що поступили на попереднє обстеження. Часи обслуговування хворих різноманітних типів у приймальному відділенні розподілені відповідно до такої таблиці:

<i>Тип хворого</i>	<i>Відносна частота</i>	<i>Середній час реєстрації, хв</i>
1	0,9 до 10.00 і 0,5 після 10.00	15
2	0,1 у будь-який час від 0.00 до 10.00	40
3	0,4 після 10.00	30

При надходженні в приймальне відділення хворий стає в чергу, якщо обидва чергових лікарі зайняті. Лікар, що звільнився, вибирає в першу чергу тих хворих, що вже пройшли попереднє обстеження. Після заповнення різноманітних форм у приймальне відділення хворі 1 типу ідуть прямо в палату, а хворі типів 2 і 3 направляються в лабораторію. Троє супровідних розводять хворих по палатах. Хворим не дозволяється направлятися в палату без супровідного. Якщо всі супровідні зайняті, хворі очікують їхнього

звільнення в приймальному відділенні. Як тільки хворий доставлений у палату, він вважається тим, що завершив процес прийому до лікарні. Супровідному потребується 3 хвилини для того, щоб повернутися в приймальне відділення після доставки хворого в палату. Хворі, що спрямовуються в лабораторію, не потребують супроводу. Після прибуття в лабораторію хворі стають у чергу в реєстратуру. Після реєстрації вони ідуть у кімнату очікування, де чекають виклику до одного з двох лаборантів. Після здачі аналізів хворі або повертаються в приймальне відділення (якщо їх приймають у лікарню), або залишають лікарню (якщо їм було призначено тільки попереднє обстеження). Після повернення в приймальне відділення хворий, що здав аналізи, розглядається як хворий типу 1. Приймальне відділення відкрите з 7.00 до 17.00. Проте попередні обстеження (тип 3) не призначаються до 10.00 через ранкове переобтяження лабораторії. Хворі, що поступають після 16.00, направляються в профілакторій. Проте хворі типу 2, що повертаються з лабораторії, приймаються до 17.00, тобто доти, поки чергові лікарі не закінчать роботу і приймальне відділення не закриється. У наступній таблиці приводяться дані по тривалості дій (у хвилинах):

<i>Величина</i>	<i>Розподіл</i>
Час між прибуттями в приймальне відділення	Експоненціальний з математичним сподіванням 15
Час проходження в палату	Рівномірний від 3 до 8
Час проходження з приймального відділення в лабораторію або з лабораторії в приймальне відділення	Рівномірний від 2 до 5
Час обслуговування в реєстратуру лабораторії	Ерланга з математичним сподіванням 4,5 і $k=3$
Час проведення аналізу в лабораторії	Ерланга з математичним сподіванням 4 і $k=2$

Визначити час, проведений хворим у системі, тобто інтервал часу, починаючи з надходження і закінчуючи доставкою в палату (для хворих типу 1 і 2) або виходом із лабораторії (для хворих типу 3). Визначити також інтервал між прибуттями хворих у лабораторію. Припустити, що всі черги мають необмежену довжину й організовані за правилом FIFO.

Завдання 39. У приватній телефонній мережі для здійснення зовнішнього виклику необхідна наявність телефонних ліній двох типів: 1) лінія для переговорів (голосова), називана надалі Л1, 2) лінія для передачі цифрової інформації (номера телефону), називана надалі Л2. Оскільки передача номера займає значно менший час, чим розмова, у мережі встановлено 10 ліній Л1 і одна лінія Л2. Як показали результати статистичних досліджень,

інтервали часу між зовнішніми викликами розподілені за експоненціальним законом з математичним сподіванням 1 хвилина (мінімум дорівнює 0 хв, а максимум дорівнює 60 хвилин). Якщо всі лінії Л1 зайняті в момент виклику, абонент «повисає» на телефоні і набирає набраний номер знову з інтервалом T хвилин, де T - нормально розподілена величина з очікуванням 15 хвилин, середньоквадратичним відхиленням 2 хвилини, мінімумом 0 і максимумом 60 хвилин. При вільній лінії Л1 абонент, якщо це необхідно, очікує звільнення лінії Л2. Лінія Л1 займається на час очікування лінії Л2. Коли лінії обох типів вільні, абонент набирає номер, причому час набору номера розподілено за експоненціальним законом з очікуванням 0,2 хвилини, мінімумом 0,1 хвилини і максимумом 0,5 хвилини лінія Л2 звільняється, а лінія Л1 займається на весь час розмови, що розподілений за експоненціальним законом з математичним сподіванням 10 хв, мінімумом 3 хвилини і максимумом 30 хвилин.

Визначити статистичні характеристики наступних величин: тривалості набору номера; тривалості телефонної розмови; загального часу здійснення зв'язку; завантаження ліній Л1 і Л2; частоти невдалих спроб здійснення зв'язку.

Завдання 40. Фірма має в місті 6 точок роздрібного продажу. Попит на товари (в од. товару) у цих точках має розподіл Пуассона із математичним сподіванням 10 одиниць товару в день. Торгові точки обслуговуються оптовим магазином. На передачу запиту торгової точки в магазин потрібно 1 день. Товари за запитом поступають з оптового магазину в торгову точку в середньому через 5 днів після одержання запиту. Ця величина має логнормальний розподіл із дисперсією 1. Оптовий магазин кожні 14 днів розміщує замовлення на фабриці. Час, протягом якого магазин одержує вантаж із фабрики, розподілено нормально з очікуванням 90 днів, середньоквадратичним відхиленням 10 днів; проте замовлення при цьому ніколи не виконується раніше 60 днів і пізніше 120 днів. Задати такі початкові умови: перший запит поступає в нульовий момент часу; поточний запас товару в кожній торговій точці складає 70 одиниць, нормативний запас - також 70 одиниць; запас у магазині складає 1920 одиниць; із фабрики відправлені три вантажі, у кожному з яких знаходиться по 1800 одиниць товару, причому перший вантаж надійде в магазин на 30-й день, другий - на 60-й, а третій - на 90-й.

Визначити статистичні характеристики таких величин: рівень запасу в оптовому магазині, ймовірність невдоволеного запиту торгової точки. Запропонуйте таку стратегію керування роздрібними торговими точками й оптовим магазином, яка забезпечить нульову ймовірність невдоволеного запиту торгової точки при найменшому рівні запасу в оптовому магазині.

Завдання 41. Багатопроекторна обчислювальна система складається з двох процесорів із загальною оперативною пам'яттю обсягом 131 сторінка,

чотирьох накопичувачів на дисках, кожний із яких доступний обом процесорам, і одного каналу передачі даних. Завдання поступають у систему із середньою інтенсивністю, рівною 12 завданням у хвилину відповідно до розподілу Пуассона. Загальний час, необхідний процесору на обробку завдання, розподілено нормально з математичним сподіванням 10 секунд і середньоквадратичним відхиленням 3 секунд. Час обробки процесором включає переривання, необхідні для здійснення обміну по каналу вводу-виводу. Інтервали між перериваннями мають негативний експоненціальний розподіл, математичне сподівання якого дорівнює оберненій величині середньої інтенсивності операцій вводу-виводу завдання. Середня інтенсивність операцій вводу-виводу розподілена рівномірно на інтервалі від 2 секунд до 10 секунд. Операції вводу-виводу призначаються конкретному диску. Завданню, що поступає в систему, призначається пріоритет, що має залежність, обернену потребності в пам'яті. Потребність завдання в пам'яті розподілена рівномірно на інтервалі від 20 до 60 сторінок. Як тільки пам'ять виділяється в розпорядження завдання, один із вільних процесорів починає його обробку. При видачі запиту на здійснення вводу-виводу завдання може продовжувати використання процесора доти, поки в черзі залишиться тільки один запит. Таким чином, якщо зроблений запит на здійснення вводу-виводу й один запит уже очікує черги, процесор звільняється, а запит на введення-виведення поміщається в чергу. Після виконання поточного запиту вводу-виводу процесор може відновити обробку завдання в тому випадку, якщо вона вільна. Після переривання процесора автоматично виконується запит вводу-виводу з призначеним завданням диском. Таким чином, здійснюється прямий доступ до диска з процесора. Передбачається, що час позиціонування диска розподілено рівномірно на інтервалі від 0,0 до 0,075 секунд. Одночасно може здійснюватися тільки одна операція позиціонування диска. Після позиціонування здійснюється обмін даними по каналу вводу-виводу. Час обміну дорівнює $0,001 \cdot (2,5 + h)$, де h - рівномірно розподілена на інтервалі від 0 до 25 величина. Після здійснення обміну запит вводу-виводу вважається виконаним.

Визначити загальний час виконання завдання в системі, а також статистичні оцінки завантаження усіх чотирьох дисків, каналу вводу-виводу й обох процесорів. Крім того, необхідно одержати оцінку середнього використання пам'яті, статистику про кількість завдань, які очікують виділення ресурсу, і часу очікування.

Завдання 42. Завдання поступають на верстат у середньому один верстат у час. Розподіл величини інтервалу між ними експоненціальний. При нормальному режимі роботи завдання виконуються в порядку їхнього надходження. Час виконання завдання нормально розподілений з математичним сподіванням 0,5 години і середньоквадратичним відхиленням 0,1 година. Пе-

ред виконанням завдання відбувається наладка верстата, час здійснення якої розподілений рівномірно на інтервалі від 0,2 до 0,5 години. Завдання, виконані на верстаті, направляються в інші відділи цеху і вважаються такими, що залишили систему. Верстат страждає від поломок, при яких він не може продовжувати виконання завдання. Інтервали між поломками розподілені нормально з математичним сподіванням 20 годин і середньоквадратичним відхиленням 2 години. При поломці виконуване завдання виймається з верстата і поміщається в початок черги завдань до верстата. Виконання завдання відновляється з того місця, на якому воно було перервано. Коли верстат ламається, починається процес усунення поломки, що складається їх трьох фаз. Тривалість кожної фази розподілена за експоненціальним законом з математичним сподіванням, рівним $3/4$ години. Оскільки загальна тривалість усунення поломки є сумою незалежних і експоненціально розподілених випадкових величин з однаковими параметрами, вона має ерланговий розподіл.

Визначити статистичні оцінки завантаження верстата і часу виконання завдання. Модифікувати модель у такий спосіб і проаналізувати результати. Ввести умову: якщо в черзі на обробку до верстата в момент його поломки знаходиться більш трьох завдань, усі завдання, крім трьох останніх, направляються на обробку до субпідрядника. Незавершене завдання також направляється до субпідрядника. Врахувати можливість переривання ремонту верстата на 3 години для одержання необхідних запасних частин. Час між перериваннями ремонту розподілено за експоненціальним законом з математичним сподіванням 100 годин. Якщо така перерва виникає в той час, коли ремонт не відбувається, ніякої дії не здійснюється.

Завдання 43. Флот, що складається з 15 танкерів, здійснює перевезення сирої нафти з Валдиза (штат Аляска) у Сіетл (штат Вашингтон). Передбачається, що всі танкери при необхідності можуть бути завантажені у Валдизі одночасно. У Сіетлі є тільки один розвантажувальний док, із якого що розвантажуються нафта поступає в сховище, а потім по трубопроводі - на очисну установку. Нафта поступає в сховище з танкеру, що розвантажуються в доці, з постійною швидкістю 300 тб/день. Сховище безупинно постачає сирою нафтою очисну установку з постійною швидкістю 150тб/день. Розвантажувальний док працює з 6.00 до 24.00. Правила безпеки вимагають припинення розвантаження в момент закриття доку. Розвантаження танкера закінчується, коли об'єм нафти, що залишилася у танкері, стає менше 7,5тб. Ємкість сховища дорівнює 200тб. Коли сховище заповнене до границі, розвантаження переривається доти, поки обсяг нафти в сховище не знизиться до 80% його ємності. Коли сховище стає майже порожнім (менше 5тб), постачання очисної установки припиняється доти, поки об'єм нафти в сховище не стане рівним 50тб. Це робиться для усунення можливості частих припинень і запусків очисної установки. Характеристики танкерів наступні: номі-

нальна вантажність дорівнює 150тб; час у дорозі завантаженого танкера розподілений нормально з математичним сподіванням 5,0 днів і середньоквадратичним відхиленням 1,5 дня; час у дорозі порожнього танкера розподілений нормально з математичним сподіванням 4,0 днів і середньоквадратичним відхиленням 1,0 день; час навантаження розподілений рівномірно на інтервалі від 2,9 до 3,1 дня. Початкові умови відповідають ситуації, коли сховище заповнене наполовину, а танкери прибувають під навантаження з інтервалом 0,5 дня, починаючи з нульового моменту часу.

Одержати статистичні характеристики наступних величин: використання розвантажувального і навантажувального доку; час, протягом якого очисна установка постачається нафтою. Об'єм нафти в сховищі. Час повного рейса танкера. Час очікування танкера; кількість танкерів, що очікують розвантаження.

Завдання 44. Експериментальна роботизована гнучка виробнича система має два верстати із числовим пультом керування, три роботи, пункт прибуття і склад оброблених деталей. Деталі прибувають на пункт прибуття кожні 40 секунд згідно з експоненціальним законом розподілу, захоплюються одним з вільних роботів і переміщуються ним до першого верстата, після чого робот звільняється. Після завершення обробки на першому верстаті деталь захоплюється одним з роботів і переміщується на другий верстат, а після обробки на другому верстаті – одним з роботів переміщується на склад оброблених деталей. Кожний з верстатів може одночасно обробляти до трьох деталей.

Час переміщення робота між пунктом прибуття і першим верстатом, першим і другим верстатом, другим верстатом і пунктом зберігання оброблених деталей складає відповідно 6, 7, і 5 секунд незалежно від того, холостий це хід, чи ні. Роботу потрібний час 8 ± 1 секунд на захоплення або вивільнення деталей. Час обробки на першому верстаті розподілений за нормальним законом із середнім значенням 60 секунд і має стандартне відхилення 10 секунд. Середній час обробки на другому верстаті дорівнює 100секунд і має експоненціальний закон розподілу.

Визначити найкращий (з точки зору підвищення пропускної здатності гнучкої виробничої системи) спосіб закріплення роботів до операцій. Можливі варіанти закріплення:

- а) по одному роботу на кожний з трьох шляхів переміщення деталей (пункт прибуття – перший верстат, перший верстат – другий верстат, другий верстат, склад);
- б) кожний робот може використовуватися на кожному шляху переміщення деталей(при цьому повинен займатися найближчий з роботів).

Знайдіть розподіл часу проходження деталей, коефіцієнти використання роботів і верстатів, максимальну місткість місця зберігання деталей на ділянці прибуття.

Завдання 45. Служба замовлення таксі має 5 каналів для одночасного прийняття замовлень по телефону. Час між спробами виклику таксі розподілений за законом Ерланга другого порядку із середнім 180 секунд. Абонент витрачає 30 секунд для набирання номера і, якщо застає всі канали служби замовлення зайнятими або після з'єднання з'ясовує, що черга на обслуговування перевищує 10 замовлень на таксі (в такому випадку замовлення не приймаються), то через 60 секунд він повторює набирання. Після 4 спроб абонент припиняє набирання. Служба замовлення таксі має в своєму розпорядженні 10 машин для обслуговування замовлень. Час, витрачений для проїзду до клієнта, залежить від відстані. Імовірності можливих відстаней наведені в таблиці:

Відстань, км	5	8	9	11	12	20
Імовірність	0,1	0,2	0,25	0,17	0,23	0,05

Вартість проїзду до клієнта клієнтом не сплачується. Швидкість руху машин рівномірно розподілена в інтервалі 35 ± 5 кілометрів за годину. Час обслуговування клієнта рівномірно розподілений в інтервалі 40 ± 10 хвилин. Вартість попереднього замовлення складає 20 гривень, вартість проїзду 1 кілометру дорівнює 3 гривні.

Знайдіть оцінку інтервалу часу виконання замовлення (час від моменту замовлення таксі до моменту доставки клієнта на місце).

Вважаючи, що оператори-телефоністи та водії таксі взаємозаміюються, перерозподіліть їх по дільницях роботи так, щоб мінімізувати час виконання замовлень (штат служби не повинен перевищувати 15 осіб).

Знайдіть таку кількість операторів-телефоністів на телефонах та водіїв таксі, при якій максимізується добуток служби за добу роботи (денна заробітна плата кожного з робітників становить 1000 гривень).

Завдання 46. У вузол комутації повідомлень, що складається з одного спільного вхідного буфера, процесора, двох вихідних буферів і двох вихідних ліній, поступають повідомлення з двох напрямів. Повідомлення у першому і другому напрямках поступають через інтервали часу, розподілені нормально з параметрами 6 та 1, 5 та 1 відповідно.

Повідомлення з першого напрямку поступають у вхідний буфер, обробляються в процесорі, накопичуються у вихідному буфері першої лінії і передаються по першій вихідній лінії. Повідомлення з другого напрямку передаються аналогічно, але передаються через другий вихідний буфер по другій лінії. Застосований метод контролю вимагає одночасної присутності в системі не більше трьох повідомлень з кожного напрямку. Якщо повідомлення поступає при наявності в системі трьох повідомлень зі свого напрямку, то воно дістає відмову і знищується. Час обробки в процесорі дорівнює 2 ± 1 мікросекунд, час передачі повідомлення по першій вихідній лінії дорівнює 7 мікросекунд, по другій лінії – 8 мікросекунд.

Прибуток від обслуговування повідомлення з першого напрямку становить 20 грошових одиниць, з другого напрямку – 40 грошових одиниць.

Існує можливість прискорити процес передачі повідомлень по вихідних лініях. Зменшення на одну одиницю середнього часу передачі повідомлення по першій лінії вимагає 2 грошових одиниці, по другій лінії – 4 грошових одиниці.

Метою моделювання є визначення таких характеристик роботи вихідних ліній, при яких досягається максимальна економічна ефективність вузла комутації повідомлень.

Завдання 47. Відділ з комп'ютерного обслуговування готує носії з програмами для металорізальних верстатів із числовим програмним керуванням. Креслення деталей поступають з конструкторсько-технологічного відділу. Програміст вивчає креслення і пише програму керування верстатом при обробці заготовки. Програмування займає інтервал часу, розподілений за експоненціальним законом із середнім часом 90 хвилин. Програма налагоджується на комп'ютері і записується на носій (тривалість операції – величина, яка розподілена за експоненціальним законом із середнім часом 70 хвилин). Потім носій з програмою ставиться на відповідний верстат для випробувань та редагування. Цей процес займає проміжок часу, розподілений за експоненціальним законом із середнім часом 60 хвилин.

Замовлення на підготовку носіїв з програмами поступають через проміжки часу, розподілені рівномірно в інтервалі 100 ± 20 хвилин. У момент надходження замовлення для нього визначають директивний термін визначається сумою часу надходження замовлення і технологічного часу виконання роботи. Технологічний час виконання робіт – це загальний час обробки плюс додатковий час, рівномірно розподілений в інтервалі 40 ± 10 хвилин.

Керівництво відділу перевіряє декілька способів черговості обробки замовлень з метою визначення найкращого з них. Запропоновано чотири можливих порядки виконання замовлень, що очікують у кожній з черг:

- 1) спочатку виконуються ті замовлення, на виконання яких витрачається найменше загального часу обробки;
- 2) спочатку виконуються ті замовлення, на виконання яких витрачається найбільше загального часу обробки;
- 3) спочатку виконуються ті замовлення, на виконання яких витрачається найменший загальний час, що залишився;
- 4) спочатку виконуються ті замовлення, які мають найближчий директивний термін.

Запропонуйте декілька критеріїв оцінки і оцініть запропоновані дисципліни вибору з черги. Час моделювання необхідно вибирати так, щоб модель працювала у перехідному режимі.

Завдання 48. На маршруті приміського сполучення працюють два мікроавтобуси (А і В), кожний з яких має n місць. Мікроавтобус А користується більшою популярністю, ніж автобус В, оскільки водій мікроавтобуса А їздить акуратніше і швидше. Тому пасажир, який підійшов до зупинки, сідає в мікроавтобус В тільки у випадку, коли автобуса А немає. Мікроавтобус відправ-

ляється на маршрут, якщо всі місця в ньому зайняті. Пасажири підходять до зупинки через $0,5 \pm 0,2$ хвилин і, якщо немає мікроавтобусів, утворюють чергу. Якщо черга більша, ніж 30 осіб, то пасажир не стає у чергу і йде до іншого маршруту. Припускається, що всі пасажирі їдуть до кінця маршруту. На проходження маршруту мікроавтобус А витрачає 20 ± 5 хвилин, а мікроавтобус В - 30 ± 5 хвилин. Після того, як пасажирі звільнили автобус (протягом часу 5 ± 1 хвилин), він їде у зворотному напрямку тим же чином.

Плата за проїзд складає 2 гривні. Авто підприємство стільки ж втрачає (недоотримує), якщо пасажир, прийшовши на зупинку, не стає у чергу і обирає інший маршрут.

Метою моделювання є визначення

- часу очікування пасажирів у черзі;
- кількості місць n (не більше 25), при якому час очікування в черзі пасажирів буде мінімальним;
- виручку автопідприємства за день від маршруту, якщо мікроавтобуси працюють 10 годин на добу.

Завдання 49. Для підвищення своїх прибутків працівники рекламного бізнесу знаходять все нові й нові засоби впливу реклами на людину. Їхнє досягнення – моментальне рекламне повідомлення. Компанія має у своєму розпорядженні декілька розвішаних по місту гучномовців, по яких протягом дня транслюються кращі радіопрोगрами зі вставками рекламних повідомлень. Протягом добового мовлення (час мовлення за добу – 16 годин) компанія має декілька пауз для розміщення реклами (тривалість пауз однакова, кількість пауз задати самостійно; загальна тривалість рекламних пауз не повинна перевищувати 10% від добового мовлення). Інтервал надходження рекламних повідомлень розподілений за законом Ерланга другого порядку із середнім часом 20 хвилин. Одне рекламне повідомлення виходить в ефір лише під час однієї рекламної паузи. Розмір рекламного повідомлення є величиною, рівномірно розподіленою на інтервалі $3 \pm 0,5$ хвилин.

Вартість однієї хвилини мовлення обходиться компанії 100 гривень. За одну хвилину рекламного повідомлення замовник сплачує компанії 300 гривень. Якщо рекламне повідомлення виходить в ефір відразу, то компанія одержує $300 \times$ "тривалість одного повідомлення" гривень. Якщо рекламне повідомлення не може бути розміщене цілком, то замовник, який замовив рекламу, сплачує тільки за час розміщеної частини повідомлення, і при цьому йому ще надається знижка 10%. Якщо рекламне повідомлення не зразу виходить в ефір, то воно стає в чергу. Після 4 годин чекання рекламне повідомлення „застаріває” і видаляються з черги. За розміщене рекламне повідомлення, що знаходилося в черзі, компанія одержує на 30% менше від початкової суми. Якщо в рекламній паузі після розміщення рекламного повідомлення залишився вільний час, то компанія сплачує за нього як за звичайне мовлення.

Одноразові витрати (вартість устаткування, право мовлення і т.і.) компанії становлять 1000000 гривень.

Знайдіть оцінку періоду окупності T у роках (компанії):

$$T = \frac{S + z}{p}$$

де p – прибуток, одержуваний за один рік, грн.; z – вартість місячного мовлення, грн.

Визначить кількість рекламних пауз, за якої період окупності буде мінімальним.

Завдання 50. Є регіональна мережа обчислювальних машин з 7 вузлами, в яких знаходяться сервери і маршрутизатори. До кожного серверу приєднано 10 віддалених абонентів. Кожний абонент має свій унікальний номер в мережі. Абоненти обмінюються повідомленнями між собою. Довжина вхідних і вихідних повідомлень, що передаються, розподілена за гамма-розподілом із середнім значенням 75 Кбайт і стандартним відхиленням 0,4 Кбайт. Всі повідомлення при передачі поділяються на пакети довжиною 4 Кбайти. Кожний пакет забезпечений адресою необхідного абонента. Сервери закольцовані між собою, крім того, між собою з'єднані перший і сьомий сервери. Пакети передаються до серверу, за яким закріплені абоненти, потім по каналу між серверами, що має менше завантаження, і збираються в повідомлення в абонента-одержувача. Швидкість передачі від абонента до серверу і від сервера до абонента 2400 байт в секунду, швидкість обміну між серверами – 96 Кбайт секунду. Потік повідомлень, що поступають від абонентів, є пуассонівським із середнім значенням 45 повідомлень за годину.

Завдання 51. Виробнича система складається з п'яти автоматизованих робочих місць. На теперішній момент міста 1,2,3,4,5 включають відповідно 3,2,4,3 і 1 однакових станків. Роботи надходять у систему з інтервалами, що є незалежними величинами, що розподілені за експоненціальним законом із середнім значенням 0,25 години. Існує три типи робіт: 1,2 і 3, що виникають із ймовірностями 0,3, 0,5 і 0,2. Для робіт 1,2,і3 потрібно виконання 4,3 та 5 завдань відповідно. Завдання повинні виконуватися на указаних місцях у визначеному порядку. Для різних типів робіт використовуються наступні технологічні маршрути:

<i>Тип роботи</i>	<i>Робочі місця у відповідності до технологічного маршруту</i>
1	3,1,2,5,
2	4,1,3
3	2,5,1,4,3

Отже, якщо надходить робота типу 2, то буде виконано три завдання: перше – на 4-ому робочому місці, друге – на 1-ому робочому місці, а третє – на 3-ому робочому відповідності. якщо робота надійшла на певне робоче місце у той момент, коли всі станки, закріплені за цим робочим місцем, зайняті, то займає місце у черзі очікування цього робочого місця за правилом FIFO. Час виконання завдання на кожному станку є незалежною випадковою величиною, що має закон розподілу Ерланга 2-ого порядку із середнім значенням, що залежить від типу роботи та від робочого місця, за яким закріплений станок. Середній час обслуговування для кожного типу робіт та кожного завдання за дані в наступній таблиці:

<i>Тип роботи</i>	<i>Середній час обслуговування кожного завдання у відповідності до технологічного маршруту роботи, години</i>
1	0,5; 0,6; 0,85; 0,5
2	1,1; 0,8; 0,75;
3	1,24; 0,25; 0,7; 0,9; 1,0

Таким чином, для роботи 2 потрібний час для виконання 1,1 година на робочому місці 4, 0,8 години на робочому місці 1 та 0,75 години на третьому робочому місці.

Визначити середній час, витрачений роботами на очікування; середній час виконання роботи; коефіцієнти завантаження робочих місць.

Завдання 52. Кораблі надходять до гавані із часом між надходженнями, що є випадковою величиною з експоненціальним розподілом і середнім значенням 1,25 дня. У гавані є док з двома якірними стоянками та двома кранами для розвантаження кораблів. Кораблі, що надійшли у момент, коли обидві якірні стоянки зайняті, очікують у черзі з дисципліною обслуговування FIFO, Час, потрібний для розвантаження одним краном одного корабля, рівномірно розподілений між 0,5 та 1,5 дня. Якщо у гавані тільки корабель, розвантаженням корабля займаються обидва крани і час розвантаження (час, що залишився) зменшується вдвічі. Якщо надходить ще один корабель, то один кран без затримки відправляється його розвантажувати. Інший кран продовжує розвантажувати корабель, що надійшов раніше, а час, що залишився на його обслуговування збільшується вдвічі.

Визначити мінімальний, максимальний та середній часу обслуговування кораблів у гавані; завантаження якірних стоянок та кранів.

Розділ 12

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

З ДИСЦИПЛІНИ „МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ”

1. Маркер – це
 - a. модель найпростішої системи;
 - b. елемент мережі Петрі;
 - c. назва критерію, за допомогою якого оцінюють адекватність моделі;
 - d. елемент мережі масового обслуговування.
2. Існують такі мови імітаційного моделювання систем:
 - a. Pascal, Delphi, Visual C;
 - b. GPSS, SIMULA, Arena;
 - c. Mathlab, Mathcad, Cadcam;
 - d. MODSYS, SIMOD, SIMSIM.
3. Фактори розрізняють:
 - a. кількісні та якісні;
 - b. лінійні та нелінійні;
 - c. прості та складні.
4. Законами розподілу неперервних випадкових величин являються:
 - a. експоненціальний, Гауса, рівномірний ;
 - b. рівномірний, Пуассона, біноміальний;
 - c. Пірсона, Колмогорова, Джонсона;
 - d. Вейбулла, Пуассона, Лейбніца
 - e. поліноміальний, степеневий, тригонометричний.
5. Мережі Петрі – є
 - a. засобом формального опису дискретних систем;
 - b. засобом аналітичного розрахунку динамічних систем;
 - c. складовою частиною мереж масового обслуговування.
6. Аналітичні моделі мереж масового обслуговування не можна застосовувати для систем, в яких:
 - a. є розгалуження маршрутів;
 - b. є блокування маршрутів;
 - c. є обмеження на довжину черги;
 - d. закони розподілу випадкових величин експоненціальні.
7. Точність результатів імітаційного моделювання залежить від:
 - a. кількості прогонів та часу моделювання;
 - b. кількості елементів в моделі та їх складності;
 - c. середнього значення результату;
 - d. значення критерію регулярності.

8. Розрізняють такі задачі моделювання:
 - a. моделювання, управління, ідентифікації, оптимізації, прогнозування;
 - b. прості, складні та складені;
 - c. коректні та некоректні, визначувані та невизначувані, реальні та нереальні.
9. Мережа масового обслуговування складається з таких елементів:
 - a. позиції, переходи, маркери;
 - b. комп'ютери, сервери, канали зв'язку;
 - c. вимоги, пристрої, черги.
10. Зовнішніми критеріями селекції моделей є
 - a. критерій регулярності, критерій мінімуму зсуву;
 - b. критерій найменших квадратів, критерій завадостійкості;
 - c. критерій Фішера, критерій Ст'юдента.
11. Мережа Петрі складається з таких елементів:
 - a. позиції, переходи, маркери;
 - b. комп'ютери, сервери, канали зв'язку;
 - c. вершини, дуги.
12. Математичний опис мережі Петрі здійснюється за допомогою таких матриць та векторів:
 - a. матриця переходів, матриця суміжності, вектор фішкування;
 - b. матриця входів, матриця виходів, вектор маркірування;
 - c. вектор входів, вектор виходів, матриця змінювань.
13. Експериментальне дослідження системи проводиться з метою:
 - a. дослідження впливу факторів;
 - b. перевірки правильності функціонування моделі;
 - c. вивчення теоретичних основ експериментальних досліджень;
14. Алгоритм імітації відтворює:
 - a. процес функціонування моделі в часі;
 - b. розв'язання рівнянь динаміки моделі;
 - c. процес пошуку оптимальних значень моделі.
15. Внутрішніми критеріями селекції моделей є
 - a. критерій регулярності, критерій мінімуму зсуву;
 - b. критерій найменших квадратів, критерій Ст'юдента;
 - c. критерій Фішера, критерій Кочрена.
16. Метою тактичного планування експерименту є
 - a. визначення такту експерименту, необхідного для заданої точності експерименту;
 - b. дослідження модельного часу, що потрібний для визначення відгуку моделі;

- с. визначення часу моделювання та кількості прогонів, що забезпечують задані точність та довірчу ймовірність визначення відгуку моделі.
- 17. При побудові алгоритму імітації дискретних систем використовується спосіб просування модельного часу, який називається:
 - а. принцип дискретності t ;
 - б. принцип мінімакса;
 - с. принцип особливих станів.
- 18. Ідентифікація закону розподілу проводиться із застосуванням критерію
 - а. мінімуму зсуву;
 - б. хі-квадрат;
 - с. Фішера.
- 19. Розрізняють такі методи моделювання:
 - а. аналітичне моделювання, імітаційне та математичне моделювання;
 - б. системне моделювання, дискретне та неперервне моделювання;
 - с. класичне моделювання, ускладнене та прогресивне моделювання.
- 20. Плани факторного експерименту бувають:
 - а. повні та дробові;
 - б. загальні та залишкові;
 - с. прозорі та напівпрозорі.
- 21. Коефіцієнт екстраполяції при розрахунку критерію мінімуму зсуву потрібно брати в межах:
 - а. від 0,3 до 1,0;
 - б. від 1 до 3 ;
 - с. від 3 до 7.
- 22. Метою стратегічного планування експериментів являється
 - а. вивчення стратегії проведення експериментів;
 - б. дослідження впливу факторів;
 - с. побудова плану експерименту.
- 23. Обробку результатів факторного експерименту проводять;
 - а. ідентичну;
 - б. статистичну;
 - с. регулярну.
- 24. Ідентифікація закону розподілу полягає у
 - а. побудові гістограми частот;

- b. генеруванні випадкових чисел за заданим законом розподілу;
 - c. визначенні закону розподілу та його параметрів.
25. Апроксимація функціональної залежності здійснюється
- a. методом найменших квадратів;
 - b. методом найбільших кубів;
 - c. методом точних коефіцієнтів.
26. Випадкова величина, розподілена за експоненціальним законом розподілу з середнім значенням 0,5, генерується за формулою:
- a. $x = -\frac{1}{0,5} \ln z$;
 - b. $x = -0,5 \ln z$;
 - c. $x = 0,5 \ln z$
 - d. $x = \frac{1}{0,5} e^{1-z}$.
27. Для визначення зовнішнього критерію таблицю даних поділяють на частини:
- a. прагматичну та емпіричну;
 - b. початкову та кінцеву;
 - c. навчаючу та перевірну.
28. Законами розподілу дискретних випадкових величин являються:
- a. Пірсона, Колмогорова, Джонсона;
 - b. експоненціальний, Гауса, рівномірний ;
 - c. рівномірний, Пуасона, біноміальний;
29. Випадкова величина, розподілена за нормальним законом розподілу з параметрами a і σ , генерується за формулою:
- a. $t = a + s \cdot \left(\sum_{i=1}^{12} z_i - 6 \right)$;
 - b. $t = s + a \cdot \left(\sum_{i=1}^{12} z_i - 6 \right)$;
 - c. $t = s + a \cdot \left(\sum_{i=1}^{12} z_i - 12 \right)$
30. Розрізняють алгоритми самоорганізації моделей
- a. однорядні та багаторядні;
 - b. зовнішні та внутрішні;
 - c. типу А та типу В.

31. Яка з наведених матриць планування складена правильно:

а.

2^2	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	-	+	+	+	
2	-	-	+	-	
3	-	+	-	-	
4	-	-	-	+	

б.

2^2	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+	-	-	+	
2	+	-	+	-	
3	+	+	-	-	
4	+	+	+	+	

в.

2^{2-1}	x_0	x_1	x_2	x_3	y
1	+	+	+	+	
2	+	-	+	-	
3	+	+	-	-	
4	+	-	-	-	

г.

2^2	x_0	x_1	x_2	x_0x_2	y
1	+	+	+	+	
2	+	+	-	-	
3	+	-	-	-	
4	+	-	+	+	

д.

2^{2-1}	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	y
1	+	+	+	+	
2	+	+	-	-	
3	+	-	-	-	
4	+	-	+	+	

32. Множина моделей-претендентів комбінаторного алгоритму самоорганізації у випадку, коли найскладніша модель має вид $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2 + b_4x_1^2$, складається з :

- 31 моделі;
- 64 моделей;
- 15 моделей;
- 107 моделей.

33. Для визначення критерію мінімуму зсуву таблицю даних поділяють на частини А та В у відношенні:
- 1:1;
 - 2:1;
 - 3:2;
 - 5:3.
34. Для визначення критерію регулярності таблицю даних поділяють на частини А та В у відношенні:
- 1:1;
 - 2:1;
 - 3:2;
 - 2:3.
35. Рівняння моделі, що може бути отримане в результаті факторного експерименту типу 2^2 , має вигляд:
- $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2$;
 - $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$;
 - $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_1x_3$.
36. Для визначення критерію регулярності використовують формулу:

a.
$$\Delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{NB} (y_i^T - y_i^M)^2}{\sum_{i=1}^{NB} (y_i^T)^2} ;$$

b.
$$\Delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{NB} (y_i^T - y_i^M)^2}{\sum_{i=1}^{NB} (y_i^M)^2} ;$$

c.
$$\Delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{aN} (y_i^A - y_i^B)^2}{a \sum_{i=1}^{aN} (y_i^M)^2} .$$

37. Коефіцієнти моделі за табличними даними знаходяться за формулою:
- $b = X^T (X \cdot X^T)^{-1} y$;
 - $b = (X^T \cdot X) \cdot X^{-1} y$;
 - $b = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T y$;
38. Розмір вибірки p , що забезпечує задану точність ε та довірчу ймовірність β результату моделювання, у випадку нормального закону розподілу визначається за формулою:

- a. $p = \frac{s^2 t_j^2}{e^2}$, де σ – середнє квадратичне відхилення результату моделювання;
- b. $p = \frac{s^2}{e^2(1-b)}$, де σ^2 – дисперсія результату моделювання;
- c. $p = \frac{e^2}{s^2(1-b)}$, де σ – середнє квадратичне відхилення результату моделювання.

39. В результаті факторного експерименту отримано рівняння виду $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_1x_2 + b_6x_3x_4$. Факторний експеримент якого типу проводився:

- a. 2^4 ;
 b. 4^{6-2} ;
 c. 2^{4-1} ;
 d. 3^2 .

40. Для визначення критерію мінімуму зсуву використовують формулу:

a. $n_{зсуву}^2 = \frac{\sum_i (y_i^A - y_i^B)^2}{\sum_j (y_j^T)^2}$;

b. $n_{зсуву}^2 = \frac{\sum_i (y_i^A - y_i^B)^2}{a \sum_j (y_j^T)^2}$;

c. $n_{зсуву}^2 = \frac{\sum_i (y_i^A - y_i^T)^2}{a \sum_i (y_i^B)^2}$.

Відповіді на тестові завдання:

1. b 2. b 3. a 4. a 5. a 6. b,c 7. a 8. a 9. c 10. a 11. a 12. b 13. a 14. a 15. b 16. c 17. c 18. b 19. a 20. a 21. b 22. b 23. b 24. c 25. a 26. b 27. c 28. c 29. a 30. a 31. b 32. a 33. a 34. b 35. a 36. b 37. c 38. a 39. c 40. b

ЛІТЕРАТУРА

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е издание. – М.: Наука, 1986. – 544с.
2. Васильев В.В., Кузьмук В.В. Сети Петри, параллельные алгоритмы и модели мультипроцессорных систем. - Киев: Наукова думка, 1990. - 216 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1975. – 333с.
4. Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. – Киев: Наукова думка. 1982. – 296с.
5. Ивахненко А.Г., Мюллер Й.А.К. Самоорганизация прогнозирующих моделей. – Киев: Наукова думка. 1985. – 221с.
6. Зайцев Д.А. Инварианты временных сетей Петри // Кибернетика и системный анализ. - 2004. – №2. - С.92-106.
7. Каган О.Б. Электронно-вычислительные машины и системы - М.: 1985.
8. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика CS .3-е издание. – СПб.: Питер; Киев: Издательская группа ВНУ, 2004. – 847с.
9. Котов В.Е. Сети Петри. - М.: Наука, 1984. - 158 с.
10. Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. Теория массового обслуживания в экономической сфере: Уч.,М., 1998. – 323с.
11. Лескин А.Л., Мальцев П.А., Спиридонов А.М. Сети Петри в моделировании и управлении. - Л.: Наука, 1989. - 133 с.
12. Общая теория статистики: Статистическая методология в изучении коммерческой деятельности: Учебник / Под ред. О.Э. Башиной, А.А.Спирина. – 5-е издание. – М.:Финансы и статистика, 1999. – 440с.
13. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. - М.: Мир, 1984. – 264 с.
14. Прицкер А. Введение в язык имитационного моделирования и язык SLAM II. – М.:Мир,1987. – 646с.
15. Ситник В.Ф., Орленко Н.С. Імітаційне моделювання: Навчальний посібник. – К: КНЕУ - 1998. – 230с.
16. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Учебник для вузов - М.,1985. - 271с.

17. Стеценко І.В.: Методичні вказівки до курсової роботи з дисципліни «Моделювання систем». – ЧІТІ, 2000. – 38с.
18. Стеценко І.В.: Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «Моделювання систем». – ЧДТУ, 2003. – 51с.
19. Стеценко І.В., Батора Ю.В. Імітаційне моделювання транспортного руху через світлофорні об'єкти // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – Черкаси, 2006. - №3. – С.75-79.
20. Стеценко І.В., Батора Ю.В. Інформаційна технологія визначення оптимальних параметрів управління транспортним рухом через світлофорні об'єкти міста // Математичні машини і системи. – Київ, 2007. - №.3,4 – С.211-217.
21. Стеценко І.В. Бойко О.В. Технологія імітаційного моделювання систем управління засобами сіток Петрі // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – Черкаси, 2006. - №4. – С.29-32.
22. Стеценко І.В., Бойко О.В. Система імітаційного моделювання засобами сіток Петрі // Математичні машини і системи – Київ, 2009. - №.1 – С.117-124.
23. Стеценко І.В., Данилюк А.А. Імітаційне моделювання систем управління засобами сіток Петрі // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – Черкаси, 2005. - №3. – С.293-295.
24. Стеценко І.В., Стеценко В.Г., Дифучин Ю.М. Оптимізація імітаційних моделей систем методами групового врахування аргументів // Питання прикладної математики та математичного моделювання. – Видавництво Дніпропетровського університету, 2004. – С.172-177.
25. Теорія статистики: Навчальний посібник / Вашків П.Г., Пастер П.І., Сторожук В.П., Ткач Є.І. - К.:Либідь, 2001. – 320 с.
26. Тимченко А.А. Основи системного проектування та системного аналізу складних об'єктів: Підручник для студентів вищих закладів освіти/За ред..В.І.Бикова – К.:Либідь, 2000. – 270с.
27. Тимченко А.А. Основи системного проектування та системного аналізу об'єктів. Основи системного підходу та системного аналізу об'єктів нової техніки: Навч. посібник/За ред.. Ю.Г.Леги. – К.:Либідь, 2004. – 288с.
28. Томашевський В.М. Моделювання систем. – К. : Видавнича група ВНУ, 2005. – 352с.
29. Томашевський В.М., Жданова О.Г., Жолдакова О.О. Вирішення практичних завдань методами комп'ютерного моделювання: Навч. посібник. - К.:Корнійчук, 2001. – 267с.

30. Шеннон Р., Имитационное моделирование систем – искусство и наука, М., 1986. – 418 с.
31. Шрайбер Т. Дж. Моделирование на GPSS. – М.: Машиностроение, 1980. – 593с.
32. Элиенс, Антон Принципы объектно-ориентированной разработки программ. 2-е издание. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2002. – 496с.
33. Ямпольський Л.С., Лавров О.А. Штучний інтелект у плануванні та управлінні виробництвом. – К.: Вища школа, 1995. – 254с.
34. Kelton W.D., R.P. Sadowski, and D.A. Sadowski: Simulation with Arena, McGraw-Hill, New York (1998).
35. Systems Modeling Corporation: Arena User's Guide, Version 4.0, Sewickly, Pennsylvania (1999).

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- адекватність 16
- активність 124
- алгоритм імітації 159,192
- апроксимація 36
- алгоритм самоорганізації
 - багаторядний 317
 - блокування маршруту 66
 - з послідовним використанням критеріїв 320
 - однорядний 317,319
- аналіз дисперсійний 233
 - регресійний 226
- вектор запусків переходу 121
- верифікація 15,189
- властивість k-обмеженості
- внутрішній критерій 314
- генератор випадкової величини 149,150
- гіпотеза селекції 332
- дерево досяжності 125
- дисперсія факторна 41
 - загальна 41
- довгостроковий прогноз 313
- досяжність 122
- еволюційний метод 255
- експеримент багатофакторний 226, 235
 - однофакторний 226, 227, 333
- завадостійкість алгоритму самоорганізації 318, 324
- задача ідентифікації 12
 - моделювання 11
 - оптимізації 12
 - прогнозування 12
 - управління 11
- закон розподілу експоненціальний 24
 - логнормальний 25
 - нормальний 24
 - Пуассона 26
 - рівномірний 24
 - трикутний 25
- зберігання 122,123
- зовнішній критерій 314,320
- індекс детермінації 41
 - кореляції 41
- інформаційний зв'язок 81
- кількість прогонів 221
- коефіцієнт передачі 112,115
- конфлікт 74
- концептуальна модель 17
- кореляційно-регресійний аналіз 41
- критерій Ст'юдента 42, 232
 - χ^2 27, 47
 - Колмогорова-Смірнова 29
 - мінімуму зсуву 315
 - найменших квадратів 37
 - регулярності 315
 - Фішера 232, 234
- маркер 67
- маркірування 120
- матриця входів 119
 - виходів 119
 - планування 227
- мережа масового обслуговування (мережа МО) 62
 - замкнута 115
 - розімкнута 111
- мережа Петрі 66
 - з часовими затримками 71
- метод Гауса 155
 - оберненої функції 154
 - полярних координат 158
 - табличний 157

- методи зменшення дисперсії 224
- методи моделювання 12
- множина моделей-претендентів 320
- модель 10
 - нефізична 11
 - оптимальної складності 314
 - системна 17
 - фізична 10
- моделювання аналітичне 12
 - імітаційне 13, 49
 - математичне 13
- нормуючий множник 116
- перехід 67
 - багатоканальний 76
 - з часовою затримкою 71
 - конфліктний 74
- перехідний період 225
- планування експериментів тактичне 220
 - стратегічне 220
- позиція 67
- послідовність даних навчальна 313
 - перевірна 313
- правило автоматичної зупинки 224
- принцип Δt 160
 - найближчої події 160
- процес моделювання 14
- система масового обслуговування (СМО) 62
- система нормальних рівнянь 40
 - умовних рівнянь 40
- системний підхід 17
- складність моделі 313
- способи моделювання 10
- тести емпіричні 152
 - теоретичні 153
- умова запуску переходу 70
 - умова сталого режиму 112
- фактор кількісний 226
 - якісний 226
- факторний експеримент дробовий (ДФЕ) 230
- факторний експеримент повний (ПФЕ) 228
- формула Літтла 114
- час перехідного періоду 225
- шкала Чеддока 41

Навчальне видання

СТЕЦЕНКО Інна Вячеславівна

МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ

Навчальний посібник

*Куратор видавничого проекту Т.В. Костенко
Комп'ютерне макетування Т.І. Вознюк
Художньо-технічний редактор Н.К. Трохименко*

Підп. до друку 19.04.2010 р. Формат 60x84 1/16. Папір офс. Гарн. Times New Roman.
Друк оперативн. Ум. друк. арк. 23,25. Обл.-вид. арк. 24,5. Тираж 300 прим. Зам. № 10-е075.

Черкаський державний технологічний університет
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 896 від 16.04.2002 р.

Надруковано в Черкаському ЦНТЕІ
м. Черкаси, бульвар Шевченка, 205