

А. І. Кузьмичов



# ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ: ПРАКТИКУМ В EXCEL

Київ 2013

А. І. Кузьмичов

**ОПТИМІЗАЦІЙНІ  
МЕТОДИ І МОДЕЛІ:  
ПРАКТИКУМ В EXCEL**

Київ 2013

**Кузьмичов А. І.**

Оптимізаційні методи і моделі: практикум в Excel: Навч. пос. – К.: ВПЦ АМУ, 2013. – 438 с.

Рецензенти:

**Васильєв В. В.** – заслужений діяч науки України, чл.-кор. НАН України, д-р техн. наук, професор (Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України)

**Вітлінський В. В.** – зав. кафедри економіко-математичного моделювання ДВНЗ «КНЕУ ім. Вадима Гетьмана», д-р екон. наук, професор.

На прикладах розв'язання біля 100 оптимізаційних задач різного типу демонструється техніка формування, аналізу, прийняття та супроводження управлінських рішень на основі проведення оптимізаційного моделювання в середовищі електронних таблиць Excel із застосуванням вбудованого стандартного інструментального засобу – спеціалізованої програмної надбудови-обчислювача Excel Solver (Поиск решения).

Інтелектуальна інформаційна технологія оптимізаційного моделювання вивчається у нормативній дисципліні «Оптимізаційні методи і моделі» та споріднених із нею дисциплінах, які викладаються для студентів з менеджменту, економіки, комп'ютерних наук та інженерії: «Математичне програмування», «Дослідження операцій», «Економіко-математичне моделювання», «Економічна кібернетика», «Операційний менеджмент», «Чисельні методи та комп'ютерне моделювання», «Моделювання та оптимізація технологічних процесів» тощо (найближчий англomовний аналог – Management Science).

## Зміст

Передмова	7
<b>РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ: ЗАДАЧІ, МОДЕЛІ, МЕТОДИ, ТЕХНОЛОГІЯ</b>	10
<b>Глава 1. Основи ОММ: алгебраїчні та геометричні методи та моделі</b>	11
Лінійне рівняння	21
Задача 1.1. Побудова графіка лінійного рівняння з двома невідомими	22
Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	23
Задача 1.2. Розв'язати СЛАР графічним методом	24
Задача 1.3. Розв'язати визначену СЛАР методом Крамера	28
Задача 1.4. Розв'язати визначену СЛАР методом із формуванням оберненої матриці	30
Задача 1.5. Розв'язати визначену СЛАР методом віртуальної оберненої матриці	31
Задача 1.6. Розв'язати визначену СЛАР із використанням надбудови Поиск решения	32
Система лінійних алгебраїчних нерівностей, формування й розв'язання недовизначеної СЛАР	34
Задача 1.7. Розв'язати недовизначену СЛАР графічним методом	35
Задача 1.8. Розв'язати недовизначену СЛАР з використанням <i>Поиск решения</i>	36
Задача 1.9. Розрахунок електричного ланцюга	37
Задача міжгалузевого балансу (МГБ)	38
Задача 1.10. Розв'язати класичну задачу МГБ	41
Задача 1.11. Розв'язати задачу МГБ («від валу»)	46
Задача 1.12. Розв'язати задачу МГБ (варіант «змішаний»)	47
Задача 1.13. Розв'язати виробничо-ресурсну задачу	50
Розв'язання перевизначеної системи лінійних рівнянь	52
Задача 1.14. Розв'язати перевизначену СЛР матричним методом	52
Задача 1.15. Розв'язати перевизначену СЛР графічним методом	53
<b>Глава 2. Лінійне програмування: графічний та симплекс-метод. Моделі векторних задач лінійної оптимізації</b>	56
Задача 2.1. Про оптимальний план ( $n = 2$ ): графічний метод	62
Задача 2.2. Про оптимальний план: симплекс-метод	66
Задача 2.3. Розв'язання прямої й двоїстої задач (без звіту <i>Устойчивость</i> )	72
Задача 2.4. Пошук оптимального плану виробництва при обмеженні на суму витрат для ресурсів	73
Задача 2.5. Про оптимальну суміш (раціон)	80
Задача 2.6. Задача про оптимальний баланс	83
Параметричний аналіз	88
Задача 2.7. Про оптимальний баланс (параметр – потужність 4-го цеху)	90
Задача 2.8. Планування інвестицій за критерієм максимізації доходу	91
Задача 2.9. Про оптимальний план виробництва (параметр – коефіцієнти ЦФ)	95
<b>Глава 3. Лінійні моделі матричних та змішаних оптимізаційних задач</b>	98
Задача 3.1. Класична задача Канторовича про верстати	102
Задача 3.2. Класична задача Фантресту	105
Задача 3.3. Класична транспортна задача	108
Задача 3.4. Метод «північно-західного кута»	110
Задача 3.5. Метод «мінімального елемента»	113
Задача 3.6. Симплекс-метод	116
Задача 3.7. Про оптимальне прикріплення (транспортна задача на максимум)	120
Задача 3.8. Транспортна задача з обмеженням пропускної здатності	124
Задача 3.9. Транспортна задача з проміжними пунктами	127

Задача 3.10. Логістична задача «виробництво-база-споживач»	130
Задача 3.11. Змішана виробничо-транспортна задача	132
Задача 3.12. Задача «робити чи купувати»	139
Задача 3.13. Розподіл однорідних ресурсів	144
Задача 3.14. Розподіл пропорційних ресурсів	149
Задача 3.15. Розподіл різних ресурсів	154
<b>Глава 4. Лінійні моделі задач потокової оптимізації</b>	159
Задача 4.1. Мережева транспортна задача	160
Задача 4.2. Про найкоротший шлях і дерево НКШ	169
Задача 4.3. Про максимальний потік/мінімальний переріз	177
Задача 4.4. Про потік мінімальної вартості між вузлами $s$ та $t$	184
Задача 4.5. Задача комівояжера	186
Управління проектом за мережевою моделлю	195
Задача 4.6. Розрахунок мережевого графіка (AoA)	197
Задача 4.7. Розрахунок мережевого графіка (AoN)	205
Задача 4.8. Про потоки у мережах з втратами/прибавками	210
Задача 4.9. Побудова дерева мінімального покриття	213
Задача 4.10. Наближений розв'язок задачі про МПД в Excel ( <i>Поиск решения</i> )	215
<b>РОЗДІЛ 2. НЕЛІНІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ: ЗАДАЧІ, МОДЕЛІ, МЕТОДИ</b>	222
<b>Глава 5. Моделі дискретного програмування. Метод «гілок і границь»</b>	226
Задача 5.1. Про оптимальний план виробництва (ЦЛП)	232
Задача 5.2. Про оптимальний машинний парк	236
Задача 5.3. Про рюкзак	239
Задача 5.4. Про призначення	242
Задача 5.5. Про розміщення контролерів	245
Задача 5.6. Про оптимальне розміщення технічних засобів дорожнього контролю	250
Задача 5.7. Про оптимальний розкрій	254
Задача 5.8. Про надійні перевезення	258
Задача 5.9. Про водопровідника	262
Задача 5.10. Про оптимальний розклад	264
Задача 5.11. Транспортна задача з фіксованими доплатами	266
Задача 5.12. Оцінювання ефективності прийнятих інвестиційних рішень	272
Задача 5.13. Оптимізація з неопуклою і дискретною ОДР (умова “або-або”)	275
<b>Глава 6. Моделі динамічної оптимізації</b>	278
Задача 6.1. Оптимізація планування грошових потоків із врахуванням ризик-фактору	281
Задача 6.2. Динамічна модель “виробництво-запаси” (векторна версія)	284
Задача 6.3. Про оптимальне управління запасами (“випуск-зберігання”)	287
Задача 6.4. Динамічна транспортна модель “виробництво-запаси”	291
Задача 6.5. Динамічна модель дивідендної політики акціонерного товариства	295
Задача 6.6. Про заміну машинного парку (мережева матрична версія)	297
Задача 6.7. Задача про заміну техніки та обладнання (мережева векторна версія)	303
<b>Глава 7. Максимізація/мінімізація нелінійної функції однієї змінної</b>	306
Задача 7.1. Розв'язання нелінійного рівняння	307
Задача 7.2. Обчислення похідної функції однієї змінної в Excel	312
Задача 7.3. Максимізація функції з однією змінною (градієнтний метод)	313
Задача 7.4. Управління запасом: задача про економічний розмір замовлення	317
<b>Глава 8. Моделі багатовимірної нелінійної оптимізації</b>	324
Задача 8.1. Розв'язання визначених систем нелінійних рівнянь	326
Задача 8.2. Метод множників Лагранжа	328
Задача 8.3. Про суміш (модель з неоднорідною розривною ЦФ)	331
Задача 8.4. Про оптимальний план виробництва (НЛП)	333

Задача 8.5. Мінімізація ризику інвестиційного портфеля	337
Задача 8.6. Визначення середнього доходу ЦП та оцінок ризику	339
Задача 8.7. Управління запасами кількох продуктів	341
Задача 8.8. ABC-аналіз та його застосування для управління запасами	344
Дробово-лінійне програмування	351
Задача 8.9. Задача про оптимальне відношення двох процесів (ЛП)	352
Задача 8.10. Про оптимальне відношення двох процесів (нелінійний підхід)	354
Задача 8.11. Задача оптимального оцінювання однорідних одиниць	359
Задача 8.12. Задача вибору оптимальних геометричних розмірів конструкції	369
Задачі місцезнаходження та розміщення центрів обслуговування	371
Задача 8.13. Задача про оптимальний центр (метод тяжіння)	374
Задача 8.14. Задача про оптимальний центр (метод тяжіння, манхеттенська метрика)	378
Задача 8.15. Задача про оптимальний центр (градієнтний метод)	380
Задача 8.16. Розподіл завдання між виконавцями	384
<b>Глава 9. Цільове, еволюційне та стохастичне програмування. Моделі багатокритеріальної та нелінійної оптимізації із негладкою ЦФ</b>	389
Задача 9.1. Будівництво багатофункціонального об'єкту	391
Задача 9.2. Багатоцільове лінійне програмування	399
Задача 9.3. Про оптимальний центр: генетичний алгоритм	408
Задача 9.4. Задача комівояжера: генетичний алгоритм з обмеженнями alldifferent	410
Стохастичне програмування в Excel: організація економічних досліджень та прийняття рішень в умовах невизначеності й ризику	419
Задача 9.5. Задача про суміш (СП)	420
ДОДАТКИ. Д1. Встановлення й виклик стандартної версії надбудови <i>Поиск решения (Solver Add-in)</i> в Excel 2003/2010	424
Д2. Система координат на географічній карті, вставленій в Excel	426
Д3. Формування таблиці відстаней за даними географічної карти, вставленої в Excel	427
Глосарій	432
Використані джерела	436

## Передмова

Дисципліна «Оптимізаційні методи і моделі» (ОММ) представляє математичний апарат й аналітичну технологію оптимізаційного моделювання (пошуку оптимуму<sup>1</sup>) за задачним підходом у комплексі

Задача - Модель - Метод – Реалізація - Аналіз - Рішення.

Математична оптимізація – процес розв'язання математичної задачі пошуку максимуму чи мінімуму цільової функції при обмеженнях на значення та тип шуканих невідомих. Оптимізаційна задача відтворює далеко не усі, лише певні характерні властивості реального об'єкту дослідження, що найбільше цікавлять дослідника, тож вона є основою для наближення чи певної заміни цього об'єкту його *оптимізаційною моделлю*, подальша реалізація якої здійснюється відповідними *оптимізаційними методами* та обчислювальними засобами. Складність об'єкту дослідження визначає рівень складності процесу оптимізаційного моделювання від постановки відповідної оптимізаційної задачі до формулювання і реалізації її математичної моделі та аналізу отриманих результатів, як правило, для цього потрібні потужні обчислювальні засоби – комп'ютери з відповідним програмним забезпеченням.

Фактично, оптимізаційне моделювання (ОМ) – це розв'язання оптимізаційних задач за допомогою комп'ютера, конкретно, у цьому виданні – на звичайному ПК, де встановлено популярний офісний пакет MS Office, його складова – табличний процесор MS Excel – доступне кожному користувачу й ефективно середовище для підготовки табличних даних, організації й проведення дослідження на сформованій оптимізаційній моделі.

Для розв'язання оптимізаційної задачі застосовується спеціальна програмна надбудова – розв'язувач Excel Solver<sup>2</sup> (досить вдалий переклад російською – *Поиск решения*, бо результат його дії має сприйматися одночасно як *розв'язок* математичної задачі оптимізації й як управлінське *рішення*, сформоване за результатами модельних обчислень). Ця надбудова реалізує основні оптимізаційні моделі трьома чисельними методами для розв'язання задач лінійної, цілочислової й нелінійної оптимізації, новітня версія Excel 2007/2010/2013 доповнена генетичним алгоритмом еволюційного моделювання.

Будь-яка задача математичної оптимізації за своєю суттю є задачею оптимального розподілу обмежених будь-яких ресурсів, яка завжди виникає будь-де, її результат є основою прийняття зваженого й обгрунтованого управлінського рішення в *умовах визначеності* (коли усі початкові дані задані у конкретній числовій формі). Технологія ОМ базується на комплексі математичних теорій, оптимізаційних моделей і чисельних методів, що називається *математичним програмуванням* (МП), де словом «програмування» (синонім – «планування») позначають процес пошуку й формування будь-якої стратегічної програми чи конкретного плану дій.

МП існує близька 70 років, виникнувши ще у докомп'ютерний період, стимулом й потужним поштовхом до його розвитку стала комп'ютерна революція, основна сфера досліджень й успішних впроваджень – управління інженерно-технічними, соціально-економічними й організаційними об'єктами, коротко, управління складними системами.

Однак серед складних систем, наприклад, в інженерних, природничих чи гуманітарних науках, є й такі, де важко побудувати навіть їх спрощені математичні моделі хоча б для простого огляду й розуміння їх функціонування, не кажучи про серйозне вивчення шляхом експериментального дослідження. Для них виходом стала «імітація» – штучна реалізація спочатку в розрахунках й на спеціальному обладнанні, тепер – на потужних комп'ютерах, складного динамічного процесу із наступним статистичним аналізом отриманої

<sup>1</sup> *оптимум* (від лат. *optimus* – кращий), найкращий й тому єдиний результат організації будь-якої діяльності за певним критерієм ефективності в економічному (організаційному, соціальному, політичному) вимірі у формі знайденого *оптимального плану* розподілу наявних ресурсів (що-куди-скільки), за яким досягається можливий *максимальний* ефект функціонування або визначається можливий *мінімум* витрат/втрат для виконання заданого завдання чи задоволення заданого попиту (замовлення)

<sup>2</sup> *Solver* – досл. розв'язувач, від англ. to solve a (mathematical) problem – розв'язувати (математичну) задачу, узагальнена назва спеціалізованого програмного засобу у складі систем комп'ютерної математики (MatLab, Maple, MathCAD) та табличних процесорів, який реалізує певний обчислювальний алгоритм чи їх сукупність

множини варіантів його поведінки. Так виникла аналітична технологія під назвою «імітаційне моделювання» (*simulation*), перше її успішне впровадження (1949 р.) – дослідження поведінки ядерної реакції в умовах невизначеності методом Монте-Карло (зрозуміло, що з-за можливих ризиків було неможливо провести реальний фізичний експеримент, аби отримати необхідні для статистичної обробки експериментальні дані) [60]. Саме на основі імітаційного моделювання формуються управлінські рішення, що приймають *в умовах невизначеності й ризику*, бо початкові дані для таких задач вимушено задають лише у формі розподілів ймовірностей відповідних даних.

Отже, оптимізаційне моделювання (*Optimization*) для розв'язання різноманітних задач оптимального розподілу обмежених ресурсів в умовах визначеності й імітаційне моделювання (*Simulation*) для аналізу ризиків, що виникають в умовах невизначеності, – дві потужних й популярних аналітичних технології комп'ютерного моделювання для пошуку, формування й прийняття відповідальних управлінських рішень. Фактично це поки що окремі прикладні дисципліни із різною історією розвитку, специфічними постановками задач, математичним апаратом, чисельними методами та програмними продуктами. Основна відмінність між ними – способи організації пошуку розв'язку прикладної задачі, характерний й зрозумілий кожному приклад – пошук грибів у лісі енергійним новачком й досвідченим грибником.

Імітаційне моделювання реалізує поведінку новачка, що шарахається й хаотично нишпорить лісом, це, фактично, дослідження методом масових спроб з використанням даних випадкової природи, в ході їх обробки накопичується статистика, яка й формує кінцевий (в середньому) результат. Цей процес пошуку рішення нагадує випадкове блукання в лабіринті, де після багатьох спроб й фіксації проміжних результатів вдається відшукати з нього вихід, характерний приклад відповідного чисельного методу – мурашковий алгоритм, побудований на вивченні поведінки мурашок для пошуку, скажімо, найкоротшого маршруту до цілі, тому й тривалий й коштовний з-за необхідності реєстрації, накопичення й обробки масивів колосальних розмірів, щоб отримати достовірний результат. Тож технологія пошуку оптимуму в ІМ порівняно проста й універсальна, зате вимагає потужних машинних ресурсів й стала реальною лише в наші часи із появою інформаційної техніки із колосальними можливостями.

Зате «зважене» й «економне» оптимізаційне моделювання реалізує поведінку досвідченого грибника у знайомому лісі, бо ця методологія характеризується чітко направленим пошуком кінцевого результату, де покроково вибудовується оптимальний шлях (якщо він існує) у розгалуженому дереві можливих рішень – на кожному кроці алгоритм з'ясовує можливість покращення знайденого плану, здійснює його в математично й строго обґрунтованому напрямку чи зупиняється з-за неможливості подальшого покращення (саме так діє досвічений альпініст, так діяв народний герой Іван Сусанін). Технологія пошуку явно не проста, бо заснована на машинному інтелекті (що базується на розвиненому математичному й алгоритмічному апараті), зате якість результату досить висока, машинні ресурси, зрозуміло, потрібні, хоча значно у меншій степені.

Тож як і новачок, навчаючись й набуваючи досвіду, поступово поєднує в собі широту й швидкість охопту ситуації із вдумливим аналізом, так і технології пошуку ІМ та ОМ у своєму розвитку зближуються, бо існує спільне, що їх поєднує – прийняття відповідальних рішень у сучасних умовах, а саме, розв'язання оптимізаційних задач розподілу дефіцитних ресурсів в умовах визначеності, невизначеності й ризику із врахуванням складних організаційних, ресурсних й технологічних умов.

Усе це привело до необхідності розробки комбінованої аналітичної технології в межах математичного та комп'ютерного моделювання, де розвинений апарат ОМ використовується для аналізу поточних варіантів, які формуються в процесі імітації досліджуваного процесу засобами ІМ, ця новітня – її вік десь років з 10 – технологія отримала назву імітаційної оптимізації (*Simulation Optimization, IO*).

Й саме на платформі MS Excel ця комбінована технологія підтримується потужними програмними продуктами (імітація + оптимізація) різних розробників, зокрема, комплексами:

- Crystal Ball Professional + OptQuest Optimizer (компанія Decisioneering)
- @RISK Industrial + Evolver/RiskOptimizer (компанія Palisade) та
- Risk Solver Platform = Premium Solver + Risk Solver (компанія Frontline Systems).

Постановка типових оптимізаційних задач, розробка оптимізаційних моделей на цій основі, їх реалізація відповідними оптимізаційними методами в Excel, аналіз отриманих результатів й формування на цій основі управлінських рішень – предмет цього практику-



му. Технологія оптимізаційного моделювання в Excel, що розглядається, має, фактично, необмежений спектр оптимізаційних задач, й, відповідно, є потужним засобом для аналізу, формування й прийняття управлінських рішень у будь-яких умовах й будь-ким безпосередньо на звичайному ПК, обладнаному пакетом програм MS Office, який в Україні став стандартним засобом електронного документообігу.

### **Оптимізаційні задачі – задачі на екстремум при наявності обмежень**

В математиці дослідження задач на екстремум функцій (максимум чи мінімум) без обмежень розпочалося дуже давно, майже 3000 років тому люди вже знали про екстремальні властивості кола та кулі: серед плоских фігур з однаковим периметром максимальну площу має коло; куля має максимальний об'єм серед просторових фігур з однаковою площею поверхні тощо. Поступово практичні задачі на екстремум переходили до класу задач на оптимум з-за доповнення їх обмеженнями на шукані змінні. Тож лише за останні 300 років були розроблені загальні (класичні, формульні) методи розв'язання таких задач, а за останні 50-70 років сучасний математичний інструментар збагатився новими теоріями – оптимального планування та управління, моделями математичного програмування, чисельними методами лінійної та нелінійної оптимізації та імітаційного моделювання.

Термін «оптимум» почав використовуватися наприкінці 18 століття спочатку в біології й фармакології, коли з обмеженого набору продуктів лікувального призначення треба було розробити суміш найкращої якості, тоді ж цей термін увів в сучасну математичну науку творець диференціального числення Лейбніц.

Одна з перших постановок досить складної оптимізаційної задачі, що йде з глибини століть, - відома в математиці «задача Дідони» (вперше згадується в «Енеїді» Вергілія): вождь місцевого племені погодився виділити вигнаній з Греції цариці Дідоні<sup>3</sup> стільки землі, скільки можна покрити шкурою бика. Мудра Дідона зробила зі шкури тоненький ремінець і окреслила їм півколо, кінці якого торкалися берега Середземного моря, тим самим охопивши максимально можливу площу поверхні прибережної суші. Там заснувала Карфаген, неприступну фортецю, порт й процвітаюче місто-державу, що протягом довгих років був суперником самого Риму в регіоні (814 р. до н. е., зараз це територія Тунісу).

Рішення – півколо як оптимальна фігура – отримане евристичним шляхом, залишалося недоведеним протягом тисячоліть, аж поки із відкриттям варіаційного числення (Бернуллі, Ейлер, Лагранж) результат був підтверджено. На перший погляд рішення Дідони очевидно, але не все очевидне вірно: в задачі Дідони умова-обмеження одна – задана довжина ремня, критерій – максимізація площі суші, охопленої цим ремнем. Але можливих варіантів форми охопленої поверхні в принципі дуже багато, це плоска фігура будь якої форми (багатокутники, еліпс, коло ...) і не ясно, який варіант є найкращим. Тож оптимальним рішенням з урахуванням обмеження - не охоплювати прибережну лінію ремнем - є саме півколо.

---

<sup>3</sup> Дідона (814-760 до н.е.), історична постать із драматичною долею, героїня багатьох видатних творів вітчизняного й світового мистецтва різних жанрів; зокрема, в українській культурі вона згадується в поемі І. Котляревського «Енеїда», де є уособленням української жінки: «...Розумна пані і моторна, Трудяща, дуже працююча, Весела, гарна, сановита», в одноіменній опері М. Лисенка й анімаційному фільмі В. Дахно

# **РОЗДІЛ 1.**

## **ЛІНІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ: ЗАДАЧІ, МОДЕЛІ, МЕТОДИ, ТЕХНОЛОГІЯ**

Глава 1. Основи ОММ: алгебраїчні та геометричні методи та моделі

Глава 2. Лінійне програмування: графічний та симплекс-метод.

Моделі векторних задач лінійної оптимізації

Глава 3. Лінійні моделі матричних та змішаних оптимізаційних задач

Глава 4. Лінійні моделі задач потокової оптимізації

## Глава 1.

### Основи ОММ: алгебраїчні та геометричні методи та моделі

Лінійна оптимізація застосовує апарат лінійного програмування (ЛП). Математична теорія ЛП, якій всього десь 60-70 років, сформувалась на “плечах” древньої науки про числа – алгебри, назва й початки якої походять від трактата “Ал-кітаб ал-мухтасар фі хисаб *ал-джебр* ал-мукабала” видатного вченого-мислителя Мухаммада ібн Муса ал-Хорезмі (з дня народження якого пройшло більше 1200 років), власне ім'я якого стало основою сучасного слова “алгоритм”<sup>4</sup>. Довгий час цей трактат у перекладі латиною використовувався у Європі як підручник з математики. Відчутним є вплив досягнень давньогрецьких математиків-алгебраїстів, серед яких виділяється постать Діофанта.

Важливою складовою алгебри у застосуваннях в природничих науках є *лінійна алгебра*, об'єктами лінійної алгебри є лінійні функції, лінійні рівняння та їх системи, лінійні нерівності та їх системи. Для опису і розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) розроблено апарат матричної алгебри, стандартні векторно-матричні функції якого вбудовані, зокрема, в Excel.

**XVII-XVIII** ст. Історично першими задачами лінійної алгебри було розв'язання лінійних рівнянь та їх систем, побудова теорії систем лінійних рівнянь пов'язана із відкриттям теорії матриць й визначників. Лінійні рівняння, що описують прямі і площини, стали природним предметом вивчення після винаходу Декартом і Ферма методу координат (близько 1636). Лейбніц, засновник математичного аналізу (разом із І. Ньютоном), використовував визначники ще у 1693 році, Крамер представив свої «формули Крамера» для розв'язання систем лінійних рівнянь на основі визначників в 1750 р. У кінці 1700-х років Лагранж використовував матриці у «методі множників Лагранжа» для пошуку екстремумів функцій.

**XIX** ст. Гаусс у 1800-их рр. розробив свій метод найменших квадратів, користуючись «методом виключення Гаусса» для розв'язання СЛАР, Гамільтон (1833) увів термін «вектор», Грассман (1844) досліджував операції з векторами, Сильвестр вперше увів термін “матриця” (лат. – основа) для позначення упорядкованого масиву чисел (1848). Теорія матриць була розроблена у працях Келі, який увів формули множення матриць та обчислення оберненої матриці (1855). Серйозні результати отримали Грассман (1862), Лагерр (1867) та Пеано (1888), наприкінці 1900-их рр. Гіббс та Дірак застосували цей апарат у своїх дослідженнях з фізики.

**XX**- ст. Практичний інтерес до лінійної й матричної алгебр виявився вже у XX ст. при дослідженнях у прикладних областях, у першу чергу, в електротехніці, яка стала основою, зокрема, побудови електричних моделюючих пристроїв, Леонтєв та Канторович (1930-ті рр.) одними з перших успішно використали матричний апарат лінійної алгебри в економіці, а фон Нейман та Тьюринг (з 1947 р.) при розробці перших комп'ютерів.

Саме лінійна алгебра привела до заснування лінійного програмування (Данциг), де запозичено термін «лінійне» й використовуються відповідні поняття та стандартні засоби: умови лінійності, лінійні рівняння, нерівності та їх системи; графічні та аналітичні (формульні) інструменти для пошуку рішень, й, зрозуміло, операції і функції матричної алгебри.

У свою чергу, лінійне програмування стало основою й ядром комплексу математичних моделей і методів для розв'язання задач оптимізації різного типу під загальною назвою математичне програмування (МП).

Сучасна комп'ютерна революція зробила вагомий внесок у розвиток інструментальних засобів оптимізаційного моделювання, зокрема, появою табличних процесорів (з 1979 р.), лідером серед яких у наші дні є програма MS Excel, де вбудовано необхідний для кожного користувача матричний апарат. Матричні засоби як складові математичних моделей інженерних й природничих об'єктів та процесів набули такої надзвичайної популярності, що виникла необхідність розробки відповідного спеціалізованого програмного забезпечення. Так, компанією MathWorks Inc. (з 1984 р.) розроблена матрична система комп'ютерної математики MATLAB (MATrix LABoratory), яка, між іншим, інформаційно сумісна із розв'язувачем Solver Excel, який нами використовується. Стало нормою, що модулі для роботи з матрицями є складовими будь-якого офісного чи математичного пакету, САПР чи системи програмування високого рівня.

<sup>4</sup> Мухаммад ібн Муса ал-Хорезмі (изд. АН СССР). – М.: “Наука”, 1983.–263 с.

## Таблиці і матриці в Excel

Основним об'єктом табличного процесора Excel є *таблиця*<sup>5</sup>, що складається з рядків та стовпців. В окремій клітинці<sup>6</sup> таблиці на перетині рядка й стовпця розміщується *елемент* таблиці, його значення: текст, число (у тому числі, дата й час) чи формула.

Стилі прямокутної системи посилань (адресації) до клітинки:

- A1 – буква-число (як в шахматах)
- R1C1 – число-число (від Row – рядок, Column – стовпець).




Над елементами таблиці виконуються певні операції та математичні функції шляхом формування *табличних формул*, обчислення за якими формують результат, що є вмістом відповідних клітинок. В Excel діє чудова технологія «ЩО-ЯКЩО», за якою зміни у клітинках-аргументах автоматично приводять до відповідних змін у клітинках-результатах.

Таблиці – ідеальна структура даних у складі електронної таблиці, бо саме табличні обчислення в математичних та економічних дослідженнях були метою розробки електронних таблиць як програмних продуктів.

В розрахункових документах використовуються таблиці різного типу, форми й змісту, їх традиційними елементами (вмістом клітинок) є:

- *тексти*, це, наприклад, рядки/стовпці із позначеннями чи назвами продуктів, послуг, постачальників і споживачів, населених пунктів чи будь-яких об'єктів тощо
- *числа*, це рядки/стовпці/таблиці: дійсного, цілого чи двійкового (інакше, логічного чи булева<sup>7</sup>) типу й певного формату та
- *формули*.

В Excel 2010 елементами табличного документа стали ще *інфокриві* (спарклайни) – діаграми чи графіки, що розміщуються в окремій клітинці як фон:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	x	0,00	0,63	1,26	1,88	2,51	3,14	3,77	4,40	5,03	5,65	6,28	6,91	7,54	8,17	8,80	
2	f1(x)	0,00	0,59	0,95	0,95	0,59	0,00	-0,59	-0,95	-0,95	-0,59	0,00	0,59	0,95	0,95	0,59	
3	f2(x)	1,00	0,81	0,31	-0,31	-0,81	-1,00	-0,81	-0,31	0,31	0,81	1,00	0,81	0,31	-0,31	-0,81	

З метою якісного й наочного оформлення в табличний документ можуть бути вставлені графічні об'єкти:

- растрові (непрозорі) *малюнки* (фотографії, емблеми, географічні карти чи товарні знаки)
- векторні (прозорі) *автофігури* (лінії, прямокутники, надписи, організаційні діаграми тощо),

що розміщуються в окремих шарах *над таблицею* у певному порядку, який можна змінювати.

Растрові малюнки можна підкласти *під таблицю*, щоб утворити тематичний *фон* усього аркушу, командою:

- Excel 2003: *Формат* → *Лист* → *Подложка*, видаляють його командою *Формат* → *Лист* → *Удалить фон*;
- Excel 2010: *Разметка страницы* → *Подложка*, видаляють його командою *Разметка страницы* → *Удалить фон*).

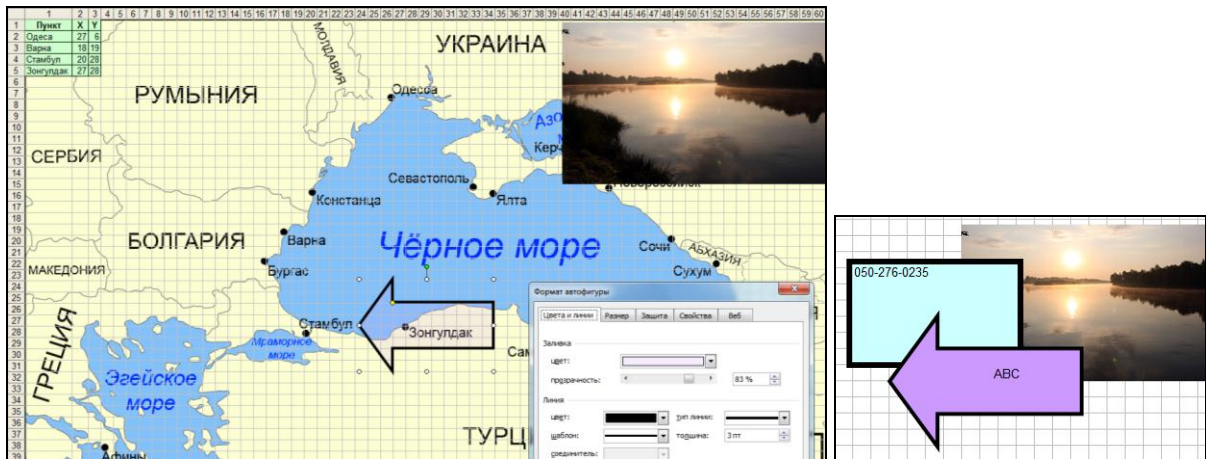
### Приклад

На рисунку зліва: географічна карта як фон аркушу (рос. листа), над таблицею розміщено непрозору фотографію й прозору автофігуру-стрілку з вікном її форматування, справа – три шари графічних об'єктів:

<sup>5</sup> довідкова та сервісна служба Excel називають таблиці *масивами* (array) за термінологією систем програмування

<sup>6</sup> англ. cell; рос. ячейка; укр.: чарунка, комірка, вічко, осередок, у нас – клітинка, цей термін найкраще відповідає клітинним структурам

<sup>7</sup> англійський математик Дж. Буль (Boole, 1815-1864) сформував алгебру з (0, 1)-чисел (тип: двійковий, двоичний, binary), тепер – буліва алгебра, в МП клас моделей під назвою «буліве програмування» має справу з (0, 1)-невідомими, в Excel – ДВОИЧ (BIN)



У загальному вигляді таблиця містить композицію даних різного типу (текст, числа, дати й час, графіка, мультимедіа). Останні версії Excel підтримують колективну роботу з електронними таблицями у комп'ютерній мережі.

### Матриці. Параметри, форми і властивості матриць

В математичних обчисленнях й, зокрема, в лінійній алгебрі та математичному програмуванні, використовують прямокутні *числові таблиці* – **матриці** (matrix) – що мають, у загальному вигляді,  $m$  рядків,  $n$  стовпців й, можливо, ім'я.

Позначення матриці:  $A(m, n)$  або  $A = \{a_{ij}\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ .

Приклад: матриця  $A(3, 4)$ :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Різновидами матриць є **вектор-рядок**, якщо  $m = 1$ ,  $n > 1$ , та **вектор-стовпець**, якщо  $m > 1$ ,  $n = 1$ .

Позначення:  $A = \{a_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  або  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Приклади: вектор-рядок:  $A = [1 \quad -7 \quad 0 \quad 2]$ ,

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

вектор-стовпець:

Одна клітинка – це матриця розміром  $1 \times 1$  або **скаляр** (константа).

В табличних формулах матриця визначається:

- адресним простором (діапазоном), наприклад, B1:E3 (розмір  $3 \times 4$ ) або
- змістовним іменем, яке може асоціюватися з позначенням в математичній моделі, наприклад: A, k, Z тощо.

Матриці – основний об'єкт матричної алгебри, вони, скажімо, містять коефіцієнти лівої й правої частин систем рівнянь, нерівностей чи функцій, значення шуканих планів (програм) тощо. Матриці застосовують для лаконічного запису матричних рівнянь, а матричні операції та функції – для розв'язання цих рівнянь. Наприклад, система лінійних алгебраїчних рівнянь будь-якого порядку записується матричним рівнянням  $AX = B$ , а його розв'язок  $X = A^{-1}B$  використовує дві матричні функції – обернення матриці й матричного множення двох матриць.

**Вимір** (рос. размерность) – структурна організація таблиці (масиву):

- 1 – вектор (рядок, стовпець), одновимірний масив,
- 2 – матриця, двовимірний масив,
- 3 – тривимірний масив або куб (пакет матриць однакового розміру).

**Розмір** – кількість рядків та стовпців матриці. Так, числова таблиця з 3-ох рядків й 4-ох стовпців є двовимірним масивом – матрицею розміром 3×4 (чит.: матриця три на чотири).

**Форма** матриці однозначно впливає із її розміру, вона:

- *прямокутна* ( $m \neq n$ ) чи
- *квадратна* ( $m = n$ ).

Форма матриці є суттєвим її параметром, бо у лінійній алгебрі саме форма матриці коефіцієнтів визначає тип системи рівнянь/нерівностей (визначена/невизначена) й використання відповідних чисельних методів їх розв’язання.

«Ідеальною» в лінійній алгебрі є квадратна матриця, де гарантується отримання розв’язку СЛАР, якщо він існує, певними перетвореннями до неї зводять «реальні» прямокутні матриці, що відтворюють конкретні об’єкти дослідження.

*Головна діагональ* квадратної матриці – числа, що знаходяться на діагоналі від верхнього лівого до правого нижнього кута, інша діагональ називається *побічною*. Головна діагональ розділяє квадратну матрицю на дві *трикутні* матриці – верхню й нижню, де одна з них містить числа, інша – нулі.

*Одинична матриця* – квадратна матриця, у якій на головній діагоналі стоять одиниці, а на усіх інших місцях – нулі, позначається символом  $E$ :

	3	5	6	0		3	5	6		3	5	6		1	0	0
$A =$	1	-7	0	2	$A =$	1	-7	0	$A =$	0	-7	0	$E =$	0	1	0
	0	3	4	9		0	3	4		0	0	4		0	0	1

Прямокутна, квадратна, трикутна й одинична матриці

*Віртуальна* (невидима) матриця – умовна назва матриці, значення якої існують, зберігаються в пам’яті ПК й використовуються в обчисленнях, хоча самої її не видно в табличному документі.

Дві чи більше матриць *однакові* між собою, якщо вони мають однакову форму і розмір.

Дві однакові матриці *рівні* між собою, якщо їх елементи, що знаходяться на однакових місцях, рівні одне одному.

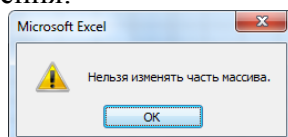
Excel дозволяє представити пласку матрицю, що використовується чи обчислюється, як монолітний блок клітинок (далі – *блок*), з яким можна здійснювати арифметичні операції й обчислювати математичні функції як з одним числом (скаляром).

Утворення блоку:

- виділити діапазон для його розміщення,
- увести формулу для обчислення його значень й
- натиснути комбінацію трьох клавіш **Shift** + **Ctrl** + **Enter**,

при цьому:

- формула буде єдиною для клітинок усього блоку – у рядку формул вона автоматично охоплюється фігурними дужками,
- окремі елементи блоку захищені від видалення чи редагування, при спробі це зробити виводиться повідомлення:



Видалити можна лише увесь блок.

Редагування формули блоку:

- виділити блок чи окрему його клітинку (в рядку формул видно табличну формулу),
- виправити формулу й
- натиснути комбінацію 3-ох клавіш.

«Висмикнути» з блоку значення окремого його елемента у певну клітинку можна за допомогою функції ИНДЕКС(блок; рядок; стовець).

Щоб формули були компактними й краще відповідали змісту задачі й її математичній моделі, рекомендується певним діапазнам (окремим клітинкам чи блокам) надавати змістовні імена:

- Excel 2003: *Вставка*→*Имя* →*Присвоить/Удалить*;
- Excel 2010: *Формулы*→*Присвоить имя; Диспетчер имен* →*Удалить*.

### Арифметичні операції з матрицями

Операнд – величина, над якою здійснюється операція.

Арифметичні операції: додавання (+), віднімання (-), ділення (/), множення (\*), піднесення до степені (^). Для зміни старшинства операцій застосовуються круглі дужки.

#### Приклад.

Операндами є матриці:  $A$ ,  $B$  й скаляр (константа)  $k$ , результатами будуть відповідні однакові матриці:  $=k*A$ ;  $=A+B$ ;  $=A-B$ ;  $=A/B$ ;  $=A*B$ ;  $=A^k$ .

Після надання змістовних імен діапазнам  $A$ ,  $B$  й  $k$  зі значеннями початкових даних матричні формули майже співпадають з математичними формулами:

A=	2	3	kA=	4	6	A-B=	0	0	A^k=	4	9	A=	2	3	kA=	=k*A	=k*A	A-B=	=A-B	=A-B	A^k=	=A^k	=A^k
	1	3		2	6		-5	0		1	9		1	3		=k*A	=k*A		=A-B	=A-B		=A^k	=A^k
B=	2	3	AB=	4	9	A/B=	1,0	1,0				B=	2	3	AB=	=A*B	=A*B	A/B=	=A/B	=A/B			
	6	3		6	9		0,2	1,0					6	3		=A*B	=A*B		=A/B	=A/B			
k=	2											k=	2										

Отримані матриці-результати надалі можуть виступати початковими даними для інших обчислень.

### Операції «скаляр-матриця»

Операція  $kA$ , де:  $k$  – скаляр (константа),  $A$  – матриця,  $kA=Ak$

#### Порядок роботи

- 1) Увести початкові дані:  $k$  (B1),  $A$  (E1:H3)
- 2) Обчислити матрицю  $kA$

Спосіб 1 (поелементний): у клітинці K1 блоку K1:N3 перемножити число  $k$  (абсолютна адреса) на елемент  $a_{11}$  (E1), автозаповненням формулу протягнути по блоку (K1:N3)

Спосіб 2 (блочний): виділити блок Q1:T3, у рядку формул набрати формулу B1\*E1:H3 й натиснути комбінацію трьох клавіш Shift + Ctrl + Enter

Спосіб 3 (блочний, іменований): надати матриці ім'я  $A$ , константі –  $k$ , виділити діапазон W1:Z3, у рядку формул набрати формулу  $=k*A$  й натиснути комбінацію трьох клавіш Shift + Ctrl + Enter:

k=	3			3	5	6	0			9	15	18	0			9	15	18	0			9	15	18	0	
		A=		1	-7	0	2	kA=		3	-21	0	6	kA=		3	-21	0	6	kA=		3	-21	0	6	
				0	3	4	9			0	9	12	27			0	9	12	27			0	9	12	27	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	C	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	k=3			3	5	6	0				=B\$1*E1	=B\$1*F1	=B\$1*G1	=B\$1*H1			=B1*E1:H3	=B1*E1:H3	=B1*E1:H3	=B1*E1:H3			=k*A	=k*A	=k*A	=k*A
2		A=		1	-7	0	2	kA=			=B\$1*E2	=B\$1*F2	=B\$1*G2	=B\$1*H2	kA=		=B1*E1:H3	=B1*E1:H3	=B1*E1:H3	=B1*E1:H3	kA=		=k*A	=k*A	=k*A	=k*A
3				0	3	4	9				=B\$1*E3	=B\$1*F3	=B\$1*G3	=B\$1*H3			=B1*E1:H3	=B1*E1:H3	=B1*E1:H3	=B1*E1:H3			=k*A	=k*A	=k*A	=k*A

Аналогічно виконуються операції:  $A+k$ ,  $A-k$ ,  $A/k$ ,  $A^k$ .

### Операції «матриця-матриця»

Операція  $C = A + B$ , де:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – однакові матриці.

#### Порядок роботи

- 1) Увести початкові дані:  $A$ ,  $B$
- 2) Обчислити матрицю  $C = A + B$

Спосіб 1: у клітинці N1 скласти елементи  $a_{11}$  (B1) та  $b_{11}$  (H1), формулу протягнути по усій матриці (N1:Q3)

Спосіб 2: виділити діапазон T1:W3, у рядку формул набрати формулу =B1:E3+H1:K3 й натиснути комбінацію трьох клавіш Shift + Ctrl + Enter

Спосіб 3: надати матрицям імена A та B, виділити діапазон Z1:AC3, у рядку формул набрати формулу =A+B й натиснути комбінацію трьох клавіш Shift + Ctrl + Enter:

A=	3	5	6	0	B=	1	5	2	0	C=	4	10	8	0	C=	4	10	8	0	C=	4	10	8	0
	1	-7	0	2		2	0	5	7		3	-7	5	9		3	-7	5	9		3	-7	5	9
	0	3	4	9		3	3	4	9		3	6	8	18		3	6	8	18		3	6	8	18

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	
1	3	5	6	0				1	5	2	0			=B1+H1	=C1+H1	=D1+J1	=E1+K1		=B1.E3+H1.K3	=B1.E3+H1.K3	=B1.E3+H1.K3	=B1.E3+H1.K3				=A+B	=A+B	=A+B	=A+B	
2	A=	1	-7	0	2			B=	2	0	5	7		=B2+H2	=C2+H2	=D2+J2	=E2+K2		=B1.E3+H1.K3	=B1.E3+H1.K3	=B1.E3+H1.K3	=B1.E3+H1.K3				C=	=A+B	=A+B	=A+B	=A+B
3		0	3	4	9				3	3	4	9		=B3+H3	=C3+H3	=D3+J3	=E3+K3		=B1.E3+H1.K3	=B1.E3+H1.K3	=B1.E3+H1.K3	=B1.E3+H1.K3					=A+B	=A+B	=A+B	=A+B

Аналогічно виконуються операції:  $A-B$ ,  $A*B$ ,  $A/B$  (матриця  $B$  без нулів),  $A^B$ .

## Скалярні та матричні функції з матрицями

Розглядаються функції, що будуть використані у наступних главах.

### Функція СУММ

Задача (матрична): задана матриця  $A$ , обчислити суму значень матриці (англ. SUM).

Порядок роботи

- 1) Увести початкові дані: значення матриці  $A\{a_{ij}\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ , діапазон (B1:E3).
- 2) Діапазону (B1:E3) надати ім'я  $A$  (латиною чи кирилицею, має значення).

- 3) Обчислити число  $s = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}$ .

Спосіб 1: у клітинку B5 ввести формулу =сумм(B1:E3)

Спосіб 2: у клітинку B5 ввести формулу =сумм(A) й натиснути комбінацію трьох клавіш

A=	1	0	0	0
	0	1	0	2
	0	0	1	9

s =	14,0
s =	14,0

	A	B	C	D	E
1		1	0	0	0
2	A=	0	1	0	2
3		0	0	1	9
4					
5	s =	=СУММ(B1:E3)			
6					
7	s =	=СУММ(A)			

Аналогічно обчислюється сума значень вектора  $A = (a_1, \dots, a_n)$ .

### Функція СУММПРОИЗВ

Задача (векторна): задано два однакових вектори:  $A$  та  $B$ , обчислити суму парних добутків значень цих двох векторів (англ. SUMPRODUCT, рос. СУММА парных ПРОИЗВедений).

Порядок роботи

- 1) Увести початкові дані: значення векторів  $A\{a_i\}$ ,  $B\{b_i\}$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , діапазони (B1:H1), (B2:H2).
- 2) Діапазонам (B1:H1), (B2:H2) надати імена  $A$  та  $B$  (лат.).

- 3) Обчислити число  $s = \sum_{i=1}^7 a_i b_i$ .

Спосіб 1: у діапазоні B4:H4 обчислити вектор  $AB$ , його елементи – парні добутки двох векторів (операція  $A*B$ ), у клітинку K1 ввести формулу =сумм(B4:H4)

Спосіб 2: (вектор  $AB$  віртуальний):

- у клітинку K1 ввести формулу =суммпроизв(B1:H1;B2:H2) або
- у клітинку K2 ввести формулу =суммпроизв(A;B)



○ й натиснути комбінацію трьох клавіш Shift + Ctrl + Enter:

A =	3	1	1	2	0	9	0	s =	39
B =	2	3	3	0	1	3	4	s =	39
AB=	6	3	3	0	0	27	0	s =	39

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	A =	3	1	1	2	0	9	0	s =	=СУММПРОИЗВ(B1:H1;B2:H2)	
2	B =	2	3	3	0	1	3	4	s =	=СУММПРОИЗВ(A;B)	
3											
4	AB=	=B1*B2	=C1*C2	=D1*D2	=E1*E2	=F1*F2	=G1*G2	=H1*H2	s =	=СУММ(B4:H4)	

Аналогічно обчислюються суми добутоків для трьох й більше однакових векторів, двох та більше двох однакових матриць.

## Функція ИНДЕКС

Функція ИНДЕКС (INDEX) викликає у певну формулу елемент матриці, що знаходиться на перетині заданих рядка й стовпця, синтаксис: ИНДЕКС(Матриця; Рядок; Стовець).

Приклад:

Обчислити слід (*trace*) квадратної матриці (суму елементів головної діагоналі):

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \text{ Результат:}$$

	L	M	N	P	Q	R	S
1	Рядок	Стовпець	Елемент				
2	1	1	1		1	2	1
3	2	2	2	A=	3	1	1
4	3	3	3		1	2	3
5			5				
6			tr(A)				

## Функція ОКРУГЛ

Функція ОКРУГЛ округлює числа до заданої розрядності дробової частини числа, у фінансово-економічних розрахунках, зокрема, числові значення округлюють до 2-ох знаків після коми (копійки, центи).

Приклад.

	3	5	6	0		7	5	2,7	2		0,430	1,000	2,220	0,000
A =	1	-7	3	2	B =	2	2,2	5,2	7	A/B =	0,500	-3,180	0,580	0,290
	0	3	4	9,1		3	3	4	5		0,000	1,000	1,000	1,820

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		3	5	6	0			7	5	2,7	2		=ОКРУГЛ(A/B;2)	=ОКРУГЛ(A/B;2)	=ОКРУГЛ(A)	=ОКРУГЛ(A)
2	A =	1	-7	3	2	B =	2	2,2	5,2	7	A/B =		=ОКРУГЛ(A/B;2)	=ОКРУГЛ(A/B;2)	=ОКРУГЛ(A)	=ОКРУГЛ(A)
3		0	3	4	9,1		3	3	4	5			=ОКРУГЛ(A/B;2)	=ОКРУГЛ(A/B;2)	=ОКРУГЛ(A)	=ОКРУГЛ(A)

## Функція ТРАНСП

Транспонування (transpose) – зміна форми таблиці (матриці, вектора) на протилежну: рядків на стовпці й навпаки, із відповідним переміщенням. Ця функція застосовується до будь-якої таблиці – не має значення, якою вона є: числовою, текстовою чи змішаною. Зокрема,  $(A^T)^T = A$ .

Результат (блочний):  $A \rightarrow A^T$ , де  $A$  – задана таблиця,  $A^T$  – транспонована таблиця.

Правило транспонування таблиці:

- ввести (чи сформувати генеруванням) таблицю  $A$ ;

- виділити блок для таблиці  $A^T$  із врахуванням нових розмірів (для крупних матриць рекомендується попередня нумерація рядків та стовпців);
- в рядку формул набрати формулу **=трансп(A)**;
- натиснути комбінацію з трьох клавіш.

Приклад.

	Січ.	Лют.	Бер.	Квіт.	Трав.	Черв.	Лип.												
A =	3	1	1	2	0	9	0												
	Січ.	3																	
	Лют.	1																	
	Бер.	1																	
$A^T$ =	Квіт.	2																	
	Трав.	0																	
	Черв.	9																	
	Лип.	0																	


**Матричні функції**

Матричні функції (М-функції, М – перша буква слова matrix, інакше, функції для роботи з масивами) – складова апарату матричної алгебри, розрахованого на розв’язання матричних рівнянь. Ці функції реалізуються за спеціальними вимогами до форм матриць-операндів й правилами, в Excel таких функцій три, це: МУМНОЖ(A; B); МОБР(A), МОПРЕД(A).

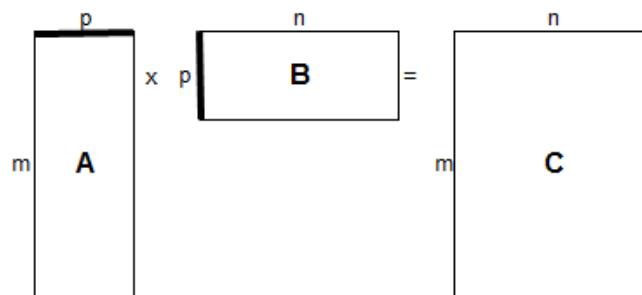
**Функція МУМНОЖ (Рос. Матричное УМНОЖение)**

При *матричному множенні* матриці  $A(m \times p)$  на матрицю  $B(p \times n)$  за допомогою функції **мумнож(A;B)** отримують добуток у вигляді матриці  $C(m \times n)$ , кожен елемент якої  $c_{ij}$  дорівнює сумі парних добутоків чисел  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпця з однаковими  $k$ -ми номерами стовпця й рядка, відповідно:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Вимоги до форми матриць A та B: ця функція визначена лише тоді, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B (а саме, p).

Мнемонічна схема:



Правило матричного множення матриць:

- ввести матрицю A;
- ввести матрицю B;
- виділити блок для матриці C;
- в рядку формул набрати формулу **=мумнож(A; B)**, матриці A та B задати діапазонами чи іменами;
- натиснути комбінацію з трьох клавіш

Приклад 1. Задано два однакових вектори:  $A(7)$  та  $B(7)$ , обчислити:  $AB^T(1)$ ,  $BA^T(1)$ ,  $B^T A(7,7)$  та  $A^T B(7,7)$ .

A=	6	8	-4	3	0	2	1
B=	3	1	1	2	3	2	6

Діапазонам надані імена: A, B<sup>T</sup>.

Результат.

M5	fx {=МУМНОЖ(A;B <sup>T</sup> )}														
5	A=	6	8	-4	3	0	2	1					3	AB <sup>T</sup> =	38,0
6													1		
7													1		
8													2		
9													3		
10													2		
11													6		

Вектор AB<sup>T</sup>

M22	fx {=МУМНОЖ(B22:H22;J22:J28)}														
22	B=	3	1	1	2	3	2	6					6	BA <sup>T</sup> =	38,0
23													8		
24													-4		
25													3		
26													0		
27													2		
28													1		

Вектор BA<sup>T</sup>

C14	fx {=МУМНОЖ(B14:B20;C13:I13)}											
12	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J		
13			A									
14		B <sup>T</sup> A	6	8	-4	3	0	2	1			
15			3	18	24	-12	9	0	6	3		
16			1	6	8	-4	3	0	2	1		
17		B <sup>T</sup> =	1	6	8	-4	3	0	2	1		
18			2	12	16	-8	6	0	4	2		
19			3	18	24	-12	9	0	6	3		
20			2	12	16	-8	6	0	4	2		
			6	36	48	-24	18	0	12	6		

Матриця B<sup>T</sup>A

C32	fx {=МУМНОЖ(B32:B38;C31:I31)}											
30	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J		
31			B									
32		A <sup>T</sup> B	3	1	1	2	3	2	6			
33			6	18	6	6	12	18	12	36		
34			8	24	8	8	16	24	16	48		
35		A <sup>T</sup> =	-4	-12	-4	-4	-8	-12	-8	-24		
36			3	9	3	3	6	9	6	18		
37			0	0	0	0	0	0	0	0		
38			2	6	2	2	4	6	4	12		
			1	3	1	1	2	3	2	6		

Матриця A<sup>T</sup>B

Висновок: МУМНОЖ(A;B<sup>T</sup>) = СУММПРОИЗВ(A;B),

AB<sup>T</sup> = BA<sup>T</sup> (скаляр), A<sup>T</sup>B = (B<sup>T</sup>A)<sup>T</sup> (квадратна матриця).

Приклад 2. Задано дві однакові прямокутні матриці: A(3,4) та B(3,4), обчислити квадратну матрицю AB<sup>T</sup>(3,3).

Імена: A, B<sup>T</sup>.

Результат:

A=	3	5	6	0														
	1	-7	3	2														
	0	3	4	9,1														
					7	2	3				62	48,2	48					
					5	2,2	3				-16	16,2	4					
					2,7	5,2	4				44	91,1	70,5					
					2	7	5											
B=	7	5	2,7	2														
	2	2,2	5,2	7														
	3	3	4	5														

Приклад 3. Задано дві квадратні матриці: A(4,4) та B(4,4), обчислити квадратні матриці AB(4,4) та BA(4,4).

Результат:

A=	4	5	1	2														
	1	3	3	1														
	4	-9	-7	0														
	0	3	7	8														
											46	27	10	-11				
											35	33	34	3				
											-24	-51	-110	-55				
											80	87	96	17				
B=	8	3	-5	-7														
	0	0	3	3														
	8	9	9	0														
	3	3	3	1														
											15	73	3	-37				
											12	-18	0	24				
											77	-14	-28	25				
											27	0	-2	17				

Висновок: AB ≠ BA.

Приклад 4. Задано квадратну матрицю A(4,4) та одиничну матрицю E(4,4), обчислити квадратні матриці: AE(4,4) та EA(4,4).

Результат:

A=	4	5	1	2	AE=	4	5	1	2
	1	3	3	1		1	3	3	1
	4	-9	-7	0		4	-9	-7	0
	0	3	7	8		0	3	7	8
E=	1	0	0	0	EA=	4	5	1	2
	0	1	0	0		1	3	3	1
	0	0	1	0		4	-9	-7	0
	0	0	0	1		0	3	7	8

Висновок:  $AE = EA = A$ .

### Функція МОБР (Рос. Матрица ОБРАТная)

Квадратна матриця  $A$  має обернену матрицю  $A^{-1}$  й якщо вона існує, тоді  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ .

Правило обчислення оберненої матриці:

- ввести (чи сформувати) матрицю  $A$ ;
- виділити блок для матриці  $A^{-1}$ ;
- в рядку формул набрати формулу **=мобр(A)**;
- натиснути комбінацію з трьох клавіш.

Приклад 1. Задано квадратну матрицю  $A$ , обчислити квадратну матрицю  $A^{-1}$ .

Результат:

АН1		fx {=МОБР(AB1:AE4)}											
	AA	AB	AC	AD	AE	A	AG	AH	AI	AJ	AK		
1	A=	4	5	1	2	A <sup>-1</sup> =	0,01	0,44	0,132	-0,06			
2		1	3	3	1		0,19	-0,3	-0,11	-0,01			
3		4	-9	-7	0		-0,2	0,63	0,075	-0,02			
4		0	3	7	8		0,13	-0,4	-0,02	0,147			

Приклад 2. Задано квадратну матрицю  $A$ , обчислити одиничну матрицю  $E$  такого ж розміру за формулою:  $E = AA^{-1}$ . Умова: матриця  $A^{-1}$  – віртуальна.

Результат.

АН1		fx {=МУМНОЖ(AB1:AE4;МОБР(AB1:AE4))}											
	AA	AB	AC	AD	AE	A	AG	AH	AI	AJ	AK		
1	A=	4	5	1	2	E=	1	0	0	0			
2		1	3	3	1		0	1	0	0			
3		4	-9	-7	0		0	0	1	0			
4		0	3	7	8		0	0	0	1			

Висновок:  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$  (спосіб формування одиничної матриці за заданою матрицею  $A$ ).

### Функція МОПРЕД (Рос. Матрицы ОПРЕДЕлитель)

Кожній квадратній матриці співставляється спеціальне число, яке називається *визначником* (детермінантом, рос. *определителем*) матриці і позначається  $\det A$ ,  $\Delta(A)$  або  $|A|$ .

Це число використовується для:

- визначення існування розв'язку СЛАР та
- розв'язання цієї системи (за правилом Крамера).

Правило обчислення визначника квадратної матриці:

- ввести матрицю  $A$ ;
- визначити блок-клітинку для майбутнього скалярного результату;
- в рядку формул набрати формулу **=мопред(A)**;
- натиснути комбінацію з трьох клавіш.

### Приклад.

АН2		fx {=МОПРЕД(AB1:AE4)}							
	AA	AB	AC	AD	AE	A	AG	АН	
1	A=	4	5	1	2				
2		1	3	3	1	Δ =	668,0		
3		4	-9	-7	0				
4		0	3	7	8				

**Зауваження:** якщо  $\det A \neq 0$ , матрицю  $A$  називають невинродженою, для неї існує обернена матриця  $A^{-1}$  й, відповідно, можна розв'язати СЛАР з квадратною матрицею коефіцієнтів  $A$ . Тож обчислення визначника матриці коефіцієнтів СЛАР передусе розв'язанню цієї системи.

Розглянуті табличні операції, табличні та матричні функції застосовуються для розв'язання матричних рівнянь. При цьому певні обчислені матриці є віртуальними, завдяки чому табличний документ має лаконічний вигляд, якщо застосовуються матриці крупних розмірів.

### Лінійне рівняння



Праx Диофанта гробница покоит; дивись ей и камень  
 Мудрым искусством его скажет усопшего век.  
 Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком.  
 И половину шестой встретил с пушком на щеках.  
 Только минула седьмая, с подругой он обручился.  
 С нею, пять лет проведя, сына дождался мудрец;  
 Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.  
 Отнят он был у отца ранней могилой своей.  
 Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,  
 Тут и увидел предел жизни печальной своей.

(Пер. С. Н. Боброва)

Завдання на повторення (алгебра 7 класу школи): з тексту епітафії записати й розв'язати алгебраїчне рівняння, щоб обчислити вік давньогрецького алгебраїста Діофанта Олександрійського<sup>8</sup>.

Канонічна форма лінійного рівняння:  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$  де:

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор шуканих невідомих  $x_i$ ,

$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  – заданий вектор коефіцієнтів  $a_i$ ,

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$  – ліва частина (ЛЧ) рівняння,

$b$  – права частина (ПЧ) рівняння,

$i = 1, \dots, n$ .

Лінійне рівняння з однією невідомою змінною ( $x$ )  $ax = b$  при  $a, b \neq 0$  має єдиний розв'язок:

$x = \frac{b}{a}$ , на графіку – це точка на осі  $x$  з координатою  $(b/a)$ .

Лінійне рівняння з двома невідомими змінними ( $x_1, x_2$ )  $a_1x_1 + a_2x_2 = b$  після простих перетворень можна представити у формі лінійної функції  $y = f(x)$ , а саме:  $y = cx + d$ , де  $y = x_2$ ,

$c = -\frac{a_1}{a_2}, d = \frac{b}{a_2}$ , безліч її розв'язків на графіку утворює нескінченну пряму лінію на площині  $x_1Ox_2$ .

<sup>8</sup> відповідь:  $x = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + 5 + \frac{1}{2} + 4$

Лінійне рівняння з  $n$  невідомими змінними  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  у матричній формі:  $AX = b$ , обчислення лівої частини  $(AX)$  рівняння здійснюється двома способами:

- за допомогою функції СУММПРОИЗВ
- або за допомогою функцій МУМНОЖ та ТРАНСП:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	A=	4	6	0	-9	AX =		2	
3									
4	X=	2	5	1	4	AX =		2	

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	A=	4	6	0	-9	AX =	=СУММПРОИЗВ(B2:E2;B4:E4)		
3									
4	X=	2	5	1	4	AX =	=МУМНОЖ(B2:E2;ТРАНСП(B4:E4))		

### Задача 1.1. Побудова графіка лінійного рівняння з двома невідомими

Завдання: на площині  $x_1Ox_2$  побудувати графік лінійного рівняння  $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ .

Якщо  $x_1$  визначити аргументом, тоді рівняння перетворюємо у функцію  $x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}$  чи

функцію  $y = cx + d$  (із застосуванням технології наукової графіки), після чого формуємо функцію у табличній формі й будуємо точкову діаграму.

#### Приклад.

Задано рівняння  $-9x_1 + 0,2x_2 = 34$ , тобто,  $a_1 = -9$ ,  $a_2 = 0,2$ ,  $b = 34$ .

Порядок роботи (у форматі послідовної побудови табличного документа):

задати значення  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b$  та кількість проміжків  $n$  на осі  $x$

	A	B	C
1	Графік лінійного рівняння		
2	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	b
3	-9	0,2	34
4	n =	25	

обчислити коефіцієнти функції  $y = cx + d$ :  $c = -\frac{a_1}{a_2}$ ,  $d = \frac{b}{a_2}$

6	c =	45,00	
7	d =	170,00	

обчислити координати крайніх точок:

$$x_1 = \frac{b}{a_1} \text{ при } x_2 = 0; x_2 = \frac{b}{a_2} \text{ при } x_1 = 0:$$

	b/a <sub>1</sub>	b/a <sub>2</sub>	
9			
10	-3,78	170,0	

обчислити границі (ліву, праву) зміни графіка функції:

$$x_1 = \min(x_1; x_2); x_p = \max(x_1; x_2)$$

12	x <sub>1</sub> =	-3,8	
13	x <sub>p</sub> =	170,00	

розрахувати крок  $h_x = \frac{x_p - x_1}{n}$

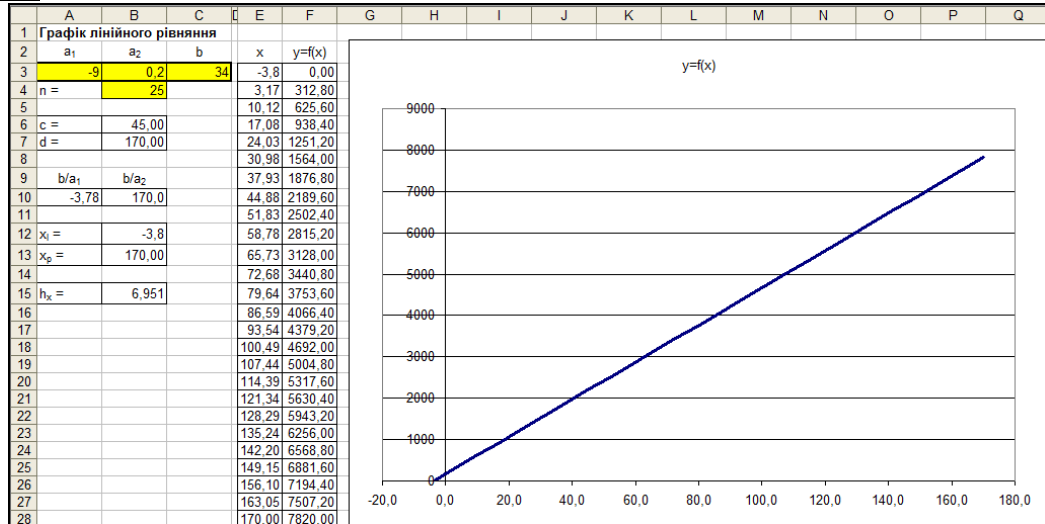
15	h <sub>x</sub> =	6,951	
----	------------------	-------	--

табулюванням сформувати таблицю зі значеннями двох координат:  $x$  та  $y = f(x)$ :

- перше значення  $x_1$  увести посиланням на клітинку B10
- наступне значення обчислити за формулою =E3+\$B\$15
- цю формулу протягнути по стовпцю для отримання значення  $x_p$
- увести формулу функції для першого значення  $x_1$  і протягнути по стовпцю

побудувати графік функції  $x_2 = cx_1 + d$ ,  $c = -\frac{a_1}{a_2}$ ,  $d = \frac{b}{a_2}$  у вигляді діаграми *Точечная*

## Результат



Побудований табличний документ дозволяє отримати графік лінійного рівняння уведенням довільних значень  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b$ .

## Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система  $m$  лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) із  $n$  невідомими  $x_1, x_2, \dots, x_n$  має вигляд:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

де:

- коефіцієнти  $a_{ij}$  при невідомих  $x_1, x_2, \dots, x_n$  утворюють прямокутну матрицю  $A = \{a_{ij}\}$  розміром  $m \times n$ ,
- числа  $b_i$  – утворюють вектор-стовпець вільних членів  $B = \{b_i\}$  з  $m$  елементів,  $i = 1, \dots, m$ ,
- змінні  $x_j$  – утворюють вектор-рядок невідомих  $X = \{x_j\}$  з  $n$  елементів,  $j = 1, \dots, n$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$$

Структура даних:

a <sub>11</sub>	a <sub>12</sub>	...	a <sub>1n</sub>	b <sub>1</sub>
a <sub>21</sub>	a <sub>22</sub>	...	a <sub>2n</sub>	b <sub>2</sub>
...	...	...	...	...
a <sub>m1</sub>	a <sub>m2</sub>	...	a <sub>mn</sub>	b <sub>m</sub>
x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	...	x <sub>n</sub>	

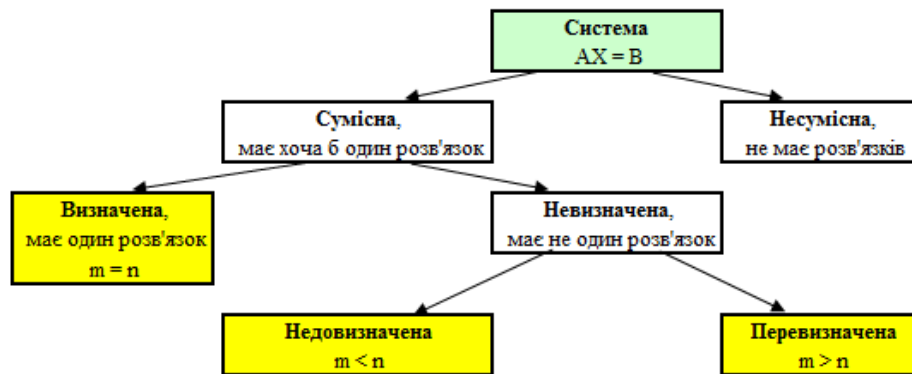
Матричний апарат дозволяє представити СЛАР у лаконічній матричній формі:  $AX = B$ , де:

$AX$  – ліва частина (ЛЧ, left-hand side, LHS) системи

$B$  – права частина (ПЧ, right-hand side, RHS) системи

й розв'язувати систему, користуючись вбудованими в Excel матричними операціями та функціями.

В залежності від співвідношення значень  $m$  та  $n$  існують такі системи лінійних алгебраїчних рівнянь:



Розв'язання системи рівнянь – специфічний варіант задачі оптимізації, де треба знайти такі значення шуканих невідомих ( $X$ ), щоб ЦФ у формі  $AX - B = 0$  без обмежень/з обмеженнями на значення  $X$ .

Це означає, що розв'язання систем рівнянь (лінійних, нелінійних) – складова чисельних методів оптимізації, вбудованих в програму-оптимізатор *Поиск решения* (Excel Solver).

### Розв'язання визначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Визначена СЛАР має однакову кількість рівнянь й невідомих ( $m = n$ ), й, відповідно, квадратну матрицю коефіцієнтів ( $A$ ). Розв'язок визначеної СЛАР – це шукана упорядкована сукупність чисел  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , підстановка цих чисел замість відповідних шуканих невідомих  $x_1, x_2, \dots, x_n$  перетворює кожне з рівнянь системи у тотожність.

Визначена система може мати:

- один розв'язок,
- ані одного розв'язку,
- безліч розв'язків.

Наочною ілюстрацією цих випадків є графічний метод розв'язання СЛАР 2-го порядку.

### Задача 1.2. Розв'язати СЛАР графічним методом

При  $m = n = 2$  маємо систему двох лінійних рівнянь:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

з двома невідомими  $x_1$  та  $x_2$ , наближені значення яких у наочній формі можна знайти шляхом побудови графіків двох лінійних функцій, утворених з цих рівнянь, на площині  $x_1Ox_2$  (задача 1.1.).

#### Приклад 1.

Задана система:

$$-9x_1 + 6x_2 = 34$$

$$4x_1 + 5x_2 = 9,$$

$$n = 25.$$

Порядок роботи:

задати значення коефіцієнтів  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$  та кількість проміжків  $n$  на осі  $x$

обчислити координати крайніх лівих точок змінної  $x_1$ :

$$x_{11} = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad x_{12} = \frac{b_2}{a_{21}} :$$

	A	B	C	D
1	Система 2-ох лінійних рівнянь			
2	$x_1$	$x_2$	$b$	
3	-9	6	34	
4	4	5	9	
5	$n =$	25		

7	$x_{11} =$	-3.78	
8	$x_{12} =$	2.25	



обчислити область визначення функції, тобто, границі (ліву, праву) значення аргументу  $x_1$ :  $x_l = \min(x_{11}; x_{12})$ ;  $x_p = \max(x_{11}; x_{12})$  й

10	$x_l =$	-3,78		
11	$x_p =$	2,25		
12				
13	$h_x =$	0,24		

розрахувати крок  $h_x = \frac{x_p - x_l}{n}$

обчислити коефіцієнти функцій  $y_1 = c_1x_1 + d_1$  та  $y_2 = c_2x_1 + d_2$ , де:

$$c_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}, d_1 = \frac{b_1}{a_{12}}, c_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}, d_2 = \frac{b_2}{a_{22}}$$

16	$c_1 =$	1,5		
17	$d_1 =$	5,7		
18	$c_2 =$	-0,8		
19	$d_2 =$	1,8		

сформувати таблицю з 3-ох стовпців зі значеннями координат: аргументу  $x_1$  та двох лінійних функцій

$x_2 = f_1(x_1), x_2 = f_2(x_1)$ :

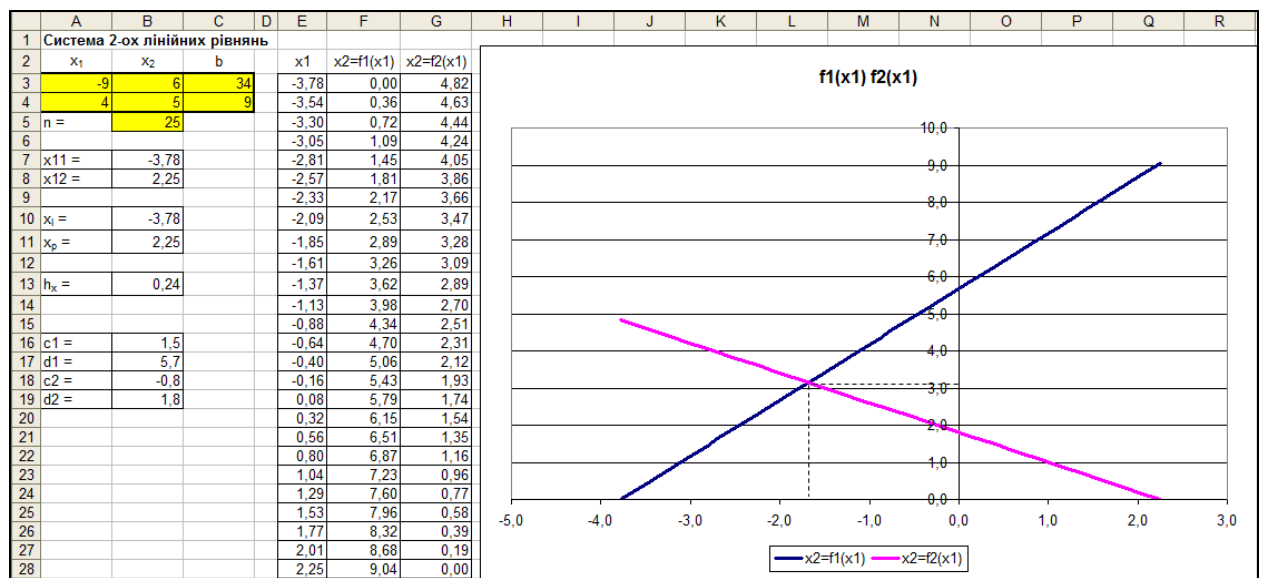
○ перше значення  $x_1$  увести посиланням на клітинку B10 (значення  $x_l$ ); наступне значення  $x_1$  обчислити за формулою  $=E3+\$B\$13$  й цю формулу протягнути по стовпцю  $x_1$  до отримання крайнього значення  $x_p$

○ увести формулу функції  $y_1 = c_1x_1 + d_1$  для першого значення  $x_1$  і протягнути по стовпцю

увести формулу функції  $y_2 = c_2x_1 + d_2$  для першого значення  $x_1$  і протягнути по стовпцю

побудувати графіки двох функцій  $x_2 = c_1x_1 + d_1, x_2 = c_2x_1 + d_2$ , у вигляді діаграми *Точечная*

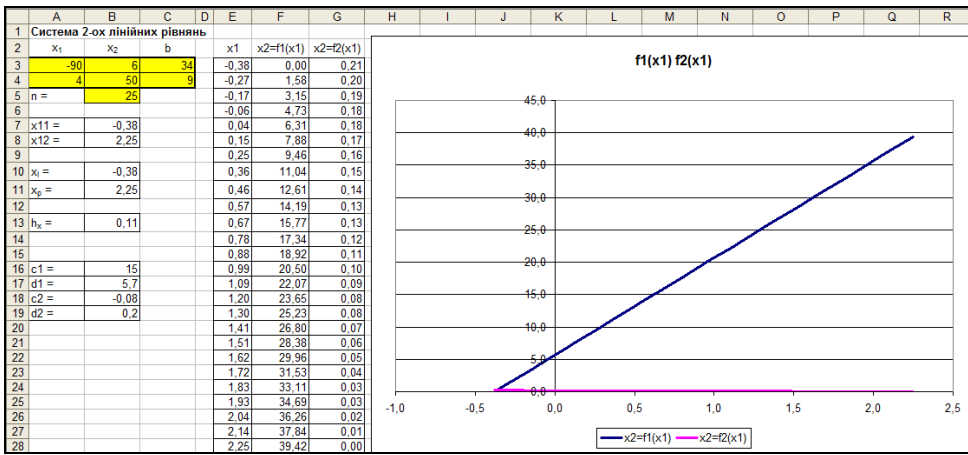
**Результат:**



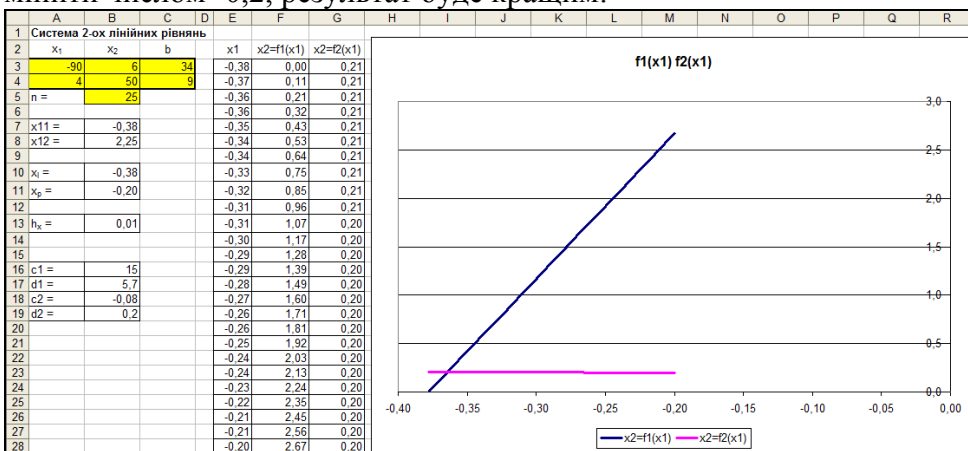
Наближений розв'язок:  $X = (-1,6; 3,1)$ .

Тепер при зміні початкових даних ( $a_{11}, a_{12}, b_1, a_{21}, a_{22}, b_2$ ) автоматично формується новий графічний розв'язок СЛАР з невідомими ( $x_1, x_2$ ).

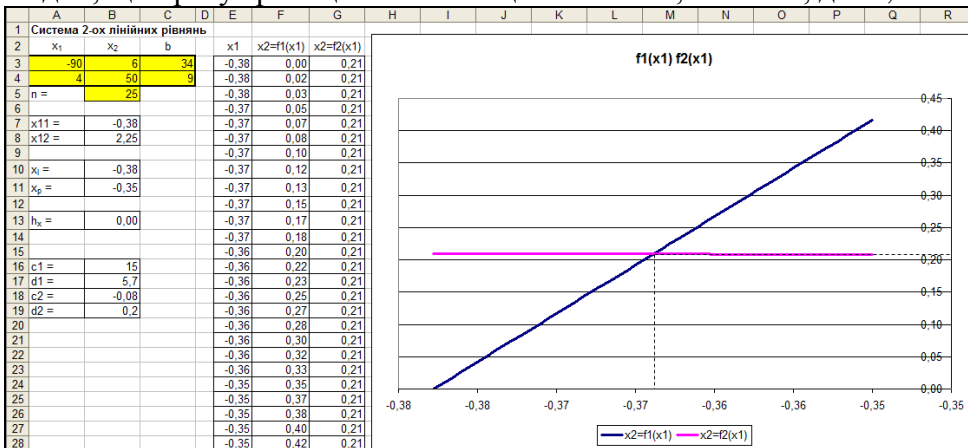
**Зауваження.** При певних наборах значень коефіцієнтів системи наочність графіка може стати невисокою й результат на ньому важко визначити:



У таких випадках рекомендується вручну змінити певну границю аргументу  $x_1$ , ліву чи праву. У цьому прикладі видно, що права границя діапазону, де знаходиться шуканий корінь, не перевищує  $-0,2$ , відповідно, у клітинці B11 обчислене значення  $x_p = 2,25$  треба замінити числом  $-0,2$ , результат буде кращим:



Видно, що праву границю можна б ще зменшити, скажімо, до  $-0,35$ :



і тепер вже можна точніше визначити наближений розв'язок системи:  $x_1 \approx 0,367$ ,  $x_2 \approx 0,21$ .

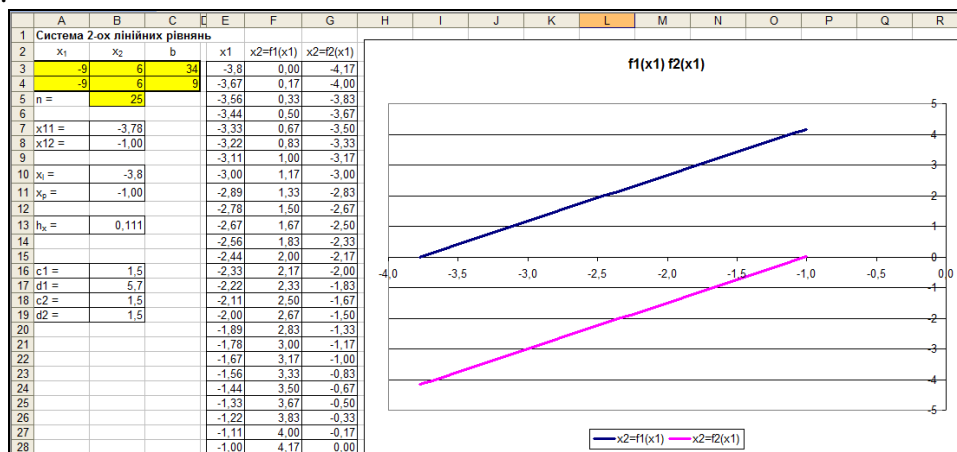
### Приклад 2.

Задана система:

$$-9x_1 + 6x_2 = 34$$

$$-9x_1 + 6x_2 = 9.$$

Результат:



Однакові коефіцієнти рівнянь формують дві паралельні лінії, система не має розв'язків.

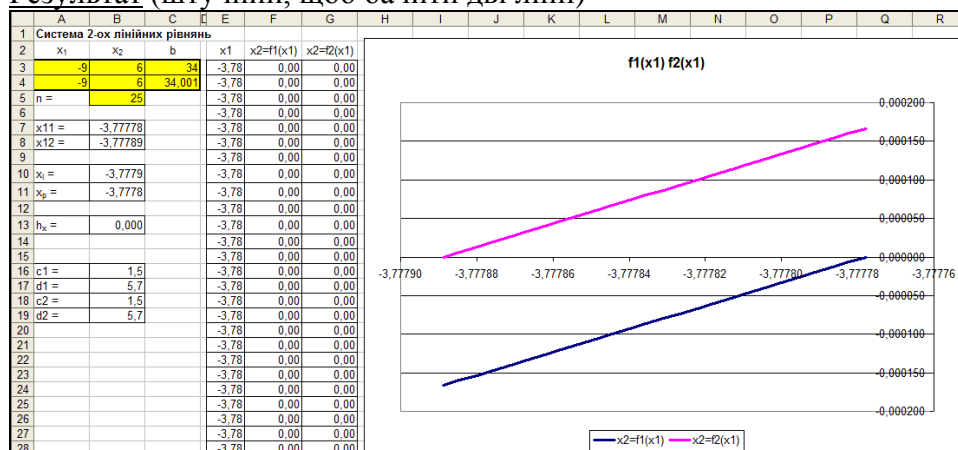
### Приклад 3

Задана система (праві частини трохи відрізняються, щоб побачити, що лінії практично співпадають):

$$-9x_1 + 6x_2 = 34$$

$$-9x_1 + 6x_2 = 34,001$$

Результат (штучний, щоб бачити дві лінії)



Система має безліч розв'язків, їх значення утворюють точки однієї лінії.

Таким чином, графічний метод, розрахований на наочне розв'язання СЛАР 2-го порядку, застосовується в ілюстративних цілях.

Реальні системи розв'язуються за допомогою:

- надбудови *Поиск решения* (до 100-го порядку) та
- матричними методами (розмір обмежується числом стовпців електронної таблиці, в Excel 2003 їх 256, в Excel 2007/2010 – біля 30000).

### Розв'язання визначеної СЛАР матричними методами

Задана визначена система  $AX = B$ , знайти  $X$ .

Початкові дані: квадратна матриця  $A$  та вектор-стовпець  $B$  (ПЧ системи).

Оскільки матриця  $A$  квадратна, шуканий вектор  $X$  може бути стовпцем чи рядком, варіанти:

а)  $X = A^{-1}B$ , якщо  $X$  – вектор-стовпець

б)  $X = (A^{-1}B)^T$ , якщо  $X$  – вектор-рядок.

Матричні методи використовують функції: МОБР, МОПРЕД, МУМНОЖ та ТРАНСП.

### Задача 1.3. Розв'язати визначену СЛАР методом Крамера<sup>9</sup>

Метод був розроблений ще до винаходу оберненої матриці й використовує лише процедуру обчислення визначника квадратної матриці:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \dots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

тобто, для розв'язання СЛАР  $n$ -го порядку треба обчислити  $n+1$  визначник.

Обчислення визначника матриці високого порядку – досить громіздка обчислювальна процедура, в Excel вона реалізована вбудованою функцією МОПРЕД.

#### Порядок роботи

- 1) Увести початкові дані: квадратну матрицю  $A$   $n$ -го порядку та вектор-стовпець  $B$
  - 2) Копіюванням сформувати  $n$  копій матриці  $A$ , виправити імена матриць ( $A1, A2, \dots$ )
  - 3) Виділити значення стовпця  $B$ , скопіювати й послідовно замінити їм стовпці матриць-копій для утворення частинних матриць
  - 4) Увести заголовок ( $\Delta =$ ) і обчислити визначник матриці  $A$ , скопіювати заголовок і формулу й в аналогічних позиціях вставити для частинних матриць – формули повинні правильно змінитися (перевірити), виправити імена визначників ( $\Delta1=, \Delta2=, \dots$ )
  - 5) Для першої частинної матриці увести заголовок ( $x1 =$ ) і формулу ( $=\Delta1/\Delta$ ) обчислення невідомої  $x_1$ , скопіювати заголовок і формулу й в аналогічних позиціях вставити для частинних матриць – формули повинні правильно змінитися (перевірити), виправити імена змінних ( $x1=, x2=, \dots$ ).
- Зв'язуванням сформувати рядок  $X$ ).

#### Приклад

Розв'язати СЛАР 6-го порядку.

#### Порядок роботи

- 1) Увести початкові дані:

СЛАР (метод Крамера)							
							B
A =	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	10,02
	-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42	29,36
	-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99	-20,37
	-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18	-33,40
	-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12	38,27
	-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71	12,16

- 2) Копіюванням сформувати 6 копій матриці  $A$

<sup>9</sup> Габріель Крамер (1704-1752), швейцарський математик

СПАР (метод Крамера)																					
							В														
A =	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	10,02	A1 =	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	A2 =	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33
	-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42	29,36		-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42		-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42
	-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99	-20,37		-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99		-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99
	-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18	-33,40		-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18		-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18
	-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12	38,27		-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12		-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12
	-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71	12,16		-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71		-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71

### 3) Формування частинних матриць

СПАР (метод Крамера)																					
							В														
A =	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	10,02	A1 =	10,02	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	A2 =	-7,30	10,02	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33
	-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42	29,36		29,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42		-9,36	29,36	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42
	-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99	-20,37		-20,37	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99		-2,23	-20,37	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99
	-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18	-33,40		-33,40	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18		-9,78	-33,40	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18
	-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12	38,27		38,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12		-1,27	38,27	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12
	-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71	12,16		12,16	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71		-0,73	12,16	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71

### 4) Обчислення визначників 7 матриць

СПАР (метод Крамера)																					
							В														
A =	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	10,02	A1 =	10,02	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	A2 =	-7,30	10,02	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33
	-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42	29,36		29,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42		-9,36	29,36	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42
	-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99	-20,37		-20,37	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99		-2,23	-20,37	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99
	-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18	-33,40		-33,40	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18		-9,78	-33,40	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18
	-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12	38,27		38,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12		-1,27	38,27	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12
	-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71	12,16		12,16	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71		-0,73	12,16	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71
$\Delta = 18675,3$								$\Delta_1 = 440451,9$									$\Delta_2 = -48042,0$				

### б) Обчислення значень невідомих: $x_1, x_2, \dots, x_6$ .

## Результат

СЛАР (метод Крамера)								В													
A =	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	10,02	A1 =	10,02	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	A2 =	-7,30	10,02	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33
	-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42	29,36		29,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42		-9,36	29,36	-5,91	-0,70	-8,52	-8,42
	-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99	-20,37		-20,37	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99		-2,23	-20,37	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99
	-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18	-33,40		-33,40	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18		-9,78	-33,40	-4,97	-6,40	-9,94	-4,18
	-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12	38,27		38,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12		-1,27	38,27	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12
	-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71	12,16		12,16	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71		-0,73	12,16	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71
$\Delta = 18675,3$								$\Delta_1 = 440451,9$								$\Delta_2 = -48042,0$					
								$x_1 = 23,58$								$x_2 = -2,57$					
X =	23,6	-2,6	-20,4	38,8	-47,9	31,8		A3 =	-7,30	-4,70	10,02	-2,26	-5,88	-5,33	A4 =	-7,30	-4,70	-7,12	10,02	-5,88	-5,33
							-9,36		-6,21	29,36	-0,70	-8,52	-8,42	-9,36		-6,21	-5,91	29,36	-8,52	-8,42	
							-2,23		-7,29	-20,37	-5,25	-3,86	-0,99	-2,23		-7,29	-3,12	-20,37	-3,86	-0,99	
							-9,78		-0,31	-33,40	-6,40	-9,94	-4,18	-9,78		-0,31	-4,97	-33,40	-9,94	-4,18	
							-1,27		-4,06	38,27	-9,89	-6,43	-2,12	-1,27		-4,06	-9,83	38,27	-6,43	-2,12	
							-0,73		-3,18	12,16	-5,62	-7,07	-6,71	-0,73		-3,18	-5,57	12,16	-7,07	-6,71	
							$\Delta_3 = -381759,0$								$\Delta_4 = 724550,5$						
							$x_3 = -20,44$								$x_4 = 38,80$						
							A5 =	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	10,02	-5,33	A6 =	-7,30	-4,70	-7,12	-2,26	-5,88	10,02	
								-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	29,36	-8,42		-9,36	-6,21	-5,91	-0,70	-8,52	29,36	
								-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-20,37	-0,99		-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-20,37	
								-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-33,40	-4,18		-9,78	-0,31	-4,97	-6,40	-9,94	-33,40	
								-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	38,27	-2,12		-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	38,27	
								-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	12,16	-6,71		-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	12,16	
							$\Delta_5 = -894218,9$								$\Delta_6 = 593249,5$						
							$x_5 = 47,88$								$x_6 = 31,77$						

Будь-які зміни значень початкових даних автоматично приведуть до зміни результату  $X = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ .

### Задача 1.4. Розв'язати визначену СЛАР методом із формуванням оберненої матриці

Метод застосовується, якщо необхідно отримати й використовувати обернену матрицю для аналізу, подальших обчислень й формування звітності.

#### Порядок роботи

1. Увести початкові дані: квадратну матрицю  $A$  та вектор-стовпець  $B$
2. Обчислити визначник системи  $\Delta = \det(A)$
3. Якщо  $\Delta \neq 0$ , обчислити обернену матрицю  $A^{-1}$

Виконати:

4. Множення матриці  $A^{-1}$  на вектор  $B$  й отримати шуканий вектор-стовпець  $X$  (варіант а)
5. Транспонування множення матриці  $A^{-1}$  на вектор  $B$  й отримати шуканий вектор-рядок  $X$  (варіант б).

#### Приклад

Розв'язати СЛАР 6-го порядку для заданих початкових даних (шуканий вектор  $X$  – стовпець й рядок):

A =							B
	-7,3	-4,7	-7,12	-2,26	-5,88	-5,33	10,02
	-9,36	-6,21	-5,91	-0,7	-8,52	-8,42	29,36
	-2,23	-7,29	-3,12	-5,25	-3,86	-0,99	-20,37
	-9,78	-0,31	-4,97	-6,4	-9,94	-4,18	-33,4
	-1,27	-4,06	-9,83	-9,89	-6,43	-2,12	38,27
	-0,73	-3,18	-5,57	-5,62	-7,07	-6,71	12,16

Результат: числовий, формули



	A	B	C	AO	AP	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	AJ	BA	BB	BC	BI	BE
1																				
2	A	1	2	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50		B	X			(AX)
3		-3.85	2.72	-0.47	3.41	-3.46	1.91	-1.95	-2.3	0.08	-4.74	-1.8	0.43	-2.37						
4		3.97	-3.01	-3.36	2.96	-1.97	-2.46	-4.08	3.66	3.79	-1.24	1.08	-3.46	-0.83						
5		-3.36	4.89	-0.25	-1.39	-4.18	0.71	0.45	2.52	-3.4	-2.84	-4.41	0.34	2.61						
6		4.74	0.15	-2.22	-1.04	-4.84	-2.24	-2.18	-3.39	-4.5	1.27	-3.29	1.39	1.66						
7		0.26	2.14	3.17	0.01	4.75	4.04	-4.08	1.89	0.3	3.34	0.97	-2.65	3.25						
8		-3.04	2.74	-4.31	-3.78	-2.21	-4.86	0.15	3.88	-4.83	-3.72	-0.96	-0.41	-0.36						
9		-2.08	3.63	-5	3.46	-0.99	2.96	-1.21	2.89	-1.33	-2.04	4.91	2.32	-1						
10		2.41	-1.04	-1.8	1.86	-2.45	0.32	-1.96	2.21	2.78	-4.48	-0.89	1.78	2.31						
11		-0.66	-0.17	4.81	-3.82	-1.43	-0.69	4.52	4.49	-1.24	-2.74	0.5	3.87	-3.55						
12		-0.63	2.62	2.27	1.73	-3.12	-1.92	3.12	-1.06	0.02	4.09	2.81	-0.27	-4.18						
13		-3.86	-4.84	-4.44	-4.24	-2.56	1.85	3.13	-1.89	2.65	2.59	-1.14	-2.69	3.64						
14		1.76	-3.89	-2.6	2.67	-4.86	2.76	-1.97	3.48	-3.96	3.89	4.39	-2.71	1.94						
15		0.32	3.42	2.16	-0.31	-0.98	0.85	2.64	1.62	-3.02	-2.6	3.76	-4.73	4.79						
16		-0.4	-4.72	1.27	4.6	3.61	-1.76	-4.77	-3.45	-2.9	2.83	2.28	-1.07	-2.49						
17		0.96	-1.89	3.7	3.12	2.92	-1.49	3.24	1.96	-0.96	2.64	3.82	3.93	-4.88						
18		3.67	-2.29	3.67	-1.26	1.83	-3.31	2.39	2.28	4.85	-1.92	0.46	3.16	-1.8						
19		4.36	3.74	0.57	0.42	1.24	4.69	2.2	4.81	3.01	1.88	-1.15	3.84	-3.66						
20		-4.13	4.12	2.37	-3.51	0.26	3.49	1.6	0.99	4.32	2.12	0.55	-3.85	4.77						
21		4.47	0.5	-0.1	2.47	1.27	-1.32	3.96	-1.03	-3.67	1.38	1.83	-1.63	0.17						
22		-3.93	-1	-1.61	2.4	2.58	-0.46	2.99	3.1	-0.63	-4.26	-0.5	-4.7	4.15						
23		0.95	-4.74	4.53	-3.96	1.04	-4.92	3.24	-4.47	4.87	3.15	1.81	-2.44	-2.38						
24		-0.06	3.08	4.9	4.68	1.31	1.85	-0.96	-2.94	-4.62	2.74	-3.49	-0.64	-1.05						
25		4.73	-2.87	-4.14	0.29	2.15	1.62	-4.46	3.67	-4.47	-0.82	-3.58	3.35	4.29						
26		-1.91	3.26	0.34	-1.86	-1.67	4.63	-2.81	-1.07	-3.02	-2.9	-3.25	-0.51	2.27						
27		1.22	3.79	-4.88	1.19	2.54	-0.65	1.99	0.68	0.52	-1.65	-1.97	-0.58	1.04						
28		0.25	4.58	-0.49	3.19	-0.8	0.55	1.61	0.12	2.78	3.14	0.06	-3.54	-1						
29		-3.52	4.97	2.85	2.54	-1.86	4.47	-1.53	-1.46	0.47	2.72	-1.8	4.37	4.36						
30		0.26	-3.6	3.17	-1.38	-3.63	4.38	-2.63	-0.35	1.84	-1.23	-1.73	1.72	-3.17						
31		-4.99	-4.78	4.65	4.48	-0.81	4.81	0.36	4.66	2.39	3.23	3.33	-4.27	-3.89						

### Задача 1.6. Розв'язати визначену СЛАР із використанням надбудови Поиск решения

Мета цього методу – перше ознайомлення з технікою користування програмою надбудовою Поиск решения. Головна функція програми – розв'язання лінійних та нелінійних задач оптимізації, розв'язання СЛАР є складовою процедури лінійної оптимізації.

Метод використовує матричні функції ТРАНСП та МУМНОЖ й надбудову Поиск решения.

Задана система  $AX = B$ , знайти вектор  $X$ .

Початкові дані: квадратна матриця  $A$  та вектор-стовпець  $B$ .

У системі  $AX = B$  вектор  $AX$  – ліва частина (ЛЧ), вектор  $B$  – права частина системи (ПЧ).

#### Позначення

$i$  – номер рядка,  $j$  – номер стовпця

$a_{ij}$  – елемент матриці  $A$  на перетині  $i$ -го рядка й  $j$ -го стовпця

$b_i$  –  $i$ -ий елемент вектора-стовпця  $B$

$x_j$  –  $j$ -ий елемент шуканого вектора-рядка  $X$ .

#### Задача оптимізації

I. Знайти вектор-рядок  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , такий, щоб

II. ЦФ  $V = \sum_{i=1}^n v_i = 0$ , де  $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i$  – відхилення ЛЧ ( $AX$ ) від ПЧ ( $B$ ),  $V$  – сума відхилень

III. за обмежень:  $AX = B$ .

#### Приклад

Розв'язати СЛАР 6-го порядку.

#### Порядок роботи:

- 1) Увести початкові дані: матрицю  $A$  та вектор-стовпець  $B$
- 2) Визначити форму шуканого вектора  $X$ : рядок, виділити для нього місце, увести заголовки, клітинки заповнити нулями
- 3) Обчислити ліву частину ( $AX$ ) системи за формулою =МУМНОЖ(A;X<sup>T</sup>)
- 4) Обчислити значення вектора  $V$  і знайти їх суму (ЦФ)
- 5) Виклик надбудови Поиск решения, заповнити поля вікна й знайти розв'язок системи.



## Результат 1

## Повідомлення про успішне розв'язання задачі

Значення відхилень на рівні машинних нулів.

Зауваження. Цю задачу можна розв'язати за скороченою формою – без ЦФ, яка у цій задачі, фактично, дублює систему обмежень:

## Задача оптимізації

- I. Знайти вектор-рядок  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- III. за обмежень:  $AX = B$ .

## Результат 2

## Методи для розв'язання визначеної СЛАР (огляд)

Метод, засіб	Достойнства, переваги	Недоліки, обмеження
графічний	Наочний, без використання матричних функцій, рекомендується для ілюстрації методу	Лише при $n = 2$
Крамера	Простий, одна функція МОПРЕД, рекомендується для задач невеликого розміру	Громіздкий
матричний, з явною оберненою	Потужний, формування й виведення	Вимагає місце для розмі-

матрицею	оберненої матриці, рекомендується для задач, де аналізується й застосовується обернена матриця	щення оберненої матриці
матричний, з віртуальною оберненою матрицею	Лаконічний результат, рекомендується для задач великого розміру	Дещо ускладнена формула
матричний, з використанням надбудови <i>Поиск решения</i> .	Робота з потужною програмою розв'язання лінійних та нелінійних систем рівнянь	Розмір системи обмежується числом шуканих невідомих (до 100 для базової версії розв'язувача)

## Система лінійних алгебраїчних нерівностей, формування й розв'язання недовизначеної СЛАР

У недовизначеній системі є  $m$  рівнянь й  $n$  невідомих ( $m < n$ ), відповідно, до визначеної системи «не вистачає» рівнянь, матриця коефіцієнтів має форму довгастої стрічки розміром  $m \times n$  – така система має безліч розв'язків.

У кожного з цих розв'язків визначають  $m$  **основних** та  $n - m$  **вільних** змінних, далі вільні змінні зануляють, чим наче «вирізають» з матриці коефіцієнтів квадратний шматок розміром  $m \times m$ , за ним формують визначену СЛАР й знаходять числові значення основних змінних.

Розв'язання недовизначеної СЛАР – основна й характерна властивість лінійного програмування, бо саме до недовизначеної системи лінійних рівнянь відповідними перетвореннями зводяться обмеження, задані системою лінійних алгебраїчних нерівностей.



Щоб зрозуміти методику цих перетворень, згадаймо старовинний інструмент – ваги, де, скажімо, на правій шальці (тарілці) розміщується незмінний предмет, що зважується, на лівій – змінні гири. Виходить, нерівність є математичною моделлю вагів, де, ПЧ нерівності – вага предмету, ЛЧ – вага гирь,  $ЛЧ < > = ПЧ$ .

Ваги врівноважуються комбінацією гирь на лівій шальці й нерівність перетворюється у рівність:

- додаванням/вилученням/заміною гирь на лівій шальці чи
- додаванням чисел з відповідним знаком у ЛЧ, ПЧ – константа.

### Приклад

Система нерівностей	Система рівнянь	Матриця коефіцієнтів СЛАР
$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10$	$3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10$	3 3 1 1 0 0
$x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq -9$	$x_1 + 5x_2 + 7x_3 - x_5 = -9$	1 5 7 0 -1 0
$9x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 11$	$9x_1 - x_2 + 2x_3 + x_6 = 11$	9 -1 2 0 0 1

Додаванням невідомих змінних (з відповідним знаком):  $x_4, x_5$  та  $x_6$  задана система нерівностей перетворена у недовизначену систему із матрицею коефіцієнтів розміром  $3 \times 6$ .

Для недовизначеної системи лінійних рівнянь існують: загальний, частинні й базисні розв'язки.

Щоб знайти *загальний* розв'язок, треба виразити основні  $m$  змінних через значення  $n - m$  вільних змінних, далі, вільним змінним надати довільні значення, після проміжних обчислень в результаті отримується визначена СЛАР з  $m$  рівнянь з  $m$  невідомими змінними, для якої відшукується *частинний* розв'язок.

Наприклад, недовизначена система має одне рівняння й дві невідомих ( $m = 1, n = 2$ ):

$2x_1 - 3x_2 = 7$ , її розв'язок  $X = (x_1, x_2)$ . Якщо вирішено, що  $x_1$  є основною змінною, а  $x_2$  – вільною, тоді *загальний розв'язок* системи має вигляд:  $x_1 = \frac{3}{2}x_2 + \frac{7}{2}$ . Якщо скажімо, вільна

змінна  $x_2 = 5$ , тоді  $x_1 = 11$  – це *частковий* розв'язок:  $X = (x_1, x_2) = (11; 5)$ , один із безлічі можливих.

Якщо ж вільній змінній  $x_2$  надати нульове значення, тоді  $X = (x_1, x_2) = (3,5; 0)$  – це *базисний* розв'язок, де основну змінну  $x_1$  називають базисною.

Доведено, що у недовизначеній системі з  $m$  рівнянь й  $n$  невідомих ( $m < n$ ) є

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  базисних розв'язків. Наприклад, для недовизначеної системи розміром  $3 \times 6$

можна побудувати  $C_6^3 = \frac{6!}{3!(3)!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$  визначених систем розміром  $3 \times 3$ , ось вони (но-

мери основних змінних – це базис, наприклад, базис 235 це:  $x_2, x_3, x_5$  – базисні змінні,  $x_1, x_4, x_6$  – вільні змінні з нульовими значеннями):

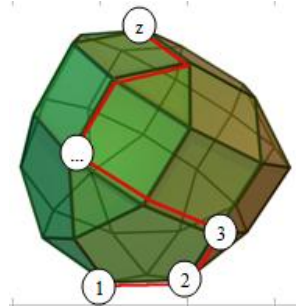
(123), (124), (125), (126), (134), (135), (136), (145), (146), (156),

(234), (235), (236), (245), (246), (256),

(345), (346), (356), (456).

Запам'ятаймо (при розв'язанні задач лінійного програмування): в результаті послідовного пошуку базисних розв'язків *серед  $n$  шуканих невідомих  $n - m$  значень завжди будуть нулями*.

**Зауваження** В лінійному програмуванні серед усіх базисних розв'язків відшукують ще *опорні* розв'язки, де значення базисних змінних невід'ємні ( $\geq 0$ ), саме починаючи з одного з них, алгоритм симплекс-методу послідовним переходом від одного опорного розв'язку до кращого від нього відшукує наступний опорний розв'язок, якщо покращення вже не досягається, отриманий розв'язок є *оптимальним*, алгоритм зупиняє свою роботу (він зупиняється й тоді, коли оптимум не існує).



На рисунку зображена багатогранна фігура – область допустимих розв'язків, яка заповнена базисними розв'язками, де опорні розв'язки знаходяться у вершинах (кутових точках): ① – старт (початковий опорний розв'язок), ② – наступний розв'язок, кращий за попередній, фініш на  $z$ -му кроці, де процес оптимізації завершується знаходженням оптимального розв'язку (аналогія – стінка для тренування скалолазів з фіксованими опорними точками).

Схематично ідею розв'язання недовизначеної СЛАР можна показати таким чином: задана прямокутна («довгаста») матриця, з якої нульовою фіксацією вільних змінних тимчасово видаляють відповідні їм стовпці, отримуючи квадратну матрицю. Наприклад, задана матриця розміром  $3 \times 5$ , вважаємо вільними й робимо нульовими змінні  $x_1$  та  $x_2$ , тоді лишається матриця  $3 \times 3$  (зафарбована), для якої знаходять базисний розв'язок визначеної системи у базисі (345) або  $(x_3, x_4, x_5)$ :



### Задача 1.7. Розв'язати недовизначену СЛАР графічним методом

Ясно, що цей метод можна застосувати лише для недовизначеної СЛАР, де лише дві шукані невідомі й одне рівняння:  $m = 1, n = 2$ , рівняння:  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ .

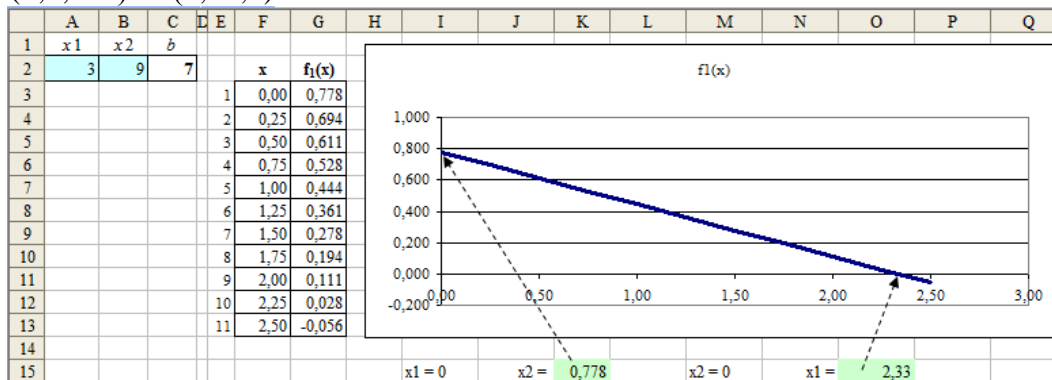
Вважаємо  $x_1$  вільною змінною, з рівняння визначимо функцію  $x_2 = \frac{-a_{11}x_1 + b_1}{a_{12}}$ , яка після

перетворень має вигляд  $y = ax + b$ , де:

$x = x_1; y = x_2, a = -\frac{a_{11}}{a_{12}}; b = \frac{b_1}{a_{12}}$ , її графік – нескінченна пряма лінія, кожна точка на ній є частинним розв'язком системи, а її перетин із осями  $x_1$  та  $x_2$  визначає два базисні розв'язки, де  $x_1 = 0$  або  $x_2 = 0$ .

Приклад.

Задана недовизначена система  $3x_1 + 9x_2 = 7$ , у ній два ( $C_2^1 = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2$ ) базисних розв'язки, це:  $(0; 0,778)$  та  $(2,33; 0)$ :



### Задача 1.8. Розв'язати недовизначену СЛАР з використанням *Поиск решения*

Приклад 1.

Розв'язати недовизначену СЛАР ( $m = 3, n = 4$ )

$$x_1 + 1,2x_2 + 0,3x_3 + 8x_4 = 2$$

$$2,1x_1 + 12x_2 + 0,4x_3 - x_4 = 8$$

$$0,5x_2 + x_3 + 3x_4 = 7.$$

Початкові дані:

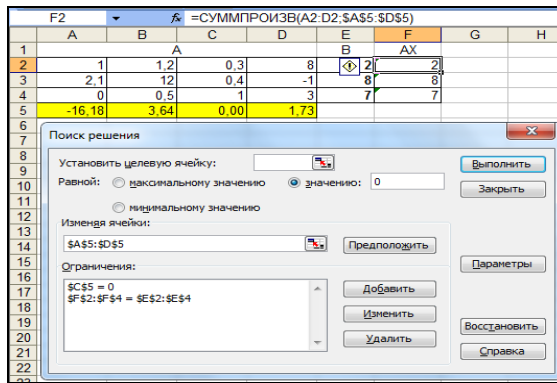
	A			B	
1	1,2	0,3	8	2	
2,1	12	0,4	-1	8	
0	0,5	1	3	7	

Система має 3 основних й 1 вільну змінну, вільною змінною може бути одна із 4-ох шуканих змінних. Надаючи будь-якій вільній змінній нульове значення, зводимо недовизначену систему до визначеної й розв'язуємо систему за допомогою програми *Поиск решения* у відповідному базисі.

Порядок роботи

1. Увести початкові дані: матрицю коефіцієнтів розміром  $3 \times 4$  та вектор  $B$  (ПЧ)
2. Сформувати рядок невідомих ( $X$ )
3. Обчислити ліву частину системи ( $AX$ )
4. Запуск надбудови *Поиск решения*, ЦФ відсутня, *Равной значению 0*, увести два обмеження:
  - $AX = B$  (ЛЧ = ПЧ)
  - $x_3 = 0$  (вільна змінна, клітинка C5)
  - *Выполнить*

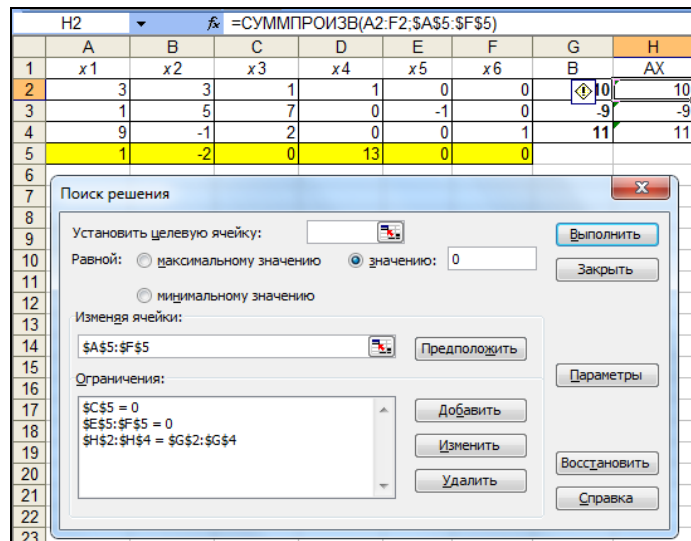
Результат (один із 4-ох можливих):  $X = (-16,18; 3,64; 0; 1,73)$ , де  $x_3$  – вільна змінна, базис ( $x_1, x_2, x_4$ )



Приклад 2

Розв'язати недовизначену систему лінійних рівнянь ( $m = 3, n = 6$ )

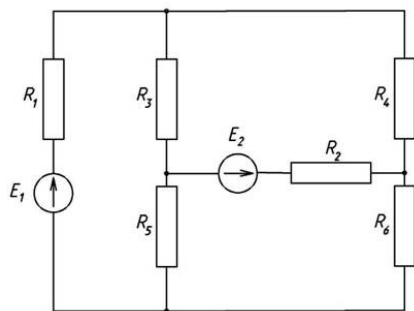
$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 - x_5 &= -9 \\ 9x_1 - x_2 + 2x_3 + x_6 &= 11 \end{aligned}$$



Результат (один із 20-ти можливих):  $X = (1; -2; 0; 13; 0; 0)$ , де  $x_3, x_5, x_6$  – вільні змінні, базис (124) або  $(x_1, x_2, x_4)$

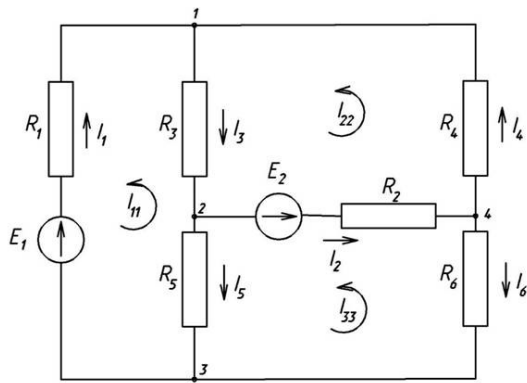
**Задача 1.9. Розрахунок електричного ланцюга**

Задано: схему ланцюга, значення опорів  $R_1, \dots, R_6$  та ЕРС джерел  $E_1$  та  $E_2$ , треба розрахувати 6 значень струмів  $I_1, \dots, I_6$ , що протікають опорами ланцюга.



Порядок роботи

1) У довільному порядку позначити вузли, напрями струмів у гілках й напрями обходу контурів:



2) За першим законом Кірхгофа сформувані три рівняння (на 1 менше числа вузлів) для шуканих струмів для вузлів 1, 2, 3:

$$I_1 + I_4 - I_3 = 0$$

$$I_3 - I_2 - I_5 = 0$$

$$I_5 + I_6 - I_1 = 0.$$

3) За другим законом Кірхгофа сформувані три рівняння для струмів у трьох контурах  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$ :

$$-R_1 I_1 - R_5 I_5 - R_3 I_3 = -E_1$$

$$R_2 I_2 + R_4 I_4 + R_3 I_3 = E_2$$

$$-R_2 I_2 + R_5 I_5 - R_6 I_6 = -E_2.$$

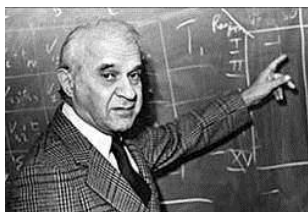
4) Маємо визначену СЛАР 6-го порядку, яку розв'язуємо матричним способом.

5) Перевірка балансу потужностей:  $E_1 I_1 + E_2 I_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2$

Результат:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1				I1	I2	I3	I4	I5	I6	E			
2	R1 =	4		1	0	-1	1	0	0	0			
3	R2 =	8		0	-1	1	0	-1	0	0			
4	R3 =	21		-1	0	0	0	1	1	0			
5	R4 =	16		-4	0	-21	0	-19	0	-130			
6	R5 =	19		0	8	21	16	0	0	110			
7	R6 =	16		0	-8	0	0	19	-16	-110			
8													
9	E1 =	130		5.89	4.13	4.62	-1.26	0.49	5.39			765.06	E <sub>1</sub> I <sub>1</sub>
10	E2 =	110										454.56	E <sub>2</sub> I <sub>2</sub>
11	R			4	8	21	16	19	16			1219.618	
12													
13	R <sup>2</sup>			138.535	136.612	449.082	25.429	4.599	465.361			1219.618	
14													

### Задача міжгалузевого балансу (МГБ)



Вперше апарат лінійної алгебри для розв'язання реальних економічних задач використав В. В. Леонт'єв для дослідження національної економіки (Росії, США), що складається з певної кількості галузей, які одночасно виступають як виробники певної продукції та споживачі продукції власної та інших галузей.

Він побудував теорію на основі математичної моделі міжгалузевого балансу (МГБ, 1936 р.) саме засобами лінійної алгебри (модель

“витрати-випуск” або, за Леонт'євим, *input-output model*).

За цією теорією функціонування економічної системи будь-якого рівня (окремого підприємства, держави чи міжнаціональної економіки) характеризується випуском (*output*) готової продукції, для чого частина продукції кожної галузі витрачається на споживання самою економічною системою для забезпечення внутрішніх потреб, необхідних для випуску

готової продукції, тобто, поступає на її вхід (витрати, *input*). Отже, засобом оцінки ефективності системи є балансова модель “витрати-випуск”.

Час підтвердив фундаментальну роль математики в економічних дослідженнях, зокрема, показав, що модель Леонтьєва виявилася потужним аналітичним інструментом, який ефективно використовується на мікро- та макрорівнях дослідження складно організованих економічних систем, у 1973 р. американський економіст (російського походження) В. В. Леонтьєв відзначений Нобелівською премією з економіки «за розвиток методу “витрати-випуск” та його застосування до важливих економічних задач».

Міжгалузевий баланс (МГБ) в економіці – це метод аналізу взаємозв’язків між різними галузями (секторами) економічної системи. На макроекономічному рівні при виробництві товарів, виконанні робіт та наданні послуг (все це коротко – продукція) в кожній галузі споживається продукція, яка виробляється у своїй та всіх інших галузях народного господарства. Це означає, що кожна галузь виступає в системі міжгалузевих відношень одночасно як виробник, так і споживач. Вважається, що у матеріальному балансі кожна галузь є виробником *одного* продукту, якщо це не так, застосовується вартісний баланс. На мікроекономічному рівні взаємини здійснюються, наприклад, між спеціалізованими цехами, скажімо, металургійного комбінату, де у заданій послідовності певна продукція (сировина, матеріали, чавун, сталь, прокат, енергія) передається з одного цеху до іншого на внутрішні потреби й, одночасно, випускається як готова продукція на зовнішнє споживання.

Математичний апарат для розв’язання задачі міжгалузевого балансу – лінійна алгебра, бо, за Леонтьєвим, типові економічні процеси задовольняють умовам лінійності.

Існує три варіанти балансових розрахунків:

**Варіант “від валу”:** якщо відомі максимально можливі валові об’єми випуску продукції ( $X$ ), тоді випуск готової продукції ( $B$ ) визначається розрахунками у формі матричного рівняння  $B = X - AX$ , тобто, випуск готової продукції (на експорт) однозначно визначається існуючим рівнем розвитку галузей за відомим висловом “маємо те, що маємо”. Цей варіант характерний для післякризових (післявоєних) економік, коли будь-яка продукція дефіцитна й гарантовано знаходить попит, тут «вузьке місце» – рівень розвитку галузі. Недолік планування “від валу”: існує небезпека отримання нерациональної структури і пропорцій національного доходу і всього суспільного продукту, невиправданого зростання проміжної продукції (сировини, напівфабрикатів) без відповідного зростання кінцевого продукту.

Приклад сучасної України: маємо сировинно- та імпорто-орієнтовану економіку, тобто, порівняно розвинуті металургія, окремі групи машинобудування, електроенергетика, сільське господарство, харчова й хімічна промисловість визначають наш експортний потенціал, а побутова, технологічно складна й наукоємна продукція імпортується.

**Варіант “від експорту”:** якщо задано замовлення на випуск готової продукції всіх галузей (скажімо, на експорт), розрахунками знаходять необхідні величини валової продукції ( $X$ ), обумовлені завданням кінцевого випуску  $B$  і технологічною матрицею  $A$  за матричним рівнянням:  $X = (E - A)^{-1}B$ , тобто, випуск готової продукції (на експорт) однозначно визначається попитом на нього за відомим висловом “будь-який каприз за ваші кошти”. Це – класичний варіант задачі МГБ, він характерний для економік, що динамічно розвиваються й де існують резерви потужностей для випуску готової продукції, «вузьким місцем» є обмежений попит. Цей варіант годиться не для усіх економік: розраховані рівні бажаного валового випуску можуть стати надто високими для окремих слабо розвинених галузей, які незабезпечені сукупністю відповідних ресурсів, одночасно в інших порівняно розвинених галузях може виникнути недозавантаженість діючих виробничих потужностей. Позитив: з перспективи сталого зовнішнього попиту визначається раціональна політика розвитку економічної системи, особливо, при переходному етапі.

Приклад України: з-за переходу промисловості від союзної економіки до національної треба визначати долю діючих підприємств із урахуванням попиту ззовні на розробку при-

родних родовищ, виготовлення наукоємної продукції, на розвиток окремих галузей енергетики, аграрного сектору, сфери туристичних та інших послуг.

**Варіант “змішаний”:** по окремих галузях в моделі задають рівні валової продукції ( $X$ ), по іншим – кінцевого випуску ( $B$ ). Цей змішаний варіант вважається найбільш прийнятним в практичному сенсі, коли “від валу” планують роботу «важких» й повільних базових галузей (енергетика, видобуток корисних копалин, транспорт, машинобудування, комунікації), а від “експорту” планують роботу «легких» й динамічних галузей, що порівняно швидко задовольняють суспільні та особисті потреби (легка, харчова промисловість, сфера послуг). Відповідними розрахунками знаходять цілком збалансований план виробництва валового суспільного продукту і національного доходу у складі всіх галузей матеріального виробництва.

Приклад України: для потужних й досконалих переробних галузей та розвинених секторів машинобудування визначають випуск продукції на зовнішній ринок за підходом «від валу», для інших, наприклад, для харчової галузі – за підходом «від експорту», коли порівняно не складно можна наростити відповідні виробничі потужності й ресурсне забезпечення.

### **Класичний варіант МГБ («від експорту»)**

*Мета такого балансового аналізу – визначити, скільки продукції повинна виробити кожна галузь для того, щоб задовольнити всі потреби економічної системи в її продукції, тобто, щоб задовольнити як **внутрішні** потреби всіх галузей, так і потреби **зовнішнього середовища** або кінцевий попит, це: задоволення особистих та суспільних потреб, накопичення, експорт.*

Сутність принципу **балансу** – все, що випускається (вал), дорівнює сумі витрат на внутрішні потреби і випуск товарної продукції.

Отже, потоки продукції від виробників до споживачів визначаються балансовою схемою:  
**ВАЛ = ВИТРАТИ (ВНУТРІШНІ ПОТРЕБИ) + ВИПУСК (ЕКСПОРТ)**

### **Математична модель МГБ («витрати-випуск»)**

Позначення:

$n$  – кількість галузей (розмірність задачі);

$A$  – технологічна квадратна матриця, її елементи  $a_{ij}$  визначають частку продукції  $i$ -ої галузі-виробника, яка споживається на власні потреби  $j$ -ою галуззю-споживачем ( $i, j = 1, \dots, n$ );

$X$  – вектор-стовпець валового випуску, кожен його елемент  $x_i$  визначає загальну кількість продукції  $i$ -ої галузі-виробника;

$B$  – вектор готової продукції, кожен його елемент  $B_i$  визначає замовлення на випуск готової продукції  $i$ -ою галуззю-виробником.

Класична балансова задача ставить за мету визначити валовий випуск продукції всіх галузей (вектор  $X$ ), необхідний для:

- задоволення внутрішніх потреб ( $AX$ ), що визначаються діючою технологією й відповідною технологічною матрицею  $A$ ,
- забезпечення замовлення на готову продукцію ( $B$ ).

Баланс означає, що все, що випускається (вал), складається із двох складових – **витрат** на внутрішні потреби, необхідні для **випуску** готової продукції згідно замовлення:

$$\mathbf{ВАЛ = ВИТРАТИ + ВИПУСК.}$$



Витрати на внутрішні потреби (вхід, input за Леонтьєвим) обчислюються як вектор  $AX$ , отриманий множенням матриці  $A$  на шуканий вектор  $X$ , де заданий вектор  $B$  визначає замовлення на випуск готової продукції (вихід, output). Оскільки кожна галузь двічі аналізується в моделі (як виробник й споживач), балансова модель є визначеною системою  $n$  лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1$$

...

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + b_i$$

...

$$x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n$$

або у матричній формі  $X = AX + B$  і називається моделлю МГБ (або моделлю Леонтьєва чи *input-output model*).

Класична матрична формула МГБ  $X = AX + B$  є основним математичним співвідношенням для вартісних чи натуральних балансів на плановий період.

### Задача 1.10. Розв'язати класичну задачу МГБ

#### Приклад 1.

Підприємство складається з 2 цехів, продукція кожного цеху-виробника витрачається на внутрішні потреби обох цехів-споживачів (згідно технологічної матриці  $A$ ) й випускається для зовнішнього споживання.

Задано: технологічна матриця ( $A$ ) і вектор-стовпець готової продукції ( $B$ ).

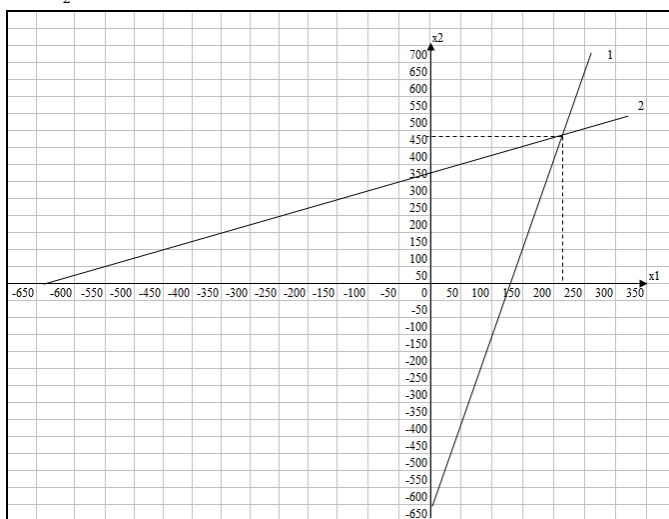
Визначити: валовий випуск (вектор-стовпець  $X$ ) для задоволення внутрішніх потреб і замовлення на готову продукцію.

#### Графічний метод

Система:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_1 + 0,2x_2 + 125 \\ x_2 &= 0,4x_1 + 0,23x_2 + 250 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 0,9x_1 - 0,2x_2 &= 125 \\ -0,4x_1 + 0,77x_2 &= 250 \end{aligned}$$

	Цех 1	Цех 2	B	X
Цех 1	0,10	0,20	125	239,3
Цех 2	0,40	0,23	250	449,0
	$x_1$	$x_2$	B	
	0,90	-0,20	125	
	-0,40	0,77	250	
	$x_1$	$x_2$		
r1	138,9	-620,8		
r2	-625,0	324,7		



Результат: валовий випуск цехів  $X = (x_1, x_2) \approx (220, 470)$ .

## Приклад 2.

Підприємство складається з 9 цехів, продукція кожного цеху-виробника витрачається на внутрішні потреби усіх цехів-споживачів (згідно технологічної матриці  $A$ ) й випускається для зовнішнього споживання.

Задано: технологічна матриця ( $A$ ) і вектор-стовпець готової продукції ( $B$ ).

Визначити: валовий випуск (вектор-стовпець  $X$ ) для задоволення внутрішніх потреб і замовлення на готову продукцію.

### **Матричний метод**

За попередній звітний період, наприклад, за 2010 рік, відомі потоки продукції на внутрішні потреби (задана матриця  $P$ ) й потоки для задоволення попиту на готову продукцію (вектор-стовпець  $B_{2010}$ ), також задано замовлення на готову продукцію на наступний 2011 рік (вектор-стовпець  $B_{2011}$ ):

Звіт за 2010 рік											
P	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9	$B_{2010}$	$B_{2011}$
Цех-1	14	6	14	13	9	14	10	11	12	123	200
Цех-2	5	7	13	13	8	12	13	6	14	345	400
Цех-3	8	14	12	7	11	10	9	5	14	90	120
Цех-4	12	5	5	11	13	5	12	8	12	55	60
Цех-5	5	6	9	8	5	10	8	14	11	10	20
Цех-6	14	10	7	7	14	12	9	8	5	90	140
Цех-7	10	14	12	11	7	7	8	11	14	400	300
Цех-8	11	7	5	12	12	14	14	14	12	200	150
Цех-9	8	7	7	13	13	7	6	7	12	50	60

Треба:

- обчислити технологічну матрицю  $A$  й
- визначити вектор валового випуску  $X_{2011}$ , користуючись балансовою моделлю  $X_{2011} = AX_{2011} + B_{2011}$ .

Припущення лінійності: питомі технологічні витрати (коефіцієнти внутрішніх витрат у складі технологічної матриці  $A$ ) не залежать від значень вектора  $B$ .

Для отримання вектора  $X$  використовується 5 матриць:  $P, A, E, E-A, (E-A)^{-1}$ .

### Алгоритм

- 1) Обчислити матрицю  $A$
- 2) Розв'язати систему  $X = AX + B$  (для 2011 р.):
  - $X - AX = B$
  - $X(E-A) = B$ , де  $E$  – одинична матриця
  - $X = (E-A)^{-1}B$ , де  $^{-1}$  – символ оберненої матриці.

### **Розгорнута форма обчислень**

#### Порядок роботи

- 1) Для кожного цеху знайти валовий випуск ( $X_{2010}$ ) як суму потоків матриці  $P_{2010}$  (вектор  $AX$  за 2010 рік) +  $B_{2010}$  (це елементи вектора-стовпця  $X_{2010}$ ):

P	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9	B <sub>2010</sub>	X <sub>2010</sub>
Цех-1	14	6	14	13	9	14	10	11	12	123	226
Цех-2	5	7	13	13	8	12	13	6	14	345	436
Цех-3	8	14	12	7	11	10	9	5	14	90	180
Цех-4	12	5	5	11	13	5	12	8	12	55	138
Цех-5	5	6	9	8	5	10	8	14	11	10	86
Цех-6	14	10	7	7	14	12	9	8	5	90	176
Цех-7	10	14	12	11	7	7	8	11	14	400	494
Цех-8	11	7	5	12	12	14	14	14	12	200	301
Цех-9	8	7	7	13	13	7	6	7	12	50	130

2) Транспонуванням розмістити вектор-стовпець  $X_{2010}$  над таблицею й обчислити елементи матриці прямих витрат  $A$  за формулою:  $a_{ij} = \frac{P_{ij}}{x_{2010,j}}$

X <sup>T</sup> =	226	436	180	138	86	176	494	301	130	
Цех-1	0,062	0,014	0,078	0,094	0,105	0,080	0,020	0,037	0,092	A
Цех-2	0,022	0,016	0,072	0,094	0,093	0,068	0,026	0,020	0,108	
Цех-3	0,035	0,032	0,067	0,051	0,128	0,057	0,018	0,017	0,108	
Цех-4	0,053	0,011	0,028	0,080	0,151	0,028	0,024	0,027	0,092	
Цех-5	0,022	0,014	0,050	0,058	0,058	0,057	0,016	0,047	0,085	
Цех-6	0,062	0,023	0,039	0,051	0,163	0,068	0,018	0,027	0,038	
Цех-7	0,044	0,032	0,067	0,080	0,081	0,040	0,016	0,037	0,108	
Цех-8	0,049	0,016	0,028	0,087	0,140	0,080	0,028	0,047	0,092	
Цех-9	0,035	0,016	0,039	0,094	0,151	0,040	0,012	0,023	0,092	

3) Сформувати матрицю  $E$ , обчислити матриці  $E-A$  та матрицю повних витрат  $V = (E-A)^{-1}$

Цех-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	E
Цех-2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
Цех-3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
Цех-4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
Цех-5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
Цех-6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
Цех-7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
Цех-8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
Цех-9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
Цех-1	0,9	0,0	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	0,0	-0,1	E-A
Цех-2	0,0	1,0	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	0,0	-0,1	
Цех-3	0,0	0,0	0,9	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	0,0	-0,1	
Цех-4	-0,1	0,0	0,0	0,9	-0,2	0,0	0,0	0,0	-0,1	
Цех-5	0,0	0,0	-0,1	-0,1	0,9	-0,1	0,0	0,0	-0,1	
Цех-6	-0,1	0,0	0,0	-0,1	-0,2	0,9	0,0	0,0	0,0	
Цех-7	0,0	0,0	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	1,0	0,0	-0,1	
Цех-8	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	1,0	-0,1	
Цех-9	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,2	0,0	0,0	0,0	0,9	
Цех-1	1,11	0,03	0,13	0,18	0,24	0,14	0,04	0,07	0,19	(E-A) <sup>-1</sup>
Цех-2	0,06	1,03	0,12	0,17	0,22	0,12	0,05	0,05	0,20	
Цех-3	0,07	0,05	1,12	0,12	0,25	0,11	0,04	0,05	0,20	
Цех-4	0,09	0,03	0,07	1,15	0,26	0,08	0,04	0,06	0,18	
Цех-5	0,06	0,03	0,09	0,12	1,16	0,10	0,03	0,07	0,15	
Цех-6	0,10	0,04	0,09	0,12	0,27	1,12	0,04	0,06	0,12	
Цех-7	0,08	0,05	0,11	0,15	0,20	0,09	1,03	0,07	0,20	
Цех-8	0,09	0,04	0,08	0,17	0,27	0,14	0,05	1,08	0,19	
Цех-9	0,07	0,03	0,08	0,17	0,27	0,09	0,03	0,05	1,18	

4) Обчислити вектори-стовпці  $X_{2011}$  та  $AX_{2011} = X_{2011} - B_{2011}$ :

P	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9	B <sub>2010</sub>	X <sub>2010</sub>	B <sub>2011</sub>	X <sub>2011</sub>	AX
Цех-1	14	6	14	13	9	14	10	11	12	123	226	200	321,85	121,8
Цех-2	5	7	13	13	8	12	13	6	14	345	436	400	505,38	105,4
Цех-3	8	14	12	7	11	10	9	5	14	90	180	120	226,49	106,5
Цех-4	12	5	5	11	13	5	12	8	12	55	138	60	155,81	95,8
Цех-5	5	6	9	8	5	10	8	14	11	10	86	20	106,44	86,4
Цех-6	14	10	7	7	14	12	9	8	5	90	176	140	242,56	102,6
Цех-7	10	14	12	11	7	7	8	11	14	400	494	300	409,24	109,2
Цех-8	11	7	5	12	12	14	14	14	12	200	301	150	265,96	116,0
Цех-9	8	7	7	13	13	7	6	7	12	50	130	60	154,11	94,1

Додатковим результатом є обчислення матриці непрямих витрат:  $V - A$

S-A	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9
Цех-1	1,05	0,02	0,05	0,08	0,14	0,06	0,02	0,04	0,10
Цех-2	0,04	1,02	0,05	0,07	0,12	0,05	0,02	0,03	0,09
Цех-3	0,04	0,02	1,05	0,07	0,12	0,05	0,02	0,03	0,09
Цех-4	0,04	0,02	0,05	1,07	0,11	0,05	0,02	0,03	0,08
Цех-5	0,03	0,01	0,04	0,06	1,10	0,04	0,02	0,03	0,07
Цех-6	0,04	0,02	0,05	0,07	0,11	1,05	0,02	0,03	0,08
Цех-7	0,04	0,02	0,05	0,07	0,12	0,05	1,02	0,03	0,09
Цех-8	0,05	0,02	0,05	0,08	0,13	0,06	0,02	1,04	0,10
Цех-9	0,04	0,02	0,05	0,07	0,11	0,05	0,02	0,03	1,09

і матриці майбутніх (у 2011 р.) потоків продукції від виробників до споживачів  $P = \{p_{ij}\}$  за формулою  $p_{ij} = a_{ij}x_j$ , де  $p_{ij}$  – кількість продукції, яка передається від  $i$ -го виробника до  $j$ -го споживача згідно частки  $a_{ij}$  валового випуску, що споживається  $j$ -ою галуззю ( $x_j$ ):

P <sub>2011</sub>	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9	AX <sub>2011</sub>
Цех-1	19,9	7,0	17,6	14,7	11,1	19,3	8,3	9,7	14,2	121,8
Цех-2	7,1	8,1	16,4	14,7	9,9	16,5	10,8	5,3	16,6	105,4
Цех-3	11,4	16,2	15,1	7,9	13,6	13,8	7,5	4,4	16,6	106,5
Цех-4	17,1	5,8	6,3	12,4	16,1	6,9	9,9	7,1	14,2	95,8
Цех-5	7,1	7,0	11,3	9,0	6,2	13,8	6,6	12,4	13,0	86,4
Цех-6	19,9	11,6	8,8	7,9	17,3	16,5	7,5	7,1	5,9	102,6
Цех-7	14,2	16,2	15,1	12,4	8,7	9,6	6,6	9,7	16,6	109,2
Цех-8	15,7	8,1	6,3	13,5	14,9	19,3	11,6	12,4	14,2	116,0
Цех-9	11,4	8,1	8,8	14,7	16,1	9,6	5,0	6,2	14,2	94,1
X <sub>2011</sub>	321,85	505,38	226,49	155,81	106,44	242,56	409,24	265,96	154,11	

### Компактна форма з використанням віртуальних матриць

Щоб формула була компактною, бажано надати змістовні імена матриці  $P$  ( $P$ ), стовпцям  $X_{2010}$  ( $X$ ) та  $B_{2011}$  ( $B$ ). Для отримання вектора  $X$  використовується лише одна задана матриця  $P$  й 4 віртуальних матриць:

$$A = P/\text{трансп}(X),$$

$$E = AA^{-1} \rightarrow \text{МУМНОЖ}(P/\text{трансп}(X); \text{МОБР}(P/\text{трансп}(X))),$$

$$E-A \rightarrow \text{МУМНОЖ}(P/\text{трансп}(X); \text{МОБР}(P/\text{трансп}(X))) - P/\text{трансп}(X) \text{ та}$$

$$(E-A)^{-1} \rightarrow \text{МОБР}(\text{МУМНОЖ}(P/\text{трансп}(X); \text{МОБР}(P/\text{трансп}(X))) - P/\text{трансп}(X))$$

$$\text{у складі однієї формули } X = (E-A)^{-1}B \text{ або } X = \left( \frac{P}{X^T} \times \left( \frac{P}{X^T} \right)^{-1} - \frac{P}{X^T} \right)^{-1} \times B .$$

## Результат

РЗ		fx {=МУМНОЖ(МОБР(МУМНОЖ(Р/ТРАНСП(X);МОБР(Р/ТРАНСП(X)))-Р/ТРАНСП(X));В)}																
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1																		
2	Р	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9	В <sub>2010</sub>	Х <sub>2010</sub>	В <sub>2011</sub>	Х <sub>2011</sub>	АХ <sub>2011</sub>			
3	Цех-1	14	6	14	13	9	14	10	11	12	123	226	200	321,8	121,8			
4	Цех-2	5	7	13	13	8	12	13	6	14	345	436	400	505,4	105,4			
5	Цех-3	8	14	12	7	11	10	9	5	14	90	180	120	226,5	106,5			
6	Цех-4	12	5	5	11	13	5	12	8	12	55	138	60	155,8	95,8			
7	Цех-5	5	6	9	8	5	10	8	14	11	10	86	20	106,4	86,4			
8	Цех-6	14	10	7	7	14	12	9	8	5	90	176	140	242,6	102,6			
9	Цех-7	10	14	12	11	7	7	8	11	14	400	494	300	409,2	109,2			
10	Цех-8	11	7	5	12	12	14	14	14	12	200	301	150	266,0	116,0			
11	Цех-9	8	7	7	13	13	7	6	7	12	50	130	60	154,1	94,1			

## Загальні відомості щодо технології МГБ

Матриці повних, прямих та непрямих витрат використовуються в економічному аналізі діяльності підприємств та народного господарства в цілому.

Коефіцієнти  $s_{ij}$  матриці **повних** витрат  $S = (E-A)^{-1}$  показують, скільки треба виготовити продукції  $i$ -ої галузі для випуску у сферу кінцевого ужитку одиниці продукції  $j$ -ої галузі. Наприклад, коефіцієнт  $s_{11}=1,11$  для однієї (він стоїть на головній діагоналі) і тієї ж галузі містить в собі ту одиницю продукції ( $B_1=1$ ), яка входить у сферу кінцевого споживання. Саме тому на головній діагоналі оберненої матриці  $S$  коефіцієнти повних витрат завжди більше одиниці.

**Прямі** витрати відображають частки кількості продукції, спожитої безпосередньо при виготовленні даного продукту, які задані величиною  $a_{ij}$ . Наприклад, значення  $a_{34}=0.05$  означає, що 5% продукції 3-ої галузі направляється на споживання 4-ї галузі.

**Непрямі** витрати відносяться до попередніх стадій виробництва і входять в продукт через інші засоби виробництва. Скажімо, для енергетичної галузі непрямі витрати вказують на кількість електроенергії, витраченої на виготовлення відповідного обладнання, провідникової продукції, сировини тощо.

Отже, **повні витрати = прямі + непрямі**.

Наприклад, маючи прямі витрати продукції електроенергетики (1-ша галузь) машинобудуванню (2-га галузь) величиною  $a_{12} = 0,01$  (1%), розрахунками знайшли повні витрати  $s_{12}=0.03$  (3%), це, відповідно, означає, що непрямі витрати складуть величину 0,02 (2% витрат електроенергетики міститься в обладнанні та матеріалах машинобудування).

Повні витрати не набагато перевищують прямі витрати (на величину непрямих витрат) для видобувних і переробних галузей (шахти, збагачувальні і ткацькі фабрики, виробництво будматеріалів, металургія), але суттєво відрізняються для галузей, де велика доля напівфабрикатів і вартісних матеріалів (наприклад, збиральне виробництво у машинобудуванні, радіоелектроніці тощо<sup>10</sup>), отже це – потужний і об'єктивний інструмент для економічного аналізу ефективності економічної системи будь-якого рівня.

Аналіз балансу “витрати-випуск”, тобто, порівняння величин витрат  $AX$  та випуску  $B$ , дозволяє визначити рівень ефективності економічної системи чи окремої галузі – чим менше споживається продукції на внутрішні потреби, тим буде більшим об'єм готової продукції, тим відповідна галузь чи уся економіка продуктивніша.

<sup>10</sup> достатньо порівняти непрямі витрати на видобуток вугілля чи залізної руди й витрати на виготовлення мікросхем чи розробку програм для комп'ютера

## Метод із використанням надбудови *Поиск решения*

I. Знайти план  $X_{2011}$

II. за обмеженням:  $X_{2011} = AX_{2011} + B_{2011}$ , де  $A = P_{2010}/X_{2010}^T$

Результат:

Q3		fx {=МУМНОЖ(В16:J24;P3:P11)}																		
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Звіт за 2010 рік																			
2	P	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9	B <sub>2010</sub>	B <sub>2011</sub>	X <sub>2010</sub>	X <sub>2011</sub>	AX	AX+B				
3	Цех-1	14	6	14	13	9	14	10	11	12	123	200	226	321,8	121,8	321,8				
4	Цех-2	5	7	13	13	8	12	13	6	14	345	400	436	505,4	105,4	505,4				
5	Цех-3	8	14	12	7	11	10	9	5	14	90	120	180	226,5	106,5	226,5				
6	Цех-4	12	5	5	11	13	5	12	8	12	55	60	138	155,8	95,8	155,8				
7	Цех-5	5	6	9	8	5	10	8	14	11	10	20	86	106,4	86,4	106,4				
8	Цех-6	14	10	7	7	14	12	9	8	5	90	140	176	242,6	102,6	242,6				
9	Цех-7	10	14	12	11	7	7	8	11	14	400	300	494	409,2	109,2	409,2				
10	Цех-8	11	7	5	12	12	14	14	14	12	200	150	301	266,0	116,0	266,0				
11	Цех-9	8	7	7	13	13	7	6	7	12	50	60	130	154,1	94,1	154,1				
12																				
13	X <sub>2010</sub>	226	436	180	138	86	176	494	301	130										
14																				
15	A	Цех-1	Цех-2	Цех-3	Цех-4	Цех-5	Цех-6	Цех-7	Цех-8	Цех-9										
16	Цех-1	0,06	0,01	0,08	0,09	0,10	0,08	0,02	0,04	0,09										
17	Цех-2	0,02	0,02	0,07	0,09	0,09	0,07	0,03	0,02	0,11										
18	Цех-3	0,04	0,03	0,07	0,05	0,13	0,06	0,02	0,02	0,11										
19	Цех-4	0,05	0,01	0,03	0,08	0,15	0,03	0,02	0,03	0,09										
20	Цех-5	0,02	0,01	0,05	0,06	0,06	0,06	0,02	0,05	0,08										
21	Цех-6	0,06	0,02	0,04	0,05	0,16	0,07	0,02	0,03	0,04										
22	Цех-7	0,04	0,03	0,07	0,08	0,08	0,04	0,02	0,04	0,11										
23	Цех-8	0,05	0,02	0,03	0,09	0,14	0,08	0,03	0,05	0,09										
24	Цех-9	0,04	0,02	0,04	0,09	0,15	0,04	0,01	0,02	0,09										

Поиск решения

Установить целевую ячейку: [ ]

Равной:  максимальной значению  значению: 0

минимальному значению

Изменяя ячейки: [ ]

Ограничения: [ ]

SP\$3:SP\$11 = \$R\$3:\$R\$11

### Задача 1.11. Розв'язати задачу МГБ («від валу»)

За цим підходом можна оцінити рівень розвитку складових економічної системи (галузей, секторів, окремих підприємств чи цехів у їх складі) й виявити резерви відповідних потужностей.

Задано:

- технологічна матриця міжгалузевих витрат  $A$  (її визначення показано у попередній задачі)
- вектор валового випуску  $X$  (це максимально можливі валові об'єми випуску продукції).

Знайти вектор кінцевої продукції  $B$  за матричною формулою:  $B = X - AX$  або за допомогою програми *Поиск решения*.

Результат

O2		fx {=МУМНОЖ(В2:K11;N2:N11)}														
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
		Галузь 1	Галузь 2	Галузь 3	Галузь 4	Галузь 5	Галузь 6	Галузь 7	Галузь 8	Галузь 9	Галузь 10	Замовлення (B)	X	AX		
2	Галузь 1	0,02	0,01	0,01	0,07	0,04	0,02	0,07	0,05	0,08	0,04	141,75	350	208,3		
3	Галузь 2	0,01	0,20	0,07	0,09	0,00	0,00	0,00	0,04	0,08	0,00	238,50	500	261,5		
4	Галузь 3	0,10	0,02	0,05	0,01	0,10	0,04	0,09	0,04	0,04	0,00	757,75	1000	242,3		
5	Галузь 4	0,07	0,03	0,09	0,00	0,10	0,06	0,04	0,01	0,02	0,00	354,00	600	246,0		
6	Галузь 5	0,00	0,00	0,03	0,03	0,02	0,09	0,06	0,03	0,06	0,06	596,50	800	203,5		
7	Галузь 6	0,00	0,00	0,02	0,03	0,07	0,01	0,08	0,06	0,00	0,08	16,50	250	233,5		
8	Галузь 7	0,00	0,00	0,04	0,10	0,03	0,02	0,00	0,09	0,07	0,06	80,50	325	244,5		
9	Галузь 8	0,00	0,00	0,04	0,09	0,01	0,07	0,01	0,02	0,00	0,07	38,25	250	211,8		
10	Галузь 9	0,00	0,03	0,03	0,02	0,10	0,04	0,04	0,00	0,00	0,02	116,00	300	184,0		
11	Галузь 10	0,10	0,04	0,03	0,08	0,06	0,06	0,10	0,00	0,03	0,05	902,50	1200	297,5		
12																
13	X'	350,0	500,0	1000,0	600,0	800,0	250,0	325,0	250,0	300,0	1200,0					

15	Потоки між галузями										AX	
16	Галузь 1	7,0	5,0	10,0	42,0	32,0	5,0	22,8	12,5	24,0	48,0	208,3
17	Галузь 2	3,5	100,0	70,0	54,0	0,0	0	0	10,0	24,0	0	261,5
18	Галузь 3	35,0	10,0	50,0	6,0	80,0	10,0	29,3	10,0	12,0	0	242,3
19	Галузь 4	24,5	15,0	90,0	0	80,0	15,0	13,0	2,5	6,0	0	246,0
20	Галузь 5	0	0	30,0	18,0	16,0	22,5	19,5	7,5	18,0	72,0	203,5
21	Галузь 6	0	0	20,0	18,0	56,0	2,5	26,0	15,0	0	96,0	233,5
22	Галузь 7	0	0	40,0	60,0	24,0	5,0	0	22,5	21,0	72,0	244,5
23	Галузь 8	0	0	40,0	54,0	8,0	17,5	3,3	5,0	0,0	84,0	211,8
24	Галузь 9	0,0	15,0	30,0	12,0	80,0	10,0	13,0	0	0	24,0	184,0
25	Галузь 10	35,0	20,0	30,0	48,0	48,0	15,0	32,5	0	9,0	60,0	297,5

З отриманих розрахунків можна визначити рівень розвитку (завантаженості) галузей. Наприклад, 6-та галузь маючи потенціал у 250 одиниць, майже все вимушена направляти на внутрішні потреби (233,5), зате 5-та галузь з потенціалом у 800 од. спроможна виготовити майже 600 од. власної продукції для зовнішнього споживання.

### Задача 1.12. Розв'язати задачу МГБ (варіант «змішаний»)

#### Позначення

$n$  – загальна кількість галузей

$n_1$  – кількість галузей, для яких задано валовий випуск ( $X$ )

$n_2$  – кількість галузей, для яких задано випуск готової продукції ( $B$ ),

$$n_1 + n_2 = n.$$

Для цього варіанту задачі рекомендується скористатися програмою *Поиск решения*.

#### Порядок роботи

- 1) Ввести (або попередньо обчислити) технологічну матрицю  $A$ ,  $n_1$  значень валу  $X$  та  $n_2$  значень вектору експорту  $B$
- 2) Визначити діапазони шуканих  $n_2$  невідомих валу  $X$  та  $n_1$  невідомих вектору  $B$ , заповнити їх нулями
- 3) Сформувати транспонуванням вектор-рядок  $X$  (вал)
- 4) Обчислити матрицю потоків  $P$  та суми по її рядках ( $AX$ )
- 5) Сформувати стовпець правої частини системи  $AX + B$
- 6) Розв'язати систему обмежень (ЛЧ = ПЧ)  $X = AX + B$  й визначити шукані значення невідомих.

#### Приклад

Задана змішана система:

	Г-1	Г-2	Г-3	Г-4	Г-5	Г-6	B	X
Г-1	0,03	0,07	0,02	0,09	0,05	0,1	100	0
Г-2	0,09	0,03	0,1	0,07	0,02	0,09	125	0
Г-3	0,09	0,09	0,02	0,06	0	0,02	0	300
Г-4	0,06	0,03	0,08	0,06	0,2	0,09	0	500
Г-5	0,09	0,05	0,04	0,04	0	0,08	0	90
Г-6	0,09	0,1	0,02	0,02	0,06	0,02	0	30

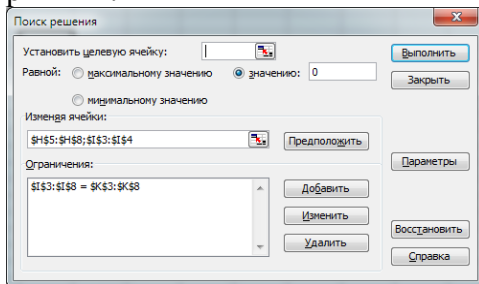
де для «легких» галузей Г-1 та Г-2 із необмеженими можливостями задані замовлення на готову продукцію (100, 125), а для «важких» галузей Г-3 ÷ Г-6 вимагають задані максимальні валові випуски (300, 500, 90, 30).

Треба знайти 6 невідомих:  $B_3 \div B_6$  та  $X_1, X_2$ .

Матричним множенням обчислюємо вектор  $AX$ , потім знаходимо значення вектору  $AX + B$ :

	Г-1	Г-2	Г-3	Г-4	Г-5	Г-6	B	X	AX	AX+B
Г-1	0,03	0,07	0,02	0,09	0,05	0,1	100	0	58,50	158,50
Г-2	0,09	0,03	0,1	0,07	0,02	0,09	125	0	69,50	194,50
Г-3	0,09	0,09	0,02	0,06	0	0,02	0	300	36,60	36,60
Г-4	0,06	0,03	0,08	0,06	0,2	0,09	0	500	74,70	74,70
Г-5	0,09	0,05	0,04	0,04	0	0,08	0	90	34,40	34,40
Г-6	0,09	0,1	0,02	0,02	0,06	0,02	0	30	22,00	22,00

Далі – запуск програми Поиск решения, заповнюємо поля її вікна й розв'язуємо систему рівнянь  $X = AX + B$ , де  $X$  – ліва частина, а  $AX + B$  – права частина системи обмежень-рівнянь:



Результат:

	Г-1	Г-2	Г-3	Г-4	Г-5	Г-6	B	X	AX	AX+B
Г-1	0,03	0,07	0,02	0,09	0,05	0,1	100	179,07	79,07	179,07
Г-2	0,09	0,03	0,1	0,07	0,02	0,09	125	217,13	92,13	217,13
Г-3	0,09	0,09	0,02	0,06	0	0,02	227,74	300	72,26	300,00
Г-4	0,06	0,03	0,08	0,06	0,2	0,09	408,04	500	91,96	500,00
Г-5	0,09	0,05	0,04	0,04	0	0,08	28,63	90	61,37	90,00
Г-6	0,09	0,1	0,02	0,02	0,06	0,02	-29,83	30	59,83	30,00

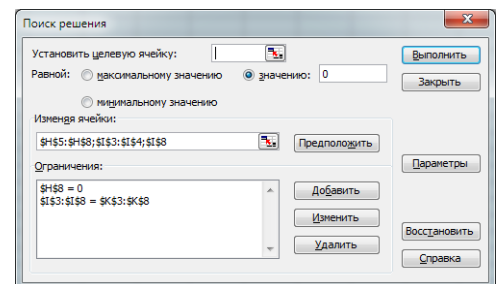
Знайдено 6 значень шуканих невідомих:

Для випуску $B1 = 100$ вал $X1 =$ <b>179,07</b>	Для валу $X3 = 300$ випуск $B3 =$ <b>227,74</b>
Для випуску $B2 = 125$ вал $X2 =$ <b>217,13</b>	Для валу $X4 = 500$ випуск $B4 =$ <b>408,04</b>
	Для валу $X5 = 90$ випуск $B5 =$ <b>28,63</b>
	Для валу $X6 = 30$ випуск $B6 = -$ <b>29,83.</b>

Від'ємне значення  $B6$  (купівля необхідного продукту замість продажу) свідчить про недостатню потужність 6-ої галузі, що неспроможна задовольнити навіть внутрішні потреби.

Виникла допоміжна задача: визначити максимальну потужність 6-ої галузі, яка хоча б задовольнила внутрішні потреби на її продукцію (про експорт мова не йде,  $B6 = 0$ ), для цього визначається невідома  $X6$  (клітинка I8) й формується додаткове обмеження:

$B6 = 0$ :



Результат:



	Г-1	Г-2	Г-3	Г-4	Г-5	Г-6	В	Х	АХ	АХ+В
Г-1	0,03	0,07	0,02	0,09	0,05	0,1	100	182,51	82,51	182,51
Г-2	0,09	0,03	0,1	0,07	0,02	0,09	125	220,33	95,33	220,33
Г-3	0,09	0,09	0,02	0,06	0	0,02	226,52	300	73,48	300,00
Г-4	0,06	0,03	0,08	0,06	0,2	0,09	404,94	500	95,06	500,00
Г-5	0,09	0,05	0,04	0,04	0	0,08	25,67	90	64,33	90,00
Г-6	0,09	0,1	0,02	0,02	0,06	0,02	0,00	61,08	61,08	61,08

Відповідь:  $X_6 = 61,08$ .

## Розширена балансова модель виробничо-ресурсної задачі

### Постановка задачі

Підприємство складається з  $m$  цехів, кожен з яких виготовляє один продукт й є одночасно виробником й споживачем продукції власної й інших цехів, яка є «проміжною» й складовою відповідної готової продукції – це класична задача МГБ, де визначаються потоки продукції двох видів: міжцехові *витрати* й *випуск* готової продукції. Будемо вважати, що міжцехові потоки продукції безкоштовні для підприємства.

Але цих потоків продукції явно недостатньо для здійснення виробничої програми, бо кожен цех згідно технології є споживачем певних  $n$  видів «зовнішніх» ресурсів, це: сировина, енергія, обладнання, послуги (інформаційні, транспортні, інші), які треба купувати за заданою ціною.

Таким чином, у розширеній задачі окрім потоків продукції є ще два потоки: ресурсів й коштів, для забезпечення виробничого процесу. Оцінка фінансових витрат на ресурсне забезпечення випуску кожного продукту дозволяє наблизитися до відповідної *задачі ціноутворення* за витратним підходом.

Це – не оптимізаційна, а одноваріантна задача, де вибору нема, бо з-за збалансованості (кількість виробників дорівнює кількості споживачів) маємо математичну модель, що зводиться до розв'язання визначеної СЛР, яка має один розв'язок. Зате ця модель буде надалі використана для розв'язання явно оптимізаційної (багатоваріантної) задачі, де відсутня умова збалансованості й розв'язується недовизначена СЛР.

Задано:

- замовлення на *випуск* готової продукції у вигляді вектора-стовпця з  $m$  елементів та
- технологічна матриця міжцехових *витрат* «проміжної» продукції розміром  $m \times m$ .

Визначити виробничий план у вигляді валового випуску кожного цеху для задоволення замовлення. Це – виробнича складова задачі, що зводиться до класичної моделі «витрати-випуск» й розв'язання визначеної СЛР.

Для ресурсного забезпечення визначеного виробничого плану додатково задано:

- питомі норми витрат  $n$  ресурсів для виготовлення одиниці продукції кожного цеху
- ціна цих ресурсів.

Визначити:

- коефіцієнти повних витрат ресурсів на одиницю готової продукції кожного цеху
- необхідну кількість кожного з  $n$  ресурсів та їх вартість по цехах й для кожного продукту
- нижню границю продажної ціни кожного продукту з урахуванням витрат на оплату ресурсів.

Це – ресурсна й вартісна складові задачі, які розв'язуються засобами матричної алгебри.

## Математична модель

### Позначення

$m$  – кількість цехів,  $n$  – кількість ресурсів,  $f$  – кількість фінансових показників ресурсів  
 $i$  – поточний номер цеху-виробника,  $j$  – поточний номер цеху-споживача,  $i, j = 1, \dots, m$

$p$  – поточний номер ресурсу,  $p = 1, \dots, n$ ,  $l$  – поточний номер фінансового показника,  $l = 1, \dots, f$

$A = \{a_{ij}\}$  – задана технологічна матриця розміром  $m \times m$

$W = (E - A)^{-1}$  – матриця повних витрат розміром  $m \times m$ , де  $E$  – одинична матриця розміром  $m \times m$

$B = \{b_i\}$  – заданий вектор-стовпець випуску готової продукції

$R = \{r_{pj}\}$  – задана матриця питомих витрат ресурсів розміром  $n \times m$

$C = \{c_{pl}\}$  – задана матриця питомих значень вартісних показників ресурсів розміром  $n \times f$

$X = \{x_i\}$  – шуканий валовий випуск

$D = \{d_{ij}\}$  – шукана матриця витрат продукції на внутрішні потреби розміром  $m \times m$  ( $D = AX$ )

$K = \{K_{pj}\}$  – шукана матриця кількостей ресурсів розміром  $n \times m$  на увесь валовий випуск

$k = \{k_{pj}\}$  – шукана матриця питомих кількостей ресурсів розміром  $n \times m$

$V = \{V_{pl}\}$  – шукана матриця витрат на ресурсне забезпечення валового випуску розміром  $n \times f$

$v = \{v_{pl}\}$  – шукана матриця питомих витрат на ресурсне забезпечення розміром  $n \times f$ .

### Алгоритм

- 1) Увести початкові дані: матриці  $A$ ,  $R$ ,  $C$ ; вектор  $B$
- 2) Обчислити матрицю повних витрат:  
 $W = (E - A)^{-1} = \text{МОБР}(\text{МУМНОЖ}(\text{МОБР}(A); A) - A)^{11}$
- 3) Визначити валовий випуск продукції для задоволення замовлення:  
 $X = WB = \text{МУМНОЖ}(W; B)$
- 4) Визначити міжцехові потоки продуктів:  
 $D = AX^T = \text{МУМНОЖ}(A; \text{ТРАНСП}(X))$
- 5) Обчислити повні витрати ресурсів:  
 $K = RX^T = \text{МУМНОЖ}(R; \text{ТРАНСП}(X))$
- 6) Обчислити питомі витрати ресурсів:  
 $k = RW = \text{МУМНОЖ}(R; W)$
- 7) Обчислити вартість необхідних ресурсів:  
 $V = C^T K = \text{МУМНОЖ}(\text{ТРАНСП}(C); K)$
- 8) Обчислити ресурсну складову продажної ціни продуктів:  
 $c = C^T k = \text{МУМНОЖ}(\text{ТРАНСП}(C); k)$

### Задача 1.13. Розв'язати виробничо-ресурсну задачу

Приклад ( $m = 3$ ;  $n = 4$ ;  $f = 2$ )

Початкові дані:

A	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3	Випуск (B)
Цех (продукт) 1	0,014	0,20	0,11	200
Цех (продукт) 2	0,270	0,09	0,17	150
Цех (продукт) 3	0,025	0,10	0,22	300

R	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3
Ресурс-1	1,4	2,4	0,8
Ресурс-2	0	0,6	1,6
Ресурс-3	2	1,8	2,2
Ресурс-4	10	20	20
норми витрат ресурсів			

C	Ціна	Доставка
Ресурс-1	5	0,23
Ресурс-2	12	1,25
Ресурс-3	2	0,69
Ресурс-4	1,2	2,50

<sup>11</sup> одиничну матрицю  $E$  для зменшення розмірів табличного документа представимо у віртуальній формі за формулою  $E = A^{-1}A$

## Результат

### Виробнича складова

A	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3	Випуск (B)	X (вал)
Цех (продукт) 1	0,014	0,20	0,11	200	<b>321,18</b>
Цех (продукт) 2	0,270	0,09	0,17	150	<b>342,10</b>
Цех (продукт) 3	0,025	0,10	0,22	300	<b>438,77</b>
Коеф. прямих (міжцехових) витрат продуктів					
X (вал)	321,18	342,10	438,77		
	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3		
Цех (продукт) 1	1,09	0,26	0,21		
Цех (продукт) 2	0,34	1,21	0,31		
Цех (продукт) 3	0,08	0,16	1,33		
Коеф. повних витрат продуктів					
	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3	AX	
Цех (продукт) 1	4,50	68,42	48,26	121,18	
Цех (продукт) 2	86,72	30,79	74,59	192,10	
Цех (продукт) 3	8,03	34,21	96,53	138,77	
Витрати продуктів на вн. потреби					

	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3
Ресурс-1	2,40	3,40	2,10
Ресурс-2	0,33	0,99	2,31
Ресурс-3	2,97	3,06	3,91
Ресурс-4	19,25	30,05	34,90
Витрати ресурсів на кожен продукт			
	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3
Ресурс-1	449,65	821,04	351,01
Ресурс-2	0,00	205,26	702,03
Ресурс-3	642,36	615,78	965,29
Ресурс-4	3211,81	6841,97	8775,37
Повні витрати ресурсів			

Ресурсна складова

	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3
Вартість ресурсів	7387,16	16010,20	22640,45
Вартість доставки	8576,17	17975,21	23562,74
Разом	<b>15963,32</b>	<b>33985,41</b>	<b>46203,19</b>
по цехах			
	Цех (продукт) 1	Цех (продукт) 2	Цех (продукт) 3
Вартість ресурсів	45,00	70,98	87,97
Вартість доставки	51,15	79,24	93,33
Разом	<b>96,14</b>	<b>150,22</b>	<b>181,30</b>
на одиницю продукту			

Вартісна складова

## Аналіз результату

Валовий випуск  $X = (321,18; 342,10; 438,77)$ .

Загальні витрати коштів на ресурсне забезпечення:

$$15963,32 + 33985,41 + 46203,19 = 96151,92.$$

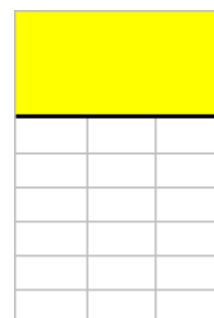
Ресурсна складова цін продуктів (96,14; 150,22; 181,30).

## Висновок

- 1) Завдяки застосуванню апарату матричної алгебри без застосування будь-яких допоміжних програмних продуктів ця модель дозволяє розв'язувати задачі будь-якого розміру
- 2) Згідно технології «Що-якщо» будь-які зміни початкових даних автоматично приводять до зміни значень результату, тому ця модель може бути складовою будь-якого бізнес-плану.

## Розв'язання перевизначеної системи лінійних рівнянь

Перевизначена система з  $m$  рівнянь й  $n$  невідомих ( $m > n$ ) не може мати єдиного загального розв'язку, який би точно задовольняв усі рівняння,



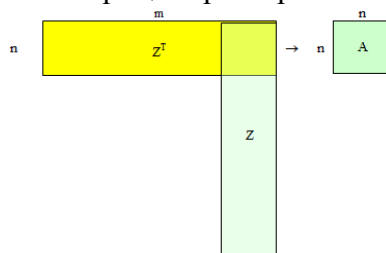
перетворюючи їх у тотожності підстановкою знайдених значень невідомих. Тому методом Гаусса-Маркова знаходять такий один розв'язок, який би у *середньому* найкращим чином задовольняв би усі частинні розв'язки.



Метод Гаусса-Маркова – це математично обґрунтований А. А. Марковим «метод найменших квадратів», визначений К. Гауссом, ці методи широко застосовуються, зокрема, у математичній статистиці.

Схематично ідею розв'язання такої системи за цим методом можна показати таким чином: задану систему із прямокутною («високою», бо рівнянь більше, чим невідомих) матрицею  $Z$  (із «зайвими» рядками) й такої ж «висоти» стовпцем правих частин  $B$  відповідними матричними обчисленнями зводять до визначеної системи із квадратною матрицею  $A$  (зафарбована) й відповідним стовпцем.

Наприклад, якщо задана система із матрицею  $Z$  розміром  $9 \times 3$ , то після матричних обчислень  $A = Z^T Z$  лишається квадратна матриця  $A$  розміром  $3 \times 3$ :



аналогічно, «вкорочують» й вектор  $B$ .

### Задача 1.14. Розв'язати перевизначену СЛР матричним методом

**Матричний метод** (три таблиці:  $A$ ,  $B$ ,  $X$ )

Правила матричних перетворень:

- 1) Задана «висока» матриця  $Z(m, n)$ , треба побудувати квадратну матрицю  $A(n, n) = Z^T Z$ .
- 2) Задано вектор-стовпець правих частин  $V(m)$  з  $m$  елементів, треба побудувати вектор-стовпець правих частин  $B(n)$  з  $n$  елементів:  $B(n) = Z^T V$ .
- 3) Розв'язується визначена система  $AX = B$ : розв'язок  $X = A^{-1} B$ .

Для реалізації цих перетворень й розв'язання перевизначеної системи використовуються функції Excel: ТРАНСП(А), МУМНОЖ(А;В), МОБР(А).

Приклад ( $m = 8$ ,  $n = 4$ )

Порядок роботи

- 1) Увести початкові дані: матрицю  $Z(8, 4)$  та вектор-стовпець  $V(8)$
- 2) Сформувати транспоновану матрицю  $Z^T(4,8)$
- 3) Обчислити матрицю  $A(4,4)$  та вектор-стовпець  $B(4)$
- 4) Перемножити матрицю  $A^{-1}$  на вектор  $B$  й отримати шуканий вектор  $X(4)$ .

**Результат**

BE2		fx {=МУМНОЖ(МОБР(AV2:AY5);BB2:BB5)}																							
AB	AC	AD	AE	AF	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ	AR	AS	AU	AV	AW	AX	AY	BA	BB	BD	BE
	5	8	2	3		12		5	4	-9	0	3	6	8	9			312	121	19	84		105	-0,44	
	4	0	8	4		-9		8	0	2	1	2	7	3	3			121	140	52	87		199	1,56	
	-9	2	4	5		6		2	8	4	3	5	3	2	-4			19	52	147	88		45	-0,65	
Z=	0	1	3	2		5		3	4	5	2	8	2	1	6			84	87	88	159		165	0,78	
	3	2	5	8		10																			
	6	7	3	2		6																			
	8	3	2	1		3																			
	9	3	-4	6		5																			

## Матричний метод (одна таблиця X)

Задачу можна розв'язати за допомогою однієї складеної матричної формули, щоб ця формула була менш громіздкою й зрозумілою, рекомендується надати імена матриці коефіцієнтів й стовпцю вільних членів (команда *Вставка* → *Имя* → *Присвоить*), Z та V, відповідно:

ВН2		fx {=МУМНОЖ(МОБР(МУМНОЖ(ТРАНСП(Z);Z));МУМНОЖ(ТРАНСП(Z);V))}													
	AB	AC	AD	AE	AF	AH	AI	ABD	BH	BK	BL	BM	BN	BO	BP
1															
2		5	8	2	3			12	-0,44						
3		4	0	8	4			-9	1,56						
4		-9	2	4	5			6	-0,65						
5	Z=	0	1	3	2			5	0,78						
6		3	2	5	8			10							
7		6	7	3	2			6							
8		8	3	2	1			3							
9		9	3	-4	6			5							

### Задача 1.15. Розв'язати перевизначену СЛАР графічним методом

З метою наочної ілюстрації методу Гаусса-Маркова розв'язок формується побудовою графіків  $m$  лінійних функцій,  $m > n$  ( $n = 2$ ).

#### Постановка економічної задачі

У 5 торговельних закладах міста за заданими цінами ( $C1$ ,  $C2$ ) зроблено контрольні закупівлі двох товарів у заданих вагових кількостях ( $B1$ ,  $B2$ ), обчислено виторг ( $V$ ):

	C1	C2	B1	B2	V
1	8,26	12,23	2	4	65,44
2	8,02	12,11	5	3	76,43
3	8,23	12,00	1	12	152,23
4	8,21	12,56	3	1	37,19
5	7,99	12,12	5	1	52,07

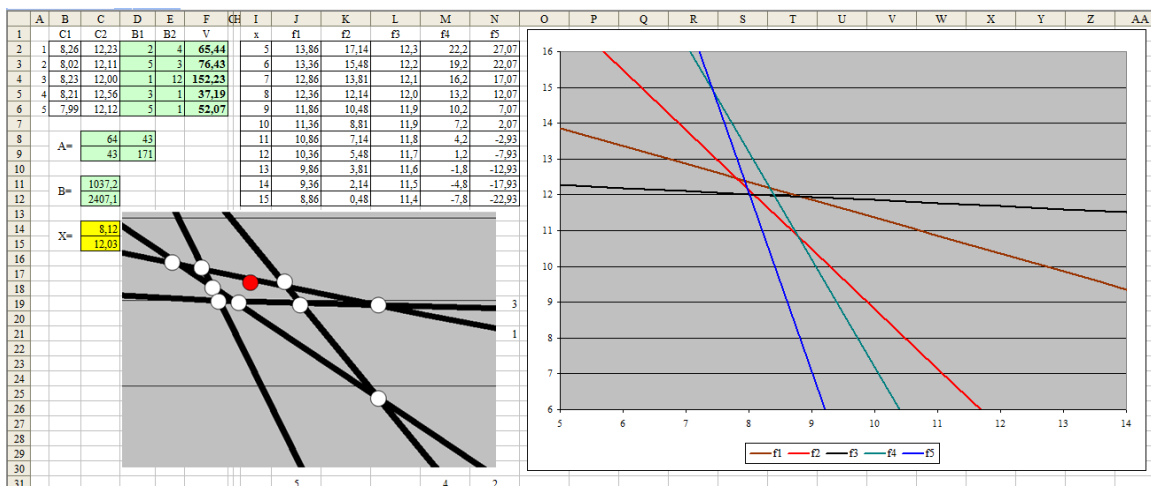
Треба визначити «центровані» ціни ( $x_1$ ,  $x_2$ ) цих двох товарів в межах міста, згідно яких можна було б оцінити відхилення заданих цін п'яти товарів у ту чи іншу сторону, щоб сума квадратів відхилень заданих цін була мінімальною (це суть методу найменших квадратів).

Інтуїтивно цю ситуацію можна представити таким чином: задані ціни – це розкидані точки на площині, кожна з парою координат ( $C1$ ,  $C2$ ), треба знайти таку «центрально точку» із шуканими координатами ( $x_1$ ,  $x_2$ ), щоб сума відстаней від центру до усіх заданих точок була мінімальною. Знайдені координати центру ( $x_1$ ,  $x_2$ ) дадуть відповідь щодо осереднених цін на два продукти.

Задача зводиться до розв'язання перевизначеної системи з  $m = 5$  та  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 65,44 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 76,43 \\ 1x_1 + 12x_2 &= 152,23 \\ 3x_1 + 1x_2 &= 37,19 \\ 5x_1 + 1x_2 &= 52,07. \end{aligned}$$

#### Результат



Завдяки лише двом невідомим у системі є можливість зробити графічну ілюстрацію, побудувавши 5 графіків залежностей  $x_2 = f(x_1)$ , на них треба знайти точки перетину ліній й знайдену центральну точку серед них.

Знаючи знайдені «центровані» ціни:  $X = (8,12; 12,03)$ , тепер можна оцінити відхилення заданих цін й відповідних виторгів:

	B1	B2	V2	V-V2	C1-x1	C2-x2
	2	4	64,38	1,06	0,14	0,20
	5	3	76,70	-0,27	-0,10	0,08
	1	12	152,53	-0,30	0,11	-0,03
	3	1	36,40	0,79	0,09	0,53
	5	1	52,64	-0,57	-0,13	0,09

Зі стовпця  $V - V2$  видно, що заклади 2, 3 та 5 втратили б, а заклади 1 та 4 – отримали би більше, якби торгували за визначеними «центрованими» цінами.

## Перевизначені системи лінійних алгебраїчних рівнянь в художній літературі<sup>12</sup>

У повісті Ф. М. Достоєвського «Ігрок» можна знайти сім цитат, у яких зашифровані курси 5 європейських валют за часів написання твору (2-га половина XIX ст.):

### Цитата 1

— Вы их немедленно получите, — ответил генерал, покраснев немного, порывлся у себя в бюро, справился в книжке, и оказалось, что за ним моих денег около **ста двадцати рублей**.

— Как же мы сосчитаемся, — заговорил он, — надо переводить на талеры. Да вот возьмите **сто талеров**, круглым счетом, — остальное, конечно, не пропадет.

и далее

Вам следует дополнить с меня эти **четыре фридрихсдора и три флорина** на здешний расчет.

### Цитата 2

Полина просто рассердилась, когда я передал ей всего только **семьсот гульденов**.

и далее

Слушайте и запомните: возьмите эти **семьсот флоринов** и ступайте играть, выиграйте мне на рулетке сколько можете больше; мне деньги во что бы ни стало теперь нужны.

### Цитата 3

Я начал с того, что вынул **пять фридрихсдоров**, то есть **пятьдесят гульденов**, и поставил их на четку.

### Цитата 4

— Да-с, вот взяла да и выиграла двенадцать тысяч флоринов! Какое двенадцать, а золото-то? С золотом почти что **тринадцать** выйдет. Это сколько по-нашему? Тысяч шесть, что ли, будет?

Я доложил, что и за семь перевалило, а по теперешнему курсу, пожалуй, и до **восьми** (тысяч рублей) дойдет.

### Цитата 5

— Oui, madame, — вежливо подтвердил крупер, — равно как всякая единичная ставка не должна превышать разом **четырёх тысяч флоринов**, по уставу, — прибавил он в пояснение.

<sup>12</sup> Очков В. Mathcad и некоторые тайны художественной литературы // Домашний компьютер, №5, 2000 г.

Я поставил самую большую позволенную ставку, в **четыре тысячи гульденов**, и проиграл.

Цитата 6

Ей проходило получать ровно **четыреста двадцать фридрихсдоров**, то есть **четыре тысячи флоринов и двадцать фридрихсдоров**.

Цитата 7

— Полина, вот **двадцать пять тысяч флоринов** — это **пятьдесят тысяч франков**, даже больше.

У 7 цитатах повісті не задано, а зашифровано 7 рівнянь з 5-ма невідомими (курсами валют):

- 1) 120 рублей = 100 талеров + 4 фридрихсдора + 3 флорина (цитата 1)
- 2) 700 гульденов = 700 флоринов (цитата 2)
- 3) 5 фридрихсдоров = 50 гульденов (цитата 3)
- 4) 13 000 флоринов = 8 000 рублей (цитата 4)
- 5) 4 000 флоринов = 4 000 гульденов (цитата 5)
- 6) 420 фридрихсдора = 4 000 флоринов + 20 фридрихсдоров (цитата 6)
- 7) 25 000 флоринов = 50 000 франков (цитата 7),

які треба спочатку упорядкувати, щоб задати ЛЧ й ПЧ системи (5 невідомих значень валют приймають участь у 7 ситуаціях).

Сформована відповідна перевизначена СЛАР (7 рівнянь й 5 невідомих) з цх неофіційних (й не точних) джерел:

	Талер	Фридрихсдор	Флорин	Гульден	Франк	Рубль
Цитата 1	100	4	3	0	0	120
Цитата 2	0	0	0	700	-700	0
Цитата 3	0	5	0	-50	0	0
Цитата 4	0	0	13000	0	0	8000
Цитата 5	0	0	4000	-4000	0	0
Цитата 6	0	400	-4000	0	0	0
Цитата 7	0	0	25000	0	-50000	0

її розв'язанням матричним методом можна визначити «центровані» курси 5 валют (талер, фридрихсдор, флорин, гульден и франк) по відношенню до рубля (імена діапазонів: А – матриця В2:F8 розміром 7×5, В – вектор G2:G8 з 7 елементів):

В10		={ТРАНСП(МУМНОЖ(МОБР(МУМНОЖ(ТРАНСП(А);А));МУМНОЖ(ТРАНСП(А);В)))}						
	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н
1		Талер	Фридрихсдор	Флорин	Гульден	Франк	Рубль	
2	Цитата 1	100	4	3	0	0	120	
3	Цитата 2	0	0	0	700	-700	0	
4	Цитата 3	0	5	0	-50	0	0	
5	Цитата 4	0	0	13000	0	0	8000	
6	Цитата 5	0	0	4000	-4000	0	0	
7	Цитата 6	0	400	-4000	0	0	0	
8	Цитата 7	0	0	25000	0	-50000	0	
9								
10	Курс к руб.	0,94	6,15	0,61	0,61	0,31		

Результат: талер (94 коп.), фридрихсдор (6,15 руб.), флорин и гульден (по 61 коп.), франк (31 коп.).

## Глава 2.

### Лінійне програмування: графічний та симплекс-метод. Моделі векторних задач лінійної оптимізації

*Приголомшуюча сила симплекс-методу завжди вражає мене.*  
Дж. Данциг

Лінійне програмування (ЛП) – популярний й найбільш розвинений апарат (задачі, теорія, моделі та методи) математичного моделювання задач оптимального використання обмежених ресурсів, що став основою математичного програмування.

#### Математична модель загальної задачі оптимізації

Незалежно від типу математична модель будь-якої задачі оптимізації має єдину узагальнену структуру, що складається з трьох частин:

- **План** (програма або рішення, яке треба знайти, *decisions*)
- **Цільова функція** (з якою метою і за яким критерієм, *objective*)
- **Обмеження** на невідомі плану та граничні умови (*constraints*).

Якщо шуканий план має форму вектора (рядка чи стовпця), задачі оптимізації будемо називати **векторними**, інакше, **матричними** чи **змішаними** (векторно-матричними).

Апарат ЛП спочатку під невиразною назвою «Програмування у лінійній структурі»<sup>13</sup>, пізніше під сучасною назвою<sup>14</sup> «Лінійне програмування» (ЛП) виник в 1947 р. в дослідженнях американського математика Дж. Данцига (1914–2005) для вдосконалення планування у ВПС США (US Air Force), хоча, як з'ясувалося пізніше, відповідна строга математична теорія була розроблена раніше у нас Л. В. Канторовичем (1939 р.), пріоритет якого був визнаний Данцигом<sup>15</sup> й підтверджений світовим науковим товариством присудженням Канторовичу Нобелівської премії з економіки за 1975 р.



На цей винахід Данцига надихнула ефектна й ефективна матрична модель міжгалузевого балансу В. В. Леонт'єва, який вперше успішно застосував апарат лінійної алгебри в економіці (1936 р.), а також співпраця з видатними дослідниками – математиком Дж. фон Нейманом та економістом Т. Купмансом (відзначеним Нобелівською премією з економіки разом з Канторовичем), дослідження яких стосувалися оптимізації в економіці, на виробництві та транспорті, в теорії прийняття управлінських рішень<sup>16</sup>.

Цінність цієї розробки Дж. Данцига полягає не лише в результатах з області обчислювальної математики, отриманих при розв'язанні систем лінійних нерівностей, але й у суто прикладному та користувацькому сенсі: для розв'язання різноманітних задач планування ним одразу був запропонований чіткий і ефективний машинний алгоритм пошуку оптимального плану, названий симплекс-методом, який спочатку досліджувався на перфорційній техніці та калькуляторах, а із серійним випуском перших ЕОМ (з 1950-их рр.) сим-

<sup>13</sup> Dantzig G. B. Programming in linear structure, Washington, Comptroller, USAF, 1948 (Лінійна структура – обмеження у формі системи лінійних нерівностей й рівнянь та лінійна ЦФ)

<sup>14</sup> слово «програмування» походить від широко уживаного в США, а тепер і у нас слова «програма», яке є синонімом понять «план» та «планування», визначаючи орієнтацію цього апарату на прикладні задачі з прийняття рішень у плануванні та управлінні; математичний термін «лінійне» означає, що мова йде про пошук екстремуму лінійної функції при лінійних обмеженнях на невідомі, які визначають шуканий план (програму)

<sup>15</sup> «... в СРСР у 1939 р. Канторовичем були оприлюднені ідеї лінійного програмування, віддані забуттю на ті два десятиріччя, які ознаменувалися відкриттям лінійного програмування й рішучим та повсюдним його впровадженням» [40]

<sup>16</sup> Neumann von J. On a maximization problem. Inst. for Adv. Study, Princeton, 1947

Koopmans T. C. (ed.) Activity analysis of production and allocation, N-Y, Wiley, 1951, 404 p. (збірник фундаментальних матеріалів першої конференції з математичної оптимізації, 1949 р.), уведений Купмансом термін activity відповідає поняттям: операція, процес, вид діяльності, продукт тощо, підкреслюючи універсальний характер їх оптимізаційного моделювання та аналізу для прийняття рішень



плекс-метод був реалізований у вигляді комп'ютерних програм для розв'язання реальних задач великого розміру (тепер вбудований в Excel).

Умови лінійності задач лінійного програмування:

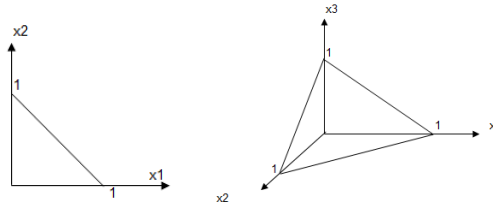
1. **Пропорційність** (дохід = ціна\*кількість)
2. **Адитивність** (Загальний дохід = сума доходів)
3. **Подільність** (невідомі дійсного типу, можуть мати дробові значення)
4. **Невід'ємність** шуканих невідомих.

## Симплекс-метод

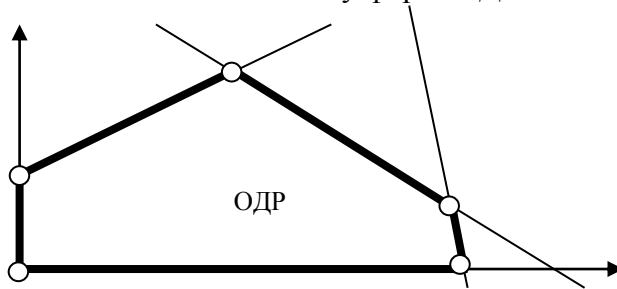
Математичний термін “симплекс” (лат. – *простий*) стосується найпростішої опуклої геометричної фігури, побудованої на осях координат – саме таку фігуру нагадує багатогранна область допустимих розв'язків чи рішень (ОДР) графічного розв'язку систем нерівностей, що й стало причиною назви методу (реальна ОДР не є симплексом).

Симплекс для:

- двовимірного простору ( $n = 2$ ) це трикутник, створений перетином прямої з осями  $x_1$  та  $x_2$  у точках  $(1, 0)$  та  $(0, 1)$
- тривимірного простору ( $n = 3$ ) це тетраедр, створений перетином трикутника з осями  $x_1, x_2$  та  $x_3$  у точках  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

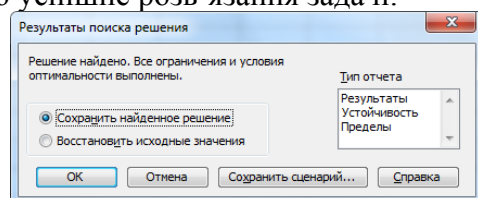


Для лінійних задач характерна опуклість ОДР, цю властивість симплекс-метод з успіхом використовує, бо Данциг довів, що всі допустимі й оптимальне, у тому числі, значення цільової функції (плани, рішення) – це опорні розв'язки недовизначеної СЛАР, що знаходяться саме в кутових точках ОДР, яких не так вже й багато (їх перебір досить швидкий, що й забезпечило ефективність методу). Таким чином, симплекс-методом відшуковують кутові точки на множині у формі ОДР:

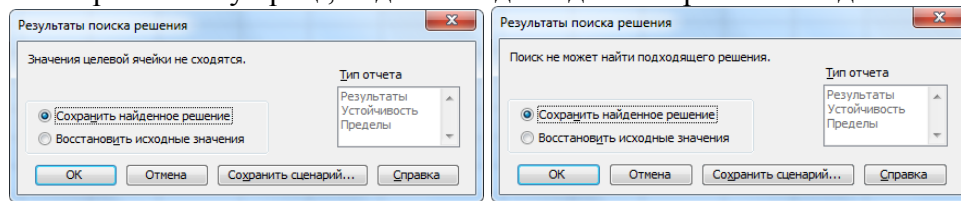


Багатокроковий алгоритм пошуку оптимуму побудований таким чином, що спочатку визначається опорний план (скажімо, у початку системи координат, де всі координати нульові), а далі на кожному наступному кроці формується кутова точка (допустимий план), яка перевіряється на оптимум.

При його досягненні знайдено оптимальний план і процес обчислень завершується із виведенням повідомлення про успішне розв'язання задачі:



інакше на шляху до оптимуму відшукується наступна кутова точка, краща за попередню. Таким чином, симплекс-метод використав властивості об'єктів лінійної алгебри і визначив принципово новий клас обчислювальних методів ітераційного типу для задач лінійної оптимізації. Якщо математична модель некоректна, алгоритм може не розпочатися чи зупинитися десь на проміжному кроці, видавши відповідне «аварійне» повідомлення:



## Теорія двоїстості та її економічний смисл

Смисл і походження двоїстості – суто математична проблема, для користувачів (економістів, менеджерів) же формально вона визначається таким чином: є задача ЛП, яку називають прямою (чи основною). На тих же початкових даних – технологічній матриці  $A$ , векторах  $B$  (запаси) і  $C$  (ціни) – формується інша задача ЛП, яка по відношенню до *прямой* називається *двоїстою* задачею.

Таким чином, набір початкових даних  $A, B, C$  визначає пару пов'язаних між собою (спряжених) задач лінійного програмування – прямої та двоїстої до неї задач. Цікаво, що двоїстий симплекс-метод, вбудований в Excel, діє таким чином, що результатом обчислень є розв'язок одночасно цих двох задач, й це дуже ефективно, бо значення двоїстої задачі суттєво доповнюють оптимальний план прямої задачі.

Економічний зміст невідомих змінних двоїстої задачі (Канторович досить справедливо назвав їх «об'єктивно обумовленими оцінками»), це т. зв. *тіньові ціни*, *shadow price*, де термін «тіньова ціна» – це умовна й зрозуміла вартісна оцінка обмежувального показника, заданого у кількісній формі, це «цінність» цього показника (наприклад, запасу ресурсу, заданого у тоннах) у грошовому вимірі. І ці об'єктивно обумовлені оцінки, саме як тінь, невідступно супроводжують реальні кількісні показники, даючи змогу однозначно оцінити їх «вагу» й вплив на кінцевий показник, скажімо, на очікуваний прибуток чи вимушені витрати.

Ефективність двоїстих оцінок отриманого оптимального плану полягає в тому, що, поняття «об'єктивно обумовлені» вказують на безпосередню залежність результату – оптимального плану – лише від початкових даних задачі (отримуємо щось з того, що маємо), а слово «оцінка» стосується, зокрема, *вартісного* оцінювання наявних ресурсів у відповідній плановій задачі, де ці ресурси витрачаються для виготовлення продукції і задані *кількісно*.

Наприклад, нижче це буде показано детальніше, маємо два ресурси (паливо і сировину), їх запаси (100 та 245 ваг. од.), отримано оптимальний план, який забезпечує максимальний дохід, при його реалізації обидва запаси вичерпано. Ясно, що дефіцит цих ресурсів є «вузьким місцем», бо не дозволяє збільшити об'єм виробництва, для їх запасів отримано співвідношення у формі:

$\frac{\text{запас (кількісна оцінка)}}{\text{тіньова ціна (вартісна оцінка)}}$  наприклад, це два співвідношення:  $\frac{100}{3,6}$  та  $\frac{245}{3,1}$  відповідно.

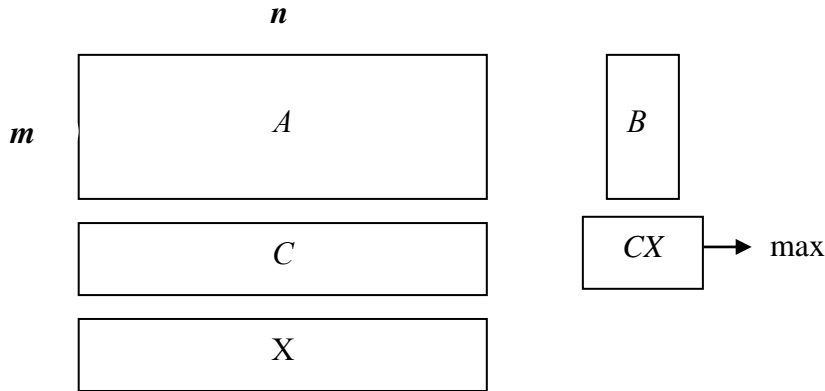
Величини 3,6 та 3,1 якраз є точними вартісними оцінками з позицій отримання майбутнього доходу при збільшенні наявних запасів відповідних ресурсів (100 та 245) на одиницю (до 101 та до 246) – однозначно видно, що перший ресурс (паливо) «цінніший» за другий (сировина), бо  $3,6 > 3,1$ .

## Пряма і двоїста задачі лінійного програмування

Зобразимо схематично структуру даних початкової – *прямой* – задачі ЛП, де:  $m$  – кількість обмежень,  $n$  – кількість невідомих (план),  $(m \times n)$  – розмір задачі

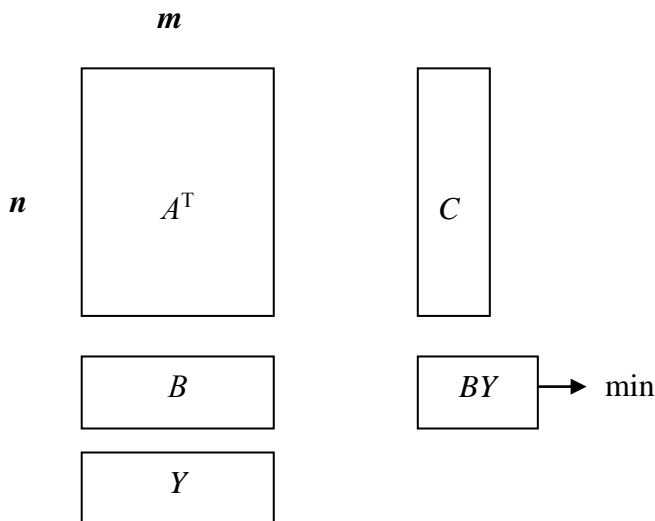
$A(m \times n)$  – технологічна матриця (норми витрат)  
 $B(m)$  – вектор обмежень (запаси ресурсів), знак обмежень ( $\leq$ )  
 $C(n)$  – вектор коефіцієнтів цільової функції (ціни)  
 $X(n)$  – шуканий вектор невідомих (план)  
 $CX$  – загальний дохід (цільова функція, ЦФ), критерій оптимізації – максимум ЦФ.

Структура даних прямої задачі:



Тепер, для порівняння, зобразимо схематично структуру даних *двоїстої* до прямої задачі, де структури даних «розвернулися», а саме:

$m$  – кількість невідомих (план),  $n$  – кількість обмежень,  $(n \times m)$  – розмір задачі  
 $A^T(n \times m)$  – транспонована технологічна матриця (норми витрат)  
 $B(n)$  – вектор коефіцієнтів цільової функції  
 $C(m)$  – вектор обмежень (запаси ресурсів), знак обмежень ( $\geq$ )  
 $Y(n)$  – вектор невідомих (двоїстий план)  
 $BY$  – загальні витрати (цільова функція, ЦФ), критерій оптимізації – мінімум ЦФ.



Взаємозв'язки між цими двома задачами

#### Пряма задача

- I. Знайти план  $X(n)$
- II. щоб ЦФ  $CX \rightarrow \max$
- III. при обмеженнях  $AX \leq B$   
і граничних умовах  $X \geq 0$

де:

- кожному обмеженню прямої задачі відповідає невідома змінна двоїстої задачі і навпаки

#### Двоїста задача

- I. Знайти план  $Y(m)$
- II. щоб ЦФ  $BY \rightarrow \min$
- III. при обмеженнях  $A^T Y \geq C$   
і граничних умовах  $Y \geq 0$

- матриця коефіцієнтів обмежень прямої задачі змінюється на транспоновану
- вільні члени прямої задачі є коефіцієнтами ЦФ двоїстої
- знаки нерівностей прямої задачі ( $\leq$ ) змінюються на зворотні ( $\geq$ ) у двоїстій
- максимізація у прямій задачі змінюється на мінімізацію у двоїстій задачі
- співвідношення двоїстості взаємне, тобто, задача, двоїста до двоїстої задачі, є прямою.

Доведені наступні й дуже важливі властивості моделі лінійного програмування (теореми двоїстості):

- якщо одна з задач двоїстої пари має оптимум, то й інша його має, при цьому значення цільових функцій обох задач співпадають, тобто, максимум прямої задачі дорівнює мінімуму двоїстої задачі і навпаки;
- якщо в прямій задачі певне  $i$ -те обмеження виконується як строга нерівність (зі знаком “<”, наприклад, Використано < Запас, це означає, що *кількість* використаного  $i$ -го ресурсу менша його запасу), відповідна двоїста змінна  $y_j = 0$ . В економічному смислі це значить, що нульову *вартісну* оцінку має ресурс, у якого є залишок і поповнювати цей запас не треба;
- якщо в прямій задачі певне  $i$ -те обмеження виконується як рівняння (знак “=”, Використано = Запас, тобто, використано все, що було), відповідна двоїста змінна є позитивним числом ( $y_j > 0$ ). В економічному смислі це означає, що позитивну *вартісну* оцінку має ресурс, запаси якого повністю використані. Це число ( $y_j$ ) показує “цінність” ресурсу, тобто, на скільки збільшиться ЦФ при збільшенні цього (дефіцитного) ресурсу на одиницю;
- якщо невідома  $x_i$  в прямій задачі (на максимум) має додатне значення, відповідне обмеження двоїстої задачі виконується як рівняння, якщо ж  $x_i = 0$ , то як строга нерівність. З точки зору економіки це означає: якщо  $i$ -ий продукт увійшов в оптимальний план (не нуль), двоїста *вартісна* оцінка всіх ресурсів, витрачених на його виготовлення, точно дорівнює його ціні – його виготовлення вигідне (рентабельне), інакше (якщо  $x_i = 0$ ) витрати на ресурси вищі, ніж продажна ціна – виготовлення такого продукту не вигідне, воно буде збитковим (збитки дорівнюють різниці між продажною ціною і умовною вартістю ресурсів). Саме на величину цієї різниці:
  - зменшиться дохід (значення ЦФ) при вимушеному випуску одиниці не вигідної продукції. Ця різниця називається (за некоректним перекладом) нормованою (приведеною, в Excel 2010) вартістю оригіналу – *reduced cost (to reduce* – зменшувати) або
  - треба збільшити задану ціну, щоб його випуск став рентабельним (це важлива складова задачі оптимального ціноутворення).

## Задачі ЛП

### 1) Векторні задачі оптимізації:

- пошук  $n$  невідомих змінних дійсного типу у формі **вектора**  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , таких, щоб
- лінійна цільова функція  $CX = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$  цих  $n$  невідомих досягла:
  - максимума
  - мінімуму чи
  - заданого значення

де  $C = (c_1, \dots, c_n)$  – заданий **вектор** коефіцієнтів ЦФ;

- на шукані невідомі накладено  $m$  обмежень у вигляді системи  $m$  лінійних нерівностей і рівнянь з  $n$  невідомими, її коефіцієнти утворюють прямокутну матрицю  $A(m \times n)$ , а права частина задана вектором  $B(m)$
- задовольняються граничні умови невід’ємності невідомих: всі  $x_i \geq 0$ ;

### 2) Матричні задачі оптимізації:

- пошук  $mn$  невідомих змінних дійсного типу у формі **матриці**  $X = (x_{11}, \dots, x_{mn})$ , таких, щоб
- лінійна цільова функція  $CX = c_{11}x_{11} + \dots + c_{mn}x_{mn}$  цих  $mn$  невідомих досягла:
  - максимуму
  - мінімуму чи
  - заданого значення

де  $C = (c_{11}, \dots, c_{mn})$  – задана **матриця** коефіцієнтів ЦФ;

- на шукані невідомі накладено  $m$  обмежень у вигляді системи  $m$  лінійних нерівностей і рівнянь з  $mn$  невідомими, її коефіцієнти утворюють прямокутну матрицю  $A(m \times n)$ , а права частина задана вектором  $B(m)$
- задовольняються граничні умови невід'ємності невідомих: всі  $x_{ij} \geq 0$ .

### 3) Змішані задачі оптимізації

Сюди відносять задачі, шукані невідомі яких утворюють комбінації векторів й матриць одного чи різного розміру й форми (стовпець, рядок, матриця), у полі *Изменяя ячейки* розв'язувача *Поиск решения* відповідні діапазони даних розділяють знаком «;».

### Табличне моделювання задач лінійної оптимізації

Таблиці найкраще відповідають структурі моделей оптимізації завдяки традиційному й компактному представленню даних і відповідних математичних конструкцій (ЦФ, обмежень) у вигляді нерівностей, рівнянь та їх систем, тому на практиці саме табличні моделі, реалізовані в середовищі табличного процесора, є основним засобом для пошуку оптимуму.

#### Правила побудови табличних моделей:

1) Організація й уведення початкових даних таким чином, щоб візуально визначити їх призначення, а згодом оформити логічні зв'язки з невідомими, обмеженнями та ЦФ таким чином, щоб таблична модель задачі оптимізації органічно відтворювала властивості відповідного робочого документа.

1) Не вводити числові константи в формули, краще їх значення задавати в окремих клітинках з відповідними позначеннями. Це дасть змогу швидко і зручно модифікувати модель, пристосовуючи її до реальної ситуації.

2) Логічно зв'язані величини рекомендується розміщувати поруч. Наприклад, ліві і праві частини обмежень розміщувати одне біля одного, в паралельних колонках чи рядках.

3) Однорідні структури даних (матриці, вектори) задавати у вигляді діапазонів клітинок, діапазонам рекомендується надавати змістовні імена.

4) Використовувати колір, заливку та границі для виокремлення початкових даних і результатів, а також текстові коментарі та підказки до клітинок, щоб модель була зрозумілою і зручною для користування.

5) Для реалізації табличної моделі застосовується програмний модуль *Поиск решения* (в оригіналі Excel Solver) у вигляді додаткової компоненти (надбудови, рос. - *надстройка*, англ. - *add-in*) табличного процесора MS Excel, яка призначена для розв'язання визначених систем рівнянь, лінійних та нелінійних задач оптимізації, використовується з 1991 року.

Розмір задачі, яку можна розв'язати за допомогою стандартної версії цієї програми, обмежується такими граничними показниками:

- кількість невідомих (*decision variable*) – **200**
- кількість формульних обмежень (*explicit constraint*) на невідомі – **100**
- кількість граничних умов (*simple constraint*) на невідомі – **400**.

### Задача про оптимальний план виробництва (про оптимальне використання обмежених ресурсів)

#### Постановка задачі

Підприємство має обмежені запаси  $m$  видів ресурсів, які розподіляються для виготовлення  $n$  видів продуктів.

Ставиться задача:

- про оптимальний план виробництва – ЩО й СКІЛЬКИ виготовити з цих запасів або
- про оптимальний розподіл запасів – КУДИ й СКІЛЬКИ направити, щоб обмежені ресурси найкраще використати.

Задано:

- запаси  $m$  видів ресурсів
- ціни  $n$  видів продуктів
- питомі витрати ресурсів для кожного продукту (визначені технологією у вигляді технологічної матриці розміром  $m \times n$ ).

Треба знайти такий план розподілу ресурсів для виробництва продукції у формі шуканого вектора-рядка, щоб забезпечити максимальний дохід від реалізації виготовленої продукції із врахуванням обмежень на наявні обсяги ресурсів.

## Математична модель

### Позначення

$m$  – кількість ресурсів

$n$  – кількість продуктів

$i$  – поточний номер (індекс) ресурсу,  $i = 1, \dots, m$

$j$  – поточний номер (індекс) продукту,  $j = 1, \dots, n$

$a_{ij}$  – питомі витрати  $i$ -го ресурсу для виготовлення  $j$ -го продукту,  $A = \{a_{ij}\}$  – технологічна матриця

$z_i$  – запас  $i$ -го ресурсу,  $Z = \{z_i\}$  – вектор-стовпець запасів ресурсів

$c_j$  – ціна одиниці  $j$ -го продукту,  $C = \{c_j\}$  – вектор-рядок цін продуктів

$x_j$  – шукана кількість  $j$ -го продукту,  $X = \{x_j\}$  – план випуску продукції

$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$  – загальні витрати  $i$ -го ресурсу, використаного для випуску  $x_j$  одиниць  $j$ -ої продукції

$z_i - v_i$  – залишки  $i$ -го ресурсу

$d_j = c_j x_j$  – дохід від реалізації  $j$ -го продукту,  $D = \sum_{j=1}^n d_j$  – загальний дохід (ЦФ).

### **Задача оптимізації**

I. Знайти план  $X = \{x_j\}$ , за яким

II. ЦФ  $D = \sum_{j=1}^n d_j \rightarrow \max$

III. за обмежень  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq z_i$  (використано  $\leq$  запас)

та граничних умов: усі  $x_j \geq 0$ .

### Початкові дані:

- список-стовпець назв  $m$  ресурсів ( $i = 1, \dots, m$ )
- список-рядок назв  $n$  продуктів ( $j = 1, \dots, n$ )
- питомі витрати кожного ресурсу для кожного продукту (матриця  $V$  розміром  $m \times n$ )
- запаси ресурсів (стовпець  $Z$  з  $m$  значень)
- ціни продуктів (рядок  $C$  з  $n$  значень).

## Задача 2.1. Про оптимальний план ( $n = 2$ ): графічний метод

### Постановка задачі

Для виготовлення двох продуктів (П-1 та П-2) використовуються три види ресурсів, задано: технологічна матриця питомих витрат ресурсів розміром  $3 \times 2$ , стовпець запасів ресур-

сів та рядок цін продуктів. Треба визначити оптимальний план виробництва (що й скільки виготовити), щоб дохід від реалізації продукції був максимальним із врахуванням обмежень на запаси ресурсів.

Два продукти й, відповідно, дві шукані невідомі, вибрано з метою побудови шуканого плану графічним методом.

### Приклад 1.

Початкові дані

	П-1	П-2	Запас (Z)
Ресурс 1	2	0,3	23
Ресурс 2	1,2	0,9	60
Ресурс 3	2,9	1,1	50
Ціна	12	10	

### **Задача оптимізації**

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2)$ , такий, щоб

II. ЦФ  $D = 12x_1 + 10x_2 \rightarrow \max$

III. за обмежень:

$$2,0x_1 + 0,3x_2 \leq 23$$

$$1,2x_1 + 0,9x_2 \leq 60$$

$$2,9x_1 + 1,1x_2 \leq 50$$

та граничних умов:  $x_1, x_2 \geq 0$ .

Графічний розв'язок задачі ЛП є наочною ілюстрацією процесу лінійної оптимізації: шляхом побудови графіків лінійних функцій, визначених з нерівностей системи обмежень, формується ОДР у формі багатокутника, далі будують графік ЦФ у вигляді прямої лінії, точка дотику якої до певної кутової точки ОДР визначає шуканий план (X).

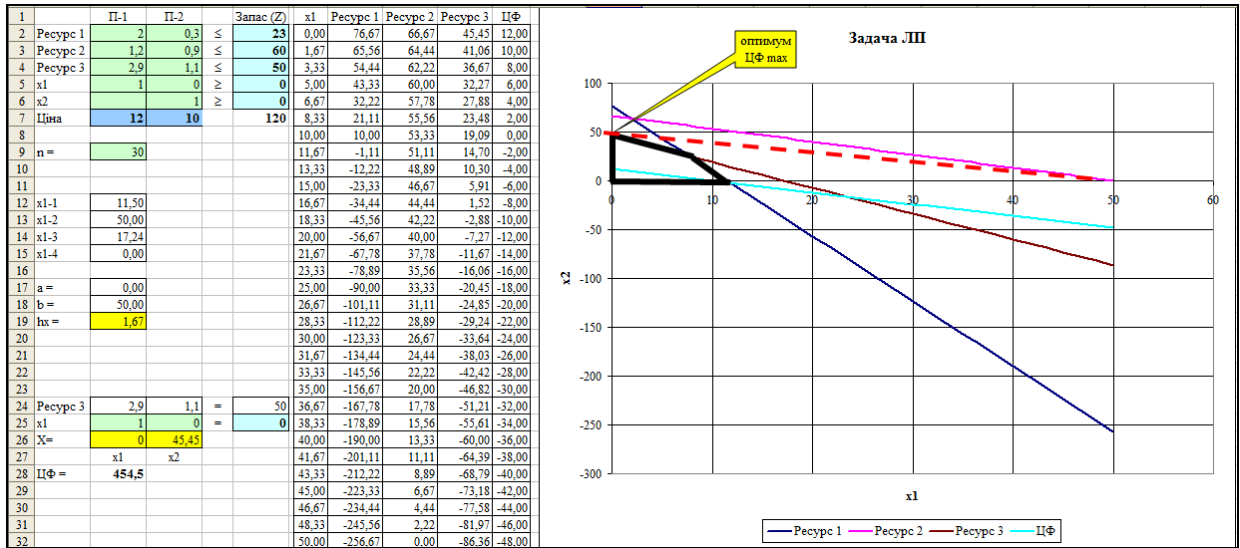
Будемо вважати змінну  $x_1$  аргументом, а змінну  $x_2$  – функцією, відповідно, кожна нерівність на графіку – напівплощина, обмежена з одного боку (в залежності від знака нерівності) прямою лінією, яка є, у свою чергу, графіком відповідного лінійного рівняння.

Пояснення: є нерівність  $2,0x_1 + 0,3x_2 \leq 23$  (обмеження для ресурсу 1), перетвореннями маємо функцію  $x_2 = f(x_1)$ :  $x_2 = -6,6x_1 + 76,6$ , її графік – пряма лінія, що обмежує зверху (не більше, ніж) напівплощину. Аналогічно формуються інші напівплощини, загалом їх п'ять: три нерівності для ресурсів й дві – для осей  $x_1$  та  $x_2$ , їх перетин формує ОДР.

### Порядок роботи

- 1) Увести початкові дані: технологічну матрицю, стовпець запасів та рядок цін
- 2) Для побудови графіків функцій увести число  $n$  – кількість проміжків на осі  $x_1$
- 3) Обчислити граничні значення діапазону  $x_1 \in [a, b]$  і крок  $h_{x_1}$  для побудови графіків функцій
- 4) Побудувати таблицю зі значеннями: аргументу  $x_1$ , трьох функцій (для ресурсів) та ЦФ
- 5) За табличними даними побудувати ОДР, окресливши її товстими лініями
- 6) Зробити пунктирну копію лінії ЦФ й паралельним її переносом визначити кутову точку її дотику з ОДР, де ЦФ набуває максимального значення. Визначити наближене значення ЦФ для знайденої точки оптимуму.

## Результат 1



Лінія ЦФ (пунктир) доторкнулася ОДР (окреслена товстою лінією) у кутовій точці, чії координати є розв'язком задачі.

### Аналіз результату 1

I.  $X \approx (0; 45,45)$

II. ЦФ  $D \approx 454,45$

III. Обмеження:

$2,0 \cdot 0 + 0,3 \cdot 45,45 = 13,64 < 23$  (нерівність, є залишки)

$1,2 \cdot 0 + 0,9 \cdot 45,45 = 40,91 < 60$  (нерівність, є залишки)

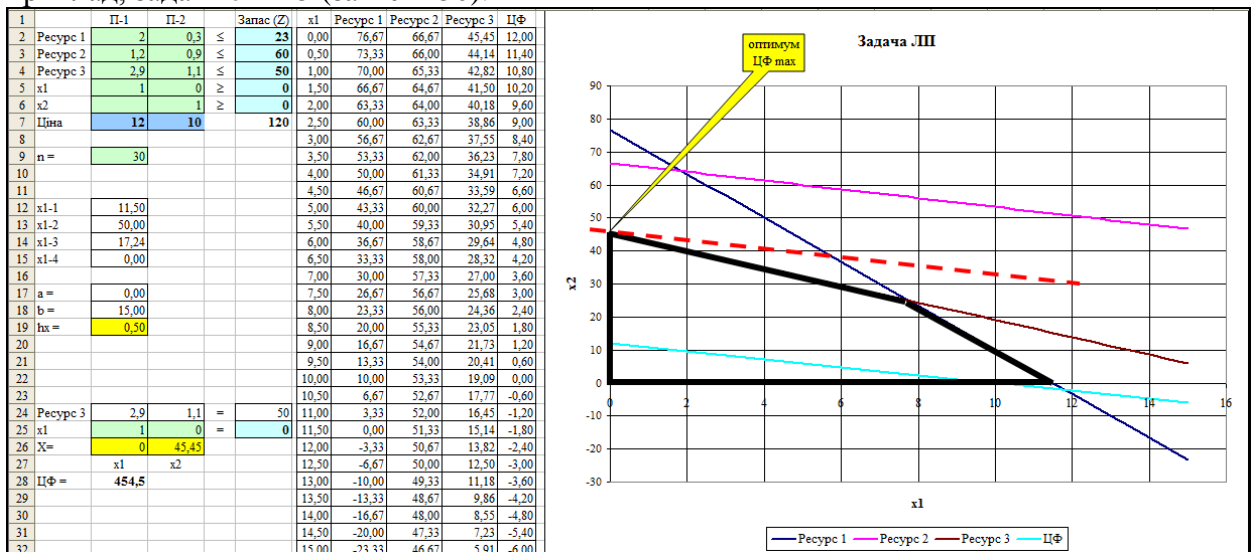
$2,9 \cdot 0 + 1,1 \cdot 45,45 = 50,00 = 50$  (тотожність, ресурс 3 – дефіцитний, його запаси вичерпані).

Оптимум знаходиться у точці, утвореній перетином графіків  $x_1 = 0$  та  $2,9x_1 + 1,1x_2 = 50$  (3-го ресурсу).

Виходить, що «вузьким місцем», що стримує загальний дохід, є запас 3-го ресурсу (50 од.) – збільшення цього запасу автоматично приведе до збільшення ЦФ (загального доходу).

Це – обґрунтований й зважений сигнал менеджру щодо шляху до зростання доходу.

Щоб графік був більш наочним, достатньо змінити праву границю – значення  $b = x_p$ , наприклад, задати  $b = 15$  (замість 50):

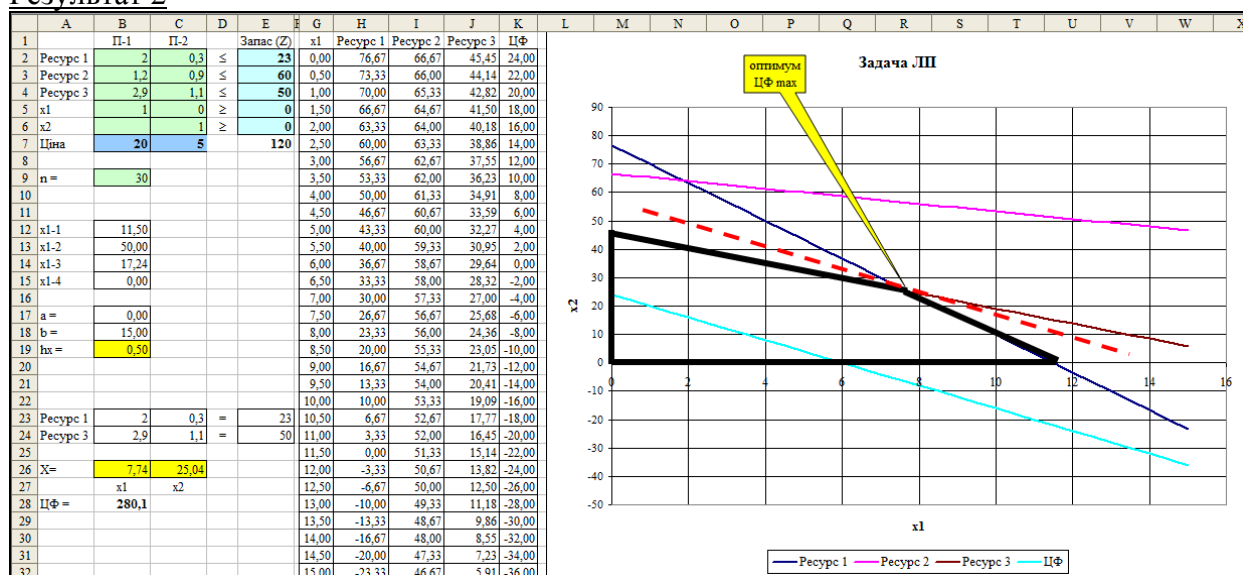




Достоїнство графічного методу, реалізованого за технологією наукової графіки – зміна значень початкових даних приводить до автоматичних змін на графіку.

Змінимо значення цін продуктів:  $c_1 = 20$ ,  $c_2 = 5$ .

## Результат 2



Оптимум знаходиться у точці, утвореній перетином графіків для рівнянь  $2,0x_1 + 0,3x_2 = 23$  та  $2,9x_1 + 1,1x_2 = 50$  (1-го та 3-го ресурсів).

## Аналіз результату 2

I.  $X \approx (7,74; 25,07)$

II. ЦФ  $D \approx 280,10$

III. Обмеження:

$2,0 \cdot 7,74 + 0,3 \cdot 25,07 = 23,00 = 23$  (Ресурс 1 – дефіцитний, його запаси вичерпані)

$1,2 \cdot 7,74 + 0,9 \cdot 25,07 = 31,83 < 60$  (є залишки)

$2,9 \cdot 7,74 + 1,1 \cdot 25,07 = 50,00 = 50$  (Ресурс 3 – дефіцитний, його запаси вичерпані).

«Вузким місцем», що стримує загальний дохід, є запаси 1-го й 3-го ресурсу (23 та 50 од.) – збільшення будь-якого з цих запасів автоматично приведе до збільшення ЦФ (загального доходу).

## Висновок

Графічний метод є наочною ілюстрацією симплекс-методу – оптимум знаходиться у кутовій точці ОВФ (ОДР), яка побудована за заданою системою лінійних обмежень-нерівностей й відповідає тим обмеженням, що із заданих нерівностей стали рівняннями (відповідні ресурси використані повністю).

**Приклад 2.** (тестова задача [46], с. 23).

Розв'язати геометрично задачу ЛП:

### 1.2

$$F = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 \leq 11$$

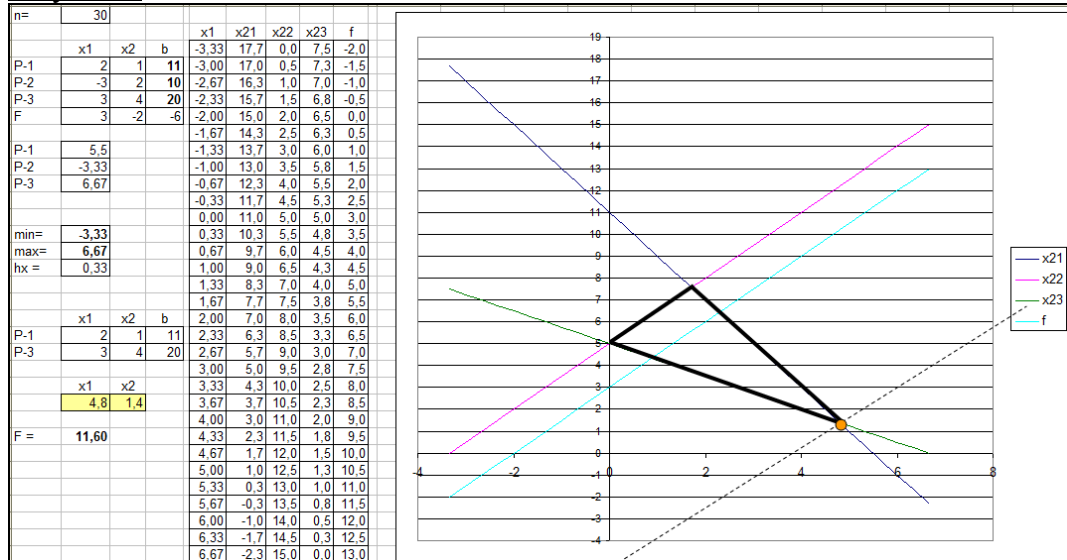
$$-3x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$1.2. F = 11\frac{3}{5}; X = \left\{ 4\frac{4}{5}; 1\frac{2}{5} \right\}.$$

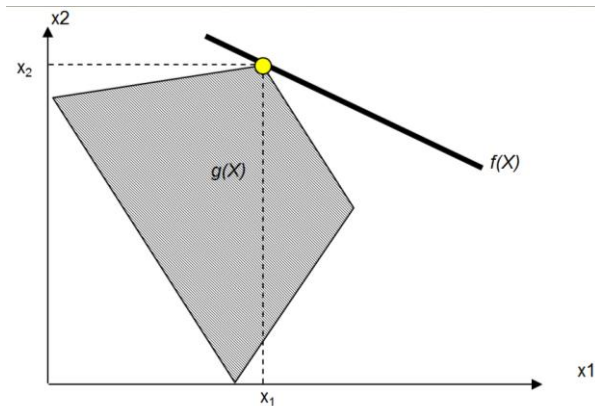
## Результат



## Висновок

Графічний метод на прикладі задачі ЛП наочно демонструє сутність оптимізаційної моделі:

- шуканий план  $X$  формує область визначення функції (систему координат  $x_1 \text{ } x_2$ );
- система обмежень у цій системі координат виокремлює область допустимих розв'язків (рішень)  $g(X)$ ;
- спільна точка області  $g(X)$  й цільової функції  $f(X)$  визначає план  $X=(x_1, x_2)$  й, одночасно, ресурси, запаси яких вичерпані; ці ресурси є «цінними» й визначають «вузьке місце» оптимізаційної задачі, їх умовна «цінність» відповідає тіншовим цінам двоїстої задачі:



## Задача 2.2. Про оптимальний план: симплекс-метод

### Приклад 1.

6 видів ресурсів використовуються у виготовленні 5 видів продуктів. Знайти оптимальний план випуску продукції при обмеженні на кількість ресурсів.

### Початкові дані

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів
ДСП (м <sup>2</sup> )	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3
Ціна продукту	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>	

## Математична модель

### Позначення:

#### План

$x_1$  – шукана кількість 1-го продукту (стільці)

$x_2$  – шукана кількість 2-го продукту (парти)

$x_3$  – шукана кількість 3-го продукту (столи письмові)

$x_4$  – шукана кількість 4-го продукту (столи комп'ютерні)

$x_5$  – шукана кількість 5-го продукту (кафедри)

$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  або  $X = \{x_j\}, j = 1, \dots, 5$  – шуканий план виробництва.

#### Цільова функція

Доходи:

$d_1 = c_1x_1$  у прикладі:  $216,78x_1$  – дохід від реалізації 1-го продукту (стільці)

$d_2 = c_2x_2$  у прикладі:  $340,93x_2$  – дохід від реалізації 2-го продукту (парти)

$d_3 = c_3x_3$  у прикладі:  $544,84x_3$  – дохід від реалізації 3-го продукту (столи письмові)

$d_4 = c_4x_4$  у прикладі:  $633,52x_4$  – дохід від реалізації 4-го продукту (столи комп'ютерні)

$d_5 = c_5x_5$  у прикладі:  $386,89x_5$  – дохід від реалізації 5-го продукту (кафедри)

$D = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5$  або  $D = CX$  – цільова функція, критерій оптимізації – максимум цільової функції (суми доходів).

#### Обмеження

Використано ресурсів (ліва частина обмежень, ЛЧ):

$v_1 = 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3,5x_4 + 2,1x_5$ , 1-ий ресурс (ДСП)

$v_2 = 2,2x_1 + 0,5x_2 + 1,5x_3 + 2,9x_4 + 2,4x_5$ , 2-ий ресурс (Фанера)

$v_3 = 6x_1 + 12x_2 + 18x_3 + 24x_4 + 8x_5$ , 3-ий ресурс (Кріплення)

$v_4 = 0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,6x_3 + 0,4x_4 + 0,1x_5$ , 4-ий ресурс (Фарба)

$v_5 = 2,6x_1 + 3,4x_2 + 1,4x_3 + 1,8x_4 + 0x_5$ ,

5-ий ресурс (Мет. труба)

$v_6 = 0,08x_1 + 0,4x_2 + 0,1x_3 + 0,3x_4 + 0,2x_5$ , 6-ий ресурс (Лак)

$V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$  – ліва частина обмежень (ЛЧ)

$Z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$  – задані запаси ресурсів, права частина обмежень (ПЧ)

Система нерівностей-обмежень

$v_1 \leq z_1$  у прикладі:  $v_1 \leq 34$  (ДСП)

$v_2 \leq z_2$  у прикладі:  $v_2 \leq 78$  (Фанера)

$v_3 \leq z_3$  у прикладі:  $v_3 \leq 105$  (Кріплення)

$v_4 \leq z_4$  у прикладі:  $v_4 \leq 56$  (Фарба)

$v_5 \leq z_5$  у прикладі:  $v_5 \leq 190$  (Мет. труба)

$v_6 \leq z_6$  у прикладі:  $v_6 \leq 2,3$  (Лак).

$V \leq Z$  (Використано  $\leq$  Запаси)

### Задача оптимізації

I. Знайти план  $X = \{x_j\}, j = 1, \dots, 5$ , щоб

II. Загальний дохід (ЦФ)  $D = CX \rightarrow \max$

III. за обмежень:  $V \leq Z$  (Використано ресурсів  $\leq$  Запаси ресурсів)

та граничних умов (невід'ємності): усі  $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5$ .

### Порядок роботи

1. Увести початкові дані:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів
ДСП (м <sup>2</sup> )	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3
Ціна продукту	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>	

2. Сформувати рядок План (X)

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів
ДСП (м <sup>2</sup> )	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3
Ціна продукту	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>	
План (X)						

3. Обчислити доходи від реалізації плану та їх суму (ЦФ)

G10		fx = СУММ(B10:F10)					
	A	B	C	D	E	F	G
1		Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів
2	ДСП (м <sup>2</sup> )	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34
3	Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78
4	Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105
5	Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56
6	Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190
7	Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3
8	Ціна продукту (C)	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>	
9	План (X)						
10	Дохід (CX)	0	0	0	0	0	0
11							ЦФ

4. Обчислити кількість використаних ресурсів (Використано) та їх залишків (Залишки):

H2		=СУММПРОИЗВ(B2:F2;\$B\$9:\$F\$9)							
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів	Використано	Залишки
2	ДСП (м <sup>2</sup> )	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34	0	34
3	Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78	0	78
4	Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105	0	105
5	Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56	0	56
6	Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190	0	190
7	Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3	0	2,3
8	Ціна продукту (С)	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89			
9	План (X)								
10	Дохід (СХ)	0	0	0	0	0	0		
11							ЦФ		

Отже, на підготовчому етапі сформовано:

- формулу для обчислення значення ЦФ (цільова клітинка G10),
- вектор шуканих невідомих (діапазон B9:F9)
- ліву (діапазон H2:H7) та праву (діапазон G2:G7) частини обмежень.

5. Курсор встановити на клітинку G10 (з формулою ЦФ) і виконати команду *Сервіс*→*Поиск решения*, з'явиться вікно програми-надбудови *Поиск решения*, де у полі:

- **Установить целевую ячейку** – вже вказана адреса G10
- **Равной:** *максимальному значению* (критерій оптимізації)
- **Изменяя ячейки:** вказати діапазон шуканого плану (B9:F9)

далі

- натиснути кнопку **Добавить**, з'явиться вікно *Добавление ограничения*,
- у лівому віконці вказати діапазон H2:H7, далі знак «≤», у правому віконці – діапазон G2:G7 (Використано ≤ Запаси):

G10		=СУММ(B10:F10)							
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів	Використано	Залишки
2	ДСП (м <sup>2</sup> )	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34	0	34
3	Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78	0	78
4	Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105	0	105
5	Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56	0	56
6	Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190	0	190
7	Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3	0	2,3
8	Ціна продукту (С)	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89			
9	План (X)								
10	Дохід (СХ)	0	0	0	0	0	0		
11							ЦФ		

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку:

Равной:  максимальному значению  значению: 0

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

далі

- натиснути на кнопку **Параметры**, у вікні *Параметры поиска решения* поставити дві «галочки» у позиціях:
- **Линейная модель** (умови лінійності)
- **Неотрицательные значения** (граничні умови невід'ємності для невідомих)
- **OK**
- у вікні *Поиск Решения* натиснути на кнопку **Выполнить**

- після повідомлення «Решение найдено...» про успішний розв'язок прямої задачі сформулювати звіт *Устойчивость* для отримання двоїстих оцінок
- двоїсті оцінки (нормовані вартості, тіньові ціни та допустиме збільшення запасів) перенести в основний документ.

Отримано розв'язок прямої та двоїстої задач ЛП.

Результат:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів	Використано	Залишки	Т-ціна	Доп. зб.
ДСП (м <sup>2</sup> )	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34	26,89	7,11	0,0	1E+30
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78	27,88	50,12	0,0	1E+30
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105	105,00	0	25,1	33,75
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56	1,66	54,34	0,0	1E+30
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190	1,30	188,70	0,0	1E+30
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3	2,30	0	930,5	0,33
Ціна продукту (С)	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>					
План (Х)	0	0	0,93	0	11,04					
Дохід (СХ)	0	0	505,92	0	4269,58	4775,50				
Н-варт.	-8,3	-332,5	0,0	-248,0	0,0	ЦФ				

Аналіз отриманого результату

**Пряма задача**

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра
I. План:	0	0	0,93	0	11,04

4775,50
ЦФ

II. Максимальний дохід (ЦФ):

III. Обмеження:

	Запас ресурсів	Використано	Залишки	Т-ціна	Доп. зб.
ДСП (м <sup>2</sup> )	34	26,89	7,11	0,0	1E+30
Фанера (м <sup>2</sup> )	78	27,88	50,12	0,0	1E+30
Кріплення (шт)	105	105,00	0	25,1	33,75
Фарба (кг)	56	1,66	54,34	0,0	1E+30
Мет. труба (м)	190	1,30	188,70	0,0	1E+30
Лак (кг)	2,3	2,30	0	930,5	0,33

де: для 3-го (Кріплення) й 6-го (Лак) ресурсів нерівності стали рівняннями (їх запаси вичерпані повністю), інші ресурси представлені нерівностями (є залишки).

Отже, Кріплення й Лак – дефіцитні ресурси, поповнення запасів певного з них – шлях до збільшення загального доходу (ЦФ).

Виникає запитання: який з цих двох ресурсів вибрати для поповнення?

**Двоїста задача**

Оцінка цін продуктів (їх нормовані вартості)

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра
Ціна продукту (С)	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89
План (Х)	0	0	0,93	0	11,04
Н-варт.	-8,25	-332,45	0,00	-248,00	0,00

Від'ємні числа під назвою «нормована вартість» у рядку Н-варт. вказують на:

- зменшення значення ЦФ (загального доходу) при вимушеному випуску одиниці відповідного продукту (стілець, парти, столи комп'ютерні)
- збільшення заданої ціни, щоб випуск став рентабельним.

**Зауваження.** Нормовані (приведені) вартості (*reduced cost*) – побічний результат двоїстої задачі, який можна самому обчислити як різницю між заданою ціною й множенням стовп-

ця технологічної матриці на стовпець тінювих цін ресурсів (який є основним результатом двоїстої задачі), й ця різниця дає:

- 0 для «вигідного» продукту (ціна = витрати ресурсів) й
- від'ємне число для «невигідних» продуктів (ціна < витрати ресурсів).

Так, для «невигідних» стільців це:  $216,78 - (6 \cdot 25,1 + 0,08 \cdot 930,5) = -8,25$ , з точки зору економіки, це фактичне перевищення витрат ресурсів (225,03) заданої ціни (216,78), яку можна вважати «нормою» й до якої приводяться витрати ресурсів.

Оцінка запасів ресурсів (їх тінюві ціни)

Запас ресурсів	Використано	Залишки	T-ціна	Доп. зб.
34	26,89	7,11	0,0	1E+30
78	27,88	50,12	0,0	1E+30
105	105,00	0	25,1	33,75
56	1,66	54,34	0,0	1E+30
190	1,30	188,70	0,0	1E+30
2,3	2,30	0	930,5	0,33

Додатні числа у стовпці T-ціна для нульових залишків вказують на збільшення ЦФ при збільшенні запасу ресурсу на 1.

Відповідь:

- додаткова одиниця кріплень збільшить значення ЦФ на 25,1, а додаткова одиниця лаку – на 930,5 гр. од.
- на першому кроці запас кріплень збільшити на 33-34 шт., лаку – на 0,33 кг.

Вибір – Що і Скільки придбати (щодо дефіцитних ресурсів) – робить менеджер, враховуючи ринкові ціни на ці два ресурси.

## Модифікація моделі

Умова 1: прийнято рішення обмежити кількість «вигідних» кафедр числом 2, уводиться додаткове обмеження:  $x_5 \leq 2$ , результат:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів	Використано	Залишки
ДСП (м <sup>2</sup> )	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34	4,20	29,80
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78	37,43	40,57
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105	105,00	0
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56	3,17	52,83
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190	38,57	151,43
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3	1,59	0,7
Ціна продукту (С)	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>			
План (X)	15	0	0,00	0	2	3989,38		
Дохід (СХ)	3216	0	0,00	0	773,77	ЦФ		

Загальний дохід зменшився (проти 4775,50 гр. од.), дефіцитом є лише лак, вивільнені ресурси направлені на інші продукти, так вигідними стали стільці.

Умова 2: додатково обмежити кількість «вигідних» стільців числом 8, додаткове обмеження:  $x_1 \leq 8$ , результат:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів	Використано	Залишки
ДСП (м <sup>2</sup> )	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34	13,31	20,69
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78	25,82	52,18
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105	105,00	0
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56	3,17	52,83
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190	23,99	166,01
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3	1,27	1,0
Ціна продукту (С)	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89			
План (X)	8	0	2,28	0	2	3749,05		
Дохід (СХ)	1734	0	1241,02	0	773,77	ЦФ		

Із кожним новим обмеженням значення ЦФ зменшується, план випуску змінюється з-за перерозподілу наявних ресурсів.

Умова 3: ставший «вигідним» стіл письмовий вирішено не виготовляти, замість нього виготовити 1 комп'ютерний стіл, для цього уведено два додаткових обмеження:  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 1$ , результат:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Запас ресурсів	Використано	Залишки
ДСП (м <sup>2</sup> )	0,0	2,0	4,0	3,5	2,1	34	10,53	23,47
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	78	26,01	51,99
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	105	105,00	0
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	56	2,63	53,37
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	190	27,42	162,58
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	2,3	1,91	0,4
Ціна продукту (С)	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89			
План (X)	8	1	0	1	2	3624,54		
Дохід (СХ)	1734,26	482,98	0,00	633,52	773,77	ЦФ		

Самостійна робота:

- розв'язати задачу ( $n = 2$ ) симплекс-методом для отримання точних значень шуканих невідомих
- розв'язати задачу ( $n \approx 30$ ,  $m \approx 15$ ), організувавши табличну модель по формату продукти-ресурси.

Приклад 2. (тестова задача [46], с. 60).

Розв'язати задачу ЛП двоїстим симплекс-методом:

**1.90**

$$F_{\max} = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 9$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 11$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

**1.90.**  $F = 33$ ;  $X = \{3; 0; 3\}$ . (Розв'язується лише пряма задача)

Результат



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		$x_1$	$x_2$	$x_3$	ЛЧ	ПЧ	Y	Поиск решения							
2	P-1	1	1	1	6	6	7	Установить целевую ячейку: $\$E\$6$							
3	P-2	2	1	1	9	9	-1	Равной: <input checked="" type="radio"/> максимальному значению <input type="radio"/> значению: 0							
4	P-3	3	1	2	15	11	0	<input type="radio"/> минимальному значению							
5	F	5	4	6	33			Изменяя ячейки: $\$B\$7:\$D\$7$							
6	X	3	0	3				Ограничения: $\$E\$3 <= \$F\$3$ $\$E\$4:\$E\$5 >= \$F\$4:\$F\$5$							
7								Кнопки: Выход, Закрыть, Параметры, Восстановить, Справка							

Пряма задача:  $X = (3, 0, 3)$ ,  $F = 33$ .

Двоїста задача:  $Y = (7, -1, 0)$ .

### Задача 2.3. Розв'язання прямої й двоїстої задач (без звіту *Устойчивость*)

Фундаментальну теорію двоїстості й поняття «аналіз чутливості» оптимального плану можна краще зрозуміти й засвоїти, розв'язавши за допомогою розв'язувача *Поиск решения* пряму й двоїсту задачу, не звертаючись до побудови звіту *Устойчивость*.

#### Приклад.

Задана пряма задача про оптимальний план виробництва розміром  $3 \times 5$  (3 види ресурсів й 5 видів продуктів), відомі запаси, ціни й технологічна матриця.

#### Порядок роботи

1. Блок даних – діапазон A2:G6 розміром  $5 \times 7$  транспонувати в діапазон M2:Q8 розміром  $7 \times 5$  для двоїстої задачі
2. Визначеним вище способом розв'язати пряму задачу (система обмежень: Витрати  $\leq$  Запас, критерій: **max** ЦФ)
3. Розв'язати двоїсту задачу:
  - Сформуувати ліву частину обмежень (Витрати)
  - Обчислити стовпець Н-варт (Переплата) = Витрати – Ціна
  - Задати систему обмежень: Витрати  $\geq$  Ціна
  - Критерій: **min** ЦФ.

#### Результат

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	Пряма задача							Двоїста задача											
2		Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3	Продукт 4	Продукт 5	Запас	Витрати	Залишок	0	Ресурс 1	Ресурс 2	Ресурс 3	Ціна	Витрати	Н-варт			
3	Ресурс 1	2	6	0,9	12	0,6	15	15,0	0,0	Продукт 1	2	4	3	7,0	7,00	0,00			
4	Ресурс 2	4	7	0,5	0,02	0,8	69	29,6	39,4	Продукт 2	6	7	1	7,9	12,79	-4,89			
5	Ресурс 3	3	1	9	0,11	11	25	25,0	0,0	Продукт 3	0,9	0,5	9	11,0	11,00	0,00			
6	Ціна	7,0	7,9	11,0	8,8	9,5		55,07		Продукт 4	12	0,02	0,11	8,8	23,64	-14,84			
7	План	7,35	0,00	0,33	0,00	0,00				Продукт 5	0,6	0,8	11	9,5	12,46	-2,96			
8										Запас	15	69	25	0	55,07				
9										План	1,96	0,00	1,03						

#### Аналіз результату

##### Пряма задача

I. План  $X = (7,35; 0; 0,33; 0; 0)$ , продукти 1-ий й 3-ій – вигідні, їх випуск.

II. ЦФ (максимальний загальний дохід) = **55,07**

III. Обмеження:

Ресурс 1:  $15 = 15$  (дефіцит)

Ресурс 2:  $29,6 < 69$

Ресурс 3:  $25 = 25$  (дефіцит).

### Двоїста задача

I. План  $X = (1,96; 0; 1,03)$ , ресурси 1-ий й 3-ий дефіцитні, їх тіньові ціни.

II. ЦФ (мінімальні загальні витрати) = **55,07**

III. Обмеження:

Продукт 1:  $7 = 7$  (вигідний)

Продукт 2:  $12,79 > 7,9$  (переплата -4,89)

Продукт 3:  $11 = 11$  (вигідний)

Продукт 4:  $23,64 > 8,8$  (переплата -14,84)

Продукт 5:  $12,46 \geq 9,5$  (переплата -2,96).

### **Задача 2.4. Пошук оптимального плану виробництва при обмеженні на суму витрат для ресурсів**

#### Постановка задачі

$m$  видів ресурсів використовуються у виготовленні  $n$  видів продуктів. Задана сума коштів для придбання ресурсів (Фонд) для забезпечення шуканого оптимального плану виробництва продукції за критерієм максимального прибутку:

**Прибуток = Дохід від реалізації – Витрати на придбання ресурсів.**

#### Задано:

- питомі витрати кожного ресурсу для кожного продукту (технологічна матриця розміром  $m \times n$ )
- назви і ціни ресурсів (стовпець  $Z$  з  $m$  значень)
- назви і ціни продуктів (рядок  $C$  з  $n$  значень)
- сума коштів на оплату придбання ресурсів (Фонд,  $F$ ).

#### Приклад

6 видів ресурсів використовуються у виготовленні 5 видів продуктів. Знайти оптимальний план випуску продукції при обмеженні на суму витрат для придбання ресурсів.

#### Початкові дані

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Ціна рес.
ДСП (м <sup>2</sup> )	0	2	4	3,5	2,1	78,23
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	56,12
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	1,22
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	45,65
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	19,23
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	45,55
Ціна продукту	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>	

### **Математична модель**

#### Позначення:

#### **План (X)**

$x_1$  – шукана кількість 1-го продукту (стільці)

$x_2$  – шукана кількість 2-го продукту (парти)

$x_3$  – шукана кількість 3-го продукту (столи письмові)

$x_4$  – шукана кількість 4-го продукту (столи комп'ютерні)

$x_5$  – шукана кількість 5-го продукту (кафедри)

$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  – шуканий план виробництва.

**Цільова функція** Прибуток = Доходи - Витрати

Дохід

$d_1 = 216,78x_1$  – дохід від реалізації 1-го продукту (стілці)

$d_2 = 340,93x_2$  – дохід від реалізації 2-го продукту (парти)

$d_3 = 544,84x_3$  – дохід від реалізації 3-го продукту (столи письмові)

$d_4 = 633,52x_4$  – дохід від реалізації 4-го продукту (столи комп'ютерні)

$d_5 = 386,89x_5$  – дохід від реалізації 5-го продукту (кафедри)

Сума доходів  $D = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5$ .

Витрати (вартість ресурсів):

$v_1 = 78,23(0x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3,5x_4 + 2,1x_5)$ , 1-ий ресурс (ДСП)

$v_2 = 56,12(2,2x_1 + 0,5x_2 + 1,5x_3 + 2,9x_4 + 2,4x_5)$ , 2-ий ресурс (Фанера)

$v_3 = 1,22(6x_1 + 12x_2 + 18x_3 + 24x_4 + 8x_5)$ , 3-ий ресурс (Кріплення)

$v_4 = 45,65(0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,6x_3 + 0,4x_4 + 0,1x_5)$ , 4-ий ресурс (Фарба)

$v_5 = 19,23(2,6x_1 + 3,4x_2 + 1,4x_3 + 1,8x_4 + 0x_5)$ , 5-ий ресурс (Мет. труба)

$v_6 = 45,55(0,08x_1 + 0,4x_2 + 0,1x_3 + 0,3x_4 + 0,2x_5)$ , 6-ий ресурс (Лак)

Сума витрат  $V = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6$ .

Прибуток (цільова функція)  $P = D - V$  (Прибуток = Доходи – Витрати)

**Обмеження**

$V \leq F$  (Витрати  $\leq$  Фонд), де  $F$  – фонд на оплату ресурсів.

**Задача оптимізації**

I. Знайти такий план  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ , щоб

II. ЦФ  $P = D - V \rightarrow \max$

III. за обмежень:  $V \leq F$

та граничних умов: усі  $x_i \geq 0$ .

Порядок роботи

1. Увести початкові дані:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Ціна рес.
ДСП (м <sup>2</sup> )	0	2	4	3,5	2,1	78,23
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	56,12
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	1,22
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	45,65
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	19,23
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	45,55
Ціна продукту	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>	

2. Сформувати рядок План (X)

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Ціна рес.
ДСП (м <sup>2</sup> )	0	2	4	3,5	2,1	78,23
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	56,12
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	1,22
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	45,65
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	19,23
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	45,55
Ціна продукту	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>	
План						

3. Обчислити доходи від реалізації плану та їх суму

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Ціна рес.
ДСП (м <sup>2</sup> )	0	2	4	3,5	2,1	78,23
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	56,12
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	1,22
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	45,65
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	19,23
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	45,55
Ціна продукту	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89	
План						
Дохід	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
						Сума доходів

4. Обчислити кількість та вартість ресурсів, суму витрат на придбання ресурсів

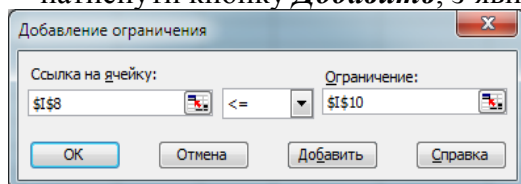
	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Ціна рес.	Кількість рес.	Вартість рес.
ДСП (м <sup>2</sup> )	0	2	4	3,5	2,1	78,23	0	0,00
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	56,12	0	0,00
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	1,22	0	0,00
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	45,65	0	0,00
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	19,23	0	0,00
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	45,55	0	0,00
Ціна продукту	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89			0,00
План								Сума витрат
Дохід	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
						Сума доходів		

5. Обчислити величину прибутку (ЦФ), у клітинку І10 ввести значення фонду (права частина обмеження, F)

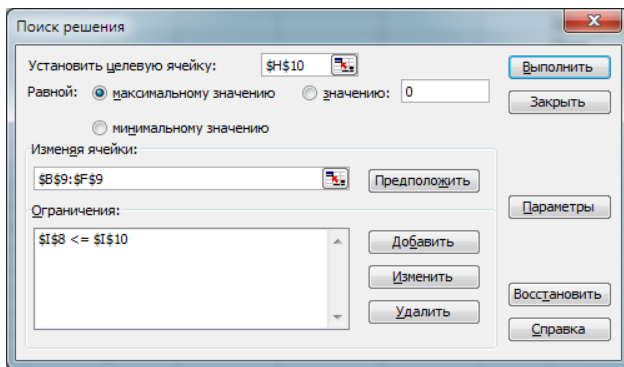
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Ціна рес.	Кількість рес.	Вартість рес.
2	ДСП (м <sup>2</sup> )	0	2	4	3,5	2,1	78,23	0	0,00
3	Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	56,12	0	0,00
4	Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	1,22	0	0,00
5	Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	45,65	0	0,00
6	Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	19,23	0	0,00
7	Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	45,55	0	0,00
8	Ціна продукту	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89			0,00
9	План								Сума витрат
10	Дохід	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1000
11							Сума доходів	Прибуток	Фонд

6. Курсор встановити на клітинку Н10 (з формулою ЦФ) і виконати команду *Сервіс* → *Поиск решения*, з'явиться вікно програми-надбудови *Поиск решения*, де у полі:

- **Установить целевую ячейку** – вже вказана адреса Н10
- **Равной:** максимальному значенню (критерій оптимізації)
- **Изменяя ячейки:** вказати діапазон шуканого плану (В9:F9)
- натиснути кнопку **Добавить**, з'явиться вікно **Добавление ограничения**,



- у лівому віконці вказати клітинку із сумою витрат, далі знак «≤», у правому віконці – адресу клітинки зі значенням фонду (Витрати ≤ Фонд):



далі

- натиснути на кнопку **Параметры**, у вікні **Параметры** поиска решения поставити дві «галочки» у позиціях:
  - **Линейная модель** (модель линейного программирования)
  - **Неотрицательные значения** (граничні умови для невідомих)
  - **OK**
- у вікні **Поиск решения** натиснути на кнопку **Выполнить**.

Оптимізаційною програмою виконані усі обчислення з визначення кількості і вартості ресурсів й знайдено оптимальний план, що забезпечує максимум прибутку за заданим обмеженням.

### Результат

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Ціна рес.	Кількість рес.	Вартість рес.
2	ДСП (м <sup>2</sup> )	0	2	4	3,5	2,1	78,23	6,513526423	509,55
3	Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	56,12	7,444030198	417,76
4	Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	1,22	24,81343399	30,27
5	Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	45,65	0,310167925	14,16
6	Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	19,23	0	0,00
7	Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	45,55	0,62033585	28,26
8	Ціна продукту	216,78	340,93	544,84	633,52	386,89			1000,00
9	План	0	0	0	0	3,101679			Сума витрат
10	Дохід	0,00	0,00	0,00	0,00	1200,00	1200,00	200,00	1000
11							Сума доходів	Прибуток	Фонд
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Тип отчета  
 Результаты  
 Устойчивость  
 Пределы

Сохранить найденное решение  
 Восстановить исходные значения

OK Отмена Сохранить сценарий... Справка

### Аналіз отриманого результату

- I. Оптимальний план:  $X = (0; 0; 0; 0; 3,1)$
- II. Максимальний прибуток  $P = 1200 - 1000 = 200$ .
- III. Обмеження-рівняння: Витрати = Фонд (= 1000).

Маючи цю модель, тепер можна знаходити оптимальні виробничі плани для будь-яких значень фонду фінансування для оплати ресурсів.

## Модифікація оптимізаційної моделі

### Умова 1.

Для прийняття рішення визначено, що замовнику достатньо однієї кафедри, формується відповідне обмеження:  $x_5 = 1$ , уведення обмеження й результат:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Ціна рес.	Кількість рес.	Вартість рес.
ДСП (м <sup>2</sup> )	0	2	4	3,5	2,1	78,23	5,6	438,09
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	56,12	5,3	297,44
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	1,22	32	39,04
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	45,65	0,5	22,83
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	19,23	1,8	34,61
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	45,55	0,5	22,78
Ціна продукту	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>			854,78
План	0	0	0	1	1			Сума витрат
Дохід	0,00	0,00	0,00	633,52	386,89	1020,41	<b>165,63</b>	<b>1000</b>
						Сума доходів	Прибуток	Фонд
							Залишки	145,22

I. Оптимальний план:  $X = (0; 0; 0; 1; 1)$

II. Максимальний прибуток  $P = 1020,41 - 854,78 = 165,63$ .

III. Обмеження-нерівність: Витрати < Фонд ( $854,78 < 1000$ ).

Прибуток зменшився, вивільнені ресурси направлені на виготовлення комп'ютерного столу.

### Умова 2.

Для прийняття наступного рішення визначено, що комп'ютерний стіл поки що не потрібен, обмеження:  $x_4 = 0$ , результат:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Ціна рес.	Кількість рес.	Вартість рес.
ДСП (м <sup>2</sup> )	0	2	4	3,5	2,1	78,23	6,1	477,20
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	56,12	6,1	342,33
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	1,22	32	39,04
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	45,65	0,9	41,09
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	19,23	4	76,92
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	45,55	0,38	17,31
Ціна продукту	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>			993,89
План	1	0	1	0	1			Сума витрат
Дохід	216,78	0,00	544,84	0,00	386,89	1148,51	<b>154,62</b>	<b>1000</b>
						Сума доходів	Прибуток	Фонд
							Залишки	6,11

I. Оптимальний план:  $X = (1; 0; 1; 0; 1)$

II. Максимальний прибуток  $P = 1148,51 - 993,89 = 154,62$ .

III. Обмеження-нерівність: Витрати < Фонд ( $993,89 < 1000$ ).

Прибуток зменшився, вивільнені ресурси направлені на виготовлення стільця й письмового столу.

### Умова 3.

Визначена відмова від виготовлення кафедри (обмеження:  $x_5 = 0$ ) за рахунок можливого збільшення стільців (обмеження:  $x_1 \geq 1$ ), результат:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Ціна рес.	Кількість рес.	Вартість рес.
ДСП (м <sup>2</sup> )	0	2	4	3,5	2,1	78,23	4	312,92
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	56,12	5,4	303,05
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	1,22	36	43,92
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	45,65	1	45,65
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	19,23	12	230,76
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	45,55	0,96	43,73
Ціна продукту	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>			980,03
План	2	2	0	0	0			Сума витрат
Дохід	433,57	681,85	0,00	0,00	0,00	1115,42	<b>135,39</b>	<b>1000</b>
						Сума доходів	Прибуток	Фонд
							Залишки	19,97

I. Оптимальний план:  $X = (2; 2; 0; 0; 0)$

II. Максимальний прибуток  $P = 1115,42 - 980,03 = 135,39$ .

III. Обмеження-нерівність: Витрати < Фонд ( $980,03 < 1000$ ).

Прибуток ще зменшився, тепер маємо 2 парти та 2 стільці.

#### Умова 4.

Виникло бажання виготовити стільців більше двох, обмеження:  $x_1 \geq 3$ , результат:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Ціна рес.	Кількість рес.	Вартість рес.
ДСП (м <sup>2</sup> )	0	2	4	3,5	2,1	78,23	0	0,00
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	56,12	11	617,32
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	1,22	30	36,60
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	45,65	1	45,65
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	19,23	13	249,99
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	45,55	0,4	18,22
Ціна продукту	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>			967,78
План	5	0	0	0	0			Сума витрат
Дохід	1083,91	0,00	0,00	0,00	0,00	1083,91	<b>116,13</b>	<b>1000</b>
						Сума доходів	Прибуток	Фонд
							Залишки	32,22

I. Оптимальний план:  $X = (5; 0; 0; 0; 0)$

II. Максимальний прибуток  $P = 1083,91 - 967,78 = 116,13$ .

III. Обмеження-нерівність: Витрати < Фонд ( $967,78 < 1000$ ).

#### Умова 5

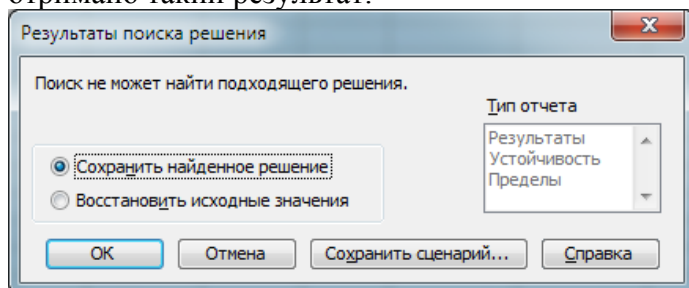
... але 5 стільців забагато, достатньо не більше 4-ох, обмеження:  $x_1 \leq 4$ , результат:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Ціна рес.	Кількість рес.	Вартість рес.
ДСП (м <sup>2</sup> )	0	2	4	3,5	2,1	78,23	2	156,46
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	56,12	7,1	398,45
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	1,22	30	36,60
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	45,65	0,9	41,09
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	19,23	11,2	215,38
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	45,55	0,64	29,15
Ціна продукту	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>			877,13
План	3	1	0	0	0			Сума витрат
Дохід	650,35	340,93	0,00	0,00	0,00	991,27	<b>114,15</b>	<b>1000</b>
						Сума доходів	Прибуток	Фонд
							Залишки	122,88

- I. Оптимальний план:  $X = (3; 1; 0; 0; 0)$   
 II. Максимальний прибуток  $P = 991,27 - 877,13 = 114,15$ .  
 III. Обмеження-нерівність: Витрати < Фонд ( $877,13 < 1000$ ).

### Умова 6

... якщо забажати ще до цього комплекту виготовити, скажімо, одну кафедру ( $x_5 = 1$ ), буде отримано такий результат:



Причину невдачі можна з'ясувати обчисленням витрат на придбання ресурсів для такого плану, для цього в рядок План треба увести значення (3; 1; 0; 0; 1) і буде отримано такий результат:

	Стілець	Парта	Стіл письм.	Стіл комп.	Кафедра	Ціна рес.	Кількість рес.	Вартість рес.
ДСП (м <sup>2</sup> )	0	2	4	3,5	2,1	78,23	4,1	320,74
Фанера (м <sup>2</sup> )	2,2	0,5	1,5	2,9	2,4	56,12	9,5	533,14
Кріплення (шт)	6	12	18	24	8	1,22	38	46,36
Фарба (кг)	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	45,65	1	45,65
Мет. труба (м)	2,6	3,4	1,4	1,8	0	19,23	11,2	215,38
Лак (кг)	0,08	0,4	0,1	0,3	0,2	45,55	0,84	38,26
Ціна продукту	<b>216,78</b>	<b>340,93</b>	<b>544,84</b>	<b>633,52</b>	<b>386,89</b>			1199,53
План	3	1	0	0	1			Сума витрат
Дохід	650,35	340,93	0,00	0,00	386,89	1378,16	178,63	1000
						Сума доходів	Прибуток	Фонд
							Залишки	-199,53

отже, щоб здійснити цей план, сума коштів має бути збільшена на 199,53 щодо визначеного фонду у 1000 гр. од., тож причина невдачі – порушення визначеної системи обмежень (Витрати ≤ Фонд).

### Задача 2.5. Про оптимальну суміш (раціон)

#### Постановка задачі

Існує розповсюджений клас задач оптимізації, де  $n$  різних компонентів, кожен з яких містить  $m$  речовин, використовують шляхом їх певного змішування (компонування, сполучення, поєднання, складення, комбінування) для утворення одного складеного продукту чи однієї сукупності таких продуктів за принципом «усі для одного» у вигляді суміші (композиції, комбінації) цих компонентів вручну чи за допомогою спеціальної техніки: міксерів, блендерів, змішувачів тощо. В математичній літературі ця класична задача оптимізації відома під назвами «задача про дієту» або «задача Стіглера»<sup>17</sup>.

Виявляється, ми живемо у світі різноманітних сумішей, навіть про це не замислюючись (а хіба наша сім'я й наш рід не суміші), бо на практиці будь-яка «суміш» (mixture) це: ліки,

<sup>17</sup> Stigler G. J. The cost of subsistence. J. Farm. Econ., 1945. Дж. Стіглер (1911-1991) Нобелівський лауреат з економіки за 1982 р. На початку своєї кар'єри Стіглер сформулював цю задачу й відшукав близький до оптимального найдешевший раціон, що мав задовольнити 9 дієтичних вимог у наборі із 77 видів продуктів, здійснивши перебір 500 варіантів наближеними методами вручну, тоді ж зробив невтішний висновок про неможливість точного розв'язку цієї задачі математичними методами й змінив тематику. Винахід Данцигом симплекс-методу спростував його висновок, Данциг згадавав: у 1947 р. Stigler's Minimum cost diet problem була першою тестовою задачею ЛП із 9 рівнянь із 77 невідомими для перевірки симплекс-методу, яку 10 працівників протягом 12 днів розв'язували за допомогою ручних калькуляторів, значення вартості дієти вдалося покращити лише на 20 центів



будівельні матеріали, раціони харчування людей, комбікорми для відгодівлі худоби, марки нафтопродуктів чи фарб, у фінансистів – бюджети чи пакети цінних паперів, це ще: комплекти будь-чого, спортивні команди, персонал чи екіпажі спеціального призначення, різноманітні спеціалізовані чи універсальні (комбайни) машини, нарешті, у побуті це: салати, коктейлі чи взагалі будь-яка страва, яку готують за певним рецептом (пропорцією) тощо.

Звідси – надзвичайна актуальність цієї проблематики, бо варіантів будь-якої суміші (того ж українського борщу) безліч й знайти оптимальну суміш – наша спільна задача.

Компоненти як складові суміші характеризуються параметром (ціною, вагою тощо), що входить у цільову функцію.

Як правило, діє класичний, на мінімум витрат, критерій оптимізації, коли з  $n$  харчових продуктів із заданою ціною треба створити раціон харчування, у якому вміст  $m$  речовин не нижчий за задану нижню (мінімальну) границю.

Критерій на максимум прибутку діє, коли купують  $n$  видів сировини за заданими цінами, з якої треба виготовити комплект з  $m$  видів продуктів у вигляді сумішей, які продають за заданими цінами.

Приклади: 1) з різних металів треба утворити набір кількох сплавів у відповідних пропорціях металів у їх складі; 2) з різних напівфабрикатів нафтопереробки треба виготовити композицію з кількох видів палива.

Тож відповідна суміш, конструкція чи композиція має:

- на мінімум ЦФ – бути найдешевшою чи найлегшою за умови дотримання відповідних обмежуючих факторів: для найдешевшого раціону чи комбікорму задовольняється вміст споживних речовин, а для найлегшого повітряного апарату забезпечуються певні конструктивні вимоги,

- на максимум ЦФ – забезпечити максимальний прибуток, ефективність чи корисність.

Додатковими умовами-обмеженнями в оптимізаційній задачі про суміш на етапі модифікації математичної моделі можуть бути вимоги щодо корегування асортименту чи пропорцій входження компонентів у склад суміші.

### Приклад

У склад раціону відгодівлі худоби входять 6 продуктів: сіно, силос, концентрати, зерно, овочі і відходи з виробництва молокопродуктів, що містять 3 споживні речовини: білок, кальцій та вітаміни. Задані мінімальні норми споживання цих речовин та ціни продуктів. Треба визначити склад раціону (що і скільки змішати) мінімальної вартості за умови дотримання норм споживання.

### **Задача оптимізації**

I. Знайти раціон  $X = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ , де:  $x_1$  – кількість сіна,  $x_2$  – силосу тощо, за яким

II. ЦФ: Вартість раціону  $V = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 5x_5 + 3,2x_6 \rightarrow \min$

III. за обмежень:

Білок:  $50x_1 + 20x_2 + 180x_3 + 100x_4 + 50x_5 + 98x_6 \geq 2000$

Кальцій:  $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 6x_5 + 14x_6 \geq 120$

Вітаміни:  $2x_1 + x_2 + x_3 + 11x_4 + 3x_5 + 5,9x_6 \geq 40$

та граничних умов: усі  $x_i \geq 0$ .

### Порядок роботи

1. Увести початкові дані:

- матрицю питомого вмісту споживчих речовин у продуктах,
- рядок цін,
- стовпець мінімальних норм споживання речовин (ПЧ)

	Сіно	Силос	Концентрати	Зерно	Овочі	М/продукти	Норми
Білок	50	20	180	100	50	98	2000
Кальцій	6	4	3	9	6	14	120
Вітаміни	2	1	1	11	3	5,9	40
Ціна	3	2	5	10	5	3,2	

2. Сформуванати рядок плану (X), рядок вартостей та їх суму (ЦФ)

План (X)								
Вартість	0	0	0	0	0	0	0,00	ЦФ

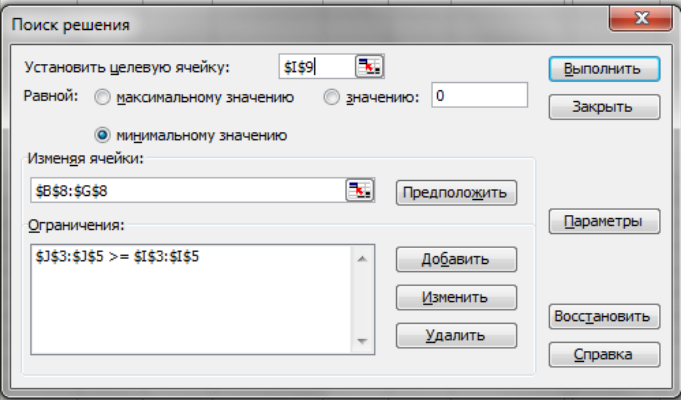
3. Сформуванати 2 стовпці: Увійшло речовин (ліва частина обмеження) та Увійшло-Норми (перевищення використаних речовин поза норми)

Норми	Увійшло	Ув-Норми
2000	0	-2000
120	0	-120
40	0	-40,00

4. Запуск програми *Поиск решения*, заповнити поля її вікна, кнопкою *Параметры* визначити лінійну модель й невід'ємні значення невідомих, знайти розв'язок прямої та двоїстої задач.

Результат:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		Сіно	Силос	Концентрати	Зерно	Овочі	М/продукти		Норми	Увійшло	Ув-Норми	Т-ціна
3	Білок	50	20	180	100	50	98	2000	2000	0	0,03	
4	Кальцій	6	4	3	9	6	14	120	120	0	0,04	
5	Вітаміни	2	1	1	11	3	5,9	40	48,64	8,64	0,00	
6	Ціна	3	2	5	10	5	3,2					
7												
8	План (X)	0	0	7,30	0	0	7,01					
9	Вартість	0	0	36,48	0	0	22,43	58,90	ЦФ			
10												
11	Н-варт	1,41	1,30	0,00	6,94	3,41	0,00					
12												
13												



## Аналіз отриманого результату

### Пряма задача

Знайдено структуру, вміст і вартість «ідеального» раціону, це: Концентрати та М/продукти, 7,3 од та 7,01 од. відповідно, мінімальна вартість раціону **58,9** гр. од. Щоб утворити такий раціон прийшлося перевищити вміст вітамінів на 8,64 од.

### Двоїста задача

*Тіньові ціни* правих частин обмежень (норм споживання) вказують на збільшення загальної вартості раціону (ЦФ) при збільшенні норм на 1.

Нормовані вартості шуканих невідомих (цін продуктів) вказують на збільшення загальної вартості раціону (ЦФ) при вимушеному використанні у раціоні одиниці «невигідного» продукту. Найдорожчим виявилось зерно (6,94 гр. од. за одиницю), найдешевшим – силос (1,3 гр. од.)

### Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов

#### Умова 1.

Задані граничні зверху обсяги включення у раціон «вигідних» концентратів величиною 0,5 од., дії: додати обмеження:  $x_3 \leq 0,5$ ; результат:

	Сіно	Силос	Концентрати	Зерно	Овочі	М/продукти	Норми	Увійшло	Ув-Норми
Білок	50	20	180	100	50	98	2000	2000	0
Кальцій	6	4	3	9	6	14	120	274,4	154,4
Вітаміни	2	1	1	11	3	5,9	40	115,5	75,5
Ціна	3	2	5	10	5	3,2			
План (X)	0	0	0,50	0	0	19,49			
Вартість	0	0	2,50	0	0	62,37	64,87	ЦФ	

#### Умова 2.

Додатково: обмежити кількість М/продуктів до 10 од., увести в раціон 5 од. сіна, 3 од. силосу, 4 од. овочів, дії: додати 4 обмеження на невідомі:  $x_6 \leq 10$ ,  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_5 = 4$ , результат:

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной:  максимуму значению  
 минимуму значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

$\$B\$8 = 5$   
 $\$C\$8 = 3$   
 $\$D\$8 \leq 0,5$   
 $\$F\$8 = 4$   
 $\$G\$8 \leq 10$   
 $\$J\$3:\$J\$5 \geq \$I\$3:\$I\$5$

Цей результат змусив перевищити вміст споживних речовин: кальцію на 125,3 од., вітамінів на 90,7 од., вартість раціону збільшилась до 117,5 гр. од.

	Сіно	Силос	Концентрати	Зерно	Овочі	М/продукти	Норми	Увійшло	Ув-Норми
Білок	50	20	180	100	50	98	2000	2000	0
Кальцій	6	4	3	9	6	14	120	245,3	125,3
Вітаміни	2	1	1	11	3	5,9	40	130,7	90,7
Ціна	3	2	5	10	5	3,2			
План (X)	5	3	0,50	4	4	10,00			
Вартість	15	6	2,50	42	20	32,00	117,50	ЦФ	

#### Умова 3.

Умови 1,2 знято, треба визначити раціон, у якому споживних речовин увійде точно за нормою, дії: в основному обмеженні змінити знак « $\leq$ » на « $=$ », результат:

	Сіно	Силос	Концентрати	Зерно	Овочі	М/продукти	Норми	Увійшло	Ув-Норми	Т-ціна
Білок	50	20	180	100	50	98	2000	2000	0	0,02
Кальцій	6	4	3	9	6	14	120	120	0	0,85
Вітаміни	2	1	1	11	3	5,9	40	40	0	-1,86
Ціна	3	2	5	10	5	3,2				
План (X)	0	12,4	7,92	0	0	3,34				
Вартість	0	24,73	39,59	0	0	10,69	75,01	ЦФ		
Н-варт	0,45	0	0	20,49	4,31	0				

Точне дотримання норм привело до суттєвого збільшення вартості раціону: 75 проти 58,9, виходить, що ці норми треба сприймати як рекомендації, при необхідності входження речовин обмежувати зверху, очікуючи здороження раціону.

За цією умовою є єдиний шлях зменшити вартість раціону – обґрунтувати й знизити норму входження вітамінів, на це вказує знак « $\rightarrow$ » у двоїстій оцінці, що дорівнює -1,86.

## Задача 2.6. Про оптимальний баланс

### Постановка задачі

Моделі економічних процесів побудовані за теорією В. В. Леонт'єва про міжгалузеві вартісні чи матеріальні баланси («витрати-випуск»), за якими валовий випуск продукції ( $X$ ) дорівнює сумі витрат на внутрішнє споживання ( $AX$ ) та випуск готової продукції ( $B$ ). Відповідна економіко-математична модель має вигляд матричного рівняння:  $X = AX + B$ . У цій моделі не застосовуються цінові та інші показники ефективності галузей, мова йде лише про об'єми продукції.

Задача про оптимальний баланс базується на класичній моделі  $X = AX + B$  й додатково враховує питому вартість продукції, яка визначає цільову функцію, й максимальну потужність кожної галузі, яка є обмежуючим фактором. Математична модель такої оптимізаційної задачі дозволяє однозначно визначити шляхи розвитку реально діючої економічної системи (держави, регіону, окремого підприємства), зокрема, визначити, які галузі (підприємства, цехи, обладнання) треба розвивати й вдосконалювати чи перепрофілювати за критерієм максимізації основного показника функціонування системи із врахуванням реальних обмежуючих ресурсних факторів: технологічних, ресурсних, кадрових, енергетичних, територіальних тощо.

### Приклад.

Економічна система на рівні підприємства складається з  $n$  ( $n = 7$ ) основних та допоміжних цехів, кожен з яких є одночасно постачальником й споживачем продукції власної та інших цехів (у матеріальному чи вартісному вимірі), яка витрачається на внутрішні потреби, та продавцем готової продукції на зовнішнє споживання (експорт). Наприклад, на металургійному комбінаті гірничо-збагачувальний комплекс направляє свою сировинну продукцію в доменний цех, чавун з доменного цеху споживається мартенівським цехом для виплавлення сталі, сталь надалі споживається прокатними цехами тощо. Одночасно той же мартенівський цех отримує з інших цехів їхню продукцію згідно потреб діючої у ньому технології, а частку чавуну продає на зовнішні ринки. Аналогічно діють усі цехи у цій взаємопов'язаній економічній системі.

Ці міжцехові відносини «кожен-з-кожним» визначені квадратною технологічною матрицею ( $A$ ) розміром  $7 \times 7$ , кожен елемент якої  $a_{ij}$  визначає частку продукції  $i$ -го цеху, яка споживається  $j$ -им цехом на внутрішні потреби. Також для кожного цеху відомі його максимальна потужність ( $P$ ) та питомі ціни випущеної продукції ( $C$ ).

Припущення: на внутрішні потреби цехи постачають й споживають продукцію безкоштовно, продаж здійснюється лише на зовнішнє споживання (експорт), де попит вважається необмеженим.

Ставиться задача визначення економічної «цінності» продукції цехів за критерієм максимуму ефективності (дохідності) підприємства аби надалі визначити стратегію його розвитку й удосконалення виробничої програми підприємства. Отримавши результат прямої задачі – скільки продукції має виготовити кожен цех, щоб вартість направленої на експорт продукції була максимальною, двоїстими оцінками визначається «вузьке місце» – це цехи, потужності яких вичерпані й мають розвиватися у певній черзі (за визначеним пріоритетом), тоді резерви потужностей недовантажених цехів бажано зорієнтувати на випуск іншої продукції, на яку є попит.

### **Математична модель**

#### Позначення

$n$  – кількість цехів

$i, j$  – поточні номери (індекси)  $i$ -го цеху-виробника та  $j$ -го цеху-споживача

$a_{ij}$  – частка продукції  $i$ -го цеху, яка споживається  $j$ -им цехом,  $A = \{a_{ij}\}$  – технологічна матриця

$c_i$  – задана питома ціна  $i$ -го продукту,  $C = \{c_i\}$

$p_i$  – задана максимальна потужність  $i$ -го цеху,

$x_i$  – шуканий валовий випуск  $i$ -го цеху,  $X = \{x_i\}$  – вектор валового випуску

$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$  – витрати  $i$ -го продукту на внутрішні потреби (вектор  $AX$ )

$b_i = x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$  – випуск готової продукції  $i$ -го виробника,  $B = \{b_i\}$  – вектор випуску

$BX$  – сума доходів від продажу готової продукції.

### Задача оптимізації

I. Знайти план валового випуску  $X = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ , такий, щоб

II. ЦФ: Загальний дохід  $D = BX \rightarrow \max$

III. за обмежень:

$x_i \leq p_i$ , валовий випуск не перевищує максимальної потужності

$x_i \geq \sum_{j=1}^7 a_{ij}x_j$ ,  $i, j = \overline{1,7}$ , валовий випуск не менше внутрішніх витрат

та граничних умов: усі  $x_i \geq 0$

### Порядок роботи

1. Увести початкові дані:

- матрицю технологічних коефіцієнтів  $A$ ,
- стовпець потужностей ( $P$ ),
- стовпець цін ( $C$ )

A	Цех 1	Цех 2	Цех 3	Цех 4	Цех 5	Цех 6	Цех 7	Ціна (C)	Потужність (P)
Цех 1	0,10	0,02	0,05	0,08	0,11	0,14	0,17	12,00	123
Цех 2	0,02	0,02	0,06	0,04	0,05	0,00	0,09	3,00	56
Цех 3	0,06	0,01	0,07	0,00	0,12	0,00	0,16	4,00	78
Цех 4	0,20	0,06	0,08	0,10	0,19	0,02	0,03	7,00	34
Цех 5	0,01	0,00	0,09	0,16	0,26	0,00	0,03	8,00	89
Цех 6	0,02	0,03	0,10	0,17	0,00	0,00	0,37	9,00	100
Цех 7	0,05	0,07	0,11	0,15	0,40	0,00	0,00	23,00	200

2. Сформувати стовпець валового випуску ( $X$ ) і заповнити нулями

3. Обчислити значення стовпців:

- резерв потужностей ( $P-X$ )
- витрати на внутрішні потреби ( $AX$ )
- випуск готової продукції ( $B = X-AX$ )
- вартість виготовленої продукції ( $CX$ ) й загальну суму (ЦФ)

4. Запуск програми *Поиск решения*, заповнити поля її вікна, кнопкою *Параметры* визначити лінійну модель й невід'ємні значення невідомих, знайти розв'язок прямої та двоїстої задач.

Загальний вигляд табличного документа і результат

Вал (X)	Резерв потужн. (P-X)	Витрати (AX)	Випуск (B=X-AX)	Вартість (BX)	Н-варт	Т-ціна	Висновки:
68.41	54.59	62.51	5.90	70.79	0.0	0.0	є резерв
24.81	31.19	24.81	0.00	0.00	0.0	-1.9	є резерв
41.86	36.14	41.86	0.00	0.00	0.0	-6.9	є резерв
34.00	0.00	34.00	0.00	0.00	27.5	-35.2	розвиток 1
21.48	67.52	21.48	0.00	0.00	0.0	-19.2	є резерв
100.00	0.00	86.08	13.92	125.29	6.5	0.0	розвиток 3
200.00	0.00	23.45	176.55	4060.61	13.4	0.0	розвиток 2
				4256.69	ЦФ (X)		

## Аналіз отриманого результату

### Пряма задача

I. Знайдено оптимальний план валового випуску  $X = (68,41; 24,81; 41,86; 34,0; 21,48; 100; 200)$ . Три цехи (1, 6, 7) є «вигідними», бо випускають продукцію для зовнішнього споживання, інші чотири (2, 3, 4, 5) задовольняють лише внутрішні, міжцехові потреби, за яким

II. максимальний дохід (ЦФ) склав величину 4256,69 гр. од.

III. Обмеження:

- **по потужності** ( $X \leq P$ ): чотири цехи: 1-ий, 2-ий, 3-ий та 5-ий мають резерв потужностей, інші три цехи (4, 6, 7) повністю завантажені. Факт повної завантаженості цих цехів визначає «вузьке місце» підприємства, що не дає змоги збільшити дохід
- **по врахуванню внутрішніх потреб** ( $X \geq AX$ ) задоволені:
  - $X = AX$  для цехів 2, 3, 4, 5
  - $X > AX$  для цехів 1, 6, 7.

### Двоїста задача

Н-варт	Т-ціна	Висновки:
0.0	0.0	є резерв
0.0	-1.9	є резерв
0.0	-6.9	є резерв
27.5	-35.2	розвиток 1
0.0	-19.2	є резерв
6.5	0.0	розвиток 3
13.4	0.0	розвиток 2

*Нормовані вартості* плану  $X$  – додатні числа – вказують на потенційне збільшення ЦФ при збільшенні потужності відповідного цеху на 1. Найвищий показник (27,5) має 4-ий цех, за ним 7-ий (13,4) та 6-ий (6,5). Тож у першу чергу розвивати треба потужності 4-го цеху, бо його потужностей (34 од.) вистачає лише на забезпечення внутрішніх потреб.

*Тіньові ціни* потужностей цехів – від’ємні числа – вказують на зменшення ЦФ при вимушеному випуску для зовнішнього споживання (стовпець  $B$ ) одиниці продукції цехами, які виготовляють продукцію лише для внутрішніх потреб ( $b_i =$

0), це: 2, 3, 4, 5 цехи.

Наприклад, якщо 2-му цеху (оцінка -1,9) вольовим рішенням треба випустити 1 од. продукції на продаж (додаткове обмеження:  $b_4 = 1$ ), тоді ЦФ зменшиться на 1,9 гр. од. Виникає думка: якщо 2-ий цех недовантажений, чому б йому додатково не виготовити й продати 1 од. продукції? Ця думка й дивний на перший погляд результат ще раз підкреслює суттєвий факт наявності міжцехових зв'язків – адже ця вимушена додаткова одиниця продукту 2-го цеху за діючою технологією використовує продукцію інших цехів у відповідних частках, які будуть змушені витратити свої потужності неоптимально – з відхиленням від визначеного плану оптимального використання обмежених ресурсів (потужностей цехів).

Якщо такі умови поставити для повністю завантаженого 4-го цеху, тоді втрати доходу сягнуть величини 35,2 гр. од., що означає: 4-ий цех вилучає у своїх цехів 1 своєї продукції, щоб її продати за 7 гр. од., в результаті підприємство недоотримає 35,2 гр. од.:

Цех 6	Цех 7	Ціна (С)	Потужність (Р)	Вал (X)	Резерв потужн. (Р-Х)	Витрати (АХ)	Випуск (В=Х-АХ)	Вартість (ВХ)
0,14	0,17	12,00	123	63,67	59,33	62,01	1,67	19,98
0,00	0,09	3,00	56	24,69	31,31	24,69	0,00	0,00
0,00	0,16	4,00	78	41,54	36,46	41,54	0,00	0,00
0,02	0,03	7,00	34	34,00	0,00	33,00	1,00	7,00
0,00	0,03	8,00	89	21,37	67,63	21,37	0,00	0,00
0,00	0,37	9,00	100	100,00	0,00	85,95	14,05	126,47
0,00	0,00	23,00	200	200,00	0,00	23,13	176,87	4068,01
								4221,46
								ЦФ (X)
								35,2

## Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов

### Умова 1.

Якою має бути мінімальна потужність «критичного» 4-го цеху, щоб він, забезпечуючи внутрішні потреби згідно технології, продав би на зовнішній ринок 1 готової продукції, дії:

- 1) увести до складу шуканих невідомих змінну  $p_4$ ;
- 2) додати обмеження:  $b_4 = 1$ ,

результат:

Потужність (Р)	Вал (X)	Резерв потужн. (Р-Х)	Витрати (АХ)	Випуск (В=Х-АХ)	Вартість (ВХ)	Н-варт	Т-ціна	Висновки:
123	123,00	0,00	70,70	52,30	627,60	6,81	0,00	є резерв
56	56,00	0,00	27,71	28,29	84,87	0,15	0,00	є резерв
78	46,35	31,65	46,35	0,00	0,00	0,00	-3,14	є резерв
50,76	50,76	0,00	49,76	1,00	7,00	0,00	0,00	розвиток 1
89	26,38	62,62	26,38	0,00	0,00	0,00	-10,13	є резерв
100	100,00	0,00	91,40	8,60	77,37	7,12	0,00	розвиток 3
200	200,00	0,00	33,33	166,67	3833,30	15,38	0,00	розвиток 2
					4630,14			
					ЦФ (X)			

### Аналіз результату

Достатньо збільшити потужність  $p_4$  з 34 до 50,76 од., що приведе до збільшення:

- відповідного валового випуску 4-го цеху (50,76 од.);
- міжцехових потоків ( $AX_4 = 49,76$ );
- кількості готової продукції усіх цехів;
- значення ЦФ з 4256,69 до 4630,14 гр. од.

Отримано відповідні двійсті оцінки, першим претендентом до розвитку став 7-ий цех.

### Умова 2.

Умову 1 знято. Прийнято рішення про виведення потужного 7-го цеху в ремонт, яку мінімальну потужність він повинен мати, щоб технологічний процес не зупинився?

Дії:

- 1) увести до складу шуканих невідомих змінну  $p_7$ ;
- 2) додати обмеження:  $p_7 = AX_7$ , результат:

Потужність (P)	Вал (X)	Резерв потужн. (P-X)	Витрати (AX)	Випуск (B=X-AX)	Вартість (BX)	Н-варт	Т-ціна	Висновки:
123	122,65	0,35	33,97	88,68	1064,19	0,00	0,00	є резерв
56	6,84	49,16	6,84	0,00	0,00	0,00	-1,13	є резерв
78	12,46	65,54	12,46	0,00	0,00	0,00	-4,96	є резерв
34	34,00	0,00	34,00	0,00	0,00	34,70	-39,68	розвиток 1
89	11,24	77,76	11,24	0,00	0,00	0,00	-12,47	є резерв
100	100,00	0,00	16,19	83,81	754,31	6,39	0,00	розвиток 3
17,58	17,58	0,00	17,58	0,00	0,00	0,00	0,00	розвиток 2
					1818,50			
					ЦФ (X)			

Відповідь:  $p_7 = 17,58$ .

### Умова 3.

Умову 2 знято. Коефіцієнт технологічної матриці  $A$   $a_{6,7} = 0,37$ , це означає, що 6-ий цех 37% власної продукції передає 7-му цеху на його внутрішні потреби. Прийнято рішення модернізувати технологічний процес у 7-му цеху (наприклад, заміною енергетичного обладнання), за рахунок чого цей коефіцієнт тепер має значення  $a_{6,7} = 0,17$ , до яких економічних наслідків це приведе?

Дії: достатньо замінити значення коефіцієнта  $a_{6,7}$  і отримати новий результат:

Цех 6	Цех 7	Ціна (C)	Потужність (P)	Вал (X)	Резерв потужн. (P-X)	Витрати (AX)	Випуск (B=X-AX)	Вартість (BX)	Н-варт	Т-ціна	Висновки:
0,14	0,17	12,00	123	68,41	54,59	62,51	5,90	70,79	0,00	0,00	є резерв
0,00	0,09	3,00	56	24,81	31,19	24,81	0,00	0,00	0,00	-1,86	є резерв
0,00	0,16	4,00	78	41,86	36,14	41,86	0,00	0,00	0,00	-6,91	є резерв
0,02	0,03	7,00	34	34,00	0,00	34,00	0,00	0,00	27,53	-35,23	розвиток 1
0,00	0,03	8,00	89	21,48	67,52	21,48	0,00	0,00	0,00	-19,16	є резерв
0,00	0,17	9,00	100	100,00	0,00	46,08	53,92	485,29	6,48	0,00	розвиток 3
0,00	0,00	23,00	200	200,00	0,00	23,45	176,55	4060,61	15,17	0,00	розвиток 2
								4616,69			
								ЦФ (X)			

Відповідь: загальний дохід збільшився на 360 гр. од.

### Умова 4.

Якою має бути мінімальна потужність «критичного» 4-го цеху, щоб він лише забезпечував внутрішні потреби згідно технології (без продажу на зовнішній ринок готової продукції), дії:

- 1) увести до складу шуканих невідомих змінну  $p_4$ ;
- 2) додати обмеження:  $b_4 = 0$  (або  $p_4 = x_4$ ),

результат:

Потужність (P)	Вал (X)	Резерв потужн. (P-X)	Витрати (AX)	Випуск (B=X-AX)	Вартість (BX)	Н-варт	Т-ціна	Висновки:
123	123,00	0,00	70,58	52,42	629,08	6,81	0,00	розвиток
56	56,00	0,00	27,65	28,35	85,05	0,15	0,00	розвиток
78	46,32	31,68	46,32	0,00	0,00	0,00	-3,14	є резерв
49,59	49,59	0,00	49,59	0,00	0,00	0,00	0,00	
89	26,13	62,87	26,13	0,00	0,00	0,00	-10,13	є резерв
100	100,00	0,00	91,20	8,80	79,18	7,12	0,00	розвиток
200	200,00	0,00	33,05	166,95	3839,78	15,38	0,00	розвиток
					4633,10			
					ЦФ (X)			

Відповідь: достатньою потужністю 4-го цеху  $p_4$  є величина 49,59, її перевищення приведе до утворення резервів потужності, подальше збільшення ефективності пов'язується зі збільшенням потужностей цехів: 7-го, 6-го, 1-го та 2-го.



**Висновок:** економіко-математична модель оптимального балансу є ефективним інструментом для визначення стратегічного розвитку виробничої діяльності. За її допомогою можна точно й обґрунтовано оцінити будь-які управлінські дії типу «що буде, якщо ...» й визначити шляхи покращення економічних показників, отримуючи зважені відповіді на запитання менеджерів «що робити, щоб ...».

## Параметричний аналіз

### Загальні відомості

*Параметр* – узагальнена назва й значення певного «входу» складної системи чи окремої складової її математичної моделі, які певним чином можуть впливати на значення «виходу» системи чи на результат моделювання. Параметром може бути безпосередньо величина експлуатаційного параметру об'єкту (Вантажопідйомність, Потужність), запасу ресурсу (Приміщення, Обладнання, Кошти, Робоча сила), джерел пропозиції чи попиту (Постачальник, Споживач) чи значення окремого коефіцієнту математичного виразу чи функції.

*Параметризація* – процедура оцінювання природи й впливовості різних параметрів на поведінку системи (серед людей це аналіз «хто-є-хто») дозволяє якнайкраще зрозуміти (ідентифікувати) складну систему та її складові з позицій управління нею та прогнозування наслідків в процесі розвитку.

В загальній оптимізаційній моделі:

I. Знайти план ( $X$ ), щоб

II. ЦФ  $f(X) \rightarrow \max/\min$

III. за обмежень  $g(X) \leq B$

та граничних умов:  $X \geq 0$

є 4 типи вхідних параметрів:

- коефіцієнти цільової функції  $f(X)$
- коефіцієнти лівої частини обмежень  $g(X)$
- значення правої частини обмежень  $B$  та
- граничні умови,

які впливають на значення кінцевого результату («виходу») – шуканий план ( $X$ ) й ЦФ.

В результаті проведення параметризації моделі за регулярною зміною певного параметру певним чином змінюється шуканий план, й, відповідно, значення цільової функції. Тобто, виходить, що тепер ЦФ залежить не лише від змінних шуканого плану, а й від значень параметру, вплив якого досліджується.

Найкраще результати процесу параметризації можна представити у наочній формі у вигляді точкових графіків функції  $y = f(x)$ , де  $y$  – значення ЦФ, а  $x$  – значення параметру. Отриманий точковий графік можна наблизити за правилами апроксимації (методом найменших квадратів) до однієї зі вбудованих в Excel стандартних чи заданих формулою нестандартних функцій, щоб надалі зробити прогноз на наступний період планування [59].

Основні функції:

- *лінійна*, зі сталою зміною виходу ( $y$ ),  $y = a_0 + a_1x$
- *степенева*, з поступовим зростанням чи спаданням виходу ( $y$ ):  $y = ax^b$  ( $b > 1$ ) або  $y = ax^b$  ( $b < 1$ )
- *експоненційна*, зі зростанням чи спаданням виходу ( $y$ ):  $y = ae^{-bx}$  або із асимптотичним насиченням,  $y = a(1 - e^{-bx})$

- *поліноміальна, n-ої степені,  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ .*

*Параметричний аналіз*<sup>18</sup> досліджує оптимізаційні моделі з тих позицій, що окремі коефіцієнти її складових (цільової функції та обмежень) передбачаються не постійними величинами, а функціями, залежними від певних впливаючих на результат вхідних параметрів. При цьому лінійність/нелінійність цих функцій визначається властивістю задачі, типом оптимізації – лінійної чи нелінійної – та властивостями параметрів.

Ця технологія дозволяє організувати й здійснити крупномасштабний аналіз ситуації, що моделюється, скажімо, у динаміці – як на сьогодні, так й на наступні часові періоди, щоб тим самим наблизити до реальності умови звичайної (статичної) оптимізаційної задачі, коли значення впливаючого параметру (це, скажімо, вартість енергоносіїв чи температура повітря) є функцією часу.

Наприклад, якщо коефіцієнти цільової функції задачі про оптимальний план виробництва є цінами продуктів, що виготовляються, тоді цілком природно припустити, що ці ціни не постійні завжди, а є функціями параметру – *часу*, бо ж з часом і ціни на сировину та інші ресурси змінюються (власного виробництва чи імпорту). Така динамічна залежність реально виникає, зокрема, при плануванні виробництва в аграрному секторі економіки, де продажні ціни на готову продукцію носять явно виражений сезонний характер, відповідно, це впливає й на економіку громадського харчування та споживчого ринку, аналогічна ситуація характерна для сезонного коливання курсу валюти, об'єму попиту на певні послуги (транспортні, туристичні, готельні) тощо. Сюди ж слід віднести конкретні короткотривалі часові періоди, коли різко зростають ціни й попит, це: вихідні чи святакові дні, крупні спортивні змагання, концерти, фестивалі, виставки, туризм тощо.

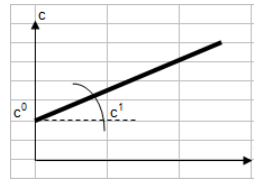
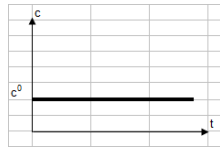
Таким чином, параметричний аналіз при оптимізації соціально-економічних систем дозволяє використати детерміновані моделі із одночасним врахуванням впливу певних факторів випадкової природи, не вдаючись до моделей стохастичного програмування. Результатом цього аналізу є сімейство оптимальних рішень, де кожне з рішень відповідає окремій комбінації початкових даних задачі із врахуванням впливу відповідних параметрів. Й ще одна із переваг параметричного підходу – можливість проведення аналізу чутливості (стійкості) рішень оптимізаційних задач, де визначається інтервал (область) значень відповідних вхідних параметрів, в межах якого оптимальність рішення залишається незмінною. Цей є важливим для виробництв із серійним чи масовим випуском продукції, де кожне переналагодження є небажаною подією.

Варіанти залежностей:

Складова мо- делі	ЛП	Параметр t
Цільова функція	$\sum_{j=1}^n c_j x_j$	$\sum_{j=1}^n (c_j^0 + c_j^1 t) x_j$
Обмеження (ПЧ)	$b_i$	$b_i^0 + b_i^1 t$
Обмеження (ЛЧ)	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$	$\sum_{j=1}^n (a_{ij}^0 + a_{ij}^1 t) x_j$
Усі	$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$	$\sum_{j=1}^n (c_j^0 + c_j^1 t) x_j \rightarrow \max$
	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$	$\sum_{j=1}^n (a_{ij}^0 + a_{ij}^1 t) x_j \leq b_i^0 + b_i^1 t$

<sup>18</sup> або параметричне (лінійне/нелінійне) програмування як розділ математичного програмування, де певні коефіцієнти математичної моделі замінені функціями

Графік

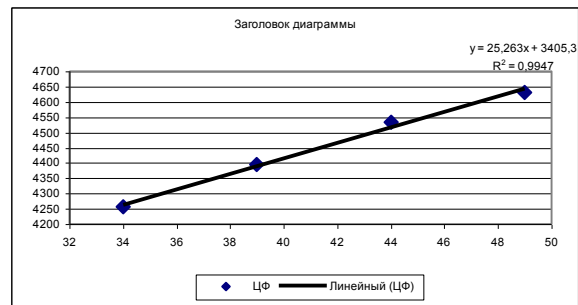
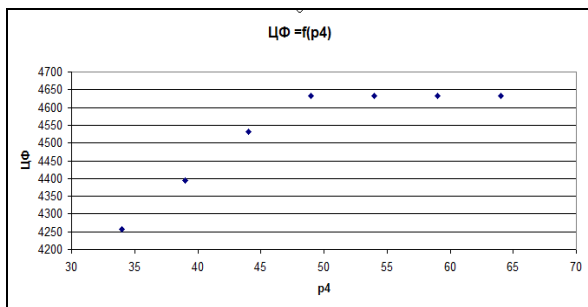


### Задача 2.7. Про оптимальний баланс (параметр – потужність 4-го цеху)

В задачі 2.5 було визначено «критичний» параметр – потужність 4-го цеху, треба дослідити, як буде змінюватися виробнича програма підприємства – випуск готової продукції цехами та його вартість – при поступовій зміні значення цього параметру із заданим кроком ( $p = 5$ ).

Результат

Параметр ( $p_4$ )	ЦФ	Цех 1	Цех 2	Цех 3	Цех 4	Цех 5	Цех 6	Цех 7	Резерв потужності
34	4256,69	5,90	0,00	0,00	0,00	0,00	13,92	176,55	0,00
39	4394,34	23,42	0,00	0,00	0,00	0,00	12,49	173,95	0,00
44	4532,00	40,94	0,00	0,00	0,00	0,00	11,06	171,36	0,00
49	4631,85	52,66	20,32	0,00	0,00	0,00	9,16	167,68	0,00
54	4633,10	52,42	28,35	0,00	0,00	0,00	8,80	166,95	4,41
59	4633,10	52,42	28,35	0,00	0,00	0,00	8,80	166,95	9,41



Точковий графік функції  $D = f(p_4)$  складається з двох частин: зростаючої й незмінюваної, при  $p_4 \approx 50$  наступає насичення для значень ЦФ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_6$  та  $x_7$ , надалі у 4-го цеху з'являється резерв потужності, тобто, інвестиції у розвиток цеху не супроводжуються віддачею. Змінювана частина практично лінійна, описується функцією  $y = 25,26x + 3405$  (де:  $y$  – ЦФ,  $x$  –  $p_4$ ). Отриманий результат ілюструє умову 4 задачі 2.5, де точка насичення отримана досить точно ( $p_4 = 49,59$ ) уведенням відповідного обмеження.

### Задача 2.8. Планування інвестицій за критерієм максимізації доходу

В основі цієї задачі лежить народна мудрість: «не клади всі яйця в один кошик».

#### Постановка задачі

Інвестор, зрозуміло, ризикуючи, планує найкращим чином визначити частки суми коштів загальним об'ємом  $S$  гр. од., які будуть вкладені у цінні папери (ЦП, акції)  $n$  підприємств з метою отримання прибутку у певному часовому періоді.

Умова «найкращим чином», тобто, оптимально, означає, що існує два альтернативні критерії оптимізації:

- **мінімізація** ризику при фіксованому доході (обережний підхід) або
- **максимізація** доходу при фіксованому ризику (ризикований, сміливий підхід).

В інвестиційному менеджменті набір часток суми інвестування називається *портфель*, оптимальним портфелем є набір, який інвестор визнає для себе найкращим щодо відношен-

ня між доходністю вкладень та ризиком втрат, існує приблизно пропорційна залежність між цими показниками – чим більша доходність, тим більший ризик, що її супроводжує. Отже, поставлена задача про визначення *оптимального портфеля*, ця проблематика щільно пов’язана з іменами двох американських економістів Г. Марковіца та У. Шарпа, дослідження яких у цій галузі з використанням моделей ЛП відзначені Нобелівською премією з економіки за 1990 р.<sup>19</sup>

У цій задачі застосовується модель Марковіца<sup>20</sup>, де задані оцінки доходності та ризику, інвестор вибирає критерій – на основі зафіксованих підприємствами ризиків він має вибрати оптимальний варіант – куди і скільки вкласти коштів, щоб отримати максимальний дохід, обмежуючим фактором на дохід є забезпечення певного рівня ризику.

### Приклад.

Інвестор хоче вкласти кошти у сумі 30000 грн. в акції 6 підприємств, для кожного з них відомі доходності акцій (%), терміни дії, фіксовані оцінки ризику та певні додаткові умови.

Розглянемо послідовно кілька варіантів, починаючи з варіанту без додаткових обмежень і закінчуючи варіантом із врахуванням кількох обмежень. Введенням обмежень фіксуються умови зниження ризику у процесі інвестування.

### **Математична модель**

#### Позначення

$i$  – поточний номер інвестиції, яка вкладається в  $i$ -ий цінний папір (ЦП)

$x_i$  – об’єм інвестування в  $i$ -ий ЦП

$d_i$  – доходність  $i$ -го ЦП

$D$  – загальний дохід.

#### **Задача оптимального інвестування**

I. Знайти план інвестування  $X = (x_1, \dots, x_6)$ , такий, щоб

II. загальний дохід (ЦФ)  $D = d_1x_1 + \dots + d_6x_6 \rightarrow \max$

III. за обмеження  $x_1 + \dots + x_6 = 30000$

та граничних умов – усі  $x_i \geq 0$

#### Варіант 1. (Без додаткових обмежень)

Результат (однозначний):

Оптимальне планування інвестицій				
Підприємство	Доходність %	План	Доход	Портфель
П-1	10,8	0	0,0	0%
П-2	12,0	0	0,0	0%
П-3	12,5	30000	3750,0	100%
П-4	11,0	0	0,0	0%
П-5	11,5	0	0,0	0%
П-6	11,2	0	0,0	0%
		30000	3750,0	ЦФ
		30000	12,5%	

пропонується оптимальний план, за яким інвестор має вкласти усі кошти лише у «вигідні» цінні папери П-3, загальний дохід складає 3750 гр. од., або 12,5% від суми. Виходить, “всі яйця уклали в один кошик”, до того ж ніяк не враховано ризик.

Це ідеальний, навіть фантастичний, бо безризиковий, і тому неможливий на практиці варіант, його єдина цінність – маємо уявлення про “ідеал”, з яким далі

буде порівнюватися “реальність”.

<sup>19</sup> У. Шарп і др. Інвестиції. – М.: ИНФРА-М, 1997-99 гг., 1200 с.

<sup>20</sup> модель Шарпа базується на обчисленні оцінок ризику за статистичними даними доходності ЦП, див. Нелінійне програмування

Наступні варіанти – це рух від «ідеального» до «реального» плану, де певним чином враховуються ризики.

**Варіант 2.** (З додатковим обмеженням на максимальну величину інвестиції  $\leq 7500$ ). Зваживши на рекомендації народної мудрості, інвестор приймає рішення обмежити знизу та зверху величину інвестиції: зверху значенням 7500 (вкласти не більше  $\frac{1}{4}$  загальної суми), знизу – мінімальним внеском, узгодженим з підприємством, відповідно, в модель додається обмеження для всіх невідомих плану:

$\min(v_i) \leq x_i \leq 7500$ , маємо такий результат:

Оптимальне планування інвестицій					
Підприємство	Доходність %	Мінім. внесок	План	Доход	Портфель
П-1	10,8	1200	1200	130	4%
П-2	12,0	1500	7500	900	25%
П-3	12,5	1000	7500	938	25%
П-4	11,0	1500	1500	165	5%
П-5	11,5	1200	7500	863	25%
П-6	11,2	1800	4800	538	16%
			30000	3532	ЦФ
		7500	30000	11,8%	

**Варіант 3.** (З додатковим обмеженням на врахування рівня ризику)

Щоб оцінити ризик, інвестор замовив підприємствам визначити рівень (рейтинг) ризику їх цінних паперів по 4-бальній шкалі (для цього введена величина  $r_i$  – оцінка ризику  $i$ -го ЦП, чим більше бал, тим більший ризик), і вирішив у **всі** підприємства з високим рівнем ризику (зі значенням 3 та 4) вкласти не більше  $\frac{1}{3}$  всієї суми (10000 грн). Для цього за допомогою функції (у клітинці D9) СУММЕСЛИ(ризик;">=3";плани)

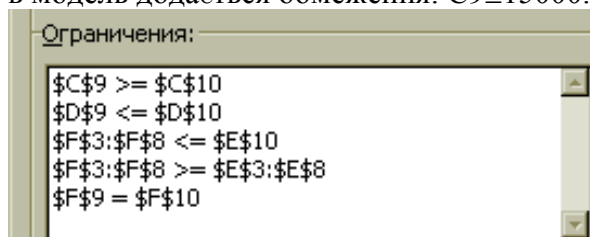
обчислюється сума інвестицій з відповідним рівнем ризику  $i$  в модель додається відповідне обмеження:  $D9 \leq 10000$ , маємо відповідний результат:

Оптимальне планування інвестицій						
Підприємство	Доходність %	Рівень ризику	Мінім. внесок	План	Доход	Портфель
П-1	10,8	1	1200	5000	540,0	17%
П-2	12,0	3	1500	7500	900,0	25%
П-3	12,5	4	1000	1300	162,5	4%
П-4	11,0	2	1500	7500	825,0	25%
П-5	11,5	3	1200	1200	138,0	4%
П-6	11,2	2	1800	7500	840,0	25%
				30000	3405,5	ЦФ
		10000				
		10000	7500	30000	11,35%	

**Варіант 4.** (З додатковим обмеженням на врахування терміну дії інвестиції)

Інвестор вважає, що довготривалі інвестиції більш надійні, тому замовив підприємствам визначити термін (у роках) використання інвестицій, і, щоб віддати перевагу інвестиціям тривалістю понад 5 років, поставив умову, що у **всі** такі підприємства вкласти не менше  $\frac{1}{2}$  всіх коштів. Для цього за допомогою функції (C9)

СУММЕСЛИ(терміни;">=5;плани) обчислюється сума інвестицій з відповідним терміном  $i$  в модель додається обмеження:  $C9 \geq 15000$ . Тепер в моделі враховані всі обмеження:



для отримання кінцевого результату знайдено розв'язок прямої та двоїстої задач:

Оптимальне планування інвестицій								
Підприємство	Доходність %	Термін	Рівень ризику	Мінім. внесок	План	Доход	Портфель	Н-варт
П-1	10,8	8	1	1200	5000	540,0	17%	0
П-2	12,0	7	3	1500	1500	180,0	5%	-0,005
П-3	12,5	4	4	1000	7300	912,5	24%	0
П-4	11,0	7	2	1500	7500	825,0	25%	0,002
П-5	11,5	5	3	1200	1200	138,0	4%	-0,010
П-6	11,2	10	2	1800	7500	840,0	25%	0,004
		21500	10000		30000	3435,5	ЦФ	
		15000	10000	7500	30000	11,5%		
		обмеження						
		0	0,017		0,108			
		Тіньові ціни обмеж.						
		6500	200		2500			
		Допуст. збільшення						

## Аналіз результату

### Пряма задача

Оптимальний план інвестицій  $X = (5000, 1500, 7300, 7500, 1200, 7500)$  забезпечує інвестору загальний дохід зі значенням 3435,50 грн., що склало 11,5% суми інвестицій (досить непогано, якщо ідеальний 12,5%). Ризик зафіксовано введенням обмежень на величину окремої інвестиції, зокрема, загальна сума інвестицій для ризикованих ЦП (П-2, П-3 та П-5) обмежена сумою 10000 (1500+7300+1200), в той же час сума довготривалих інвестицій (> 5 років) є більшою за 50% загальної суми і склала величину 21500. Враховані побажання підприємств щодо мінімальної суми інвестицій.

### Двоїста задача

- нормовані вартості для невідомих вказують, як зміниться ЦФ (загальний дохід) при вимушеному збільшенні значення невідомих (суми інвестування).

Наприклад, для ризикованих об'єктів П-2 та П-5, для яких інвестиції обмежені “знизу” мінімальним внеском ( $x_2 = 1500$  та  $x_5 = 1200$ ), нормовані вартості – від’ємні числа (-0,005 та -0,01, це втрати на півкопійки та копійку на кожен вкладений гривню), ці об’єкти “невигідні”, бо вимушене збільшення їх інвестицій на одиницю (шляхом введення обмеження типу  $x_5 = 1201$ ) буде коштувати інвестору втрат ЦФ на ці величини відповідно (скажімо, для вимоги, щоб  $x_5 = 1201$  інвестор втратить цілу копійку! бо ЦФ буде тепер 3435,49 замість 3435,50). З точки зору економіки це означає, що додаткова гривня у складі  $x_5$  змусила на копійку зменшити віддачу “вигідних” вкладень (в межах фіксованих 30000).

В той же час для “вигідних” об’єктів П-4 та П-6, суми інвестування яких обмежені “зверху” величиною максимальної інвестиції (7500), нормовані вартості 0,002 та 0,004 вказують на збільшення ЦФ при вимушеному підвищенні їх значень на 1 (приріст ЦФ на 0,2 та 0,4 копійки на одну додаткову гривню за рахунок «ущільнення» невивідних об’єктів).

Отже, інвестор отримує можливість врахувати ці рекомендації і внести відповідні зміни в інтервал (min-max) для окремих інвестицій;

- тіньові ціни обмежень також дозволяють визначити раціональні подальші дії інвестора, зокрема:

а) позитивне число 0,108 для величини інвестування (30000) вказує на збільшення прибутку (ЦФ) майже на 11 копійок при збільшенні суми інвестування на 1 гривню

б) позитивне число 0,017 для величини обмеження на суму ризикованих інвестицій (10000) вказує на збільшення ЦФ на цю величину при збільшенні обмеження на 1;

- одночасно задані допустимі границі збільшення відповідних показників, зокрема, суму інвестування можна збільшити максимум на 2500 грн. (до 32500 грн.), це приведе до значення ЦФ

3705,5 (3435,5 + 0,108\*2500).

Маючи ці результати, на створеній оптимізаційній моделі можна проводити комп'ютерні експерименти, досліджуючи вплив відповідних початкових даних (доходності, терміну використання, мінімальної суми чи рівня ризику) на значення загального прибутку, структури та склад інвестиційного портфелю.

## Задача 2.9. Про оптимальний план виробництва (параметр – коефіцієнти ЦФ)

### Постановка задачі

В умовах зміни цінової політики в залежності від параметру (часу), який впливає на питому ціну продуктів у вигляді лінійної залежності  $c(x) = (c_{\text{баз}} \pm t)x$  протягом періоду планування, що складається із 13 часових періодів ( $t = 0, 1, \dots, 13$ ), підприємство виготовляє два види продукції, використовуючи запаси трьох видів ресурсів. Треба визначити оптимальний виробничий план  $X = (x_1, x_2)$  на увесь період планування у вигляді сімейства 13 оптимальних планів для кожного часового періоду за критерієм максимуму доходу ( $D$ ).

### Початкові дані

	Пр-1	Пр-2	Запас
Рес-1	4	1	16
Рес-2	2	2	22
Рес-3	6	3	36
Ціна баз.	2	13	

### Задача оптимізації

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2)$ , такий, щоб

II. ЦФ  $D = (2 + t)x_1 + (13 - t)x_2 \rightarrow \max$

III. за обмежень:

$$4x_1 + x_2 \leq 16$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 22$$

$$6x_1 + 3x_2 \leq 36$$

та граничних умов:  $x_1, x_2 \geq 0$ .

Параметр  $t = 0, 1, \dots, 13$ :

$$c_1 = 2 + t = (2, 3, \dots, 15)$$

$$c_2 = 13 - t = (13, 12, \dots, 0)$$

$$X = (X_0, X_1, X_2, \dots, X_{13}).$$

### Табличні моделі і результати

	Пр-1	Пр-2	Запас	Використано	Залишок	Т-ціна
Рес-1	4	1	16	11	5	0
Рес-2	2	2	22	22	0	6,5
Рес-3	6	3	36	33	3	0
Ціна баз.	2	13				
Ціна нова	2	13		143		
План	0	11				ЦФ
t =	0					

	Пр-1	Пр-2	Запас	Використано	Залишок	Т-ціна
Рес-1	4	1	16	11	5	0
Рес-2	2	2	22	22	0	6
Рес-3	6	3	36	33	3	0
Ціна баз.	2	13				
Ціна нова	3	12		132		
План	0	11				ЦФ
t =	1					

	Пр-1	Пр-2	Запас	Використано	Залишок	Т-ціна
Рес-1	4	1	16	11	5	0
Рес-2	2	2	22	22	0	5,5
Рес-3	6	3	36	33	3	0
Ціна баз.	2	13				
Ціна нова	4	11		121		
План	0	11		ЦФ		
t =	2					

	Пр-1	Пр-2	Запас	Використано	Залишок	Т-ціна
Рес-1	4	1	16	11	5	0
Рес-2	2	2	22	22	0	5
Рес-3	6	3	36	33	3	0
Ціна баз.	2	13				
Ціна нова	5	10		110		
План	0	11		ЦФ		
t =	3					

	Пр-1	Пр-2	Запас	Використано	Залишок	Т-ціна
Рес-1	4	1	16	11	5	0
Рес-2	2	2	22	22	0	4,5
Рес-3	6	3	36	33	3	0
Ціна баз.	2	13				
Ціна нова	6	9		99		
План	0	11		ЦФ		
t =	4					

	Пр-1	Пр-2	Запас	Використано	Залишок	Т-ціна
Рес-1	4	1	16	11	5	0
Рес-2	2	2	22	22	0	4
Рес-3	6	3	36	33	3	0
Ціна баз.	2	13				
Ціна нова	7	8		88		
План	0	11		ЦФ		
t =	5					

	Пр-1	Пр-2	Запас	Використано	Залишок	Т-ціна
Рес-1	4	1	16	14	2	0
Рес-2	2	2	22	22	-7,4E-11	3
Рес-3	6	3	36	36	-2,2E-10	0,333333
Ціна баз.	2	13				
Ціна нова	8	7		78		
План	1	10		ЦФ		
t =	6					

	Пр-1	Пр-2	Запас	Використано	Залишок	Т-ціна
Рес-1	4	1	16	14	2	0
Рес-2	2	2	22	22	0	1,5
Рес-3	6	3	36	36	0	1
Ціна баз.	2	13				
Ціна нова	9	6		69		
План	1	10		ЦФ		
t =	7					

	Пр-1	Пр-2	Запас	Використано	Залишок	Т-ціна
Рес-1	4	1	16	16	6,01E-12	0
Рес-2	2	2	22	20	2	0
Рес-3	6	3	36	36	-1,4E-11	1,666667
Ціна баз.	2	13				
Ціна нова	10	5		60		
План	2	8		ЦФ		
t =	8					

	Пр-1	Пр-2	Запас	Використано	Залишок	Т-ціна
Рес-1	4	1	16	16	0	1,5
Рес-2	2	2	22	20	2	0
Рес-3	6	3	36	36	0	0,833333
Ціна баз.	2	13				
Ціна нова	11	4		54		
План	2	8		ЦФ		
t =	9					

	Пр-1	Пр-2	Запас	Використано	Залишок	Т-ціна
Рес-1	4	1	16	16	0	3
Рес-2	2	2	22	8	14	0
Рес-3	6	3	36	24	12	0
Ціна баз.	2	13				
Ціна нова	12	3		48		
План	4	0		ЦФ		
t =	10					

	Пр-1	Пр-2	Запас	Використано	Залишок	Т-ціна
Рес-1	4	1	16	16	0	3,25
Рес-2	2	2	22	8	14	0
Рес-3	6	3	36	24	12	0
Ціна баз.	2	13				
Ціна нова	13	2		52		
План	4	0		ЦФ		
t =	11					

	Пр-1	Пр-2	Запас	Використано	Залишок	Т-ціна
Рес-1	4	1	16	16	0	3,5
Рес-2	2	2	22	8	14	0
Рес-3	6	3	36	24	12	0
Ціна баз.	2	13				
Ціна нова	14	1		56		
План	4	0		ЦФ		
t =	12					

	Пр-1	Пр-2	Запас	Використано	Залишок	Т-ціна
Рес-1	4	1	16	16	0	3,75
Рес-2	2	2	22	8	14	0
Рес-3	6	3	36	24	12	0
Ціна баз.	2	13				
Ціна нова	15	0		60		
План	4	0		ЦФ		
t =	13					

## Аналіз результату

При значенні параметру  $t = 0, 1, \dots, 13$  ціна  $c_1$  лінійно зростає від 2 до 15, а ціна  $c_2$  лінійно спадає від 13 до 0, відповідно, змінюється шуканий план і дохід.

Графічним методом визначено оптимальний план, що послідовно знаходиться у 4 -ох кутових точках ОДР:

кутова точка 1 (0; 11), план незмінний в діапазоні  $0 \leq t \leq 5$ ,  $D = f(t) = 143 - 11t$

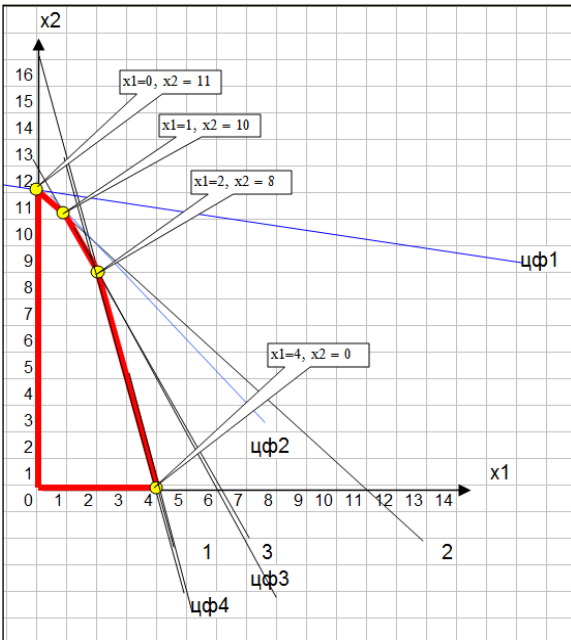
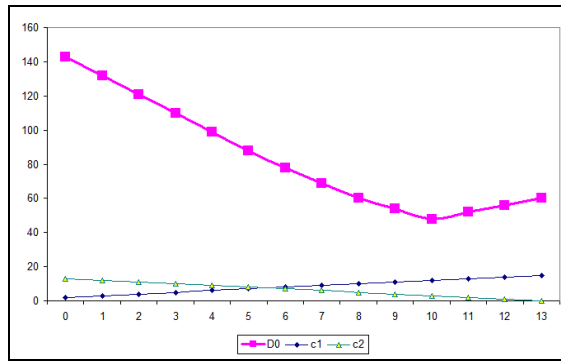
кутова точка 2 (1; 10), план незмінний в діапазоні  $6 \leq t \leq 7$ ,  $D = f(t) = 78 - 9t$

кутова точка 4 (2; 8), план незмінний в діапазоні  $8 \leq t \leq 9$ ,  $D = f(t) = 60 - 6t$

кутова точка 4 (4; 0), план незмінний в діапазоні  $10 \leq t \leq 13$ ,  $D = f(t) = 48 + 4t$ .



t	x1	x2	D0	c1	c2
0	0	11	143	2	13
1	0	11	132	3	12
2	0	11	121	4	11
3	0	11	110	5	10
4	0	11	99	6	9
5	0	11	88	7	8
6	1	10	78	8	7
7	1	10	69	9	6
8	2	8	60	10	5
9	2	8	54	11	4
10	4	0	48	12	3
11	4	0	52	13	2
12	4	0	56	14	1
13	4	0	60	15	0



### Параметризація: наочна ілюстрація

Товстою лінією виокремлена ОДР, що утворена перетином 3-ох графіків нерівностей й двома граничними умовами (двома осями). Визначено 3 кутових точки й 3 ділянки прямих між ними. Кутова точка 1 (0; 11) – базовий оптимум; далі лінія ЦФ зі змінною параметра  $t$  поступово повертається по годинниковій стрілці навколо цієї точки, утворюючи діапазон 1 з 6 значень, поки не співпаде з 1-ою ділянкою ОВФ й не потрапить у кутову точку 2 (1; 10), де розпочався діапазон 2 (2 значення).

Лінія ЦФ зі змінною параметра продовжує повертатися, поки не співпаде з 2-ою ділянкою ОВФ й не потрапить у кутову точку 3 (2; 8) де розпочався діапазон 3 (2 значення).

Лінія ЦФ зі змінною параметра продовжує повертатися, поки не співпаде з 3-ою ділянкою

ОВФ й не потрапить у кутову точку 4 (4; 0), це діапазон 4 (4 значення).

Якщо параметр змінювати й далі, лінія ЦФ буде обертатися навколо точки (4; 0), план залишатиметься незмінним, значення ЦФ буде збільшуватися за рахунок збільшення ціни  $c_1$  й від'ємної ціни  $c_2$ . Таким чином, зміна параметра  $t$  змінює коефіцієнти ЦФ, її пряма лінія при цьому поступово змінює свій нахил й наче «ковзає» по ламаній поверхні ОДР, поступово «перестрибуючи» з однієї кутової точки до наступної, визначаючи цим нові оптимальні плани.

### Глава 3. Лінійні моделі матричних та змішаних оптимізаційних задач

#### Загальні відомості

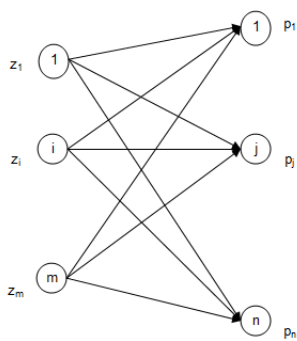
Фактично, усі задачі оптимізації стосуються оптимального розподілу обмежених ресурсів: коштів, насіння, техніки, працівників, продуктів чи послуг тощо, ці задачі відрізняються специфікою, структурою, описом та математичним формулюванням показників ефективності чи витрат.

У цьому розділі розглядаються типові задачі розподілу ресурсів матричного типу, де в  $m$  рядках матриці визначають джерела (постачальників) ресурсів, а по  $n$  стовпцях – стоках (споживачах) тих же ресурсів.

Джерела мають запаси ( $z_i$ ), а стоки – попит ( $p_j$ ), шляхи розподілу характеризуються певним параметром – витратами чи ефективністю.

Шукані невідомі змінні утворюють **матрицю**  $X$  розміром  $m \times n$ , де елемент  $x_{ij}$  визначає величину ресурсу, яка передається від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача у тому ж чи перетвореному вигляді (скажімо, запаси фруктів у кг передаються у торгівлю у вигляді соків в літрах), звідси – матричні задачі ЛП.

В залежності від співвідношення запасів то попиту задачі бувають закритими (збалансованими) чи, як правило, відкритими (сума запасів не співпадає із сумою попиту).



Схематично цю задачу зображують сіткою з вузлами двох видів: вузли-джерела та вузли-стоки, які з'єднані між собою, кожен з кожним, направленою зваженою дугою, всього їх  $mn$ .

Математичним апаратом для розв'язання цих задач є лінійна алгебра та її матричні функції і операції, на цій основі формуються моделі лінійного програмування матричного типу, зокрема, класична транспортна задача (ТЗ) на мінімум цільової функції, її модифікації та різноманітні моделі нелінійного програмування.

З часом на основі класичної задачі виникли різні її модифікації, завдяки чому значно розширилась сфера впровадження відповідних транспортних моделей. Саме тому транспортні моделі є найбільш уживаними, узагальненими і універсальними моделями лінійної оптимізації, що базуються на ефективному застосуванні зображувальних і обчислювальних засобів матричної алгебри і найкраще відповідають можливостям електронних таблиць. Їх модифікації у вигляді мережевих задач входять у склад поточкових моделей оптимізації (див.: Поточкове програмування).

#### Історія

Задачі транспортного типу є усюди і завжди, але особливої ваги вони набувають під час критичних подій (природних катаклізмів, воєн, техногенних аварій чи катастроф), коли необхідно оперативно здійснити масове переміщення будь-чого в умовах відповідного забезпечувального дефіциту: транспортної техніки, комунікацій, палива тощо. Тож не дивно, що математичні моделі під загальною назвою «транспортна задача» незалежно виникли в період підготовки та на початку II Світової війни (1940-41 рр.): в СРСР її поставили й досліджували Л.В. Канторович та М.К. Гавурін, в США – Ф. Хічкок, Т. Купманс та Дж. Данциг.

В СРСР, зокрема, тоді треба було перемістити із західних територій у східному напрямку промислове обладнання заводів, запаси харчів, сировини та різноманітних матеріалів, евакуювати мільйони людей тощо у вкрай обмежені терміни й в умовах слабо розвинених комунікацій та дефіциту відповідної транспортної техніки. Зворотними шляхами перевозилася військова техніка, вояки, боєприпаси тощо.

Зі США в Європу морськими шляхами транспортувалася техніка, військові частини тощо.

Виникла складна організаційна й економічна проблема – мінімізувати загальні витрати (втрати), пов'язані із переміщенням від постачальників до споживачів відповідних мас, до розв'язання якої були залучені математики та економісти.

### Узагальнена матрична задача розподілу ресурсів

В матричних задачах мова йде про розподіл одного чи кількох ресурсів від постачальників до споживачів у широкому розумінні цього процесу: про безпосереднє перевезення, призначення, прикріплення, раціональне розташування, ділення цілого (запасу) на частки тощо щодо одного чи кількох однорідних, взаємозамінних або навіть різних за своєю природою ресурсів (продуктів, товарів, людей, документів, техніки, природних, фінансових чи кадрових ресурсів, документів тощо) обмеженої кількості по заданій комунікаційній мережі, де задані прямі зв'язки (маршрути) типу «від кожного до кожного» у наочній (карта, схема, мережа) чи числовій формі у вигляді матриць витрат чи прибутків.

Мета оптимального розподілу за матричною організацією – забезпечення попиту споживачів у ресурсах, які пропонують постачальники, найкращим чином, тобто, за критерієм:

- *максимізації* загального позитивного ефекту (наприклад, отриманого прибутку) чи
  - *мінімізації* загальних втрат (витрат на доставку),
- цей шуканий результат представляється відповідною матрицею шуканих невідомих того ж розміру й форми, що й матриця початкових даних.

Типовою задачею цього типу є класична транспортна задача, де від постачальників до споживачів розподіляється один ресурс: конкретний матеріал, кошти, люди, документи тощо, тому матричні моделі оптимального розподілу ресурсів називають загалом транспортними моделями, розуміючи операцію «транспортування» у самому широкому сенсі як розподіл обмежених ресурсів від  $m$  постачальників до  $n$  споживачів.

#### Постановка задачі

Є запаси однородного ресурсу  $m$  постачальників у кількості  $z_1, \dots, z_m$  для задоволення потреб (попиту)  $n$  споживачів у кількостях  $p_1, \dots, p_n$ , початкові дані задані:

- двома векторами: запасів  $Z = \{z_i\}$  і потреб  $P = \{p_j\}$  та
- двома матрицями  $C = \{c_{ij}\}$  та  $D = \{d_{ij}\}$ ,  $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ , де:

$c_{ij}$  – вартісна оцінка (витрати/прибуток) використання  $i$ -го ресурсу на задоволення  $j$ -их потреб (коротко – ціна),

$d_{ij}$  – технологічна питома норма застосування  $i$ -го ресурсу на задоволення  $j$ -их потреб (коротко – норма).

Тож треба розподілити наявні ресурси постачальників споживачам таким чином, щоб загальна вартісна оцінка задоволення потреб (попиту) була б мінімальною (якщо для розподілу задані питомі витрати) або максимальною (якщо задано питомий прибуток).

Для цього треба знайти *матрицю розподілу*  $X = \{x_{ij}\}$ , де  $x_{ij}$  – кількість  $i$ -го ресурсу, що використовується для задоволення  $j$ -их потреб.

Матрична ресурсна задача має певні загальні риси з розглянутою вище векторною задачею оптимального розподілу обмежених ресурсів (про план виробництва, суміш, баланс) і це зрозуміло, бо вектор чи матриця – то лише умовна форма (структура) представлення даних, одні й ті дані можна представити компактною і наочною таблицею-матрицею зі зрозумілою адресацією чи довжелезним рядком-списком. Тому для зручності побудови моделі і організації обчислювальної роботи вибирають ту чи іншу форму: векторну, матричну або ж змішану (комбіновану) – векторно-матричну.

Матрична форма – це звична, наочна і зрозуміла для економістів таблиця, у вигляді якої діють більшість розрахункових документів, відповідно, використовуються двоовимірні

(шахматна) адресація величин, що розміщуються в клітинках, утворених на перетині рядків і колонок. На користь матриць вказують потужні операції матричної алгебри. Саме з цих позицій матричні задачі оптимізації розглядаються окремо.

### Порівняльна таблиця

#### **Векторна задача розподілу ресурсів**

(оптимальний план)

Задано: запаси  $m$  видів ресурсів у кількості  $z_1, \dots, z_m$  для виготовлення  $n$  продуктів, матрицю норм  $D=\{d_{ij}\}$ , вектор цін  $C=\{c_i\}$ , де  $i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$

Знайти план: **вектор**  $X=\{x_i\}$

#### **Матрична задача розподілу ресурсів** (транспортна задача)

Задано: запаси  $m$  видів ресурсів у кількості  $z_1, \dots, z_m$  для задоволення  $n$  потреб у кількостях  $p_1, \dots, p_n$ , матриці цін  $C=\{c_{ij}\}$  і норм  $D=\{d_{ij}\}$ , де  $i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$

Знайти план: **матрицю**  $X=\{x_{ij}\}$

### Варіанти матричних задач розподілу ресурсів:

- 1) проста задача розподілу одного ресурсу (всі  $d_{ij} = 1$  і, фактично, матриця  $D$  не використовується), її характерний приклад – класична транспортна задача, де транспортується пісок, нафта чи фінанси.
- 2) задача з однорідними і повністю взаємозамінними ресурсами, де замість матриці  $d_{ij}$  використовується вектор  $D=\{d_i\}$  з елементами  $d_i$  для кожного  $i$ -го ресурсу; наприклад, для перевезень пасажирів маємо  $m$  типів автобусів чи літаків з  $d_i$  місць у кожному з них.
- 3) задача з пропорційними ресурсами – ресурси і потреби неоднорідні, але матриця  $D$  встановлює зв'язки між одиницями ресурсів і потреб, характерна особливість – рядки цієї матриці пропорційні,  $d_{ij} = k_i d_{ij}$ , де числа  $k_i$  називаються індексами  $i$ -их ресурсів.
- 4) загальна задача з довільною матрицею  $D$ .

Отже, задані зв'язки «постачальник-споживач» представляються прямокутними матрицями  $C$  і  $D$ , розмір яких визначається кількістю постачальників (рядки) та споживачів (стовпці), де кожен елемент матриці  $C$  є певною витратною оцінкою чи параметром (відстанню, тривалістю, витратами коштів) відповідного зв'язку.

Постачальники характеризуються пропозиціями (запасами ресурсу), а споживачі – потребами (попитом, замовленням), ці величини виступають як обмеження.

Розв'язком задачі є матриця  $X$  того ж розміру ( $m \times n$ ), де кожен її елемент  $x_{ij}$  є певним кількісним показником, скажімо, об'ємом вантажу, що транспортується відповідним маршрутом, чи кількістю літаків певного типу, що призначаються за певним рейсом.

### **Особливості транспортної моделі ЛП**

- 1) Модель класичної транспортної задачі має цікаву особливість: якщо початкові дані (запаси, потреби і питомі витрати) задані цілими числами, тоді план перевезень теж буде цілочисельним. Ця риса є досить ефективним і простим способом розв'язувати задачі цілочисельного програмування.
- 2) Незбалансованість транспортної задачі. На практиці задачі розподілу, як правило, незбалансовані (або відкриті), зведення їх до збалансованої (закритої) – штучний прийом, пов'язаний з процесом обчислень (з позицій обчислювальної математики – це заміна обмежень у формі систем нерівностей обмеженнями у формі систем рівнянь для застосування стандартних алгоритмів розв'язання СЛР).

Можливі два випадки незбалансованості:

- сума запасів < суми потреб і
- сума потреб < суми запасів.

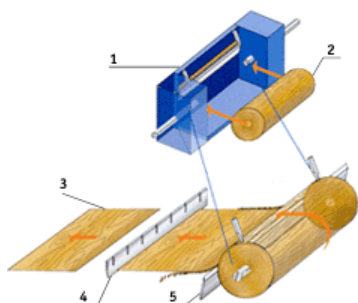
Відповідно застосовують два способи врахування незбалансованості:

1) для випадку «сума запасів < суми потреб» обмеження 3.1 задають рівняннями (все, що вивезено = запасам), а обмеження 3.2 – нерівностями (все, що ввезено <= попиту), для випадку «сума потреб < суми запасів» – навпаки. Саме так побудована наша таблична модель

2) введення умовного (фіктивного) постачальника з «запасом», що дорівнює дефіциту (незадоволеному попиту), витрати на транспортування від якого до всіх споживачів нульові або фіктивного споживача з «попитом», що дорівнює залишку (невикористані запаси), з нульовими витратами на транспортування до якого від всіх постачальників, обидва обмеження – рівняння. Цей спосіб робить табличну модель універсальною із одночасним збільшенням розміру задачі на  $2(m + n)$  додаткових початкових значень та шуканих змінних.

Появі матричних задач транспортного типу передувала задача про план виробництва у матричній постановці, поставлена Л. В. Канторовичем, яка, фактично, визначила клас моделей лінійного програмування.

### Задача Канторовича про оптимальний план виробництва (у матричній постановці)



Однажды ко мне за консультацией пришли несколько инженеров из лаборатории Фанерного треста с довольно грамотно поставленной задачей. Обработка на лущильных станках<sup>21</sup> разного вида материалов давала различный выход продукции. В связи с этим выход продукции с данных станков зависел от такого, казалось бы, случайного факта, как вид сырья и тип лущильного станка. Как это обстоятельство рационально использовать?

В простейшем случае для одного-двух переменных такие задачи решаются просто - перебрать все возможные крайние точки и выбрать наилучшую. Но уже, скажем, в задаче Фанерного треста при пяти станках и восьми видах материала такой перебор потребовал бы решения примерно миллиарда<sup>22</sup> систем линейных уравнений, и было очевидно, что это нереальный

путь. Насколько мне помнится, в январе 1939 г. мной был создан метод разрешающих множителей... Созданный метод отличался объединением процессов решения прямой и двойственной задач, он был похож на алгоритм, разработанный много позднее Данцигом.

Л.В. Канторович. Мой путь в науке

Колишня, що тоді здавалася досить складною «задача Фантресту», відома тепер як «задача Канторовича» або «*a machine problem*» (Kantorovich, 1939 [4]) виявилася історичною, заснувавши своєю постановкою сучасну методологію математичної оптимізації, для якої було розроблено алгоритм її розв'язку й до якої зводиться багато практичних задач.

Це задача про оптимальний план виробництва (або про оптимальний розподіл обмежених ресурсів) на максимум ЦФ у матричній формі.

#### Постановка задачі

Комплект  $n$  операцій (робіт, завдань, продуктів, видів діяльності, *activity*) виконують, користуючись ресурсами  $m$  виконавців (верстатів, фахівців, організацій), задано: асортимент (структура комплексу, яких операцій й скільки у його складі) й технологічна матриця (продуктивність кожного виконавця щодо здійснення кожної операції) розміром  $m \times n$ . Треба визначити оптимальний план розподілу обмежених ресурсів виконавців (наприклад, машино-годин верстатів) по операціях у вигляді матриці розміром  $m \times n$ , щоб максимізувати вихід готової продукції. У «задачі Фантресту» виконавцями були лущильні верстати різного типу, а операціями – виготовлення шпону з різних видів деревини.

<sup>21</sup> з круглої деревини робить шпон, з якого виготовляють фанеру

<sup>22</sup> точніше 5,6 млрд., це число комбінацій з 40 чисел по 12, формула в Excel: =ЧИСЛКОМБ(40;12)

## Математична модель

### Позначення

$m$  – кількість (рядків)

$n$  – кількість операцій (стовпців)

$i$  – поточний номер виконавця,  $i = 1, \dots, m$

$j$  – поточний номер операції,  $j = 1, \dots, n$

$A = \{a_{ij}\}$  – задана технологічна матриця розміром  $m \times n$ , де  $a_{ij}$  – питома кількість  $j$ -их операцій, здійснених  $i$ -им виконавцем (питома продуктивність виконавців)

$k_j$  – задана кількість  $j$ -их операцій у складі комплекту

$r_i$  – заданий запас ресурсу  $i$ -го виконавця

$s_i$  – сума використаного ресурсу  $i$ -го виконавця:  $s_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}$

$X = \{x_{ij}\}$  – шукана матриця поопераційного розподілу ресурсів розміром  $m \times n$ , де  $x_{ij}$  – шукана кількість ресурсу  $i$ -го виконавця, направлено на здійснення  $j$ -ої операції

$z_{ij}$  – кількість здійснених  $i$ -им виконавцем  $j$ -их операцій

$z_j$  – загальна кількість здійснених  $j$ -их операцій:  $z_j = \sum_{i=1}^m z_{ij}$

$Z$  – загальна кількість здійснених операцій:  $Z = \sum_{j=1}^n z_j$  (ЦФ).

### Задача оптимізації

I. Знайти: матрицю  $X = \{x_{ij}\}$  розміром  $m \times n$ , щоб

II. ЦФ Загальний випуск :  $Z = \sum_{j=1}^n z_j \rightarrow \max$

III. за обмежень:

для виконавців:  $s_i \leq r_i$  (загальна завантаженість виконавця не перевищує запасу ресурсу)

для операцій:  $\frac{z_j}{k_j} = \frac{z_1}{k_1} \quad j = 2, \dots, n$  (комплектність)

та граничних умов: усі  $x_{ij} \geq 0$ .

### Задача 3.1. Класична задача Канторовича про верстати

#### Постановка задачі

Замовлення складається з двох однотипних металевих деталей (Д-1, Д-2), які виготовляють фрезеруванням. Ця робота може бути здійснена на різних верстатах: фрезерувальному, револьверному й автоматичному револьверному, дані про їх кількості й продуктивності наведені у таблиці:

Тип станка	Число станков	Максимальный выпуск <sup>1</sup> 1 станка в час	
		первая деталь	вторая деталь
Фрезерные станки	3	10	20
Револьверные станки	3	20	30
Автоматические револьверные станки	1	30	80
Type of Machine	Number of Machines	Maximum Output per Machine per Hour	
		First Part	Second Part
Milling Machines	3	10	20
Turret Lathes	3	20	30
Automatic Turret Lathes	1	30	80

Треба розподілити тривалість роботи кожного верстату так, щоб отримати максимальну кількість комплектів ( $k_1 = k_2 = 1$ ).

### Задача оптимізації

I. Знайти оптимальну виробничу програму: матрицю  $X = \{x_{ij}\}$  розміром  $3 \times 2$ , щоб

II. ЦФ Загальний випуск :  $Z = z_1 + z_2 \rightarrow \max$

III. за обмежень:

для виконавців:  $s_i \leq r_i$  (загальна завантаженість виконавця не перевищує запасу ресурсу)

для операцій:  $\frac{z_2}{k_2} = \frac{z_1}{k_1}$  (комплектність)

та граничних умов: усі  $x_{ij} \geq 0$ .

Варіанти:

1) Враховується лише 1-ше обмеження.

2) Враховуються обидва обмеження.

### Варіант 1

Результат

Задача Канторовича			АХ				
Розподіл машино-ресурсу			Д-1				
А	Д-1	Д-2	Ресурс	В-1	Д-1	Д-2	
В-1	10	20	3	В-1	0	60	
В-2	20	30	3	В-2	0	90	
В-3	30	80	1	В-3	0	80	
Комплектність	1	1		Разом	0	230	230
				Комплектність	0	230	ЦФ
Х	Д-1	Д-2	Використано	Норм. варт.	Д-1	Д-2	Т-ціна
В-1	0	3	3	В-1	-10	0	20
В-2	0	3	3	В-2	-10	0	30
В-3	0	1	1	В-3	-50	0	80

### Аналіз результату

Пряма задача

I. Зрозуміло, що усі машино-ресурси направлені на випуск «вигідної» 2-ої деталі, яких верстати спроможні виготовити більше, ніж 1-их.

II. Загальна кількість деталей 230 од.

III. Наявні ресурси повністю використані (обмеження - тотожності).

Умова комплектності не врахована<sup>23</sup>.

Двоїста задача

Двоїсті оцінки запасів ресурсів – тіньові ціни, це додатні числа, що вказують на збільшення ЦФ при збільшенні запасу на 1.

Двоїсті оцінки матриці продуктивності – нормовані вартості, вказують на зменшення ЦФ при вимушеному використанні «невигідного» ресурсного режиму. Наприклад, оцінка -50 для змінної  $x_{31}$  означає, що вимушене використання одиниці ресурсу В-3 для виготовлення «невигідної» 1-ої деталі приведе до зменшення значення ЦФ на 50 од. (деталей):

Х	Д-1	Д-2	АХ	Д-1	Д-2	
В-1	0	3	В-1	0	60	
В-2	0	3	В-2	0	90	
В-3	1	0	В-3	30	0	
			Разом	30	150	180
						ЦФ

Варіант 2 (врахування умови комплектності)

<sup>23</sup> за радянських часів існувала практика встановлення «трудоих рекордів», за якими штучно змінювалися норми оплати праці, у нашому прикладі: «рекордсмени» встановили новий рекорд – 230 деталей одного типу за зміну, «забувши» про вимогу комплектності (неодмінно заслуживши солідні нагороди), що тепер може стати нормою для усіх рядових верстатників

## Результат

Задача Канторовича			Розподіл машино-ресурсу				
			АХ	Д-1	Д-2		
А	Д-1	Д-2	Ресурс	В-1	В-2	В-3	
В-1	10	20	3	26,67	6,67		
В-2	20	30	3	60,00	0,00		
В-3	30	80	1	0,00	80,00		
Комплектність	1	1		86,67	86,67	173,33	
			Комплектність	86,67	86,67	ЦФ	
Х	Д-1	Д-2	Використано	Норм. варт.	Д-1	Д-2	Т-ціна
В-1	2,67	0,33	3	В-1	0	0	13,33
В-2	3,00	0	3	В-2	0	-6,7	26,67
В-3	0	1,00	1	В-3	-13,3	0	53,33

## Аналіз результату

### Пряма задача

- I. Ресурси розподілені на випуск обох деталей.
- II. Загальна кількість деталей 173,3 од.
- III. Наявні ресурси повністю використані (обмеження - тотожності).  
Умова комплектності врахована – кількість деталей однакова.

### Двоїста задача

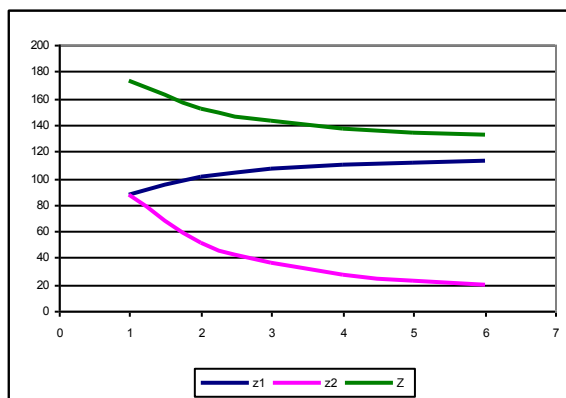
Двоїсті оцінки запасів ресурсів – *тіньові ціни* у вигляді додатніх чисел, що вказують на збільшення ЦФ при збільшенні запасу ресурсу на 1. Для нового обмеження (комплектності) тіньова ціна – від'ємне число (-0,33) вказує на негативний вплив збільшення коефіцієнта  $k_1$  на значення ЦФ.

Двоїсті оцінки матриці продуктивності – *нормовані вартості*, вказують на зменшення ЦФ при вимушеному використанні «невигідного» ресурсного режиму.

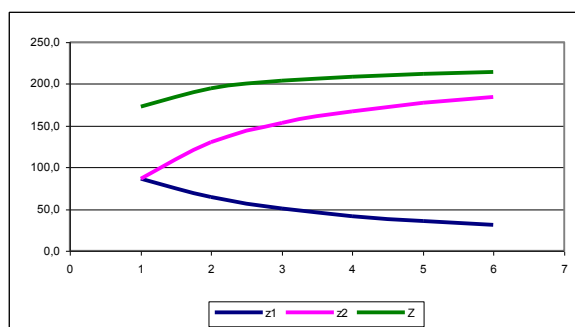
## Параметричний аналіз

Параметри – коефіцієнти  $k_1$  та  $k_2$  у складі умови комплектності,  $k_1 = 1, 2, \dots, 6$ .

$k_1$	$z_1$	$z_2$	$Z$
1	86,7	86,7	173,33
2	101,1	50,53	151,58
3	106,7	35,56	142,22
4	109,7	27,43	137,14
5	111,6	22,33	133,95
6	112,9	18,82	131,76



$k_2$	$z_1$	$z_2$	$Z$
1	86,7	86,7	173,3
2	65,0	130,0	195,0
3	51,1	153,3	204,4
4	41,8	167,3	209,1
5	35,4	176,9	212,3
6	30,7	184,0	214,7



**Висновок:** збільшення значення  $k_1$  у відношенні  $k_1: k_2$  приводить до зменшення ЦФ (знижена ефективність використання ресурсів), а збільшення  $k_2$  – до зростання ЦФ (підвищена ефективність використання ресурсів).



## Задача 3.2. Класична задача Фантресту

### Постановка задачі

Машино-ресурси наявних 8 верстатів використовують для випуску комплекту з 5 робіт за заданою матрицею продуктивності:  $m = 8$  верстатів,  $n = 5$  робіт, шукана матриця  $X$  має розмір  $8 \times 5$  із 40 елементів.

Л. В. Канторович знав, що у цій задачі серед 40 невідомих лише  $5 + 8 - 1 = 12$  елементів ненульові, інші 28 – нулі. Якщо розв'язувати цю задачу прямим перебором, щоб знайти кращу комбінацію 12 ненульових й 28 нульових значень, треба для кожної такої комбінації розв'язати відповідну систему рівнянь, кількість комбінацій й рівнянь обчислюється за формулою:  $C_{40}^{12} = \frac{40!}{12!28!} \approx 5,6 \cdot 10^9$ .

Треба визначити оптимальний план розподілу машино-годин верстатів по роботах, щоб максимізувати вихід готової продукції.

### Задача оптимізації

I. Знайти: матрицю  $X = \{x_{ij}\}$  розміром  $8 \times 5$ , щоб

II. ЦФ Загальний випуск :  $Z = \sum_{j=1}^5 z_j \rightarrow \max$

III. за обмежень:

для верстатів:  $s_i \leq r_i$  (загальна завантаженість виконавця не перевищує запасу ресурсу)

для робіт:  $\frac{z_j}{k_j} = \frac{z_1}{k_1} \quad j = 2, \dots, 5$  (комплектність)

та граничних умов: усі  $x_{ij} \geq 0$ .

### Результат

Задача Фантреста						
Продуктивність						
	Робота-1	Робота-2	Робота-3	Робота-4	Робота-5	Запас
В-1	3	6	9	1	4	10
В-2	3	2	3	6	2	5
В-3	2	5	4	6	0	8
В-4	7	2	2	1	6	5
В-5	2	3	0	3	2	4
В-6	2	2	3	6	9	4
В-7	0	5	4	6	3	6
В-8	6	7	2	2	4	3
Компл.	3	2	1	2	1	
План розподілу ресурсів						
	Робота-1	Робота-2	Робота-3	Робота-4	Робота-5	Використано
В-1	2,4	4,5	3,1	0	0	10
В-2	5	0	0	0	0	5
В-3	0	5,6	0	2,4	0	8
В-4	5	0	0	0	0	5
В-5	4	0	0	0	0	4
В-6	0	0	0	0,9	3,1	4
В-7	0	0	0	6	0	6
В-8	3	0	0	0	0	3

План виконання робіт						
	Робота-1	Робота-2	Робота-3	Робота-4	Робота-5	
В-1	7,18	27,92	27,93	0	0	
В-2	15	0	0	0	0	
В-3	0	27,94	0	14,47	0	
В-4	35	0	0	0	0	
В-5	8	0	0	0	0	
В-6	0	0	0	5,38	27,93	
В-7	0	0	0	36	0	
В-8	18,60	0	0	0	0	
Разом	83,78	55,86	27,93	55,86	27,93	251,35
Компл.	27,93	27,93	27,93	27,93	27,93	ЦФ
		27,9	27,9	27,9	27,9	
Нормовані вартості						
	Робота-1	Робота-2	Робота-3	Робота-4	Робота-5	Т-ціна
В-1	0,00	0,00	0,00	-4,35	-3,22	5,02
В-2	0,00	-3,40	-3,35	-0,97	-4,12	5,02
В-3	-0,70	0,00	-1,82	0,00	-3,96	4,05
В-4	0,00	-10,10	-10,60	-11,04	-8,93	11,72
В-5	0,00	-1,32	-3,24	-1,66	-2,45	3,35
В-6	-0,70	-2,43	-2,38	0,00	0,00	4,05
В-7	-3,72	0,00	-1,82	0,00	-2,70	4,05
В-8	0,00	-4,71	-9,26	-9,03	-8,58	10,38
Компл.	Т-ціна	0,38	0,442	0,65	0,55	

### Аналіз результату

#### Пряма задача

I. Знайдена матриця  $X$  – план розподілу запасів машино-ресурсів, за яким визначено об'єми робіт згідно заданого комплектування

II. Максимальний вихід готової продукції (ЦФ) = 251,35

III. Усі обмеження задоволено.

### Двоїста задача

Двоїсті оцінки матриці продуктивності – матриця нормованих вартостей, які вказують на зменшення ЦФ при вимушеному використанні «невигідного» ресурсного режиму.

Двоїсті оцінки запасів ресурсів – тіньові ціни, додатні числа, що вказують на збільшення ЦФ при збільшенні відповідного запасу на 1.

Для нового обмеження (комплектності) визначена тіньові ціна – додатні числа, що вказують на вплив збільшення коефіцієнта  $k_j, j = 2, \dots, 5$  на значення ЦФ.

### Модифікація моделі

Ситуація – треба вимушено змінити знайдені оптимальні значення матриці  $X$  (зменшити/збільшити певні її значення) й оцінити відповідні відхилення від оптимального плану.

#### Умова 1.

Прийнято рішення для роботи Р-1 використати повністю ресурс верстату В-1, уводимо обмеження:  $x_{11} = r_1$ , результат:

	План розподілу ресурсів					Використано
	Робота-1	Робота-2	Робота-3	Робота-4	Робота-5	
В-1	10,0	0	0	0	0	10
В-2	0	0	0	5,0	0	5
В-3	0	5,8	2,2	0	0	8
В-4	5,0	0	0	0	0	5
В-5	0	4,0	0	0	0	4
В-6	0	0	0	1,2	2,8	4
В-7	0	0	4,0	2,0	0	6
В-8	1,5	1,5	0	0	0	3
План виконання робіт						
	Робота-1	Робота-2	Робота-3	Робота-4	Робота-5	
В-1	30	0	0,00	0	0	
В-2	0	0	0	30,0	0	
В-3	0	29,02	8,8	0	0	
В-4	35	0	0	0	0	
В-5	0	10,0	0	0	0	
В-6	0	0	0	7,49	24,76	
В-7	0	0	16,0	12	0	
В-8	9,29	10,5	0	0	0	
Разом	74,29	49,53	24,76	49,53	24,76	222,87
Компл.	24,76	24,76	24,76	24,76	24,76	ЦФ
		24,8	24,8	24,8	24,8	

#### Умова 2.

Додатково, верстат В-4 не використовувати для виконання роботи Р-1, уводимо обмеження:  $x_{41} = 0$ , результат:

	План розподілу ресурсів					Використано
	Робота-1	Робота-2	Робота-3	Робота-4	Робота-5	
В-1	10,0	0	0	0	0	10
В-2	3	0	0	2,4	0	5
В-3	0	2,6	4,6	0,8	0	8
В-4	0	0	1,5	0	3,5	5
В-5	4,0	0	0	0	0	4
В-6	0	0	0	4,0	0	4
В-7	0	6,0	0	0	0	6
В-8	3,0	0	0	0	0	3

	План виконання робіт					
	Робота-1	Робота-2	Робота-3	Робота-4	Робота-5	
В-1	30,0	0	0	0	0	
В-2	7,9	0	0	14,2	0	
В-3	0	12,99	18,4	4,8	0	
В-4	0	0	3,1	0	21,5	
В-5	8,0	0	0	0	0	
В-6	0	0	0	24,0	0	
В-7	0	30,0	0	0	0	
В-8	18,6	0	0	0	0	
Разом	64,49	42,99	21,50	42,99	21,50	193,46
Компл.	21,50	21,50	21,50	21,50	21,50	ЦФ
		21,5	21,5	21,5	21,5	

### Умова 3.

Додатково, верстат В-3 вивести з експлуатації, вводимо обмеження:  $\sum_{j=1}^5 x_{3j} = 0$ , результат:

	План розподілу ресурсів					Використано
	Робота-1	Робота-2	Робота-3	Робота-4	Робота-5	
В-1	10,0	0	0	0	0	10
В-2	0,8	0	2,5	1,7	0	5
В-3	0	0	0	0	0	0
В-4	0	0	2,3	0	2,7	5
В-5	0	4,0	0	0	0	4
В-6	0	0	0	4,0	0	4
В-7	0	4,8	1,2	0	0	6
В-8	3,0	0	0	0	0	3

	План виконання робіт					
	Робота-1	Робота-2	Робота-3	Робота-4	Робота-5	
В-1	30,0	0	0	0	0	
В-2	2,4	0	7,6	10,0	0	
В-3	0	0	0	0	0	
В-4	0	0	4,5	0	17,0	
В-5	0	10,0	0	0	0	
В-6	0	0	0	24,0	0	
В-7	0	24,0	4,8	0	0	
В-8	18,6	0	0	0	0	
Разом	50,96	33,98	16,99	33,98	16,99	152,89
Компл.	16,99	16,99	16,99	16,99	16,99	ЦФ
		16,99	16,99	16,99	16,99	

### Табличний документ:

Задача Фантреста												
Продуктивність												
	Робота-1	Робота-2	Робота-3	Робота-4	Робота-5	Запас						
В-1	3	6	9	1	4	10						
В-2	3	2	3	6	2	5						
В-3	2	5	4	6	0	8						
В-4	7	2	2	1	6	5						
В-5	2	3	0	3	2	4						
В-6	2	2	3	6	9	4						
В-7	0	5	4	6	3	6						
В-8	6	7	2	2	4	3						
Компл.	3	2	1	2	1							
План розподілу ресурсів												
	Робота-1	Робота-2	Робота-3	Робота-4	Робота-5	Використано						
В-1	10,0	0	0	0	0	10						
В-2	0,8	0	2,5	1,7	0	5						
В-3	0	0	0	0	0	0						
В-4	0	0	2,3	0	2,7	5						
В-5	0	4,0	0	0	0	4						
В-6	0	0	0	4,0	0	4						
В-7	0	4,8	1,2	0	0	6						
В-8	3,0	0	0	0	0	3						
План виконання робіт												
	Робота-1	Робота-2	Робота-3	Робота-4	Робота-5							
В-1	30,0	0	0	0	0							
В-2	2,4	0	7,6	10,0	0							
В-3	0	0	0	0	0							
В-4	0	0	4,5	0	17,0							
В-5	0	10,0	0	0	0							
В-6	0	0	0	24,0	0							
В-7	0	24,0	4,8	0	0							
В-8	18,6	0	0	0	0							
Разом	50,96	33,98	16,99	33,98	16,99	152,89						
Компл.	16,99	16,99	16,99	16,99	16,99	ЦФ						
		16,99	16,99	16,99	16,99							

### Задача 3.3. Класична транспортна задача

#### Постановка задачі

$m$  постачальників мають пропозиції (запаси) певного **одного** ресурсу (матеріал, кошти, товар, послуга),  $n$  споживачів мають попит на нього. Виникає потреба задовольнити попит найкращим чином в залежності від вибраного критерію оптимізації. Для задач суто транспортного типу, де мова йде про перевезення вантажів від постачальників до споживачів, критерієм оптимізації найчастіше є мінімум загальних транспортних витрат (в ткм).

#### Типи транспортної задачі:

- **закрита** (збалансована), якщо сума пропозицій = сумі попиту
- **відкрита** (незбалансована), якщо:
  - сума пропозицій > суми попиту (є залишки запасів)
  - сума пропозицій < суми попиту (є незадоволений попит).

#### Математична модель

##### Позначення

$m$  – кількість постачальників

$n$  – кількість споживачів

$i$  – поточний номер постачальника

$j$  – поточний номер споживача

$z_i$  – запас (пропозиція)  $i$ -го постачальника

$p_j$  – попит  $j$ -го споживача

$c_{ij}$  – питомі витрати перевезень за  $(i, j)$ -им маршрутом

$x_{ij}$  – об'єм перевезень (потік) за  $(i, j)$ -им маршрутом

$V$  – загальні транспортні витрати (ЦФ).

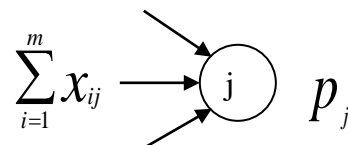
#### Задача оптимізації

I. Знайти матрицю транспортних потоків  $X = \{x_{ij}\}$ , де  $x_{ij}$  – величина потоку від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача,  $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ , щоб

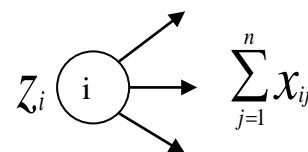
II. ЦФ Загальні витрати (ткм)  $V = CX = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$

III. за обмежень:

1) для споживачів:  $\sum_{i=1}^m x_{ij} = p_j$  (Ввезено = Попит, в т)



2) для постачальників:  $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq z_i$  (Вивезено  $\leq$  Запас, в т)



та граничних умов: усі  $x_{ij} \geq 0$ .

#### Приклад

5 постачальників мають запаси продукту, на який мають попит 7 споживачів, постачальники і споживачі визначені населеними пунктами регіону:

- постачальники: Брно, Братислава, Тернопіль, Мюнхен, Варшава
- споживачі: Магдебург, Краків, Будапешт, Київ, Вінниця, Софія, Генуя.

#### Задано:

- карта розміщення 5 постачальників (прямокутники) і 7 споживачів (овали)
- їх координати на карті:



Вузол	X	Y
Варшава	24	2
Тернопіль	33	12
Будапешт	21	20
Вінниця	38	14
Київ	42	9
Братислава	17	18
Мюнхен	7	18
Брно	16	14
Генова	3	31
Софія	29	37
Магдебург	7	3
Краків	22	10

за якими можна обчислити відстані (в умовних км) між усіма  $(i,j)$ -парами «постачальник-споживач» за формулою Піфагора:  $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$  :

	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генова
Брно	14,2	7,2	7,8	26,5	22,0	26,4	21,4
Братислава	18,0	9,4	4,5	26,6	21,4	22,5	19,1
Тернопіль	27,5	11,2	14,4	9,5	5,4	25,3	35,5
Мюнхен	15,0	17,0	14,1	36,1	31,3	29,1	13,6
Варшава	17,0	8,2	18,2	19,3	18,4	35,4	35,8

Таблиця початкових даних:

- назви та запаси постачальників
- назви та попит споживачів
- питомі витрати на доставку продукту у вигляді матриці відстаней (у км) розміром  $5 \times 7$ :

Відстані	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генова	Запас
Брно	14,2	7,2	7,8	26,5	22,0	26,4	21,4	234
Братислава	18,0	9,4	4,5	26,6	21,4	22,5	19,1	100
Тернопіль	27,5	11,2	14,4	9,5	5,4	25,3	35,5	68
Мюнхен	15,0	17,0	14,1	36,1	31,3	29,1	13,6	90
Варшава	17,0	8,2	18,2	19,3	18,4	35,4	35,8	200
Попит	155	56	97	115	36	78	125	

Аналіз: сума запасів дорівнює 692 т, сума попиту – 662 т, запаси перевищують попит, це відкрита задача (сума запасів > суми попиту), де є залишки (30 т) у певних постачальників.

Треба знайти такий оптимальний план розподілу запасів продукту (матрицю  $X$  розміром  $5 \times 7$ ), де кожен її елемент  $x_{ij}$  визначає величину потоку від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача, щоб загальні транспортні витрати (у т/км) для повного задоволення попиту були мінімальними.

В задачі використовується:

4 матриці:

- заданих питомих витрат (відстаней, км)

- шуканих потоків (т)
  - шуканих транспортних витрат (т/км)
  - шуканих нормованих вартостей двоїстої задачі (т/км),
- 5 векторів-стовпців:
- заданих пропозицій (запасів, т), це ПЧ обмеження 1
  - шуканого стовпця Вивезено, т), це ЛЧ обмеження 1
  - шуканого стовпця тіньових цін запасів двоїстої задачі (т/км)
  - шуканого стовпця допустимого збільшення пропозицій двоїстої задачі (т)
- та 3 вектори-рядки:
- заданого попиту (т), це ПЧ обмеження 2
  - шуканого рядка Ввезено (т), це ЛЧ обмеження 2
  - шуканого рядка тіньових цін попиту двоїстої задачі (т/км).

Це – класична транспортна задача (у прикладі – розміром  $5 \times 7$ ).

### **Наближений (субоптимальний) розв’язок задачі**

В “польових” умовах, коли під рукою немає комп’ютера з програмою-оптимізатором, транспортну задачу невеликого розміру можна розв’язати евристичним методом, наближено і вручну, отримавши близький до оптимального (субоптимальний) розв’язок. Покажемо, як знайти вручну субоптимальний план, щоб потім його порівняти з оптимальним.

Евристичні методи:

- 1) «північно-західного кута» (ПЗК, верхнього лівого), дуже простий і неточний. Ідея: починаючи з верхньої лівої клітинки таблиці, максимально завантажують її відповідно до попиту й наявного запасу, далі викресленням змінюють запаси/потреби, зайві клітинки заповнюють нулями й йдуть далі до найближчої ПЗК. Матриця витрат в розрахунках не використовується, звідси й невисока точність;
- 2) «мінімального елемента», дещо складніший, але дає результат ближчий до оптимуму, бо використовується матриця витрат.

Згадаймо, у матриці розміром  $m \times n$  буде  $m + n - 1$  ненульових елементів, інші – нулі, у прикладі таких буде  $5 + 7 - 1 = 11$  значень.

Використовуються матриці однакового розміру: задана (питомі витрати, запас, попит) й розрахункові (по кроках).

Покажемо їх дію для наведеного прикладу.

### **Задача 3.4. Метод “північно-західного кута”**

Реалізація:

<b>Крок 1</b>	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155							234	79			
Братислава	0							100				
Тернопіль	0							68				
Мюнхен	0							90				
Варшава	0							200				
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0											
<b>Крок 2</b>	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56						234	79	23		
Братислава	0	0						100				
Тернопіль	0	0						68				
Мюнхен	0	0						90				
Варшава	0	0						200				
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0										
<b>Крок 3</b>	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56	23					234	79	23	0	
Братислава	0	0						100				
Тернопіль	0	0						68				
Мюнхен	0	0						90				
Варшава	0	0						200				
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	74									
<b>Крок 4</b>	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56	23					234	79	23	0	
Братислава	0	0	74					100	26			
Тернопіль	0	0	0					68				
Мюнхен	0	0	0					90				
Варшава	0	0	0					200				
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	74									
			0									

<b>Крок 5</b>	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56	23					234	79	23	0	
Братислава	0	0	74	26				100	26	0		
Тернопіль	0	0	0					68				
Мюнхен	0	0	0					90				
Варшава	0	0	0					200				
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	74	89								
			0									
<b>Крок 6</b>	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56	23					234	79	23	0	
Братислава	0	0	74	26				100	26	0		
Тернопіль	0	0	0	68				68	0			
Мюнхен	0	0	0					90				
Варшава	0	0	0					200				
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	74	89								
			0	21								
<b>Крок 7</b>	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56	23					234	79	23	0	
Братислава	0	0	74	26				100	26	0		
Тернопіль	0	0	0	68				68	0			
Мюнхен	0	0	0	21				90	69			
Варшава	0	0	0					200				
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	74	89								
			0	21								
				0								
<b>Крок 8</b>	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56	23					234	79	23	0	
Братислава	0	0	74	26				100	26	0		
Тернопіль	0	0	0	68				68	0			
Мюнхен	0	0	0	21	36			90	69	33		
Варшава	0	0	0					200				
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	74	89	0							
			0	21								
				0								



Крок 9	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56	23					234	79	23	0	
Братислава	0	0	74	26				100	26	0		
Тернопіль	0	0	0	68				68	0			
Мюнхен	0	0	0	21	36	33		90	69	33	0	
Варшава	0	0	0					200				
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	74	89	0	45						
			0	21								
				0								
Крок 10	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56	23					234	79	23	0	
Братислава	0	0	74	26				100	26	0		
Тернопіль	0	0	0	68				68	0			
Мюнхен	0	0	0	21	36	33		90	69	33	0	
Варшава	0	0	0			45		200	155			
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	74	89	0	45						
			0	21		0						
				0								
Крок 11	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56	23					234	79	23	0	
Братислава	0	0	74	26				100	26	0		
Тернопіль	0	0	0	68				68	0			
Мюнхен	0	0	0	21	36	33		90	69	33	0	
Варшава	0	0	0			45	125	200	155	30		
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	74	89	0	45	0					
			0	21		0						
				0								
Витрати	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя					
Брно	2201,0	403,2	179,4	0,0	0,0	0,0	0,0					
Братислава	0,0	0,0	333,0	691,6	0,0	0,0	0,0					
Тернопіль	0,0	0,0	0,0	646,0	0,0	0,0	0,0					
Мюнхен	0,0	0,0	0,0	758,1	1126,8	960,3	0,0					
Варшава	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1593,0	4475,0	13367,4				
								144,4%				

Результат відносно оптимального плану 144,4%.

### Задача 3.5. Метод «мінімального елемента»

Правило В матриці витрат послідовно знаходять найдешевшу клітинку, вибирають менше з двох чисел (пропозиція/попит), вписують його у клітинку й змінюють дані по відповідних стовпцях/рядках.

Реалізація:

Крок 1	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас		
Брно								234		
Братислава			97					100	3	
Тернопіль								68		
Мюнхен								90		
Варшава								200		
Попит	155	56	97	115	36	78	125			
			0	115						
Крок 2	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас		
Брно								234		
Братислава			97					100	3	
Тернопіль					36			68	32	
Мюнхен								90		
Варшава								200		
Попит	155	56	97	115	36	78	125			
			0		0					
Крок 3	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас		
Брно		56						234	178	
Братислава			97					100	3	
Тернопіль					36			68	32	
Мюнхен								90		
Варшава								200		
Попит	155	56	97	115	36	78	125			
		0	0		0					
Крок 4	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас		
Брно		56						234	178	
Братислава			97					100	3	
Тернопіль				32	36			68	32	0
Мюнхен								90		
Варшава								200		
Попит	155	56	97	115	36	78	125			
		0	0	83	0					
Крок 5	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас		
Брно		56						234	178	
Братислава			97					100	3	
Тернопіль				32	36			68	32	0
Мюнхен							90	90	0	
Варшава								200		
Попит	155	56	97	115	36	78	125			
		0	0	83	0		35			

<b>Крок 6</b>	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56						234	178	23		
Братислава			97					100	3			
Тернопіль				32	36			68	32	0		
Мюнхен							90	90	0			
Варшава								200				
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	0	83	0		35					
<b>Крок 7</b>	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56						234	178	23		
Братислава			97				3	100	3	0		
Тернопіль				32	36			68	32	0		
Мюнхен							90	90	0			
Варшава								200				
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	0	83	0		35					
							32					
<b>Крок 8</b>	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56						234	178	23		
Братислава			97				3	100	3	0		
Тернопіль				32	36			68	32	0		
Мюнхен							90	90	0			
Варшава				83				200	117			
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	0	83	0		35					
				0								
<b>Крок 9</b>	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56					23	234	178	23	0	
Братислава			97				3	100	3	0		
Тернопіль				32	36			68	32	0		
Мюнхен							90	90	0			
Варшава				83				200	117			
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	0	83	0		35					
				0			9					
<b>Крок 10</b>	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56				78	23	234	178	23	0	
Братислава			97				3	100	0			
Тернопіль				32	36			68	0			
Мюнхен							90	90	0			
Варшава				83				200	117	117		
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	0	83	0	0	35					
				0			9					

Крок 11	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас				
Брно	155	56				78	23	234	178	0	0	
Братислава			97				3	100	0			
Тернопіль				32	36			68	0			
Мюнхен							90	90	0			
Варшава				83			9	200	117	117	30	
Попит	155	56	97	115	36	78	125					
	0	0	0	83	0	0	35					
				0			9					
	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя					
Брно	2201,0	403,2	0,0	0,0	0,0	2059,2	492,2					
Братислава	0,0	0,0	436,5	0,0	0,0	0,0	57,3					
Тернопіль	0,0	0,0	0,0	304,0	194,4	0,0	0,0	ЦФ				
Мюнхен	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1224,0	9295,9				
Варшава	0,0	0,0	0,0	1601,9	0,0	0,0	322,2	100,4%				

з досить близьким до оптимуму значенням ЦФ, відхилення від знайденого нижче оптимального плану 0,4%, що пояснюється малим розміром задачі.

Ясно, що евристичні методи «разові» – вимагають повторити усі дії, щоб оновити результати при зміні початкових даних, не підтримують введення необхідних додаткових обмежень.

### Задача 3.6. Симплекс-метод

#### Порядок роботи

- увести початкові дані: постачальників та їх запаси, споживачів та їх попит, матрицю питомих витрат (**Відстані**), таблиця № 1
- скопіювати таблицю початкових даних і вставити в табличний документ 3 копії як шаблон
- у Таблиці № 2 (**План**) назву стовпця Запас замінити на Вивезено, його елементи – суми елементів матриці шуканих потоків  $X$  по рядках; назву рядка Попит замінити на Ввезено, його елементи – суми елементів матриці  $X$  по стовпцях
- таблиця № 3 (**Витрати**) – добуток множення таблиці №1 на таблицю № 2, її елементи – витрати (т/км) кожною ділянкою (клітинкою)
- в окремі клітинці знайти суму елементів матриці № 3, це – шукане значення загальних транспортних витрат (ЦФ), що мінімізується
- викликати програму *Поиск решения*, заповнити поля її вікна, кнопкою *Параметры* встановити режими математичної моделі – лінійності та невід’ємності невідомих, отримати розв’язок прямої та двоїстої задач
- Таблиця № 4 містить результати двоїстої задачі
- знайдені потоки показати на карті.

Результат:

J26	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Транспортна задача																		
2	Видстані	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас										
3	Брно	14,2	7,2	7,8	26,5	22,0	26,4	21,4	234										
4	Братислава	18,0	9,4	4,5	26,6	21,4	22,5	19,1	100										
5	Тернопіль	27,5	11,2	14,4	9,5	5,4	25,3	35,5	68										
6	Мюнхен	15,0	17,0	14,1	36,1	31,3	29,1	13,6	90										
7	Варшава	17,0	8,2	18,2	19,3	18,4	35,4	35,8	200										
8																			
9	Попит	155	56	97	115	36	78	125											
10																			
11	План	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Вивезено										
12	Брно	124	0	75	0	0	0	0	35										
13	Братислава	0	0	22	0	0	78	0	100										
14	Тернопіль	0	0	0	32	36	0	0	68										
15	Мюнхен	0	0	0	0	0	0	90	90										
16	Варшава	31	56	0	83	0	0	0	170										
17																			
18	Ввезено	155	56	97	115	36	78	125											
19																			
20	Витрати	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя											
21	Брно	1760,8	0,0	585,0	0,0	0,0	0,0	749,0											
22	Братислава	0,0	0,0	99,0	0,0	0,0	1755,0	0,0											
23	Тернопіль	0,0	0,0	0,0	304,0	194,4	0,0	0,0											
24	Мюнхен	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1224,0											
25	Варшава	527,0	459,2	0,0	1601,9	0,0	0,0	0,0											
26									ЦФ	9259,3									
27	Двоїста задача																		
28	Н-варт.	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Т-ціна	Доп. зб.									
29	Брно	0,0	1,8	0,0	10,0	9,6	0,6	0,0	-2,8	31									
30	Братислава	7,1	7,3	0,0	13,4	12,3	0,0	1,0	-6,1	31									
31	Тернопіль	20,3	12,8	13,6	0,0	0,0	6,5	21,1	-9,8	83									
32	Мюнхен	8,6	19,4	14,1	27,4	26,7	11,1	0,0	-10,6	31									
33	Варшава	0,0	0,0	7,6	0,0	3,2	6,8	11,6	0	1E+30									
34																			
35	Т-ціна	17,0	8,2	10,6	19,3	15,2	28,6	24,2											
36																			

## Аналіз результату

### Пряма задача

I. Знайдено оптимальний план перевезень:

План	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя
Брно	124	0	75	0	0	0	35
Братислава	0	0	22	0	0	78	0
Тернопіль	0	0	0	32	36	0	0
Мюнхен	0	0	0	0	0	0	90
Варшава	31	56	0	83	0	0	0

II. розподіл витрат:

Витрати	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя
Брно	1760,8	0,0	585,0	0,0	0,0	0,0	749,0
Братислава	0,0	0,0	99,0	0,0	0,0	1755,0	0,0
Тернопіль	0,0	0,0	0,0	304,0	194,4	0,0	0,0
Мюнхен	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1224,0
Варшава	527,0	459,2	0,0	1601,9	0,0	0,0	0,0

ЦФ  
9259,3

загальні транспортні витрати (т/км) склали величину

	Вивезено	Запас
Брно	234	= 234
Братислава	100	= 100
Тернопіль	68	= 68
Мюнхен	90	= 90
Варшава	170	< 200

Попит	155	56	97	115	36	78	125
Ввезено	=	=	=	=	=	=	=

III. за обмежень:

### Двоїста задача

Н-варт.	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Т-ціна	Доп. зб.
Брно	0,0	1,8	0,0	10,0	9,6	0,6	0,0	-2,8	31
Братислава	7,1	7,3	0,0	13,4	12,3	0,0	1,0	-6,1	31
Тернопіль	20,3	12,8	13,6	0,0	0,0	6,5	21,1	-9,8	83
Мюнхен	8,6	19,4	14,1	27,4	26,7	11,1	0,0	-10,6	31
Варшава	0,0	0,0	7,6	0,0	3,2	6,8	11,6	0	1E+30
Т-ціна	17,0	8,2	10,6	19,3	15,2	28,6	24,2		

де:

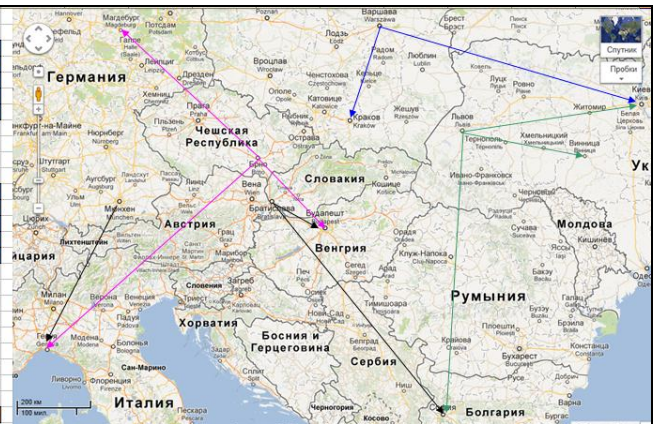
- *нормовані вартості* (додатні числа) оцінюють питомі витрати (відстані) й вказують на збільшення значення ЦФ при вимушеному перевезенні одиниці вантажу «невигідною» (нульовою) ділянкою. Наприклад, перевезення одиниці вантажу з Тернополя до Магдебурга приведе до зростання загальних витрат на 23,3 т/км
- *тіньові ціни для запасів* (від'ємні числа) вказують на зменшення значення ЦФ при збільшенні запасу на 1
- *допустиме збільшення запасу* – верхня границя величини збільшення на поточному кроці
- *тіньові ціни для попиту* (додатні числа) вказують на збільшення значення ЦФ при збільшенні попиту на 1.

## Модифікація моделі

### Умова 1.

Споживач у Магдебурзі бажає отримати все замовлення з Брно, обмеження:  $x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{51} = 0$ , результат:

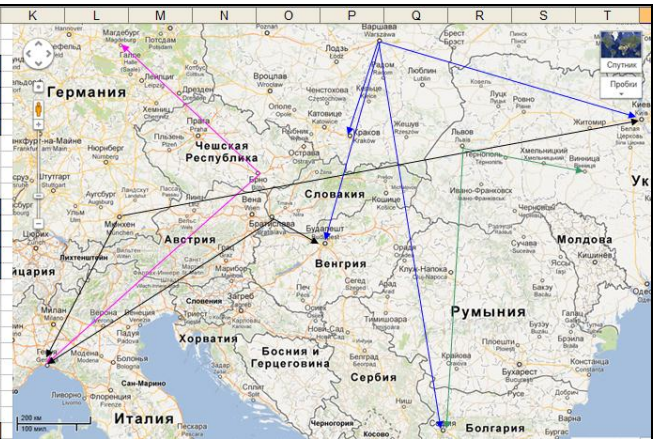
1 Транспортувальна задача									Запас
2 Відстані	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	234	
3 Брно	14,2	7,2	7,8	26,5	22,0	26,4	21,4	100	
4 Братислава	18,0	9,4	4,5	26,6	21,4	22,5	19,1	68	
5 Тернопіль	27,5	11,2	14,4	9,5	5,4	25,3	35,5	90	
6 Мюнхен	15,0	17,0	14,1	36,1	31,3	29,1	13,6	200	
7 Варшава	17,0	8,2	18,2	19,3	18,4	35,4	35,8		
8									
9 Попит	155	56	97	115	36	78	125		
10									
11 План	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Вивезено	
12 Брно	155	0	44	0	0	0	35	234	
13 Братислава	0	0	53	0	0	0	47	100	
14 Тернопіль	0	0	0	1	36	31	0	68	
15 Мюнхен	0	0	0	0	0	0	90	90	
16 Варшава	0	56	0	114	0	0	0	170	
17									
18 Ввезено	155	56	97	115	36	78	125		
19									
20 Витрати	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	ЦФ	
21 Брно	2201,0	0,0	343,2	0,0	0,0	0,0	749,0	9460,8	
22 Братислава	0,0	0,0	238,5	0,0	0,0	1057,5	0,0		
23 Тернопіль	0,0	0,0	0,0	9,5	194,4	784,3	0,0		
24 Мюнхен	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1224,0		
25 Варшава	0,0	459,2	0,0	2200,2	0,0	0,0	0,0		
26									



### Умова 2.

Споживач у Києві відмовляється від  $x_{34} = 1$  з Тернополя й хоче отримати з Мюнхена 50 т, обмеження:  $x_{34} = 0$  та  $x_{44} = 50$ , результат:

1 Транспортувальна задача									Запас
2 Відстані	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	234	
3 Брно	14,2	7,2	7,8	26,5	22,0	26,4	21,4	100	
4 Братислава	18,0	9,4	4,5	26,6	21,4	22,5	19,1	68	
5 Тернопіль	27,5	11,2	14,4	9,5	5,4	25,3	35,5	90	
6 Мюнхен	15,0	17,0	14,1	36,1	31,3	29,1	13,6	200	
7 Варшава	17,0	8,2	18,2	19,3	18,4	35,4	35,8		
8									
9 Попит	155	56	97	115	36	78	125		
10									
11 План	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Вивезено	
12 Брно	155	0	0	0	0	0	79	234	
13 Братислава	0	0	94	0	0	0	6	100	
14 Тернопіль	0	0	0	0	36	32	0	68	
15 Мюнхен	0	0	0	50	0	0	40	90	
16 Варшава	0	56	3	65	0	46	0	170	
17									
18 Ввезено	155	56	97	115	36	78	125		
19									
20 Витрати	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	ЦФ	
21 Брно	2201,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1690,6	11178,9	
22 Братислава	0,0	0,0	423,0	0,0	0,0	0,0	114,6		
23 Тернопіль	0,0	0,0	0,0	0,0	194,4	809,6	0,0		
24 Мюнхен	0,0	0,0	0,0	1805,0	0,0	0,0	544,0		
25 Варшава	0,0	459,2	54,6	1254,5	0,0	1628,4	0,0		
26									



### Умова 3.

Умови 1 та 2 знято, вирішено, що максимальний вантаж не більше 80 т, обмеження: усі  $x_{ij} \leq 80$ , результат:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Транспортна задача																			
2	Відстані	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас											
3	Брно	14,2	7,2	7,8	26,5	22,0	26,4	21,4	234											
4	Братислава	18,0	9,4	4,5	26,6	21,4	22,5	19,1	100											
5	Тернопіль	27,5	11,2	14,4	9,5	5,4	25,3	35,5	68											
6	Мюнхен	15,0	17,0	14,1	36,1	31,3	29,1	13,6	90											
7	Варшава	17,0	8,2	18,2	19,3	18,4	35,4	35,8	200											
8																				
9	Попит	155	56	97	115	36	78	125												
10																				
11	План	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Вивезено											
12	Брно	80	34	75	0	0	0	45	234											
13	Братислава	0	0	22	0	0	78	0	100											
14	Тернопіль	0	0	0	35	33	0	0	68											
15	Мюнхен	10	0	0	0	0	0	80	90											
16	Варшава	65	22	0	80	3	0	0	170											
17																				
18	Ввезено	155	56	97	115	36	78	125												
19																				
20	Витрати	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя												
21	Брно	1136,0	244,8	583,0	0,0	0,0	0,0	963,0												
22	Братислава	0,0	0,0	99,0	0,0	0,0	1753,0	0,0												
23	Тернопіль	0,0	0,0	0,0	332,5	178,2	0,0	0,0												
24	Мюнхен	150,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1088,0												
25	Варшава	1105,0	180,4	0,0	1544,0	55,2	0,0	0,0												
26									ЦФ 9416,1											

#### Умова 4.

Повернімося до першого плану (ЦФ = 9259,3 т/км), користуючись кращими тінтовими цінами запасів, треба визначити 5 кроків-дій на шляху до зниження загальних транспортних витрат. Для цього треба побудувати 5 звітів з чутливості, покроково збільшувати запаси відповідних постачальників й отримувати нові плани перевезень.

Кроки:

Постачальник	Т-ціна	Доп. збільшення	Нове значення запасу	Нове значення ЦФ
Мюнхен	-10,6	+31	121	8930,7
Тернопіль	-9,8	+83	152	8117,3
Мюнхен	-8,8	+4	125	8082,1
Братислава	-4,3	+52	152	7858,5
Братислава	-3,3	+22	175	7782,6

#### Кінцевий результат:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Транспортна задача																			
2	Відстані	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Запас											
3	Брно	14,2	7,2	7,8	26,5	22,0	26,4	21,4	234											
4	Братислава	18,0	9,4	4,5	26,6	21,4	22,5	19,1	175											
5	Тернопіль	27,5	11,2	14,4	9,5	5,4	25,3	35,5	152											
6	Мюнхен	15,0	17,0	14,1	36,1	31,3	29,1	13,6	125											
7	Варшава	17,0	8,2	18,2	19,3	18,4	35,4	35,8	200											
8																				
9	Попит	155	56	97	115	36	78	125												
10																				
11	План	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя	Вивезено											
12	Брно	155	56	0	0	0	0	0	211											
13	Братислава	0	0	97	0	0	78	0	175											
14	Тернопіль	0	0	0	115	36	0	0	151											
15	Мюнхен	0	0	0	0	0	0	125	125											
16	Варшава	0	0	0	0	0	0	0	0											
17																				
18	Ввезено	155	56	97	115	36	78	125												
19																				
20	Витрати	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя												
21	Брно	2201,0	403,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0											
22	Братислава	0,0	0,0	436,5	0,0	0,0	1753,0	0,0	0,0											
23	Тернопіль	0,0	0,0	0,0	1092,5	194,4	0,0	0,0	0,0											
24	Мюнхен	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1700,0	0,0											
25	Варшава	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0											
26									ЦФ 7782,6											

#### Аналіз результату:

- з кожним кроком «цінність» дефіцитних постачальників зменшується аж до 0, коли усі постачальники мають залишки запасів
- кількість маршрутів (зайнятих клітинок) зменшилась<sup>24</sup>: Варшава вибула з числа постачальників; кожен споживач має одного постачальника; постачальники Брно й Тернопіль мають двох, усі інші – одного споживача
- вибіркове збільшення запасів на 192 т привело до зменшення загальних витрат на 1476,7 т/км

<sup>24</sup> транспортна задача розміром 5×7 має 11 ненульових значень, у знайденій останній таблиці видно 7 таких чисел, бо інші 4 числа з-за оновлених початкових значень представлені надзвичайно малими числами – «машинними нулями», що визначені точною обчислень (до 15 знаків після коми). Наприклад, перевезення за маршрутом Брно-Генуя, показане як нуль, реально дорівнює числу 2,2Е-11

о оскільки усі постачальники мають залишки запасів й, відповідно, нульові тіньові ціни запасів, цим способом загальні витрати вже не зменшити, це можна зробити лише за рахунок зменшення попиту споживачів чи питомих витрат (пошуку коротших шляхів між містами).

### **Задача 3.7. Про оптимальне прикріплення (транспортна задача на максимум)**

Модель транспортної задачі на максимум застосовується у бізнес-практиці власників певних ресурсів (земельних ділянок, транспортних засобів, комунікаційних мереж, складських чи будь-яких інших приміщень тощо), бо ці ресурси є основою їх бізнесу. Замовникам власник надає в оренду власні ресурси чи послуги таким чином, щоб максимізувати прибуток від їх використання, для цього у відповідній технологічній матриці кожен її елемент визначає питомий прибуток при відповідному прикріпленні. Модель може бути використана для задачі оптимального розміщення, наприклад, в агробізнесі – це визначення земельних ділянок під посіви певних культур. У практичному плані моделі цього типу стосуються різноманітних задач оптимального прикріплення постачальників за споживачами чи навпаки, за яким досягається максимальний ефект від використання комунікаційних ресурсів.

На відміну від класичної транспортної задачі, де ЦФ є сумою витрат за кожним маршрутом, в цій задачі ефективність розподілу, а саме, прибуток власника мережі, визначається алгебраїчною сумою втрат (з мінусом) і доходу (з плюсом), яку треба максимізувати. Втрачають постачальники з-за дефіциту власних запасів (вартісна оцінка їх запасів отримується з мінусом), а дохід дають споживачі (вартісна оцінка їх потреб – з плюсом).

Отже, власнику треба визначити, за якою ціною купувати пропозиції постачальників (аби зменшити втрати) і продавати послуги споживачам (аби збільшити дохід), щоб мати максимальний прибуток.

Це – транспортна модель на **максимум** ЦФ, її результат – вартісні оцінки запасів постачальників і потреб споживачів.

З точки зору теорії двоїстості, це – двоїста задача до класичної транспортної задачі. Але вона може ставитися як основна (пряма), тоді двоїсті оцінки будуть відповідати результатам класичної транспортної задачі (на мінімум). Це – дві спряжені задачі і нема потреби одночасно формувати дві моделі, цілком достатньо визначити одну з них. Покажемо, як формується модель транспортної задачі (на максимум), коли вона є основною (прямою). Скористаємось нею для розв'язання задачі оптимального прикріплення виробників (постачальників) до ринків збуту їх продукції (споживачів).

#### Постановка транспортної задачі (на максимум)

Три територіальні філії підприємства (виступають як постачальники) мають на меті розподілити власну продукцію на 5 ринків збуту (споживачі) таким чином, щоб загальний прибуток цього підприємства був максимальним. Для цього необхідно отримати вартісні оцінки потенціалу постачальників (їх запасів) та споживачів (їх попиту). Саме ці оцінки дозволять визначити загальний прибуток від реалізації запропонованої продукції.

Задано: матриця питомих прибутків від розподілу між кожною парою «постачальник→споживач», запаси постачальників і попит споживачів.

Ще раз зауважимо: загальний прибуток – це алгебраїчна сума втрат постачальників (мінуси) і доходу від споживачів (плюси).

Мінуси – це вартісні оцінки постачальників, що визначаються від'ємними числами чи нулем, від'ємна «цінність» певного виробника, з позицій економіки, означає, що розподіл його «невигідної» продукції (з корпоративної точки зору) знижує загальний прибуток. Причиною може бути невеликий запас продукції і високі витрати на її доставку; то ж, чим вища ця оцінка (за модулем), тим гірше. Відповідно, для таких постачальників треба



приймати рішення, направлені на зменшення його участі у процесі розподілу (щоб зменшити загальні втрати). Нульова оцінка постачальника – позитивний факт того, що розподіл його продукції забезпечується без втрат у загальній сумі прибутку.

Плюси – це вартісні оцінки попиту споживачів, що визначаються позитивними числами, які вказують прямо на їх безпосередню «цінність», бо збільшують загальний прибуток.

З позицій економіки – це оцінка привабливості споживача, його віддачі, «вигідності» щодо загального прибутку – чим вища ця оцінка, тим відповідний споживач кращий, прикріплення вдале, відповідно, треба приймати рішення, направлені на збільшення саме його попиту шляхом певного стимулювання (це – сфера маркетингу).

Для підприємства ці вартісні оцінки – об’єктивний і потужний інструмент для вибору раціональної політики розподілу продукції і ресурсів та впливу на розвиток сфери споживання, який з успіхом використовується в маркетингу.

Початкові дані:

Транспортна задача (шах)						
Мета: оптимальне прикріплення виробників за ринками збуту						
Початкові дані						
	Ринок 1	Ринок 2	Ринок 3	Ринок 4	Ринок 5	Запас
Виробник 1	3	4	8	5	2	500,0
Виробник 2	4	1	5	6	4	100,0
Виробник 3	8	8	9	4	5	50,5
Попит	40	20	100	75	60	

де:

- матриця питомих прибутків (діапазон B5:Z7)
- вектор-стовпець запасів (виробничих можливостей), діапазон G5:G7
- вектор-рядок попиту (діапазон B8:Z8).

На основі початкових даних економічної задачі формуємо математичну модель прямої і двоїстої до неї задачі оптимального прикріплення як задачі оптимізації.

## Математична модель

Позначення:

$m$  – кількість виробників ( $m = 3$ )

$n$  – кількість ринків ( $n = 5$ )

$i$  – поточний номер виробника ( $i = 1, 2, 3$ )

$j$  – поточний номер ринку ( $j = 1, \dots, 5$ )

$V$  – задана матриця питомих прибутків  $V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & v_{25} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & v_{35} \end{pmatrix}$

де: елемент матриці  $v_{ij}$  – питомий прибуток від розподілу продукції  $i$ -го виробника на  $j$ -ий ринок,

$Z(m)$  – заданий вектор-стовпець запасів виробників

$P(n)$  – заданий вектор-рядок попиту ринків

$OZ(m)$  – шуканий вектор-стовпець оцінок запасів виробників

$OP(n)$  – шуканий вектор-рядок оцінок попиту ринків

$ZP$  – загальний прибуток (ЦФ).

$Z*OZ = (z_1*oz_1 + z_2*oz_2 + z_3*oz_3)$

$P*OP = (p_1*op_1 + p_2*op_2 + p_3*op_3 + p_4*op_4 + p_5*op_5)$

Співвідношення між прямою та двоїстою транспортними задачами

Транспортна задача (на мінімум)

Задача прикріплення (на максимум)

**Пряма**

**Двоїста**

15 невідомих: матриця  $X(15)$

15 обмежень типу  $oz_i + op_j \leq v_{ij}$

8 обмежень (запаси, потреби)

8 невідомих: вектори  $OZ(3)$  та  $OP(5)$

Всі невідомі  $x_{ij} \geq 0$

Невідомі  $oz_i \leq 0, op_j \geq 0$

ЦФ  $\rightarrow$  (мінімум)

ЦФ  $\rightarrow$  (максимум)

**Задач оптимального прикріплення**

I. Знайти два вектори: оцінки запасів  $OZ(3)$  і оцінки попиту  $OP(5)$ , такі, щоб

II. ЦФ  $ZP = Z*OZ + P*OP \rightarrow \max$

III. за обмежень:  $oz_i + op_j \leq v_{ij}$ , для  $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5$ ,

де  $oz_i + op_j$  – сума оптимальних цін (нова ціна),  $v_i$  – задана ціна (питомий прибуток), тобто, нова ціна  $\leq$  ціна

та граничних умов: усі  $op_j \geq 0$  (доход, з плюсом),  $oz_i \leq 0$  (втрати, з мінусом).

**Таблична модель**

Таблична модель крім початкових даних, містить обчислювальну таблицю у складі:

- матриці лівих частин обмежень (розміром  $3 \times 5$ , діапазон B11:F13)
- стовпця шуканих величин оцінок запасу ( $OZ$ ), діапазон (G11:G13)
- рядка шуканих величин оцінок попиту ( $OP$ ), діапазон (B14:Z14)
- стовпця “Втрати” (H11:H13), з формулами:  $z*oz$ , внизу (H14) – їх сума
- рядка “Доход” (B15:Z15), з формулами:  $p*op$ , справа (G15) – їх сума
- двох клітинок: одна з назвою ЦФ (H15), інша – з формулою ЦФ (G14):

Транспортна задача (max)							
Мета: оптимальне прикріплення виробників за ринками збуту							
Початкові дані							
	Ринок 1	Ринок 2	Ринок 3	Ринок 4	Ринок 5	Запас	
Виробник 1	3	4	8	5	2	500,0	
Виробник 2	4	1	5	6	4	100,0	
Виробник 3	8	8	9	4	5	50,5	
Попит	40	20	100	75	60		
	Ринок 1	Ринок 2	Ринок 3	Ринок 4	Ринок 5	Оц-запасу	Втрати
Виробник 1	0	0	0	0	0		0
Виробник 2	0	0	0	0	0		0
Виробник 3	0	0	0	0	0		0
Оц-попиту						0	0
Доход	0	0	0	0	0	0	ЦФ

Для зручності присвоюємо діапазнам даних імена згідно економічної задачі.

Тепер таблична модель пошуку оптимального прикріплення у вікні програми *Поиск решения* має досить зрозумілий для економіста вигляд:

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку:

Равной:  максимальному значению  значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

## Результат

Пряма задача:

Транспортна задача (max)							
Мета: оптимальне прикріплення виробників за ринками збуту							
Початкові дані							
	Ринок 1	Ринок 2	Ринок 3	Ринок 4	Ринок 5	Запас	
Виробник 1	3	4	8	5	2	500,0	
Виробник 2	4	1	5	6	4	100,0	
Виробник 3	8	8	9	4	5	50,5	
Попит	40	20	100	75	60		
	Ринок 1	Ринок 2	Ринок 3	Ринок 4	Ринок 5	Оц-запасу	Втрати
Виробник 1	3	4	8	5	2	0	0
Виробник 2	0	1	5	2	-1	-3	-300
Виробник 3	2	3	7	4	1	-1	-51
Оц-попиту	3	4	8	5	2	1145	-350,5
Доход	120	80	800	375	120	1495	ЦФ

Для отримання двоїстих оцінок будемо звіт *Отчет по устойчивости*, де отримуємо нормовані вартості запасів (стовпець Залишки) і попиту (всі нулі, тому не виведені) і тіньові ціни обмежень (матрицю потоків).

Загальний результат (пряма і двоїста задачі оптимального прикріплення):

Транспортна задача (max)								
Мета: оптимальне прикріплення виробників за ринками збуту								
Початкові дані								
	Ринок 1	Ринок 2	Ринок 3	Ринок 4	Ринок 5	Запас		
Виробник 1	3	4	8	5	2	500,0		
Виробник 2	4	1	5	6	4	100,0		
Виробник 3	8	8	9	4	5	50,5		
Попит	40	20	100	75	60			
	Ринок 1	Ринок 2	Ринок 3	Ринок 4	Ринок 5	Оц-запасу	Втрати	Залишок
Виробник 1	3	4	8	5	2	0	0	355,5
Виробник 2	0	1	5	2	-1	-3	-300	0
Виробник 3	2	3	7	4	1	-1	-51	0
Оц-попиту	3	4	8	5	2	1144,5	-350,5	
Доход	120	80	800	375	120	1495	ЦФ	
Тіньові ціни обмежень								
	Ринок 1	Ринок 2	Ринок 3	Ринок 4	Ринок 5	Всього		
Виробник 1	40	0	20	24,5	60	144,5		
Виробник 2	0	20	80	0	0	100,0		
Виробник 3	0	0	0	50,5	0	50,5		
						ЦФ=	1144,5	

## Аналіз результату

### Пряма задача:

- вартісні оцінки запасів виробників (0; -3; -1), попиту ринків збуту (3; 4; 8; 5; 2),
- максимальний прибуток 1144,5, який є сумою доходу і втрат:  $1495 - 350,5 = 1144,5$ .

Рядок Доход показує, який дохід отримано на кожному ринку, стовпець Втрати – з-за якого виробника скільки втрачено.

- Найбільш «вигідним» є ринок 3 (оцінка 8, дохід 800), збільшення його попиту на 1 дасть до загального прибутку 8 гр.од., тому треба стимулювати збільшення його попиту.
- Найбільш «невигідним» виявився виробник 2 (оцінка -3, втрати з-за нього -300), збільшення його запасів приведе лише до зменшення загального прибутку на 3 гр.од., тому йому краще знизити свої пропозиції.
- Матриця B11:F13 («нові ціни») вказує на прибутки від використання певних зв'язків «пропозиції-попит» в залежності від отриманих оцінок запасів і попиту.

### Двоїста задача:

- для шуканих невідомих – оцінок запасів і попиту – отримані нормовані вартості, їх економічний смисл – залишки, для запасів – це стовпець Залишок, для ринків – всі нулі (бо весь попит забезпечено);
- для обмежень (матриця питомого прибутку) отримана матриця потоків від виробників на ринки збуту.

### Висновки

Розв'язанням задачі про оптимальне прикріплення ми довели, що достатньо побудувати одну модель транспортної задачі, для якої програма-оптимізатор *Поиск решения* знаходить результат прямої та двоїстої до неї задач, тобто, якщо модель прямої задачі на мінімум ЦФ, то автоматично результат двоїстої – на максимум, і навпаки.

Дані (порівняльна таблиця)

#### Транспортна задача (мінімум)

Пряма задача:

	Буд 1	Буд 2	Буд 3	Буд 4	Буд 5
Кар'єр 1	40	0	20	24,5	60
Кар'єр 2	0	20	80	0	0
Кар'єр 3	0	0	0	50,5	0

Залишок
355,5
0,0
0,0

Двоїста задача:

Т-ціна
0
-3
-1

Т-ціна	3	4	8	5	2

#### Задача на прикріплення (максимум)

Пряма задача:

Оц-запасу
0
-3
-1

Оц-попиту	3	4	8	5	2

	Ринок 1	Ринок 2	Ринок 3	Ринок 4	Ринок 5
Виробник 1					
Виробник 2	4			4	5
Виробник 3	6	5	2	0	4

Двоїста задача:

	Ринок 1	Ринок 2	Ринок 3	Ринок 4	Ринок 5
Виробник 1	40	0	20	24,5	60
Виробник 2	0	20	80	0	0
Виробник 3	0	0	0	50,5	0

	Буд 1	Буд 2	Буд 3	Буд 4	Буд 5	Залишок
Кар'єр 1						355,5
Кар'єр 2	4			4	5	0
Кар'єр 3	6	5	2		4	0

### Задача 3.8. Транспортна задача з обмеженням пропускної здатності

Задача виникає у реальних ситуаціях, коли комунікаційна мережа (дороги, трубопроводи, кабельний зв'язок) має ділянки, природні чи штучні, з обмеженою пропускною здатністю («вузькі місця»), це: тоннелі, об'їзди й зустрічний рух, звуження у каналах, судинах, переїздах колій залізниці чи на гірських перевалах, станції пересадок пасажирів, пункти перетину кордонів чи перевалки вантажів тощо. Для киян такими «вузькими місцями» є станції пересадок київського метрополітену.



До початкових даних «ідеальної» класичної транспортної задачі:

- додається невелика кількість клітинок, якщо таких звужень мало, або ж
- уводиться «реальна» матриця  $P$  пропускних здатностей маршрутів заданих розмірів, в математичній моделі, відповідно, додається обмеження типу  $x_{ij} \leq p_{ij}$  (потік ділянкою не перевищує її пропускну здатність). Для ділянок без таких обмежень у матриці  $P$  треба ввести велике за значенням число (у прикладі 99).

Три типи обмежень:

- зверху («не більше, ніж»)
- знизу («не менше, ніж»), наприклад, земельна ділянка має бути засіяна хоч чим, трубопровід має бути заповненим згідно норми, вентиляційний канал привідкритий
- знизу і зверху («не менше й не більше»).

Використовується стандартна математична модель із додатковими обмеженнями на потоки «постачальник-споживач»:  $x_{ij} \leq p_{ij}$ .

#### Варіант 1 (без обмежень на пропускну здатність ділянок)

##### Результат 1

Початкові дані: витрати, запаси і попит								
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Запас			
Постачальник 1	9	5	3	10	35			
Постачальник 2	6	3	3	2	60			
Постачальник 3	3	8	4	8	20			
Попит	45	15	20	20				
Результат (без врахування обмеження)								
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Вивезено	Залишки	Т-ціна	
Постачальник 1	0	0	20	0	20	15	0	
Постачальник 2	25	15	0	20	60	0	-2	
Постачальник 3	20	0	0	0	20	0	-5	
Ввезено	45	15	20	20	355			
Т-ціна	8	5	3	4	ЦФ			

#### Аналіз результату

##### Пряма задача

I. Оптимальний план перевезень ( $X$ ):

	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4
Постачальник 1	0	0	20	0
Постачальник 2	25	15	0	20
Постачальник 3	20	0	0	0

II. Загальні витрати (ЦФ) 355 т/км

III. Обмеження: «вигідні» постачальники: 2-й та 3-й.

### Двоїста задача

I. Тіньові ціни (попит/запаси):

Ограничения			
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена
\$B\$20	Ввезено Споживач 1	45	8
\$C\$20	Ввезено Споживач 2	15	5
\$D\$20	Ввезено Споживач 3	20	3
\$E\$20	Ввезено Споживач 4	20	4

Ограничения			
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена
\$F\$17	Постачальник 1 Вивезено	20	0
\$F\$18	Постачальник 2 Вивезено	60	-2
\$F\$19	Постачальник 3 Вивезено	20	-5

II. Нормовані вартості (витрати, коефіцієнти ЦФ):

Изменяемые ячейки			
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость
\$B\$17	Постачальник 1 Споживач 1	0	1
\$C\$17	Постачальник 1 Споживач 2	0	0
\$D\$17	Постачальник 1 Споживач 3	20	0
\$E\$17	Постачальник 1 Споживач 4	0	6
\$B\$18	Постачальник 2 Споживач 1	25	0
\$C\$18	Постачальник 2 Споживач 2	15	0
\$D\$18	Постачальник 2 Споживач 3	0	2
\$E\$18	Постачальник 2 Споживач 4	20	0
\$B\$19	Постачальник 3 Споживач 1	20	0
\$C\$19	Постачальник 3 Споживач 2	0	8
\$D\$19	Постачальник 3 Споживач 3	0	6
\$E\$19	Постачальник 3 Споживач 4	0	9

Варіант 2 (з обмеженням на пропускну здатність ділянок)

Результат 2

Початкові дані: витрати, запаси і попит							
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Запас		
Постачальник 1	9	5	3	10	35		
Постачальник 2	6	3	3	2	60		
Постачальник 3	3	8	4	8	20		
Попит	45	15	20	20			
Початкові дані: пропускі здатності маршрутів							
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4			
Постачальник 1	99	99	15	99			
Постачальник 2	15	99	99	10			
Постачальник 3	99	99	99	99			
Результат (з врахуванням обмеження)							
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Вивезено	Залишки	T-ціна
Постачальник 1	10	0	15	10	35	0	0
Постачальник 2	15	15	5	10	45	15	0
Постачальник 3	20	0	0	0	20	0	-6
Ввезено	45	15	20	20	465		
T-ціна	9	3	3	10	Витрати		
Нормовані вартості змінних плану							
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4			
Постачальник 1	0	2	0	0			
Постачальник 2	-3	0	0	-8			
Постачальник 3	0	11	7	4			

Аналіз результату

Пряма задача

I. Оптимальний план перевезень (X):

	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4
Постачальник 1	10	0	15	10
Постачальник 2	15	15	5	10
Постачальник 3	20	0	0	0

II. Загальні витрати (ЦФ) 465 т/км

III. Обмеження: «вигідний» постачальник: 3-ій.

### Двоїста задача

I. Тіньові ціни (попит/запаси):

Ограничения			
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена
\$B\$28	Ввезено Споживач 1	45	9
\$C\$28	Ввезено Споживач 2	15	3
\$D\$28	Ввезено Споживач 3	20	3
\$E\$28	Ввезено Споживач 4	20	10

Ограничения			
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена
\$F\$25	Постачальник 1 Вивезено	35	0
\$F\$26	Постачальник 2 Вивезено	45	0
\$F\$27	Постачальник 3 Вивезено	20	-6

II. Нормовані вартості (витрати, коефіцієнти ЦФ):

Нормовані вартості змінних плану				
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4
Постачальник 1	0	2	0	0
Постачальник 2	-3	0	0	-8
Постачальник 3	0	11	7	4

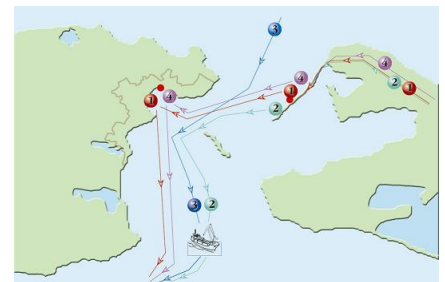
Таким чином, є два «вузькі місця»:  $p_{21} = 15$ ;  $p_{24} = 10$ , що привели до збільшення загальних транспортних витрат на  $465 - 355 = 110$  т/км.

### Прийняття рішень

Для модернізації комунікацій треба у першу чергу вкласти кошти на розширення ділянки (2,4) з оцінкою -8 (якщо її теперішню пропускну здатність 10 збільшити до 11, тоді значення ЦФ буде дорівнювати  $465 - 8 = 457$ ), за нею – ділянки (2,1) з оцінкою -3, зате розширення ділянки (1,3) з оцінкою 0 не приведе до зменшення транспортних витрат (це цінна рекомендація для розпорядників коштів).

### Задача 3.9. Транспортна задача з проміжними пунктами

Реальні транспортні процеси передбачають розв'язання транспортної задачі з проміжними (транзитними) пунктами (transshipment problem), у яких, скажімо, здійснюється ремонт, поповнення запасів палива, питної води чи харчових продуктів, оформлення документації, перевалка вантажів чи пересадка пасажирів із одного виду транспортного засобу на інший тощо. Додатково ці пункти можуть мати власні запаси чи попит на відповідний продукт, що впливає на величини шуканих потоків. Специфіка таких задач – проміжні пункти у складі транспортної мережі є одночасно споживачами (входами) й постачальниками (виходами).



### Приклад

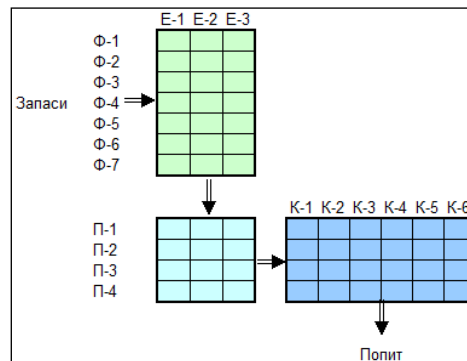
6 зарубіжних компаній (К-1, ..., К-6) мають попит на зерно, яке відвантажується з одного із 4-ох морських портів (П-1, ..., П-4) й доставляється морем, у порти зерно доставляють з 3-ох елеваторів (Е-1, Е-2, Е-3) залізницею, а на елеватори – автомобілями із 7 ферм (Ф-1, ..., Ф-7), що мають відповідні товарні пропозиції.

Комунікаційна мережа складається з 3-ох локальних транспортних задач, зв'язаних між собою:

- порт-компанія (розміром 4×6)
- елеватор-порт (розміром 3×4)
- ферма-елеватор (розміром 7×3),
- в логістиці – це ланцюги поставок [86].

У цій задачі є 6 «чистих» споживачів (компанії) та 7 постачальників (ферми), 7 проміжних пунктів (порти та елеватори) є одночасно постачальниками й споживачами. Відповідно, загалом є 14 постачальників та 13 споживачів, можливі дві форми організації даних:

- одна глобальна таблиця розміром 14×13 чи
- три локальних таблиці із: 4×6, 3×4 та 7×3 на 57 невідомих.



Початкові дані і результати

Форма 1

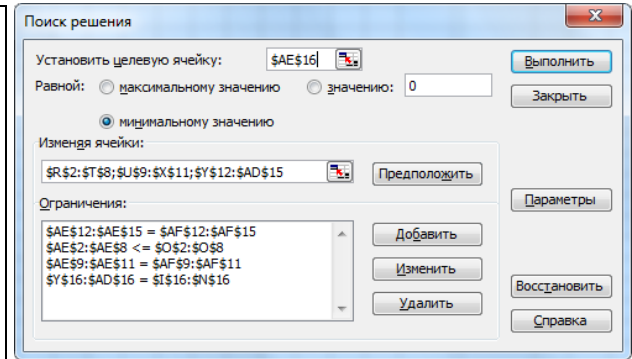
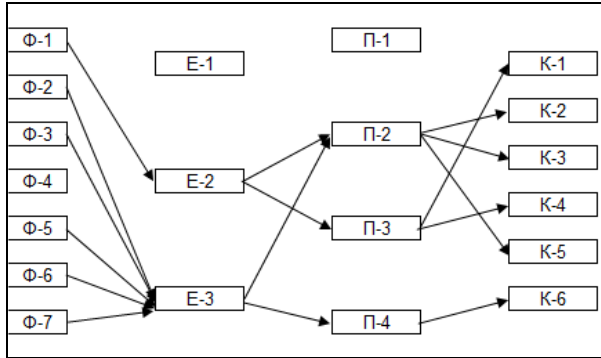
	Е-1	Е-2	Е-3	П-1	П-2	П-3	П-4	К-1	К-2	К-3	К-4	К-5	К-6	Запас	Е-1	Е-2	Е-3	П-1	П-2	П-3	П-4	К-1	К-2	К-3	К-4	К-5	К-6	Вивезено	Залишки		
Ф-1	138	101	211											450	Ф-1	0	450	0										450	0		
Ф-2	199	219	170											400	Ф-2	0	0	270										270	130		
Ф-3	51	144	107											100	Ф-3	0	0	100										100	0		
Ф-4	119	171	199											300	Ф-4	0	0	0										0	300		
Ф-5	166	154	109											320	Ф-5	0	0	320										320	0		
Ф-6	88	166	123											200	Ф-6	0	0	200										200	0		
Ф-7	79	66	73											120	Ф-7	0	0	120										120	0		
Е-1				129	128	199	190								Е-1				0	0	0	0									
Е-2				96	70	61	180								Е-2			0	125	325	0							450	450		
Е-3				214	53	234	93								Е-3			0	550	0	460							1010	1010		
П-1								1900	2130	2180	1750	1120	1720		П-1							0	0	0	0	0	0			0	
П-2								1370	580	620	1880	1130	1050		П-2							0	300	375	0	0	0			675	675
П-3								1080	1190	2120	740	2310	2230		П-3							100	0	0	225	0	0			325	325
П-4								1050	1790	1280	1320	880	520		П-4							0	0	0	0	60	400			460	460
Попит								100	300	375	225	60	400		Ввезено	0	450	1010	0	675	325	460	100	300	375	225	60	400	1212595	ЦФ	

Форма 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	Транспортна задача з проміжними пунктами																		
2	Ф-Е	Е-1	Е-2	Е-3	Запас				Ф-Е	Е-1	Е-2	Е-3	Вивезено	Залишки					
3	Ф-1	138	101	211	450				Ф-1	0	450	0	450	0					
4	Ф-2	199	219	170	400				Ф-2	0	0	270	270	130					
5	Ф-3	51	144	107	100				Ф-3	0	0	100	100	0					
6	Ф-4	119	171	199	300				Ф-4	0	0	0	0	300					ЦФ1= 170290
7	Ф-5	166	154	109	320				Ф-5	0	0	320	320	0					
8	Ф-6	88	166	123	200				Ф-6	0	0	200	200	0					
9	Ф-7	79	66	73	120				Ф-7	0	0	120	120	0					
10									Ввезено	0	450	1010		1460.0	Вивезено				
11														1460.0	Ввезено				
12	Е-П	П-1	П-2	П-3	П-4				Е-П	П-1	П-2	П-3	П-4	Вивезено					
13	Е-1	129	128	199	190				Е-1	0	0	0	0	0	0				
14	Е-2	96	70	61	180				Е-2	0	125	325	0	450	450				ЦФ2= 98105
15	Е-3	214	53	234	93				Е-3	0	610	0	400	1010	1010				
16									Ввезено	0	735	325	400	1460.0	Ввезено				
17																			
18	П-К	К-1	К-2	К-3	К-4	К-5	К-6		П-К	К-1	К-2	К-3	К-4	К-5	К-6	Вивезено			
19	П-1	190	213	218	175	112	172		П-1	0	0	0	0	0	0	0			0
20	П-2	137	58	62	188	113	105		П-2	0	300	375	0	60	0	735	735		ЦФ3= 95680
21	П-3	108	119	212	74	231	223		П-3	100	0	0	225	0	0	325	325		
22	П-4	105	179	128	132	88	52		П-4	0	0	0	0	0	400	400	400		
23	Попит	100	300	375	225	60	400		Ввезено	100	300	375	225	60	400	1460.0			
24																1460.0			
25																			ЦФ = 364075



## Схема перевезень



## Аналіз результату

### Пряма задача

I. Знайдено оптимальний план перевезень, що складається з 3-ох частинних планів:

- Ферми-Елеватори (Ф-Е)
- Елеватори-Порти (Е-П) та
- Порти-Компанії (П-К)

II. відповідні частинні й загальні витрати

III. результати обмежень (залишки ресурсів постачальників: ферм, елеваторів, портів):

Ф-Е	Е-1	Е-2	Е-3	Вивезено	Залишки				
Ф-1	0	450	0	450	0				
Ф-2	0	0	270	270	130				
Ф-3	0	0	100	100	0				
Ф-4	0	0	0	0	300			ЦФ1=	170290
Ф-5	0	0	320	320	0				
Ф-6	0	0	200	200	0				
Ф-7	0	0	120	120	0				
Ввезено	0	450	1010		1460,0	Вивезено			
					1460,0	Ввезено			
Е-П	П-1	П-2	П-3	П-4	Вивезено				
Е-1	0	0	0	0	0	0			
Е-2	0	125	325	0	450	450		ЦФ2=	98105
Е-3	0	610	0	400	1010	1010			
Ввезено	0	735	325	400	1460,0	Ввезено			
П-К	К-1	К-2	К-3	К-4	К-5	К-6	Вивезено		
П-1	0	0	0	0	0	0	0	0	
П-2	0	300	375	0	60	0	735	735	ЦФ3= 95680
П-3	100	0	0	225	0	0	325	325	
П-4	0	0	0	0	0	400	400	400	
Ввезено	100	300	375	225	60	400	1460,0	1460,0	ЦФ = 364075

### Двоїста задача

I. Нормовані вартості питомих витрат:

Клітинка	Значення	Н-варт.	Доп. зб.	Клітинка	Значення	Н-варт.	Доп. зб.	Клітинка	Значення	Н-варт.	Доп. зб.
Ф-1 Е-1	0	76	1Е+30	Е-1 П-1	0	0	6	П-1 К-1	0	111	1Е+30
Ф-1 Е-2	450	0	52	Е-1 П-2	0	19	1Е+30	П-1 К-2	0	175	1Е+30
Ф-1 Е-3	0	93	1Е+30	Е-1 П-3	0	99	1Е+30	П-1 К-3	0	176	1Е+30
Ф-2 Е-1	0	85	1Е+30	Е-1 П-4	0	41	1Е+30	П-1 К-4	0	130	1Е+30
Ф-2 Е-2	0	66	1Е+30	Е-2 П-1	0	6	1Е+30	П-1 К-5	0	19	1Е+30
Ф-2 Е-3	270	0	5	Е-2 П-2	125	0	6	П-1 К-6	0	100	1Е+30
Ф-3 Е-1	0	0	5	Е-2 П-3	325	0	38	П-2 К-1	0	38	1Е+30
Ф-3 Е-2	0	54	1Е+30	Е-2 П-4	0	70	1Е+30	П-2 К-2	300	0	52
Ф-3 Е-3	100	0	19	Е-3 П-1	0	141	1Е+30	П-2 К-3	375	0	106
Ф-4 Е-1	0	5	1Е+30	Е-3 П-2	610	0	10	П-2 К-4	0	123	1Е+30
Ф-4 Е-2	0	18	1Е+30	Е-3 П-3	0	190	1Е+30	П-2 К-5	60	0	15
Ф-4 Е-3	0	29	1Е+30	Е-3 П-4	400	0	13	П-2 К-6	0	13	1Е+30
Ф-5 Е-1	0	113	1Е+30					П-3 К-1	100	0	38
Ф-5 Е-2	0	62	1Е+30					П-3 К-2	0	52	1Е+30
Ф-5 Е-3	320	0	61					П-3 К-3	0	141	1Е+30
Ф-6 Е-1	0	21	1Е+30					П-3 К-4	225	0	107
Ф-6 Е-2	0	60	1Е+30					П-3 К-5	0	109	1Е+30
Ф-6 Е-3	200	0	21					П-3 К-6	0	122	1Е+30
Ф-7 Е-1	0	62	1Е+30					П-4 К-1	0	46	1Е+30
Ф-7 Е-2	0	10	1Е+30					П-4 К-2	0	161	1Е+30
Ф-7 Е-3	120	0	10					П-4 К-3	0	106	1Е+30
								П-4 К-4	0	107	1Е+30
								П-4 К-5	0	15	1Е+30
								П-4 К-6	400	0	13

II. Тіньові ціни для:

- запасів ресурсів (від'ємні числа) та
- попиту користувачів (додатні числа),

які визначають шляхи до покращення кінцевого результату (загальних транспортних витрат) за рахунок розвитку фермерських господарств, елеваторів та портів, оцінюють додаткові витрати з-за збільшення попиту компаній-споживачів:

Клітинка	Значення	Т-ціна	Клітинка	Значення	Т-ціна	Клітинка	Значення	Т-ціна
Ф-1 Вивезено	450	-52	Ввезено К-1	100	322	Е-1 Ввезено	0	-114
Ф-2 Вивезено	270	0	Ввезено К-2	300	281	Е-2 Ввезено	450	-153
Ф-3 Вивезено	100	-63	Ввезено К-3	375	285	Е-3 Ввезено	1010	-170
Ф-4 Вивезено	0	0	Ввезено К-4	225	288			
Ф-5 Вивезено	320	-61	Ввезено К-5	60	336	П-1	0	-243
Ф-6 Вивезено	200	-47	Ввезено К-6	400	315	П-2	735	-223
Ф-7 Вивезено	120	-97				П-3	325	-214
						П-4	400	-263

### Задача 3.10. Логістична задача «виробництво-база-споживач»

#### Постановка задачі

$s$  споживачів можуть отримувати необхідний продукт безпосередньо з  $v$  виробництв та з  $b$  баз, де зберігається продукція усіх виробників, відповідно, сформована транспортна мережа, її складові у матричній формі:

- виробник-база (матриця  $A$  розміром  $v \times b$ )
- виробник-споживач (матриця  $B$  розміром  $v \times s$ )
- база-споживач (матриця  $C$  розміром  $b \times s$ ).

Задано (у кількісному вимірі):

- максимальні потужності виробників:  $P(v)$
- попит споживачів:  $D(s)$
- розміри баз:  $R(b)$ .

Треба визначити потоки продуктів:

- виробник-база (матрицю  $X$  розміром  $v \times b$ )
- виробник-споживач (матрицю  $Y$  розміром  $v \times s$ )
- база-споживач (матрицю  $Z$  розміром  $b \times s$ ),  
щоб загальні транспортні витрати ( $T$ ) для забезпечення попиту споживачів були мінімальними.

### Задача оптимізації

I. Знайти три матриці:  $X(v \times b)$ ,  $Y(v \times s)$ ,  $Z(b \times s)$ , щоб

II. ЦФ  $T = AX + BY + CZ \rightarrow \min$

III. за обмежень:

- випуск продуктів  $\leq$  потужність
- сума випуску = сумі попиту
- ввезено на бази  $\leq$  розміри баз
- ввезено на бази = вивезено з баз
- вивезено від виробників + вивезено з баз = попиту.

Початкові дані:

$v = 2, b = 4, s = 5$

	База-1	База-2	База-3	База-4		
Вир-1	0,23	0,5	2	0,3		
Вир-2	0,9	0,23	0,55	0,21		
Об'єм	45	20	30	15		
	Слож-1	Слож-2	Слож-3	Слож-4	Слож-5	Потужність
Вир-1	1,75	2,5	1,5	2	9	60
Вир-2	2	2,5	2,5	1,5	6	60
Попит	30	23	15	32	16	
	Слож-1	Слож-2	Слож-3	Слож-4	Слож-5	
База-1	0,6	0,6	0,5	1,5	3	
База-2	1	0,5	0,5	1	0,5	
База-3	1	0,8	2	0,4	0,5	
База-4	0,1	1,5	0,2	1,5	0,5	

Результати:

X	База-1	База-2	База-3	База-4	Вивезено			
Вир-1	45	0	0	7	52,0			
Вир-2	0	20	30	8	58,0			
Ввезено	45	20	30	15	35,2	Витрати		
Y	Слож-1	Слож-2	Слож-3	Слож-4	Слож-5	Вивезено	Вивезено разом	Сума
Вир-1	0	0	4	0	0	4,00	56	116
Вир-2	0	0	0	2	0	2,00	60	4
Ввезено	0	0	4	2	0	9,00	Витрати	Залишок
Z	Слож-1	Слож-2	Слож-3	Слож-4	Слож-5	Вивезено	Ввезено на бази	
База-1	15	19	11	0	0	45	45	
База-2	0	4	0	0	16	20	20	
База-3	0	0	0	30	0	30	30	
База-4	15	0	0	0	0	15	15	
	30	23	11	30	16	49,4	Витрати	
Вв. разом	30,0	23,0	15,0	32,0	16,0	93,63	Витрати заг. (ЦФ)	

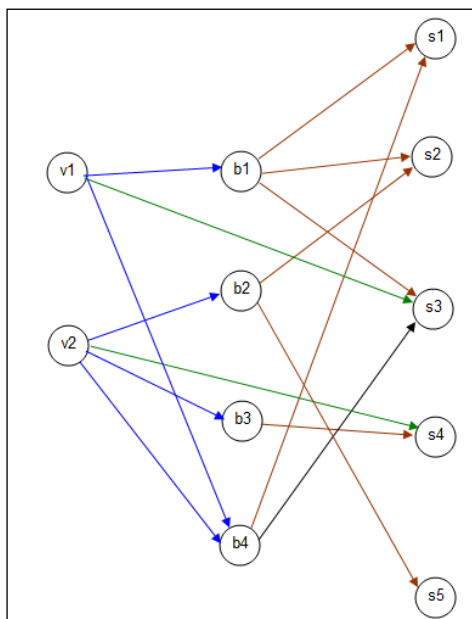


Схема перевезень:

### Аналіз результату

#### Пряма задача

I. Отримано три матриці:  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$

II. Мінімальні транспортні витрати склали величину 93,63 гр. од.

III. Обмеження:

- випуск продуктів < потужність (залишок = 4)
- сума випуску = сумі попиту
- ввезено на бази = розміри баз (вузьке місце)
- ввезено на бази = вивезено з баз
- вивезено від виробників + вивезено з баз = попиту.

#### Двоїста задача

Тіньові ціни правих частин обмежень (ПЧО) вказують на зміну значення ЦФ при зміні значень ПЧ на 1.

Нормовані вартості шуканих невідомих (додатні числа замість нулів) вказують на збільшення значення ЦФ

при вимушеному відхиленні від оптимуму:

- матриця «виробник-бази» ( $X$ )

X	База-1	База-2	База-3	База-4
Вир-1	0,00	0,18	1,36	0,00
Вир-2	0,76	0,00	0,00	0,00
Ввезено	1	0	1	0
Т-ціна	-0,77	-0,78	-0,55	-1,2

X	База-1	База-2	База-3	База-4
Вир-1	45	0	0	7
Вир-2	0	20	30	8

Джерело № 1 зменшення загальних витрат – збільшення об'ємів баз;

- матриця «виробник-споживачі» ( $Y$ )

Y	Спож-1	Спож-2	Спож-3	Спож-4	Спож-5	Т-ціна
Вир-1	0,15	0,90	0,00	0,41	7,40	0,00
Вир-2	0,49	0,99	1,09	0,00	4,49	-0,09
Ввезено	0,64	1,89	1,09	0,41	11,89	

Y	Спож-1	Спож-2	Спож-3	Спож-4	Спож-5
Вир-1	0	0	4	0	0
Вир-2	0	0	0	2	0

Джерело № 2 зменшення загальних витрат – збільшення випуску 2-го виробника;

- матриця «бази-споживачі» ( $Z$ )

Z	Спож-1	Спож-2	Спож-3	Спож-4	Спож-5	Т-ціна
База-1	0,00	0,00	0,00	0,91	2,40	0,50
База-2	0,50	0,00	0,10	0,51	0,00	0,40
База-3	0,59	0,39	1,69	0,00	0,09	0,31
База-4	0,00	1,40	0,20	1,41	0,40	0,00
Т-ціна	0,10	0,10	0,00	0,09	0,10	

Z	Спож-1	Спож-2	Спож-3	Спож-4	Спож-5
База-1	15	19	11	0	0
База-2	0	4	0	0	16
База-3	0	0	0	30	0
База-4	15	0	0	0	0

• ПОПИТ

Попит	Т-ціна
116	1.5

Джерела збільшення загальних витрат: збільшення попиту споживачів (по кожному й загалом) на 1 й, відповідно, збільшення вивозу з баз до споживачів.

### Задача 3.11. Змішана виробничо-транспортна задача

Розглянуті вище стандартні векторна та матрична моделі оптимального розподілу обмежених ресурсів дають змогу побудувати змішану (векторно-матричну) модель, де застосовуються обидві моделі оптимізації:

- векторна (оптимальний план виробництва) й
- матрична (багатопродуктова транспортна задача), для транспортування:
  - сировини від постачальників до виробництва та
  - готової продукції від виробництва до споживачів.

Композиція стандартних моделей для розв'язання поставленої задачі – типова ситуація з прийняття рішень реальної практики, де у єдиному комплексі виготовляється певна продукція й надаються необхідні послуги (у прикладі – транспортні) для її реалізації, одночасно використовуються величини у різних вимірах – кількісних й вартісних.

Задача, що розглядається, характерна для сучасної економіки, де ключовим фактором є замовлення на здійснення певних операцій, за отримання якого треба поборотися, аби довести організаторам тендерів свою спроможність якісного й своєчасного виконання проекту заданого об'єму й вартості.

Отже, шукана виробнича програма підприємства за визначеним критерієм оптимізації визначена необхідністю задоволення заданого попиту (замовлення споживачів), відповідно, її ресурсне забезпечення й увесь технологічний процес повністю визначається цим попитом<sup>25</sup>. Отже, згідно «втягаючої» дисципліни організації виробництва увесь процес «розкручується» з кінця (задоволені споживачі) до початку (постачальники ресурсів), з нескінченної кількості можливих траєкторій розвитку цього процесу треба вибрати кращий, за яким вибраний критерій оцінювання набуде екстремального значення.

#### Приклад.

Компанія має 3 фабрики (у Харкові, Миколаєві й Києві, Х, М, К), кожна з яких може випускати 5 видів товарної продукції (Т-1, ..., Т-5), використовуючи 2 види сировинних ресурсів (Р-1, Р-2), які доставляються від 4-х постачальників (Ів.-Франківськ, Вінниця, Чернігів, Суми, І, В, Ч, С), на цю продукцію задано замовлення від 6 споживачів (магазинів у Донецьку, Одесі, Симферополі, Львові, Запоріжжі, Полтаві, Д, О, С, Л, З, П).

Відомі технологічні матриці фабрик й питомі транспортні витрати (у вигляді відстаней) між постачальниками, фабриками й споживачами.

Вважається, що загальних потужностей фабрик достатньо для задоволення замовлення, а запаси сировини – практично необмежені, при модифікації діючої моделі може виявитися необхідність врахування обмежувальних умов щодо певних показників.

Треба визначити оптимальну виробничу програму компанії, за якою прибуток від виготовлення й реалізації готової продукції згідно замовлення буде максимальним.

<sup>25</sup> в практиці сучасного менеджменту є дві принципово різні дисципліни організації виробництва: «виштовхуюча», коли технологічний процес виштовхує на вихід максимально можливу кількість готової продукції згідно наявного ресурсного забезпечення, збут якої гарантовано (це задача про оптимальний план виробництва), й «втягаюча», характерна для насиченого ринку, коли попит на виході організму й втягує увесь процес; задача що розглядається, відноситься до другої дисципліни, реалізація якої вимагає наявності резервів виробничих потужностей, якщо їх недостатньо, розв'язується задача типу «робити-купувати», бо кінцева мета – задовольнити замовлення

Цей прибуток складається з *доходу* за продаж продукції мінус *витрати* на транспортування сировини на фабрики мінус *витрати* на транспортування готової продукції з фабрик до магазинів.

Задане замовлення (попит), фактично, задає сумарний об'єм виробництва компанії й загальний дохід (сума доходів фабрик) за реалізацію готової продукції за заданими і однаковими для всіх фабрик цінами. Тож максимізація прибутку визначається, фактично, мінімізацією двох видів транспортних витрат на: постачання фабрик сировиною й доставку продукції магазинам.

Виходить, що економічний успіх компанії залежить від оптимальної організації роботи транспортних служб, яка, у свою чергу, залежить від вдалого завантаження наявних потужностей фабрик.

Фабрикам відводиться балансуєча роль:

- сума відправлених ресурсів = сумі необхідних ресурсів
- сума виготовленої продукції = загальному замовленню.

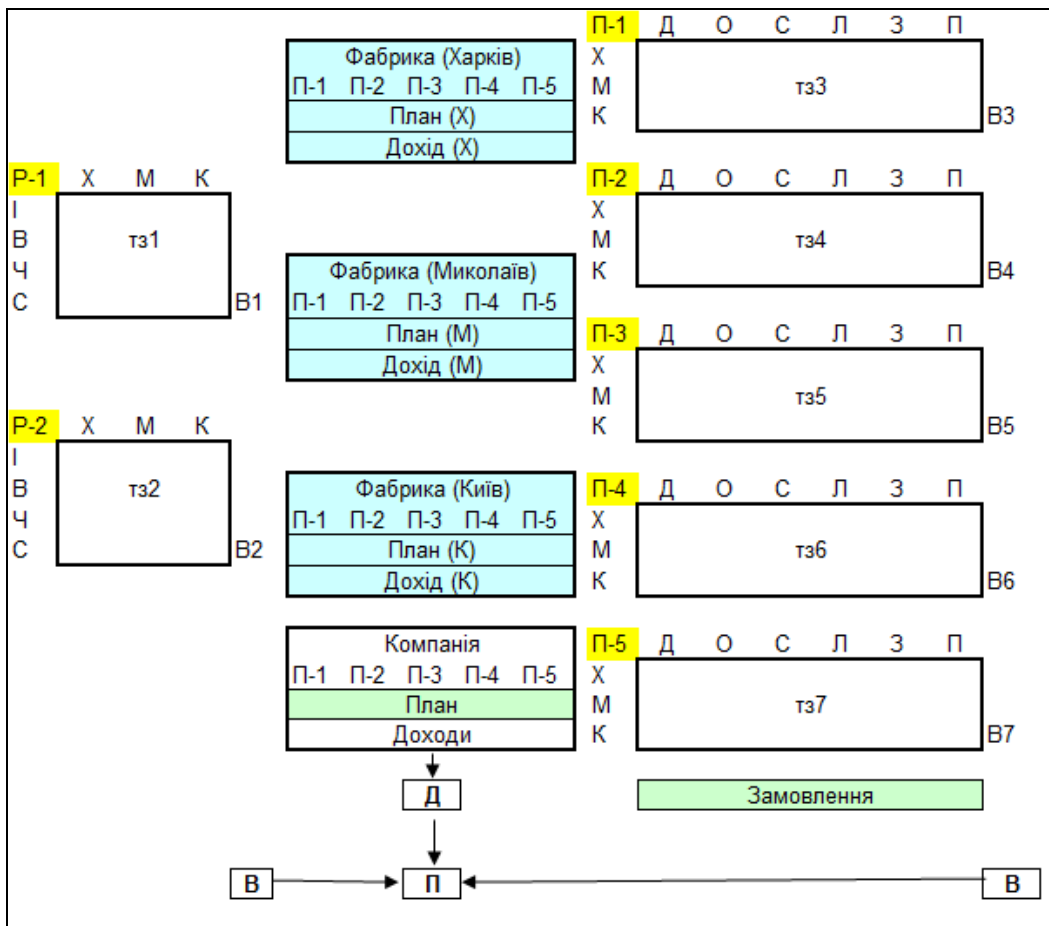
Відшукуються плани:

- виробництва фабрик (три вектори з 5-ти елементів) й відповідні доходи фабрик
- розподілу готової продукції (п'ять векторів з 6-ти елементів)
- транспортування кожного сировинного ресурсу від постачальників на фабрики (дві матриці розміром  $4 \times 3$ ),
- транспортування готової продукції з кожної фабрики до споживачів (5 матриць розміром  $3 \times 6$ ).

Додатковими обмеженнями виступають «зовнішні» умови, які висувають учасники економічного процесу – постачальники сировини, керівництво фабрик та споживачі готової продукції – щодо бажаних змін у комплексному оптимальному плані.

Отже, маємо моделюючий комплекс з 3-ох моделей задач оптимального виробництва й 7-ми моделей транспортної задачі.

Структура даних



### Початкові дані

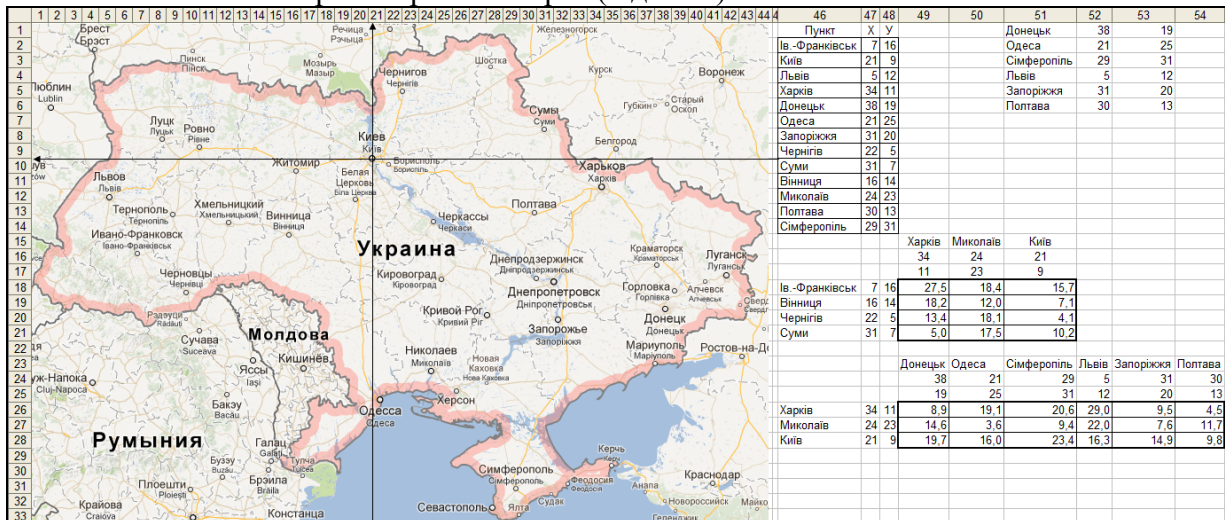
Виробництво:

- технологічна матриця питомих норм витрат ресурсів
- рядок Ціна
- загальний об'єм готової продукції (попит).

Постачання:

- запаси ресурсів
- матриця питомих витрат на доставку ресурсів
- матриця питомих витрат на доставку готової продукції

### Визначення питомих транспортних витрат (відстані)



## Математична модель виробничо-транспортної задачі

### Позначення:

$f$  – номер фабрики,  $f = 1, 2, 3$  (X, M, K)

$t$  – номер товарного продукту,  $t = 1, \dots, 5$  (Т-1, ..., Т-5)

$c$  – заданий вектор цін товарних продуктів (однаковий для усіх фабрик) з 5 елементів

$r$  – номер ресурсу,  $r = 1, 2$  (Р-1, Р-2)

$p$  – номер постачальника ресурсу,  $p = 1, 2, 3, 4$  (І, В, Ч, С)

$n$  – номер споживача,  $n = 1, \dots, 6$  (Д, О, С, Л, З, П)

$RF$  – задана матриця відстаней «ресурси-фабрики» розміром  $4 \times 3$

$FC$  – задана матриця відстаней «фабрики-споживачі» розміром  $3 \times 6$

$Z$  – заданий вектор замовлень на готову продукцію з 5 елементів

$S1, S2$  – задані вектори запасів двох ресурсів з 4 елементів кожен

$T1, T2$  – шукані матриці розподілу ресурсів розміром  $4 \times 3$

$T3, \dots, T7$  – шукані матриці розподілу товарних продуктів розміром  $3 \times 6$

$X1, X2, X3$  – шукані вектори планів виробництва продуктів з 5 елементів кожен

$VP$  – загальні витрати на постачання сировини

$VC$  – загальні витрати на споживання товарних продуктів

$D$  – загальний дохід від реалізації товарних продуктів

$P$  – загальний прибуток:  $P = D - VP - VC$  (ЦФ).

### Задача оптимізації

I. Знайти плани випуску та транспортування: вектори  $X1, X2, X3$  та матриці  $T1, \dots, T7$ , такі, щоб

II. загальний прибуток  $P = D - VP - VC \rightarrow \max$

III. за обмежень:

для  $T1, T2$ : вивезено  $\leq$  запаси (ресурси)

ввезено = використано (фабрики)

для  $T3, T7$ : вивезено = план (продукти)

ввезено = попит

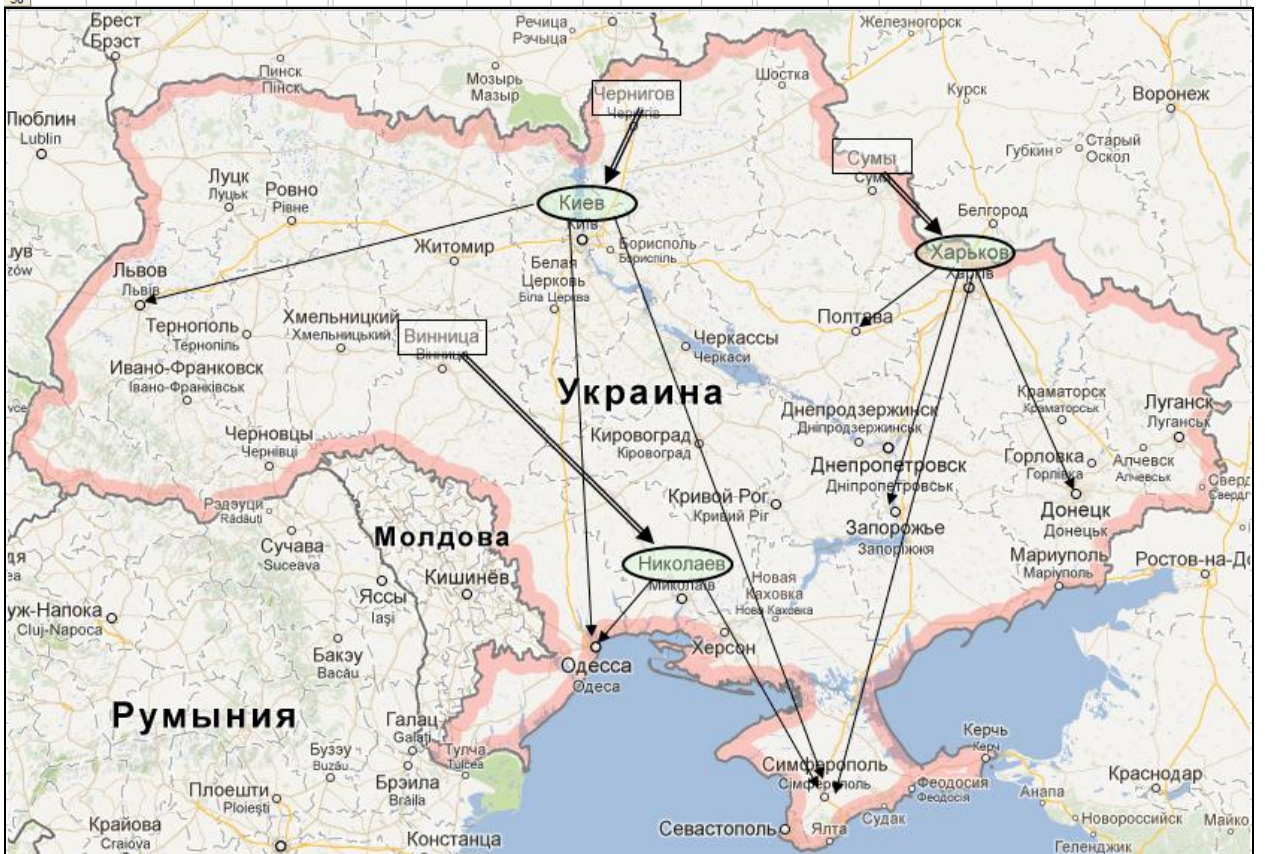
для  $X1, X2, X3$ : використано = ввезено

та граничних умов – всі невідомі невід'ємні.

### Результат



J24	[=МУМНОЖ(I21:М21;Х44:Х48)]																									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
	Постачання						Виробництво									Споживання										
3	Харків Миколаїв Київ															Донецьк Одеса Сімферопіль Львів Запоріжжя Полтава										
4	Ів.-Фр.	27,5	18,4	15,7			Харків	T-1	T-2	T-3	T-4	T-5	Використано	Ввезено	Харків	8,9	19,1	20,6	29	30,0	9,5	4,5				
5	Вінниця	18,2	12,0	7,1			Ресурс-1						982,7	982,7	Миколаїв	14,6	3,6	9,4	22	7,6	11,7					
6	Чернігів	13,4	18,1	4,1			Ресурс-2						1097,7	1097,7	Київ	19,7	16,0	23,4	16,3	14,9	9,8					
7	Суми	5,0	17,5	10,2			Ціна	54	98	77	33	79	37162,00													
8							План	153	69	145	62	113	Дохід1													
9																										
10																										
11	Ресурс-1	Харків	Миколаїв	Київ	Ввезено	Запас	Миколаїв	T-1	T-2	T-3	T-4	T-5	Використано	Ввезено	Донецьк	45	0,0	0,0	0,0	78,0	30,0	153	153			
12	Ів.-Фр.	0	0,0	0,0	0,0	1000	Ресурс-1						392,80	392,80	Миколаїв	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0			
13	Вінниця	0	15,4	0,0	15,4	1000	Ресурс-2						15,40	15,40	Київ	0,0	25,0	26,0	14,0	0,0	0,0	98	98			
14	Чернігів	0	0,0	392,8	392,8	1000	Ціна	3,0	5,0	2,0	0,1	0,0	0,84	0,84	Ввезено	45	58	26	14	78	30	3041,10				
15	Суми	983	0,0	0,0	982,7	1000	План	54	98	77	33	79	462,00		Політ	45	58	26	14	78	30	30	30	30	30	
16	Ввезено	982,7	15,40	393	6708,8																					
17							Витрати1																			
18																										
19																										
20	Ресурс-2	Харків	Миколаїв	Київ	Ввезено	Запас	Київ	T-1	T-2	T-3	T-4	T-5	Використано	Ввезено	Донецьк	12	25	47	25	36	21	2450,60				
21	Ів.-Фр.	0	0,0	0,0	0,0	1500	Ресурс-1						2323,00	2323,00	Миколаїв	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0			
22	Вінниця	0	0,84	0	0,84	1500	Ресурс-2						925,54	925,54	Київ	0,0	25,0	47,0	25,0	0,0	0,0	97	97			
23	Чернігів	0	0,0	925,5	925,5	1500	Ціна	54	98	77	33	79	2323,00		Ввезено	12	25	47	25	36	21	2450,60				
24	Суми	1097,7	0,0	0,0	1097,7	1500	План	98	97	73	9	33	Дохід3		Політ	12	25	47	25	36	21	21	21			
25	Ввезено	1097,7	0,84	925,5	8283,4																					
26							Витрати2																			
27																										
28	Ресурси, кількість і витрати						Доходи:						Витрати для споживачів													
29	Ів.-Фр.	0	0	0	0		Харків						37162		Харків	10	0	0	0	21	31	62	62			
30	Вінниця	16,2	194,9				Миколаїв						462		Миколаїв	0	9	5	0	0	0	14	14			
31	Чернігів	1318,3	5405,2				Київ						23323		Київ	0	0	0	9	0	0	9	9			
32	Суми	2080,4	10402,1				Разом:						60947		Ввезено	10	9	5	9	21	31	654,10				
33	Разом:	16002,2											60947		Політ	10	9	5	9	21	31	31	31			
34																										
35							Донецьк																			
36							Одеса																			
37							Сімферопіль																			
38							Львів																			
39							Запоріжжя																			
40							Полтава																			
41							Разом:																			
42																										
43																										
44																										
45																										
46																										
47																										
48																										
49																										
50																										



**Аналіз результату**

Пряма задача

- плани постачання ресурсів (матриці T1, T2)
- плани випуску товарної продукції (вектори X1, X2, X3)
- плани споживання товарної продукції (матриці T3, ..., T7)

Загальний прибуток (ЦФ) 34344,03 гр. од.





## Результат

Постачання						Виробництво						Споживання																			
Харків Миколаїв Київ						Харків Т-1 Т-2 Т-3 Т-4 Т-5 Використано Везено						Донець Одеса Сімферопіль Львів Запоріжжя Полтава Везено План																			
Ів.-Фр.	27,5	18,4	15,7			Ресурс-1	20	0,0	0,3	1,1	3,0	1000,0	1000,0	Харків	8,9	19,1	20,6	29	9,5	4,5											
Вінниця	18,2	12,0	7,1			Ресурс-2	30	5,0	2,0	0,1	0,0	1213,7	1213,7	Миколаїв	14,6	3,6	9,4	22	7,6	11,7											
Чернігів	13,4	18,1	4,1			Ціна	54	98	77	33	79	48785,84		Київ	19,7	16,0	23,4	16,3	14,9	9,8											
Суми	5,0	17,5	10,2			План	0	166	190	62	175	Дохід1		Т-3-3																	
Т-3-1						Миколаїв Т-1 Т-2 Т-3 Т-4 Т-5 Використано Везено						Т-1 Донець Одеса Сімферопіль Львів Запоріжжя Полтава Везено План																			
Ресурс-1	Харків	Миколаїв	Київ	Везено	Запас	Ресурс-1	20	0,0	0,3	1,1	3,0	207,60	207,60	Харків	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0									
Ів.-Фр.	0	207,6	588,3	795,9	1000	Ресурс-2	30	5,0	2,0	0,1	0,0	78,84	78,84	Миколаїв	0,0	0,0	26,0	0,0	0,0	0,0	26	26									
Вінниця	0	0,0	0,0	0,0	0	Ціна	54	98	77	33	79	4081,16		Київ	45,0	58,0	0,0	14,0	78,0	30,0	225	225									
Чернігів	0	0,0	0,0	0,0	0	План	26	0	0	14	28	Дохід2		Везено	45	58	26	14	78	30	3743,30										
Суми	1000	0,0	0,0	1000,0	1000	Київ Т-1 Т-2 Т-3 Т-4 Т-5 Використано Везено						Т-2 Донець Одеса Сімферопіль Львів Запоріжжя Полтава Везено План																			
Везено	1000	207,60	588	18056,1		Ресурс-1	20	0,0	0,3	1,1	3,0	588,30	588,30	Харків	12,0	25,0	47,0	25,0	36,0	21,0	168	168									
Витрати1						Ресурс-2	30	5,0	2,0	0,1	0,0	731,54	731,5	Миколаїв	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0									
Т-3-2						Ціна	54	98	77	33	79	16499,00		Київ	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0									
Ресурс-2	Харків	Миколаїв	Київ	Везено	Запас	План	225	0	28	9	24	Дохід3		Везено	12	25	47	25	36	21	2714,00										
Ів.-Фр.	0	79	445	524,1	1500	Заг. дохід (контроль)= 67346						Т-3-5																			
Вінниця	0	0,00	0	0,00	0	заг. дохід						Т-3 Донець Одеса Сімферопіль Львів Запоріжжя Полтава Везено План																			
Чернігів	0	0,0	0,0	0,0	0	13035,25						Харків						24,0	45,0	45,0	0,0	52,0	24,0	190	190						
Суми	1213,7	0,0	286	1500,0	1500	попит слож						Миколаїв						0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0						
Везено	1213,7	78,84	732	17429,9		18824,70						Київ						0,0	0,0	0,0	28,0	0,0	0,0	28,0	28						
Витрати2						Доходи:						Везено						24	45	45	28	52	24	3058,50							
						Харків 46768						ЦФ прибуток						Полит						24	45	45	28	52	24	Витрати5	
						Миколаїв 4081												Т-4 Донець Одеса Сімферопіль Львів Запоріжжя Полтава Везено План													
						Київ 16499												Харків						10	0	0	0	21	31	62	62
						Разом: 67346												Миколаїв						0	9	5	0	0	0	14	14
						Витрати для споживачів												Київ						0	0	0	9	0	0	9	9
						Донецьк 1829,9												Везено						10	9	5	9	21	31	654,10	
						Одеса 2473,4												Полит						10	9	5	9	21	31	Витрати6	
						Сімферопіль 3726,55												Т-5 Донець Одеса Сімферопіль Львів Запоріжжя Полтава Везено План													
						Львів 1788,2												Харків						60	0	62	0	33	20	175	175
						Запоріжжя 2511,2												Миколаїв						0	0	28	0	0	0	28	28,04
						Полтава 726,0												Київ						0	11	0	13	0	0	24	24,04
						Разом: 13035,3												Везено						60	11	90	13	33	20	2865,4	
																		Полит						60	11	90	13	33	20	Витрати7	
																		Замовлення						Донець	Одеса	Сімферопіль	Львів	Запоріжжя	Полтава	Разом	
																		Т-1						45	58	26	14	78	30	251	
																		Т-2						12	25	47	25	36	21	166	
																		Т-3						24	45	45	28	52	24	218	
																		Т-4						10	9	5	9	21	31	85	
																		Т-5						60	11	90	13	33	20	227	

В умовах проблемного ресурсного забезпечення ця умова привела до погіршення значення ЦФ (18824,7), бо збільшені загальні транспортні витрати склали величину майже 48,5 тис. гр. од.

### Висновок

Комплексне застосування різних оптимізаційних моделей дозволяє одночасно обчислити кілька окремих, логічно й технологічно пов'язаних між собою задач, щоб найкраще наблизити модель для реальної ділової ситуації. Наведений приклад, що складається з трьох модулів – постачання, виробництво і споживання – аналогічним чином можна доповнити модулями зберігання на проміжних складах чи для врахування різних способів доставки замовлених продуктів.

### Задача 3.12. Задача «робити чи купувати»

#### Загальні відомості

Відома з історії організація праці, починаючи з «натурального господарства» у віддалених поселеннях, коли окреме підприємство вимушене одночасно із виготовленням основної продукції витрачати ресурси для забезпечення себе допоміжними продуктами та послугами, як правило, невисокої якості.

Скажімо, металургійний комбінат поряд з основними цехами (доменний, мартенівський, прокатний) має «головний біль» у вигляді низки допоміжних цехів з підготовки, транспортування та зберігання сировини та готової продукції, виготовлення інструментів та запасних частин, а також власних підрозділів з наукових та лабораторних досліджень, медичного обслуговування та харчування працівників тощо. Ця друга частина структури підприємства вимушено гальмувала інтенсивний розвиток основного виробництва з відповідними негативними наслідками для підприємства, його працівників, галузі й, зрозуміло, економічного потенціалу держави.



У сучасних умовах жорсткої конкуренції, розвиненої економічної інтеграції, кооперації та спеціалізації підприємства змушені змінювати структуру власного виробництва шляхом визначення для себе пріоритетних напрямків діяльності, залишаючи інші необхідні напрямки на використання технологій чи продукції партнерів. Навіть у сучасній армії харчування особового складу чи його медичне обслуговування тепер доручено відповідним професійним організаціям за відповідним замовленням.

Такий стиль сучасної організації праці називається аутсорсінг (outsourcing), коли для здійснення певних дій застосовують джерела, що знаходяться поза області основної діяльності.

Отже, у світі виникла й активно розвивається сучасна організаційна практика «Робити чи купувати» (Make or buy), за якою менеджмент підприємства визначає:

- що згідно заданого замовлення краще **зробити** власними зусиллями, користуючись наявними обмеженими ресурсами, передовим досвідом, кадровим потенціалом та науково-практичними здобутками, а
- що із зазначеного замовлення доручити зробити іншим професійним виконавцям, **купуючи** їх продукцію.

В результаті такої організації роботи щодо оперативного й якісного виконання замовлення підприємство визначає й зосереджує основну увагу на порівняно вузькому секторі виробничої діяльності задля збереження конкурентоспроможності власної продукції (товарів чи послуг) й відповідного місця на ринку.

Особливо цей підхід характерний для виробництва складної й наукоємної продукції, це: транспортні засоби (літаки, судна, автомобілі), промислова та побутова електроніка, машинобудування для енергетики, а також у сфері спеціальних послуг: медичних, освітніх, фінансових, транспортних тощо.

#### Приклад.

Підприємство має запаси  $m$  видів ресурсів, які використовуються для виготовлення замовлених  $n$  видів продукції (виробів, послуг).

#### Задано:

для підприємства:

- замовлення на виготовлення готової продукції
- запаси ресурсів
- норми питомих витрат ресурсів на виготовлення одиниці готової продукції
- питомі витрати коштів на виготовлення одиниці готової продукції

для  $k$  партнерів:

- вартість (ціна) одного виробу
- пропозиція (квота).

Якщо ресурсів у підприємства достатньо для задоволення замовлення, що на практиці майже завжди, воно власними зусиллями виконує усю роботу, якщо ж ні, тоді, як правило, певні вироби змушено купувати у сторонніх постачальників (партнерів) за відповідними цінами, кінцева мета – мінімізувати загальні витрати коштів на задоволення замовлення, які складаються з двох частин: внутрішні (на виготовлення) та зовнішні (на купівлю).

#### Початкові дані:

- кількість видів ресурсів:  $m = 4$ ,
- кількість видів продуктів:  $n = 8$ ,
- кількість партнерів:  $k = 3$ .

#### **Робити** (для підприємства)

- замовлення ( $S$ )
- матриця питомих витрат ресурсів  $R$  (розміром  $4 \times 8$ )
- запаси ресурсів ( $Z$ )
- питомі витрати коштів ( $C$ ).

### Купувати (для 3-х партнерів)

- ціни (матриця  $C$  розміром  $3 \times 8$ )
- пропозиції (матриця  $P$  розміром  $3 \times 8$ ).

### Задача оптимізації

I. Знайти вектор  $X = (x_1, \dots, x_8)$ , де  $x_j$  – кількість виготовленої продукції  $j$ -го типу,  $j = \overline{1,8}$  та

матрицю  $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{18} \\ \dots & y_{ij} & \dots \\ y_{31} & \dots & y_{38} \end{pmatrix}$ , де  $y_{ij}$  – кількість купленої у  $i$ -го партнера ( $i = \overline{1,3}$ ) продукції  $j$ -го типу, щоб

II. ЦФ: Загальні витрати коштів  $G = CX + VY = \sum_{j=1}^8 c_j x_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^8 v_{ij} y_{ij} \rightarrow \min$

III. за обмежень:

по запасам ресурсів:  $\sum_{j=1}^8 r_{ij} x_j \leq z_i, i = \overline{1,3}$  (використано  $\leq$  запас)

по замовленнях:  $x_j + \sum_{i=1}^3 y_{ij} = s_j, j = \overline{1,8}$  (зробили + купили = замовлено)

по пропозиціях партнерів:  $y_{ij} \leq p_{ij}$   
та граничних умов: усі  $x_j$  та  $y_{ij} \geq 0$ .

### Порядок роботи

Увести початкові дані (**робити**):

- рядок замовлення ( $S$ ),
- матрицю витрат ресурсів ( $R$ ),
- рядок витрат коштів ( $C$ ),
- стовпець запасів ( $Z$ )

Робити	П-1	П-2	П-3	П-4	П-5	П-6	П-7	П-8	
Замовлення	12	5	8	45	20	10	4	2	Запас
Ресурс -1	0,1	1,2	2,1	0,3	0,6	1,1	5,1	2,8	80
Ресурс -2	2,9	3,9	3,4	5	3,7	5,5	9,5	12,2	120
Ресурс -3	3,3	2,3	8,9	10,2	5,4	8,4	9,1	0,02	75
Ресурс -4	0,9	0,2	1,2	1,5	2,4	6,2	3,2	3,9	25
Витрати	23	14	78	24	60	40	10	25	

Увести початкові дані (**купити**):

- матрицю вартостей (цін) партнерів ( $V$ )
- матрицю пропозицій партнерів ( $P$ )

Купувати									
Варт-1	21	18	80	30	64	50	12	28	
Варт-2	25	16	79	35	70	48	14	24	
Варт-3	29	20	100	40	78	49	19	29	
Проп-1	1	4	3	5	10	3	1	6	
Проп-2	5	2	2	10	50	5	2	1	
Проп-3	10	2	8	50	100	20	8	5	

Сформувати таблицю для обчислень на підприємстві (**робити**):

- план виготовлення ( $X$ ),
- витрати коштів та їх сума ( $CX$ )

План (X)									
Витрати	0	0	0	0	0	0,0	0	0	0,00 Разом

- витрати ресурсів (Використано,  $\sum_{j=1}^8 r_{ij}x_j$ )
- залишки ресурсів (Запаси - Використано)

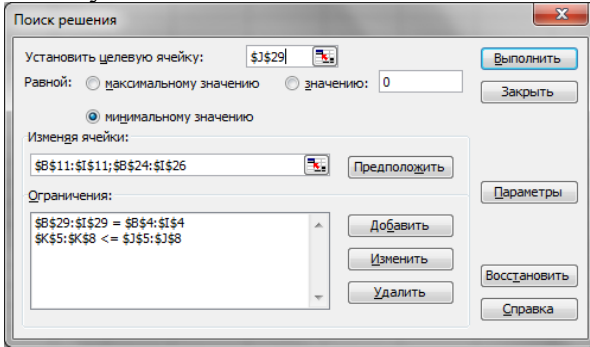
Запас	Витрачено	Залишки
80	0,0	80,0
120	0,0	120,0
75	0,0	75,0
25	0,0	25,0

Сформуванати таблицю для обчислень для постачальників (*купити*):

- матриці елементів  $v_{ij}y_{ij}$ , сум по її рядках і загальної суми ( $VY$ )
- Обчислити значення ЦФ ( $G = CX + VY$ )

План (Y)										
Пост-1										0
Пост-2										0
Пост-3										0
Всього куп.	0	0	0	0,0	0	0,00	0	0	0,00	Разом
Разом:	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	ЦФ

Запуск програми *Поиск решения*, заповнити поля її вікна, кнопкою *Параметры* визначити лінійну модель й невід'ємні значення невідомих, знайти розв'язок прямої та двоїстої задач



Відформатувати табличний документ.

Аналіз отриманого результату, модифікація математичної й табличної моделі, звіт, рекомендації до прийняття рішення.

Початкові дані:

Роботи	П-1	П-2	П-3	П-4	П-5	П-6	П-7	П-8	
Замовлення	12	5	8	45	20	10	4	2	Запас
Ресурс -1	0,1	1,2	2,1	0,3	0,6	1,1	5,1	2,8	80
Ресурс -2	2,9	3,9	3,4	5	3,7	5,5	9,5	12,2	120
Ресурс -3	3,3	2,3	8,9	10,2	5,4	8,4	9,1	0,02	75
Ресурс -4	0,9	0,2	1,2	1,5	2,4	6,2	3,2	3,9	25
Витрати	23	14	78	24	60	40	10	25	
Купувати									
Вар-1	21	18	80	30	64	50	12	28	
Вар-2	25	16	79	35	70	48	14	24	
Вар-3	29	20	100	40	78	49	19	29	
Проп-1	1	4	3	5	10	3	1	6	
Проп-2	5	2	2	10	50	5	2	1	
Проп-3	10	2	8	50	100	20	8	5	

Результат:

*Робити:*

План (X)	0	5,0	0	3,79	0	2,95	0	0		
Витрати	0,0	70,0	0,0	91,0	0,0	118,1	0,0	0,0	279,17	Разом
Н-варт.	4,2	0,0	4,2	0,0	0,2	0,0	4,5	3,4		

### Купити:

План (Y)										
Пост-1	12	0	0	41,21	20,00	0	4,0	0	2816,20	
Пост-2	0	0	8,0	0	0	7,05	0	2,0	1018,25	
Пост-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Всього куп.	12	0	8	41,2	20	7,05	4	2	3834,44	Разом
Н-вартості										
Пост-1	0,0	2,7	1,0	0,0	0,0	2,0	0,0	4,0		
Пост-2	4,0	0,7	0,0	5,0	6,0	0,0	2,0	0,0		
Пост-3	8,0	4,7	21,0	10,0	14,0	1,0	7,0	5,0		
Разом:	12	5	8	45	20	10	4	2	4113,61	ЦФ
Т-ціна (замовл.)	21,0	15,3	79,0	30,0	64,0	48,0	12,0	24,0		

### Аналіз отриманого результату

#### Пряма задача

Знайдено два плани: випуску (X) та купівлі (Y), відповідні витрати: 279,17 та 3834,44 та їх сума: 4113,61 гр. од. (ЦФ). Замовлення задовольняється:

- підприємством (2-ге, 5 од.),
- купівлею (1-ше, 12 од., 3-тє, 8 од., 5-те, 20 од., 7-ме, 4 од., 8-ме, 2 од.) та
- комбіновано (4-те, 3,8 + 41,2 од., 6-те, 2,95 + 7,05 од.)

Також визначено витрати ресурсів та їх залишки. Ясно, що виробнича програма обмежується дефіцитом 3-го та 4-го ресурсів – збільшення їх запасів приведе до зменшення загальних витрат.

Запас	Витрачено	Залишки
80	10,4	69,6
120	54,7	65,3
75	75,0	0,0
25	25,0	0,0

#### Двоїста задача

Нормовані вартості стосуються шуканих невідомих (X, Y), це додатні числа, що вказують на збільшення загальних витрат (ЦФ) з-за змушеного відхилення від оптимального плану (у бік збільшення) щодо випуску чи купівлі одиниці продукту. Так, вимушений випуск одиниці 1-го чи 3-го продукту збільшить ЦФ на 4,2 гр. од., а купівля 1-го продукту у 3-го постачальника приведене до збільшення ЦФ на 8 гр. од., а 3-го – на 21 гр. од.

Тіньові ціни оцінюють ресурсні обмеження та замовлення.

Для ресурсів це від'ємні числа, що вказують на зменшення значення ЦФ при збільшенні запасу на 1 (-0,5 та -0,62), структура плану залишиться незмінною, якщо запаси збільшити на 99,7 та 22,9 од. відповідно.

Збільшивши запас 4-го ресурсу на 23 од. ( $25 + 23 = 48$ ) зменшимо значення ЦФ на приблизно  $-0,62 * 23 \approx 14$  гр. од. (4099,51 гр. од.), будуть отримані нові оцінки ресурсних запасів, де «цінність» 4-го ресурсу зменшується (замість 0,62 буде 0,13). Якщо тепер збільшити цей запас ще на 8 од. й довести його до 56 од, буде отримано новий план з ЦФ  $\approx 4098,6$  гр. од., де 4-ий ресурс вже недефіцитний, а «цінність» 3-го ресурсу та величина допустимого збільшення на рівні 1.

Запас	Витрачено	Залишки	Т-ціна	Доп. зб.
80	10,4	69,6	0	1E+30
120	54,7	65,3	0	1E+30
75	75,0	0,0	-0,50	99,7
25	25,0	0,0	-0,62	22,9

Т-ціна	Доп. зб.
0,00	1E+30
0,00	1E+30
-0,86	0,18
-0,13	7,36



Наступні збільшення запасів приведуть до зміни структури ресурсного забезпечення, їх оцінок та планів  $X$  та  $Y$ , отже, шанс до зменшення ЦФ за рахунок збільшення запасів ресурсів залишається.

Для замовлення – це додатні числа, що вказують на збільшення загальних витрат при збільшенні замовлення на 1. Найбільш витратним виявилось 3-тє замовлення (79 гр. од.):

Разом:	12	5	8	45	20	10	4	2	4113,61	ЦФ
Т-ціна (замовл.)	21,0	15,3	79,0	30,0	64,0	48,0	12,0	24,0		

### Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов

#### Умова 1.

Предмети замовлення неподільні, дії: увести обмеження на дві групи невідомих – цілого типу, результат (пряма задача).

План  $X$  у цілих числах:

План (X)	0	2	0	4	0	3	0	0
----------	---	---	---	---	---	---	---	---

у дійсних числах:

План (X)	0	5,0	0	3,79	0	2,95	0	0
----------	---	-----	---	------	---	------	---	---

З порівняння двох планів ще раз можна впевнитися щодо хибності округлення результату у дійсних числах.

План  $Y$  у цілих числах:

План (Y)									
Пост-1	12	0	0	41	20	0	4	0	
Пост-2	0	3	8	0	0	7	0	2	
Пост-3	0	0	0	0	0	0	0	0	

ЦФ = 4118 гр. од.

#### Умова 2.

Прийнято рішення купувати лише у 2-го постачальника, дії: у рядку Разом змінити формулу суми на: План (X) + План (Y) пост-2, результат:

План (X)	0	0	0	2,7	8,7	0	0	0		
Витрати	0,0	0,0	0,0	65,9	522,0	0,0	0,0	0,0	587,91	Разом
Н-варт.	4,2	0,0	4,2	0,0	0,2	0,0	4,5	3,4		

План (Y)										
Пост-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	
Пост-2	12,0	5,0	8,0	42,3	11,3	10	4	2	3865,87	
Пост-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0	
Всього куп.	12	5	8	42,3	11,3	10	4	2	3865,87	Разом
Разом:	12	5	8	45	20	10	4	2	4453,78	ЦФ

### Задача 3.13. Розподіл однорідних ресурсів

#### Постановка задачі

На відміну від одного ресурсу в класичній транспортній задачі однорідні ресурси мають єдину природу й взаємозамінні, ця замінність узгоджується й визначається певним ваговим коефіцієнтом, завдяки якому усі однорідні ресурси зводяться до певного реального чи абстрактного зваженого ресурсу, який надалі розподіляється згідно попиту.

Приклади однорідних ресурсів: сировина з різних покладів, паливо, фахівці різного рангу чи кваліфікації, спеціалізована техніка різного типу, будівельні матеріали, харчові продукти тощо.

Отже,  $m$  постачальників мають запаси певних однорідних ресурсів (продуктів, товарів, послуг) в одному вимірі,  $n$  споживачів мають попит на них у іншому вимірі. Виникає потреба задовольнити попит найкращим чином в залежності від вибраного критерію оптимізації.

### Приклад

Шляхове господарство міста має 5 снігозбиральних машин різних типів, які треба найкращим чином розподілити у місті для чищення від снігу визначених 10 досить специфічних ділянок: тротуари, магістральні шляхопроводи, двори житлових будинків, злітні смуги, під'їзди до торговельних, навчальних чи медичних закладів, вокзалів, АЗС тощо.



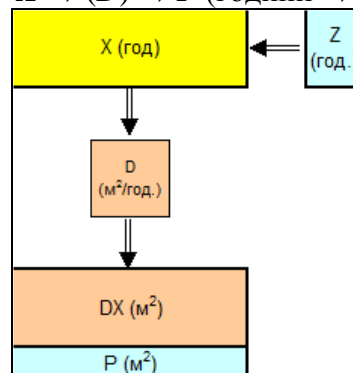
10 замовників на цю послугу визначають свій попит у площі території ( $m^2$ ) й, відповідно, треба визначити потоки у цьому ж вимірі (наприклад, значення потоку  $x_{3,4} = 250$  означає, що 3-тя машина на 4-му місці роботи очистить  $250 m^2$  площі), зате пропозиція постачальників цієї послуги вимірюється в годинах роботи кожної машини будь-де.

Для узгодження цих двох різних показників для кожного типу машин визначається продуктивність у  $m^2/год$ , яка не залежить від місця використання машини, цей показник утворює **вектор-стовпець** вагових коефіцієнтів  $D$  з 5 елементів. Вартість роботи кожної машини на кожній ділянці у грошовому вимірі визначається відповідною матрицею  $C$  розміром  $5 \times 10$ .

Елемент  $x_{ij}$  шуканого плану розподілу машин (матриці  $X$  розміром  $5 \times 10$ ) визначає розмір площі ( $m^2$ ), яку  $i$ -та машина очистить на  $j$ -ій ділянці.

Отже, однорідним ресурсом, що розподіляється, є **робочий час машин**, через ваговий коефіцієнт продуктивності його запас перетворюється в об'єм роботи (в  $m^2$ ), який визначається для задоволення попиту у цьому вимірі.

Мнемосхема перетворення:  $Z \rightarrow X \rightarrow (D) \rightarrow P$  (години  $\rightarrow m^2$ ):



В задачі використовується 4 матриці: вартості ( $C$ ), часових потоків прямої задачі ( $X$ ), об'ємів роботи ( $XD$ ), нормованих вартостей двоїстої задачі ( $S$ ).

### Початкові дані

▪ матриця вартостей машино-годин ( $C$ ), пропозиція (годин)  $Z$ , попит ( $m^2$ )  $P$ , вектор продуктивностей ( $m^2/год.$ )  $D$ :

Вартість (грн/год)	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	M-7	M-8	M-9	M-10	Пропозиція (год.)	Продуктивність ( $m^2/год.$ )
Машина Максі	0,25	0,6	0,12	1,1	1,6	0,9	1,1	0,7	2,0	1,4	100	50
Машина Міді	2,5	2,3	5	4,2	6,2	7,1	3,2	2,5	3,0	3,5	56	25
Машина Міні	5	6,2	3,8	7,5	6,6	5,5	4,9	6,1	4,7	3,9	45	10
Бульдозер	0,2	0,9	1,1	2,2	0,6	0,8	1,0	2,1	1,3	2,7	30	250
Скрепер	1,0	0,3	2,2	5	1,4	1,6	2,0	2,4	0,7	0,8	12	350
Попит ( $m^2$ )	1250	260	39	1480	300	800	140	6000	1350	290		

### Задача оптимізації

I. Знайти матрицю розподілу часового машино-ресурсу

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,10} \\ \dots & x_{ij} & \dots \\ x_{5,1} & \dots & x_{5,10} \end{pmatrix} \text{ де } x_{ij} - \text{кількість годин } i\text{-ої машини, витрачених на } j\text{-ій ділянці, щоб}$$

II. ЦФ Загальні витрати (гр. од.)  $V = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$

III. за обмежень:

1) для споживачів:  $\sum_{i=1}^5 d_i x_{ij} = p_i$  (Виконано = Попит, в м<sup>2</sup>)

2) для постачальників:  $\sum_{j=1}^{10} x_{ij} \leq z_i$  (Використано  $\leq$  Пропозиція, в годинах)

та граничних умов: усі  $x_{ij} \geq 0$ .

### Порядок роботи

1. Увести початкові дані: матрицю вартостей ( $C$ ), рядок попиту ( $P$ ), стовпець часових пропозицій ( $Z$ ), стовпець продуктивностей ( $D$ )

2. Сформувати таблицю 2 для обчислень (у годинах): плану розподілу машино-ресурсів ( $X$ ), значень стовпця Використано (ліва частина обмеження 2:  $\sum_{j=1}^{10} x_{ij}$ ), значень стовпця За-

лишки (Пропозиція - Використано), значення ЦФ ( $CX$ )

3. Сформувати таблицю 3 для обчислень (у м<sup>2</sup>): матриці  $DX$  та сум по її стовпцях (ліва частина обмеження 1:  $\sum_{i=1}^5 d_i x_{ij}$ )

4. Запуск програми *Поиск решения*, заповнити поля, кнопкою *Параметры* визначити лінійну модель й невід'ємні значення невідомих, знайти розв'язок прямої та двоїстої (таблиця 4) задач

5. Відформатувати табличний документ

6. Зробити аналіз отриманого результату, при необхідності модифікувати математичну й табличну моделі, у звіті визначити рекомендації до прийняття рішень.

### Результат:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Розподіл однорідних машино-годин														
2															
3	Вартість (грн/год)	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	M-7	M-8	M-9	M-10	Пропозиція (год.)	Продуктивність (м <sup>2</sup> /год.)		
4	Машини Максi	0,25	0,6	0,12	1,1	1,6	0,9	1,1	0,7	2,0	1,4	100	50		
5	Машини Мiдi	2,5	2,3	5	4,2	6,2	7,1	3,2	2,5	3,0	3,5	56	25		
6	Машини Мiнi	5	6,2	3,8	7,5	6,6	5,5	4,9	6,1	4,7	3,9	45	10		
7	Бульдозер	0,2	0,9	1,1	2,2	0,6	0,8	1,0	2,1	1,3	2,7	30	250		
8	Скрепер	1,0	0,3	2,2	5	1,4	1,6	2,0	2,4	0,7	0,8	12	350		
9	Попит (м <sup>2</sup> )	1250	260	39	1480	300	800	140	6000	1350	290				
10															
11															
12	Тривалість (год.)	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	M-7	M-8	M-9	M-10	Використано (год.)	Залишки (год.)	Залишки, %	
13	Машини Максi	3,4	0	0,8	0	0	0	0	0	0	0	4,2	95,8	95,8%	
14	Машини Мiдi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	56,0	100,0%	
15	Машини Мiнi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	45,0	100,0%	
16	Бульдозер	4,3	0	0	5,9	1,2	3,2	0,6	14,8	0	0	30,0	0,0	0,0%	
17	Скрепер	0	0,7	0	0	0	0	0	6,6	3,9	0,8	12,0	0,0	0,0%	
18												ЦФ =	69,11		
19															
20	Об'єм роботи (м <sup>2</sup> )	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	M-7	M-8	M-9	M-10	Т-цiна			
21	Машини Максi	170	0	39	0	0	0	0	0	0	0	0			
22	Машини Мiдi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
23	Машини Мiнi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
24	Бульдозер	1080	0	0	1480	300	800	140	3700	0	0	-1,05			
25	Скрепер	0	260	0	0	0	0	0	2300	1350	290	-2,01			
26	Виконано (м <sup>2</sup> )	1250	260	39	1480	300	800	140	6000	1350	290				

## Аналіз отриманого результату

### Пряма задача

Знайдено шукану матрицю X

Тривалість (год.)	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	M-7	M-8	M-9	M-10	Використано (год.)	Залишки (год.)	Залишки, %
Машина Максі	3,4	0	0,8	0	0	0	0	0	0	0	4,2	95,8	95,8%
Машина Міді	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0	56,0	100,0%
Машина Міні	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0	45,0	100,0%
Бульдозер	4,3	0	0	5,9	1,2	3,2	0,6	14,8	0	0	30,0	0,0	0,0%
Скрепер	0	0,7	0	0	0	0	0	6,6	3,9	0,8	12,0	0,0	0,0%
										ЦФ =	69,11		

де вказано оптимальний розподіл часових машино-ресурсів, за яким загальні грошові витрати для задоволення замовлення мінімальні (69,11 гр. од.).

Визначено залишки часових машино-ресурсів, звідки видно, що повністю вичерпані пропозиції (запаси часу) 4-ої та 5-ої машин, 1-ша машина недовантажена, а другу та третю машини взагалі використовувати не вигідно:

Залишки (год.)	%
95,8	96%
56,0	100%
45,0	100%
0,0	0%
0,0	0%

Тож вже зразу можна стверджувати, що ефективність машинного парку треба підвищувати за рахунок збільшення машин 4-го та 5-го типу. Економічний ефект цих пропозицій визначає

### Двоїста задача

T-ціна	Доп. зб.
0	1E+30
0	1E+30
0	1E+30
-1,05	0,68
-2,01	0,49

тінюві ціни наявних часових машино-ресурсів вказують їх умовну «цінність» та граничні значення збільшення їх значень. Так, додаткова одиниця часу бульдозера зменшить ЦФ на 1,05, а скрепера – на 2,01 гр. од. Конкретно – зменшити ЦФ за рахунок, скажімо, скрепера можна лише на величину  $2,01 \cdot 0,49 \approx 1$  і не більше, коли його машино-ресурс складе 12,49 годин. Для подальшого зменшення ЦФ треба повторити розв'язок і знайти нові значення тінювих цін й допустимих збільшень запасів.

Нормовані вартості заданих цін вказують на додаткові витрати з-за неоптимального розподілу машино-ресурсів за вольовим рішенням. Наприклад, якщо скрепер направити на розчищення ділянки M-1 протягом 1 години, загальні витрати зростуть на 1,3 гр. од., а на ділянці M-3 – на 3,4 гр. од. Ці результати корисні для прогнозування додаткових витрат, якщо за певних умов треба здійснити певні економічно необґрунтовані дії.

Нормовані вартості цін	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	M-7	M-8	M-9	M-10
Машина Максі	0,0	0,3	0,0	0,4	1,3	0,5	0,7	0,1	1,6	1,0
Машина Міді	2,4	2,1	4,9	3,9	6,0	6,9	3,0	2,2	2,8	3,3
Машина Міні	5,0	6,1	3,8	7,4	6,5	5,4	4,8	6,0	4,6	3,8
Бульдозер	0,0	0,3	1,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,4	1,7
Скрепер	1,3	0,0	3,4	2,5	1,1	1,0	1,1	0,0	0,0	0,0

## Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов

### Умова 1.

Вирішено придбати 1 «вигідний» скрепер (машина № 5) такої ж продуктивності, відповідно, цей часовий ресурс збільшиться вдвічі, тож якими будуть економічні наслідки цього рішення?

Дії: внести зміни у 5-ту клітинку (замість 12 увести 24) стовпця Пропозиція й повторити процес обчислень.

**Результат:**

Тривалість (год.)	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	M-7	M-8	M-9	M-10	Використано (год.)	Залишки (год.)	%
Машина Максi	0,0	0	0,8	0	0	0	0	0	0	0	0,8	99,2	99%
Машина Мiдi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0	56,0	100%
Машина Мiнi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0	45,0	100%
Бульдозер	5,0	0	0	5,9	1,2	3,2	0,6	0,0	0	0	15,9	14,1	47%
Скрепер	0	0,7	0	0	0	0	0	17,1	3,9	0,8	22,6	1,4	6%
											ЦФ = 62,69		

**Аналіз результату**

Типова помилка: якщо не звертати увагу на показник допустимого збільшення часового ресурсу (0,49) і орієнтуватися лише на тіншову ціну (-2,01 для скрепера), можна б було, здається, очікувати за цим рішенням економію загальних витрат величиною  $12 * 2,01 \approx 24$  й розраховувати на нове значення ЦФ десь на  $69 - 24 \approx 45$  гр. од. Однак, як видно, значення ЦФ зменшилося приблизно лише на 7 гр. од., ( $69,11 - 62,69$ ), тому що при машино-ресурсі у межах  $12,5 \div 23$  тіншова ціна буде іншою, це лише -0,5 (отримано за другим звітом зі стійкості).

**Умова 2.**

Знято умову 1. Прийнято рішення використати 2-гу «невигідну» машину на 100% її потужності. Дії: увести обмеження для 2-ої машини:  $\sum_{j=1}^{10} x_{2j} = z_2$  (Використано = 56 год.).

**Результат:**

Тривалість (год.)	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	M-7	M-8	M-9	M-10	Використано (год.)	Залишки (год.)	
Машина Максi	0	0	0,8	0	0	0	0	0	0	0	0,8	99,2	99,2%
Машина Мiдi	0	10,4	0	0	0	0	0	45,6	0	0	56,0	0,0	0,0%
Машина Мiнi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0	45,0	100,0%
Бульдозер	5,0	0	0	5,9	1,2	3,2	0,6	9,2	0	0	25,1	4,9	16,4%
Скрепер	0	0	0	0	0	0	0	7,3	3,9	0,8	12,0	0,0	0,0%
											ЦФ = 196,11		

Таке вольове рішення привело до збільшення загальних витрат майже втричі (196 проти 63 гр. од.)

**Умова 3.**

Знято умову 2. Прийнято рішення виконати роботу на ділянці M-1 виключно із застосуванням 1-ої машини (Максi). Дії: увести обмеження для M-1:  $d_1 * x_{11} = p_1$  ( $50x_{11} = 1250$ ).

**Результат:**

Тривалість (год.)	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	M-7	M-8	M-9	M-10	Використано (год.)	Залишки (год.)	
Машина Максi	25,0	0	0,8	0	0	0	0	0	0	0	25,8	74,2	74,2%
Машина Мiдi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0	56,0	100,0%
Машина Мiнi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0	45,0	100,0%
Бульдозер	0,0	0	0	5,9	1,2	3,2	0,6	14,8	0	0	25,7	4,3	14,4%
Скрепер	0	0,7	0	0	0	0	0	6,6	3,9	0,8	12,0	0,0	0,0%
											ЦФ = 73,64		
Об'єм роботи (м <sup>2</sup> )	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	M-7	M-8	M-9	M-10	Використано (м <sup>2</sup> )	Залишки (м <sup>2</sup> )	Т-ціна
Машина Максi	1250	0	39	0	0	0	0	0	0	0	1289	3711	0
Машина Мiдi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1400	0
Машина Мiнi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	450	0
Бульдозер	0	0	0	1480	300	800	140	3700	0	0	6420	1080	-1,05
Скрепер	0	260	0	0	0	0	0	2300	1350	290	4200	0	-2,01
Виконано (м <sup>2</sup> )	1250	260	39	1480	300	800	140	6000	1350	290			

**Умова 4.**

Прийнято рішення використати усі запаси із перевищенням виконаної роботи щодо попиту.

**Результат:**

Попит (м <sup>2</sup> )	1250	260	39	1480	300	800	140	6000	1350	290	
Тривалість (год.)	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	M-7	M-8	M-9	M-10	Використано (год.)
Машина Максi	0	0	100,0	0	0	0	0	0	0	0	100,0
Машина Мiдi	0	56	0	0	0	0	0	0	0	0	56,0
Машина Мiнi	0	0	45,0	0	0	0	0	0	0	0	45,0
Бульдозер	5,4	0	0	5,9	1,2	3,2	0,6	13,8	0	0	30,0
Скрепер	0	0	0	0	0	0	0	7,3	3,9	0,8	12,0
											ЦФ = 379,55
Об'єм роботи (м <sup>2</sup> )	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	M-7	M-8	M-9	M-10	
Машина Максi	0	0	5000	0	0	0	0	0	0	0	0
Машина Мiдi	0	1400	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Машина Мiнi	0	0	450	0	0	0	0	0	0	0	0
Бульдозер	1340	0	0	1480	300	800	140	3440	0	0	0
Скрепер	0	0	0	0	0	0	0	2560	1350	290	0
Виконано (м <sup>2</sup> )	1340	1400	5450	1480	300	800	140	6000	1350	290	0
Вик - Попит	90	1140	5411	0	0	0	0	0	0	0	0



### Задача 3.14. Розподіл пропорційних ресурсів

#### Постановка задачі

Схожі за функціями ресурси називають пропорційними, якщо параметри властивостей одного з ресурсів (для простоти – першого) щодо групи споживачів вважати еталонними (базовими), а аналогічні параметри усіх інших ресурсів – пропорційними еталонним, цю пропорційність задають певним коефіцієнтом (індексом). Таким чином формується матриця вагових коефіцієнтів  $D$ , яка надалі застосовується для формування матриці невідомих ( $X$ ).

#### Приклад

Підприємство має 5 транспортних засобів (машин) різних типів (вантажівки на 5, 10 та 20 т, всюдихід та вантажівка, обладнана підйомним краном) у заданій кількості, які треба найкращим чином розподілити серед 10 специфічних споживачів для задоволення їх попиту для роботи на специфічних ділянках (гори, ліс, болото, швидкісна магістраль, бездоріжжя, кар'єр, місто, територія комбінату, будівельна ділянка, комбінована місцевість). Кожна машина має моторесурс (в годинах безперервної роботи), що розподіляється серед споживачів, які визначають свій попит у ваговому вимірі (т). Згідно часових машиноресурсів треба визначити матрицю часових потоків  $X$ , наприклад, значення потоку  $x_{3,4} = 5$  означає, що 3-тя машина перевозить вантаж 4-му споживачу протягом 5 годин. Для узгодження різних показників постачальників (год.) і споживачів (т) для кожного типу маши-

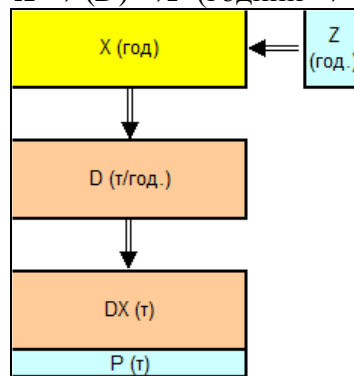
ни, що має певну вантажопідйомність ( $t$ ), визначається її потенціал ( $t$ ) за зміну із врахуванням їх кількості, який не залежить від місця використання машини, цей показник утворює **матрицю** вагових коефіцієнтів  $D$  розміром  $5 \times 10$  елементів.

Перша машина вважається базовим ресурсом, у заданому векторі-стовпці її індекс 0, у матриці  $D$  перший рядок – це коефіцієнти базової машини, усі інші – знаходять обчисленнями згідно індексів. Вартість роботи кожної машини на кожній ділянці у грошовому вимірі визначається відповідною матрицею цін  $C$  розміром  $5 \times 10$ .

Елемент  $x_{ij}$  шуканого плану розподілу машин (матриці  $X$  розміром  $5 \times 10$ ) визначає тривалість роботи (год.)  $i$ -ої машини на  $j$ -ій ділянці.

Отже, пропорційним ресурсом є запаси **робочого часу кожної машини** ( $Z$ ), які через вагові коефіцієнти матриці  $D$  (в  $t/\text{год.}$ ) перетворюються й розподіляються для задоволення попиту  $P$  (в  $t$ ).

Мнемосхема перетворення:  $Z \rightarrow X \rightarrow (D) \rightarrow P$  (години  $\rightarrow t$ ):



В задачі використовується 5 матриць: вартості ( $C$ ), потенціалів ( $D$ ), часових потоків прямої задачі ( $X$ ), вагових потоків ( $XD$ ), нормованих вартостей двоїстої задачі ( $S$ ).

### Порядок роботи

1. Увести початкові дані: матрицю вартостей ( $C$ ), рядок попиту ( $P$ ), стовпець часових пропозицій ( $Z$ )
2. Увести стовпець індексів і коефіцієнти базової машини, а далі розрахувати інші елементи таблиці 2 – матриці продуктивностей ( $D$ )
3. Сформувані таблицю 3 для обчислень (у годинах): плану розподілу машино-ресурсів ( $X$ ), значень стовпця Використано (ліва частина обмеження 2:  $\sum_{j=1}^{10} x_j$ ), обчислити значення стовпця Залишки (Пропозиція - Використано), значення ЦФ ( $CX$ )
4. Сформувані таблицю 4 для обчислень (у  $t$ ): матрицю  $DX$  та суми по її стовпцях (ліва частина обмеження 1:  $\sum_{i=1}^5 d_{ij} x_{ij}$ )
5. Запуск програми Поиск решения, заповнити поля, кнопкою Параметри визначити лінійну модель й невід’ємні значення невідомих, знайти розв’язок прямої та двоїстої (таблиця 5) задач
6. Відформатувати табличний документ
7. Аналіз отриманого результату, модифікація математичної й табличної моделі, звіт, рекомендації до прийняття рішення.

### Початкові дані

- матриця вартостей машино-годин ( $C$ ), кількість машин ( $K$ ), тривалість змін ( $T$ ), пропозиція (годин)  $Z$ , де  $Z = KT$ , попит ( $t$ )  $P$ , матриця продуктивностей ( $t/\text{год.}$ )  $D$ :

Вартість (грн/год)	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4	Д-5	Д-6	Д-7	Д-8	Д-9	Д-10	М-ресурс (год.)		
											Пропозиція (годин)	Кількість	Трив. зміни (год.)
M-1	0,25	0,6	0,12	1,1	1,6	0,9	1,1	0,7	2,0	1,4	14	2	7
M-2	2,5	2,3	5	4,2	6,2	7,1	3,2	2,5	3,0	3,5	9	1	9
M-3	5,0	6,2	3,8	7,5	6,6	5,5	4,9	6,1	4,7	3,9	5	1	5
M-4	0,2	0,9	1,1	2,2	0,6	0,8	1,0	2,1	1,3	2,7	8	1	8
M-5	1,0	0,3	2,2	5,0	1,4	1,6	2,0	2,4	0,7	0,8	14	2	7
Попит (т)	90	60	39	34	30	44	14	40	35	29			
Продуктивність, т/год.	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4	Д-5	Д-6	Д-7	Д-8	Д-9	Д-10	Індекс		
M-1	5,0	3,5	4,1	4,9	5,0	2,8	3,6	4,8	4,1	5,0	0		
M-2	10,0	7,0	8,2	9,8	10,0	5,6	7,2	9,6	8,2	10,0	2		
M-3	20,0	14,0	16,4	19,6	20,0	11,2	14,4	19,2	16,4	20,0	4		
M-4	15,5	10,9	12,7	15,2	15,5	8,7	11,2	14,9	12,7	15,5	3,1		
M-5	19,5	13,7	16,0	19,1	19,5	10,9	14,0	18,7	16,0	19,5	3,9		

### Задача оптимізації

I. Знайти матрицю розподілу часового машино-ресурсу

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1,10} \\ \dots & x_{ij} & \dots \\ x_{5,1} & \dots & x_{5,10} \end{pmatrix} \text{ де } x_{ij} \text{ – кількість годин } i\text{-ої машини, витрачених на } j\text{-ій ділянці, щоб}$$

II. ЦФ Загальні витрати (гр. од.)  $V = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$

III. за обмежень:

1) для споживачів:  $\sum_{i=1}^5 d_{ij} \cdot x_{ij} = p_i$  (Виконано = Попит, в т)

2) для постачальників (год.):  $\sum_{j=1}^{10} x_{ij} \leq z_i$  (Використано  $\leq$  Пропозиція, в годинах)

та граничних умов: усі  $x_{ij} \geq 0$ .

### Результат

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1	Розподіл пропорційних ресурсів (машино-годин)														
2		Ділянки роботи										М-ресурс (год.)			
3	Вартість (грн/год)	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4	Д-5	Д-6	Д-7	Д-8	Д-9	Д-10	Пропозиція (годин)	Кількість	Трив. зміни (год.)	
4	M-1	0,25	0,6	0,12	1,1	1,6	0,9	1,1	0,7	2,0	1,4	14	2	7	
5	M-2	2,5	2,3	5	4,2	6,2	7,1	3,2	2,5	3,0	3,5	9	1	9	
6	M-3	5,0	6,2	3,8	7,5	6,6	5,5	4,9	6,1	4,7	3,9	5	1	5	
7	M-4	0,2	0,9	1,1	2,2	0,6	0,8	1,0	2,1	1,3	2,7	8	1	8	
8	M-5	1,0	0,3	2,2	5,0	1,4	1,6	2,0	2,4	0,7	0,8	14	2	7	
9	Попит (т)	90	60	39	34	30	44	14	40	35	29				
10															
11	Продуктивність, т/год.	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4	Д-5	Д-6	Д-7	Д-8	Д-9	Д-10	Індекс			
12	M-1	5,0	3,5	4,1	4,9	5,0	2,8	3,6	4,8	4,1	5,0	0			
13	M-2	10,0	7,0	8,2	9,8	10,0	5,6	7,2	9,6	8,2	10,0	2			
14	M-3	20,0	14,0	16,4	19,6	20,0	11,2	14,4	19,2	16,4	20,0	4			
15	M-4	15,5	10,9	12,7	15,2	15,5	8,7	11,2	14,9	12,7	15,5	3,1			
16	M-5	19,5	13,7	16,0	19,1	19,5	10,9	14,0	18,7	16,0	19,5	3,9			
17															
18															
19	Тривалість (год.)	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4	Д-5	Д-6	Д-7	Д-8	Д-9	Д-10	Використано (год.)	Залишки (год.)	Залишки, %	
20	M-1	4,5	0	9,5	0	0	0	0	0	0	0	14,0	0,0	0,0%	
21	M-2	0	0	0	0	0	0	0	3,2	0	0	3,2	5,8	64,1%	
22	M-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0	5,0	100,0%	
23	M-4	4,4	0	0	2,2	0,1	0	1,3	0	0	0	8,0	0,0	0,0%	
24	M-5	0	4,4	0	0	1,4	4,0	0	0,5	2,2	1,5	14,0	0,0	0,0%	
25												ЦФ =	31,11		
26															
27	Об'єм роботи (т)	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4	Д-5	Д-6	Д-7	Д-8	Д-9	Д-10				
28	M-1	22,4	0	39	0	0	0	0	0	0	0				
29	M-2	0	0	0	0	0	0	0	31	0	0				
30	M-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
31	M-4	67,6	0	0	34	2,3	0	14,0	0	0	0				
32	M-5	0	60	0	0	27,7	44	0	9	35	29				
33	Виконано (т)	90	60	39	34	30	44	14	40	35	29				



## Аналіз отриманого результату

### Пряма задача

Знайдено шукану матрицю X

Тривалість (год.)	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4	Д-5	Д-6	Д-7	Д-8	Д-9	Д-10	Використано (год.)	Залишки (год.)	Залишки, %
М-1	4,5	0	9,5	0	0	0	0	0	0	0	14,0	0,0	0,0%
М-2	0	0	0	0	0	0	0	3,2	0	0	3,2	5,8	64,1%
М-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0	5,0	100,0%
М-4	4,4	0	0	2,2	0,1	0	1,3	0	0	0	8,0	0,0	0,0%
М-5	0	4,4	0	0	1,4	4,0	0	0,5	2,2	1,5	14,0	0,0	0,0%
										ЦФ =	31,11		

де вказано оптимальний розподіл часових машино-ресурсів, за яким загальні грошові витрати для задоволення замовлення мінімальні (31,11 гр. од.).

Визначено залишки часових машино-ресурсів, звідки видно, що повністю вичерпані пропозиції (запаси часу) 1-ої, 4-ої та 5-ої машин, друга машина недовантажена, а третю взагалі використовувати не вигідно. Тож вже зразу можна стверджувати, що ефективність машинного парку треба підвищувати за рахунок збільшення «вигідних» машин: 1, 4, 5 типів. Економічний ефект цих пропозицій визначає

### Двоїста задача

Тіньові ціни наявних машино-ресурсів вказують умовну «цінність» машин та граничні значення збільшення їх значень. Так, додаткова година машини М-1 зменшить ЦФ на 0,6, а М-4 та М-5 – на 2,5 гр. од. Збільшувати часовий машино-ресурс «вигідних» машин на визначену величину: 5,5; 1,8; 1,7 відповідно.

Нормовані вартості заданих цін (5-та матриця) вказують на додаткові витрати з-за неоптимального розподілу машино-ресурсів. Наприклад, якщо машину М-2 буде направлено на ділянку Д-1 протягом 1 години, загальні витрати зростуть на 0,8 гр. од., а на ділянці Д-3 – на 3,5 гр. од. Ці результати корисні для прогнозування додаткових витрат, якщо за певних умов треба здійснити певні економічно необґрунтовані дії.

Нормовані вартості витрат	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4	Д-5	Д-6	Д-7	Д-8	Д-9	Д-10
М-1	0,0	0,5	0,0	0,2	1,2	0,5	0,6	0,1	1,8	1,2
М-2	0,8	0,9	3,5	1,2	4,2	5,0	1,0	0,0	1,4	1,8
М-3	1,5	3,4	0,9	1,5	2,6	1,3	0,4	1,1	1,4	0,5
М-4	0,0	1,2	1,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,7	1,3	2,6
М-5	0,1	0,0	1,8	1,6	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0

## Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов

### Умова 1.

Вирішено максимально зменшити загальні витрати за рахунок машини М-4, для цього треба збільшити її часовий ресурс на 1,8 годин. Дії: внести зміни у клітинку N7 (замість 8 увести 9,8) стовпця Трив. зміни й повторити процес обчислень, включаючи отримання нових двоїстих оцінок. Очікуване значення ЦФ:  $31,11 - (-2,5) \cdot 1,8 \approx 27$ .

Результат:

Тривалість (год.)	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4	Д-5	Д-6	Д-7	Д-8	Д-9	Д-10	Використано (год.)	Залишки (год.)	Залишки, %
М-1	4,5	0	9,5	0	0	0	0	0	0	0	14,0	0,0	0,0%
М-2	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0	0,5	8,5	94,8%
М-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0	5,0	100,0%
М-4	4,4	0	0	2,2	1,9	0	1,3	0	0	0	9,8	0,0	0,0%
М-5	0	4,4	0	0	0,0	4,0	0	1,9	2,2	1,5	14,0	0,0	0,0%
										ЦФ =	26,68		

### Аналіз результату

Додатковий часовий ресурс направлено на ділянку Д-5.

**Умова 2.**

Знято умову 1. Прийнято рішення не використовувати 1-шу «вигідну» машину.

Дії: увести обмеження для 1-ої машини:  $\sum_{j=1}^{10} x_{2j} = 0$  (Використано = 0 год.).

**Результат:**

Тривалість (год.)	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4	Д-5	Д-6	Д-7	Д-8	Д-9	Д-10	Використано (год.)	Залишки (год.)	Залишки, %
М-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0	14,0	100,0%
М-2	0	0	0	0	0	0	0	4,2	0	0	4,2	4,8	53,7%
М-3	0	0	2,4	0	0	0	0,7	0	0	0	3,0	2,0	39,3%
М-4	5,8	0	0	2,2	0	0	0	0	0	0	8,0	0,0	0,0%
М-5	0	4,4	0	0	1,5	4,0	0	0,0	2,2	1,5	14,0	0,0	0,0%
										ЦФ =	42,07		

Таке вольове рішення привело до збільшення загальних витрат.

**Умова 3.**

Знято умову 2. Прийнято рішення використати часовий ресурс «невигідної» машини М-3

( $z_3 = 5$  годин) на 100%. Дії: увести обмеження для М-3:  $\sum_{j=1}^{10} x_{3j} = z_3$ .

**Результат:**

Тривалість (год.)	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4	Д-5	Д-6	Д-7	Д-8	Д-9	Д-10	Використано (год.)	Залишки (год.)	Залишки, %
М-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	13,5	96,7%
М-2	0	0	0	0	0	0	0	0,0	0	0	0,0	9,0	100,0%
М-3	0	0	2,4	0	0	0	1,0	0	0	1	5,0	0,0	0,0%
М-4	5,7	0	0	2,2	0	0	0	0	0	0	8,0	0,0	0,0%
М-5	0	4,4	0	0	1,5	4,0	0	1,9	2,2	0,0	14,0	0,0	0,0%
										ЦФ =	42,88		

**Умова 4.**

Визначити додатковий об'єм виконаної роботи при повному використанні наявних ресурсів й відповідні мінімальні витрати.

**Результат:**

Попит (т)	90	60	39	34	30	44	14	40	35	29	
Продуктивність, т/год.	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4	Д-5	Д-6	Д-7	Д-8	Д-9	Д-10	Індекс
М-1	5,0	3,5	4,1	4,9	5,0	2,8	3,6	4,8	4,1	5,0	0
М-2	10,0	7,0	8,2	9,8	10,0	5,6	7,2	9,6	8,2	10,0	2
М-3	20,0	14,0	16,4	19,6	20,0	11,2	14,4	19,2	16,4	20,0	4
М-4	15,5	10,9	12,7	15,2	15,5	8,7	11,2	14,9	12,7	15,5	3,1
М-5	19,5	13,7	16,0	19,1	19,5	10,9	14,0	18,7	16,0	19,5	3,9
Тривалість (год.)	М-1	М-2	М-3	М-4	М-5	М-6	М-7	М-8	М-9	М-10	Використано (год.)
М-1	8,3	0	5,7	0	0	0	0	0	0	0	14,0
М-2	4,8	0	0	0	0	0	0	4,2	0	0	9,0
М-3	0	0	2,58	0	0	0	0,97	0	0	1,45	5,0
М-4	0	0	0	2,2	1,9	4	0	0	0	0	8,0
М-5	0	10,8	0	0	0	1,0	0	0	2,2	0	14,0
										ЦФ =	60,98
Об'єм роботи (т)	М-1	М-2	М-3	М-4	М-5	М-6	М-7	М-8	М-9	М-10	
М-1	41,7	0	23	0	0	0	0	0	0	0	
М-2	48	0	0	0	0	0	0	40	0	0	
М-3	0	0	42	0	0	0	14	0	0	29	
М-4	0,0	0	0	34	30,0	33	0,0	0	0	0	
М-5	0	148	0	0	0,0	11	0	0	35	0	
Виконано (т)	90	148	66	34	30	44	14	40	35	29	
Вик - Попит	0	88	27	0	0	0	0	0	0	0	

### Задача 3.15. Розподіл різних ресурсів

#### Постановка задачі

Запаси  $m$  видів ресурсів (сировини) в одному вимірі використовуються шляхом переробки для виготовлення  $n$  видів готової продукції у іншому вимірі. Практично усі виробництва можна вважати переробними, де на вхід поступає сировина, енергія, матеріали, інформація тощо, а на виході – готова продукція, яка направляється на споживання чи на наступну переробку. Приклади: виготовлення соків з фруктів, чавуну з руди та коксу, сталі з чавуну, прокату зі сталі, металоконструкцій з прокату, переробка газів у хімічне волокно чи пластмасу, нагрівання води спалюванням вугілля, вирощування врожаю на сільськогосподарських угіддях тощо.

Загальна задача розподілу ресурсів ставить за мету розподілити запаси різних за своєю природою і властивостями ресурсів в одному кількісному вимірі у готову продукцію різних видів й у інших кількісних вимірах. Узгоджувачим засобом цих вимірів є матриця вагових коефіцієнтів  $D$ , де кожен її елемент вказує на питому кількість певної продукції, яку можна отримати переробкою одиниці певного ресурсу за певною технологією у відповідному вимірі (в літрах, грамах,  $\text{дм}^3$  тощо). Так, з 1 кг яблук різними виробничими технологіями можна отримати певну кількість соку, сухого порошку, джему, вина тощо.

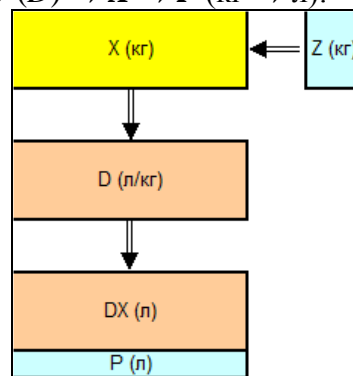
#### Приклад

На плодоовочевому підприємстві є запаси 5 видів сировини для переробки – ягід, фруктів та овочів (в кг), що використовуються для виготовлення 10 видів готової продукції у вигляді напівфабрикатів (у певних одиницях виміру, далі – в літрах, л): соків, вина, пюре, компотів, соусів тощо. Треба найкращим чином розподілити ці запаси, щоб мінімізувати витрати для задоволення попиту на готову продукцію. Задано матрицю перетворень «ресурси  $\rightarrow$  продукція»  $D$ , значення якої відображають технологічні норми виходу продукції з одиниці певного ресурсу.



Отже, ресурсом, що розподіляється, є запаси різної **сировини** ( $Z$ ), які через вагові коефіцієнти **матриці**  $D$  (в л/кг) перетворюються у різну продукцію переробки для задоволення попиту  $P$  (в л).

Мнемосхема перетворення:  $Z \rightarrow (D) \rightarrow X \rightarrow P$  (кг  $\rightarrow$  л):



В задачі використовується 5 матриць: вартості ( $C$ ); перетворень ( $D$ ); потоків сировини ( $X$ ); потоків продукції ( $XD$ ); нормованих вартостей двоїстої задачі ( $S$ ).

#### Математична модель

I. Знайти матрицю розподілу заданих ресурсів

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,10} \\ \dots & x_{ij} & \dots \\ x_{5,1} & \dots & x_{5,10} \end{pmatrix}$$
 де  $x_{ij}$  – кількість одиниць  $i$ -го ресурсу, витрачених для виготовлення  $j$ -го продукту, щоб

II. ЦФ: Загальні витрати (гр. од.)  $V = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$

III. за обмежень:

1) для продукції:  $\sum_{i=1}^5 d_{ij} x_{ij} = p_i$  (Виготовлено = Попит, в л)

2) для ресурсів (кг):  $\sum_{j=1}^{10} x_{ij} \leq z_i$  (Використано  $\leq$  Запаси, в л)

та граничних умов: усі  $x_{ij} \geq 0$ .

### **Комп'ютерна реалізація математичної моделі**

#### Порядок роботи

1. Увести початкові дані: матрицю вартостей ( $C$ ), рядок попиту ( $P$ ), стовпець запасів ( $Z$ )
2. Увести матрицю перетворень ( $D$ )
3. Сформуувати таблицю для обчислень: план розподілу ресурсів ( $X$ ), значень стовпця Використано (ліва частина обмеження 2:  $\sum_{j=1}^{10} x_{ij}$ ), обчислити значення стовпця Залишки (Запаси - Використано), усе (у кг), значення ЦФ ( $CX$ ) у грошових одиницях
4. Сформуувати таблицю для обчислень (у л): матриці  $DX$  та суми по її стовпцях (ліва частина обмеження 1:  $\sum_{i=1}^5 d_{ij} x_{ij}$ )
5. Запуск програми *Поиск решения*, заповнити поля її вікна, кнопкою *Параметры* визначити лінійну модель й невід'ємні значення невідомих, знайти розв'язок прямої та двоїстої задач
6. Відформатувати табличний документ
7. Аналіз отриманого результату, модифікація математичної й табличної моделі, звіт, рекомендації до прийняття рішення.

#### Початкові дані

- матриця вартостей ( $C$ ),
- пропозиція (кг)  $Z$
- попит (л)  $P$
- матриця перетворень (л/кг)  $D$ :

Вартість (грн/л)	Види продукції										Пропозиція (кг)
	П-1	П-2	П-3	П-4	П-5	П-6	П-7	П-8	П-9	П-10	
P-1	0,25	0,6	0,12	1,1	1,6	0,9	1,1	0,7	2,0	1,4	125
P-2	2,5	2,3	5	4,2	6,2	7,1	3,2	2,5	3,0	3,5	200
P-3	5,0	6,2	3,8	7,5	6,6	5,5	4,9	6,1	4,7	3,9	300
P-4	0,2	0,9	1,1	2,2	0,6	0,8	1,0	2,1	1,3	2,7	150
P-5	1,0	0,3	2,2	5,0	1,4	1,6	2,0	2,4	0,7	0,8	60
Попит (л)	35	22	35	58	11	35	45	21	6	47	
Продуктивність, л/кг	П-1	П-2	П-3	П-4	П-5	П-6	П-7	П-8	П-9	П-10	
P-1	0,40	0,24	0,40	0,40	0,72	0,16	0,08	0,24	0,08	0,64	
P-2	0,64	0,24	0,16	0,40	0,48	0,56	0,56	0,56	0,40	0,56	
P-3	0,64	0,16	0,32	0,64	0,64	0,56	0,64	0,72	0,40	0,05	
P-4	0,01	0,08	0,00	0,02	0,08	0,32	0,72	0,32	0,24	0,40	
P-5	0,56	0,00	0,32	0,72	0,72	0,64	0,64	0,64	0,48	0,16	

## Результат

Сировина (кг)	П-1	П-2	П-3	П-4	П-5	П-6	П-7	П-8	П-9	П-10	Використано (кг)	Залишки (кг)	Залишки, %
P-1	0	0	65,7	0	0	0	0	0	0	59,3	125,0	0,0	0,0%
P-2	54,7	91,7	0	0	0	0	0	37,5	0	16,1	200,0	0,0	0,0%
P-3	0	0	27,3	66,7	0	0	0	0	0	0	93,9	206,1	68,7%
P-4	0	0	0	0	0	87,5	62,5	0	0	0	150,0	0,0	0,0%
P-5	0	0	0	21,3	15,3	10,9	0	0	12,5	0	60,0	0,0	0,0%
										ЦФ =	1478,99		
Продукція	П-1	П-2	П-3	П-4	П-5	П-6	П-7	П-8	П-9	П-10			
P-1	0	0	26	0	0	0	0	0	0	38			
P-2	35	22	0	0	0	0	0	21	0	9			
P-3	0	0	9	43	0	0	0	0	0	0			
P-4	0	0	0	0	0	28	45	0	0	0			
P-5	0	0	0	15	11	7	0	0	6	0			
Виготовлено (л)	35	22	35	58	11	35	45	21	6	47			
Нормовані вартості витрат	П-1	П-2	П-3	П-4	П-5	П-6	П-7	П-8	П-9	П-10	Т-ціна	Доп. зб.	
P-1	2,2	1,2	0,0	1,0	1,4	4,3	5,4	3,5	5,9	0,0	-4,6	21,8	
P-2	0,0	0,0	4,9	1,3	4,8	4,5	2,9	0,0	1,3	0,0	-1,8	24,9	
P-3	0,7	3,5	0,0	0,0	2,3	1,1	2,5	0,6	1,3	3,4	0,0	1,Е+30	
P-4	1,9	1,3	2,8	3,7	1,8	0,0	0,0	1,4	1,0	0,7	-1,7	21,9	
P-5	0,7	3,7	1,8	0,0	0,0	0,0	3,0	1,0	0,0	2,7	-3,4	59,3	
Т-ціна	-6,68	-16,98	-11,87	-11,72	-6,72	-7,87	-3,78	-7,64	-8,62	-9,42			

## Аналіз отриманого результату

### Пряма задача

Знайдено оптимальний план розподілу ресурсів

Сировина (кг)	П-1	П-2	П-3	П-4	П-5	П-6	П-7	П-8	П-9	П-10	Використано (кг)	Залишки (кг)	Залишки, %
P-1	0	0	65,7	0	0	0	0	0	0	59,3	125,0	0,0	0,0%
P-2	54,7	91,7	0	0	0	0	0	37,5	0	16,1	200,0	0,0	0,0%
P-3	0	0	27,3	66,7	0	0	0	0	0	0	93,9	206,1	68,7%
P-4	0	0	0	0	0	87,5	62,5	0	0	0	150,0	0,0	0,0%
P-5	0	0	0	21,3	15,3	10,9	0	0	12,5	0	60,0	0,0	0,0%
										ЦФ =	1478,99		

за яким загальні грошові витрати для задоволення замовлення мінімальні (1478,99 гр. од.), це «ідеальний» варіант, який модифікацією моделі – зміною заданих чи уведенням додаткових обмежень задля врахування певних умов можна лише погіршити.

Визначено залишки ресурсів, звідки видно, що повністю вичерпані усі пропозиції, окрім 3-го «невигідного» ресурсу.

### Двоїста задача

Нормовані вартості витрат	П-1	П-2	П-3	П-4	П-5	П-6	П-7	П-8	П-9	П-10	Т-ціна	Доп. зб.
P-1	2,2	1,2	0,0	1,0	1,4	4,3	5,4	3,5	5,9	0,0	-4,6	21,8
P-2	0,0	0,0	4,9	1,3	4,8	4,5	2,9	0,0	1,3	0,0	-1,8	24,9
P-3	0,7	3,5	0,0	0,0	2,3	1,1	2,5	0,6	1,3	3,4	0,0	1,Е+30
P-4	1,9	1,3	2,8	3,7	1,8	0,0	0,0	1,4	1,0	0,7	-1,7	21,9
P-5	0,7	3,7	1,8	0,0	0,0	0,0	3,0	1,0	0,0	2,7	-3,4	59,3
Т-ціна	-6,68	-16,98	-11,87	-11,72	-6,72	-7,87	-3,78	-7,64	-8,62	-9,42		

**Тіньові ціни** наявних ресурсів вказують їх умовну «цінність» та граничні величини збільшення їх значень. Так, запас (125 од.) найбільш цінного ресурсу Р-1 з оцінкою -4,6 можна збільшити на першому етапі не більше, ніж на 21,8 од., Р-5 – на 59,3 тощо.

**Тіньові ціни** попиту (від’ємні числа) вказують на втрати з-за збільшення випуску відповідної продукції, найбільш «невигідним» є продукт П-3 (-16,98).

**Нормовані вартості** заданих цін (матриця С) вказують на додаткові витрати з-за неоптимального розподілу ресурсів. Наприклад, якщо з ресурсу Р-1 виготовити одиницю продукту П-1, загальні витрати зростуть на 2,2 гр. од. Ці результати корисні для прогнозування додаткових витрат, якщо за певних умов треба здійснити певні економічно необґрунтовані дії.

### Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов

#### Умова 1.

Вважається, що зберігати ресурси – фрукти, ягоди і овочі – ніде й не варто, тож прийнято рішення переробити усі запаси, а значення попиту вважати нижньою границею на випуск готової продукції.

Дії: внести зміни у математичну модель у такій формі:

III. за обмежень:

1) для продукції:  $\sum_{i=1}^5 d_{ij}x_{ij} \geq p_i$  (Виготовлено  $\geq$  Попит, в л)

2) для ресурсів (кг):  $\sum_{j=1}^{10} x_{ij} = z_i$  (Використано = Запаси, в кг)

Результат:

Сировина (кг)	П-1	П-2	П-3	П-4	П-5	П-6	П-7	П-8	П-9	П-10	Використано (кг)
Р-1	37,5	0	87,5	0	0	0	0	0	0	0	125,0
Р-2	28,9	91,7	0	0	0	0	26,9	37,5	15,0	0	200,0
Р-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	300,0	300,0
Р-4	150,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	150,0
Р-5	0	60,0	0	0	0	0	0	0	0	0	60,0
										ЦФ =	1745,89
Продукція	П-1	П-2	П-3	П-4	П-5	П-6	П-7	П-8	П-9	П-10	
Р-1	15,0	0	35,0	0	0	0	0	0	0	0	
Р-2	18,5	22,0	0	0	0	0	15,1	21,0	6	0	
Р-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15,0	
Р-4	1,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Р-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Виготовлено (л)	35	22	35	0	0	0	15	21	6	15	
Виг - Попит	0,0	0,0	0,0	-58,0	-11,0	-35,0	-29,9	0,0	0,0	-32,0	

#### Аналіз результату

Рішення «все переробити» привело до збільшення витрат (1745,89 – 1478,99) з-за вимушеної переробки ресурсів вартісними способами, тож задоволено попит лише 5 продуктів і недоотримано замовленої продукції інших 5 видів.

Висновок: іноді економічно вигідно нічого не робити, бо робота гарантує лише втрати, у прикладі рекомендується залишки ресурсу П-3 (206,1 од.) взагалі не направляти на переробку.

#### Умова 2.

Умову 1 знято. Прийнято рішення для задоволення попиту повністю переробити лише запаси специфічного ресурсу Р-3 (ягоди), для інших ресурсів (фрукти, овочі) допустимі залишки (для подальшого зберігання). Дії: внести зміни в математичну модель у формі:

1) для продукції:  $\sum_{i=1}^5 d_{ij}x_{ij} = p_i$  (Виготовлено = Попит, в л)

2) для ресурсів (кг):  $\sum_{j=1}^{10} x_{3j} = z_3$  для  $i = 3$  (Використано Р-3 = Запас Р-3)

$$\sum_{j=1}^{10} x_{ij} \leq z_i \text{ для } i \neq 3$$

Результат:

Сировина (кг)	П-1	П-2	П-3	П-4	П-5	П-6	П-7	П-8	П-9	П-10	Використано (кг)	Залишки (кг)	Залишки, %
Р-1	0	54,3	0	0	0	0	0	0	0	70,7	125,0	0,0	0,0%
Р-2	0	37,39	0	0	0	0	0	0	0	0	37,4	162,6	81,3%
Р-3	36,1	0	109,4	90,6	0	0	0	29,2	0	34,8	300,0	0,0	0,0%
Р-4	0,0	0	0	0	0	87,5	62,5	0	0	0	150,0	0,0	0,0%
Р-5	21,3	0	0	0	15,3	10,9	0	0	12,5	0	60,0	0,0	0,0%
										ЦФ =	2008,14		
<b>Продукція</b>	<b>П-1</b>	<b>П-2</b>	<b>П-3</b>	<b>П-4</b>	<b>П-5</b>	<b>П-6</b>	<b>П-7</b>	<b>П-8</b>	<b>П-9</b>	<b>П-10</b>			
Р-1	0	13,0	0	0	0	0	0	0	0	45,3			
Р-2	0	9,0	0	0	0	0	0	0	0	0			
Р-3	23,1	0	35,0	58,0	0	0	0	21,0	0	1,7			
Р-4	0	0	0	0	0	28,0	45	0	0	0			
Р-5	11,9	0	0	0	11,0	7,0	0	0	6	0			
Виготовлено (п)	35	22	35	58	11	35	45	21	6	47			

### Аналіз результату

Змушене відхилення від оптимуму збільшило загальні витрати (2008,14 – 1478,99), бо «невигідний» ресурс Р-3 витіснив з виробничого плану «вигідний» ресурс Р-2 і застосовуються вартісні схеми переробки.

### **Умова 3.**

Умову 2 знято. Прийнято рішення попит на продукт П-1 задовольнити усіма ресурсами, нижня границя на величину потоку ресурсів для нього дорівнює 1 од.

Дії: внести зміни в математичну модель у формі: усі  $x_{ij} \geq 1$  для  $j = 1$ .

Результат:

Сировина (кг)	П-1	П-2	П-3	П-4	П-5	П-6	П-7	П-8	П-9	П-10	Використано (кг)	Залишки (кг)	Залишки, %
Р-1	1,00	0	66,9	0	0	0	0	0	0	57,1	125,0	0,0	0,0%
Р-2	52,17	91,67	0	0	0	0	0	37,5	0	18,7	200,0	0,0	0,0%
Р-3	1,00	0	25,8	68,4	0	0	0	0	0	0	95,1	204,9	68,3%
Р-4	1,00	0	0	0	0	86,5	62,5	0	0	0	150,0	0,0	0,0%
Р-5	1,00	0	0	19,8	15,3	11,4	0	0	12,5	0	60,0	0,0	0,0%
										ЦФ =	1484,47		
<b>Продукція</b>	<b>П-1</b>	<b>П-2</b>	<b>П-3</b>	<b>П-4</b>	<b>П-5</b>	<b>П-6</b>	<b>П-7</b>	<b>П-8</b>	<b>П-9</b>	<b>П-10</b>			
Р-1	0,40	0	26,8	0	0	0	0	0	0	36,55			
Р-2	33,39	22,0	0	0	0	0	0	21,0	0	10,45			
Р-3	0,64	0	8,2	43,8	0	0	0	0	0	0			
Р-4	0,01	0	0	0	0	27,7	45,0	0	0	0			
Р-5	0,56	0	0	14,2	11,0	7,3	0	0	6	0			
Виготовлено (п)	35	22	35	58	11	35	45	21	6	47			

## Глава 4. Лінійні моделі задач потокової оптимізації

### Вступ

У ряді практичних ситуацій для наочності зручно використовувати схеми, що називаються графами<sup>26</sup>). Граф складається з однорідних об'єктів, які називаються *вузлами* (англ. – *node*) і звичайно позначаються кружечками з назвами чи номерами, і ліній, які називаються *дугами* (гілками, ребрами, англ.- *arc*), що з'єднують певні пари вузлів між собою. Ці об'єкти – вузли та дуги – можуть виконувати лише роль схеми, визначаючи певні зв'язки, в інших випадках вони мають певні характерні оцінки (вагові коефіцієнти), які відповідають поставленій задачі. У наведеному (орієнтованому) графі ці лінії мають вигляд стрілок, щоб указувати на напрям зв'язку між вузлами, у ненаправленому – лінії, прямі чи криві.

Орієнтований граф зі зваженими дугами називають *мережею* або *сіткою* (*network*). Подібна мережева схема вже використовувалася нами для наочного представлення транспортних задач з вузлами-постачальниками, вузлами-споживачами й проміжними вузлами, де направлені дуги у вигляді стрілок між ними визначали можливі маршрути перевезень (потоків).

Ключове слово “потік” визначило в математичному програмуванні широкий клас моделей потокового програмування<sup>27</sup>, бо досить багато практичних та організаційних задач за своєю специфікою можуть бути віднесені саме до класу поточкових задач у мережах (*network flow problems*).

Інтерес до теорії графів (її засновником є Л. Ейлер) і методів розв'язання відповідних практичних задач різко зріс у зв'язку з постановкою складних технічних, логічних, управлінських і наукових задач, де у вигляді графа відображаються певні організаційні структури. Вузлами графа можуть бути люди, виробничі операції, бази чи підприємства, військові з'єднання, засоби технічного й іншого забезпечення, а дуги відображають відповідну взаємодію між ними. Поява комп'ютерів привела до необхідності розробки спеціальних обчислювальних методів для розв'язання задач на графах, висока ефективність цих методів обумовлена специфікою подібних задач. З'ясувалося, що для опису прикладної задачі мовою теорії графів і подальшої її реалізації може знадобитися менше пам'яті. Ця обставина активізувала розвиток теорії графів та її додатків, розробку алгоритмів розв'язання задач на графах.

Отже, граф  $G = (N, A)$  задається множиною  $N$  вузлів (позначених, наприклад,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , усього їх  $n$ , де величина  $x_i$  є числом чи назвою) і множиною  $A$  дуг у вигляді упорядкованих пар  $(x_i, x_j)$ , усього їх  $m$ . Граф може бути орієнтованим, якщо дуги мають напрямок, неорієнтованим чи змішаним. Наявність дуги на графі свідчить лише про зв'язок між вузлами.

Прикладами об'єктів, представлених у виді графів, можуть служити різноманітні транспортні (гідравлічні, продуктові, енергетичні, теплові) мережі, структурні формули молекул, плани приміщень, географічні карти, схеми взаємодії людей (родинні зв'язки, сімейні відносини, військові операції) чи устаткування тощо.

Параметром чи ваговим коефіцієнтом (вагою) дуги може бути: пропускна здатність каналу, відстань між парою вузлів, тривалість, вартість перевезення по маршруту, імовірність проходження сигналу по ланцюгу, кількість необхідних ресурсів для виконання операції тощо. Тоді позначення  $c(4,9) = 67$  може означати, наприклад, що вартість проїзду від 4-го до 9-го пункту складає 67 од., а позначення  $x(\text{Вінниця}, \text{Одеса}) = 132$  вказує на об'єм перевезення 132 од. між зазначеними пунктами.

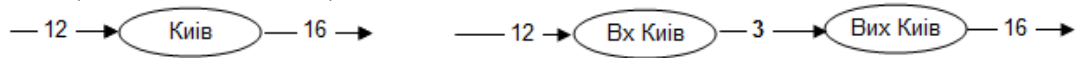
Параметром вузла може бути пропозиція чи попит певного продукту, що транспортується.

<sup>26</sup> Н. Кристофидес. Теория графов. Алгоритмический подход. Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 432 с.

<sup>27</sup> П. Йенсен, Д. Барнес. Поточковое программирование. Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1984. – 391 с. (в ориг. Network flow programming, 1980)



Вважається, що вузол «ідеальний» щодо вартості чи тривалості для потоку, вони нульові. В реальній практиці ці показники, буває, далеко не нульові, скажімо, потік, що проходить вузлом Київ, має врахувати витрати часу (3 години), перетинаючи цей крупний транспортний вузол. У таких випадках «ідеальний» вузол «розщеплюють» заміною його на комбінацію пари «ідеальних» вузлів Вхід та Вихід й дуги з відповідним ваговим коефіцієнтом, наприклад,  $c(\text{Вх Київ}, \text{Вих Київ}) = 3$ :



Дуга зі стрілкою і певним значенням відповідного параметру визначає універсальне поняття – *потік (flow)*, що рухається з початкового вузла дуги в кінцевий. Об'єктами потоків у практичних задачах виступають рідини, вантажі, сигнали зв'язку, темпи виконання операцій із залученням ресурсів, енергія, газ, пасажери, транспортні засоби тощо.

У вузлі-джерелі сітки потік *створюється*, у вузлі-стоці – *споживається*, проміжний (внутрішній) вузол може мати запас і виконувати роль джерела, або мати попит і поглинати частку потоку, що у нього втікає.

Більшість оптимізаційних задач на мережах – це *задачі про потоки у сітках (network flow problems)*.

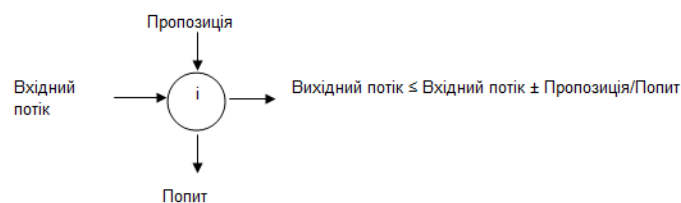
#### Задача 4.1. Мережева транспортна задача

##### Загальні відомості

Ця задача є більш близьким до реальності варіантом транспортної задачі (ТЗ), у її класичній (матричній) постановці є лише постачальники і споживачі зі зв'язками «кожен-з-кожним», що утворюють прямокутну матрицю транспортних витрат й, відповідно, ставлять серйозні вимоги щодо розміру задачі.

У мережевій (векторній) постановці ТЗ є проміжні вузли, що мають певний потенціал (пропозиція/попит) і, фактично, нічим не відрізняються від вузлів-джерел з пропозиціями (запасами) та вузлів-стоків з попитом, крім того, серед можливих зв'язків джерело/стік визначені лише більш реалістичні зв'язки, яких значно менше, ніж у класичній ТЗ. Таким чином, цей варіант ТЗ краще відповідає проблематиці оптимального розподілу ресурсів мережею, де постачальником чи споживачем може бути будь-який вузол.

Основою поточкових моделей є принцип збереження потоку у вузлі, за яким вихідний потік враховує вхідний потік та потенціал вузла (пропозицію чи попит):



Для реалізації цього принципу треба вміти обчислювати сумарні вхідні і вихідні потоки для вузлів, бо саме ці величини формують обмеження на шукані дугові потоки, тобто, на значення невідомих шуканого плану.

##### Постановка задачі

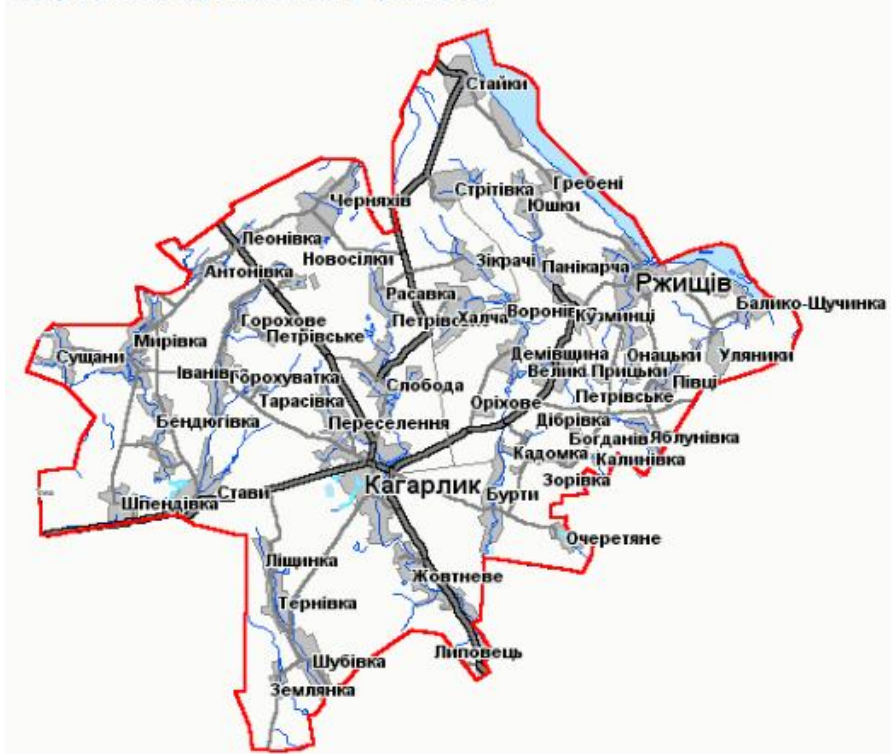
$m$  вузлів та  $n$  дуг утворюють мережу, вузли мають потенціал (пропозицію/попит), дуги – питомі витрати (відстані, тривалості), треба визначити дугові потоки, що мінімізують сумарні витрати, пов'язані із задоволенням попиту вузлів-стоків.

Умови отримання розв'язку задачі: сума пропозицій не менша суми попиту й існування шляхів від джерел до стоків. Додаткове обмеження – наявність пропускнуої здатності (ПЗ) дуги, що обмежує величину шуканого потоку зверху (не більше, ніж).

### Приклад

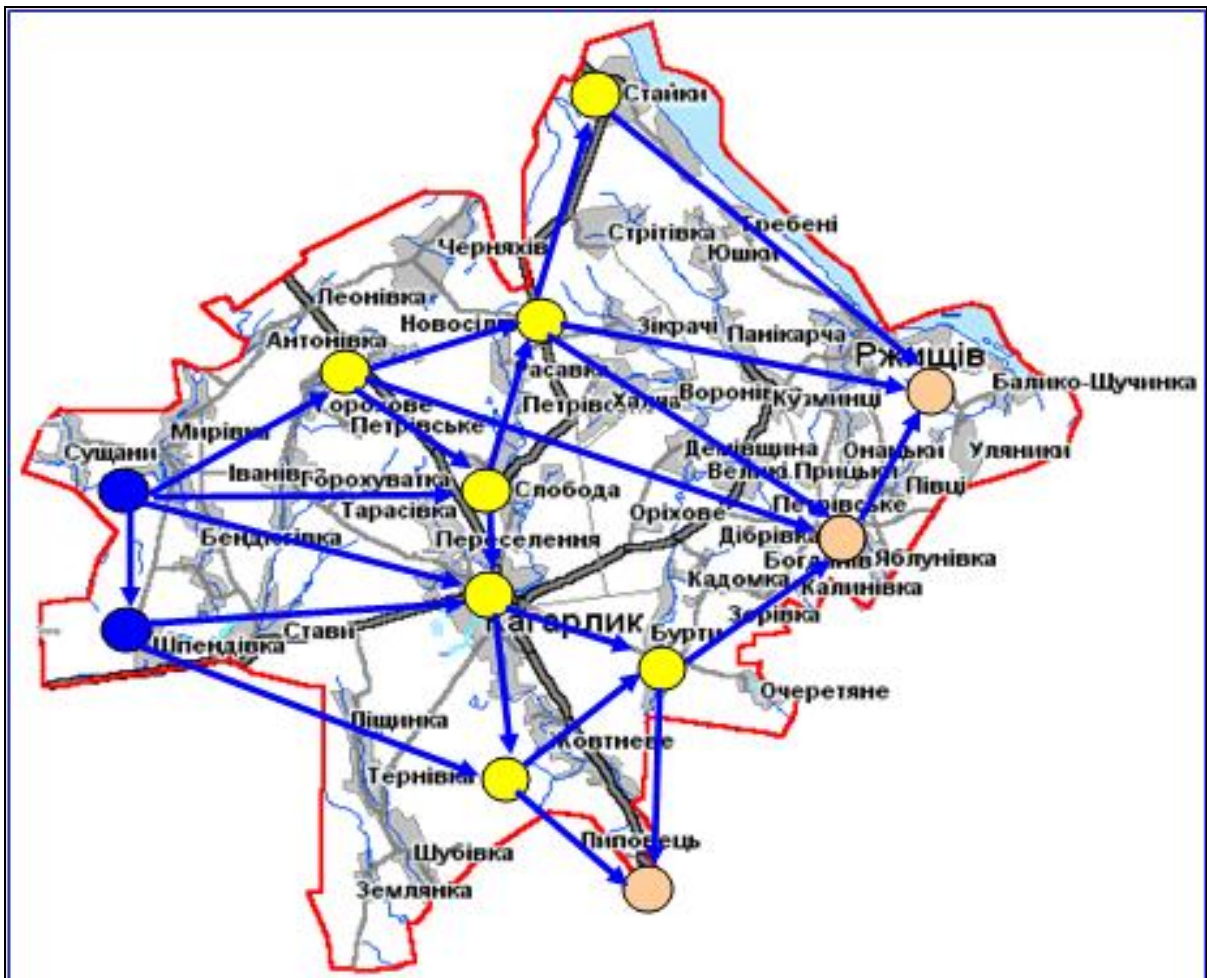
На території Кагарлицького району Київської області визначено 12 населених пунктів-вузлів, що мають пропозиції чи попит на певний продукт чи послугу. Вони з'єднані між собою 22 напрямленими ділянками-дугами із заданими відстанями. Треба визначити значення 22 дугових потоків, щоб забезпечити попит за мінімальною загальною вартістю.

Карта Кагарлицького району



Початкові дані: схема мережі, назви 12 вузлів та їх потенціали, 22 дуги між відповідними парами вузлів та їх довжини. Серед 12 вузлів є 2 «чистих» вузли-джерела, звідки потоки лише витікають, 3 «чистих» вузла-стоків, куди потоки лише стікають, інші 7 вузлів – проміжні, що мають пропозиції (таких 4) чи попит (таких 3), вони можуть бути транзитними пунктами на шляху від джерела до стоку.

Транспортна мережа



### Математична модель

Позначення:

$i$  – поточний номер дуги,  $i = 1, \dots, 22$ ,

$j$  – поточний номер вузла,  $j = 1, \dots, 12$ ,

$x_i$  – шукана величина потоку  $i$ -ою дугою,

$d_i$  – довжина  $i$ -ої дуги,

$p(i), k(i)$  – назви (номери) початкового і кінцевого вузлів  $i$ -ої дуги,

$\pi_j$  – потенціал  $j$ -го вузла (попит з «-», пропозиція з «+»),

$V$  – загальні витрати для задоволення попиту,

$\sum_{p(i)=j} x_i$  – сумарний вихідний потік із  $j$ -го вузла, це сума дугових потоків, початки цих дуг

співпадають з іменем цього вузла,

$\sum_{k(i)=j} x_i$  – вхідний потік у  $j$ -ий вузол, це сума дугових потоків, кінці цих дуг співпадають з

іменем цього вузла.

### Задача оптимізації

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{22})$  такий, щоб

II. ЦФ: Загальні витрати  $V = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_{22}x_{22} \rightarrow \min$

III. за обмежень для вузлів:

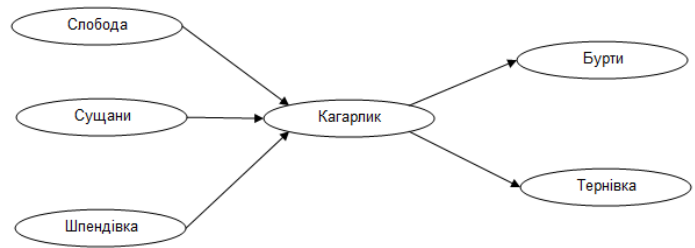
$$\sum_{p(i)=j} x_i - \sum_{k(i)=j} x_i \leq \pi_j, j = 1, \dots, 12 \text{ (Вхід} - \text{Вихід} \leq \text{Потенціал)}$$

та граничних умов: усі  $x_i \geq 0$ .

Пояснення до формування і комп'ютерної реалізації обмеження для вузла

Вузол Кагарлик у списку має № 3, потенціал вузла (-6, попит), у цей вузол входить 3 дуги з вузлів Слобода (дуга № 11), Суццани (дуга № 4) та Шпендівка (дуга № 2), бо кінці лише цих дуг мають назву Кагарлик; з вузла Кагарлик виходить 2 дуги у Бурти (дуга №12) та Тернівку (дуга №13), лише початки цих дуг мають назву Кагарлик:

i	p(i)	k(i)	Назва
12	3		Кагарлик-Бурти
13	3		Кагарлик-Тернівка
		3	Слобода-Кагарлик
		3	Шпендівка-Кагарлик
		3	Суццани-Кагарлик



Отже, обмеження  $\sum_{p(i)=j} x_i - \sum_{k(i)=j} x_i \leq \pi_j$  для вузла 3 (Кагарлика) має такий вигляд:

$$\sum_{p(i)=3} x_i - \sum_{k(i)=3} x_i \leq \pi_3 \rightarrow (x_{12} + x_{13}) - (x_{11} + x_4 + x_2) \leq -6.$$

Реалізація в Ексел:

=СУММЕСЛИ(Кінці;Вузол;Потоки)-СУММЕСЛИ(Початки;Вузол;Потоки) ≤ Потенціал

Результат після проведення обчислень:

$(x_{кб} + x_{кт}) - (x_{ск} + x_{сук} + x_{шк}) = \pi_к (0 + 0) - (0 + 0 + 6) = -6$  (попит Кагарлика задовольнила Шпендівка).

Аналогічно реалізуються обмеження для інших вузлів.

### Комп'ютерна реалізація математичної моделі

#### Порядок роботи

1. Накреслити схему мережі, скориставшись географічною картою, обчислити довжини дуг (див. Додаток 2).

2. Створити дві таблиці – для вузлів і для дуг, розмістити у них початкові дані

В таблиці для вузлів треба увести в довільному порядку назви вузлів (населених пунктів) та їх потенціали: з мінусом – попит, з плюсом – пропозиції (це ПЧ обмежень). Зразу з за допомогою функції СУММЕСЛИ (діапазон;умова) підрахувати суму пропозицій та попиту, адже задача має розв'язок, коли сума пропозицій не менше, ніж сума попитів. Далі увести заголовки й перейти до утворення таблиці для дуг.

В таблиці для дуг треба увести назви початків та кінців кожної дуги, краще це зробити за допомогою операції зв'язування (набрати символ «=» у клітинці результату, перейти до клітинки з назвою у таблиці для дуг і натиснути Enter), це суттєво пришвидшує набір і гарантує відсутність помилок при ручному наборі назв – тепер будь-яка зміна назв у таблиці для вузлів автоматично змінить назви в таблиці для дуг, далі увести довжини дуг.

Увести заголовки інших стовпців, визначити діапазон шуканих невідомих – Потік (X), обчислити значення вартостей  $(d_i x_i)$  та їх суму (ЦФ).

3. Тепер в таблиці для вузлів можна формувати обмеження, користуючись функцією:

- для вхідних потоків: =СУММЕСЛИ(Кінці; Вузол; Потоки)

- для вихідних потоків: =СУММЕСЛИ(Початки; Вузол; Потоки)

далі знайти різницю Вх-Вих (це ЛЧ обмежень) та залишок (Попит/Проп – Вх-Вих), для результатів двоїстої задачі підготувати стовпці Т-ціна та Доп. зб.

1. Запуск програми *Поиск решения*, заповнити поля її вікна (ЦФ, критерій, план, обмеження), кнопкою *Параметры* визначити лінійну модель (симплекс-метод) та задати граничні умови (невід'ємні значення) шуканих невідомих, отримати результати прямої та двоїстої задач.

2. Аналіз отриманого результату, модифікація моделі.

Вузол	Попит/Проп
1 Шпендівка	9
2 Суцани	8
3 Кагарлик	-6
4 Тернівка	-2
5 Бурти	8
6 Слобода	7
7 Новосілки	-3
8 Стайки	6
9 Антонівка	4
10 Ржищів	-9
11 Липовець	-6
12 Яблунівка	-11
Пропозиції	42
Попит	-37

Дуга	Початок	Кінець	Довжина
1	Шпендівка	Тернівка	15
2	Шпендівка	Кагарлик	10
3	Суцани	Шпендівка	5
4	Суцани	Кагарлик	19
5	Суцани	Слобода	13
6	Суцани	Антонівка	12
7	Антонівка	Новосілки	19
8	Антонівка	Слобода	19
9	Антонівка	Яблунівка	11
10	Слобода	Новосілки	14
11	Слобода	Кагарлик	15
12	Кагарлик	Бурти	10
13	Кагарлик	Тернівка	12
14	Тернівка	Бурти	8
15	Тернівка	Липовець	7
16	Бурти	Липовець	13
17	Бурти	Яблунівка	14
18	Яблунівка	Ржищів	9
19	Новосілки	Стайки	16
20	Новосілки	Ржищів	11
21	Новосілки	Яблунівка	15
22	Стайки	Ржищів	10

Результати

Таблиця для вузлів

Вузол	Потоки						
	Попит/Проп	Вхідні	Вихідні	Вих-Вх	Залишок	Т-ціна	Доп. зб.
1 Шпендівка	9	0	8	8	1	0	1E+30
2 Суцани	8	0	5	5	3	0	1E+30
3 Кагарлик	-6	6	0	-6	0	-10	6
4 Тернівка	-2	2	0	-2	0	-15	2
5 Бурти	8	0	8	8	0	-9	5
6 Слобода	7	0	6	6	1	0	1E+30
7 Новосілки	-3	6	3	-3	0	-14	6
8 Стайки	6	0	6	6	0	-15	3
9 Антонівка	4	5	9	4	0	-12	5
10 Ржищів	-9	9	0	-9	0	-25	3
11 Липовець	-6	6	0	-6	0	-22	5
12 Яблунівка	-11	11	0	-11	0	-23	5
Пропозиції	42						
Попит	-37						

Таблиця для дуг

Дуга	Початок	Кінець	Довжина	Потік (X)	Вартість	Н-варт
1	Шпендівка	Тернівка	15	2	30	0
2	Шпендівка	Кагарлик	10	6	60	0
3	Суццани	Шпендівка	5	0	0	5
4	Суццани	Кагарлик	19	0	0	9
5	Суццани	Слобода	13	0	0	13
6	Суццани	Антонівка	12	5	60	0
7	Антонівка	Новосілки	19	0	0	17
8	Антонівка	Слобода	19	0	0	31
9	Антонівка	Яблунівка	11	9	99	0
10	Слобода	Новосілки	14	6	84	0
11	Слобода	Кагарлик	15	0	0	5
12	Кагарлик	Бурти	10	0	0	11
13	Кагарлик	Тернівка	12	0	0	7
14	Тернівка	Бурти	8	0	0	14
15	Тернівка	Липовець	7	0	0	0
16	Бурти	Липовець	13	6	78	0
17	Бурти	Яблунівка	14	2	28	0
18	Яблунівка	Ржищів	9	0	0	7
19	Новосілки	Стайки	16	0	0	15
20	Новосілки	Ржищів	11	3	33	0
21	Новосілки	Яблунівка	15	0	0	6
22	Стайки	Ржищів	10	6	60	0
					532	
					ЦФ	

Загальний вигляд табличного документа:

Вузел	Потоки				Залишок	Т-ціна	Доп.зб.
	Попит/Проп	Вхідні	Вихідні	Вих-Вх			
1 Шпендівка	9	0	8	8	1	0	1E+30
2 Суццани	8	0	5	5	3	0	1E+30
3 Кагарлик	-6	6	0	-6	0	-10	6
4 Тернівка	-2	2	0	-2	0	-15	2
5 Бурти	8	0	8	8	0	-9	5
6 Слобода	7	0	6	6	1	0	1E+30
7 Новосілки	-3	6	3	-3	0	-14	6
8 Стайки	6	0	6	6	0	-15	3
9 Антонівка	4	5	9	4	0	-12	5
10 Ржищів	-9	9	0	-9	0	-25	3
11 Липовець	-6	6	0	-6	0	-22	5
12 Яблунівка	-11	11	0	-11	0	-23	5

Пропозиції 42  
Попит -37

Дуга	Початок	Кінець	Довжина	Потік (X)	Вартість	Н-варт
1	Шпендівка	Тернівка	15	2	30	0
2	Шпендівка	Кагарлик	10	6	60	0
3	Суццани	Шпендівка	5	0	0	5
4	Суццани	Кагарлик	19	0	0	9
5	Суццани	Слобода	13	0	0	13
6	Суццани	Антонівка	12	5	60	0
7	Антонівка	Новосілки	19	0	0	17
8	Антонівка	Слобода	19	0	0	31
9	Антонівка	Яблунівка	11	9	99	0
10	Слобода	Новосілки	14	6	84	0
11	Слобода	Кагарлик	15	0	0	5
12	Кагарлик	Бурти	10	0	0	11
13	Кагарлик	Тернівка	12	0	0	7
14	Тернівка	Бурти	8	0	0	14
15	Тернівка	Липовець	7	0	0	0
16	Бурти	Липовець	13	6	78	0
17	Бурти	Яблунівка	14	2	28	0
18	Яблунівка	Ржищів	9	0	0	7
19	Новосілки	Стайки	16	0	0	15
20	Новосілки	Ржищів	11	3	33	0
21	Новосілки	Яблунівка	15	0	0	6
22	Стайки	Ржищів	10	6	60	0
					532	
					ЦФ	

Поиск решения

Установить целевую ячейку: \$AD\$42

Равной:  максимуму значению  значению: 0  минимальному значению

Изменя ячейки: \$AC\$20:\$AC\$41

Ограничения: \$AD\$3:\$AD\$14 <= \$AA\$3:\$AA\$14

Вспомогательные кнопки: Выполнить, Закрыть, Параметры, Восстановить, Справка, Добавить, Изменить, Удалить

## Аналіз отриманого результату

### Пряма задача

В таблиці для дуг у стовпці Потік ( $X$ ) визначені дугові потоки (в тонах), за якими попит 6 вузлів-стоків задовольняється із загальною мінімальною вартістю у 532 т/км:

<u>Споживачі</u> (попит)		<u>Постачальники</u> (поставка)
1) Тернівка (-2)	←	Шпендівка (2)
2) Кагарлик (-6)	←	Шпендівка (6)
3) Яблунівка (-11)	←	Суцани-Антонівка (5) + Антонівка (4) + Бурти (2)
4) Новосілки (-3)	←	Слобода (6)
5) Липовець (-6)	←	Бурти (6)
6) Ржищів (-9)	←	Стайки (6) + Новосілки (3).

Зменшити загальні транспортні витрати можна за рахунок збільшення запасів «вигідних» постачальників, запаси яких вичерпані. Залишки ( $42 - 37 = 5$ ) мають: Шпендівка (1), Суцани (3) та Слобода (1) – вже ясно, що їх запаси не треба збільшувати, претендентами на збільшення запасів є Бурти, Стайки і Антонівка.

Збільшення загальних транспортних витрат пов'язано зі збільшенням попиту.

### Двоїста задача

Аркуш *Отчет по устойчивости* містить двоїсті оцінки початкових даних, для вузлів це *Тенева ціна* (Т-ціна), для дуг – *Нормир. стоимость* (Н-варт.).

**Тіньова ціна** потенціалів вузлів вказує на зміну значення ЦФ при зміні потенціалу на 1, зокрема, її від'ємне значення означає, що:

- зменшення попиту споживача на 1 зменшує ЦФ, а
  - збільшення пропозиції постачальника на 1 – зменшує ЦФ
- на відповідну величину.

Значення **Допустимое увеличение** (стовпець Доп. зб.) вказує граничну величину, на яку можна збільшити значення пропозиції, за якої зберігається структура оптимального плану. Якщо не врахувати цю рекомендацію й перевищити це значення, може статися, що у відповідного постачальника виявляться залишки, відповідно, зміниться структура плану (схема потоків).

Цю оцінку використовують для визначення кращого вузла для збільшення запасу, у прикладі таким є вузол Стайки (-15) – збільшення його запасу на 1 зменшить загальні витрати на 15 (але не більше, ніж на 3, це його *Допустимое увеличение*); «найгіршим» з вузлів-споживачів є Ржищів, бо збільшення його попиту на 1 суттєво збільшить загальні витрати (-25).

**Нормована вартість** (стовпець Н. варт.) «невигідних» дуг (їх потоки = 0) вказує на збільшення загальних витрат (ЦФ) при вимушеному транспортуванні ними одиниці потоку, найгіршою з них є дуга Антонівка-Слобода (з найбільшою оцінкою 31).

### Прийняття управлінських рішень за результатами моделювання

Отриманий план перевезень оптимальний, бо загальні транспортні витрати для задоволення попиту мінімальні за заданими початковими даними.

Для зменшення величини загальних витрат є два шляхи:

- збільшити запаси у «вигідних» постачальників: Стайки (-15), Антонівка (-12), Бурти (-9) або
- вмовити споживачів зменшити їх попит, починаючи з найбільш «невигідних»: Ржищів (-25), Яблунівка (-23), Липовець (-22), Тернівка (-15), Новосілки (-14), Кагарлик (-10).

### Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов

**Умова 1:** Вирішено заборонити рух вигідною ділянкою Антонівка-Яблунівка, реалізація – уведення обмеження  $x_9 = 0$ ; результат: значення ЦФ = 633, змінилася схема перевезень, зокрема, попит Яблунівки (-11) тепер забезпечують Новосілки (3) й Бурти (8):

Дуга	Початок	Кінець	Довжина	Потік (X)	Вартість
1	Шпендівка	Тернівка	15	8	120
2	Шпендівка	Кагарлик	10	6	60
3	Суццани	Шпендівка	5	5	25
4	Суццани	Кагарлик	19	0	0
5	Суццани	Слобода	13	0	0
6	Суццани	Антонівка	12	0	0
7	Антонівка	Новосілки	19	2	38
8	Антонівка	Слобода	19	0	0
9	Антонівка	Яблунівка	11	0	0
10	Слобода	Новосілки	14	7	98
11	Слобода	Кагарлик	15	0	0
12	Кагарлик	Бурти	10	0	0
13	Кагарлик	Тернівка	12	0	0
14	Тернівка	Бурти	8	0	0
15	Тернівка	Липовець	7	6	42
16	Бурти	Липовець	13	0	0
17	Бурти	Яблунівка	14	8	112
18	Яблунівка	Ржищів	9	0	0
19	Новосілки	Стайки	16	0	0
20	Новосілки	Ржищів	11	3	33
21	Новосілки	Яблунівка	15	3	45
22	Стайки	Ржищів	10	6	60
					<b>633</b>
					ЦФ

**Умова 2:** Вирішено перевезти не вигідною ділянкою Суццани-Кагарлик 3 од. продукту, реалізація – уведення обмеження  $x_4 = 3$ ; результат: ЦФ = 645, схема перевезень інша:



Дуга	Початок	Кінець	Довжина	Потік (X)	Вартість
1	Шпендівка	Тернівка	15	8	120
2	Шпендівка	Кагарлик	10	3	30
3	Суцани	Шпендівка	5	2	10
4	Суцани	Кагарлик	19	3	57
5	Суцани	Слобода	13	0	0
6	Суцани	Антонівка	12	0	0
7	Антонівка	Новосілки	19	2	38
8	Антонівка	Слобода	19	0	0
9	Антонівка	Яблунівка	11	0	0
10	Слобода	Новосілки	14	7	98
11	Слобода	Кагарлик	15	0	0
12	Кагарлик	Бурти	10	0	0
13	Кагарлик	Тернівка	12	0	0
14	Тернівка	Бурти	8	0	0
15	Тернівка	Липовець	7	6	42
16	Бурти	Липовець	13	0	0
17	Бурти	Яблунівка	14	8	112
18	Яблунівка	Ржищів	9	0	0
19	Новосілки	Стайки	16	0	0
20	Новосілки	Ржищів	11	3	33
21	Новосілки	Яблунівка	15	3	45
22	Стайки	Ржищів	10	6	60
					645
					ЦФ

**Умова 3:** Вирішено встановити попит у Ржищеві 10 од., результат: ЦФ = 675, нова схема перевезень, додаткову одиницю Ржищів отримує з Новосілок:

Дуга	Початок	Кінець	Довжина	Потік (X)	Вартість
1	Шпендівка	Тернівка	15	8	120
2	Шпендівка	Кагарлик	10	3	30
3	Суцани	Шпендівка	5	2	10
4	Суцани	Кагарлик	19	3	57
5	Суцани	Слобода	13	0	0
6	Суцани	Антонівка	12	0	0
7	Антонівка	Новосілки	19	3	57
8	Антонівка	Слобода	19	0	0
9	Антонівка	Яблунівка	11	0	0
10	Слобода	Новосілки	14	7	98
11	Слобода	Кагарлик	15	0	0
12	Кагарлик	Бурти	10	0	0
13	Кагарлик	Тернівка	12	0	0
14	Тернівка	Бурти	8	0	0
15	Тернівка	Липовець	7	6	42
16	Бурти	Липовець	13	0	0
17	Бурти	Яблунівка	14	8	112
18	Яблунівка	Ржищів	9	0	0
19	Новосілки	Стайки	16	0	0
20	Новосілки	Ржищів	11	4	44
21	Новосілки	Яблунівка	15	3	45
22	Стайки	Ржищів	10	6	60
					675
					ЦФ

### Висновок

Модель мережевої транспортної задачі відрізняється значно меншим розміром задачі у порівнянні з матричним представленням, що дозволяє засобами Excel розв'язати задачу до 200 шуканих невідомих (дуг) та 100 обмежень (вузлів). Зміна початкових даних автоматично формує новий план перевезень. Двоїсті оцінки початкових даних (потенціалів вузлів та довжин дуг) дозволяють визначити шляхи до покращення поточних результатів. Уведенням додаткових обмежень вдається врахувати певні зовнішні умови щодо організації транспортних перевезень, наприклад, увести обмеження на пропускну здатність дуг, нелінійну залежність витрат тощо.

## Задача 4.2. Про найкоротший шлях і дерево НКШ

### Загальні відомості

Це типова й найпростіша задача про потоки у мережі, яка складається з вузлів трьох типів:

- один вузол-джерело,
- кілька проміжних (транзитних) вузлів і
- один вузол-стік,

та направлених дуг, що їх з'єднують:

- з вузла-джерела дуги (і потоки ними) лише виходять,
- у вузол-стік лише входять, а
- у проміжні вузли дуги входять і виходять.

Одиничний потік утворюється й витікає з джерела, дугами протікає через певні проміжні вузли і втікає у стік. Саме так у природі струмок витікає із джерела й, вибираючи найкоротший шлях (ланцюг зі з'єднаних суміжних дуг), стікає до водойми. Тому ця задача про пошук найкоротшого шляху (НКШ), що з'єднує джерело й стік, проходячи дугами й проміжними вузлами, має безліч застосувань на практиці – прокладка кабелів зв'язку, трубопроводів, провідників в електронних схемах, туристичних та транспортних маршрутів.

Характерна властивість задачі – одиничний потік входить у вузол і таким же одиничним виходить з вузла, не розділяючись по вихідних дугах.

Початкові дані для цієї задачі – питомі витрати (коштів, часу, ресурсів) при проходженні потоку певною дугою, тому критерій оптимізації – мінімум загальної довжини шляху (тривалості, втрат).

Основою моделей потокового програмування є принцип збереження потоку у вузлі, за яким вихідний потік дорівнює вхідному потоку:  $\text{Вхід} = \text{Вихід}$ , якщо пропозиція/попит вузла нульові, звідси, для кожного проміжного вузла діє обмеження:  $\text{Вхід} - \text{Вихід} = 0$  ( $0 = 0$  для вузла поза НКШ або  $1 = 1$  для вузла, що належить НКШ).

Оскільки у вузлі-джерелі  $\text{Вхід} = 0$ ,  $\text{Вихід} = 1$ , обмеження для нього має вигляд:

**$\text{Вхід} - \text{Вихід} = -1$ ;**

у вузлі-стоці  $\text{Вхід} = 1$ ,  $\text{Вихід} = 0$ , обмеження для нього має вигляд:

**$\text{Вхід} - \text{Вихід} = 1$ .**

Таким чином, ліву частину (ЛЧ) системи рівнянь утворює результат обчислень  $\text{Вхід} - \text{Вихід}$ , а праву частину (ПЧ):  $-1$  та  $+1$  для джерела і стоку, усі інші значення – нулі.

Успішне розв'язання задачі про НКШ базується на реалізації цього принципу, де треба вміти обчислювати вхідні і вихідні потоки для вузлів, які формують обмеження на шукані потоки.

### Постановка задачі

$m$  вузлів та  $n$  дуг утворюють мережу, де дуги характеризуються питомими витратами (відстанями), треба визначити одиничний потік, що мінімізує витрати, пов'язані із проходженням потоку від джерела до стоку.

### Приклад

На території України визначено 19 населених пунктів, які з'єднані між собою 35 направленими і 3 ненаправленими ділянками шляхів (показані жирними лініями) із заданими довжинами (4–6, 8–9, 13–17), ці пункти є вузлами, а ділянки – дугами мережі. Ненаправлені дуги замінюємо парами направлених назустріч дугами (наприклад, для 4–6 це 4→6 та 6→4), відповідно, додається 3 дуги, звідси усього 38 дуг, розмір задачі (19, 38). Треба визначити значення 38 дугових потоків, щоб знайти шлях мінімальної загальної довжини від

джерела до стоку: Мукачеве – вузол-джерело, Луганськ – вузол-стік, 17 інших вузлів – проміжні.

Початкові дані: схема мережі, назви і координати  $(x, y)$  19 вузлів та 38 дуг між відповідними парами вузлів з їх довжинами.

Початковий етап – це креслення мережі, рекомендується скористатися географічною картою й власною системою координат, підготовка таблиці для вузлів (задати їх координати) та дуг, обчислення відстані між двома пунктами  $i$  та  $j$  визначається за теоремою Піфагора формулою  $d_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ .

### **Математична модель**

Позначення:

$i$  – поточний номер дуги,  $i = 1, \dots, 38$ ,

$j$  – поточний номер вузла,  $j = 1, \dots, 19$ ,

$x_i$  – величина потоку  $i$ -ою дугою,  $x_i \in (0, 1)$ ,

$d_i$  – довжина  $i$ -ої дуги,

$p(i), k(i)$  – початковий і кінцевий вузли  $i$ -ої дуги,

$D$  – довжина НКШ,

$\sum_{p(i)=j} x_i$  – вихідний потік із  $j$ -го вузла, це сума дугових потоків, початки цих дуг співпадають з іменем цього вузла,

$\sum_{k(i)=j} x_i$  – вхідний потік до  $j$ -го вузла, це сума дугових потоків, кінці цих дуг співпадають з іменем цього вузла.

### **Задача оптимізації**

I. Знайти вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{38})$  такий, щоб

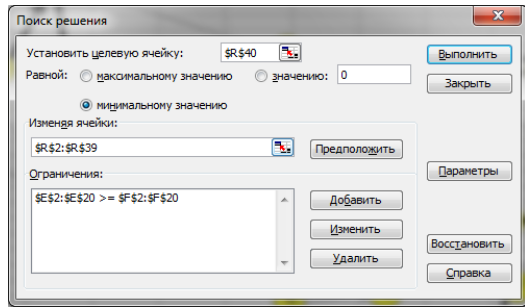
II. ЦФ  $D = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_{38}x_{38} \rightarrow \min$

III. за обмежень:

$$\sum_{p(i)=j} x_i - \sum_{k(i)=j} x_i = \begin{cases} -1, & \text{для джерела} \\ 1, & \text{для стоку} \\ 0, & \text{для проміжних вузлів} \end{cases}$$

та граничних умов: усі  $x_i \geq 0$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ .





№	Місто	x	y	ЛЧ (Вх-Вих)	ПЧ	Т-ціна
1	Мукачево	3	18	-1	-1	0,0
2	Стрий	6	21	0		4,2
3	Львів	7	23	0		6,5
4	Тернопіль	8	22	0		7,9
5	Ковель	7	28	0		11,5
6	Чернівці	9	17	0		6,1
7	Вінниця	14	20	0		11,9
8	Умань	17	18	0		14,1
9	Київ	18	24	0		17,6
10	Олександрія	23	18	0		20,1
11	Полтава	25	22	0		24,6
12	Харків	27	14	0		31,0
13	Запоріжжя	28	15	0		26,0
14	Донецьк	32	14	0		30,1
15	Луганськ	35	19	1	1	35,9
16	Одеса	18	10	0		22,2
17	Мелітополь	28	11	0		30,0
18	Херсон	22	10	0		26,2
19	Симферополь	25	5	0		32,0
						ЧШ

№	Початок	x	y	Кінець	x	y	Довжина	Шлях (X)	Н-варт
1	Мукачево	3	18	Стрий	6	21	4,2	0	0,00
2	Мукачево	3	18	Чернівці	9	17	6,1	1	0,00
3	Стрий	6	21	Львів	7	23	2,2	0	0,00
4	Стрий	6	21	Чернівці	9	17	5,0	0	3,16
5	Львів	7	23	Тернопіль	8	22	1,4	0	0,00
6	Львів	7	23	Ковель	7	28	5,0	0	0,00
7	Тернопіль	8	22	Вінниця	14	20	6,3	0	2,30
8	Тернопіль	8	22	Чернівці	9	17	5,1	0	6,91
9	Ковель	7	28	Київ	18	24	11,7	0	5,61
10	Ковель	7	28	Тернопіль	8	22	6,1	0	9,67
11	Чернівці	9	17	Тернопіль	8	22	5,1	0	3,29
12	Чернівці	9	17	Вінниця	14	20	5,8	0	0,00
13	Чернівці	9	17	Умань	17	18	8,1	1	0,00
14	Вінниця	14	20	Київ	18	24	5,7	0	0,00
15	Вінниця	14	20	Умань	17	18	3,6	0	1,37
16	Умань	17	18	Київ	18	24	6,1	0	2,66
17	Умань	17	18	Олександрія	23	18	6,0	1	0,00
18	Умань	17	18	Одеса	18	10	8,1	0	0,00
19	Київ	18	24	Харків	27	14	13,5	0	0,00
20	Київ	18	24	Полтава	25	22	7,3	0	0,23
21	Київ	18	24	Олександрія	23	18	7,8	0	5,24
22	Київ	18	24	Умань	17	18	6,1	0	9,51
23	Олександрія	23	18	Полтава	25	22	4,5	0	0,00
24	Олександрія	23	18	Запоріжжя	28	15	5,8	1	0,00
25	Полтава	25	22	Харків	27	14	8,2	0	1,84
26	Полтава	25	22	Запоріжжя	28	15	7,6	0	6,26
27	Полтава	25	22	Донецьк	32	14	10,6	0	5,15
28	Харків	27	14	Луганськ	35	19	9,4	0	4,53
29	Харків	27	14	Донецьк	32	14	5,0	0	5,93
30	Запоріжжя	28	15	Донецьк	32	14	4,1	1	0,00
31	Запоріжжя	28	15	Мелітополь	28	11	4,0	0	0,00
32	Донецьк	32	14	Луганськ	35	19	5,8	1	0,00
33	Одеса	18	10	Херсон	22	10	4,0	0	0,00
34	Мелітополь	28	11	Запоріжжя	28	15	4,0	0	8,00
35	Мелітополь	28	11	Донецьк	32	14	5,0	0	4,88
36	Херсон	22	10	Мелітополь	28	11	6,1	0	2,31
37	Херсон	22	10	Симферополь	25	5	5,8	0	0,00
38	Симферополь	25	5	Мелітополь	28	11	6,7	0	8,77
							ЦФ=	35,93	

Формули:

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	Місто	x	y	ЛЧ (Вх-Вих)	ПЧ	Т-ціна
2	1	Мукачево	3	18	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B2;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B2;\$R\$2:\$R\$39)	-1	=Отчет по ур
3	2	Стрий	6	21	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B3;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B3;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
4	3	Львів	7	23	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B4;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B4;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
5	4	Тернопіль	8	22	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B5;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B5;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
6	5	Ковель	7	28	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B6;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B6;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
7	6	Чернівці	9	17	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B7;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B7;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
8	7	Вінниця	14	20	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B8;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B8;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
9	8	Умань	17	18	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B9;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B9;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
10	9	Київ	18	24	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B10;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B10;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
11	10	Олександрія	23	18	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B11;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B11;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
12	11	Полтава	25	22	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B12;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B12;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
13	12	Харків	27	14	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B13;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B13;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
14	13	Запоріжжя	28	15	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B14;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B14;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
15	14	Донецьк	32	14	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B15;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B15;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
16	15	Луганськ	35	19	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B16;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B16;\$R\$2:\$R\$39)	1	=Отчет по ур
17	16	Одеса	18	10	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B17;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B17;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
18	17	Мелітополь	28	11	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B18;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B18;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
19	18	Херсон	22	10	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B19;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B19;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
20	19	Симферополь	25	5	=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$39;B20;\$R\$2:\$R\$39)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$39;B20;\$R\$2:\$R\$39)		=Отчет по ур
21							ЧШ

AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	
1								
2	№	Початок	x	y	Кінець	x	y	Довжина
3	1	Мукачеве	3	18	Стрий	6	21	«КОРЕНЬ(АТ3-AW3)*2+(AU3-AX3)*2»
4	2	Мукачеве	3	18	Чернівці	9	17	«КОРЕНЬ(АТ4-AW4)*2+(AU4-AX4)*2»
5	3	Стрий	6	21	Львів	7	23	«КОРЕНЬ(АТ5-AW5)*2+(AU5-AX5)*2»
6	4	Стрий	6	21	Чернівці	9	17	«КОРЕНЬ(АТ6-AW6)*2+(AU6-AX6)*2»
7	5	Львів	7	23	Тернопіль	8	22	«КОРЕНЬ(АТ7-AW7)*2+(AU7-AX7)*2»
8	6	Львів	7	23	Ковель	7	28	«КОРЕНЬ(АТ8-AW8)*2+(AU8-AX8)*2»
9	7	Тернопіль	8	22	Вінниця	14	20	«КОРЕНЬ(АТ9-AW9)*2+(AU9-AX9)*2»
10	8	Тернопіль	8	22	Чернівці	9	17	«КОРЕНЬ(АТ10-AW10)*2+(AU10-AX10)*2»
11	9	Ковель	7	28	Київ	18	24	«КОРЕНЬ(АТ11-AW11)*2+(AU11-AX11)*2»
12	10	Ковель	7	28	Тернопіль	8	22	«КОРЕНЬ(АТ12-AW12)*2+(AU12-AX12)*2»
13	11	Чернівці	9	17	Тернопіль	8	22	«КОРЕНЬ(АТ13-AW13)*2+(AU13-AX13)*2»
14	12	Чернівці	9	17	Вінниця	14	20	«КОРЕНЬ(АТ14-AW14)*2+(AU14-AX14)*2»
15	13	Чернівці	9	17	Умань	17	18	«КОРЕНЬ(АТ15-AW15)*2+(AU15-AX15)*2»
16	14	Вінниця	14	20	Київ	18	24	«КОРЕНЬ(АТ16-AW16)*2+(AU16-AX16)*2»
17	15	Вінниця	14	20	Умань	17	18	«КОРЕНЬ(АТ17-AW17)*2+(AU17-AX17)*2»
18	16	Умань	17	18	Київ	18	24	«КОРЕНЬ(АТ18-AW18)*2+(AU18-AX18)*2»
19	17	Умань	17	18	Олександрія	23	18	«КОРЕНЬ(АТ19-AW19)*2+(AU19-AX19)*2»
20	18	Умань	17	18	Одеса	18	10	«КОРЕНЬ(АТ20-AW20)*2+(AU20-AX20)*2»
21	19	Київ	18	24	Харків	27	14	«КОРЕНЬ(АТ21-AW21)*2+(AU21-AX21)*2»
22	20	Київ	18	24	Полтава	25	22	«КОРЕНЬ(АТ22-AW22)*2+(AU22-AX22)*2»
23	21	Київ	18	24	Олександрія	23	18	«КОРЕНЬ(АТ23-AW23)*2+(AU23-AX23)*2»
24	22	Київ	18	24	Умань	17	18	«КОРЕНЬ(АТ24-AW24)*2+(AU24-AX24)*2»
25	23	Олександрія	23	18	Полтава	25	22	«КОРЕНЬ(АТ25-AW25)*2+(AU25-AX25)*2»
26	24	Олександрія	23	18	Запоріжжя	28	15	«КОРЕНЬ(АТ26-AW26)*2+(AU26-AX26)*2»
27	25	Полтава	25	22	Харків	27	14	«КОРЕНЬ(АТ27-AW27)*2+(AU27-AX27)*2»
28	26	Полтава	25	22	Запоріжжя	28	15	«КОРЕНЬ(АТ28-AW28)*2+(AU28-AX28)*2»
29	27	Полтава	25	22	Донецьк	32	14	«КОРЕНЬ(АТ29-AW29)*2+(AU29-AX29)*2»
30	28	Харків	27	14	Луганськ	35	19	«КОРЕНЬ(АТ30-AW30)*2+(AU30-AX30)*2»
31	29	Харків	27	14	Донецьк	32	14	«КОРЕНЬ(АТ31-AW31)*2+(AU31-AX31)*2»
32	30	Запоріжжя	28	15	Донецьк	32	14	«КОРЕНЬ(АТ32-AW32)*2+(AU32-AX32)*2»
33	31	Запоріжжя	28	15	Мелітополь	28	11	«КОРЕНЬ(АТ33-AW33)*2+(AU33-AX33)*2»
34	32	Донецьк	32	14	Луганськ	35	19	«КОРЕНЬ(АТ34-AW34)*2+(AU34-AX34)*2»
35	33	Одеса	18	10	Херсон	22	10	«КОРЕНЬ(АТ35-AW35)*2+(AU35-AX35)*2»
36	34	Мелітополь	28	11	Запоріжжя	28	15	«КОРЕНЬ(АТ36-AW36)*2+(AU36-AX36)*2»
37	35	Мелітополь	28	11	Донецьк	32	14	«КОРЕНЬ(АТ37-AW37)*2+(AU37-AX37)*2»
38	36	Херсон	22	10	Мелітополь	28	11	«КОРЕНЬ(АТ38-AW38)*2+(AU38-AX38)*2»
39	37	Херсон	22	10	Симферополь	25	5	«КОРЕНЬ(АТ39-AW39)*2+(AU39-AX39)*2»
40	38	Симферополь	25	5	Мелітополь	28	11	«КОРЕНЬ(АТ40-AW40)*2+(AU40-AX40)*2»

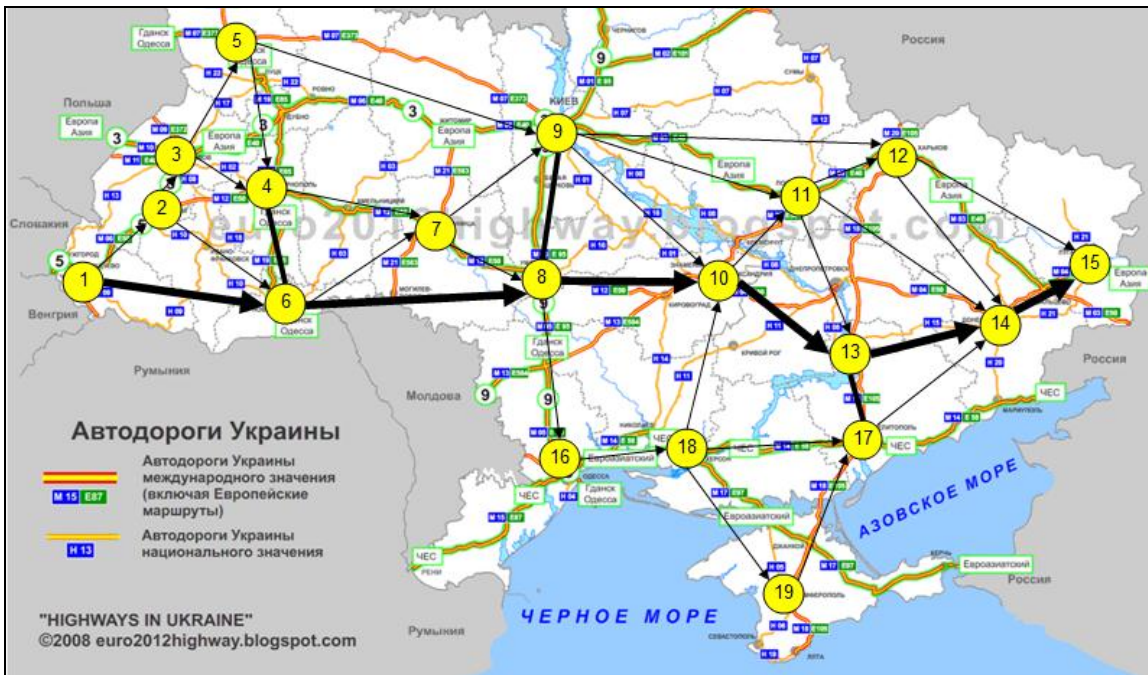
J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	
1	№	Початок	x	y	Кінець	x	y	Довжина	Шлях (X)	H-варт
2	1	Мукачеве	3	18	Стрий	6	21	4,2426408	0	=Отчет по усто
3	2	Мукачеве	3	18	Чернівці	9	17	6,0827625	1	=Отчет по усто
4	3	Стрий	6	21	Львів	7	23	2,2360679	0	=Отчет по усто
5	4	Стрий	6	21	Чернівці	9	17	5	0	=Отчет по усто
6	5	Львів	7	23	Тернопіль	8	22	1,4142135	0	=Отчет по усто
7	6	Львів	7	23	Ковель	7	28	5	0	=Отчет по усто
8	7	Тернопіль	8	22	Вінниця	14	20	6,3245553	0	=Отчет по усто
9	8	Тернопіль	8	22	Чернівці	9	17	5,0990195	0	=Отчет по усто
10	9	Ковель	7	28	Київ	18	24	11,704699	0	=Отчет по усто
11	10	Ковель	7	28	Тернопіль	8	22	6,0827625	0	=Отчет по усто
12	11	Чернівці	9	17	Тернопіль	8	22	5,0990195	0	=Отчет по усто
13	12	Чернівці	9	17	Вінниця	14	20	5,8309518	0	=Отчет по усто
14	13	Чернівці	9	17	Умань	17	18	0,0622577	1	=Отчет по усто
15	14	Вінниця	14	20	Київ	18	24	5,658542	0	=Отчет по усто
16	15	Вінниця	14	20	Умань	17	18	3,6055512	0	=Отчет по усто
17	16	Умань	17	18	Київ	18	24	6,0827625	0	=Отчет по усто
18	17	Умань	17	18	Олександрія	23	18	6	1	=Отчет по усто
19	18	Умань	17	18	Одеса	18	10	8,0622577	0	=Отчет по усто
20	19	Київ	18	24	Харків	27	14	13,453624	0	=Отчет по усто
21	20	Київ	18	24	Полтава	25	22	7,2801098	0	=Отчет по усто
22	21	Київ	18	24	Олександрія	23	18	7,810215	0	=Отчет по усто
23	22	Київ	18	24	Умань	17	18	6,0827625	0	=Отчет по усто
24	23	Олександрія	23	18	Полтава	25	22	4,4721359	0	=Отчет по усто
25	24	Олександрія	23	18	Запоріжжя	28	15	5,8309518	1	=Отчет по усто
26	25	Полтава	25	22	Харків	27	14	8,2462112	0	=Отчет по усто
27	26	Полтава	25	22	Запоріжжя	28	15	7,6157731	0	=Отчет по усто
28	27	Полтава	25	22	Донецьк	32	14	10,630145	0	=Отчет по усто
29	28	Харків	27	14	Луганськ	35	19	9,4339811	0	=Отчет по усто
30	29	Харків	27	14	Донецьк	32	14	5	0	=Отчет по усто
31	30	Запоріжжя	28	15	Донецьк	32	14	4,1231056	1	=Отчет по усто
32	31	Запоріжжя	28	15	Мелітополь	28	11	4	0	=Отчет по усто
33	32	Донецьк	32	14	Луганськ	35	19	5,8309518	1	=Отчет по усто
34	33	Одеса	18	10	Херсон	22	10	4	0	=Отчет по усто
35	34	Мелітополь	28	11	Запоріжжя	28	15	4	0	=Отчет по усто
36	35	Мелітополь	28	11	Донецьк	32	14	5	0	=Отчет по усто
37	36	Херсон	22	10	Мелітополь	28	11	6,0827625	0	=Отчет по усто
38	37	Херсон	22	10	Симферополь	25	5	5,8309518	0	=Отчет по усто
39	38	Симферополь	25	5	Мелітополь	28	11	6,7082038	0	=Отчет по усто
40							ЦФ=		=СУММПРОИЗВ(Q2:Q39;R2:R39)	

### Аналіз отриманого результату

#### Пряма задача

В таблиці для дуг у стовпці Шлях (X) визначені шукані дугові потоки (1, якщо дуга належить НКШ і 0 навпаки), за якими мінімальна довжина НКШ склала величину 35,93 од. НКШ склали 7 дуг (це сім «1» та 31 «0») з 38 невідомих, його маршрут:

**Мукачеве → Чернівці → Умань → Олександрія → Запоріжжя → Донецьк → Луганськ**, це «ідеальний» варіант.



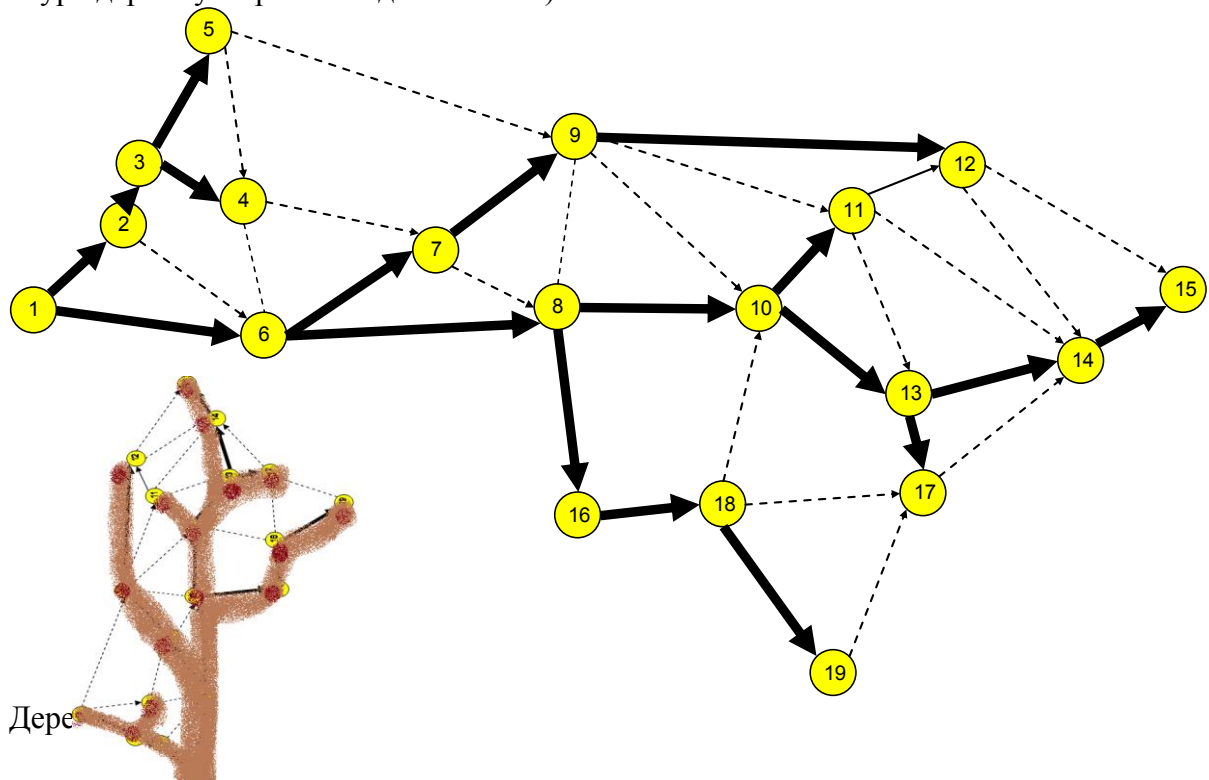
Найкоротший шлях (Мукачеве-Луганськ)

#### Двоїста задача

Аркуш *Отчет по устойчивости* містить двоїсті оцінки початкових даних, для вузлів це *Тенева цена* (Т-ціна), для дуг – *Нормир. стоимость* (H-варт.).

**Тіньова ціна** вузла (додатне число) вказує на часткові НКШ від початку мережі (Мукачеве) до усіх вузлів мережі.

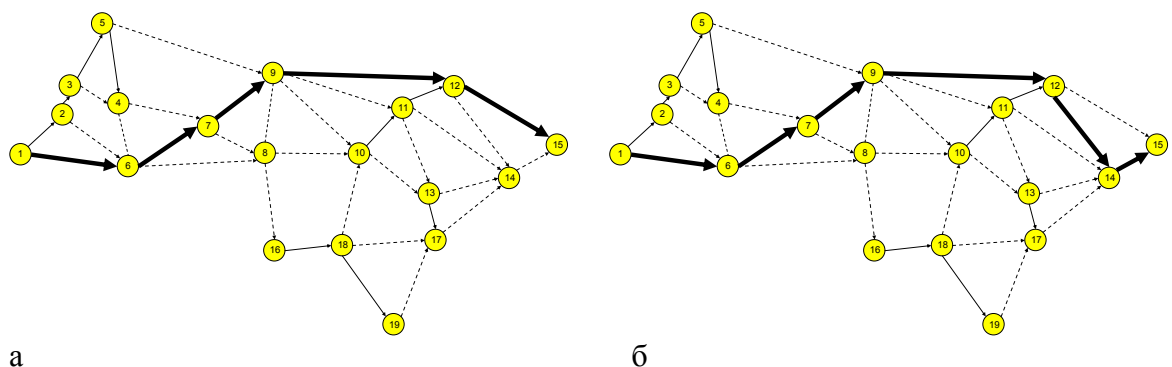
Ці оцінки є результатом розв'язання суміжної задачі про **дерево НКШ**, який дійсно має вигляд дерева з коренем Мукачеве і гілками, що пов'язують корінь з усіма вузлами («стовбур» дерева утворює знайдений НКШ):



**Нормована вартість** «невигідних» дуг (їх потоки = 0) вказує на збільшення ЦФ при вимушеному включенні в НКШ дуги з 0-потокком, найгіршою з них є дуга Ковель-Тернопіль довжиною 6 од. (оцінка +9,67).

**Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов**

**Умова 1:** виключити з НКШ вигідну, але перекриту ділянку Умань-Олександрія, реалізація – уведення обмеження  $x_{17} = 0$ ; результат: ЦФ = 40,46, змінилася схема перевезень (рис. а).



**Умова 2:** Умова 1 знята. Включити у НКШ невідну ділянку Харків-Донецьк (двоїста оцінка 5,93), дія: уведення обмеження  $x_{28} = 1$ ; результат: ЦФ = 35,93 + 5,93 = 41,93, схема перевезень, рис. б.

**Умова 3:** У мережу включена нова ділянка-дуга Умань-Херсон для можливого здійснення нею регулярних перевезень (в списку невідомих і дуг вона під номером 39), тож необхідно внести відповідні зміни у математичну та комп'ютерну моделі.

В математичній моделі достатньо змінити максимальне значення індексу  $i$ :

### Задача оптимізації 2

I. Знайти вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{39})$  такий, щоб

II. ЦФ  $D = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_{39}x_{39} \rightarrow \min$

III. за обмежень:

$$\sum_{p(i)=j} x_i - \sum_{k(i)=j} x_i = \begin{cases} -1, & \text{для джерела} \\ 1, & \text{для стоку} \\ 0, & \text{для проміжних вузлів} \end{cases}$$

та граничних умов: усі  $x_i \geq 0$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ .

В комп'ютерній моделі (робочій книзі Excel) зміни стосуються обох таблиць та вікна *Поиск решения*, треба виконати такі три дії:

■ в список дуг додати нову дугу, в прикладі це рядок 40 електронної таблиці:

38	Симферопіль	25	5	Маріуполь	28	11	6,7	0	8,77
39	Умань	17	18	Херсон	22	10	9,4	1	

■ у формулах стовпця Вх-Вих змінити адреси діапазонів (в прикладі 39 замінити на 40):

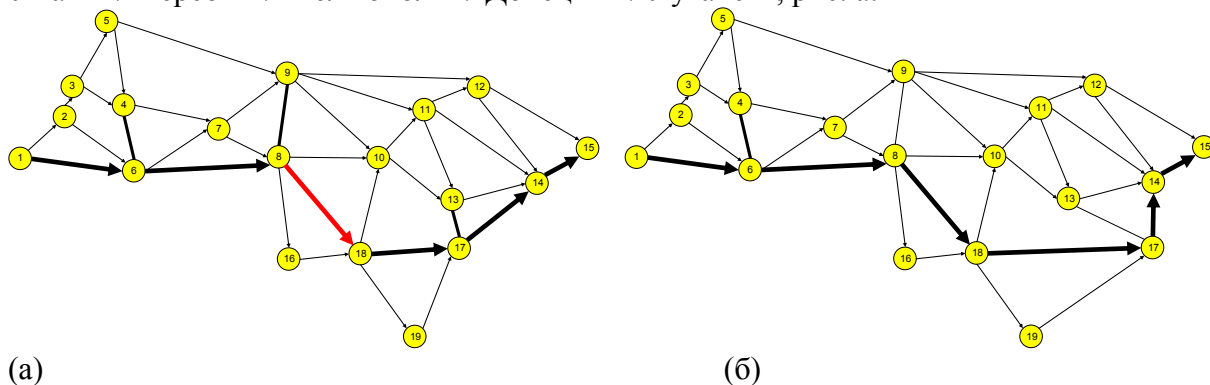
E2		=СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$40;B2;\$R\$2:\$R\$40)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$40;B2;\$R\$2:\$R\$40)																	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	№	Місто	x	y	Вх-Вих	Т-ціна				№	Початок	x	y	Кінець	x	y	Довжина	Шлях (X)	Н-варт
2	1	Мукачєво	3	18	-1	-1	0,0			1	Мукачєво	3	18	Стрий	6	21	4,2	0	0,00

■ у вікні *Поиск решения* змінити діапазон шуканих невідомих (39 замінити на 40):



й запустити цю програму на виконання для отримання нового НКШ (в прикладі ці зміни не привели до зміни довжини НКШ).

Якщо ж вольовим рішенням цю дугу включити в новий НКШ (уведенням обмеження  $x_{39} = 1$ ), значенням його довжини буде 41,65 і нова конфігурація: Мукачєво → Чернівці → Умань → Херсон → Мелітополь → Донецьк → Луганськ, рис. а:



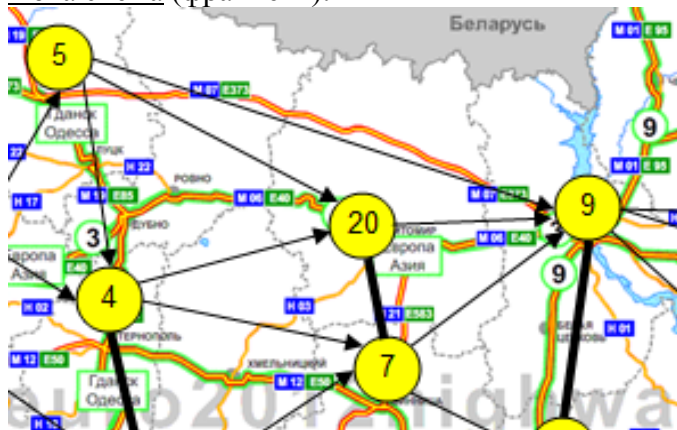
**Умова 4:** Заміна у мережі одного вузла іншим, наприклад, Мелітополя Маріуполем (№ 17), єдине, що треба змінити, це схему мережі, в таблиці дуг – назву вузла та його координати, відповідні відстані будуть автоматично перераховані, результат на рис. б.

**Умова 5:** У мережу додано новий вузол Житомир (№ 20) з відповідними 5-ма дугами, вхідні: Тернопіль-Житомир (4,20), Вінниця-Житомир (7,20), Ковель-Житомир (5,20), вихідні: Житомир-Київ (20,9), Житомир-Вінниця (20,7), усього дуг стало 44.



Зміни стосуються: схеми мережі, математичної моделі, обох таблиць (додається один вузол з координатами та 5 дуг з відповідними відстанями й формулами) та вікна *Поиск решения*.

Нова схема (фрагмент):



### Задача оптимізації 3

I. Знайти вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{44})$  такий, щоб

II. ЦФ  $D = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_{44}x_{44} \rightarrow \min$

III. за обмежень:

$$\sum_{p(i)=j} x_i - \sum_{k(i)=j} x_i = \begin{cases} -1, & \text{для джерела} \\ 1, & \text{для стоку} \\ 0, & \text{для проміжних вузлів} \end{cases}$$

Робочі таблиці (фрагменти):

Зміна лівої частини обмежень

E2		fx = СУММЕСЛИ(\$N\$2:\$N\$45;B2;\$R\$2:\$R\$45)-СУММЕСЛИ(\$K\$2:\$K\$45;B2;\$R\$2:\$R\$45)														
№	Місто	x	y	Вх-Вих	T-ціна	№	Початок	x	y	Кінець	x	y	Довжина	Шлях (X)	H-варт	
1	Мукачеве	3	18	-1	-1	0,0	1	Мукачеве	3	18	Стрий	6	21	4,2	0	0,00
2	Стрий	6	21	0	4,2		2	Мукачеве	3	18	Чернівці	9	17	6,1	1	0,00

Зміна таблиці вузлів та таблиці дуг:

R46		fx = СУММПРОИЗВ(Q2:Q45;R2:R45)									
	J	K	L	M	N	O	P	Q	R		
40	39	Умань	17	18	Херсон	22	10	9,4	1		
41	40	Ковель	7	28	Житомир	14	25	7,6			
42	41	Вінниця	14	20	Житомир	14	25	5,0			
43	42	Тернопіль	8	22	Житомир	14	25	6,7			
44	43	Житомир	14	25	Київ	18	24	4,1			
45	44	Житомир	14	25	Вінниця	14	20	5,0			
46								ЦФ=		41,61	

18	Херсон	22	10
19	Симферопіль	25	5
20	Житомир	14	25

### Задача 4.3. Про максимальний потік/мінімальний переріз

#### Постановка задачі

Неперервний розвиток будь-якого регіону у першу чергу пов'язаний із розвитком відповідної комунікаційної інфраструктури, це: шляхове господарство, засоби інформаційного зв'язку, системи документаційного забезпечення врядування, водо-, газо-, нафто- чи енергопостачання тощо. У свою чергу, розвиток комунікацій безпосередньо супроводжується економічними показниками, зокрема, витратами відповідних матеріальних, трудових, фінансових та інших ресурсів й, відповідною віддачею. Природно виникає практична задача оптимізаційного типу «витрати-випуск» – досягти максимальної ефективності використаних ресурсів за умови їх обмеженої кількості.

Характерним прикладом комунікаційної мережі державного (а тепер, міждержавного) значення є газотранспортна система (ГТС) України, яка є фрагментом колосальної за територіальною ознакою мережі в межах колишнього Радянського Союзу, що починається з джерел газовидобутку у Західному Сибіру, містить складну систему багатокілометрових трубопроводів різного діаметру і потужних компресорних станцій й завершується тисячами європейських споживачів.

ГТС представляє собою змішано-орієнтовану мережу, що складається з окремих ділянок (дуг, направлених та ненаправлених, зображуються стрілками чи лініями) та їх перетинів чи компресорних станцій (вузлів, зображуються кружечками з номерами, назвами чи кодами). Кожна ділянка характеризується пропускною здатністю (скажімо, це діаметр труби), відповідно, певну пропускну здатність має уся мережа як транзитне середовище. Оскільки ця система створюється протягом кількох десятиріч, з позицій пропускної здатності вона неоднорідна, бо застосовуються труби різного діаметру, газ транспортується під різним тиском, тож є ділянки, що утворюють «вузьке місце» – їх пропускна здатність визначає пропускну здатність усієї мережі.

Щороку виділяється бюджет на розвиток цієї мережі, направлений на збільшення її пропускної здатності, для його ефективного використання постає актуальна задача пошуку «вузьких місць» (bottleneck), що час від часу змінюють своє розташування, тих ділянок, пропускну здатність яких треба збільшувати у першу чергу, це – предмет даного дослідження.

У поточних задачах про пошук «вузького місця» розрізняють три типи вузлів: входи, звідки потік виходить, проміжні, куди потік входить й виходить, й виходи, куди потік лише входить, їх зв'язують дуги із заданими пропускними здатностями, які й утворюють «вузькі місця». У розширеному варіанті «вузьким місцем» може бути й вузол, це компресорна станція, обладнання якої обмежує потік, що проходить нею.

ГТС України – це виокремлений державним кордоном фрагмент глобальної мережі, що має 9 вузлів-входів з Росії та Білорусі й 6 вузлів-виходів газу, що йде через сусіднє оточення України (Молдова, Росія, Угорщина, Румунія, Словаччина, Польща) далі в Європу, всередині України у сотнях проміжних вузлів газ споживається на внутрішні потреби та для збереження у підземних сховищах. У трубопровідну систему ГТС також поступає й розповсюджується мережею газ з власних газових родовищ.

Отже, існує безліч варіантів розподілу бюджету по збільшенню пропускної здатності системи шляхом розширення окремих ділянок, тож спочатку ставиться характерна задача оптимізації «про максимальний потік» (max-flow), де визначається рівень насиченості дуг мережі. Отриманий результат є підставою для розв'язку задачі «про мінімальний переріз» (min-cut) для визначення оптимального плану модернізації існуючої мережі, щоб максимізувати ефективність вкладання обмежених бюджетних ресурсів (коштів, техніки, персоналу, матеріалів) у розвиток відповідних комунікацій.

### Постановка задачі

Задана комунікаційна мережа (дороги, трубопроводи, кабельний зв'язок) з  $m$  вузлів та  $n$  направлених дуг, де усі дуги характеризуються лише пропускною здатністю. Серед вузлів один вузол-джерело, один вузол-стік, усі інші вузли проміжні.

Треба визначити:

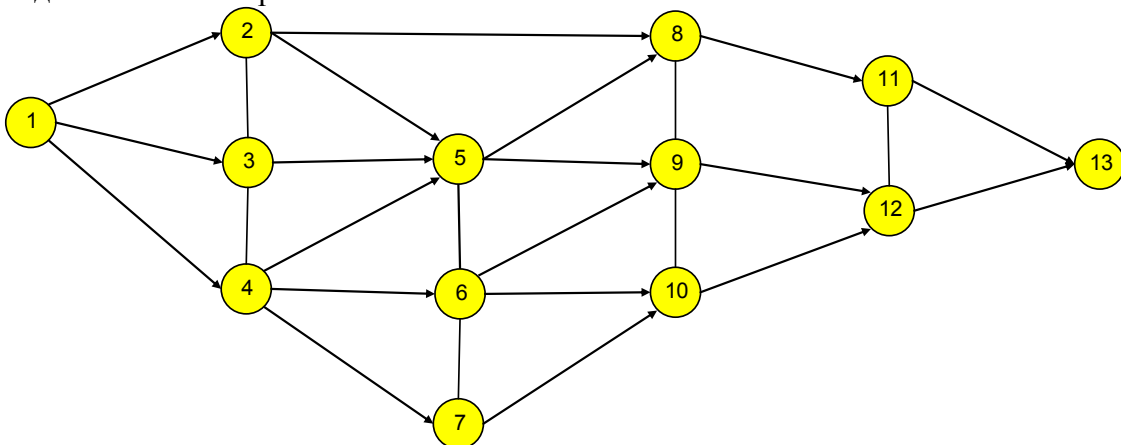
- **максимальний потік**, який можна пропустити мережею від джерела до стоку (пряма задача) та
- **мінімальний переріз** мережі – сукупність насичених дуг, що утворюють вузьке місце (умовним видаленням цієї сукупності мережу «перерізають» навпіл<sup>28</sup>), це двоїста задача. Практична цінність моделі – обмежені ресурси (кошти, техніка, кадри, матеріали), виділені на розширення пропускної здатності мережі, будуть використані якнайкраще, якщо їх направляти на збільшення пропускної здатності дуг, що належать мінімальному перерізу.

### Приклад

Задана водопровідна мережа старого міста змішаного типу, утворена з труб різного діаметру (який визначає пропускну здатність ділянки), у мережі 13 вузлів, загальний шуканий потік води із зовнішнього джерела входить у вузол 1, розподіляється 19 направленими (позначені стрілками) й 7 ненаправленими дугами: (2,3), (3,4), (5,6), (6,7), (8,9), (9,10), (11,12) й стікає у зовнішній стік (вузол 13).

Після заміни ненаправлених дуг парами направлених назустріч дуг, усього в мережі буде  $19 + 2 \cdot 7 = 33$  дуги, це – перетворення змішаної мережі у направлену.

Задана змішана мережа:



### **Математична модель**

Позначення:

$i$  – поточний номер дуги,  $i = 1, \dots, 33$ ,

$j$  – поточний номер вузла,  $j = 1, \dots, 13$ ,

$x_i$  – шукана величина потоку  $i$ -ою дугою,

$\pi_i$  – пропускна здатність  $i$ -ої дуги,

$p(i), k(i)$  – початковий і кінцевий вузли  $i$ -ої дуги,

$\Pi$  – шукана максимальна пропускна здатність мережі,

$\sum_{p(i)=j} x_i$  – вихідний потік  $j$ -го вузла, це сума дугових потоків, початки цих дуг співпадають з іменем цього вузла,

$\sum_{k(i)=j} x_i$  – вхідний потік  $j$ -го вузла, це сума дугових потоків, кінці цих дуг співпадають з

<sup>28</sup> недавно із секретних архівів стало відомо, що вперше цю задачу поставили в США в період «холодної війни» з СРСР: треба було визначити мінімальну кількість ділянок залізниць держав-учасниць Варшавського договору, руйнування яких привело би до ліквідації зв'язків між ними

іменем цього вузла.

В якості ЦФ можна використати:

- суму потоків з вузла 1 ( $x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4}$ ) або ж
- суму потоків у вузол 13 ( $x_{11,13} + x_{12,13}$ ).

### Задача оптимізації

I. Знайти вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{33})$  такий, щоб

II. ЦФ  $\Pi = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$  (вхідний потік з вузла 1 розподіляється трьома дугами), інша форма ЦФ:  $\Pi = x_{31} + x_{33} \rightarrow \max$  (цими двома дугами потік втікає у вузол-стік 13)

III. за обмежень:

(1)  $\sum_{p(i)=1} x_i = \sum_{k(i)=13} x_i$  для джерела ( $j = 1$ ) та стоку ( $j = 13$ ) сумарний потік з вузла 1 = сумарному потоку у вузол 13 (скільки у мережу увійшло, стільки й вийшло)

(2)  $\sum_{p(i)=j} x_i - \sum_{k(i)=j} x_i = 0$  для проміжних вузлів ( $j \neq 1, n$ ), скільки у вузол увійшло, стільки й вийшло

(3)  $x_i \leq \pi_i$ , величина дугового потоку обмежується зверху пропускну здатністю дуги та граничних умов: усі  $x_i \geq 0$ .

### Пояснення до формування і реалізації обмеження

Перше обмеження визначає глобальний баланс потоків у мережі – виток потоків зі джерела співпадає з потоками у стік, це шукана величина, максимальне значення цього потоку визначено цільовою функцією, друге обмеження: в усіх інших вузлах реалізовано локальний баланс – вхідний потік співпадає з вихідним, третє обмеження – дуговий потік не може перевищити пропускну здатність дуги.

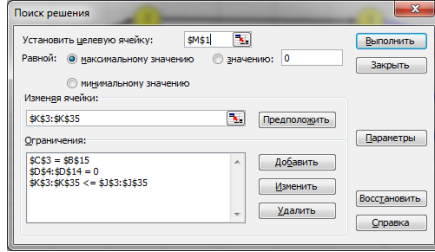
В Excel ці обмеження реалізуються із застосуванням вбудованої функції СУММЕСЛИ().

### Комп'ютерна реалізація математичної моделі

Для розв'язання задачі треба створити дві таблиці: для вузлів і для дуг.

В таблиці для вузлів формуються обмеження, в таблиці для дуг визначаються значення невідомих, в окремій клітинці – значення цільової функції.

Початкові дані і результат.



	Дуга	Початок	Кінець	ПЗ	Потік (X)	ЦФ Резерв	Н-варт
1	1	2	14	2	2	12	0
2	1	3	6	3	0	6	0
3	1	4	20	4	15	5	0
4	2	8	3	8	2	1	0
5	2	5	1	5	0	1	0
6	2	3	2	3	0	2	0
7	3	2	1	2	0	1	0
8	3	5	3	3	1	2	0
9	3	4	4	4	0	4	0
10	4	3	4	4	1	3	0
11	4	5	6	6	6	0	0
12	4	6	8	8	8	0	0
13	4	7	3	7	0	3	0
14	5	8	2	8	0	2	0
15	5	9	8	9	7	1	0
16	5	6	1	6	0	1	0
17	6	5	1	5	0	1	0
18	6	9	2	9	0	2	0
19	6	10	6	10	6	0	0
20	6	7	5	7	2	3	0
21	7	6	6	6	0	6	0
22	7	10	8	10	2	6	0
23	8	9	9	9	0	9	0
24	8	11	2	11	2	0	1
25	9	8	8	8	0	8	0
26	9	12	6	12	6	0	1
27	9	10	1	10	1	0	0
28	10	9	1	9	0	1	0
29	10	12	9	12	9	0	1
30	11	12	3	12	0	3	0
31	11	13	24	13	2	22	0
32	12	11	4	11	0	4	0
33	12	13	17	13	15	2	0

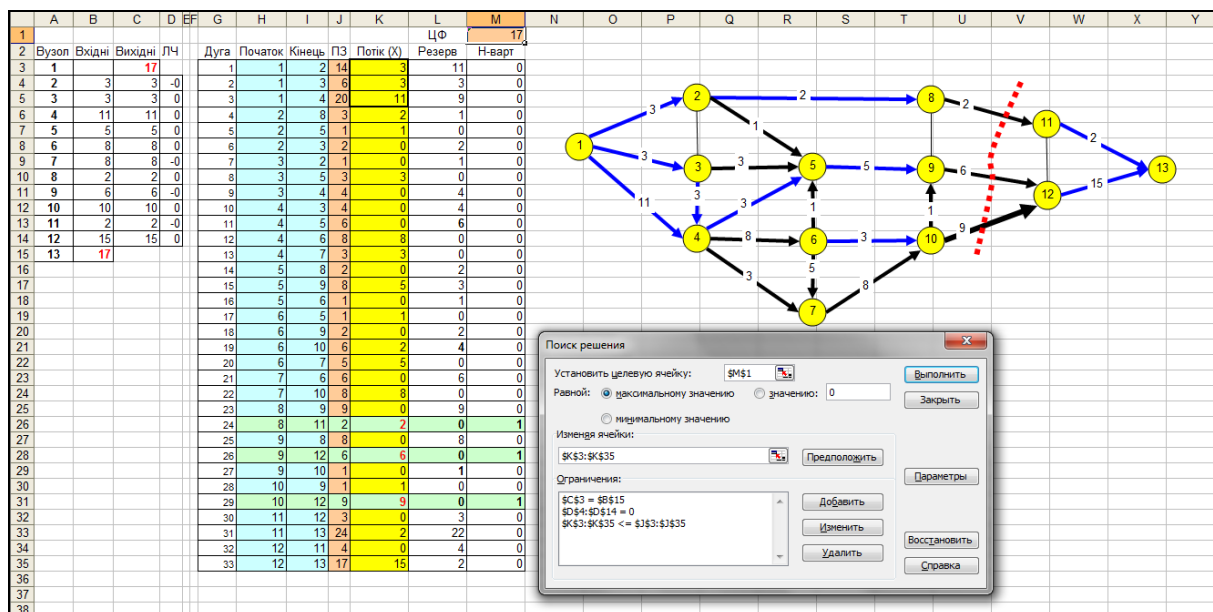
Вузл	Вхідні	Вихідні	ЛЧ
1		17	
2	2	2	0
3	1	1	-0
4	15	15	-0
5	7	7	0
6	8	8	0
7	2	2	0
8	2	2	0
9	7	7	-0
10	9	9	0
11	2	2	0
12	15	15	0
13	17		

### Формули

1	A	B	C	D
2	Вузл	Вхідні	Вихідні	ЛЧ
3	1		=СУММЕСЛИ(\$H\$3:\$H\$35;A3;\$K\$3:\$K\$35)	
4	2	=СУММЕСЛИ(\$I\$3:\$I\$35;A4;\$K\$3:\$K\$35)	=СУММЕСЛИ(\$H\$3:\$H\$35;A4;\$K\$3:\$K\$35)	=B4-C4
5	3	=СУММЕСЛИ(\$I\$3:\$I\$35;A5;\$K\$3:\$K\$35)	=СУММЕСЛИ(\$H\$3:\$H\$35;A5;\$K\$3:\$K\$35)	=B5-C5
6	4	=СУММЕСЛИ(\$I\$3:\$I\$35;A6;\$K\$3:\$K\$35)	=СУММЕСЛИ(\$H\$3:\$H\$35;A6;\$K\$3:\$K\$35)	=B6-C6
7	5	=СУММЕСЛИ(\$I\$3:\$I\$35;A7;\$K\$3:\$K\$35)	=СУММЕСЛИ(\$H\$3:\$H\$35;A7;\$K\$3:\$K\$35)	=B7-C7
8	6	=СУММЕСЛИ(\$I\$3:\$I\$35;A8;\$K\$3:\$K\$35)	=СУММЕСЛИ(\$H\$3:\$H\$35;A8;\$K\$3:\$K\$35)	=B8-C8
9	7	=СУММЕСЛИ(\$I\$3:\$I\$35;A9;\$K\$3:\$K\$35)	=СУММЕСЛИ(\$H\$3:\$H\$35;A9;\$K\$3:\$K\$35)	=B9-C9
10	8	=СУММЕСЛИ(\$I\$3:\$I\$35;A10;\$K\$3:\$K\$35)	=СУММЕСЛИ(\$H\$3:\$H\$35;A10;\$K\$3:\$K\$35)	=B10-C10
11	9	=СУММЕСЛИ(\$I\$3:\$I\$35;A11;\$K\$3:\$K\$35)	=СУММЕСЛИ(\$H\$3:\$H\$35;A11;\$K\$3:\$K\$35)	=B11-C11
12	10	=СУММЕСЛИ(\$I\$3:\$I\$35;A12;\$K\$3:\$K\$35)	=СУММЕСЛИ(\$H\$3:\$H\$35;A12;\$K\$3:\$K\$35)	=B12-C12
13	11	=СУММЕСЛИ(\$I\$3:\$I\$35;A13;\$K\$3:\$K\$35)	=СУММЕСЛИ(\$H\$3:\$H\$35;A13;\$K\$3:\$K\$35)	=B13-C13
14	12	=СУММЕСЛИ(\$I\$3:\$I\$35;A14;\$K\$3:\$K\$35)	=СУММЕСЛИ(\$H\$3:\$H\$35;A14;\$K\$3:\$K\$35)	=B14-C14
15	13	=СУММЕСЛИ(\$I\$3:\$I\$35;A15;\$K\$3:\$K\$35)	=СУММЕСЛИ(\$H\$3:\$H\$35;A15;\$K\$3:\$K\$35)	

	G	H	I	J	K	L	M
1	Дуга	Початок	Кінець	ПЗ	Потік (X)	ЦФ Резерв	=СУММ(K3:K5) Н-варт
2	1	2	14	2	2	12	0
3	1	3	6	3	0	6	0
4	1	4	20	4	15	5	0
5	2	8	3	8	2	1	0
6	2	5	1	5	0	1	0
7	3	2	1	2	0	1	0
8	3	5	3	3	1	2	0
9	3	4	4	4	0	4	0
10	4	3	4	4	1	3	0
11	4	5	6	6	6	0	0
12	4	6	8	8	8	0	0
13	4	7	3	7	0	3	0
14	5	8	2	8	0	2	0
15	5	9	8	9	7	1	0
16	5	6	1	6	0	1	0
17	6	5	1	5	0	1	0
18	6	9	2	9	0	2	0
19	6	10	6	10	6	0	0
20	6	7	5	7	2	3	0
21	7	6	6	6	0	6	0
22	7	10	8	10	2	6	0
23	8	9	9	9	0	9	0
24	8	11	2	11	2	0	1
25	9	8	8	8	0	8	0
26	9	12	6	12	6	0	1
27	9	10	1	10	1	0	0
28	10	9	1	9	0	1	0
29	10	12	9	12	9	0	1
30	11	12	3	12	0	3	0
31	11	13	24	13	2	22	0
32	12	11	4	11	0	4	0
33	12	13	17	13	15	2	0

## Загальний вигляд табличного документа



## Аналіз отриманого результату

### Пряма задача

Визначені усі дугові потоки, на рисунку показані товстими лініями, максимальний потік дорівнює 17 од.

Елементи стовпця Резерв це різниця (ПЗ – потік), що визначає резерв пропускної здатності дуги, дуги з нульовим резервом (їх 10) насичені і є претендентами належати мінімальному перерізу. На рисунку вони показані чорним кольором.

### Двоїста задача

Ненульові двоїсті оцінки пропускних здатностей (див. стовпець Н-варт, «1») визначають дуги мінімального перерізу, їх три, це:  $\{x_{24}, x_{25}, x_{29}\} \rightarrow (2 + 6 + 9 = 17)$ .

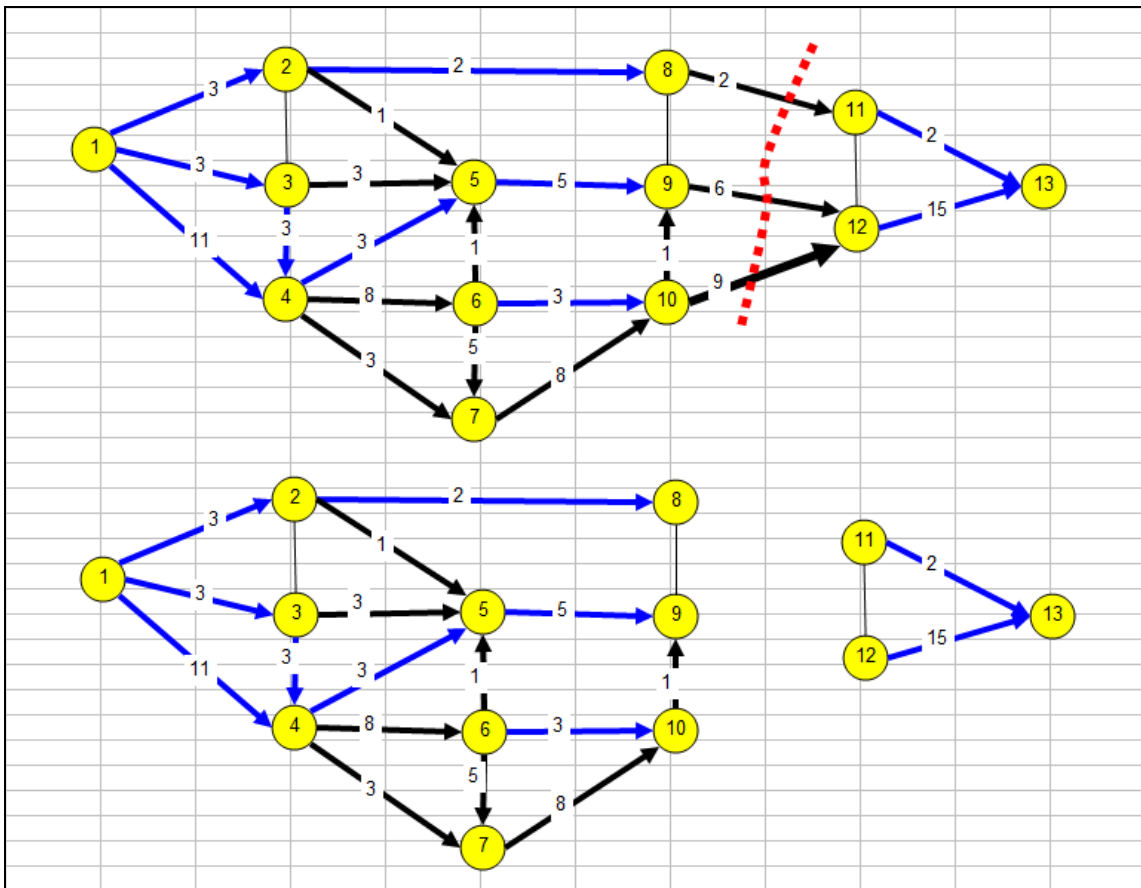
Отже, серед 33 дуг 10 дуг насичені (резерв = 0) й 23 дуги ненасичені (мають резерв пропускної здатності) дуг. Крім цього є 16 дуг з нульовими потоками, з них 8 – це 2-направлені пари (2,3), (5,6), (8,9), (11, 12), направлені дуги (1,3), (2,5), (3,4), (4,7), (5,8), (6,9), (7,6), (10,9).

Додатковий результат: визначені шляхи руху потоку ненаправленими дугами у напрямках:  $4 \rightarrow 3$ ,  $6 \rightarrow 7$ ,  $9 \rightarrow 10$ .

Зауваження. Можливе існування інших розподілів з однаковим результатом: ЦФ = 17.

**Мінімальний переріз** – сукупність дуг, видалення яких розділяє мережу навпіл.

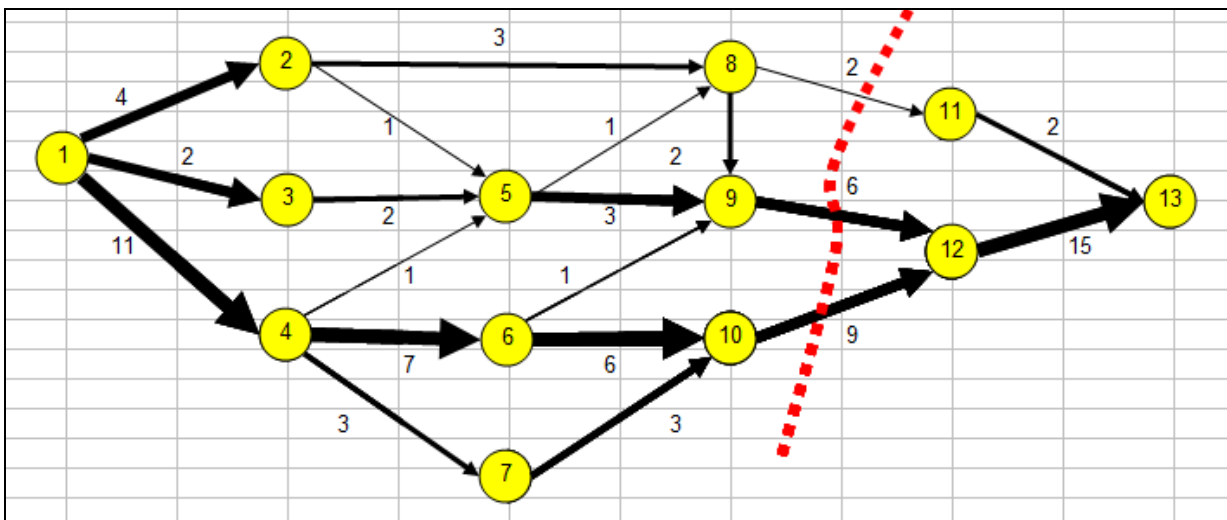
У прикладі мінімальний переріз – «вузьке місце» (bottleneck, «горлечко пляшки») – утворили три насичені дуги мережі: (8, 11), (9,12) та (10, 12), дійсно, їх видалення «перерізло» мережу навпіл. Це дуже цінний результат для практики – кошти та інші ресурси, заплановані на підвищення пропускної здатності усієї мережі, треба направляти на підвищення пропускної здатності певної з цих трьох ділянок, адже лише їх нормовані вартості визначають, що додаткова 1 ПЗ певної з них приведе до збільшення ПЗ усієї мережі на 1.



**Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов**

**Умова 1.** За технологічними вимогами дуги не можуть бути незаповненими (з нульовими потоками), мінімальна наповненість не менше 1, відповідно, вводиться обмеження на величину потоку знизу (не менше, ніж), наприклад, усі  $x_i \geq 1$ .

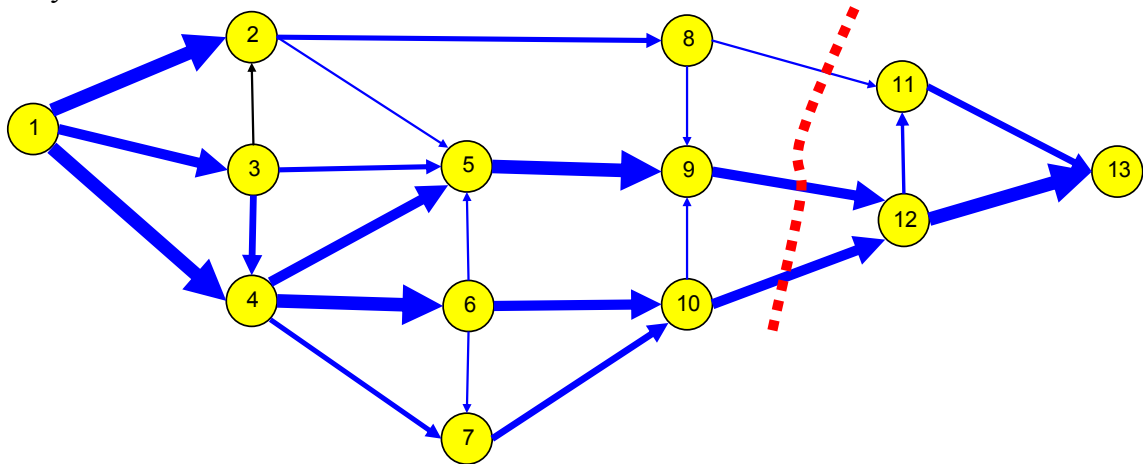
Результат:



Ненаправлені дуги (2,3), (3,4), (5,6), (6,7), (9,10), (11,12) містять направлені назустріч одиничні потоки і тому, фактично, порожні (не показані).

**Умова 2.** Цими 6-ма ненаправленими дугами пропустимо одиничний потік, це додатково 6 обмежень, наприклад:  $x(2,3) + x(3,2) = 1$  тощо.

Результат:



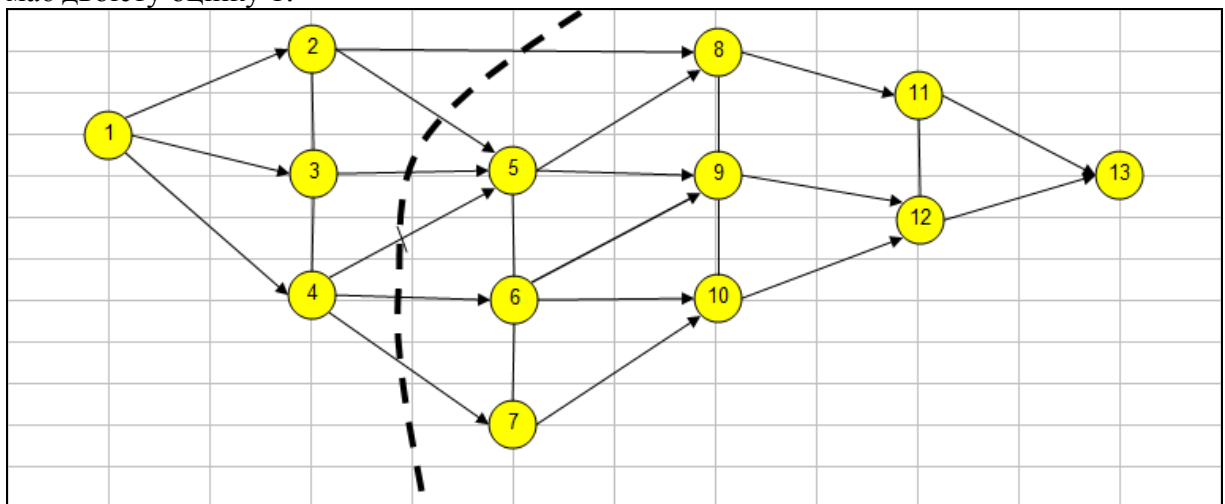
Додатковий результат: визначено оптимальний напрямок руху потоків ненаправленими дугами.

**Умова 3.** Вирішено сформуванати виробничу програму на 3 роки таким чином, щоб кожного року задовольняти вимоги мінімального перерізу.

Рік 1: на 1 збільшено ПЗ усіх дуг мінімального перерізу: (8,11), (9,12), (10,12). Результат: ПЗ мережі зросла з 17 до 20, залишився той самий мінімальний переріз

Рік 2: на 1 збільшено ПЗ дуг цього ж мінімального перерізу. Результат: ПЗ зросла з 20 до 23, переріз не змінився.

Рік 3: ті ж дії, результат: дуга (8,11) має резерв 2, (9,12) насичена (9), (10,12) насичена, 12, головне – ПЗ збільшилась лише на 1 й дорівнює 24. Висновок: з 3-ох одиниць коштів лише одна дала користь, тож треба на кожному кроці збільшувати ПЗ дуг перерізу поступово, по одній дузі, а не усіх одразу, тепер переріз утворили 6 насичених дуг і кожна з них має двоїсту оцінку 1:





#### Задача 4.4. Про потік мінімальної вартості між вузлами $s$ та $t$

Це – класична потокова задача, де дуги сітки характеризуються питомими витратами на перевезення  $i$ , можливо, обмеженою пропускнуою здатністю. Необхідно визначити оптимальні маршрути доставки заданого об'єму з вузла-джерела у вузол-стік мінімальної загальної вартості. Всі проміжні вузли мають нульові потенціали і є суто транзитними.

##### Приклад.

Транспортна мережа задана змішано-орієнтованою сіткою, що відповідає реальній практиці, коли напрямку руху по певним ділянкам визначені однозначно, по іншим (наприклад, Вінниця-Калинівка) немає упевненості, це треба ще визначити:



Початкові дані містять відомості про сітку, що складається з 12 вузлів та 22 направлених дуг.

Для першого вузла задана пропозиція (100), для останнього – попит (-100), потенціали всіх інших – нуль (вони транзитні). Для дуг задані питомі витрати на перевезення ними вантажу.

##### Математична модель

I. Знайти вектор  $X = (x_1, \dots, x_{22})$ , де  $x_i$  – об'єм перевезень  $i$ -ою дугою, такий, щоб

II. загальні витрати  $V = \sum_{i=1}^{22} d_i x_i \rightarrow \min$ , де  $d_i$  – питомі витрати для  $i$ -ої дуги

III. за умови балансу потоків для кожного  $i$ -го вузла:  $F_{\text{вих}}(x_i) - F_{\text{вх}}(x_i) = p(x_i)$ , де  $F_{\text{вих}}(x_i)$ ,  $F_{\text{вх}}(x_i)$  – сума потоків на виході та вході кожного  $i$ -го вузла

та граничних умов: всі  $x_i \geq 0$ .

Вузли			Дуги			
№	Вузол	Попит/Проп	№	Початок	Кінець	Витрати
1	Деражня	100	1	Деражня	Хмільник	4
2	Хмільник		2	Деражня	Вінниця	6
3	Вінниця		3	Деражня	Жмеринка	3
4	Жмеринка		4	Хмільник	Калинівка	3
5	Шаргород		5	Вінниця	Калинівка	2
6	Тутьчин		6	Калинівка	Вінниця	2
7	Гайсин		7	Жмеринка	Вінниця	3
8	Іллінці		8	Вінниця	Жмеринка	3
9	Погребище		9	Вінниця	Тутьчин	6
10	Калинівка		10	Жмеринка	Шаргород	3
11	Сквира	-100	11	Шаргород	Тутьчин	3
12	Тетіїв		12	Тутьчин	Іллінці	4
			13	Тутьчин	Гайсин	3
			14	Калинівка	Іллінці	6
			15	Калинівка	Погребище	5
			16	Калинівка	Сквира	8
			17	Іллінці	Погребище	3
			18	Іллінці	Тетіїв	4
			19	Гайсин	Тетіїв	7
			20	Погребище	Сквира	3
			21	Тетіїв	Сквира	3
			22	Сквира	Тетіїв	3

Таблична модель:

Вузли						Дуги							
№	Вузол	Попит/Проп	T-ціна	Вхід	Вихід	Сума	Потік	H-варт	№	Початок	Кінець	Витрати	Всього
1	<b>Деражня</b>	100	0	0	100	100	<b>100</b>	0	1	Деражня	Хмільник	4	400
2	<b>Хмільник</b>		-4	100	100	0	0	0	2	Деражня	Вінниця	6	0
3	Вінниця		-6	0	0	-0	0	0	3	Деражня	Жмеринка	3	0
4	Жмеринка		-3	0	0	0	<b>100</b>	0	4	Хмільник	Калинівка	3	300
5	Шаргород		-6	0	0	0	0	1	5	Вінниця	Калинівка	2	0
6	Тутьчин		-9	0	0	0	0	3	6	Калинівка	Вінниця	2	0
7	Гайсин		-5	0	0	0	0	0	7	Жмеринка	Вінниця	3	0
8	Іллінці		-13	0	0	-0	0	6	8	Вінниця	Жмеринка	3	0
9	Погребище		-12	0	0	-0	0	3	9	Вінниця	Тутьчин	6	0
10	<b>Калинівка</b>		-7	100	100	-0	0	0	10	Жмеринка	Шаргород	3	0
11	<b>Сквира</b>	-100	-15	100	0	-100	0	0	11	Шаргород	Тутьчин	3	0
12	Тетіїв		-12	0	0	0	0	0	12	Тутьчин	Іллінці	4	0
							0	7	13	Тутьчин	Гайсин	3	0
							0	0	14	Калинівка	Іллінці	6	0
							0	0	15	Калинівка	Погребище	5	0
							<b>100</b>	0	16	Калинівка	Сквира	8	800
							0	4	17	Іллінці	Погребище	3	0
							0	5	18	Іллінці	Тетіїв	4	0
							0	0	19	Гайсин	Тетіїв	7	0
							0	0	20	Погребище	Сквира	3	0
							0	0	21	Тетіїв	Сквира	3	0
							0	6	22	Сквира	Тетіїв	3	0
							0					ЦФ=	<b>1500</b>

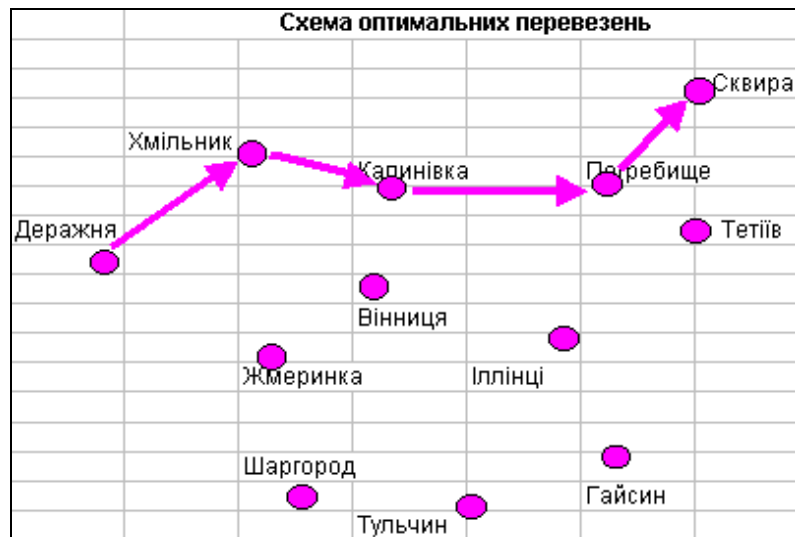
## Аналіз результату

### Пряма задача

План перевезень мінімальної вартості  $X$  (див. таблицю), ЦФ = 1500.

### Двоїста задача, оцінки:

- нормовані вартості потоків (H-варт) вказують на збільшення витрат (додатні числа) при вимушеному включенні в маршрут “нульових” ділянок;
- тіньові ціни для потенціалів вузлів (від’ємні числа) вказують на зменшення витрат за умови розміщення джерела у відповідному вузлі. Наприклад, якщо зробити джерело (базу) в Тетіїві (оцінка -12), тоді витрати склали  $1500 + (-12) \cdot 100 = 300$ .



Уведенням додаткових обмежень можна адаптувати модель для врахування спеціальних умов чи вимог.

#### Задача 4.5. Задача комівояжера

Задача комівояжера (*traveling salesman problem, TSP*) – найбільш відома й навіть знакова модель математичного програмування, де зосереджені засоби лінійного, цілочислового та потокового програмування.

Увагу до цієї задачі дослідники привертають завдяки:

- а) великій кількості практичних задач, що до неї зводяться;
- б) зосередженню характерних математичних, алгоритмічних та обчислювальних труднощів в одному місці;
- в) інтуїтивній простоті та прозорості формулювання, що породжує зверхність її постановників.

Саме ця математична задача, що колись вийшла зі сфери інтелектуальних розваг, виконує роль «локомотива» комп'ютерної індустрії і певного подразника математиків й програмістів, стимулюючи розробку ефективних обчислювальних алгоритмів та технічних засобів їх машинної реалізації, про це книга одного з розробників відповідних програмних продуктів<sup>29</sup>. Недавні рекорди, встановлені за допомогою цих програм: задача комівояжера на 15112 міст (карта Німеччини, 2001 р.), на 24978 міст (карта Швеції, 2004 р.), останній з відомих (2006 р.) й найбільший за розмірами задачі – на 85900<sup>30</sup> міст, [www.tsp.gatech.edu](http://www.tsp.gatech.edu) (сайт технічного університету в Атланті, штат Джорджія, США):

#### Постановка задачі

На географічній карті визначено  $n$  міст для відвідування із заданими координатами та шляхи між ними. Мовою теорії графів – місто, це вузол, а ділянка між парою вузлів – дуга. Отже, маємо схематичне зображення, що має назву *повний ненаправлений й зважений граф*, бо: а) усі пари вузлів зв'язані між собою дугами, загалом має  $n^2$  дуг, у тому числі, зв'язок «сам із собою», називається «петля»<sup>31</sup>; б) кожна дуга має два напрямки й в) кожна дуга має «вагу» у формі відстані.

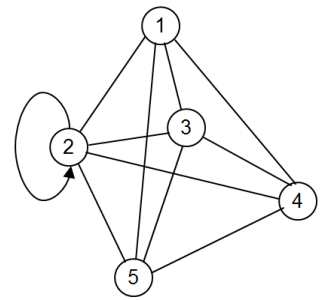
<sup>29</sup> W. Cook. In Pursuit of Traveling Salesman: Mathematics at the Limit of Computation, Princeton Univ. Press, 2012, 272 p.

<sup>30</sup> використана багатопроцесорна обчислювальна система, сумарна тривалість розрахунків біля 600 годин. Модель задачі комівояжера застосована при розробці великої інтегральної схеми (VLSI), яка на початку складається з множини замкнених ланок між парами контактів. Лазер рухається по цих ланках й випаровуванням видаляє зайві провідники, ставиться оптимізаційна задача – визначити шлях руху лазера мінімальної довжини, що забезпечує мінімальні втрати енергії в процесі формування мікросхеми

<sup>31</sup> дуга-петля є діагональним елементом в матриці відстаней й в обчисленнях задана великим числом для заборони замкнення шляху, якщо граф визначити списком, можна уникнути цього елемента, чим зменшується розмір задачі

### Приклад ( $n = 5$ )

На рисунку: карта, міста для відвідування та шляхи на карті, граф (зв'язок «сам із собою» показано лише для вузла 2):



Знаючи координати міст ( $x_i, y_i, i = 1, \dots, n$ ), можна обчислити відстані між ними й сформуванати числову таблицю – квадратну матрицю відстаней  $V = \{v_{ij}\}$  між усіма парами  $n$  міст ( $i, j = 1, \dots, n$ ). У загальному випадку задача несиметрична,  $v_{ij} \neq v_{ji}$ , наприклад, із врахуванням наявності одностороннього руху на якійсь ділянці чи взагалі відсутністю зв'язку між певними парами міст (як буває у гірській місцевості чи в електронній схемі).

Матриця відстаней			Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя	Ів-Франківськ	Київ
	x	y	9,0	8,0	7,5	11,5	7,0	7,5	11,5
Вінниця	9,0	6,0	999	6,1	8,6	2,5	6,8	3,8	3,2
Дніпропетровськ	8,0	12,0	6,1	999	2,5	6,9	1,1	9,5	5,3
Донецьк	7,5	14,5	8,6	2,5	999	9,4	2,1	12,0	7,6
Житомир	11,5	6,0	2,5	6,9	9,4	999	7,9	5,3	2,0
Запоріжжя	7,0	12,5	6,8	1,1	2,1	7,9	999	10,0	6,4
Ів-Франківськ	7,5	2,5	3,8	9,5	12,0	5,3	10,0	999	6,8
Київ	11,5	8,0	3,2	5,3	7,6	2,0	6,4	6,8	999

Комівояжер (фр. *commis voyageur*, англ. *traveling salesman*, старорос. *коробейник*, зараз – роз'їздний торговець чи представник фірми, керівник розгалуженої структури, контролер, депутат, учасник кільцевих перегонів тощо) хоче виїхати із певного початкового міста, об'їхати всі міста, побувавши в кожному по одному разу, і повернутися у те ж саме місто (звідси – цикл) так, щоб загальна довжина усього циклу (контур, обходу) була б мінімальною.

В математичній теорії графів це задача про побудову *гамільтонова*<sup>32</sup> циклу – типова й зрозуміла кожному постановка задачі, але мало хто представляє її складність щодо розв'язання. До цієї зрозумілої постановки зводиться багато практичних задач, які за своєю природою далекі від проблем роз'їздного торговця, але мають однакову ціль – побудувати оптимальний контур обходу міст, що проходить по одному разу вузлами графа<sup>33</sup>. Скажімо, у виробничій сфері до неї зводяться серйозні задачі визначення оптимального технологічного циклу, де треба виконати певну послідовність операцій якнайшвидше, кожна операція, це вузол («місто»), переходи між операціями – дуги («ділянки»).

Типовий приклад – задача про переналаштування універсального агрегату типу змішувача чи подрібнювача – тривалість переходу від обробки чи утворення попереднього продукту до нового різна й треба визначити оптимальний цикл мінімальної тривалості. (Достатньо порівняти користування універсальним міксером для утворення суміші із різних продуктів: м'ясопродуктів, риби, овочів чи ягід – на кожній стадії треба відмити машину, замінити ножі, підготуватися до наступної операції, зробити заготовку складових тощо).

Задача комівояжера має дуже просту постановку, її математична модель схожа на модель класичної матричної задачі про призначення. В той же час вона явно проблемно-орієнтована, тому вона й була однією з тих, для якої спробували застосувати апарат щойно розробленого лінійного програмування<sup>34</sup>, який, як тоді здавалось, має необмежені можливості. Однак, ця спроба виявилася малоуспішною, бо, як з'ясувалося, вимагала надзви-

<sup>32</sup> В. Гамільтон (1805-1865), видатний ірландський математик, перший постановник задачі у формі інтелектуальної гри

<sup>33</sup> задача «про Кенігсберзькі мости» (про побудову *ейлерова циклу*), придумана Л. Ейлером теж як розвага, відшукується цикл, який проходить по одному разу дугами графа

<sup>34</sup> Dantzig G., Fulkerson D., Johnson S. Solution of large-scale travelling-salesman problem, J. ORSA, 1954. Зафіксована історична подія: тоді на край недосконалих лампових ЕОМ симплекс-методом із додаванням обмежень на цілочисельність вдалося вперше розв'язати (тоді - велику за розмірами) задачу комівояжера, з'єднавши мінімальним контуром столиці 49 штатів США

чайних обчислювальних потужностей для реалізації досить громіздкої моделі і виконання операцій з цілими числами. Зате ця спроба показала обмеженість ЛП і стала викликом для математиків та програмістів до розробки інших класів моделей оптимізації, у першу чергу, моделей дискретного, зокрема, цілочислового та булева програмувань.

Більш-менш пристойний розв'язок задачі комівояжера став можливим із середини 1960-их років, коли з'явилися більш досконалі комп'ютери і був розроблений метод «гілок і границь»<sup>35</sup> для задач цілочислового програмування, який хоча й реалізує прискорений перебір варіантів, все ж ставить досить серйозні вимоги до ресурсів комп'ютера – сьогодні реалізація цих моделей для крупних задач можлива лише за допомогою суперкомп'ютерної техніки, недосяжної для звичайних користувачів<sup>36</sup>.

Але на щастя користувачів звичайних ПК з 1990-их років розробляються оригінальні «нематематичні» (евристичні) методи нелінійної оптимізації типу генетичного алгоритму у складі моделей еволюційного програмування, масовий попит на них привів – радіймо! – до включення цього засобу у склад надбудови *Поиск решения* для версій Excel 2007/2010. І тепер хоча й наближено, а для практичних задач, де початкові дані теж наближені, це цілком припустимо, на звичайному ПК, обладнаним Excel 2007/2010, еволюційним методом можна розв'язувати задачу комівояжера аж до сотні й більше міст! (далі покажемо).

Тож прозорість самої задачі, методи і засоби її розв'язання стали своєрідним тестом (*benchmark*) для випробувань всіх новостворених комп'ютерів, комп'ютерних систем та програмних продуктів, бо додавання хоча б одного ще міста до щойно розв'язаної задачі для  $n$  задач суттєво збільшує тривалість пошуку, адже кількість допустимих варіантів визначається функцією факторіалу  $(n-1)!$ . Ясно, що повний перебір  $(n-1)!$  варіантів неможливий, тому зусилля математиків-програмістів направлені на винахід алгоритмів прискореного перебору варіантів (типу алгоритму «гілок і границь»).

У прикладах нижче ми побачимо цю специфіку, коли, скажімо для задачі з  $n = 10$  пошук на звичайному ПК триває кілька секунд, для  $n = 11$  кілька хвилин, а вже для  $n = 13$  тривалість обчислювального процесу складає майже півгодини.

Таким чином, задача комівояжера дуже приваблива щодо її практичного застосування, але «кусається» щодо розв'язання реальної задачі хоча б на кілька десятків міст. Тому поруч з точними і недосяжними для реалізації методами, на наше щастя, існують т.зв. евристичні методи, які дозволяють досить швидко отримати наближений, субоптимальний результат для крупних задач.

## Математична модель

### Позначення:

$n$  – розмір задачі (кількість міст-вузлів)

$n^2$  – кількість зв'язків-дуг

$i$  – поточний номер початку дуги (номер рядка матриці),

$j$  – поточний номер кінця дуги, номер стовпця матриці,  $i, j = 1, \dots, n$

$v_{ij}$  – відстань між  $i$ -им та  $j$ -им вузлами, це вагові коефіцієнти дуг, елементи квадратної матриці  $V$  (розміром  $n \times n$ ), якою описано неорієнтований повний зважений граф, для симетричної матриці  $v_{ij} = v_{ji}$ ,  $v_{ii} = \infty$

$x_{ij}$  – шукана невідома змінна булевого типу:  $x_{ij} = 1$ , якщо дуга  $(i, j)$  належить найкоротшому контуру обходу,  $x_{ij} = 0$  в протилежному випадку, це елементи квадратної матриці невідомих  $X$  (розміром  $n \times n$ ).

## Задача оптимізації 1

I. Знайти таку квадратну матрицю  $X$  з  $n^2$  елементами  $x_{ij}$ , щоб

<sup>35</sup> Little J. and other. An algorithm for the traveling salesman problem. OR, 1963

<sup>36</sup> для скромної задачі комівояжера на 30 міст число варіантів  $30! \approx 10^{30}$ , ПК зі швидкістю  $10^9$  оп./с (яких ще немає) буде методом повного перебору аналізувати усі комбінації, щоб вибрати кращу, протягом  $10^{14}$  років

II. загальна довжина контуру обходу  $n$  міст (ЦФ)  $D = \sum_{i,j} v_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$

III. при обмеженнях:

$$(3.1) \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \text{ в кожен } j\text{-ий вузол } \mathbf{входить} \text{ одна дуга (в'їзд комівояжера у місто)}$$

$$(3.2) \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \text{ з кожного } i\text{-го вузла } \mathbf{виходить} \text{ одна дуга (ви'їзд комівояжера з міста)}$$

при граничних умовах: всі  $x_{ij}$  – булевого типу.

Обмеження відповідають умовам задачі (побувати один раз у кожному місті), за записом повністю співпадає з моделлю задачі про призначення, коли на одну вакансію можна призначити одного претендента, а один претендент може зайняти одну вакансію, невідомі – булевого типу. Саме ця аналогія й привернула увагу Данцига до задачі комівояжера, яка здавалася досить простою, бо моделі однакові. Але подальший детальний аналіз застосування моделі про оптимальне призначення до задачі комівояжера показав, що у цій моделі крім  $n!$  допустимих гамільтонових (повних, які охоплюють усі вузли) контурів є ще й багато неповних контурів, які охоплюють лише певні групи міст й замість одного повного контуру можна отримати кілька неповних контурів із загальною мінімальною довжиною.

У такому випадку формується додаткова, майже ручна, процедура, яка послідовно «розриває» часткові контури, змушуючи модель відшукувати більш крупні об'єднання аж до повного контуру. Ця обставина суттєво ускладнила розв'язання задачі комівояжера і змусило шукати для неї інші методи й формувати нову модель.

Таким методом стало введення в модель додаткового т.зв. «обмеження зв'язності», що має таку форму:  $z_i - z_j + (n-1)x_{ij} \leq n-2$ , де: вектор  $Z = \{z_i\}$  –  $n$  шуканих довільних чисел, які гарантують заборону утворення неповних циклів, «розплатою» за це є суттєве збільшення розмірів задачі,  $z_j = z^T_i$ .

Отже, задача має:

- **змінних:**  $n^2 + n$ , де:  $n^2$  – розмір матриці невідомих ( $X$ ),  $n$  – розмір вектора  $Z$
  - **обмежень:**  $2n + n(n-1)$ , де:  $2n$  – суми елементів матриці  $X$  по рядках і стовпцях,  $n(n-1)$  – обмеження незв'язності ( $n$  стовпців та  $n-1$  рядків, окрім першого), після перетворень:  $2n + n^2 - n = n^2 + n$
  - граничних умов:  $n^2$  ( $X$  булевого типу),
- тобто, кількість невідомих співпадає з кількістю обмежень й дорівнює  $n^2 + n$ .

Відомо, що вбудована версія надбудови *Поиск решения* розрахована на розв'язання задач оптимізації з числом невідомих до 200 й числом обмежень до 100 (далі – обмеження 200/100). Тож можливі постановки задачі оптимізації мають враховувати це обмеження:

	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12	n=13	n=14	n=15
Змінних	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156	182	210	240
Обмежень	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156	182	210	240

Таким чином, з урахуванням обмеження 200/100 максимальний розмір задачі комівояжера для стандартної версії Excel  $n = 9$  (до 100 обмежень)<sup>37</sup>.

### Приклад 1

Розв'язати задачу комівояжера для  $n = 5$ , відомості про міста задані їх координатами на прямокутній карті-схемі, відстані обчислюються за формулою:  $v_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ .

<sup>37</sup> існують версії Excel 2003, де кількість невідомих й обмежень обмежується числом 200, що дозволяє розв'язувати задачі до  $n = 13$ , див. далі

Результат 1: отримано миттєво, загальна кількість контурів:  $4! = 24$ .



- I. Знайдена матриця  $X$
- II. ЦФ  $D = 10,73$
- III. Усі обмеження задоволені

Замість одного повного контуру утворено два неповних контурів:

- *Вінниця-Житомир-Вінниця*
- *Донецьк-Дніпропетровськ-Запоріжжя-Донецьк*

Фактично, це розв'язок задачі про призначення 4-ох претендентів (рядки) на 4 вакансії (стовпці).

	Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя
Вінниця	0,0	6,1	8,6	2,5	6,8
Дніпропетровськ	6,1	0,0	2,5	6,9	1,1
Донецьк	8,6	2,5	0,0	9,4	2,1
Житомир	2,5	6,9	9,4	0,0	7,9
Запоріжжя	6,8	1,1	2,1	7,9	0,0

	Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя	виходять
Вінниця	0	0	0	1	0	1
Дніпропетровськ	0	0	1	0	0	1
Донецьк	0	0	0	0	1	1
Житомир	1	0	0	0	0	1
Запоріжжя	0	1	0	0	0	1
входять	1	1	1	1	1	10,73



## Задача оптимізації 2

I. Знайти таку квадратну матрицю  $X$  з  $n^2$  елементами  $x_{ij}$  та вектор  $Z = \{z_i\}$ , щоб

II. загальна довжина контуру обходу  $n$  міст (ЦФ)  $D = \sum_{i,j} v_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$

III. при обмеженнях:

$$(3.1) \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \text{ в кожен } j\text{-ий вузол } \mathbf{входить} \text{ одна дуга (в'їзд комівояжера у місто)}$$

$$(3.2) \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \text{ з кожного } i\text{-го вузла } \mathbf{виходить} \text{ одна дуга (ви'їзд комівояжера з міста)}$$

$$(3.3) z_i - z_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2$$

при граничних умовах: всі  $x_{ij}$  – булевого типу.

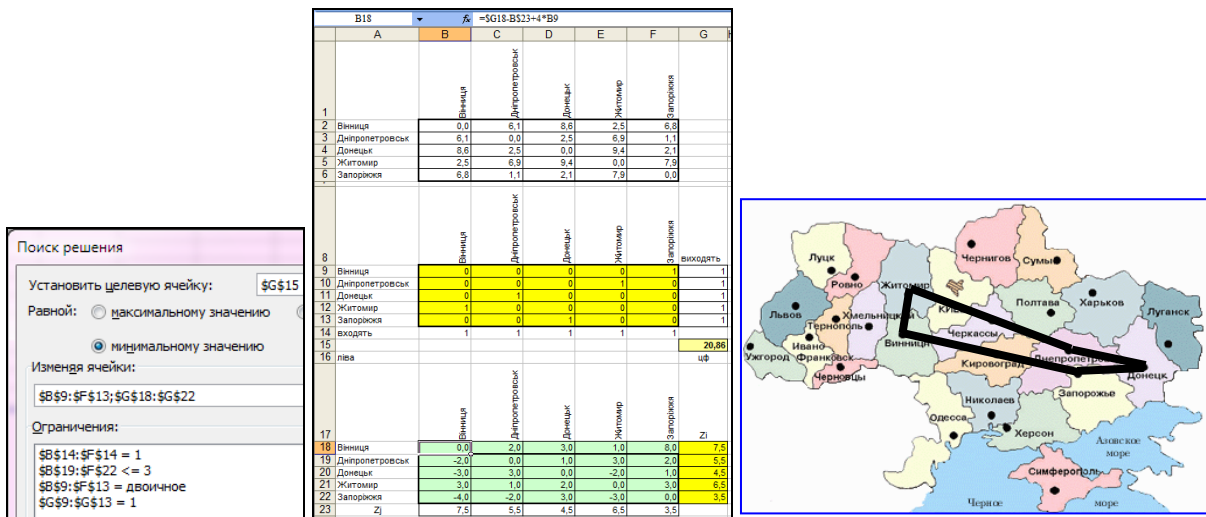
## Результат 1

I. Знайдена матриця  $X$

II. ЦФ  $D = 20,86$

III. Усі обмеження задоволені.

Утворено один повний контур: *Вінниця-Житомир-Дніпропетровськ-Донецьк-Запоріжжя-Вінниця*.



**Модифікація моделі**

**Умова 1.** Заборонено перехід *Донецьк-Запоріжжя* (перекопана дорога під траншею для прокладки газопроводу), вводиться два обмеження:

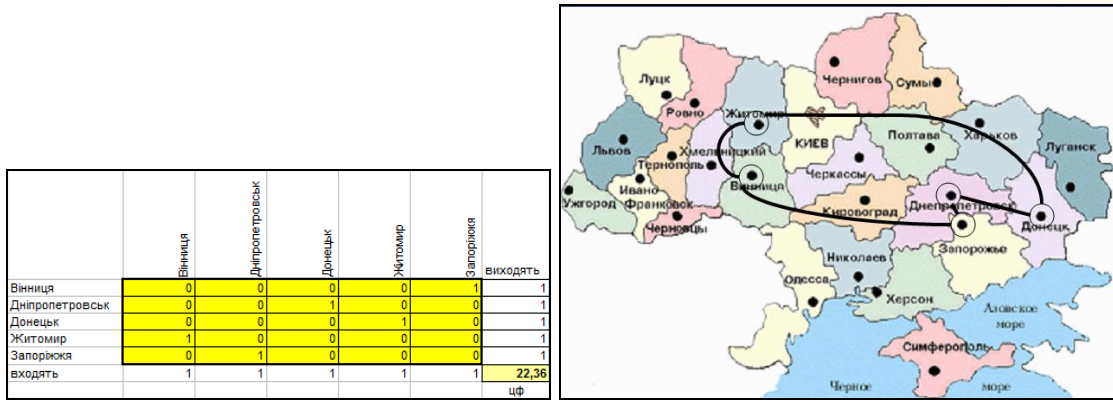
- спосіб 1:  $v_{35} = v_{53} = 1000$  (змінюється матриця відстаней)
- спосіб 2:  $x_{35} = x_{53} = 0$  (команда *Добавить* → *Ограничение*).

За відсутності альтернатив:

- спосіб 1: модель обчислить ЦФ більшу за 1000 (їхати через траншею)
- спосіб 2: повідомить про відсутність оптимуму.

**Результат 2**

Утворено один повний контур: *Вінниця-Запоріжжя-Дніпропетровськ-Донецьк-Житомир-Вінниця*.



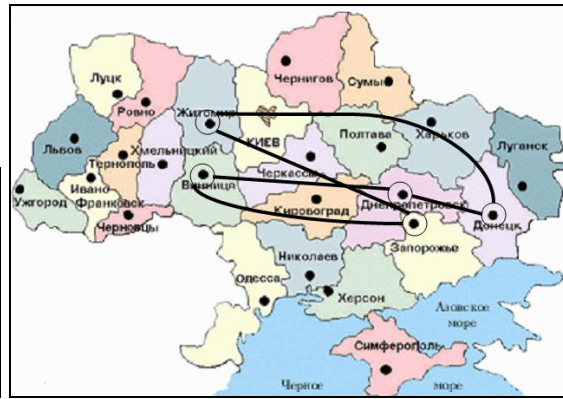
**Умова 2.** Додатково заборонено перехід між містами-сусідами *Дніпропетровськ-Запоріжжя*, вводиться два обмеження:  $v_{25} = v_{52} = 1000$  (або  $x_{25} = x_{52} = 0$ ).

**Результат 3**

Утворено один повний контур: *Вінниця-Запоріжжя-Житомир-Донецьк-Дніпропетровськ-Вінниця*.



	Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя	виходять
Вінниця	0	0	0	0	1	1
Дніпропетровськ	1	0	0	0	0	1
Донецьк	0	1	0	0	0	1
Житомир	0	0	1	0	0	1
Запоріжжя	0	0	0	1	0	1
входять	1	1	1	1	1	32,73 цф



### Приклад 2

Розв'язати задачу комівояжера для  $n = 9$ .

### Результат

Розв'язок задачі триває близька 1 хв., кількість контурів:  $8! \approx 40$  тис.

Утворено один повний контур: *Вінниця-Кіровоград-Дніпропетровськ-Запоріжжя-Донецьк-Луганськ-Київ- Житомир- Ів.-Франківськ-Вінниця.*

Матриця відстаней	Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя	Ів.-Франківськ	Київ	Кіровоград	Луганськ
Вінниця	100	6,1	8,6	2,5	6,8	3,8	3,2	3,6	9,5
Дніпропетровськ	6,1	100	2,5	6,9	1,1	9,5	5,3	2,5	3,5
Донецьк	8,6	2,5	100	9,4	2,1	12,0	7,6	5,0	1,4
Житомир	2,5	6,9	9,4	100	7,9	5,3	2,0	4,9	10,0
Запоріжжя	6,8	1,1	2,1	7,9	100	10,0	6,4	3,2	3,4
Ів.-Франківськ	3,8	9,5	12,0	5,3	10,0	100	6,8	7,0	13,0
Київ	3,2	5,3	7,6	2,0	6,4	6,8	100	3,8	8,1
Кіровоград	3,6	2,5	5,0	4,9	3,2	7,0	3,8	100	6,0
Луганськ	9,5	3,5	1,4	10,0	3,4	13,0	8,1	6,0	100

Матриця обходу	Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя	Ів.-Франківськ	Київ	Кіровоград	Луганськ	Вийшло
Вінниця	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
Дніпропетровськ	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Донецьк	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Житомир	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Запоріжжя	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Ів.-Франківськ	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Київ	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Кіровоград	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
Луганськ	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
Увійшло	1	1	1	1	1	1	1	1	1	29,93 ЦФ

Матриця зв'язаності	Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя	Ів.-Франківськ	Київ	Кіровоград	Луганськ	Zi
Вінниця	0,0	7,0	5,0	2,0	6,0	1,0	3,0	16,0	4,0	8
Дніпропетровськ	-7,0	0,0	-2,0	-5,0	7,0	-6,0	-4,0	1,0	-3,0	1
Донецьк	-5,0	2,0	0,0	-3,0	1,0	-4,0	-2,0	3,0	7,0	3
Житомир	-2,0	5,0	3,0	0,0	4,0	7,0	1,0	6,0	2,0	6
Запоріжжя	-6,0	1,0	7,0	-4,0	0,0	-5,0	-3,0	2,0	-2,0	2
Ів.-Франківськ	7,0	6,0	4,0	1,0	5,0	0,0	2,0	7,0	3,0	7
Київ	-3,0	4,0	2,0	7,0	3,0	-2,0	0,0	5,0	1,0	5
Кіровоград	-8,0	7,0	-3,0	-6,0	-2,0	-7,0	-5,0	0,0	-4,0	0
Луганськ	-4,0	3,0	1,0	-2,0	2,0	-3,0	7,0	4,0	0,0	4
Zj	8	1	3	6	2	7	5	0	4	



### Приклад 3

Розв'язати задачу комівояжера для  $n = 11$ .

### Результат 1

Розв'язок задачі триває близька 5 хв., кількість контурів:  $10! \approx 3,6$  млн.

	Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя	Ів-Франківськ	Київ	Кіровоград	Луганськ	Луцьк	Львів
Вінниця	0,0	6,1	8,6	2,5	6,8	3,8	3,2	3,6	9,5	4,2	4,3
Дніпропетровськ	6,1	0,0	2,5	6,9	1,1	9,5	5,3	2,5	3,5	9,8	10,3
Донецьк	8,6	2,5	0,0	9,4	2,1	12,0	7,6	5,0	1,4	12,3	12,9
Житомир	2,5	6,9	9,4	0,0	7,9	5,3	2,0	4,9	10,0	3,0	4,1
Запоріжжя	6,8	1,1	2,1	7,9	0,0	10,0	6,4	3,2	3,4	10,7	11,1
Ів-Франківськ	3,8	9,5	12,0	5,3	10,0	0,0	6,8	7,0	13,0	4,5	3,0
Київ	3,2	5,3	7,6	2,0	6,4	6,8	0,0	3,8	8,1	5,0	6,1
Кіровоград	3,6	2,5	5,0	4,9	3,2	7,0	3,8	0,0	6,0	7,6	7,9
Луганськ	9,5	3,5	1,4	10,0	3,4	13,0	8,1	6,0	0,0	13,0	13,6
Луцьк	4,2	9,8	12,3	3,0	10,7	4,5	5,0	7,6	13,0	0,0	1,8
Львів	4,3	10,3	12,9	4,1	11,1	3,0	6,1	7,9	13,6	1,8	0,0

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку:

Равной:  максимальному значению  минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Пошук йде у два етапи, це видно по рядку стану:

- *Переход ... Состояние поиска ... Целевая ячейка ...* відшукується верхня границя ЦФ
- *Обязательно ... Переход ... Состояние поиска ...* відшукується оптимум ЦФ.

В ході обчислень з'являються повідомлення про порушення параметрів, встановлених за умовчуванням: за кількістю ітерацій (100) й часу (100 с), останнє – про успішний розв'язок:

Утворено один повний контур: *Вінниця-Кіровоград-Дніпропетровськ-Запоріжжя-Донецьк-Луганськ-Київ- Житомир- Луцьк-Львів-Ів.Франківськ-Вінниця.*

	Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя	Ів-Франківськ	Київ	Кіровоград	Луганськ	Луцьк	Львів	Входять
Вінниця	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Дніпропетровськ	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Донецьк	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
Житомир	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
Запоріжжя	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Ів-Франківськ	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Київ	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
Кіровоград	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Луганськ	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Луцьк	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Львів	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Входять	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	32,51

	Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя	Ів-Франківськ	Київ	Кіровоград	Луганськ	Луцьк	Львів	Zj
Вінниця	0	9	7	4	8	1	5	20	6	2	6	6
Дніпропетровськ	-9	0	-2	-5	9	-8	-4	1	-3	-6	-7	-3
Донецьк	-7	2	0	-3	1	-5	-2	3	9	-4	-5	-1
Житомир	-4	5	3	0	4	-3	1	6	2	9	-2	2
Запоріжжя	-8	1	9	-4	0	-7	-3	2	-2	-5	-6	-2
Ів-Франківськ	9	8	6	3	7	0	4	9	5	2	1	5
Київ	-5	4	2	9	3	-4	0	5	1	-2	-3	1
Кіровоград	-10	9	-3	-6	-2	-9	-5	0	-4	-7	-8	-4
Луганськ	-6	3	1	-2	2	-5	9	4	0	-3	-4	0
Луцьк	-3	6	4	1	5	-2	2	7	3	0	9	3
Львів	-2	7	5	2	6	9	3	8	4	1	0	4
Zj	6	-3	-1	2	-2	5	1	-4	0	3	4	



### Модифікація моделі

**Умова 1.** Заборонено перехід *Донецьк-Запоріжжя*, вводиться два обмеження:  
 $v_{35} = v_{53} = 1000$  (або  $x_{35} = x_{53} = 0$ ).

### Результат 2

	Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя	Ів-Франківськ	Київ	Кіровоград	Луганськ	Луцьк	Львів	Входять
Вінниця	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Дніпропетровськ	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Донецьк	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
Житомир	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Запоріжжя	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Ів-Франківськ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Київ	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Кіровоград	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Луганськ	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Луцьк	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
Львів	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Входять	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	33,13

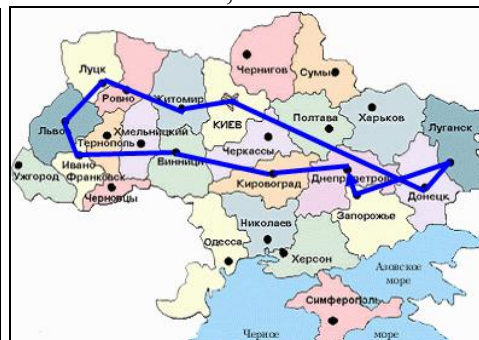


**Умова 2.** Додатково встановлюється направлений перехід Запоріжжя-Дніпропетровськ, уводиться обмеження:  $x_{52} = 1$ .

### Результат 3

Ділянка Луганськ-Запоріжжя-Кіровоград замінена ділянкою Луганськ-Запоріжжя-Дніпропетровськ-Кіровоград, значення ЦФ збільшилось на 0,23.

	Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя	Ів-Франківськ	Київ	Кіровоград	Луганськ	Луцьк	Львів	Входять
Вінниця	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Дніпропетровськ	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
Донецьк	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
Житомир	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Запоріжжя	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Ів-Франківськ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Київ	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Кіровоград	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Луганськ	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Луцьк	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
Львів	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Входять	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	33,35



### Приклад 4

Розв'язати задачу комівояжера для  $n = 13$ .

### Результат

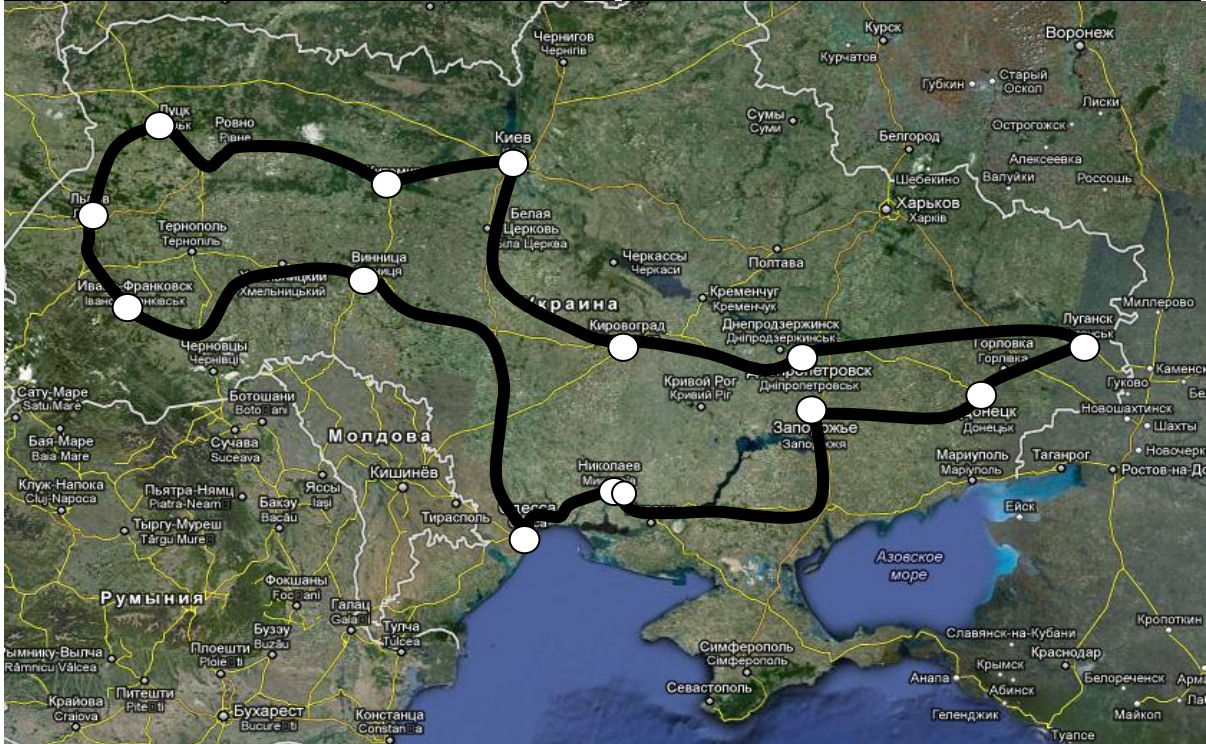
Розв'язок задачі триває близька 30 хв., кількість контурів:  $12! \approx 0,5$  млрд.

Утворено один повний контур: *Вінниця-Одеса-Миколаїв-Запоріжжя-Донецьк-Луганськ-Дніпропетровськ-Кіровоград-Київ-Житомир-Луцьк-Львів-Ів.Франківськ-Вінниця.*

	Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя	Ів-Франківськ	Київ	Кіровоград	Луганськ	Луцьк	Львів	Миколаїв	Одеса
Вінниця	0	6,1	8,6	2,5	6,8	3,8	3,2	3,6	9,5	4,2	4,3	5,0	5,2
Дніпропетровськ	6,1	0	2,5	6,9	1,1	9,5	5,3	2,5	3,5	9,8	10,3	4,2	6,0
Донецьк	8,6	2,5	0	9,4	2,1	12,0	7,6	5,0	1,4	12,3	12,9	6,0	7,8
Житомир	2,5	6,9	9,4	0	7,9	5,3	2,0	4,9	10,0	3,0	4,1	7,2	7,6
Запоріжжя	6,8	1,1	2,1	7,9	0	10,0	6,4	3,2	3,4	10,7	11,1	4,0	5,8
Ів-Франківськ	3,8	9,5	12,0	5,3	10,0	0	6,8	7,0	13,0	4,5	3,0	7,0	6,1
Київ	3,2	5,3	7,6	2,0	6,4	6,8	0	3,8	8,1	5,0	6,1	6,6	7,5
Кіровоград	3,6	2,5	5,0	4,9	3,2	7,0	3,8	0	6,0	7,6	7,9	3,0	4,5
Луганськ	9,5	3,5	1,4	10,0	3,4	13,0	8,1	6,0	0	13,0	13,6	7,4	9,2
Луцьк	4,2	9,8	12,3	3,0	10,7	4,5	5,0	7,6	13,0	0	1,8	9,2	9,2
Львів	4,3	10,3	12,9	4,1	11,1	3,0	6,1	7,9	13,6	1,8	0	8,9	8,5
Миколаїв	5,0	4,2	6,0	7,2	4,0	7,0	6,6	3,0	7,4	9,2	8,9	0	1,8
Одеса	5,2	6,0	7,8	7,6	5,8	6,1	7,5	4,5	9,2	9,2	8,5	1,8	0

	Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя	Ів-Франківськ	Київ	Кіровоград	Луганськ	Луцьк	Львів	Миколаїв	Одеса
Вінниця	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Дніпропетровськ	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Донецьк	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Житомир	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Запоріжжя	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ів-Франківськ	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Київ	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Кіровоград	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Луганськ	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Луцьк	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Львів	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Миколаїв	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Одеса	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Входять	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

	Вінниця	Дніпропетровськ	Донецьк	Житомир	Запоріжжя	Івано-Франківськ	Київ	Кіровоград	Луганськ	Львів	Миколаїв	Одеса		
Вінниця	0	7	9	4	10	1	5	6	8	3	2	11	24	5
Дніпропетровськ	-7	0	2	-3	3	-6	-2	11	1	-4	-5	4	5	-4
Донецьк	-9	-2	0	-5	1	-8	-4	-3	11	-6	-7	2	3	-1
Житомир	-4	3	5	0	6	-3	1	2	4	11	-2	7	8	1
Запоріжжя	-10	-3	11	-6	0	-9	-5	-4	-2	-7	-8	1	2	-5
Івано-Франківськ	11	6	8	3	9	0	4	5	7	2	1	10	11	0
Київ	-5	2	4	11	5	-4	0	1	3	-2	-3	6	7	0
Кіровоград	-6	1	3	-2	4	-5	11	0	2	-3	-4	5	6	-1
Луганськ	-8	11	1	-4	2	-7	-3	-3	0	-5	-6	3	4	0
Львів	-3	4	6	1	7	-2	2	3	5	0	11	8	9	0
Миколаїв	-11	-4	-2	-7	11	-10	-6	-5	-3	-8	-9	0	1	-3
Одеса	-12	-5	-3	-8	-2	-11	-7	-6	-4	-9	-10	11	0	-1
	5	-2	-4	1	-5	4	0	-1	-3	2	3	-6	-7	0



## Управління проектом за мережевою моделлю

Проект – універсальна форма організації будь-якої діяльності, для якої визначені директивні терміни здійснення. Він представляє собою комплекс взаємопов’язаних між собою робіт (операцій, видів діяльності, *activity*), кожна з яких характеризується тривалістю й, можливо, вимогами до необхідних ресурсів (матеріали, персонал, кошти) для свого здійснення. Протягом останніх 100 років сформувався проектний менеджмент – специфічний вид діяльності, направленої на організацію, планування, керування та супроводження процесу здійснення проекту. У його межах сформовано спеціальний інструментар, здійснюється серйозна науково-дослідна робота, ведеться підготовка кадрів з відповідної спеціальності, що створило умови до впровадження проектного підходу до керування створенням будь-якого унікального об’єкту, найчастіше, це: будівництво, комунікації, транспортне, енергетичне та загальне машинобудування. Проектний менеджмент вже досить давно є стандартним розділом практичної оптимізації, що сприяє широкому розповсюдженню проектного підходу до дослідження будь-яких динамічних процесів. Щоб скористатися цим підходом, достатньо досліджуваний процес представити системою взаємопов’язаних робіт (задач, операцій, заходів, *activities*) у вигляді т. зв. проектною таблиці, які мають певну тривалість й використовують для свого здійснення матеріальні, кадрові та фінансові ресурси, запаси яких обмежені.

Проектна таблиця – це список відомостей про роботи, де вказується: код (номер) роботи; назва роботи; коди попередніх робіт; тривалість. Ставиться задача визначення тривалості здійснення проекту та оптимального розкладу виконання робіт з метою завершення проекту якнайшвидше чи не пізніше заданого (директивного) терміну із врахуванням ресурсних обмежень та певних організаційних умов.

Десь 50 років тому для управління проектною діяльністю було винайдено ефективний підхід щодо організації, планування, управління та аналізу проектною діяльністю на основі мережевих моделей потокового програмування та фундаментальних методів СРМ та PERT<sup>38</sup>. За цим підходом модель проекту представляють мережею, де треба знайти конфігурацію й довжину максимального шляху від початку до кінця мережі, в проектному менеджменті цей шлях названо критичним, критичними (з позицій керування ними) є дуги, що йому належать, а довжина критичного шляху визначає мінімальну тривалість здійснення усіх робіт проекту.

Отже, мережева модель проекту – сукупність вузлів та дуг, яка відтворює розмаїття зв'язків між роботами, тривалість їх виконання та ресурсну забезпеченість. На сьогодні існує близька 200 різних мережевих моделей проектів, що розрізняються за призначенням, елементами опису, алгоритмам та засобами їх реалізації.

Існує два фундаментальних типи мережевих моделей проекту та технологій їх побудови й реалізації:

- «робота-дуга» (AoA, Activity-on-ArC) та
- «робота-вузол» (AoN, Activity-on-Node),

перший «дуговий» тип вважається класичним, бо визначив теорію й технологію управління проектами, базуючись на розв'язанні задач пошуку екстремальних шляхів у мережах, його опис за традицією домінує в навчальній літературі; другий «вузловий» тип розроблявся для безмашинної реалізації проектних розрахунків в умовах тодішнього дефіциту комп'ютерних потужностей<sup>39</sup> й маловідомий з підручників, з часом став засобом професійних наукових досліджень й, за іронією долі, основою сучасних програмних продуктів з управління проектами (MS Project, Primavera, Spider тощо).

За висновком експертів та за багаторічним досвідом практиків технологія AoN вважається простішою й, головне, однозначною, розрахованою на колективну роботу з керування крупними проектами. Побудова ж класичної мережевої моделі проекту за технологією AoA змушує застосовувати штучні об'єкти – події, а також вводити фіктивні роботи та події для коректного відображення відношення передування робіт згідно заданої проектною таблицею. Це загалом характеризується складністю, необхідністю попереднього креслення мережевого (сіткового) графіка, що для крупних проектів зробити непросто, суб'єктивністю й неоднозначністю процесу мережевого моделювання проектів, саме тому перша за появою й традиційна технологія AoA ще використовується де-не-де лише за старою традицією, але не у сучасних програмних продуктах з управління проектами.

Сучасна практика проектного менеджменту пропонує кілька шляхів комп'ютерної реалізації мережевих моделей проектів, це:

- спеціалізовані програмні продукти, що розробляються на певній апаратній, операційній та мовній платформах на замовлення;
- універсальні системи управління проектами, розраховані на рядового користувача (лідер - програма MS Project у складі офісного пакету MS Office);
- розробка розрахункового документа типу електронної таблиці на платформі наймасовішого за світовим досвідом використання, потужного й ефективного програмного продукту – табличного процесора MS Excel.

<sup>38</sup> Kelley J., Walker M. Critical Path Planning and Scheduling, Proc. of the Eastern Joint Comp. Conf., 1959  
PERT. Summary Report Phase 1, Special Project Office, Bureau of Ordinance, Dept. of the Navy, 1958

<sup>39</sup> Fondahl J. Non-Computer Approach to the Critical Path Method for the Construction Industry, Stanford Univ., 1961

Досвід свідчить, що для опанування й професійного використання методології управління проектами рекомендується послідовність Excel → MS Project: в середовищі Excel засвоюється математичний апарат потокового моделювання, який у віконному інтерфейсі MS Project представлений лише відповідними командами.

Основним сучасним інструментарем для задач управління проектом є їх мережеві моделі, які реалізуються методами потокової оптимізації, де мережа є сукупністю вузлів (*node*) та дуг (*arc*), що їх з'єднують. Ці моделі у проектному менеджменті називають мережевими (сітковими) графіками, а роботу з ними – сітковим плануванням та управлінням (СПУ). Ці моделі використовують традиційні наочні засоби, найчастіше, стрічкові діаграми Гантта.

<b>Об'єкт дослідження</b>	<b>Модель</b>
Проект	Мережа (направлений зважений граф)
Подія	Вузол
Початкова подія	Вузол-джерело ( <i>s</i> )
Завершальна подія	Вузол-стік ( <i>t</i> )
Робота	Дуга
Тривалість роботи	Довжина дуги
Мінімальна тривалість проекту	Максимальна довжина шляху між вузлами <i>s</i> та <i>t</i>

#### **Задача 4.6. Розрахунок мережевого графіка (AoA)**

##### Постановка задачі

Для заданого проекту побудовано його мережеву модель за традиційною схемою «робота-дуга», де вузлами мережі є *m* подій, а дугами – *n* робіт проекту. Серед вузлів є початковий вузол *s* (джерело), з якого витікає одиничний потік, кінцевий вузол *t* (стік), у який стікає одиничний потік, та проміжні вузли, куди потік втікає й з яких витікає. Протікаючи мережею від джерела до стоку, потік залишається одиничним, неподільним.

Шлях – ланцюг суміжних дуг та подій, що з'єднує джерело (*s*) та стік (*t*), у мережі існує велика кількість можливих шляхів, у задачі з управління проектом відшукується шлях максимальної довжини, яка визначає мінімальну тривалість проекту. Цей шлях називається *критичним*, бо складається з *критичних робіт* (це «вузьке місце» проекту), які повинні бути здійснені не довше визначеної тривалості й саме до них прикута основна увага менеджера. Визначені *некритичні роботи* мають резерв часу й можуть здійснюватися довше зазначеної тривалості в межах резерву. Таким чином, критичний шлях одночасно визначає критичні роботи, де час активний і обмежений, й некритичні роботи, де резерв часу витрачається на очікування. Цей факт формує ідею оптимізації мережевої моделі на шляху скорочення тривалості проекту за рахунок перерозподілу часу та відповідних ресурсів.

В реальній ситуації схема та початкові дані проекту часто змінюються, тож модель створюється для оперативного реагування на ці зміни шляхом повторного обчислення усіх характеристик й формуванням відповідних оновлених результатів для прийняття обґрунтованих рішень щодо реалізації проекту.

Параметри, типи задач та моделей з управління проектом:

- час (враховуються лише тривалості робіт)
- час та ресурс (додатково враховуються ресурсні обмеження робіт)
- час та вартість (додатково враховуються вартісні обмеження робіт).

Задано: проектну таблицю: взаємозв'язків між роботами (схема), тривалості робіт (*T*) та кількості необхідного ресурсу (число робочих, *R*) для виконання кожної з них.

Треба:

1. Знайти часткові та повний критичний шлях (КШ) шляхом розв'язання задачі оптимізації, обчислити часові характеристики подій:

- ранні початки (РП),

- пізні початки (ПП)
- та робіт:
- ранні початки (РП)
- пізні початки (ПП)
- ранні завершення (РЗ)
- пізні завершення (ПЗ)
- резерв часу (Р);
- побудувати:
- діаграму Гантта за допомогою програми *Мастер діаграмм*;
- діаграму Гантта вручну із завданням кількості ресурсів;
- графік кількостей потрібного ресурсу протягом періоду здійснення проекту.

### Математична модель

#### Позначення

$m$  – кількість вузлів (подій)

$n$  – кількість дуг (робіт)

$G(m, n)$  – позначення мережі (графа)

$i$  – поточний номер вузла,  $i = 1, \dots, m$

$j$  – поточний номер дуги,  $j = 1, \dots, n$

$p(j)$  – початковий вузол  $j$ -ої роботи

$k(j)$  – кінцевий вузол  $j$ -ої роботи

$t_j$  – задана тривалість  $j$ -ої роботи

$r_j$  – задана кількість ресурсу для виконання  $j$ -ої роботи

$K$  – критичний шлях (КШ),  $K = \{x(j) | x(j) = 1\}$  сукупність дуг, що належать КШ

$x_j$  – шукана невідома змінна (двійкового типу), це величина потоку, що тече  $j$ -ою дугою, та ознака належності дуги до КШ:  $x_j = 1$ , якщо  $j$ -та дуга  $\in K$  (критична),  $x_j = 0$ , якщо  $j$ -та дуга  $\notin K$  (некритична)

$F_{\text{вх}}(j)$  – сума потоків, що входять у  $j$ -ий вузол,  $F_{\text{вх}}(j) = \sum_{k(j)=i} x_j$

$F_{\text{вих}}(j)$  – сума потоків, що виходять із  $j$ -го вузла,  $F_{\text{вих}}(j) = \sum_{p(j)=i} x_j$

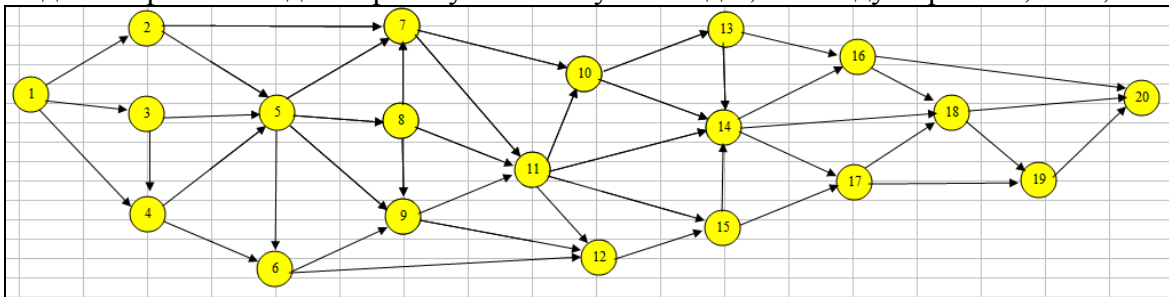
$s$  – початковий вузол-джерело,  $F_{\text{вх}}(s) = 0$ ,  $F_{\text{вих}}(s) = 1$

$t$  – кінцевий вузол-стік,  $F_{\text{вх}}(t) = 1$ ,  $F_{\text{вих}}(t) = 0$

$D$  – довжина критичного шляху.

#### Приклад

Задана мережева модель проекту:  $m = 20$  вузлів-подій,  $n = 42$  дуги-роботи,  $s = 1$ ,  $t = 20$ .



#### Задача оптимізації

I. Знайти вектор  $X = (x_1, \dots, x_{42})$ , за яким

II. ЦФ  $D = t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_{42}x_{42} \rightarrow \max$

III. за обмежень (для вузлів):

$$F_{\text{вх}}(j) - F_{\text{вих}}(j) = 0, j = 2, \dots, 18$$

$$F_{\text{вх}}(1) - F_{\text{вих}}(1) = -1,$$

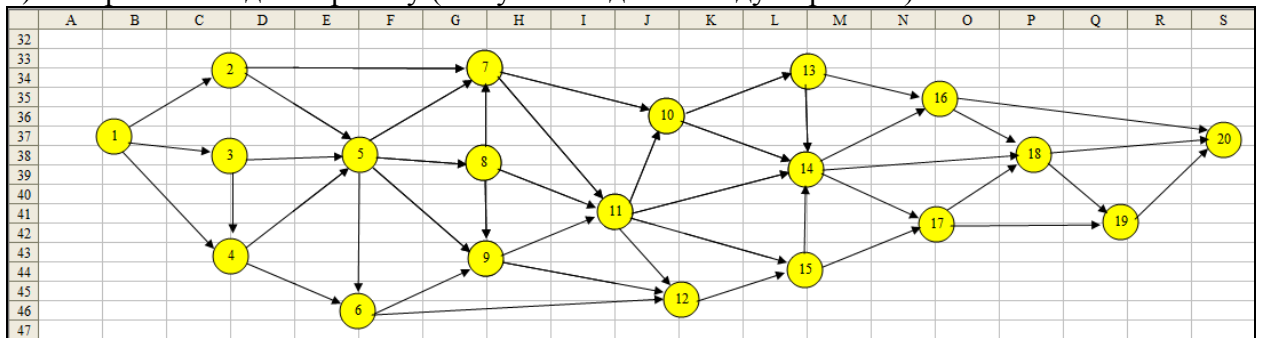
$F_{\text{вх}}(20) - F_{\text{вих}}(20) = 1$ ,  
та граничних умов: усі  $x_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, 42$ .

**Порядок роботи**

- 1) Накреслити мережеву модель проекту
- 2) Сформувати дві таблиці: для вузлів-подій та дуг-робіт, увести початкові дані і формули
- 3) Розв'язати задачу оптимізації для пошуку повного критичного шляху (пряма задача) та часткових критичних шляхів (двоїста задача, нормовані вартості)
- 4) Сформувати таблицю для обчислення часових характеристик робіт (РП, ПП, РЗ, ПЗ, Р) за допомогою функції ВПР
- 5) Сформувати таблицю (РП, Т, Р) для побудови діаграми Гантта за допомогою Мастера діаграмм, побудувати й відформатувати діаграму
- 6) Побудувати діаграму Гантта вручну із автоматичним завданням кількості ресурсів (функція ЕСЛИ)
- 7) Побудувати графік кількостей потрібного ресурсу протягом періоду здійснення проекту за допомогою Мастера діаграмм. Провести дослідження побудованого графіка – зміна кількостей ресурсів автоматично відтворюється на графіку ресурсів.

**Результати**

1) Мережева модель проекту (20 вузлів-подій та 42 дуги-роботи):



2) Таблиці для вузлів та дуг:



Таблиця для вузлів			
Вузол	Вх-Вих	ПЧ	ЧКШ
1	0	-1	
2	0		
3	0		
4	0		
5	0		
6	0		
7	0		
8	0		
9	0		
10	0		
11	0		
12	0		
13	0		
14	0		
15	0		
16	0		
17	0		
18	0		
19	0		
20	0	1	

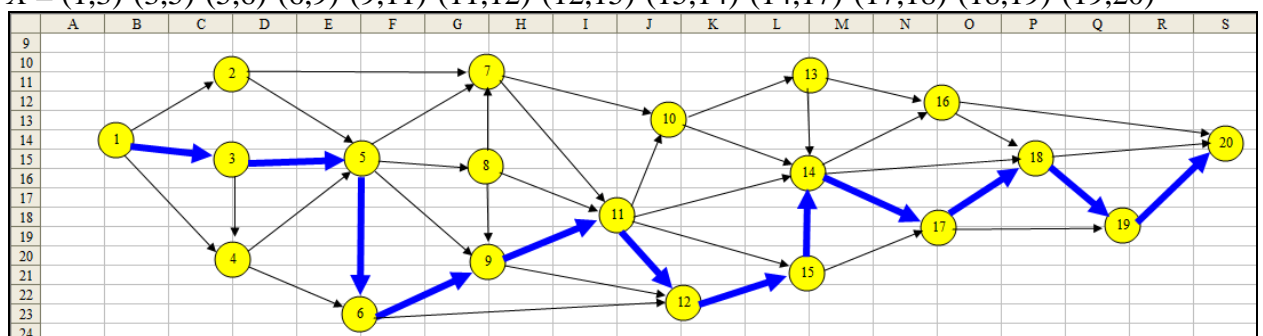
Таблиця для дуг						
Розрахунок критичного шляху						
Дуга	Початок	Кінець	Тривалість	Шлях	Довжина	Резерв
1	1	2	5		0	
2	1	3	12		0	
3	1	4	10		0	
4	2	7	9		0	
5	2	5	14		0	
6	3	4	8		0	
7	3	5	13		0	
8	4	5	5		0	
9	4	6	5		0	
10	5	7	11		0	
11	5	8	6		0	
12	5	9	9		0	
13	5	6	9		0	
14	6	9	9		0	
15	6	12	8		0	
16	7	10	12		0	
17	7	11	7		0	
18	8	11	9		0	
19	8	9	8		0	
20	9	11	8		0	
21	9	12	9		0	
22	10	13	8		0	
23	10	14	9		0	
24	11	10	7		0	
25	11	14	9		0	
26	11	15	11		0	
27	11	12	8		0	
28	12	15	12		0	
29	13	14	13		0	
30	13	16	9		0	
31	14	16	5		0	
32	14	18	14		0	
33	14	17	7		0	
34	15	14	10		0	
35	15	17	7		0	
36	16	18	11		0	
37	16	20	5		0	
38	17	18	12		0	
39	17	19	5		0	
40	18	19	14		0	
41	18	20	5		0	
42	19	20	7		0	
					0	
					КШ	

3) розв'язок задачі оптимізації про пошук критичного шляху:

для вузлів				Розрахунок критичного шляху							
Вузол	Вх-Вих	ПЧ	ЧКШ	Дуга	Початок	Кінець	Тривалість	Шлях	Довжина	Резерв	
1	-1	-1	0	1	1	2	5	0	0	0	
2	0		5	2	1	3	12	1	12	0	
3	0		12	3	1	4	10	0	0	-10	
4	0		20	4	2	7	9	0	0	-22	
5	0		25	5	2	5	14	0	0	-6	
6	0		34	6	3	4	8	0	0	0	
7	0		36	7	3	5	13	1	13	0	
8	0		31	8	4	5	5	0	0	0	
9	0		43	9	4	6	5	0	0	-9	
10	0		58	10	5	7	11	0	0	0	
11	0		51	11	5	8	6	0	0	0	
12	0		59	12	5	9	9	0	0	-9	
13	0		66	13	5	6	9	1	9	0	
14	0		81	14	6	9	9	1	9	0	
15	0		71	15	6	12	8	0	0	-17	
16	0		86	16	7	10	12	0	0	-10	
17	0		88	17	7	11	7	0	0	-8	
18	0		100	18	8	11	9	0	0	-11	
19	0		114	19	8	9	8	0	0	-4	
20	1	1	121	20	9	11	8	1	8	0	
				21	9	12	9	0	0	-7	
				22	10	13	8	0	0	0	
				23	10	14	9	0	0	-14	
				24	11	10	7	0	0	0	
				25	11	14	9	0	0	-21	
				26	11	15	11	0	0	-9	
				27	11	12	8	1	8	0	
				28	12	15	12	1	12	0	
				29	13	14	13	0	0	-2	
				30	13	16	9	0	0	-11	
				31	14	16	5	0	0	0	
				32	14	18	14	0	0	-5	
				33	14	17	7	1	7	0	
				34	15	14	10	1	10	0	
				35	15	17	7	0	0	-10	
				36	16	18	11	0	0	-3	
				37	16	20	5	0	0	-30	
				38	17	18	12	1	12	0	
				39	17	19	5	0	0	-21	
				40	18	19	14	1	14	0	
				41	18	20	5	0	0	-16	
				42	19	20	7	1	7	0	
									121		
									КШ		

Критичний шлях  $X = x_2 - x_7 - x_{13} - x_{14} - x_{20} - x_{27} - x_{28} - x_{33} - x_{34} - x_{38} - x_{40} - x_{42}$  або

$X = (1,3)-(3,5)-(5,6)-(6,9)-(9,11)-(11,12)-(12,15)-(15,14)-(14,17)-(17,18)-(18,19)-(19,20)$



4) Таблица для обчислення часових характеристик робіт (РП, ПП, РЗ, ПЗ, Р) за допомогою функції ВПР

Індя д.крити	Часові характеристики				
	Дуга	РП	ПП	РЗ	ПЗ
1	0	5	0	5	0
2	0	12	0	12	0
3	0	10	10	20	10
4	5	14	27	36	22
5	5	19	11	25	6
6	12	20	12	20	0
7	12	25	12	25	0
8	20	25	20	25	0
9	20	25	29	34	9
10	25	36	25	36	0
11	25	31	25	31	0
12	25	34	34	43	9
13	25	34	25	34	0
14	34	43	34	43	0
15	34	42	51	59	17
16	36	48	46	58	10
17	36	43	44	51	8
18	31	40	42	51	11
19	31	39	35	43	4
20	43	51	43	51	0
21	43	52	50	59	7
22	58	66	58	66	0
23	58	67	72	81	14
24	51	58	51	58	0
25	51	60	72	81	21
26	51	62	60	71	9
27	51	59	51	59	0
28	59	71	59	71	0
29	66	79	68	81	2
30	66	75	77	86	11
31	81	86	81	86	0
32	81	95	86	100	5
33	81	88	81	88	0
34	71	81	71	81	0
35	71	78	81	88	10
36	86	97	89	100	3
37	86	91	116	121	30
38	88	100	88	100	0
39	88	93	109	114	21
40	100	114	100	114	0
41	100	105	116	121	16
42	114	121	114	121	0

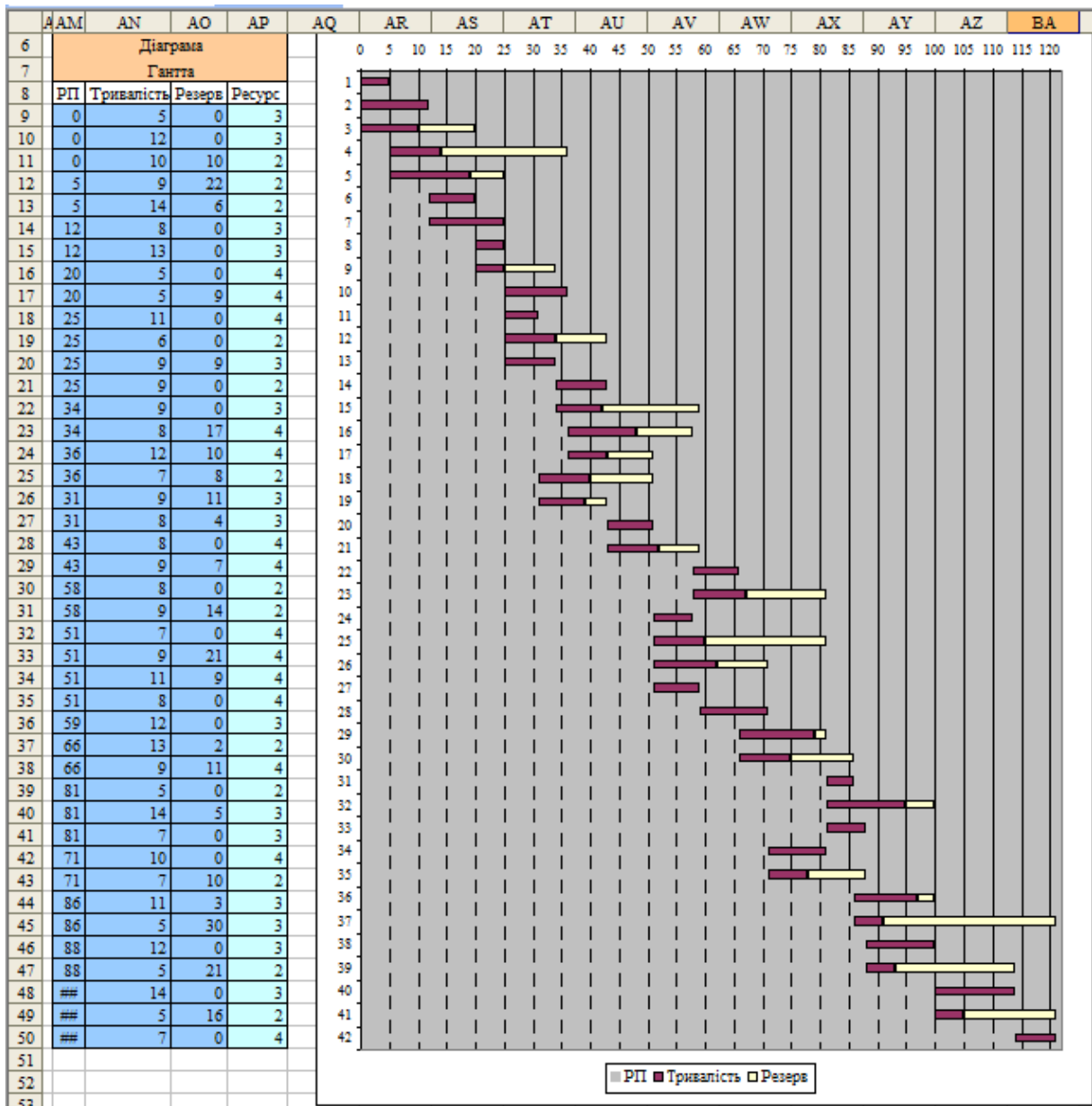
AG9		=ВПР(29;ST39;5W\$28;4)															
T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
6	Таблица для дуг												Часові характеристики				
7	Таблица для вузла												Часові характеристики				
8	Вузлов	Вх-Вих	ПЧ	ЧКШ	Дуга	Початок	Кінець	Тривалість	Шлях	Довжина	Резерв	РП	ПП	РЗ	ПЗ	Р	Резерв
9	1	-1	-1	0	1	1	2	5	0	0	0	0	5	0	0	0	0
10	2	0	5	5	2	1	3	12	1	12	0	0	12	0	12	0	0
11	3	0	12	12	3	1	4	10	0	0	-10	0	10	10	20	10	0
12	4	0	20	20	4	2	7	9	0	0	-22	5	14	27	36	22	5
13	5	0	25	25	5	2	5	14	0	0	-6	5	19	11	25	6	5
14	6	0	34	34	6	3	4	8	0	0	0	12	20	12	20	0	0
15	7	0	36	36	7	3	5	13	1	13	0	12	25	12	25	0	0
16	8	0	31	31	8	4	5	5	0	0	0	20	25	20	25	0	0
17	9	0	43	43	9	4	6	5	0	0	-9	20	25	29	34	9	20
18	10	0	58	58	10	5	7	11	0	0	0	25	36	25	36	0	25
19	11	0	51	51	11	5	8	6	0	0	0	25	31	25	31	0	25
20	12	0	59	59	12	5	9	9	0	0	-9	25	34	34	43	9	25
21	13	0	66	66	13	5	6	9	1	9	0	25	34	25	34	0	25
22	14	0	81	81	14	6	9	9	1	9	0	34	43	34	43	0	34
23	15	0	71	71	15	6	12	8	0	0	-17	34	42	51	59	17	34
24	16	0	86	86	16	7	10	12	0	0	-10	36	48	46	58	10	36
25	17	0	88	88	17	7	11	7	0	0	-8	36	43	44	51	8	36
26	18	0	100	100	18	8	11	9	0	0	-11	31	40	42	51	11	31
27	19	0	114	114	19	8	9	8	0	0	-4	31	39	35	43	4	31
28	20	1	121	121	20	9	11	8	1	8	0	43	51	43	51	0	43
29					21	9	12	9	0	0	-7	43	52	50	59	7	43
30					22	10	13	8	0	0	0	58	66	58	66	0	58

AG9		=AG9-AB9														
Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AG	AH	AI	AJ	AK	AAM	AN			
6	Таблица для дуг												Часові характеристики			
7	Таблица для вузла												Часові характеристики			
8	Дуга	Початок	Кінець	Тривалість	Шлях	Довжина	Резерв	РП	ПП	РЗ	ПЗ	Р	Резерв			
9	1	1	2	5	0	0	0	0	5	0	0	0	0			
10	2	1	3	12	1	12	0	0	12	0	12	0	0			
11	3	1	4	10	0	0	-10	0	10	10	20	10	0			
12	4	2	7	9	0	0	-22	5	14	27	36	22	5			
13	5	2	5	14	0	0	-6	5	19	11	25	6	5			
14	6	3	4	8	0	0	0	12	20	12	20	0	0			
15	7	3	5	13	1	13	0	12	25	12	25	0	0			
16	8	4	5	5	0	0	0	20	25	20	25	0	0			
17	9	4	6	5	0	0	-9	20	25	29	34	9	20			
18	10	5	7	11	0	0	0	25	36	25	36	0	25			
19	11	5	8	6	0	0	0	25	31	25	31	0	25			
20	12	5	9	9	0	0	-9	25	34	34	43	9	25			
21	13	5	6	9	1	9	0	25	34	25	34	0	25			
22	14	6	9	9	1	9	0	34	43	34	43	0	34			
23	15	6	12	8	0	0	-17	34	42	51	59	17	34			
24	16	7	10	12	0	0	-10	36	48	46	58	10	36			
25	17	7	11	7	0	0	-8	36	43	44	51	8	36			
26	18	8	11	9	0	0	-11	31	40	42	51	11	31			
27	19	8	9	8	0	0	-4	31	39	35	43	4	31			
28	20	9	11	8	1	8	0	43	51	43	51	0	43			
29	21	9	12	9	0	0	-7	43	52	50	59	7	43			
30	22	10	13	8	0	0	0	58	66	58	66	0	58			

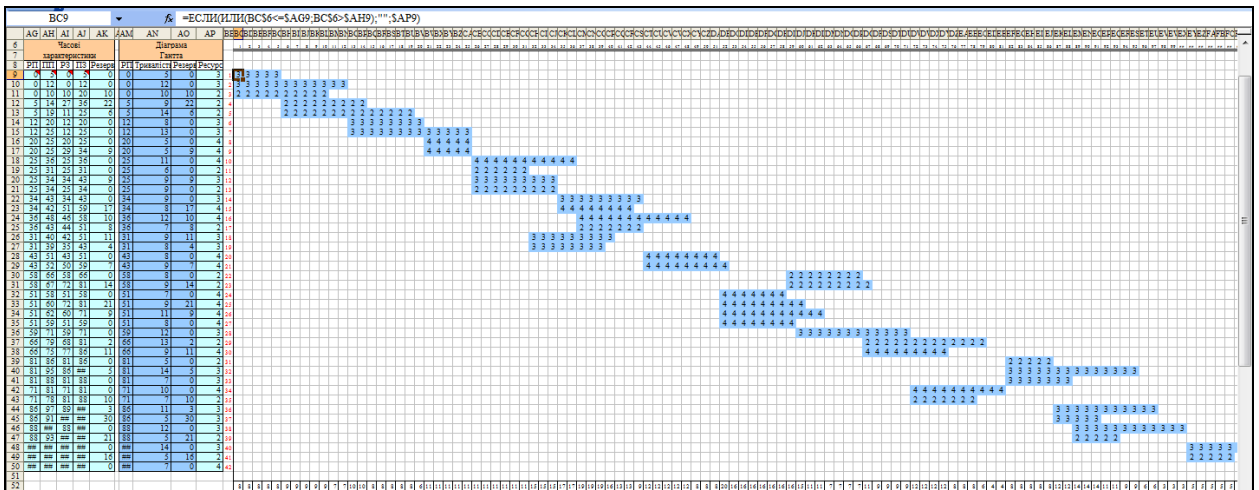
AJ9		=ВПР(AA9;ST39;5W\$28;4)																
T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AG	AH	AI	AJ	AK	AAM	AN
6	Таблица для дуг												Часові характеристики				Діаг	
7	Таблица для вузла												Часові характеристики				Ган	
8	Вузлов	Вх-Вих	ПЧ	ЧКШ	Дуга	Початок	Кінець	Тривалість	Шлях	Довжина	Резерв	РП	ПП	РЗ	ПЗ	Р	Резерв	Резерв
9	1	-1	-1	0	1	1	2	5	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0
10	2	0	5	5	2	1	3	12	1	12	0	0	12	0	12	0	0	0
11	3	0	12	12	3	1	4	10	0	0	-10	0	10	10	20	10	0	0
12	4	0	20	20	4	2	7	9	0	0	-22	5	14	27	36	22	5	0
13	5	0	25	25	5	2	5	14	0	0	-6	5	19	11	25	6	5	0
14	6	0	34	34	6	3	4	8	0	0	0	12	20	12	20	0	0	0
15	7	0	36	36	7	3	5	13	1	13	0	12	25	12	25	0	0	0
16	8	0	31	31	8	4	5	5	0	0	0	20	25	20	25	0	0	0
17	9	0	43	43	9	4	6	5	0	0	-9	20	25	29	34	9	20	0
18	10	0	58	58	10	5	7	11	0	0	0	25	36	25	36	0	25	0
19	11	0	51	51	11	5	8	6	0	0	0	25	31	25	31	0	25	0
20	12	0	59	59	12	5	9	9	0	0	-9	25	34	34	43	9	25	0
21	13	0	66	66	13	5	6	9	1	9	0	25	34	25	34	0	25	0
22	14	0	81	81	14	6	9	9	1	9	0	34	43	34	43	0	34	0
23	15	0	71	71	15	6	12	8	0	0	-17	34	42	51	59	17	34	0
24	16	0	86	86	16	7	10	12	0	0	-10	36	48	46	58	10	36	0
25	17	0	88	88	17	7	11	7	0	0	-8	36	43	44	51	8	36	0
26	18	0	100	100	18	8	11	9	0	0	-11	31	40	42	51	11	31	0
27	19	0	114	114	19	8	9	8	0	0	-4	31	39	35	43	4	31	0
28	20	1	121	121	20	9	11	8	1	8	0	43	51	43	51	0	43	0
29					21	9	12	9	0	0	-7	43	52	50	59	7	43	0
30					22	10	13	8	0	0	0	58	66	58	66	0	58	0

AJ9		=AJ9-AB9														
AB	AC	AD	AE	AG	AH	AI	AJ	AK	AAM	AN						
6	Таблица для дуг												Часові характеристики			
7	Таблица для вузла												Часові характеристики			
8	Тривалість	Шлях	Довжина	Резерв	РП	ПП	РЗ	ПЗ	Р	Резерв						
9	5	0	0	0	0	5	0	0	0	0						
10	12	1	12	0	0	12	0	12	0	0						
11	10	0	0	-10	0	10	10	20	10	0						
12	9	0	0	-22	5	14	27	36	22	5						
13	14	0	0	-6	5	19	11	25	6	5						
14	8	0	0	0	12	20	12	20	0	0						
15	13	1	13	0	12	25	12	25	0	0						
16	5	0	0	0	20	25	20	25	0	0						
17	5	0	0	-9	20	25	29	34	9	20						
18	11	0	0	0	25	36	25	36	0	25						
19	6	0	0	0	25	31	25	31	0	25						
20	9	0	0	-9	25	34	34	43	9	25						
21	9	1	9	0	25	34	25	34	0	25						
22	9	1	9													

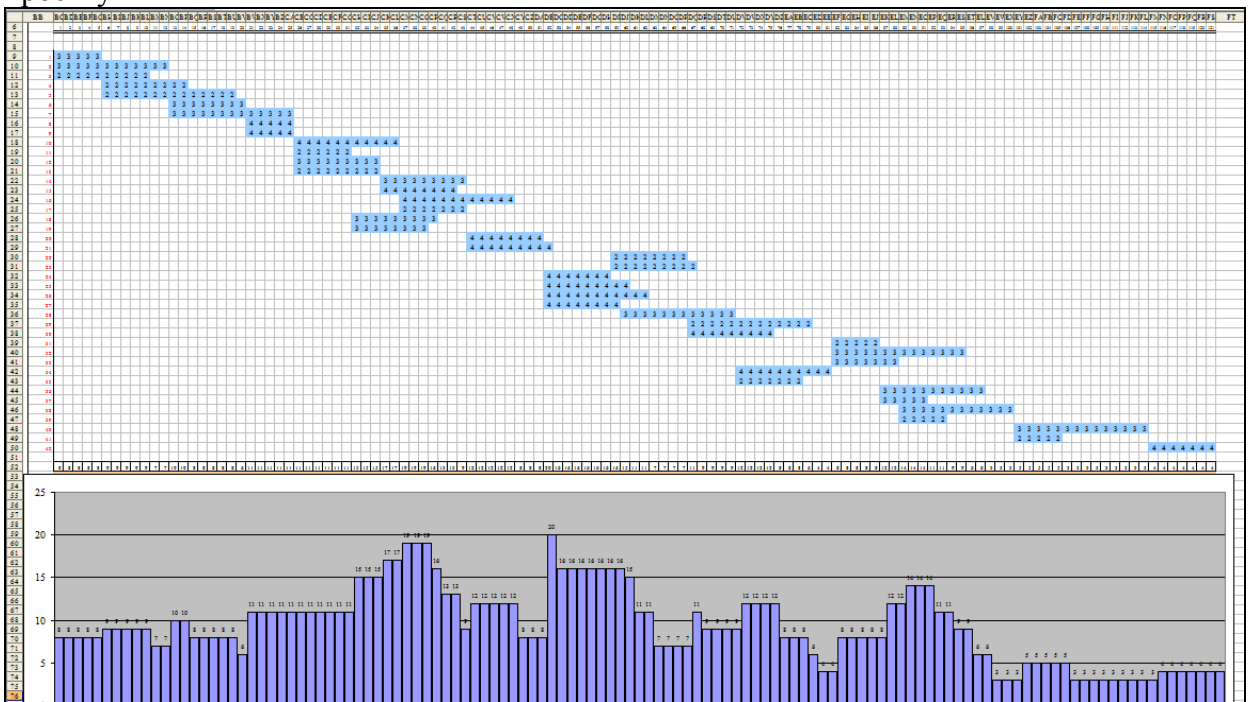
5) Таблиця (РП, Тривалість, Резерв) для побудови діаграми Гантта за допомогою програми *Мастер діаграм* та побудована й відформатована діаграма (фрагмент РП зафарбовано кольором фону)



6) Побудована вручну діаграма Гантта із автоматичним завданням кількості ресурсів (функція ЕСЛИ)



7) Діаграма Гантта та графік кількостей потрібного ресурсу протягом періоду здійснення проекту



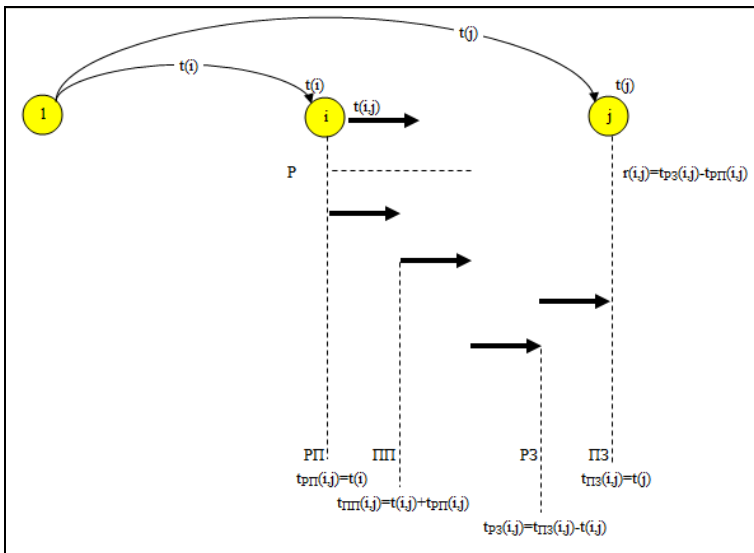
## Висновок

Побудована модель проекту дозволяє в режимі реального часу автоматично отримувати усі часові характеристики робіт та подій при уведенні відповідних початкових даних й запуску програми Поиск решения. Це дає змогу керівнику проекту своєчасно й обґрунтовано приймати рішення щодо здійснення проекту.

## Розрахункові формули

Робота  $(i, j)$  тривалістю  $t(i, j)$  розпочинається після звершення події  $i$ , частковий критичний шлях до неї  $t(i)$ , й завершується у події  $j$ , частковий критичний шлях до неї  $t(j)$ .

Схема і розрахункові формули:



### Пояснення

*Некритична робота* (2,7) тривалістю  $t(2,7) = 9$  розпочинається після звершення події 2, частковий критичний шлях до неї  $t(2) = 5$ , й завершується у події 7, частковий критичний шлях до неї  $t(7) = 36$ . Ясно, що резерв роботи (2,7)  $= 36 - 5 - 9 = 22$ .

Часові характеристики роботи (2,7):

- ранній початок:  $t_{PP}(2,7) = t(2) = 5$
- пізній початок:  $t_{PP}(2,7) = t_{PP}(2,7) + t(2,7) = 5 + 9 = 14$
- пізнє завершення:  $t_{PZ}(2,7) = t(7) = 36$
- раннє завершення:  $t_{PZ}(2,7) = t_{PZ}(2,7) - t(2,7) = 36 - 9 = 27$
- резерв  $r(2,7) = t_{PZ}(2,7) - t_{PP}(2,7) = 27 - 5 = 22$  або  $t_{PZ}(2,7) - t_{PP}(2,7) = 36 - 14 = 22$ , тобто, ранні (5 та 27) й пізні (14 та 36) характеристики розрізняються на величину резерву часу (22).

*Критична робота* (3,5) тривалістю  $t(3,5) = 13$  розпочинається після звершення події 3, частковий критичний шлях до неї  $t(3) = 12$ , й завершується у події 5, частковий критичний шлях до неї  $t(5) = 25$ . Ясно, що резерв роботи (3,5)  $= 25 - 12 - 13 = 0$ .

Часові характеристики роботи (3,5):

- ранній початок:  $t_{PP}(3,5) = t(3) = 12$
- пізній початок:  $t_{PP}(3,5) = t_{PP}(3,5) + t(3,5) = 12 + 13 = 25$
- пізнє завершення:  $t_{PZ}(3,5) = t(5) = 25$
- раннє завершення:  $t_{PZ}(3,5) = t_{PZ}(3,5) - t(3,5) = 25 - 13 = 12$
- резерв  $r(3,5) = t_{PZ}(3,5) - t_{PP}(3,5) = 12 - 12 = 0$  або  $t_{PZ}(3,5) - t_{PP}(3,5) = 25 - 25 = 0$ , тобто, ранні (12 = 12) й пізні (25 = 25) характеристики співпадають.

### Задача 4.7. Розрахунок мережевого графіка (AoN)

#### Постановка задачі

Для заданого проекту побудовано його мережеву модель за схемою «робота-вузол», де вузлами мережі є  $m$  робіт, а дугами –  $n$  технологічних зв'язків між роботами. Серед вузлів є один чи декілька початкових вузлів (джерел), з яких витікає одиничний потік, один кінцевий вузол (стік), у який стікає одиничний потік, та проміжні вузли, куди потік втікає й з яких витікає. Протікаючи мережею від джерела до стоку, потік залишається одиничним, неподільним.

Визначений вище шлях розрахунку мережевого графіка за допомогою надбудови *Поиск решения* може бути застосований й для технології AoN.

Цей шлях безперечно має достоїнства – це можливість вводити додаткові обмеження, отримувати двоїсті оцінки тощо, одночасно він має серйозний недолік (для навчальної ве-

рсії Excel) – обмеження 200/100, з-за чого неможливо розрахувати порівняно складний проект з числом робіт більше 200 й вузлів більше 100.

Для технології AoN пропонується вільний від цього недоліку простий й доступний «формульний» підхід до мережевого моделювання проектної діяльності методом критичного шляху з використанням звичайних операцій та функцій Excel. Відкритість моделі з-за відсутності будь-яких додаткових програмних модулів (макросів, надбудов) дозволяє на цій основі будь-кому, у першу чергу студентам та менеджерам-практикам, власноруч, досить просто і прозоро організувати й реалізувати процес моделювання проекту за принципом «Що, якщо?» чи, можливо, шляхом побудови відповідної імітаційної моделі з отриманням статистичних характеристик часових характеристик проекту в умовах невизначеності й ризику.

З проектного менеджменту відомо, що пошук критичного шляху у проектній мережі зводиться до пошуку максимальних (критичних) шляхів від її початку до усіх проміжних й кінцевого вузлів, що здійснюється «прямим ходом» мережею від її початкового до кінцевого вузла шляхом обчислення відповідних *максимумів* для вузлів.

Для цього за технологією AoN розраховуються часові моменти:

- *раннього початку* (РП або EST, Early Start Time) та
- *раннього завершення* (РЗ або EFT, Early Finish Time) кожної роботи за формулами:
  - $trp(i) = \max\{trz(k)\}$ ,  $k \in P(i)$ , де  $P(i)$  – підмножина робіт, що передують  $i$ -ій роботі
  - $trz(i) = trp(i) + t(i)$ ,  $t(i)$  – тривалість  $i$ -ої роботи.

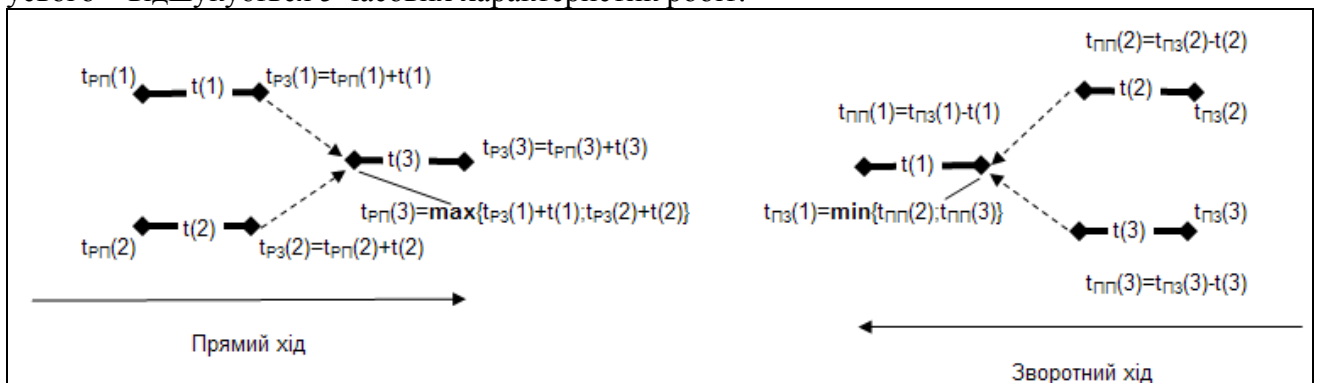
«Зворотним ходом» мережею від її кінцевого до початкового вузла розв'язується задача про пошук часткових мінімальних шляхів, для цього обчислюються *мінімуми* для вузлів та відповідні часові моменти:

- *пізнього початку* (ПП або LST, Late Start Time) та
- *пізнього завершення* (ПЗ або LFT, Late Finish Time) кожної роботи за формулами:
  - $tпз(i) = \min\{tпп(j)\}$ ,  $j \in S(i)$ , де  $S(i)$  – підмножина робіт, що слідує за  $i$ -ою роботою
  - $tпп(i) = tпз(i) - t(i)$ ,

тоді *загальний резерв часу* (Slack)  $i$ -ої роботи обчислюється за формулою:

$$r(i) = trz(i) - trp(i) = tпз(i) - tпп(i),$$

усього – відшукується 5 часових характеристик робіт:

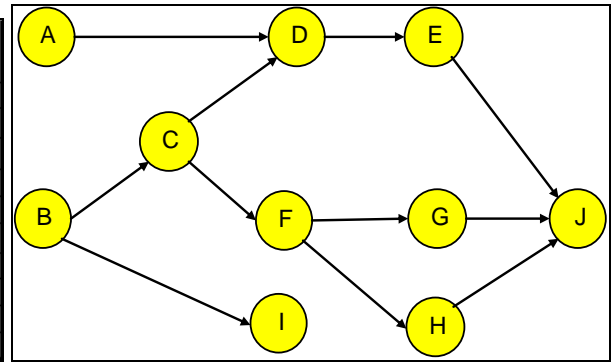


Таким чином, мережеве моделювання проекту зводиться до покрокового пошуку максимальних та мінімальних шляхів у мережі. В Excel є можливість здійснити ці розрахунки без застосування спеціальних програмних засобів.

### Приклад.

Проект з 10 робіт задано проектною таблицею (рис.), де перший та третій стовпці визначають відношення передування робіт, ця таблиця є основою побудови мережевого графіка та виконання усіх наступних обчислень:

Робота	Опис	Попередня робота	Очікувана тривалість (П)
A	Вибір місця розміщення		3
B	Розробка бізнес-плану		5
C	Визначення штату персоналу	B	3
D	Проектування	A, C	4
E	Конструювання	D	8
F	Впровадження	C	2
G	Новий персонал	F	4
H	Документування	F	2
I	Фінансовий звіт	B	5
J	Підвищення кваліфікації	E, G, H	3



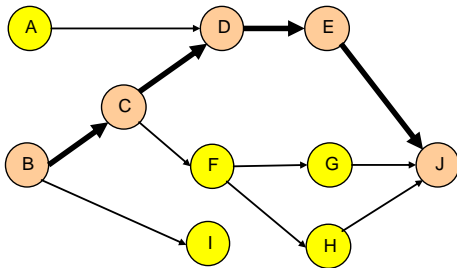
Проектна таблиця та вузлова (AoN) мережа

Добре видно, що за цією технологією просто й, головне, однозначно (хоча це й не обов'язково у порівнянні з AoA) будується мережева модель проекту, де роботи представлені вузлами, а дуги між ними вказують на існуючі технологічні зв'язки.

На цій основі формується відповідний розрахунковий табличний документ:

Робота	Опис	Попередня робота	Очікувана тривалість (П)	РП (EST)	РЗ (EFT)	ПП (LST)	ПЗ (LFT)	Резерв (Slack)
A	Вибір місця розміщення		3	0	3	5	8	5
B	Розробка бізнес-плану		5	0	5	0	5	0
C	Визначення штату персоналу	B	3	5	8	5	8	0
D	Проектування	A, C	4	8	12	8	12	0
E	Конструювання	D	8	12	20	12	20	0
F	Впровадження	C	2	8	10	14	16	6
G	Новий персонал	F	4	10	14	16	20	6
H	Документування	F	2	10	12	18	20	8
I	Фінансовий звіт	B	5	5	10	18	23	13
J	Підвищення кваліфікації	E, G, H	3	20	23	20	23	0
Мінімальна тривалість				23				

де за вказаними формулами



РП (EST)	РЗ (EFT)	ПП (LST)	ПЗ (LFT)	Резерв (Slack)
=0	=E2+D2	=H2-D2	=МИН(G5)	=G2-E2
=0	=E3+D3	=H3-D3	=МИН(G4;G10)	=G3-E3
=МАКС(F3)	=E4+D4	=H4-D4	=МИН(G5;G7)	=G4-E4
=МАКС(F2;F4)	=E5+D5	=H5-D5	=МИН(G6)	=G5-E5
=МАКС(F5)	=E6+D6	=H6-D6	=МИН(G11)	=G6-E6
=МАКС(F4)	=E7+D7	=H7-D7	=МИН(G8;G9)	=G7-E7
=МАКС(F7)	=E8+D8	=H8-D8	=МИН(G11)	=G8-E8
=МАКС(F7)	=E9+D9	=H9-D9	=МИН(G11)	=G9-E9
=МАКС(F3)	=E10+D10	=H10-D10	=МИН(F12)	=G10-E10
=МАКС(F6;F8;F9)	=E11+D11	=H11-D11	=МИН(F12)	=G11-E11
	=МАКС(F2;F11)			
Мінімальна тривалість				

визначені часові характеристики усіх робіт й знайдено критичний шлях, утворений роботами: B – C – D – E – J.

Наведений приклад організації табличних обчислень часових характеристик робіт дуже простий, але вимагає вручну й дуже уважно увести по 10 (по кількості робіт у проекті) унікальних формул для обчислення двох фундаментальних показників – РП та ПЗ кожної роботи (для певного спрощення тут уведено функції МАКС та МИН навіть для одного аргументу, які можна замінити прямим зверненням до клітинки), добре, що інші формули один раз вводяться й копіюються у діапазон клітинок.

Ясно, що для крупного проекту вводити ці унікальні формули досить непросто, тож саме тут виникла серйозна практична проблема розробки *універсальних формул* для кожної з цих двох колонок (РП та ПЗ) для скорочення часу й спрощення ручної праці, щоб таку формулу *один раз* увести, відформатувати й скопіювати у діапазон будь-якого розміру.

Завдяки тому, що вдалося знайти дві такі уніфіковані формули, єдині на увесь табличний документ *незалежно від розміру* проектної задачі, кардинально зменшується обчислювальна робота для проектів практично будь-якого розміру й спрощується процедура модифікації моделі – це стало можливим завдяки розробці формул із застосуванням мат-



ричних формул. Ці формули вже застосовувалися нами у задачах розв'язання СЛАР (МО-БР, МОПРЕД, МУМНОЖ), вони характеризуються надзвичайною потужністю й універсальністю.

Визначені дві формули реалізують циклічний (ітераційний) алгоритм обробки даних для:

- **максимізації** часткових критичних шляхів для обчислення РП (прямий хід) та
- **мінімізації** зворотних шляхів для обчислення ПЗ робіт (зворотний хід)

що надалі дозволяє визначити усі інші часові характеристики проекту.

Оскільки формули з масивами породжують ітераційні (циклічні) посилання (коли елементи формули у певній клітинці посилаються самі на себе прямо чи опосередковано через інші формули). На ці посилання Excel звичайно реагує як на помилку (рос. – ошибка).

Щоб дозволити такі посилання, треба зафіксувати пункт *Ітерації* командою *Сервіс*→*Параметри*→*Вычисления*.

### Формула 1 (прямий хід, максимум)

У кожній клітинці стовпця РП обчислюється максимум серед потоків, що входять у вузол, за допомогою єдиної складеної формули:

**{=МАКС(ЕСЛИ(ЕОШ(НАЙТИ(\$A\$2:\$A\$11,C2)),0,\$F\$2:\$F\$11))}**,

де застосовано 4 вкладених функції: *НАЙТИ()*, *ЕОШ()*, *ЕСЛИ()* та *МАКС()*, які утворюють цикл – послідовність операцій, що повторюються, звертаючись на кожному кроці до одних й тих же даних масиву:

- функція *НАЙТИ* для заданих кодів робіт (у стовпці А) відшукує їх входження у набір робіт-попередників (стовпець С), якщо таких не знаходить, виводить повідомлення про помилку *#ЗНАЧ!*, інакше виводить число – номер першої позиції коду
- функція *ЕОШ* перевіряє наявність помилки (рос. *Есть Ошибка?*) й виводить логічне значення *ИСТИНА* (є) чи *ЛОЖЬ* (нема) в залежності від перевірки
- функція *ЕСЛИ* формує масив з 10 чисел для кожної поточної роботи, це нулі для *ИСТИНА* та значення РЗ робіт-попередників
- функція *МАКС* знаходить максимум серед значень сформованого масиву РЗ з 10 чисел.

Результатом цієї процедури є довжини частинних й повного критичних шляхів:

E2		fx {=МАКС(ЕСЛИ(ЕОШ(НАЙТИ(\$A\$2:\$A\$11,C2));0,\$F\$2:\$F\$11))}				
	A	B	C	D	E	F
	Робота	Опис	Попередня робота	Очікувана тривалість (П)	РП (EST)	РЗ (EFT)
1						
2	A	Вибір місця розміщення		3	0	3
3	B	Розробка бізнес-плану		5	0	5
4	C	Визначення штату персоналу	B	3	5	8
5	D	Проектування	A, C	4	8	12
6	E	Конструювання	D	8	12	20
7	F	Впровадження	C	2	8	10
8	G	Новий персонал	F	4	10	14
9	H	Документування	F	2	10	12
10	I	Фінансовий звіт	B	5	5	10
11	J	Підвищення кваліфікації	E, G, H	3	20	23
12						23

За методом критичного шляху відомо, що максимум з РЗ робіт визначає мінімальну тривалість проекту, у прикладі, проект завершиться не раніше, ніж через 23 дні.

### Формула 2 (зворотний хід, мінімум)

Це єдина формула мінімізації, яка зворотним ходом знаходить мінімальні шляхи з кінця мережі до її початку:

{=МИН(ЕСЛИ(ЕОШ(НАЙТИ(A2;\$C\$2:\$C\$11));МАКС(\$F\$2:\$F\$11);\$G\$2:\$G\$11))},  
щоб мати змогу надалі визначити резерви часу робіт.

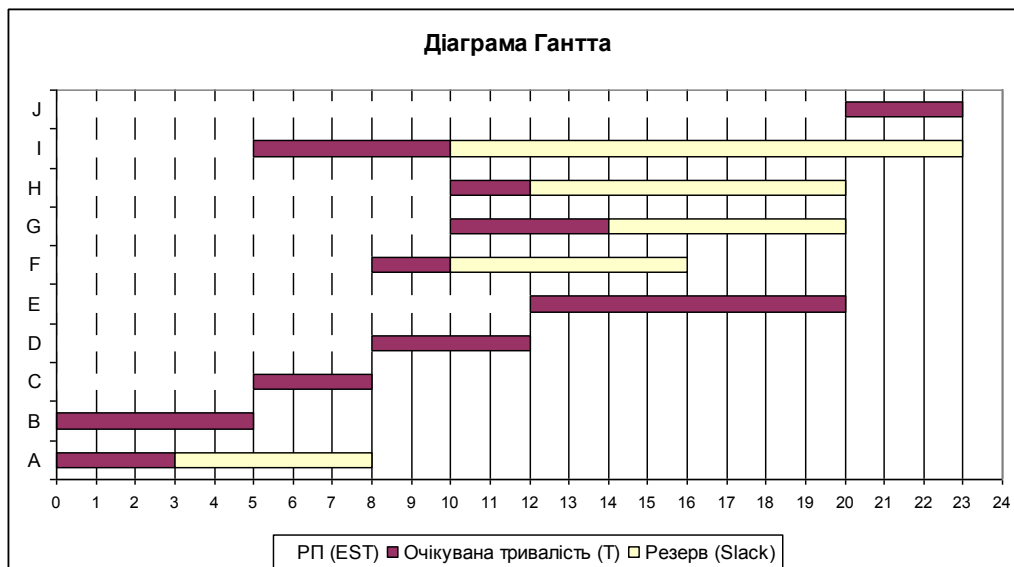
Принципова різниця між цими двома формулами – у другій формулі функція *ЕСЛИ* у випадку логічного результату *ИСТИНА* залишає максимальне значення ПЗ, інакше визначається мінімум зі значень ПЗ робіт:

H2		={МИН(ЕСЛИ(ЕОШ(НАЙТИ(A2;\$C\$2:\$C\$11));МАКС(\$F\$2:\$F\$11);\$G\$2:\$G\$11))}								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
	Робота	Опис	Попередня робота	Очікувана тривалість (T)	РП (EST)	РЗ (EFT)	ПП (LST)	ПЗ (LFT)	Резерв (Slack)	
1										
2	A	Вибір місця розміщення		3	0	3	5	8	5	
3	B	Розробка бізнес-плану		5	0	5	0	5	0	
4	C	Визначення штату персоналу	B	3	5	8	5	8	0	
5	D	Проектування	A, C	4	8	12	8	12	0	
6	E	Конструювання	D	8	12	20	12	20	0	
7	F	Впровадження	C	2	8	10	14	16	6	
8	G	Новий персонал	F	4	10	14	16	20	6	
9	H	Документування	F	2	10	12	18	20	8	
10	I	Фінансовий звіт	B	5	5	10	18	23	13	
11	J	Підвищення кваліфікації	E, G, H	3	20	23	20	23	0	
12						23				
13				Мінімальна тривалість						

Усі інші три часові характеристики, як відомо, визначаються за однаковими формулами, тепер просто обчислюється резерв часу усіх робіт й визначається критичний шлях: (B→C→D→E→J).

Таким чином, проблема «двох формул» вирішена – вони уводяться один раз для пошуку максимуму та мінімуму у вузлах-роботах мережі, що дозволяє досить просто отримати результати з моделювання проекту будь-якого розміру – за принципом «Що-якщо?» зміни початкових даних автоматично відтворюють нові часові оцінки проекту.

За отриманими табличними результатами тепер досить просто можна побудувати діаграму Гантта, яка у наочній формі ілюструє роботи проекту (тривалості і повні резерви) та їх взаємодію:



Мережеві моделі проекту типу PERT-Time та PERT-Cost розглядаються у дисципліні з проектного менеджменту.

#### Задача 4.8. Про потоки у мережах з втратами/прибавками

У класичних задачах потокового програмування вважається, що дугові потоки «ідеальні», тобто, без зміни величини (чи інших параметрів: температури, тиску, вартості, кількості) потоку, що передається дугою.

Однак у реальних задачах потокового типу величина потоку на виході (дуги, ділянки) завжди відрізняється від величини потоку на її вході: вона менша (з-за втрат, витрат) чи більша (з-за прибавки).

*Втрати величини потоку*, що передається вздовж ділянки-дуги комунікаційної мережі, характерні для водо-, нафто-, паро- чи газопроводів, каналів зв'язку тощо, де присутні природні процеси поглинання, випаровування, зміни тиску, щільності, швидкості чи хімічного складу, це також: всихання чи псування харчових продуктів, аварії техніки, пошкодження інформації тощо, відповідні коефіцієнти втрат завчасно плануються чи експериментально розраховуються.

Характерний приклад, що стосується кожного, це якість функціонування міської мережі централізованого опалювання житлових будинків, де на підземному шляху від теплогенеруючої установи до квартири гаряча вода втрачає чи не половину початкової температури, гріючи оточуючий ґрунт, ізоляцію, дороги та повітря.

Сюди ж слід віднести різноманітні технологічні та комунікаційні процеси, де на відповідних ділянках об'єктивно існують матеріальні втрати потоків з найрізноманітніших причин (аж до кримінальної відкачки нафти з магістрального нафтопроводу).

*Прибавка до початкової величини потоку* характерна, зокрема, для фінансових характеристик товарних потоків, який поетапно дорожчає з-за транспортування чи зберігання, з-за податкових, штрафних, контрольних та інших процедур на шляху від джерела до кінцевого пункту.

Отже, транспортні, фінансові чи технологічні потокові відхилення (втрати/прибавки), що описуються лінійними чи нелінійними функціями, на дугах реальної інженерної, економічної чи соціальної мережі та їх врахування – це досить розповсюджена практична ситуація, яка має бути оціненою при проектуванні, експлуатації й аналізі відповідних мереж. Слід додати, що такі відхилення характерні не лише для дуг, а й для проміжних вузлів у мережах: на перехрестях шляхів та транспортних розв'язках, у розподільчих вузлах із контрольною, запірною, реєструючою та вимірювальною арматурою тощо.

Саме такий вигляд має узагальнена задача потокової оптимізації.

#### Приклад

В практиці муніципального управління крупними міськими утвореннями надзвичайно актуальною є проблема збирання, зберігання й утилізації (*recycling problem*) відходів різного типу. Зокрема, досліджується робота спеціальної служби, що займається:

- збиранням, сортуванням й накопиченням паперових відходів у 4-ох населених пунктах (1÷4): Одеса, Чернівці, Вінниця, Суми, у них – джерела сировинних потоків із відповідними запасами (пропозиціями)
- доставкою сировини на переробку двома фабриками (А, В): Черкаси, Запоріжжя, де діють технологічні лінії для виготовлення відповідної готової продукції
- доставкою готової продукції споживачам у містах (5÷7): Донецьк, Сімферополь, Полтава, згідно їх попиту.

Мережа:

вузли: 4 джерела, 2 фабрики й 3 споживача, усього 9

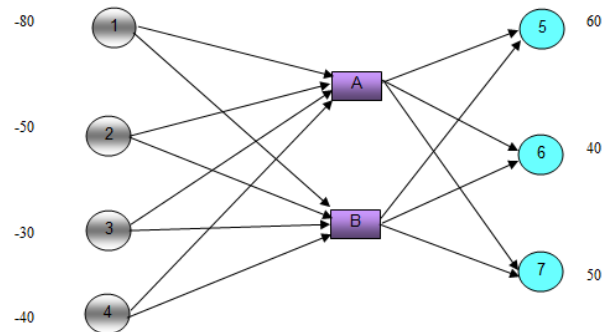
дуги: 8 (джерела→фабрики) та 6 (фабрики→споживачі), усього 14,

розмір мережі (9, 14);

- на 4 входи кожної фабрики з усіх джерел транспортними комунікаціями поступають потоки відповідної сировини, на фабриках з неї виготовляють пульпу, яка направляється

на технологічні лінії, де отримують 3 види паперової продукції (для принтера, пакування та пошти)

- з 3-ох виходів фабрик відповідна готова продукція транспортними комунікаціями доставляється споживачам:



Враховуються транспортні втрати сировини до фабрик і готової продукції до споживачів. Задано: запаси сировини, попит на готову продукцію, питома вартість транспортування дугами мережі та % втрат.

Треба визначити оптимальний план потоків сировини і продукції (звідки, куди і скільки передати), який характеризується мінімальними втратами з урахуванням відповідних транспортних втрат.

### Мережева модель

Дуги цієї мережі (їх 14, з них 8 входять у 2 вузли-процеси і 6 – виходять з них) вказують можливі напрямки потоків сировини і готової продукції, а вузли 3-ох типів визначають: запаси сировини (1, 2, 3, 4), переробку (A, B) і попит на готову продукцію (5, 6, 7).

Початкові дані і результати:

Потік на виходах (X)	Початок	Кінець	Втрати (%)	Ціна	Потік на входах (AX)	Н-варт	№	Вузол	Вх	Вих	Вх-Вих	Пропозиція/Попит	Т-ціна
12,4	Одеса	Черкаси	0,92	13	11,4	0	1	Одеса	0	76,2	-76,2	-80	0,00
63,9	Одеса	Запоріжжя	0,90	12	57,5	0	2	Чернівці	0	50	-50	-50	0,30
50,0	Чернівці	Черкаси	0,80	11	40,0	0	3	Вінниця	0	30	-30	-30	3,86
0	Чернівці	Запоріжжя	0,78	13	0,0	2,90	4	Суми	0	40	-40	-40	0,42
30,0	Вінниця	Черкаси	0,91	9	27,3	0	A	Черкаси	116,7	116,7	0	0	14,13
0	Вінниця	Запоріжжя	0,90	10	0	1,86	B	Запоріжжя	57,5	57,5	0	0	13,33
40,0	Суми	Черкаси	0,95	13	38,0	0	5	Донецьк	60	0	60	60	21,26
0	Суми	Запоріжжя	0,91	14	0	2,29	6	Сімферополь	40	0	40	40	25,16
66,7	Черкаси	Донецьк	0,90	5	60,0	0	7	Полтава	50	0	50	50	23,37
50,0	Черкаси	Сімферополь	0,80	6	40,0	0							
0	Черкаси	Полтава	0,93	8	0	0,39							
0	Запоріжжя	Донецьк	0,90	6	0	0,20							
0,0	Запоріжжя	Сімферополь	0,80	8	0	1,20							
57,5	Запоріжжя	Полтава	0,87	7	50	0							
								3302,53	Загальні втрати				

### Математична модель

#### Позначення

$i$  – поточний номер дуги,  $i = 1, \dots, 14$

$x_i$  – шукана величина потоку  $i$ -ою дугою на виході із джерела чи після переробки

$v_i x_i$  – величина потоку  $i$ -ою дугою на вході у процес переробки (фабрики),  $v_i$  – коефіцієнт втрат,  $v_i < 1$ .

$c_i x_i$  – вартість  $i$ -го потоку.

#### Задача оптимізації

I. Знайти план розподілу потоків  $X = (x_1, \dots, x_{14})$ , такий, щоб

II. ЦФ Витрати =  $13x_1 + 12x_2 + \dots + 13x_{13} + 7x_{14} \rightarrow \min$  (ЦФ)

III. за обмежень:

для джерел (сума потоків на їх виходах обмежується запасами):

$$x_1 + x_2 \leq 80 \text{ (Одеса)}$$

$$x_3 + x_4 \leq 50 \text{ (Чернівці)}$$

$$x_5 + x_6 \leq 30 \text{ (Вінниця)}$$

$$x_7 + x_8 \leq 40 \text{ (Суми)}$$

для фабрик (сума потоків на входах не менше суми потоків на виходах):

$$0,92x_1 + 0,80x_3 + 0,91x_5 + 0,95x_7 - x_9 - x_{10} - x_{11} \geq 0 \text{ (Черкаси)}$$

$$0,90x_2 + 0,78x_4 + 0,90x_6 + 0,91x_8 - x_{12} - x_{13} - x_{14} \geq 0 \text{ (Запоріжжя)}$$

для споживачів готової продукції (сума потоків на входах споживачів = попиту):

$$0,95x_9 + 0,90x_{12} = 60$$

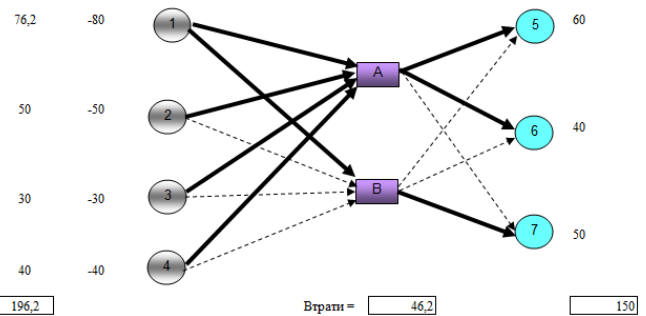
$$0,90x_{10} + 0,90x_{13} = 40$$

$$0,90x_{11} + 0,95x_{14} = 50$$

та граничних умов: усі  $x_i \geq 0$ .

Отже, у наведеній табличній моделі коефіцієнти при невідомих явно відрізняються від одиничних коефіцієнтів, характерних для класичних поточкових задач, саме цей факт має привертати увагу дослідника при реалізації моделі.

Результат:



**Аналіз результату**

Пряма задача

I. План  $X = [(12,4; 63,9; 50; 0; 30; 0; 40; 0); (66,7; 50; 0; 0; 0; 57,5)]$

II. ЦФ = 3302,53 гр. од.

Щоб задовольнити загальний попит у 150 ваг. од., відправлено з джерел 196,2 ваг. од., 46,2 ваг. од. втрачено при транспортуванні.

Двоїста задача

Дуги		Вузли		
Потік на виходах (X)	Н-варт	Вх - Вих	Пропозиція / Попит	Т-ціна
12,4	0,0	-76,2	-80	0,0
63,9	0,0	-50,0	-50	0,3
50,0	0,0	-30,0	-30	3,9
0,0	2,9	-40,0	-40	0,4
30,0	0,0	0,0	0	14,1
0,0	1,9	0,0	0	13,3
40,0	0,0	60,0	60	21,3
0,0	2,3	40,0	40	25,2
66,7	0,0	50,0	50	23,4
50,0	0,0			
0,0	0,4			
0,0	0,2			
0,0	1,2			
57,5	0,0			

Нормовані вартості потоків дугами – додатні числа для «невигідних» дуг із нульовими потоками, вказують на збільшення ЦФ при вимушеному транспортуванні ними 1 од.;

Тіньові ціни для вузлів-джерел вказують на зменшення ЦФ при збільшенні запасів на 1; для вузлів переробки й попиту – на збільшення ЦФ при збільшенні відповідних потоків на 1.

Ці оцінки – рекомендації для прийняття рішень щодо розвитку системи переробки сировини.

## Модифікація моделі

**Умова 1.** Споживачу із Сімферополя за оптимальним планом краще отримувати продукцію з Черкас, але він замовив 5 од. продукту із Запоріжжя, в оптимальному плані потік дугою Запоріжжя-Сімферополь «невігідний»,  $x_{13} = 0$ , для врахування цього бажання в моделі додається обмеження:  $0,8x_{13} = 5$ , де  $x_{13}$  – потік з фабрики у Запоріжжі до Сімферополя, результат:

Потік на виходах (X)	Початок	Кінець	Втрати (%)	Ціна	Потік на входах (AX)	№	Вузол	Вх	Вих	Вх-Вих	Пропозиція/ Попит
6	Одеса	Черкаси	0,92	13	5,1	1	Одеса	0	76,4	-76,4	-80
70,8	Одеса	Запоріжжя	0,90	12	63,7	2	Чернівці	0	50,0	-50,0	-50
50,0	Чернівці	Черкаси	0,80	11	40,0	3	Вінниця	0	30	-30	-30
0	Чернівці	Запоріжжя	0,78	13	0,0	4	Суми	0	40	-40	-40
30	Вінниця	Черкаси	0,91	9	27,3	A	Черкаси	110,4	110,4	0	0
0	Вінниця	Запоріжжя	0,90	10	0,0	B	Запоріжжя	63,7	63,7	0	0
40,0	Суми	Черкаси	0,95	13	38,0	5	Донецьк	60	0	60	60
0,0	Суми	Запоріжжя	0,91	14	0,0	6	Сімферополь	40	0	40	40
67	Черкаси	Донецьк	0,90	5	60,0	7	Полтава	50	0	50	50
43,7	Черкаси	Сімферополь	0,80	6	35,0						
0,0	Черкаси	Полтава	0,93	8	0,0		3310,05	Загальні витрати			
0,0	Запоріжжя	Донецьк	0,90	6	0,0						
6,3	Запоріжжя	Сімферополь	0,80	8	5,0						
57	Запоріжжя	Полтава	0,87	7	50,0						

Додаткові витрати ( $3310,05 - 3302,53 = 7,52$ ) пов'язані зі збільшенням потоку сировини «коштовною» (12 гр. од.) дугою Одеса-Запоріжжя на 6,9 ваг. од. (з 63,9 до 70,8) та потоку 5 од. готової продукції дугою Запоріжжя-Сімферополь (з 0 до 6,2 од.), при цьому здійснено перерозподіл потоків іншими ділянками.

**Умова 2.** Додатково до умови 1 споживач у Донецьку хоче обмежити кількість продукції з Черкас до 50 од., відповідно, для потоку дугою Черкаси-Донецьк вводимо обмеження:  $0,9x_9 \leq 50$ , результат:

Потік на виходах (X)	Початок	Кінець	Втрати (%)	Ціна	Потік на входах (AX)	№	Вузол	Вх	Вих	Вх-Вих	Пропозиція/ Попит
0	Одеса	Черкаси	0,92	13	0,0	1	Одеса	0	80,0	-80,0	-80
80	Одеса	Запоріжжя	0,90	12	72,0	2	Чернівці	0	45,8	-45,8	-50
45,8	Чернівці	Черкаси	0,80	11	36,7	3	Вінниця	0	30	-30	-30
0	Чернівці	Запоріжжя	0,78	13	0,0	4	Суми	0	40	-40	-40
30	Вінниця	Черкаси	0,91	9	27,3	A	Черкаси	102,0	102,0	0	0
0	Вінниця	Запоріжжя	0,90	10	0,0	B	Запоріжжя	72,0	72,0	0	0
40	Суми	Черкаси	0,95	13	38,0	5	Донецьк	60	0	60	60
0	Суми	Запоріжжя	0,91	14	0,0	6	Сімферополь	40	0	40	40
55,6	Черкаси	Донецьк	0,90	5	50,0	7	Полтава	50	0	50	50
43,8	Черкаси	Сімферополь	0,80	6	35,0						
2,6	Черкаси	Полтава	0,93	8	2,5		3314,62	Загальні витрати			
11,1	Запоріжжя	Донецьк	0,90	6	10,0						
6,2	Запоріжжя	Сімферополь	0,80	8	5,0						
54,6	Запоріжжя	Полтава	0,87	7	47,5						

## Задача 4.9. Побудова дерева мінімального покриття

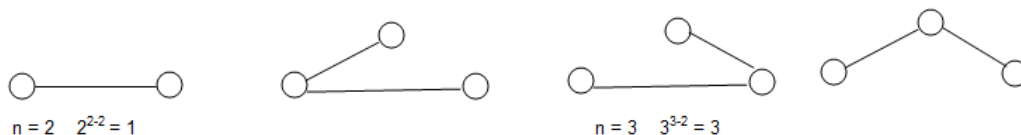
*Покриваюче дерево* (рос.: покрывающее или остовное дерево; англ.: spanning tree) – дерево, що покриває мережу – містить усі  $n$  вузлів та рівно  $n - 1$  дугу, що з'єднують ці вузли.

*Мінімальне покриваюче дерево* (МПД) – покриваюче дерево, сума вагових коефіцієнтів (довжин, вартостей) дуг якого мінімальна.

*Теорема Келі про дерева* (Cauley, 1889) – у мережі з  $n$  вузлів існує  $n^{n-2}$  дерев (таблиця).

Перевірка:

n	$n^{n-2}$
2	1
3	3
4	16
5	125
6	1296
7	16807
8	262144
9	4782969
10	100000000
11	2357947691
12	61917364224



**Застосування.** Якщо населені пункти в регіоні, скважини із видобутку нафти чи газу, елементи електронної схеми на платі, верстати в цеху, телефони-автомати чи банкомати у місті тощо вважати вузлами відповідної мережі, тоді МПД – сукупність дуг (ділянок доріг, трубопроводів, кабелів чи провідників), що з'єднують вузли, мінімальної загальної довжини (чи вартості).

Пошук МПД здійснюють:

- точним методом із однозначним результатом – за спеціальним алгоритмом, вручну або комп'ютерним програмуванням чи
- наближеним методом із можливістю враховувати певні умови уведенням додаткових обмежень – розв'язанням відповідної задачі потокового програмування

### Точний $n$ -кроковий алгоритм Пріма<sup>40</sup>

Побудова починається з піддерева, що містить один довільний вузол (корінь дерева). На наступних кроках піддерево розростається, аж поки не охопить усі вузли мережі, ставши МПД. На кожному  $i$ -му кроці алгоритму,  $i = 1, \dots, n$ , до поточного піддерева приєднується найкоротша із дуг, які з'єднують вузли у складі вже побудованого піддерева з вузлами поза цього піддерева.

**Приклад 1.** ( $n = 6, m = 10$ ).

Крок 1. Піддерево містить вузол 1 (корінь дерева).

Крок 2. До вузла 1 приєднується 1-ша найкоротша дуга (1, 5) довжиною 80, яка з'єднує вузол 1 з вузлом 5, тепер піддерево містить вузли 1, 5.

Крок 3. До вузлів 1 та 5 приєднується 2-га найкоротша дуга (5, 6) довжиною 50, яка з'єднує вузол 5 з вузлом 6, тепер піддерево містить вузли 1, 5, 6.

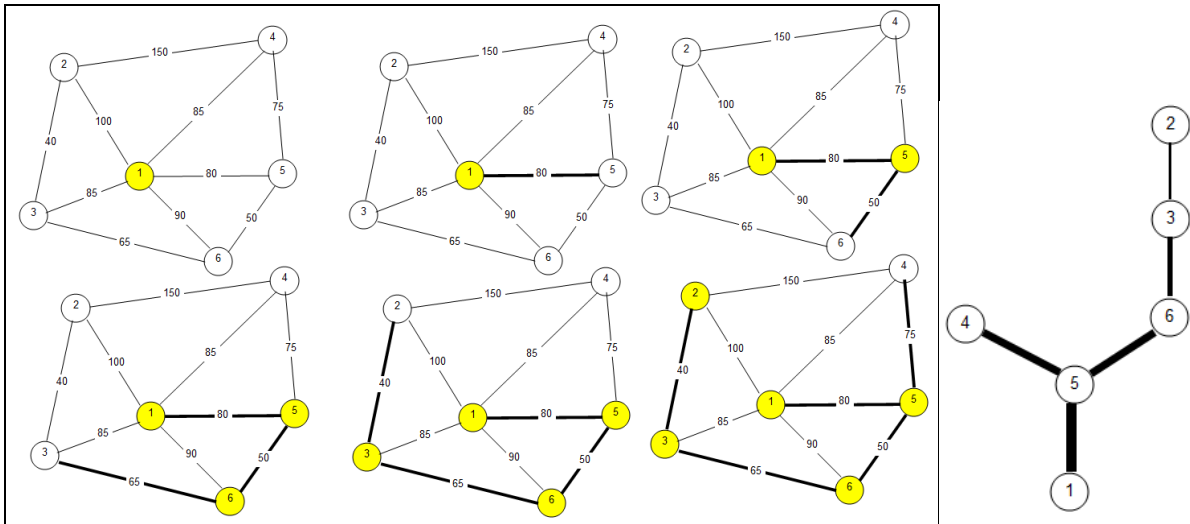
Крок 4. До вузлів 1, 5 та 6 приєднується 3-тя найкоротша дуга (6, 3) довжиною 65, яка з'єднує вузол 6 з вузлом 3, тепер піддерево містить вузли 1, 5, 6, 3.

Крок 5. До вузлів 1, 5, 6, 3 приєднується 4-та найкоротша дуга (3, 2) довжиною 40, яка з'єднує вузол 3 з вузлом 2, тепер піддерево містить вузли 1, 5, 6, 3, 2.

Крок 6. До вузлів 1, 5, 6, 3, 2 приєднується 5-та найкоротша дуга (5, 4) довжиною 75, яка з'єднує вузол 5 з вузлом 4, тепер піддерево містить усі 6 вузлів й стає мінімальним покриваючим деревом.

Довжина МПД =  $80+50+65+40+75 = 310$ , у дереві є корінь (1), 2 листки (2, 4) та 3 розгалуження (5, 6, 3):

<sup>40</sup> R. Prim. Shortest connection networks and some generalizations. In: Bell System Technical Journal, 36 (1957)



**Задача 4.10. Наближений розв’язок задачі про МПД в Excel (Поиск решения)**

Приклад 1 ( $n = 6, m = 10$ ).

За умови, що у МПД з  $n$  вузлів всього  $n - 1$  дуга, впливає, що з кожного вузла цього дерева, починаючи з кореня, обов’язково *виходить* хоча б одна дуга у напрямку до інших вузлів мережі. Ключове слово «виходить» дозволяє замінити задану ненаправлену мережу направленою мережею шляхом заміни у кожному вузлі ненаправлених дуг напрямленими, що зображуються стрілками – вони виходять з поточного вузла у напрямку від визначеного джерела потоку (кореня МПД) до визначеного стоку, так, щоб не утворилися цикли. Стрілки обов’язково повинні бути на виходах із джерела (кореня) й на входах у стік, всередині мережі певні пари вузлів можна з’єднати двонаправленими дугами.

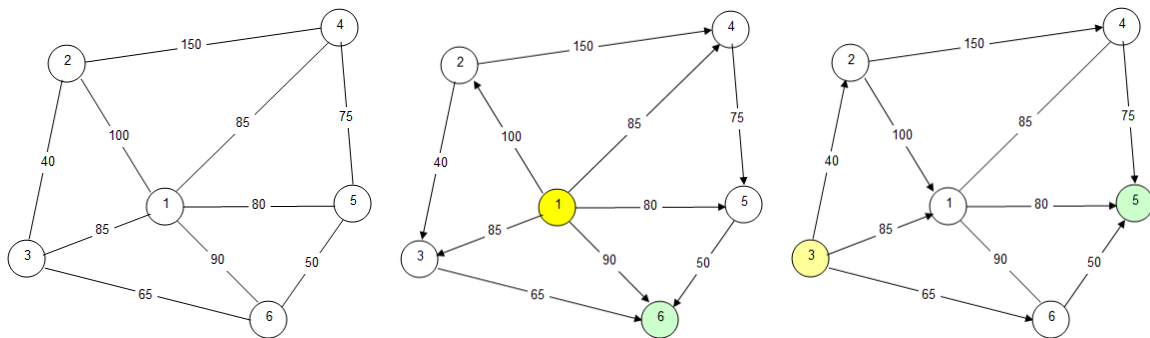
Зрозуміло, що існують різні варіанти побудови направленої мережі, починаючи від визначення джерела й стоку, звідси – це наближений метод до пошуку МПД, який зате дозволяє вводити додаткові обмеження й оцінювати їх наслідки.

Модель цієї задачі належить до класу моделей лінійного цілочислового (булева) програмування.

Для побудови табличної моделі за основу можна узяти модель задачі про пошук найкоротшого шляху.

Ось два варіанти направлених мереж для наведеного прикладу:

- 1) з джерелом 1 та стоком 6
- 2) з джерелом 3 та стоком 5:





## Математична модель

Позначення:

$i$  – поточний номер<sup>41</sup> дуги,  $i = 1, \dots, 10$ ,

$j$  – поточний номер вузла,  $j = 1, \dots, 6$ ,

$x_i$  – величина потоку  $i$ -ою дугою,  $x_i \in (0, 1)$ ,

$d_i$  – довжина  $i$ -ої дуги,

$D = \sum_{i \in \text{МПД}} d_i$  – довжина МПД (ЦФ)

$p(i), k(i)$  – початковий і кінцевий вузли  $i$ -ої дуги,

$\sum_{p(i)=j} x_i$  – вихідний потік із  $j$ -го вузла, це сума потоків, початки  $i$ -их дуг співпадають з іме-

нем  $j$ -го вузла

$K = \sum_{i \in \text{МПД}} x_i$  – кількість дуг, що належать МПД.

Варіант 1 (джерело – вузол 1, стік – вузол 6)

### Задача оптимізації

I. Знайти вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{10})$  такий, щоб

II. ЦФ  $D \rightarrow \min$

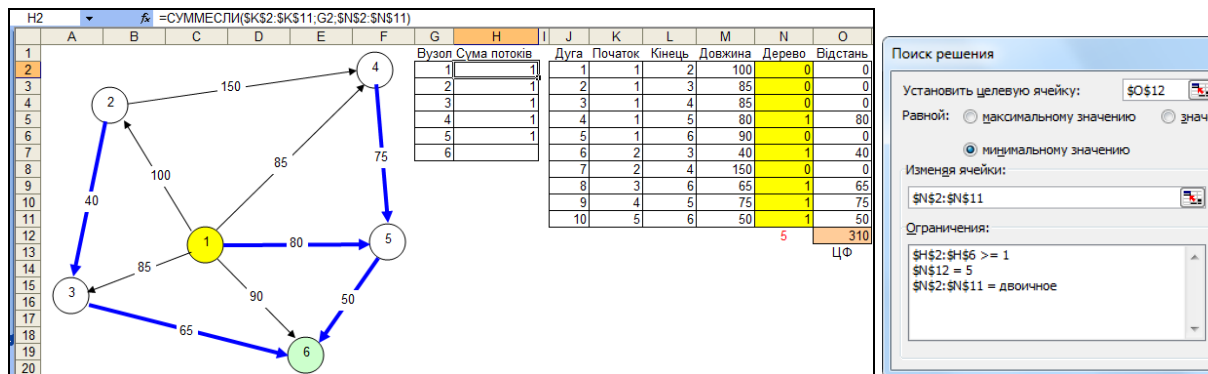
III. за обмежень:

$$\sum_{p(i)=j} x_i \geq 1$$

$$K = 5$$

та граничних умов: усі  $x_i \geq 0, x_i \in \{0, 1\}$ .

### Результат



### Аналіз результату

#### Пряма задача

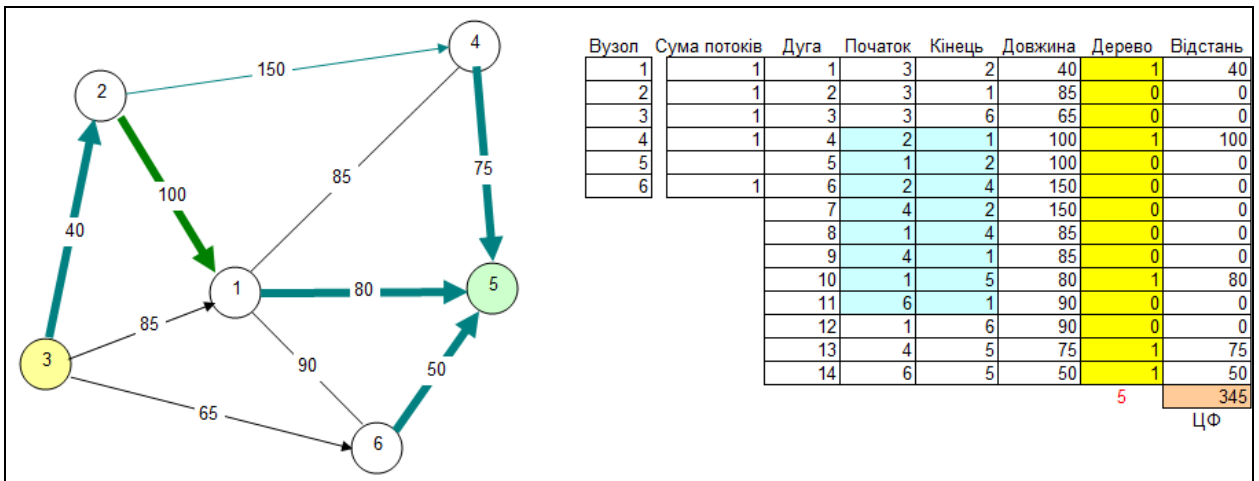
Знайдено план  $X$ , у якому 5 ( $n - 1$ ) дуг належать МПД, його довжина = 310.

Двоїсті оцінки відсутні з-за цілочисельності плану (метод гілок і границь).

Маючи точний розв'язок, побудований вручну, можна стверджувати, що направлена мережа побудована вдало.

Варіант 2 (джерело – вузол 3, стік – вузол 5):

<sup>41</sup> замість номерів можуть використовуватися назви вузлів, наприклад, населених пунктів



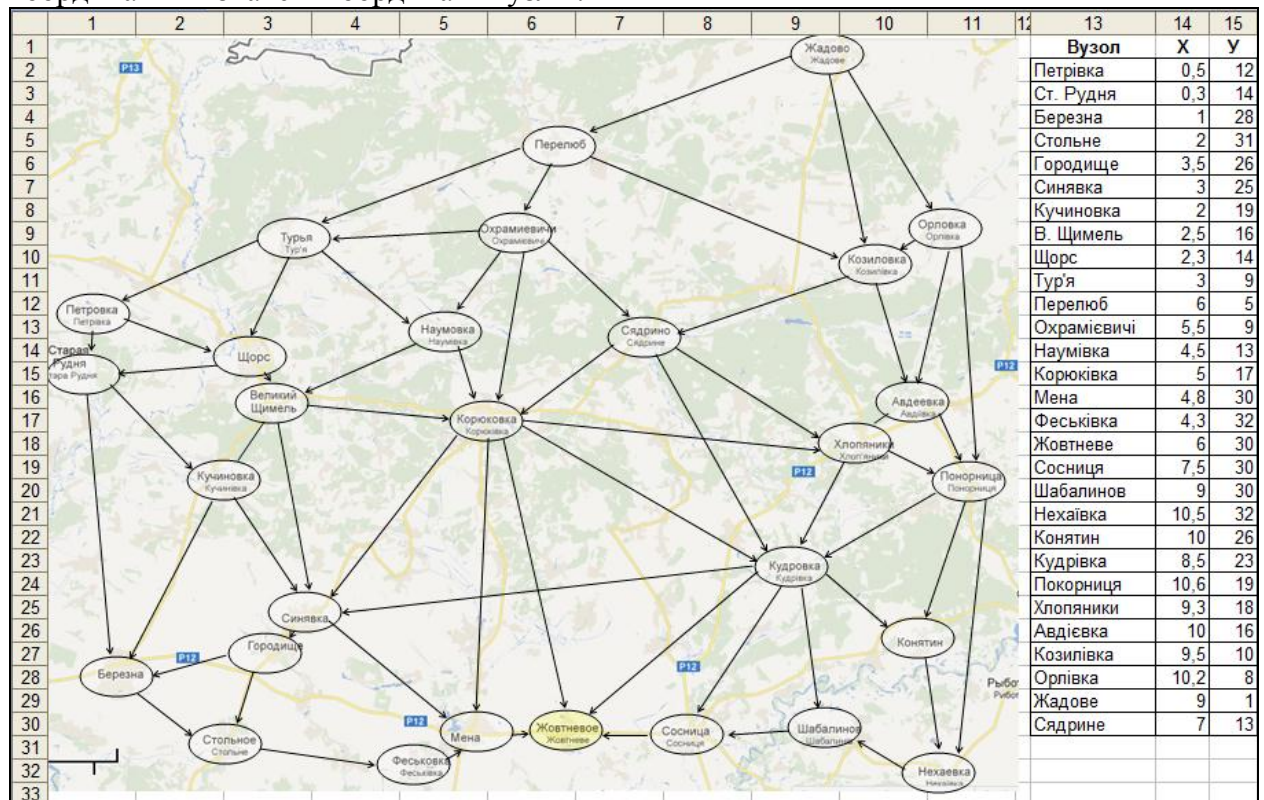
Задача дещо розширена – чотири дуги: (1, 2), (2, 4), (1, 4) та (1, 6) двонаправлені, щоб мати більше степенів свободи. Але, маючи точний розв’язок, можна стверджувати, що направлена мережа побудована невдало, одна дуга не співпала з оптимальним покриттям, звідси збільшене значення ЦФ (345 проти 310).

Приклад 2 ( $n = 29, m = 64$ ).

Постановка задачі (підвищеної складності)

У сільській місцевості (Чернігівська обл.) визначено 29 населених пунктів, для яких треба побудувати мережу електропостачання, щоб загальний кілометраж кабельного зв’язку був мінімальним.

Побудована ненаправлена мережа, де 29 вузлів з’єднані дугами, їх 64, сформована система координат й визначені координати вузлів:



### Задача оптимізації

I. Знайти вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{64})$  такий, щоб

II. ЦФ  $D \rightarrow \min$

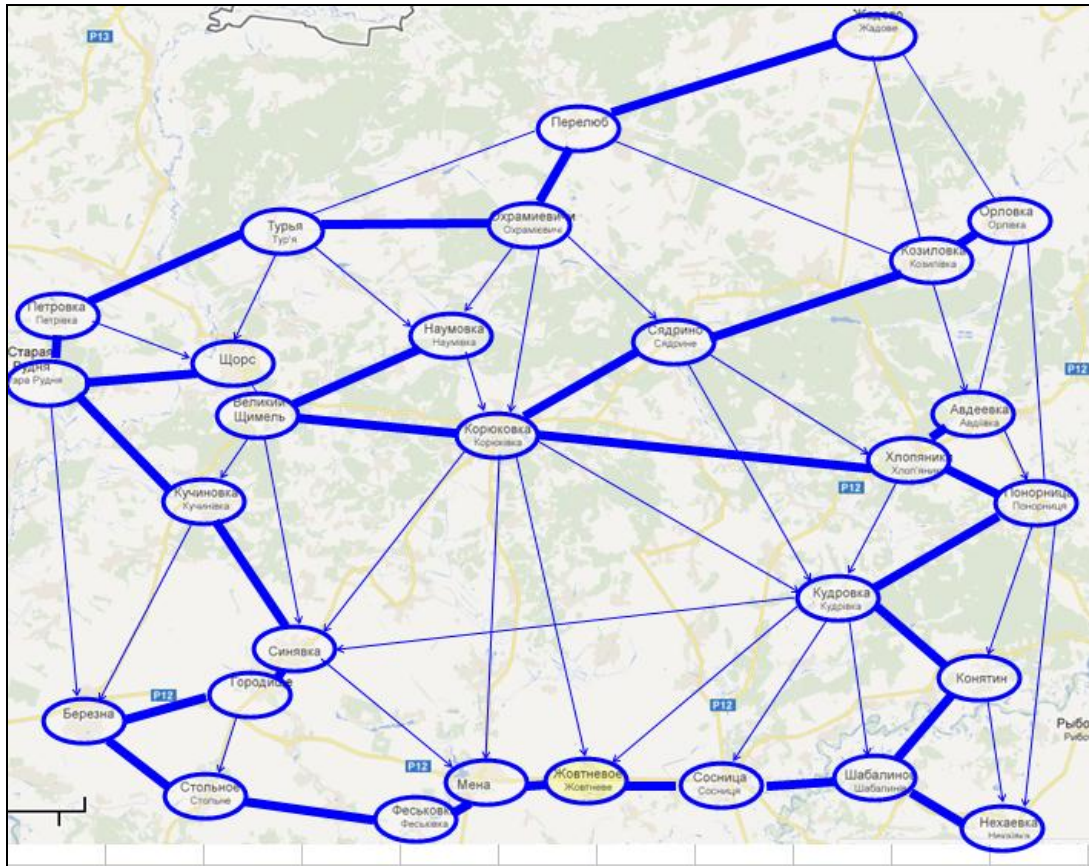
III. за обмежень:

$$\sum_{p(i)=j} x_i \geq 1$$

$$K = 28$$

та граничних умов: усі  $x_i \geq 0, x_i \in \{0, 1\}$ .

### Результат

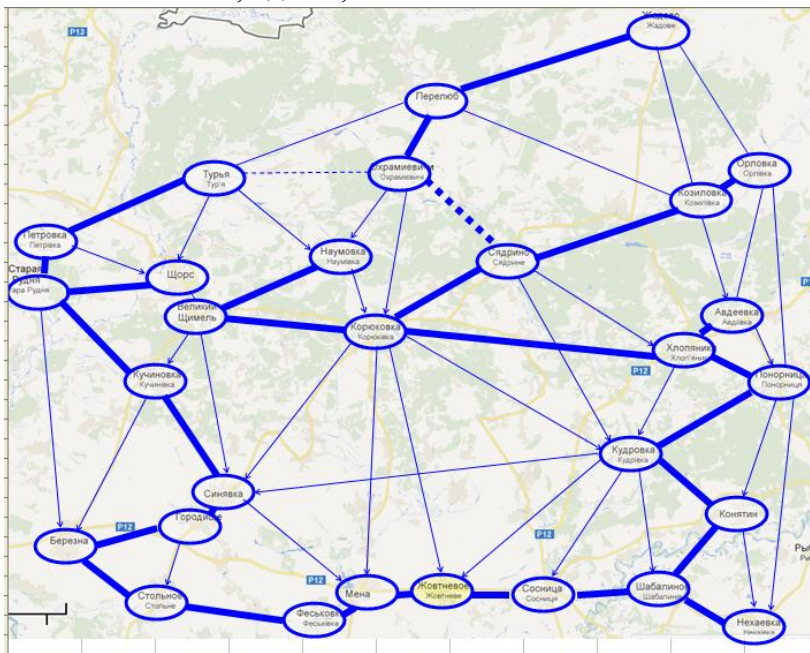


L	M	N	O	P	CR	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB
1	Бузол	X	У	Вих		Дуга	Початок	X	У	Кінець	X	У	Довжина	Дерево	Відстань
2	1	Петрівка	0,5	12	1	1	Жадове	9	1	Перелюб	6	5	5,0	1	5,0
3	2	Ст. Рудня	0,3	14	1	2	Жадове	9	1	Козилівка	9,5	10	9,0	0	0,0
4	3	Березна	1	28	1	3	Жадове	9	1	Орлівка	10,2	8	7,1	0	0,0
5	4	Стольне	2	31	1	4	Перелюб	6	5	Тур'я	3	9	5,0	0	0,0
6	5	Городище	3,5	26	1	5	Перелюб	6	5	Охримівці	5,5	9	4,0	1	4,0
7	6	Синявка	3	25	1	6	Перелюб	6	5	Козилівка	9,5	10	6,1	0	0,0
8	7	Кучиновка	2	19	1	7	Орлівка	10,2	8	Козилівка	9,5	10	2,1	1	2,1
9	8	В. Щимель	2,5	16	1	8	Орлівка	10,2	8	Авдіївка	10	16	8,0	0	0,0
10	9	Щорс	2,3	14	1	9	Орлівка	10,2	8	Покорниця	10,6	19	11,0	0	0,0
11	10	Тур'я	3	9	1	10	Козилівка	9,5	10	Сядрине	7	13	3,9	1	3,9
12	11	Перелюб	6	5	1	11	Козилівка	9,5	10	Авдіївка	10	16	6,0	0	0,0
13	12	Охримівці	5,5	9	1	12	Авдіївка	10	16	Покорниця	10,6	19	3,1	0	0,0
14	13	Науомка	4,5	13	1	13	Авдіївка	10	16	Хлоп'яки	9,3	18	2,1	1	2,1
15	14	Короківка	5	17	1	14	Хлоп'яки	9,3	18	Покорниця	10,6	19	1,6	1	1,6
16	15	Мена	4,8	30	1	15	Хлоп'яки	9,3	18	Кудрівка	8,5	23	5,1	0	0,0
17	16	Феськівка	4,3	32	1	16	Покорниця	10,6	19	Нехаївка	10,5	32	13,0	0	0,0
18	17	Жовтнєве	6	30	1	17	Покорниця	10,6	19	Конятин	10	26	7,0	0	0,0
19	18	Сосниця	7,5	30	1	18	Покорниця	10,6	19	Кудрівка	8,5	23	4,5	1	4,5
20	19	Шабалинів	9	30	1	19	Кудрівка	8,5	23	Конятин	10	26	3,4	1	3,4
21	20	Нехаївка	10,5	32	1	20	Кудрівка	8,5	23	Шабалинів	9	30	7,0	0	0,0
22	21	Конятин	10	26	1	21	Кудрівка	8,5	23	Сосниця	7,5	30	7,1	0	0,0
23	22	Кудрівка	8,5	23	1	22	Кудрівка	8,5	23	Жовтнєве	6	30	7,4	0	0,0
24	23	Покорниця	10,6	19	1	23	Кудрівка	8,5	23	Синявка	3	25	5,9	0	0,0
25	24	Хлоп'яки	9,3	18	1	24	Конятин	10	26	Нехаївка	10,5	32	6,0	0	0,0
26	25	Авдіївка	10	16	1	25	Конятин	10	26	Шабалинів	9	30	4,1	1	4,1
27	26	Козилівка	9,5	10	1	26	Нехаївка	10,5	32	Шабалинів	9	30	2,5	1	2,5
28	27	Орлівка	10,2	8	1	27	Шабалинів	9	30	Сосниця	7,5	30	1,5	1	1,5
29	28	Жадове	9	1	1	28	Сосниця	7,5	30	Жовтнєве	6	30	1,5	1	1,5
30	29	Сядрине	7	13	1	29	Охримівці	5,5	9	Сядрине	7	13	4,3	0	0,0
31						30	Охримівці	5,5	9	Короківка	5	17	8,0	0	0,0
32						31	Охримівці	5,5	9	Науомка	4,5	13	4,1	0	0,0
33						32	Охримівці	5,5	9	Тур'я	3	9	2,5	1	2,5
34						33	Тур'я	3	9	Науомка	4,5	13	4,3	0	0,0
35						34	Тур'я	3	9	Щорс	2,3	14	5,0	0	0,0
36						35	Тур'я	3	9	Петрівка	0,5	12	3,9	1	3,9
37						36	Петрівка	0,5	12	Щорс	2,3	14	2,7	0	0,0
38						37	Петрівка	0,5	12	Ст. Рудня	0,3	14	2,0	1	2,0
39						38	Ст. Рудня	0,3	14	Кучиновка	2	19	5,3	1	5,3

S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	
40	39	Ст. Рудня	0,3	14	Березна	1	28	14,0	0	0,0
41	40	Щорс	2,3	14	В. Щимель	2,5	16	2,0	0	0,0
42	41	Щорс	2,3	14	Ст. Рудня	0,3	14	2,0	1	2,0
43	42	Науомка	4,5	13	Короківка	5	17	4,0	0	0,0
44	43	Науомка	4,5	13	В. Щимель	2,5	16	3,6	1	3,6
45	44	В. Щимель	2,5	16	Короківка	5	17	2,7	1	2,7
46	45	В. Щимель	2,5	16	Синявка	3	25	9,0	0	0,0
47	46	В. Щимель	2,5	16	Кучиновка	2	19	3,0	0	0,0
48	47	Кучиновка	2	19	Синявка	3	25	6,1	1	6,1
49	48	Кучиновка	2	19	Березна	1	28	9,1	0	0,0
50	49	Сядрине	7	13	Короківка	5	17	4,5	1	4,5
51	50	Сядрине	7	13	Кудрівка	8,5	23	10,1	0	0,0
52	51	Сядрине	7	13	Хлоп'яки	9,3	18	5,5	0	0,0
53	52	Короківка	5	17	Синявка	3	25	8,2	0	0,0
54	53	Короківка	5	17	Мена	4,8	30	13,0	0	0,0
55	54	Короківка	5	17	Жовтнєве	6	30	13,0	0	0,0
56	55	Короківка	5	17	Кудрівка	8,5	23	6,9	0	0,0
57	56	Короківка	5	17	Хлоп'яки	9,3	18	4,4	1	4,4
58	57	Березна	1	28	Стольне	2	31	3,2	1	3,2
59	58	Синявка	3	25	Городище	3,5	26	1,1	1	1,1
60	59	Синявка	3	25	Мена	4,8	30	5,3	0	0,0
61	60	Городище	3,5	26	Стольне	2	31	5,2	0	0,0
62	61	Городище	3,5	26	Березна	1	28	3,2	1	3,2
63	62	Стольне	2	31	Феськівка	4,3	32	2,5	1	2,5
64	63	Феськівка	4,3	32	Мена	4,8	30	2,1	1	2,1
65	64	Мена	4,8	30	Жовтнєве	6	30	1,2	1	1,2
66								28		86,3

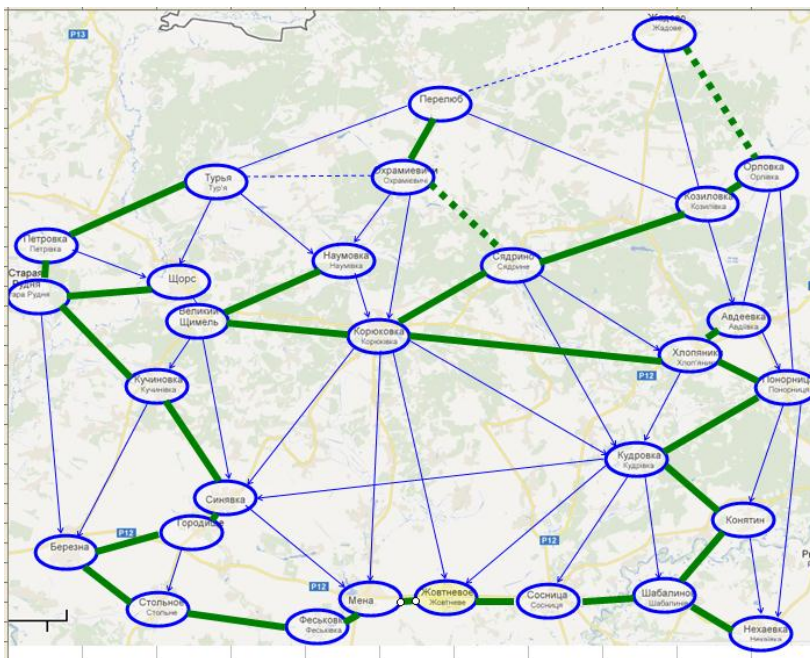
## Модифікація моделі

**Умова 1.** Прийнято вольове рішення у МПД додати дугу Охрамієвичі-Сядрине, яка виключила дугу Охрамієвичі-Тур'я, уведено відповідне обмеження:  $x_{29} = 1$ , значення ЦФ збільшилося з 86,5 до 88,3:



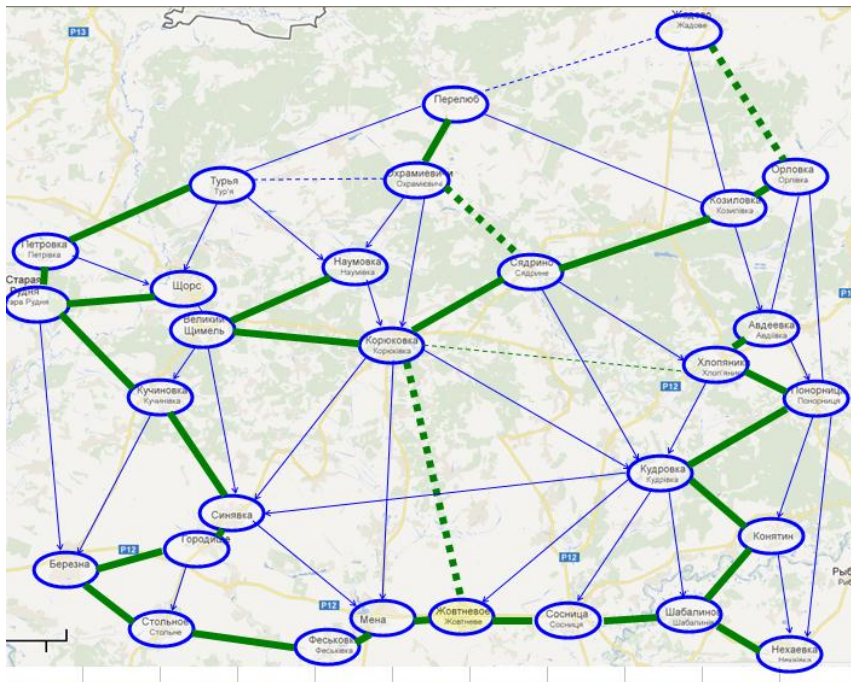
28	Сосниця	Жовтневе	1,5	1	1,5	
29	Охрамієвичі	Сядрине	4,3	1	4,3	
30	Охрамієвичі	Корюківка	8,0	0	0,0	
31	Охрамієвичі	Наумівка	4,1	0	0,0	
32	Охрамієвичі	Тур'я	2,5	0	0,0	
33	Тур'я	Наумівка	4,3	0	0,0	
34	Тур'я	Щорс	5,0	0	0,0	
35	Тур'я	Петрівка	3,9	1	3,9	
36	Петрівка	Щорс	2,7	0	0,0	
37	Петрівка	Ст. Рудня	2,0	1	2,0	
38	Ст. Рудня	Кучиновка	5,3	1	5,3	
39	Ст. Рудня	Березна	14,0	0	0,0	
40	Щорс	В. Щимель	2,0	0	0,0	
41	Щорс	Ст. Рудня	2,0	1	2,0	
42	Наумівка	Корюківка	4,0	0	0,0	
43	Наумівка	В. Щимель	3,6	1	3,6	
44	В. Щимель	Корюківка	2,7	1	2,7	
45	В. Щимель	Синявка	9,0	0	0,0	
46	В. Щимель	Кучиновка	3,0	0	0,0	
47	Кучиновка	Синявка	6,1	1	6,1	
48	Кучиновка	Березна	9,1	0	0,0	
49	Сядрине	Корюківка	4,5	1	4,5	
50	Сядрине	Кудрівка	10,1	0	0,0	
51	Сядрине	Хлопяники	5,5	0	0,0	
52	Корюківка	Синявка	8,2	0	0,0	
53	Корюківка	Мена	13,0	0	0,0	
54	Корюківка	Жовтневе	13,0	0	0,0	
55	Корюківка	Кудрівка	6,9	0	0,0	
56	Корюківка	Хлопяники	4,4	1	4,4	
57	Березна	Стольне	3,2	1	3,2	
58	Синявка	Городище	1,1	1	1,1	
59	Синявка	Мена	5,3	0	0,0	
60	Городище	Стольне	5,2	0	0,0	
61	Городище	Березна	3,2	1	3,2	
62	Стольне	Феськівка	2,5	1	2,5	
63	Феськівка	Мена	2,1	1	2,1	
64	Мена	Жовтневе	1,2	1	1,2	
					28	88,3

**Умова 2.** Прийнято рішення у МПД додати дугу Жадове-Орлівка, яка виключила дугу Жадове-Перелюб, відповідне обмеження:  $x_3 = 1$ , значення ЦФ збільшилося з 88,3 до 90,4:

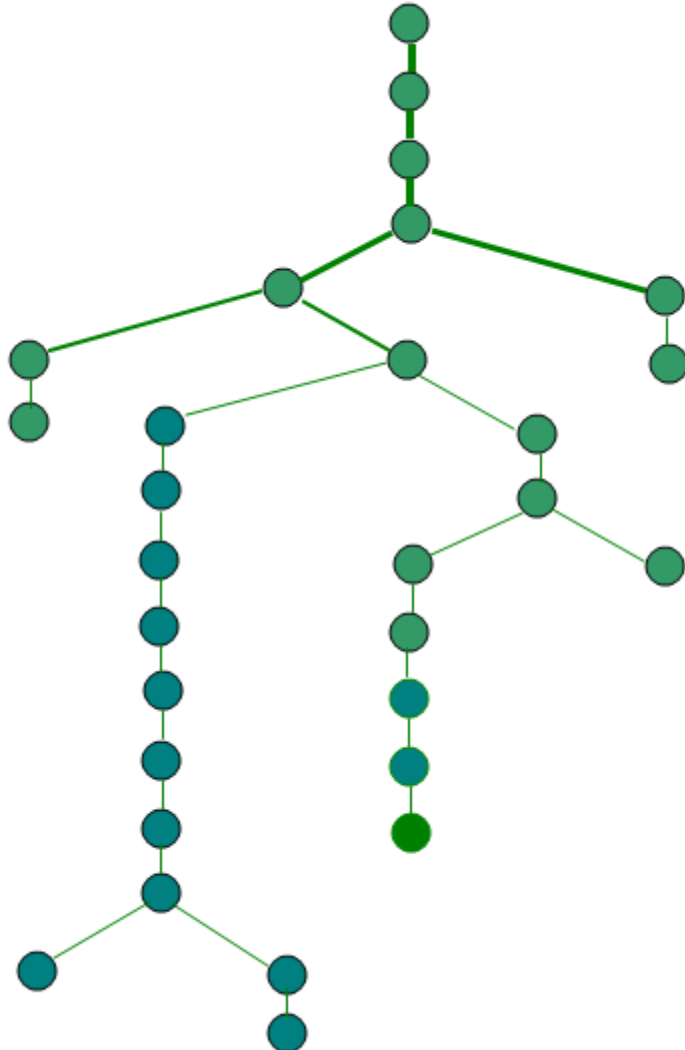


29	Охрамієвичі	Сядрине	4,3	1	4,3	
30	Охрамієвичі	Корюківка	8,0	0	0,0	
31	Охрамієвичі	Наумівка	4,1	0	0,0	
32	Охрамієвичі	Тур'я	2,5	0	0,0	
33	Тур'я	Наумівка	4,3	0	0,0	
34	Тур'я	Щорс	5,0	0	0,0	
35	Тур'я	Петрівка	3,9	1	3,9	
36	Петрівка	Щорс	2,7	0	0,0	
37	Петрівка	Ст. Рудня	2,0	1	2,0	
38	Ст. Рудня	Кучиновка	5,3	1	5,3	
39	Ст. Рудня	Березна	14,0	0	0,0	
40	Щорс	В. Щимель	2,0	0	0,0	
41	Щорс	Ст. Рудня	2,0	1	2,0	
42	Наумівка	Корюківка	4,0	0	0,0	
43	Наумівка	В. Щимель	3,6	1	3,6	
44	В. Щимель	Корюківка	2,7	1	2,7	
45	В. Щимель	Синявка	9,0	0	0,0	
46	В. Щимель	Кучиновка	3,0	0	0,0	
47	Кучиновка	Синявка	6,1	1	6,1	
48	Кучиновка	Березна	9,1	0	0,0	
49	Сядрине	Корюківка	4,5	1	4,5	
50	Сядрине	Кудрівка	10,1	0	0,0	
51	Сядрине	Хлопяники	5,5	0	0,0	
52	Корюківка	Синявка	8,2	0	0,0	
53	Корюківка	Мена	13,0	0	0,0	
54	Корюківка	Жовтневе	13,0	0	0,0	
55	Корюківка	Кудрівка	6,9	0	0,0	
56	Корюківка	Хлопяники	4,4	1	4,4	
57	Березна	Стольне	3,2	1	3,2	
58	Синявка	Городище	1,1	1	1,1	
59	Синявка	Мена	5,3	0	0,0	
60	Городище	Стольне	5,2	0	0,0	
61	Городище	Березна	3,2	1	3,2	
62	Стольне	Феськівка	2,5	1	2,5	
63	Феськівка	Мена	2,1	1	2,1	
64	Мена	Жовтневе	1,2	1	1,2	
					28	90,4

**Умова 3.** У МПД додана дуга Корюківка-Жовтневе, яка виключила дугу Корюківка - Хлопяники, відповідне обмеження:  $x_{54} = 1$ , значення ЦФ збільшилося з 90,4 до 99:



28	Сосниця	Жовтневе	1,5	1	1,5
29	Охрімівці	Сядрине	4,3	1	4,3
30	Охрімівці	Корюківка	8,0	0	0,0
31	Охрімівці	Наумівка	4,1	0	0,0
32	Охрімівці	Тур'я	2,5	0	0,0
33	Тур'я	Наумівка	4,3	0	0,0
34	Тур'я	Щорс	5,0	0	0,0
35	Тур'я	Петрівка	3,9	1	3,9
36	Петрівка	Щорс	2,7	0	0,0
37	Петрівка	Ст. Рудня	2,0	1	2,0
38	Ст. Рудня	Кучиновка	5,3	1	5,3
39	Ст. Рудня	Березна	14,0	0	0,0
40	Щорс	В. Щимель	2,0	0	0,0
41	Щорс	Ст. Рудня	2,0	1	2,0
42	Наумівка	Корюківка	4,0	0	0,0
43	Наумівка	В. Щимель	3,6	1	3,6
44	В. Щимель	Корюківка	2,7	1	2,7
45	В. Щимель	Синявка	9,0	0	0,0
46	В. Щимель	Кучиновка	3,0	0	0,0
47	Кучиновка	Синявка	6,1	1	6,1
48	Кучиновка	Березна	9,1	0	0,0
49	Сядрине	Корюківка	4,5	1	4,5
50	Сядрине	Кудрівка	10,1	0	0,0
51	Сядрине	Хлопяники	5,5	0	0,0
52	Корюківка	Синявка	8,2	0	0,0
53	Корюківка	Мена	13,0	0	0,0
54	Корюківка	Жовтневе	13,0	1	13,0
55	Корюківка	Кудрівка	6,9	0	0,0
56	Корюківка	Хлопяники	4,4	0	0,0
57	Березна	Стольне	3,2	1	3,2
58	Синявка	Городище	1,1	1	1,1
59	Синявка	Мена	5,3	0	0,0
60	Городище	Стольне	5,2	0	0,0
61	Городище	Березна	3,2	1	3,2
62	Стольне	Феськівка	2,5	1	2,5
63	Феськівка	Мена	2,1	1	2,1
64	Мена	Жовтневе	1,2	1	1,2
				28	99,0



МПД: розгорнута форма (корінь, 6 листів й 22 розгалуження)

## **РОЗДІЛ 2. НЕЛІНІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ: ЗАДАЧІ, МОДЕЛІ, МЕТОДИ**

Глава 5. Моделі дискретного програмування. Метод «гілок і границь»

Глава 6. Моделі динамічної оптимізації

Глава 7. Максимізація/мінімізація нелінійної функції однієї змінної

Глава 8. Моделі багатовимірної нелінійної оптимізації

Глава 9. Цільове, еволюційне та стохастичне програмування. Моделі багатокритеріальної та нелінійної оптимізації із негладкою ЦФ

Глосарій

Використані джерела

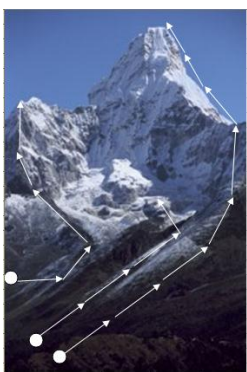
## Вступ

Вже відомо, що у лінійному програмуванні область визначення функції (ОВФ) можна представити багатогранником (куб, прямокутник, піраміда) й прямий рух до оптимуму здійснюється по ребрах цієї фігури від однієї кутової точки до іншої, минаючи усі проміжні (так діє симплекс-метод), завдяки лінійній ЦФ. Й не принципово, звідки (з якої опорної точки) починати пошук оптимуму.

В нелінійному програмуванні (НЛП) ОВФ є гладкою чинегладкою, опуклою чи угнутою фігурою чи поверхнею, це, скажімо: дах будівлі типу куполу, гора чи пагорб, яр чи ущелина, будь-яка конструкція тощо, кутових точок тут нема взагалі, до того ж, а сама ЦФ може бути лінійною (при нелінійних обмеженнях) чи нелінійною.

Скажімо, альпініст згідно своїх можливостей сам визначає проміжні точки на поверхні гори й покроково, від точки до точки, вибирає маршрут послідовного руху уверх до вершини у вигляді ламаної лінії, а досягши її, таким же чином, покроково спускається донизу, визначаючи відповідний маршрут спуску. Ясно, що існує безліч таких маршрутів, їх характеристики повністю визначаються вибраною/визначеною позицією старту, в математиці це – початкове наближення, а послідовний покроковий рух – ітераційний (від *iteratio* – повторення) процес.

Поняття початкового наближення в нелінійній оптимізації суттєве.



Уявіть, три команди альпіністів вибирають різні стартові позиції й штурмують вершину, закриту хмарами, тому вони рухаються у межах видимості, не бачачи кінцевої цілі, на кожному кроці вибираючи найкрутіші ділянки (метод найшвидшого підйому); команда зупиниться, лише коли вона досягне якоїсь вершини, коли вище йти нікуди (ознака – нульова швидкість підйому). В залежності від точки старту це може бути проміжна (локальний максимум, на рисунку їх два) чи найвища вершина (глобальний оптимум).

Як у гірській системі є гори різної висоти, в математиці вершині найвищої гори відповідає поняття «глобальний максимум», інші вершини – то «локальні максимуми», на дні океанів – навпаки, де мова йде про мінімуми, локальні чи глобальні. Тож вибравши певну точку старту й рухаючись поки що до невидимої вершини, де кожен крок веде лише догори, ви можете, піднявшись лише вище хмар, побачити, що досягнуто.

Отже, якщо відшукується оптимум ЦФ, яка негладка (в математиці – недиференційовна усюди функція), як гірська місцевість, нелінійна оптимізаційна задача вважається важкою й вважається успіхом знайдений хоча б локальний оптимум. Змінюючи точки початкового наближення (вручну, за певними правилами чи перебором), намагаються покращити отриманий результат.

Тож в туризмі і спорті, а головне, в реальній практиці при прокладці комунікацій (ЛЕП, шляхи через перевали, трубопроводи в горах чи під водою) чи при виконанні будівельних робіт у гірській місцевості, в техніці та природничих науках й, відповідно, в обчислювальній математиці відшукують нелінійні методи найшвидшого підйому до вершини (задача на максимум ЦФ) чи спуску (задача на мінімум ЦФ).

На жаль, універсального методу типу симплекс-методу ЛП, в нелінійній оптимізації нема, тому кожен метод в моделях нелінійного програмування розрахований на певні властивості ЦФ й обмежень конкретної нелінійної задачі оптимізації. Варіантів цих задач безліч, головне – пристосувати до них основні методи нелінійної оптимізації, яких небагато.

Зокрема в Excel 2003 – два методи для гладких ОВФ, в Excel 2010 додано ще евристичний метод для задач з негладкими ОВФ (генетичний алгоритм).

Основою обчислювальних методів для нелінійних задач є способи визначення координат проміжних точок на шляху від заданої точки початкового наближення до шуканої точки оптимуму, ці способи на кожному кроці за певними алгоритмами оцінюють поведі-

нку зміни значення функції у певному напрямі: продовжує зростати (на максимум) чи спадати (на мінімум). Як тільки швидкість впала до нуля, процес зупиняється й можна сподіватися, що оптимум досягнуто.

Дія таких алгоритмів нагадує поведінку усього живого, де у русі до цілі послідовно відстежується зростання/спадання певної характерної ознаки: запаху, динаміки, кольору, розміру чогось тощо. Уявіть дитину, яка із зав'язаними очима має зробити черговий крок до вершини пагорбу, тож навпомацки, роблячи ногою спроби у різних напрямках, вона вибирає такий напрямок руху й таку позицію, куди перейти, де висота підйому найвища й реальна для здійснення кроку. Ця дитина навіть не уявляє – цими спробами вона природним чином на кожному кроці відшукує градієнт уявної функції, яка б описувала поверхню пагорбу.

З основ математичного аналізу випускникам школи й студентам-першокурсникам відомо, що швидкість зростання функції визначається обчисленням похідної цієї функції. Тож класичний апарат диференціального числення (Ньютон, Лейбніц, кінець XVII ст.) – основа градієнтних методів НЛП, й перший из них – класичний метод Ньютона.

Тож, як не дивно, сутево складніше нелінійне програмування історично виникло значно раніше дещо простішого лінійного програмування й потужно розвивається й досьогодні шляхом винаходу нових методів й алгоритмів. Адже саме методи і моделі НЛП найкраще відповідають реальним задачам, де досліджується поведінка будь-яких середовищ (рідина, газ, метали, композити, різноманітні матеріали, носії енергії чи інформації) та їх характеристики (температура, тиск, вага, швидкість руху, вологість тощо) у певних конструкціях й природних середовищах, в статичному чи у динамічному режимах.

В економічних дослідженнях нелінійностей менше, зате їх врахування суттєве, бо найкраще відповідає реальній специфіці відповідних процесів, де значення певного економічного показника, хоча б та ж ціна продукту чи послуги, нелінійно залежить від відповідних аргументів: запасів, попиту, розміру поставки тощо.

Винахід лінійного програмування мав суттєвий організаційний ефект, бо привів до визначення стандартної конструкції математичної моделі задачі оптимізації (План, ЦФ, Обмеження), що й привело майже зразу до формування математичного програмування як узагальненого підходу й універсальної технології математичної оптимізації у вигляді застосування композиції моделей і методів лінійної й нелінійної оптимізації.

### **Специфіка задач, моделей і методів НЛП**

До нелінійної оптимізації відносять задачі оптимізації, де порушується хоча б одна умова лінійності, це:

- пропорційність,
- адитивність,
- подільність (дійсний тип невідомих).

Ці умови стосуються будь-якої й хоча б однієї зі складових математичної моделі задачі оптимізації: шуканого плану, цільової функції чи обмежень на невідомі.

Вже було сказано, що для нелінійних задач не існує єдиного універсального методу, який відшукує глобальний оптимум, на жаль, проблемно-орієнтовані методи нелінійної оптимізації, вимагають значно довше часу для пошуку оптимуму, часто результат отримується наближено за рахунок заміни заданої задачі спрощеною й, буває, отримано результат лише на рівні локального оптимуму. Тому там, де є можливість, нелінійні задачі шляхом певних перетворень (зокрема, лінеаризацією нелінійних функцій) зводять до моделі лінійного програмування, де застосовується універсальний й ефективний симплекс-метод, або ж хоча б до моделі опуклого програмування, де гарантується пошук глобального оптимуму.



Наприклад, доведено, що якщо в лінійній задачі транспортного типу пропозиції й попит задати у цілих числах, відповідна нелінійна (цілочислового програмування) задача з успіхом розв'язується симплекс-методом.

Один із шляхів – лінеаризація нелінійних функцій, приклад – сепарабельне програмування, де відповідна нелінійна функція кількох невідомих наближено замінюється такою ж кількістю вже лінійних функцій однієї змінної.

Але ці приклади лише виключення із загальних правил – для нелінійної задачі певного класу застосовується нелінійний метод, розрахований саме на цей клас задач. Або інакше – певний проблемно-орієнтований метод нелінійної оптимізації орієнтується на сукупність характерних нелінійних задач.

Ми, рядові користувачі, маючи лише офісний пакет MS Office, користуємось методами, доступними в Excel у межах можливостей стандартної версії надбудови *Поиск решения* (*Excel Solver*), й вибір методів нелінійної оптимізації для нас вкрай обмежений, це:

**градієнтні методи**, що розраховані на гладкі (двічі диференційовані) нелінійні функції:

- Excel 2003: метод Ньютона й метод спряжених градієнтів
- Excel 2007/2010: метод узагальненого (рос. обобщенного) приведенного градієнту (ОПГ), **евристичний метод** еволюційного програмування, що реалізує генетичний алгоритм пелорборного типу, якому під силу й негладкі функції (Excel 2007/2010).

Безперечне достоїнство цих методів – стандартний й «дружній» інтерфейс та знижені до мінімуму вимоги до користувача щодо його математичної чи програмістської підготовки, бо усі тонкощі й складові непростого обчислювального процесу (обчислення похідних, апроксимація функцій, контроль сходимості ітераційного процесу тощо), аналіз та оцінка властивостей поставленої задачі програмно реалізовані й «сховані» у надбудові.

### **Властивості лінійних та нелінійних оптимізаційних алгоритмів й методів у складі програми-надбудови *Поиск решения* (Excel Solver)**

<b>Симплекс-метод (Linear Solver)</b>	<b>Градiєнтний метод (Nonlinear Solver)</b>
Забезпечує надійну й безвідмовну процедуру для будь-яких задач лінійної оптимізації	Не забезпечує надійну й безвідмовну процедуру для будь-яких задач нелінійної оптимізації
Розрахований лише на лінійні моделі	Розрахований на нелінійні моделі, але може реалізовувати й лінійні моделі
Як правило, гарантує пошук глобального оптимуму	Як правило, відшукує локальний оптимум. Не гарантує пошук глобального оптимуму, окрім спеціальних умов
Ігнорує початкові значення шуканих невідомих	Використовує початкові значення шуканих невідомих, бо результат може залежати від цих значень
Завжди знаходить допустимі рішення, якщо вони існують	Може не знайти допустимі рішення, якщо вони навіть існують
Завжди рухається до оптимуму для коректно сформованої моделі (де існують допустимі рішення)	Може вивести лише повідомлення про сходимость рішення, для отримання результату необхідно повторити процес
Всебічна інформація про чутливість плану у звіті <i>Устойчивость</i> , зокрема, про допустимі діапазони зміни параметрів	Звіт <i>Устойчивость</i> не містить інформації про допустимі діапазони зміни параметрів

## Глава 5. Моделі дискретного програмування. Метод «гілок і границь».

В окремий клас нелінійного програмування виділені лінійні моделі оптимізації, об'єкти яких є неподільними (елементи електроніки, машини, люди, вагони, заготовки матеріалів, контейнери тощо) і відповідні їх кількості є цілими додатними числами – він названий *цілочисловим лінійним програмуванням* (ЦЛП). Його єдина відмінність (здається, такий собі дріб'язок!) від класичної задачі ЛП – *цілочисловий* тип невідомих, все інше – лінійність ЦФ та обмежень й невід'ємність шуканих невідомих – залишається без змін. Згодом моделі ЦЛП увійшли до складу розширеного розділу МП – *дискретного програмування*. Поштовхом до активізації досліджень у цьому розділі є сучасна «цифрова» революція, де дані, технологія й відповідна апаратура мають справу з об'єктами дискретної природи.

З винаходом симплекс-методу здавалося, що йому підкориться будь-яка задача, однак майже зразу з'ясувалося, що ця, на перший погляд, «дрібничка» – відмова від подільності (дійсного типу) шуканих змінних – виявилася серйозною математичною та програмістською проблемою, яка змусила розробляти спеціальні обчислювальні методи (а це, час показав, зовсім не просто), які можна розділити на такі групи засобів:

- *неперервний + модифікація* – базове використання того ж симплекс-методу з регулярним аналізом отриманого результату і внесення відповідних змін у модель щодо дробових невідомих (коротко це називається “регуляризація”), ця ідея вперше запропонована Данцигом для розв'язання задачі комівояжера (1954 р.), характерний підхід до його реалізації – класичний метод “відтинання” Р. Гоморі;
- *дискретний* – застосування абсолютно нових алгоритмів прискореного перебору варіантів, перший за появою і найбільш відомий з них – метод «гілок і границь», (автори Ленд і Дойг, 1960);
- *комбінований* – метод «відтинання» Гоморі + метод «гілок і границь»
- *евристичний* – наближені за точністю й спрощені за реалізацією, т. зв. «евристичні» методи (знайти які зовсім не просто, пам'ятаємо захоплене Архімедове «Еврика!», тобто, таки «Знайшов!»), засновані на специфіці задачі (наприклад, відомий простий метод «північно-західного кута» пошуку наближення до оптимуму транспортної задачі) або ідеях імітаційного моделювання та випадкового пошуку: комп'ютер генерує послідовність певних комбінацій невідомих, кожна з яких певним способом перевіряється на дотримання умов обмежень, на кожному кроці поточний результат порівнюється з кращим на той момент результатом, яким оновлюється й запам'ятовується (підглянутий у біології механізм формування генних клітин привів до розробки у 1990-их роках генетичного алгоритму, що реалізований в надбудові *Поиск решения Excel 2007/2010*).

### Принципи пошуку цілочислового оптимального плану

Засіб: *неперервний + модифікація*

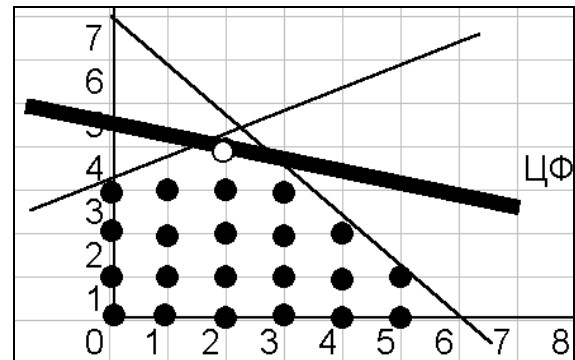
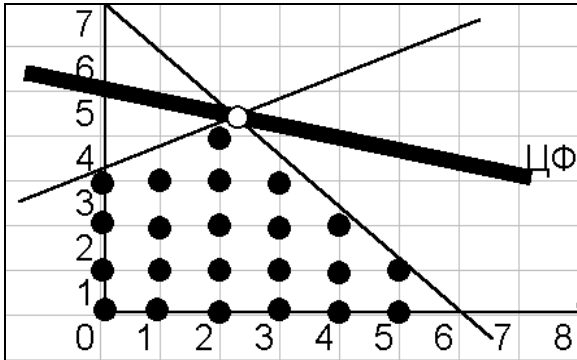
З позицій необхідності отримання розв'язку прямої та двоїстої задачі ЦЛП пропонується підхід розв'язання задач ЦЛП у два етапи:

- розв'язання звичайної задачі ЛП і отримання тіньових цін (для ПЧ обмежень) та нормованих вартостей (для коефіцієнтів ЦФ)
- додавання в модель ЛП обмеження для задоволення умови цілочисельності плану.

Зрозуміло, додавання будь-якого додаткового обмеження погіршує значення ЦФ «ідеальної» лінійної моделі, але це робиться вимушено з метою мати можливість зваженої оцінки поточної (скажімо, економічної чи організаційної) ситуації й обґрунтовано врахувати зовнішні умови.

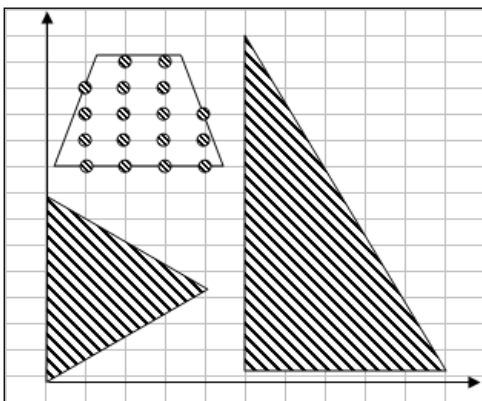
Графічна ілюстрація принципу: чорні кружечки в ОДР (ОВФ) – цілочислові допустимі значення невідомих, білий кружечок – точка оптимуму на дотyku лінії ЦФ і ОДР.

На лівому рисунку – нецілочисловий оптимум (2,3; 4,8), на правому – цілочисловий оптимум (2; 4), для нього значення ЦФ гірше, зате врахована цілочислова природа невідомих величин: «відтинанням» наче зрізаються тонкі шари ОДР, аж поки ніж не упреться у «міцний горішок» – цілочисловий чорний кружечок, іншими словами: лінія ЦФ паралельним переносом наче «вдавлюється» в ОДР, аж поки не упреться у найближчий цілочисловий кружечок (округлення координат 2,3 та 4,8 до найближчих цілих дає 2 та 5, точка з такими координатами знаходиться поза ОДР):



Засіб: *дискретний*

На відміну від неперервних процесів, функціональні характеристики яких представлені множиною чисел дійсного типу, існує багато процесів з перервами: в школі (урок – перерва - урок ...), у русі поїзда (відправлення-рух-зупинка-рух...) чи у виробничому процесі, наприклад, у трубному цеху: нагрівання заготовки - прокатка - охолодження труби + на-



грівання ...), які характеризуються множинами т. зв. *дискретних* (від *discrete* – розділений, роз'єднаний, переривчастий) величин, значення яких розмежовуються між собою кінцевими проміжками (границями).

Приклади таких об'єктів та процесів: лічильник (людей, пляшок, деталей), розклади у часові періоди (уроків, руху транспорту, технологічного процесу); гравій, створений подрібненням суцільного гранітного моноліту; ковбаса чи хліб, поділені на шматочки; натовп людей; транспортні засоби на шосе; виокрем-

лені територіальні зони; угруповання людей щодо їх приналежності до певної категорії у відповідності з освітою, статтю, расою, національністю; підмножина цілих (*integer*) чисел у складі числової множини, нарешті, розподіл математичного програмування на окремі типи моделей оптимізації тощо.

Поняття «неперервне» й «дискретне» – дещо філософські категорії, адже протягом сотень років й до наших днів не визначився єдиний погляд на них: неперервний потік води має дискретну атомно-молекулярну структуру; неперервний електричний струм – то рух дискретних електронів. Ще приклад: кожен з нас це абсолютно дискретна одиниця, кажуть – у черзі 3 особи, але коли нас багато, скажімо в метро у годину пік, то можна вважати це неперечною масою й вводити вимір – пропускна здатність переходу 32,5 особи/с.

Виходить, що границя між цими поняттями дуже нечітка, іноді навіть умовна чи уявна, тож не вдаючись до філософських міркувань, залишаючись реалістами-практиками, вважатимемо дискретними:

- ті об'єкти чи величини, що необхідно виокремлені одне від одного, вимірюються у штуках й представлені цілими числами. Найбільш зрозумілу й явно розповсюджену практичну ситуацію дискретності визначають *задачі з неподільностями* – з кількісними величинами, які відповідають неподільним об'єктам чи процесам: вагонам, людям чи їх групам (класам, бригадам, екіпажам), машинам, упаковкам, рейсам, розкладам руху транспортних засобів і місцям у них, будівлям і приміщенням у них тощо, – усюди відповідні кі-

лькості представляються у цілих числах (нуль – у їх числі). Множина цілих чисел є прикладом кінцевого (в математиці – зчисленим) набору значень, які може приймати певна величина.

- неперетинаючі області (класи, групи, множини), визначені відповідними системами рівнянь та нерівностей (коротко – обмеженнями), до певних з яких може належати шукана числова (цілого чи дійсного типу) чи нечислова величина. Це інша ситуація дискретності – належність певної величини (будь-якого типу) певній виокремленій групі значень (у тому числі, дійсного типу), наприклад, це сума фінансування за певною статтею бюджету, належність учня класу, потоку студентів – аудиторії, людей – регіону, задачі оптимізації – типу математичної моделі, значення показника – номіналу тощо. Це – різноманітні *задачі з умовами*, де певна умова виконує роль покажчика, що визначає виокремлене місце у вигляді чітко обмеженої області, якій належить величина.

Поява самостійного класу математичних моделей дискретного типу пов'язана з відповідними задачами планування та автоматизованого управління. Саме з позиції автоматизації вимушено розрізняють два специфічні типи процесів та об'єктів керування: *неперервний й дискретний*, адже управління складними процесами й прийняття відповідальних рішень передається від розумної й чутливої людини, яка може самостійно й адекватно відреагувати на нештатну ситуацію, бездушному й байдужому автоматом (типу автопілота, космічного апарату, мобільного телефону чи банкомату).

До *неперервних* відносять виробництва, у яких потрібно регулювати параметри: витрати, тиск, температуру, напругу, переміщення елементів та інші величини у *всьому неперервному діапазоні* їх значень й змін. Це різноманітні хімічні реактори, процеси виготовлення харчових продуктів чи металу, системи постачання теплом, газом, водою чи електроенергією. У неперервних виробництвах зайнято порівняно мало людей, тому за рахунок автоматизації можна знизити витрати матеріалів і енергії або стабілізувати технологічний процес, виключивши його залежність від суб'єктивних факторів. Для керування таким виробництвом потрібне узгодження динамічних характеристик об'єкта керування й системи автоматичного регулювання у всьому інтервалі зміни регульованих величин, це можна зробити за допомогою керуючих пристроїв (регуляторів), поведінка яких досить точно описується певними математичними формулами. Це дозволило реалізувати системи автоматичного (без участі людини) керування певними об'єктами, наприклад, апаратурою для космічних досліджень чи супутниковим зв'язком.

До *дискретних* (переривчастих) відносять процеси чи виробництва з фіксованим числом станів технологічних змінних, пов'язаних, наприклад, з командами включення/відключення двигунів, визначення режимів роботи змішувачів, нагрівачів, клапанів чи засувки по сигналах двопозиційних (Так/Ні або 1/0) датчиків (реле). Наприклад, коробка передач звичайного автомобіля має 6 фіксованих станів (нейтраль, 1-4 швидкості + задній хід), рулетка казино – 37 станів, автоматичні двері автобуса, ліфта чи метро – 2 стани тощо, без будь-яких проміжних станів. Або, оскільки напруга електричного струму може приймати фіксовані значення: 380, 220, 127, 12, 5 вольт тощо, апаратура розрахована функціонувати у відповідному діапазоні фіксованих вимірів.

Для більшості технологічних процесів характерне поєднання методів неперервного та дискретного керування з позицій раціонального використання їх переваг і достоїнств. Наприклад, режим руху звичайного автомобіля визначається «дискретною» коробкою передач з фіксованим набором станів й «неперервною» педалью керування засувкою карбюратора («газу») із заданим діапазоном положень.

Отже, специфіка процесів дискретної дії викликала необхідність розробки відповідного класу моделей математичного програмування – дискретного програмування, в межах якого визначені характерні задачі оптимізації, принципово неможливі для розв'язання засобами ЛП.

## Типові задачі дискретного програмування

1. Використання обладнання. Невідома змінна  $x_i$  визначає тип (з номером  $i$ ) і кількість певного обладнання, наприклад,  $x_4 = 5$  (5 машин 4-го типу). Ясно, що дробове значення  $x_4 = 5,3$  для такої задачі не має смислу, то ж, відповідно, на значення цієї змінної накладається обмеження цілочисельності. Це – задача цілочислового лінійного програмування (ЦЛП).

2. Витрати на підготовку виробництва. Витрати на підготовку виробництва – це фіксовані витрати (доплати)  $c_i$ , що пов'язані з початком певного процесу, які не залежать від значення  $x_i$  (випуск  $i$ -ої продукції), сюди входять витрати на розігрів двигуна чи печі, заготовлю сировини, інструктаж персоналу, підготовку інструментів чи тари для готової продукції). Необхідно зафіксувати факт запуску обладнання (уведенням допоміжної змінної-індикатора цілого типу і умови «якщо-то»)  $i$ , відповідно, врахувати допоміжні витрати на його підготовку, це – задача частково-цілочислового лінійного програмування (ЧЦЛП).

3. Умова «або-або» (альтернативні обмеження). Невідома змінна може прийняти певні значення, які відповідають відповідним (альтернативним) умовам, заданим відповідними граничними обмеженнями (тобто, згідно свого значення вона задовольняє або умову 1, або умову 2, або ...). Уведенням додаткових змінних-індикаторів цілого типу) цю задачу зводять до задачі ЧЦЛП.

4. Умова «так - ні» (альтернативні значення). Невідома змінна може прийняти певні фіксовані (альтернативні) значення. Якщо, скажімо, невідома змінна  $x_i$  визначає одне з двох можливих принципових рішень: Будувати/ Не будувати новий  $i$ -ий цех, тоді на її значення накладається обмеження:  $x_i = 1$  (Будувати) або  $x_i = 0$  (Не будувати), це – задача булева програмування (зі змінними 0/1).

5. Задача упорядкування. Існує клас організаційних задач, що виникають в календарному плануванні, маршрутизації, розробці розкладів, управлінні проектами тощо, коли невідомі цілого (чи буліва) типу утворюють комбінацію, що визначає оптимальну послідовність здійснення певних операцій. Наприклад, матриця невідомих  $X$  розміром  $4 \times 4$  зі значеннями:  $x_{11} = 1, x_{13} = 1, x_{34} = 1, x_{42} = 1$ , усі інші нулі, визначає комбінацію (маршрут): 1–3–4–2, це – задача комбінаторного програмування. Характерний приклад – задача комівояжера.

В математиці множини величин дискретного типу називають *незв'язаними* між собою, тобто, коли шукана величина не плавно “перетікає” від точки до точки як у неперервному випадку, а “перестрибує” з одного дискрету в інший (як ми перестрибуємо по сухих місцях залитої водою дороги). Незв'язаною є, скажімо, множина цілих додатних чисел, якими вимірюють кількості неподільних величин, скажімо, в штуках чи упаковках. У зв'язаній множині неперервна змінна, змінюючись у певному напрямі, поступово приймає значення (з будь-якою точністю): 1,01; 1,02; 1,03 ..., а у незв'язаній множині цілочислова змінна послідовно приймає значення: 1; 2 ... , “перестрибуючи” з 1 зразу на 2, минаючи всі проміжні, дробові, значення. Характерний приклад – механічні та електронні годинники. Саме ці практичні ситуації з неподільними величинами стали стимулом, що визначив необхідність розробки математичної теорії дискретної оптимізації у незв'язаній ОДР, зокрема, винаходу ефективних обчислювальних методів<sup>42</sup>.

Отже, майже зразу за відкриттям і впровадженням на ЕОМ лінійного програмування (початок 50-их років ХХ ст.) формується дискретне програмування – узагальнений клас математичних моделей і відповідних обчислювальних методів оптимізації для роботи з величинами дискретного типу<sup>43</sup>.

В межах цього класу у відповідності до конкретного типу величин та їх сукупностей (у складі ЦФ та обмежень) сформувалися окремі підкласи моделей дискретного програмування під назвами: цілочислове лінійне програмування, буліве програмування, комбінаторне програмування та ін. Це сталося не зразу, адже спочатку здавалось (про це згадує Данциг), що коли вже був створений такий потужний апарат оптимізації як лінійне програмування, спеціальна теорія для цілочислових задач навіть й не була потрібна – пропонувалися “наївні” підходи до розв'язання дискретних задач шляхом прямого перебору варіантів чи округлення дійсного числа до найближчого цілого. Але, з'ясувалось, перебір неможливий з-за астрономічної кількості варіантів, які треба спочатку сформувати, а потім обробити, щоб вибрати кращий (що зовсім не просто й нешвидко), а округленням взагалі можна отримати результат, несумісний навіть з допустимим, не кажучи вже про оптимальний.

## Основні методи дискретної оптимізації

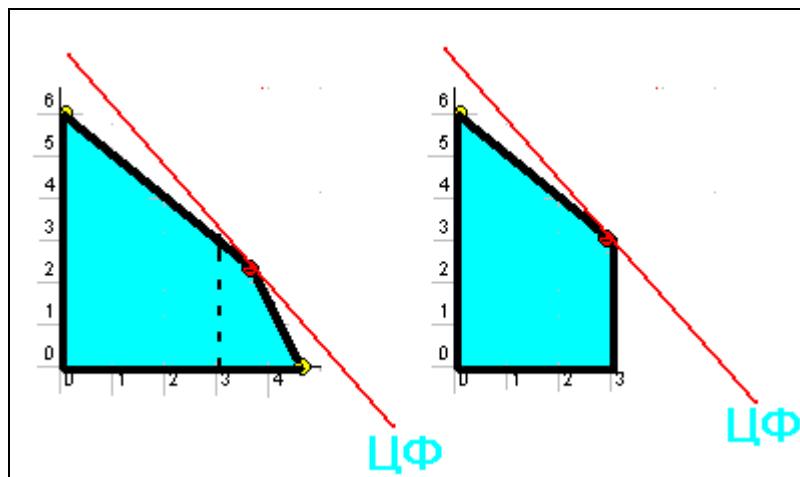
*Метод «відтинання»* (рос. *отсечения*, англ. *cutting*, автор – Р. Гоморі<sup>44</sup>) – математичний метод пошуку оптимуму у цілих числах, який за своїм принципом дії нагадує роботу ску-

<sup>42</sup> А.А. Корбут, Ю.Ю. Финкельштейн. Дискретное программирование.– М.: Наука, 1969. – 366 с.

<sup>43</sup> G. Dantzig. Discrete-variable extremum problems. OR, 1957.

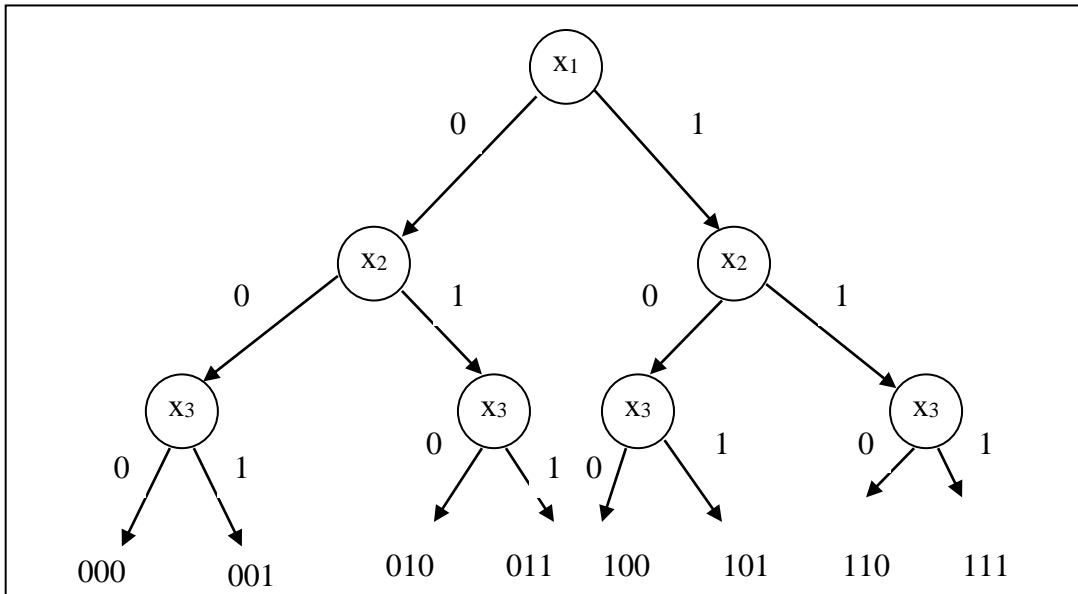
<sup>44</sup> R. Gomory. An algorithm for integer solutions to linear programs. – Princeton-IBM, 1958

льптора – той відтинає від кам'яної брили усе «зайве», щоб залишити потрібне. Цей обчислювальний метод передбачає отримання спочатку звичайного неперервного плану в дійсних числах (таку собі «брилу»), а далі, вибірково, лише для отриманих невідомих з ненульовою дробовою частиною за участю дослідника чи автоматично, формується і додається в математичну модель обмеження, яке «відтинає» від дійсного числа його дробову частину, перетворюючи дійсне число на ціле. Фактично, цим кроком формується нова математична задача з відповідним новим результатом. Це – приклад досить ефективного (з позиції раціонального використання машинних ресурсів) методу з групи методів «регуляризації», тобто, здійснення програмним шляхом досить формальних і принципово однакових правил. На рисунку показано, як відтинанням «шматка» ОДР здійснюється перехід від дійсної точки оптимуму (3,5; 2) до цілочислової точки з координатами (3; 3):



Метод «гілок і границь»<sup>45</sup>, за яким організується направлений і, завдяки цьому, прискорений перебір входження відповідних змінних цілого типу в оптимальний план. Саме цей метод суто алгоритмічного (переборного) типу вбудовано в програму *Поиск решения*, яким ми будемо користуватися. За цим циклічним алгоритмом автоматично (без участі людини) генеруються комбінації невідомих («гілки», підзадачі), які перевіряються на дотримання відповідних умов, для кожної з них обчислюється проміжний результат («границя»), який порівнюється з кращим. Схематично процес перебору варіантів зображується у вигляді дерева рішень (звідси й слова «гілка» та «розгалуження»). У порівнянні з попереднім «інтелектуальним» методом «відтинання» метод «гілок і границь» – це перебір варіантів, для якого необхідно мати якнайбільші комп'ютерні потужності. Іншого не дано – ось чому задачі великого розміру (типу задачі комівояжера) розв'язують «грубою силою» – за допомогою багатопроцесорних суперкомп'ютерів та обчислювальних мереж з них, де треба якнайшвидше перебирати варіанти (гілки дерева рішень) й знаходити з них кращий. Приклад: відшукується вектор трьох невідомих  $X = (x_1, x_2, x_3)$ , які приймають лише два можливих значення 0/1, і треба знайти їх оптимальну комбінацію, відповідне «дерево» повного перебору з  $2^3 = 8$  гілок-розв'язків має вигляд:

<sup>45</sup> Land A., Doig A. An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems, *Econometrica*, 28, 1960; Lawler E. Branch-and-Bound Methods: A survey, *OR*, 14, 1966



Таким чином, маємо два основних класи методів дискретного програмування, які утворюють своєрідну шкалу їх застосування в залежності від наявних професіональних та технічних ресурсів. З одного боку цієї шкали обчислювальний метод «відтинання», розрахований на силу та інтелект математичних операцій, на протилежному усе навпаки – алгоритмічний метод «гілок і границь» переборного типу, розрахований на потужність комп'ютера у ролі числового млина.

### Задачі та моделі дискретного програмування

Задача	Модель
Транспортна задача (призначення)	ЛП (лінійне програмування) <ul style="list-style-type: none"> <li>○ X (план) – дійсного типу</li> <li>○ ЦФ – лінійна</li> <li>○ ОДР – лінійна</li> </ul>
Задачі з неподільностями (рюкзак, розкрій)	ЦЛП (цілочислове лінійне програмування): <ul style="list-style-type: none"> <li>○ X (план) – цілого типу</li> <li>○ ЦФ – лінійна</li> <li>○ ОДР – лінійна</li> </ul>
Задачі комбінаторного типу (розклад)	КП (комбінаторне програмування): <ul style="list-style-type: none"> <li>○ X (план) – буліва типу</li> <li>○ ЦФ – лінійна</li> <li>○ ОДР – лінійна</li> </ul>
Задачі на неопуклих та незв'язаних областях	ЧЦЛП (частково-цілочислове лінійне програмування): <ul style="list-style-type: none"> <li>○ X (план) – дійсного типу</li> <li>○ Y (додаткові змінні) – буліва типу</li> <li>○ ЦФ – лінійна</li> <li>○ ОДР – нелінійна (з умовами)</li> </ul>
Задачі з розривною цільовою функцією (фіксовані доплати)	ЧЦЛП <ul style="list-style-type: none"> <li>○ X (план) – дійсного типу</li> <li>○ Y (додаткові змінні) – буліва типу</li> <li>○ ЦФ – лінійна</li> <li>○ ОДР – нелінійна (з умовами)</li> </ul>
Задачі про розміщення	БП (буліве програмування): <ul style="list-style-type: none"> <li>○ X (план) – буліва типу</li> <li>○ ЦФ – лінійна</li> <li>○ ОДР – лінійна</li> </ul>

## Задача 5.1. Про оптимальний план виробництва (ЦЛП)

### Постановка задачі

З наявних запасів двох ресурсів виготовляється два види неподільних продуктів, задані питомі витрати ресурсів на виготовлення продукції, запаси ресурсів і ціни продуктів, треба визначити оптимальний план випуску, який забезпечує максимальний дохід.

### Математична модель

#### Позначення

$x_1, x_2$  – шукана кількість продуктів кожного виду

$D$  – загальний дохід (ЦФ).

### Задача оптимізації

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2)$ , такий, щоб

II. ЦФ Дохід  $D = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

III. за обмежень:

$$x_1 + 3x_2 \leq 8,25$$

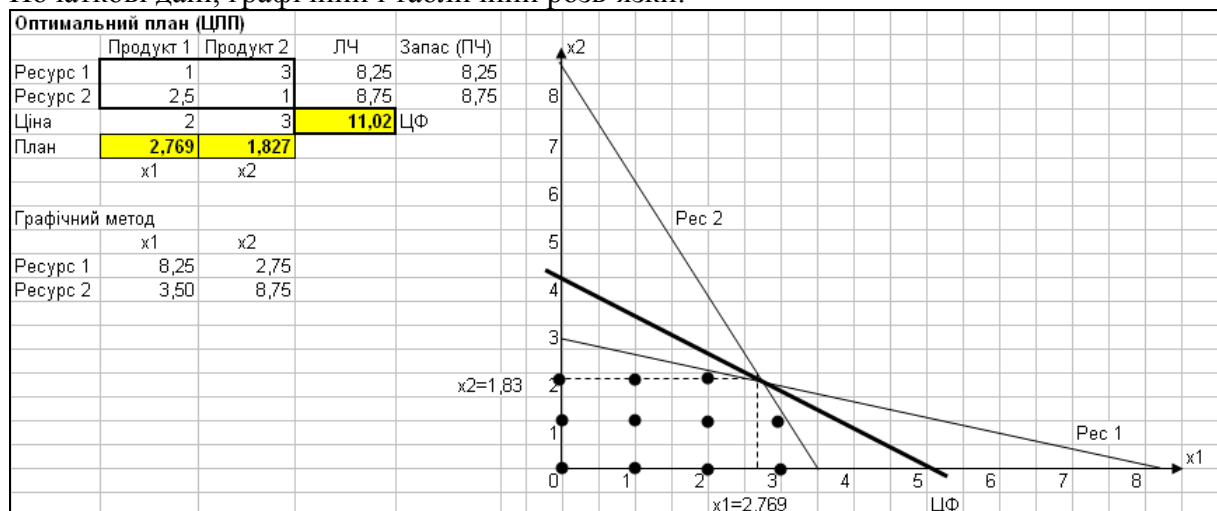
$$2,5x_1 + x_2 \leq 8,75$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ та цілого типу.}$$

На графіку чорними кружечками позначена ОДР цілочислового плану (всього 11 таких точок).

### Результат

Початкові дані, графічний і табличний розв'язки:



### Аналіз результату

Знайдений план  $X = (2,769; 1,827)$  задачі ЛП, де не задовольняється умова цілочисельності невідомих, бо обидві невідомі є дійсними числами. Будемо вважати цей план ідеальним, що забезпечує максимальне значення ЦФ (11,02).

### Процес розгалуження і побудова дерева рішень

Ідея розгалуження – вся цілочислова ОДР (у прикладі складається з 11 точок з цілочисловими координатами) розділяється на дві області-кандидати (задачі), одній з яких має належати невідома змінна, яка й у яку саме, покажуть обчислення, й значення границь – тож змінна буде у тій області, де буде більшим граничне значення ЦФ.



Для невідомих  $x_1$  та  $x_2$  в ролі гілок дерева рішень виступають рішення щодо умов, яким мають задовольняти значення відповідної змінної, щоб мати цілочислові значення.

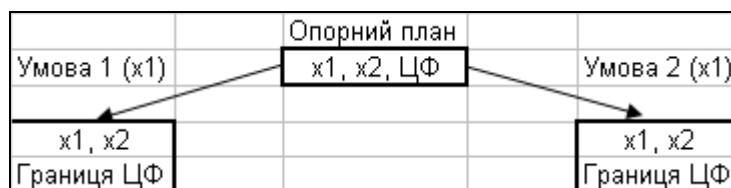
На першому кроці алгоритму визначається цілочислове значення першої змінної ( $x_1$ ) і верхня границя значення ЦФ, на наступному кроці визначається цілочислове значення другої змінної ( $x_2$ ) і відповідне значення ЦФ. Для цього на основі отриманого симплекс-методом лінійного плану для змінної дійсного типу (з ненульовою дробовою частиною) формуються додаткові умови, за якими забезпечується цілочислове значення цієї змінної.

Додаткові умови для  $x_1$  (розгалуження першого рівня):

Задача 1:  $x_1 \leq 2$  (допустимі значення 0, 1, 2) або

Задача 2:  $x_1 \geq 3$  (допустимі значення 3, 4, 5, ...).

Корінь дерева рішень (його перший рівень):



Додаткові умови для  $x_2$ :

Задача 3:  $x_2 \leq 2$  (допустимі значення 0, 1) або

Задача 4:  $x_2 \geq 3$  (допустимі значення 3, 4, ...).

Другий рівень повного дерева рішень:



Додаткові умови, фактично, реалізують алгоритм «відтинання», оскільки в початкову математичну модель вводяться додаткові обмеження, за якими «одтинається» дробова частина значень невідомих дійсного типу. «Розплатою» за це є збільшення розміру задачі за рахунок нових обмежень.

Формуємо першу гілку для  $x_1$  ( $x_1 \leq 2$ ).

### Задача оптимізації 1

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2)$ , такий, щоб

II. ЦФ  $D = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

III. за обмежень:

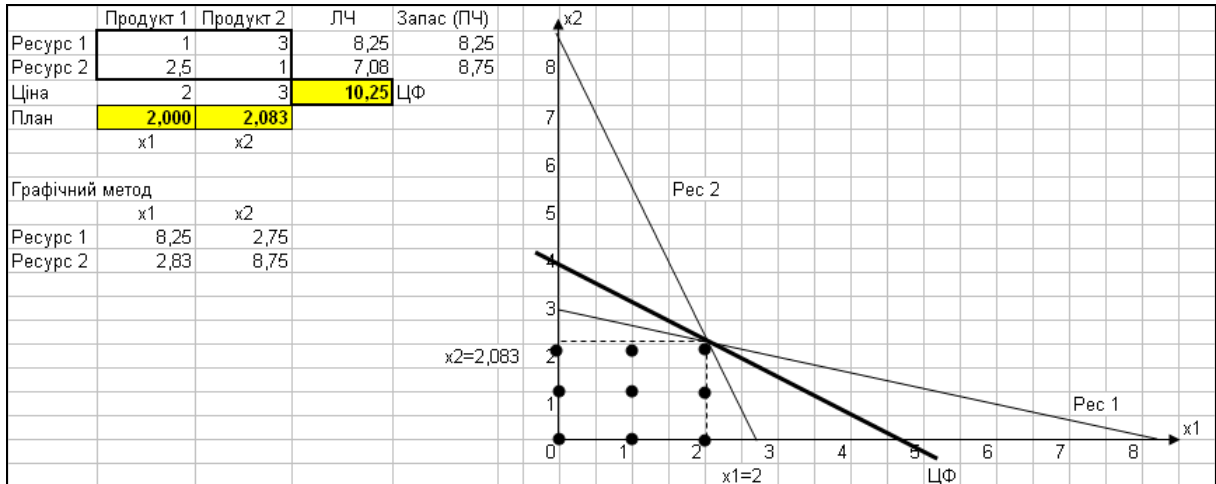
$$x_1 + 3x_2 \leq 8,25$$

$$2,5x_1 + x_2 \leq 8,75$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ та цілого типу.}$$

## Визначення верхньої границі



## Аналіз результату

ОДР для задачі 1 – частина з 9 (з 11) чорних точок. План  $X = (2; 2,083)$ ,  $ЦФ = 10,25$  – ця величина визначила **верхню границю** ЦФ для задачі 1.

Формуємо другу гілку для  $x_1$  ( $x_1 \geq 3$ ).

## Задача оптимізації 2

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2)$ , такий, щоб

II.  $ЦФ Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

III. за обмежень:

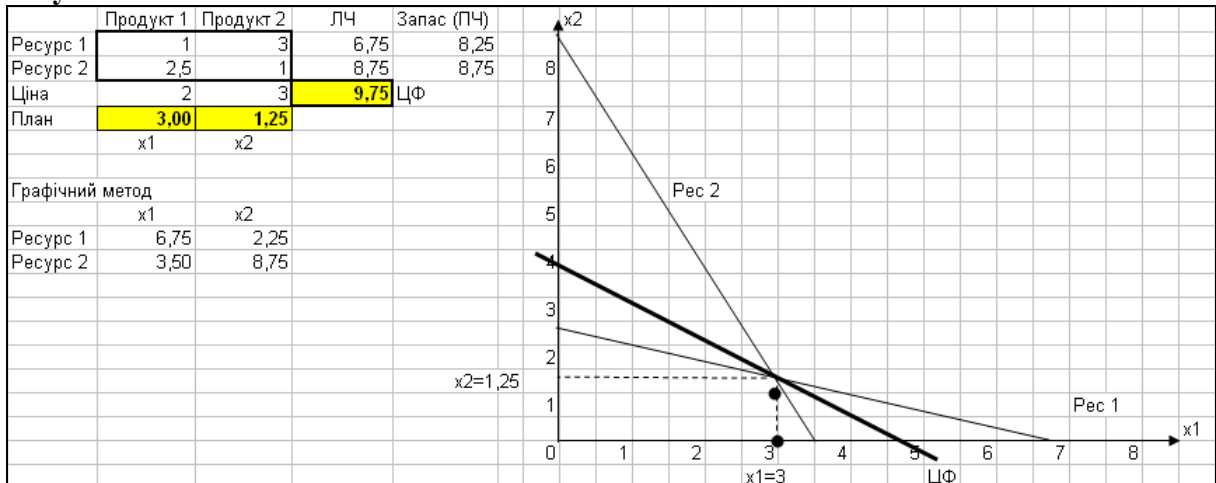
$$x_1 + 3x_2 \leq 8,25$$

$$2,5x_1 + x_2 \leq 8,75$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ та цілого типу.}$$

## Результат:



## Аналіз результату

План  $X = (3; 1,25)$ ,  $ЦФ = 9,75 < 10,25$ , значить, у цій ситуації розгалуження припиняється (з цієї ситуації розгалуження могло б продовжуватися і на цьому шляху міг би бути оптимум, якби були інші змінні:  $x_3, x_4$  тощо).

Отже, в результаті 1-го розгалуження визначено оптимальне значення  $x_1 = 2$ .

Тепер аналогічним чином визначається значення  $x_2$ .

Формуємо першу гілку для  $x_2$  ( $x_2 \leq 2$ ).

### Задача оптимізації 3

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2)$ , такий, щоб

II. ЦФ  $Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

III. за обмежень:

$$x_1 + 3x_2 \leq 8,25$$

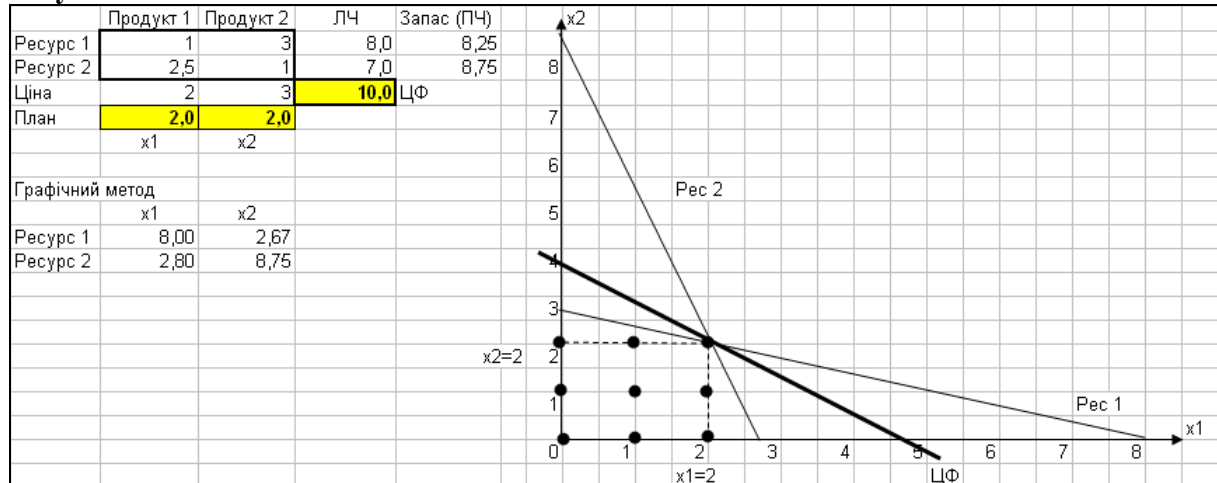
$$2,5x_1 + x_2 \leq 8,75$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 2$$

$x_1, x_2 \geq 0$  та цілого типу.

### Результат:



### Аналіз результату

План  $X = (2; 2)$ , ЦФ = 10.

Формуємо другу гілку для  $x_2$  ( $x_2 \geq 3$ ).

### Задача оптимізації 4

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2)$ , такий, щоб

II. ЦФ  $D = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

III. за обмежень:

$$x_1 + 3x_2 \leq 8,25$$

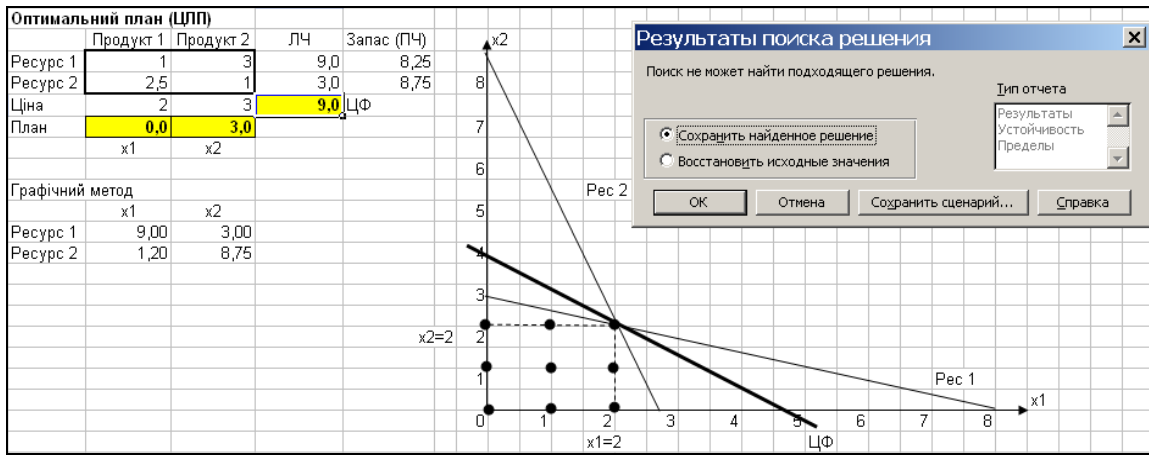
$$2,5x_1 + x_2 \leq 8,75$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \geq 3$$

$x_1, x_2 \geq 0$  та цілого типу.

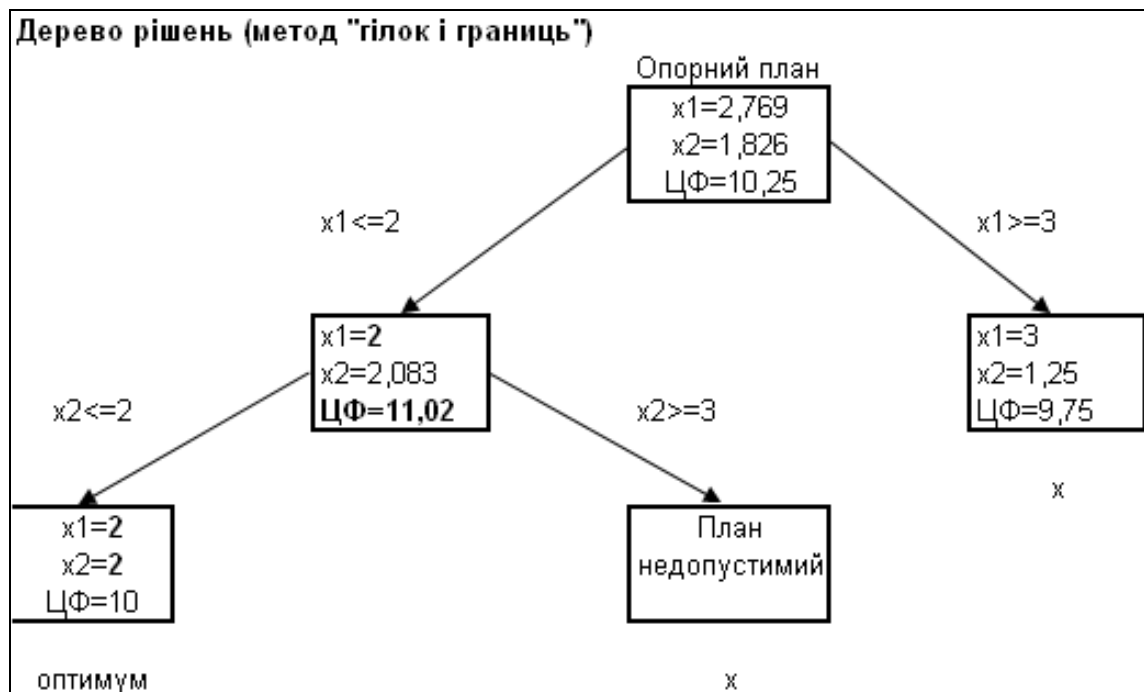
### Результат:



### Аналіз результату

З-за порушення обмеження ЛЧ  $\leq$  ПЧ ( $9 > 8,25$ ) задача 4 не має розв'язку.

Оптимальний цілочисловий план  $X = (2; 2)$ , ЦФ = 10.



Отже, не вводючи обмеження на тип невідомих, а лише за рахунок додавання обмежень на значення невідомих ми розв'язали задачу ЦЛП як задачу лінійного програмування з потенційною можливістю отримання двоїстих оцінок обмежувачих факторів.

### Задача 5.2. Про оптимальний машинний парк

#### Постановка задачі

5 видів робіт заданого об'єму необхідно виконати машинами 4 типів заданої вартості, відома матриця продуктивності машин  $P$  розміром  $(4 \times 5)$ , де елемент  $p_{ij}$  – продуктивність  $i$ -ої машини на  $j$ -ій роботі, і матриця  $C(4 \times 5)$  собівартостей виконання  $i$ -ою машиною одиниці  $j$ -ої роботи.

Визначити оптимальний машинний парк (кількості машин кожного типу), який треба придбати, та оптимальний розподіл машин по роботах (кожну роботу виконує цілочислова кількість машин), щоб загальні витрати на придбання машин та виконання робіт були мінімальними.

Початкові дані: матриці продуктивності та собівартості робіт, вартості машин та об'єми робіт.

Невідомі: кількість машин кожного виду та кількості машин, направлених на виконання робіт, всі – цілого типу.

Розв'язуємо задачу у два етапи:

- як задачу ЛП, щоб мати двоїсті оцінки та
- як задачу ЦЛП у відповідності умові неподільності машин.

### Математична модель

#### Позначення

$i$  – поточний номер машини,

$j$  – поточний номер роботи,

$X = \{x_{ij}\}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ;  $j = 1, \dots, 5$ , де  $x_{ij}$  – кількість машин  $i$ -го типу, направлених на виконання  $j$ -ої роботи, шуканий план розподілу машин по роботах,

$P = \{p_{ij}\}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ;  $j = 1, \dots, 5$ , де  $p_{ij}$  – продуктивність машини  $i$ -го типу на  $j$ -ій роботі,

$S = \{s_{ij}\}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ;  $j = 1, \dots, 5$ , де  $s_{ij}$  – собівартість виконання машиною  $i$ -го типу одиниці  $j$ -ої роботи,

$Z$  – загальні витрати,

$C = \{c_i\}$  – ціни машин,

$R = \{r_j\}$  – об'єми робіт, які треба виконати машинами.

### Задача оптимізації

I. Знайти матрицю  $X = \{x_{ij}\}$ , таку, щоб

II. загальні витрати  $Z = (0,5x_{11} + \dots + 2,2x_{45}) + (210x_1 + \dots + 236x_4) \rightarrow \min$ , де:

$x_1 = x_{11} + x_{12} + \dots + x_{15}$  (кількість машин 1-го типу)

$x_2 = x_{21} + x_{22} + \dots + x_{25}$  (кількість машин 2-го типу)

$x_3 = x_{31} + x_{32} + \dots + x_{35}$  (кількість машин 3-го типу)

$x_4 = x_{41} + x_{42} + \dots + x_{45}$  (кількість машин 4-го типу)

III. за обмежень для об'ємів робіт:

$3x_{11} + 4x_{21} + 2x_{31} + 4x_{41} = 100$  (всі роботи 1-го типу виконані всіма машинами)

$6x_{12} + 3x_{22} + 4x_{32} + 5x_{42} = 50$  (всі роботи 2-го типу виконані всіма машинами)

$5x_{13} + 2x_{23} + 5x_{33} + 7x_{43} = 700$  (всі роботи 3-го типу виконані всіма машинами)

$9x_{14} + 7x_{24} + 6x_{34} + 6x_{44} = 300$  (всі роботи 4-го типу виконані всіма машинами)

$6x_{15} + 8x_{25} + 1x_{35} + 5x_{45} = 200$  (всі роботи 5-го типу виконані всіма машинами)

та граничних умов: всі  $x_{ij} \geq 0$ .

### Таблична модель (модель ЛП)

Початкові дані:

Оптимальний машинний парк						
Продуктивність і вартість машин, об'єм робіт						
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4	Робота 5	Вартість од.
Машина 1	3	6	5	9	6	210
Машина 2	4	3	2	7	8	258
Машина 3	2	4	5	6	1	456
Машина 4	4	5	7	6	5	236
Об'єм	100	50	700	300	200	

Собівартість машино-робіт					
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4	Робота 5
Машина 1	0,5	0,9	0,1	0,6	1,1
Машина 2	1,2	0,9	0,7	1,5	1,3
Машина 3	0,1	0,6	0,9	1,3	1,0
Машина 4	1,6	1,4	2,0	2,1	2,2

Результат (пряма і двоїста задачі):

Оптимальний план розподілу машин по роботах						
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4	Робота 5	Парк
Машина 1	0,0	<b>8,3</b>	0,0	<b>33,3</b>	0,0	41,7
Машина 2	0,0	0,0	0,0	0,0	<b>25,0</b>	25,0
Машина 3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Машина 4	<b>25,0</b>	<b>0,0</b>	<b>100,0</b>	0,0	0,0	125,0
Виконано	100	50	700	300	200	44700,0
						300,0
						<b>45000,0</b>
Двоїсті оцінки						
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4	Робота 5	
Машина 1	32,3	0,0	40,1	0,0	16,6	
Машина 2	21,6	153,4	190,7	95,7	0,0	
Машина 3	337,3	316,0	286,9	316,9	424,6	
Машина 4	0,0	61,7	0,0	97,7	76,1	
T-ціна	59,4	35,1	34,0	23,4	32,4	

### Аналіз результату

Пряма задача: отримано необхідні кількості машин (стовпець Парк) та їх розподіл по роботах, певні невідомі – нецілочислові, що реалізувати неможливо, ЦФ = 45000.

Двоїста задача:

- матриця нормованих вартостей невідомих вказує на зміну значення ЦФ (збільшення) при призначенні машин на відповідні роботи;
- тіньові ціни (T-ціна) обмежень на об'єм робіт вказують на зміну ЦФ (збільшення) при збільшенні замовлення на 1, тобто, визначені «вигідні» та «невигідні» роботи.

Отже, двоїсті оцінки вказують на шляхи зменшення загальних витрат.

### Таблична модель (модель ЦЛП)

Додається обмеження на цілочисельність плану (усі значення  $x_{ij}$  – цілого типу).

Результат:

Оптимальний план розподілу машин по роботах						
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4	Робота 5	Парк
Машина 1	0	7	0	32	0	39
Машина 2	0	1	0	0	25	26
Машина 3	0	0	0	0	0	0
Машина 4	25	1	100	2	0	128
Виконано	100	50	700	300	200	45106,0
						304,5
						<b>45410,5</b>

### Аналіз результату

Отриманий цілочисловий план відповідає умові неподільності машин, відповідно, додавання обмеження цілочисельності шуканих величин привело до збільшення витрат (значення ЦФ) на 410,5 од. за рахунок збільшення кількості машин (від 191,7 до 193 шт.) та їх перерозподілу по роботах:

0	8,3	0	33,3	0	0	7	0	32	0
0	0	0	0	25	0	1	0	0	25
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	100	0	0	25	1	100	2	0

### Задача 5.3. Про рюкзак

#### Постановка задачі

Несерйозному слову «рюкзак» на практиці відповідають будь-які вмістища, що завантажуються чи наповнюються певними неподільними об'єктами, однаковими чи різними, це: вагони, тара, судна, вантажівки, літаки, звичайні вантажні контейнери, складські приміщення тощо, які мають обмеження на розміри, об'єм та вагу вмісту, інші обмежуючі фактори, важливо, що шукана кількість цих об'єктів вимірюється у цілих числах.

#### Приклад

На причалі порту розміщена група вантажів  $n$  типів у вигляді вектора  $V = (v_1, \dots, v_n)$ , де  $v_i$  – кількість одиниць  $i$ -го вантажу,  $i = 1, \dots, n$ , з цієї групи треба вибрати оптимальний набір вантажів для розміщення у трюмі судна найкращим чином – цінність (у вартісному вимірі) загального вантажу має бути максимальною.

Кожна одиниця  $i$ -го вантажу характеризується вартістю (ціною,  $c_i$ ), об'ємом ( $o_i$ ), вагою ( $w_i$ ), сервісними вимогами ( $s_i$ ). Судно має об'єм ( $O$ ), вантажопідйомність ( $W$ ) та сервісні можливості ( $S$ ), які є обмежуючими факторами, загальна цінність вмісту –  $C$ , яка має бути максимальною (ЦФ).

Додаткова умова: судно можна відправити у рейс, якщо загальний об'єм і вага вмісту не менше 75% норми.

Початкові дані:

	Вантаж 1	Вантаж 2	Вантаж 3	Вантаж 4	Вантаж 5	Вантаж 6	Вантаж 7	Вантаж 8	Вантаж 9	Вантаж 10	Ресурс
Об'єм (м <sup>3</sup> )	6	8	12	8	89	75	90	17	12	22	1000
Вага (т)	23	90	9	7,5	100	125	51	20	12	13	1500
Сервіс (чол)	4	12	1	1	3	5	1	4	3	3	50
Вартість	88	95	12	9	70	55	61	94	43	33	

#### Задача оптимізації

I. Знайти вектор  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , де  $x_i$  – кількість одиниць  $i$ -го вантажу, щоб

II. ЦФ  $C = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max$

III. за обмежень:

$$\sum_{i=1}^n o_i x_i \leq O \text{ (об'єм)}$$

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W \text{ (вага)}$$

$$\sum_{i=1}^n s_i x_i \leq S \text{ (сервіс)}$$

та граничних умов: усі  $x_i$  – цілого типу,  $x_i \geq 0$ .

Результат (модель ЛП):

	Вантаж 1	Вантаж 2	Вантаж 3	Вантаж 4	Вантаж 5	Вантаж 6	Вантаж 7	Вантаж 8	Вантаж 9	Вантаж 10	Ресурс	Використано	Залишок	Т-ціна	Доп. зб.	%
Об'єм (м <sup>3</sup> )	6	8	12	8	89	75	90	17	12	22	1000	1000,0	0,0	0,4	1542,7	100%
Вага (т)	23	90	9	7,5	100	125	51	20	12	13	1500	672,4	827,6	0,0	1E+30	45%
Сервіс (чол)	4	12	1	1	3	5	1	4	3	3	50	50,0	0,0	21,6	185,3	100%
Вартість	88	95	12	9	70	55	61	94	43	33		ЦФ= 1519,4				
План	0	0	0	0	0	0	9,2	10,2	0	0						
Н-варт.	-1	-168	-15	-16	-34	-86	0	0	-27	-42						

## Аналіз отриманого результату

### Пряма задача

«Ідеальний» оптимальний план завантаження:  $x_7 = 9,2$ ;  $x_8 = 10,2$ , усі інші – нулі, максимальна цінність вмісту склала величину  $C = 1519,4$  од. Об'єм і сервіс вичерпані повністю, резерв судна – 45% загальної ваги.

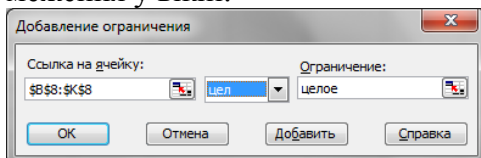
### Двоїста задача

Тіньові ціни 3-ох характеристик судна (об'єм, вага, сервіс) вказують на «цінність» параметрів цих характеристик (стовпець «ресурс»), якщо об'єм збільшити заміною на інший тип (на 1542 од.), тоді кожна додаткова одиниця об'єму збільшить  $C$  на 0,4, зате збільшення сервісних можливостей шляхом залучення додаткового персоналу дасть приріст 21,6 на кожную одиницю, збільшувати можна не більше, ніж на 185,3 од.

Нормовані вартості вантажів – це від'ємні оцінки рядка «вартість», «найгірший» вантаж 2-ий, його оцінка -168, він невеличкий за об'ємом (8), зате важкий (90) й вимагає ретельного догляду з боку персоналу (12), хоча й досить вартісний (95), за ним 6-ий, 10-ий, 5-ий та 9-ий.

Існує думка, що для отримання цілочислового плану достатньо округлити до найближчого цілого отримані дійсні числа. У прикладі, здається, достатньо замінити 9,2 на 9, а 10,2 на 10, щоб отримати результат у цілих числах. Якщо так зробити, отримаємо  $C = 1489$  од. Покажемо хибність такої думки.

Щоб перейти від моделі лінійного програмування і алгоритму симплекс-методу до цілочислової оптимізаційної моделі і алгоритму «гілок і границь», треба увести додаткове обмеження у вікні:



### Результат (модель ЦЛП):

	Вантаж 1	Вантаж 2	Вантаж 3	Вантаж 4	Вантаж 5	Вантаж 6	Вантаж 7	Вантаж 8	Вантаж 9	Вантаж 10	Ресурс	Використано	Залишок			%
Об'єм (м <sup>3</sup> )	6	8	12	8	89	75	90	17	12	22	1000	993,0	7,0			99%
Вага (т)	23	90	9	7,5	100	125	51	20	12	13	1500	731,0	769,0			49%
Сервіс (чол)	4	12	1	1	3	5	1	4	3	3	50	50,0	0,0			100%
Вартість	88	95	12	9	70	55	61	94	43	33		ЦФ= 1508,0				
План	7	0	0	0	0	0	10	3	0	0						



### Аналіз отриманого результату

Ідея округлення не справдилася, цілочисловий оптимальний план:  $x_1 = 7$ ;  $x_7 = 10$ ;  $x_8 = 3$  од., інші нулі,  $C = 1508$  од., це «ідеальний» цілочисловий план.

### Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов

**Умова 1.** З'ясувалося, що на причалі є лише 5 «вигідних» вантажів 7-го типу, для врахування цього факту вводимо обмеження:  $x_7 \leq 5$ .

Результат:

	Вантаж 1	Вантаж 2	Вантаж 3	Вантаж 4	Вантаж 5	Вантаж 6	Вантаж 7	Вантаж 8	Вантаж 9	Вантаж 10	Ресурс	Використано	Залишок	%
Об'єм (м <sup>3</sup> )	6	8	12	8	89	75	90	17	12	22	1000	870,0	130,0	87%
Вага (т)	23	90	9	7,5	100	125	51	20	12	13	1500	735,0	765,0	49%
Сервіс (чол)	4	12	1	1	3	5	1	4	3	3	50	50,0	0,0	100%
Вартість	88	95	12	9	70	55	61	94	43	33		ЦФ=	1361,0	
План	0	0	0	0	3	0	5	9	0	0				

**Умова 2.** З'ясувалося також, що на причалі є лише 3 одиниці ставшого «вигідним» вантажу 8-го типу, для врахування цього факту вводимо обмеження:  $x_8 \leq 3$ .

Результат:

	Вантаж 1	Вантаж 2	Вантаж 3	Вантаж 4	Вантаж 5	Вантаж 6	Вантаж 7	Вантаж 8	Вантаж 9	Вантаж 10	Ресурс	Використано	Залишок	%
Об'єм (м <sup>3</sup> )	6	8	12	8	89	75	90	17	12	22	1000	804,0	196,0	80%
Вага (т)	23	90	9	7,5	100	125	51	20	12	13	1500	753,0	747,0	50%
Сервіс (чол)	4	12	1	1	3	5	1	4	3	3	50	50,0	0,0	100%
Вартість	88	95	12	9	70	55	61	94	43	33		ЦФ=	1325,0	
План	6	0	0	0	3	0	5	3	0	0				

**Умова 3.** Вага вмісту складає 50%, за нормами судноплавства судно треба завантажити не менше, ніж на 75% загальної вантажопідйомності, а це  $0,75 \cdot 1500 = 1125$  од. Для реалізації

цієї умови вводимо обмеження:  $\sum_{i=1}^n w_i x_i \geq 1125$ .

Результат:

	Вантаж 1	Вантаж 2	Вантаж 3	Вантаж 4	Вантаж 5	Вантаж 6	Вантаж 7	Вантаж 8	Вантаж 9	Вантаж 10	Ресурс	Використано	Залишок	%
Об'єм (м <sup>3</sup> )	6	8	12	8	89	75	90	17	12	22	1000	998,0	2,0	100%
Вага (т)	23	90	9	7,5	100	125	51	20	12	13	1500	1175,5	324,5	78%
Сервіс (чол)	4	12	1	1	3	5	1	4	3	3	50	50,0	0,0	100%
Вартість	88	95	12	9	70	55	61	94	43	33		ЦФ=	1107,0	
План	4	0	0	1	9	1	1	0	0	0				

Отже, до завантаження підготовлено 16 одиниць вантажів 5-ти типів (1, 4, 5, 6, 7), за об'ємом і сервісом наповненість повна, за вагою 78%, норми судноплавства задоволені, економічна цінність вантажу дещо нижча за ідеальну (1508), бо оптимально завантажено те, що є у наявності, судно готове йти у рейс.

**Умова 4.** В останню хвилину метеорологи повідомили про посилення вітру і капітан дав команду завантажити судно не менш, ніж на 90% вантажопідйомності (а це 1350 од.), оперативно уводимо обмеження:  $\sum_{i=1}^n w_i x_i \geq 1350$  і отримуємо новий результат:

	Вантаж 1	Вантаж 2	Вантаж 3	Вантаж 4	Вантаж 5	Вантаж 6	Вантаж 7	Вантаж 8	Вантаж 9	Вантаж 10	Ресурс	Використано	Залишок	%	
Об'єм (м <sup>3</sup> )	6	8	12	8	89	75	90	17	12	22	1000	1000,0	0,0	100%	
Вага (т)	23	90	9	7,5	100	125	51	20	12	13	1500	1365,0	135,0	91%	1350
Сервіс (чол)	4	12	1	1	3	5	1	4	3	3	50	50,0	0,0	100%	
Вартість	88	95	12	9	70	55	61	94	43	33		ЦФ=	768,0		
План	0	0	0	2	6	6	0	0	0	0					

Згідно нових експлуатаційних умов критерій «цінності» змінився, кращими за цих умов виявилися важкі, об'ємні і недорогі 5-ий та 6-ий вантажі з досить низькими двоїстими оцінками (-34) та (-86), так з аутсайдерів вони перейшли у розряд лідерів.

Із врахуванням додаткових умов для прийняття рішення щодо завантаження судна пропонується 10 одиниць вантажів 3-ох типів (4, 5, 6) з порівняно невисокою економічною цінністю.

#### Задача 5.4. Про призначення

##### Постановка задачі

Кадровій службі організації з  $m$  претендентів, що пройшли співбесіду, тестування й отримали оцінки відповідності своїй підготовки виробничим функціям, треба вибрати виконавців для заповнення  $n$  вакансій найкращим чином.

Можливі три варіанти:

- якщо  $m < n$ , тоді  $n - m$  вакансій залишаться вільними
- якщо  $m > n$ , тоді  $m - n$  претендентів залишаться незайнятими
- якщо  $m = n$ , тоді усі вакансії будуть закриті, а усі претенденти будуть працевлаштовані (закрита чи збалансована задача, зустрічається як виняток).

Якщо оцінка «виконавець → функція» у вигляді додатного числа визначає *ефект* від такого призначення, тоді за критерієм «максимум» треба досягти загальної максимальної ефективності здійснення запланованих дій, якщо ж ця оцінка визначає *витрати* на підготовку чи перепідготовку претендента, тоді треба мінімізувати загальні витрати для здійснення запланованих дій.

В ролі потенційних виконавців виступають люди (практика кадрового менеджменту), технічні засоби чи будь-які їх комбінації (команди, екіпажі).

##### Приклад

6 претендентів необхідно призначити для виконання обов'язків за 8 вакантними посадами. При призначенні претендентів на посади операцію «претендент-посада» можна задати оцінкою, отриманою при тестуванні (задача на максимум), чи необхідними витратами (часу, коштів) на підготовку претендента виконувати функціональні обов'язки за цією посадою (задача на мінімум).

#### Задача на максимум

Задано:

- матрицю оцінок ( $O$ ) розміром  $6 \times 8$ , отриманих при тестуванні (за 10-бальною системою),
- вектор кількостей вакансій ( $V$ ) з кожної посади.

Треба призначити претендентів на посади, щоб максимізувати загальну ефективність ( $E$ ) виконання професійних обов'язків.

Початкові дані:

Претенденти	Бухгалтер	Менеджер	Директор	Водій	Охоронець	Економіст	Касир	Інженер
Марина	4	4	7	5	7	4	3	1
Сергій	2	5	6	4	6	4	2	8
Микола	3	4	5	5	5	4	3	5
Петро	4	3	4	4	4	4	4	7
Лариса	5	4	3	2	3	4	5	1
Олена	1	2	0	2	1	1	2	2
Вакансії	2	1	1	2	1	1	1	1

### Задача оптимізації

I. Знайти матрицю  $X = \{x_{ij}\}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ ;  $j = 1, \dots, 8$ , де:  $x_{ij} = 1$ , якщо  $i$ -ий претендент призначається на  $j$ -ту посаду,  $x_{ij} = 0$ , якщо не призначається, таку, щоб

II. ЦФ  $E = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^8 o_{ij} x_{ij} \rightarrow \max$ , де:  $o_{ij}$  – оцінка, отримана  $i$ -им претендентом на виконання функцій  $j$ -ої посади

III. за обмежень:

- для претендентів:  $\sum_{j=1}^8 x_{ij} \leq 1$  (кожен претендент призначається одноосібно)
- для посад:  $\sum_{i=1}^6 x_{ij} \leq v_j$  (на кожен посаду призначається не більше, ніж є вакансій)

та граничних умов: усі  $x_{ij} \geq 0$ ,  $x_{ij} \in \{0,1\}$ .

### Задача оптимізації

I. Знайти матрицю призначень  $X = \{x_{ij}\}$ ,  $i=1, \dots, 5$ ;  $j=1, \dots, 7$ ; де  $x_{ij}$  – кількість претендентів  $i$ -ої групи, призначених на  $j$ -ту посаду, таку, щоб

II. загальний ефект від виконання всіх робіт  $Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{57}x_{57} \rightarrow \max$

III. за обмежень

(3.1) для претендентів:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} \leq 1 \text{ (для групи А)}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} \leq 3 \text{ (для групи Б)}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} \leq 3 \text{ (для групи В)}$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} \leq 4 \text{ (для групи Г)}$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} \leq 7 \text{ (для групи Д)}$$

(3.2) для вакансій:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 3 \text{ (для посади 1)}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 2 \text{ (для посади 2)}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1 \text{ (для посади 3)}$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 2 \text{ (для посади 4)}$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1 \text{ (для посади 5)}$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 1 \text{ (для посади 6)}$$

$$x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} = 2 \text{ (для посади 7)}$$

і граничних умов: всі  $x_{ij} \geq 0$  і цілі.

### Порядок роботи

1. Увести таблицю початкових даних (матрицю оцінок і вектор вакансій)
2. Сформулювати стовпець «Призначено», значення – суми матриці  $X$  по рядках (ліва частина обмеження 1)

3. Сформувати рядок «Зайнято», значення – суми матриці X по стовпцях (ліва частина обмеження 2)
4. Сформувати рядок «Залишки», різниця між рядками «Вакансії» та «Зайнято»
5. Сформувати Клітинку ЦФ
6. Запуск програми Поиск решения і заповнення полів її вікна
7. Отримання результатів прямої та двоїстої задач

## Результати

Претенденти	Бухгалтер	Менеджер	Директор	Водій	Охоронець	Економіст	Касир	Інженер	Призначено
Марина	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Сергій	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Микола	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Петро	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Лариса	0	0	0	0	0	0	1	0	1
Олена	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Зайнято	0	0	1	2	1	0	1	1	32
Залишки	2	1	0	0	0	1	0	0	ЦФ
Претенденти	Бухгалтер	Менеджер	Директор	Водій	Охоронець	Економіст	Касир	Інженер	"Цінність"
Марина	-2	-2	0	-1	0	-2	-3	-8	6
Сергій	-3	0	0	-1	0	-1	-3	0	5
Микола	-2	-1	-1	0	-1	-1	-2	-3	5
Петро	0	-1	-1	0	-1	0	0	0	4
Лариса	0	-1	-3	-3	-3	-1	0	-7	5
Олена	-1	0	-3	0	-2	-1	0	-3	2
"Цінність"	0	0	1	0	1	0	0	3	

## Формули

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
6	Претенденти	Бухгалтер	Менеджер	Директор	Водій	Охоронець	Економіст	Касир	Інженер		
7	Марина	4	4	7	5	7	4	3	1		
8	Сергій	2	5	6	4	6	4	2	8		
9	Микола	3	4	5	5	5	4	3	5		
10	Петро	4	3	4	4	4	4	4	7		
11	Лариса	5	4	3	2	3	4	5	1		
12	Олена	1	2	0	2	1	1	2	2		
13	Вакансії	2	1	1	2	1	1	1	1		
14											
15											
16	Претенденти	Бухгалтер	Менеджер	Директор	Водій	Охоронець	Економіст	Касир	Інженер	Призначено	
17	Марина	0	0	0,999999999999333	0	0	0	0	0	=СУММ(M17:T17)	
18	Сергій	0	0	0	0	0,999999999999333	0	0	0	=СУММ(M18:T18)	
19	Микола	0	0	0	1	0	0	0	0	=СУММ(M19:T19)	
20	Петро	0	0	0	0	0	0	0	1	=СУММ(M20:T20)	
21	Лариса	0	0	0	0	0	0	1	0	=СУММ(M21:T21)	
22	Олена	0	0	0	0,999999999999333	0	0	0	0	=СУММ(M22:T22)	
23	Зайнято	=СУММ(M17:M22)	=СУММ(N17:N22)	=СУММ(O17:O22)	=СУММ(P17:P22)	=СУММ(Q17:Q22)	=СУММ(R17:R22)	=СУММ(S17:S22)	=СУММ(T17:T22)	=СУММПРОЗВ(M7:T12;M17:T22)	
24	Залишки	=M13-M23	=N13-N23	=O13-O23	=P13-P23	=Q13-Q23	=R13-R23	=S13-S23	=T13-T23	ЦФ	
25											
26											
27	Претенденти	Бухгалтер	Менеджер	Директор	Водій	Охоронець	Економіст	Касир	Інженер	"Цінність"	
28	Марина	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=Отчет по устойчивости 1E61	
29	Сергій	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=Отчет по устойчивости 1E62	
30	Микола	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=Отчет по устойчивости 1E63	
31	Петро	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=Отчет по устойчивости 1E64	
32	Лариса	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=Отчет по устойчивости 1E65	
33	Олена	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=Отчет по устойчивости 1E66	
34	=U27	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n	=TRANСП(Отчет n		

## Аналіз отриманого результату

### Пряма задача

Знайдено матрицю призначень (X) та максимальне значення ЦФ (32), з 10 вакансій 4 не зайняті (рядок «Залишки»).

### Двоїста задача

Матриця двоїстих оцінок (від'ємні числа і нулі) вказує на втрати ЦФ з-за неоптимального призначення (за вольовим рішенням). Наприклад, якщо Марину призначити бухгалтером,

додаткові витрати складуть величину (-2), нове значення ЦФ = 32 – 2 = 30. Нульові оцінки дозволяють вимушено перепризначити певних претендентів без зменшення ЦФ (загальної ефективності).

Стовпець «Цінність» вказує на певну цінність претендентів згідно плану вакансій, кращий набір оцінок має Марина (6), тобто, якщо б мав ще претендента з таким же набором оцінок, ЦФ збільшилась би на 6, найгірший у Олені (2).

Рядок «Цінність» вказує на певну цінність вакансій, краща з них «Інженер», додаткова така вакансія збільшила б ЦФ на 3.

### Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов

**Умова 1.** Отриманий оптимальний план може бути неприйнятним для фірми, наприклад, залишилась незайнятою обов'язкова вакансія бухгалтера. Кращі кандидатури – Петро і Лариса (нульові двоїсті оцінки). Рішення «призначити бухгалтером Ларису» реалізується уведенням додаткового обмеження:  $x_{51} = 1$ .

Результат:

Претенденти	Бухгалтер	Менеджер	Директор	Водій	Охоронець	Економіст	Касир	Інженер	Призначено
Марина	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Сергій	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Микола	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Петро	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Лариса	1	0	0	0	0	0	0	0	1
Олена	0	0	0	0	0	0	1	0	1
Зайнято	1	0	1	1	1	0	1	1	32
Залишки	1	1	0	1	0	1	0	0	ЦФ

Це призначення вплинуло на водія Олену, яка тепер має стати касиром, але яка категорично від цієї пропозиції відмовилася.

**Умова 2.** Директриса Марина приймає рішення: «залишити Олену водієм, а другого водія Сергія перевести на іншу посаду» реалізується уведенням двох обмежень:  $x_{64} = 1$  та  $x_{34} = 0$ , результат:

Претенденти	Бухгалтер	Менеджер	Директор	Водій	Охоронець	Економіст	Касир	Інженер	Призначено
Марина	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Сергій	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Микола	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Петро	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Лариса	1	0	0	0	0	0	0	0	1
Олена	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Зайнято	1	1	1	1	1	0	0	1	31
Залишки	1	0	0	1	0	1	1	0	ЦФ

Каприз Олені привів до кардинальних змін – Микола з водіїв перейшов на посаду директора (!), Сергій з охоронців перейшов на посаду менеджера, а колишня директриса Марина, здається пожалкувала, бо за новим керівництвом має стати охоронцем (оцінка за тестом 7), вимушений перехід з вищої оцінки на нижчу (Сергій, з оцінки 6 на оцінку 5) привів до зменшення загальної ефективності виконання функціональних обов'язків (31).

### Задача 5.5. Про розміщення контролерів

#### Постановка задачі

Приміщення організації із суворим режимом щодо масового відвідування (наприклад, виставка, історичний музей, торговельний центр, банк чи певна адміністрація) представляє собою сукупність  $m$  кімнат різного розміру і форми, які з'єднані між собою  $n$  дверима, через які відвідувачі мають доступ до відповідних кімнат. Ставиться задача мінімізації ви-

трат для забезпечення охорони усіх приміщень шляхом оптимального розміщення контролерів. У загальному випадку контролерами можуть бути люди, автоматичні пристрої (сканери, камери спостереження), а місця їх розміщення дозволяють визначити відповідні об'єкти контролю: частину приміщення, групу приміщень чи певні об'єкти в приміщенні, наприклад, сейфи чи сервер комп'ютерної системи.

#### Приклад.

Музей розміщено у старовинному палаці, де усі приміщення за тодішнім архітектурним задумом з'єднані між собою. Кожна кімната містить коштовні експонати, що мають бути під пильним контролем. Керівництво музею для економії витрат на оплату праці контролерів зацікавлене мінімізувати їх чисельність і для цього вирішило розміщувати контролера в отворі дверей, щоб він бачив дві суміжні кімнати.

У прикладі це задача про розміщення типу «двері-кімнати», де місцями розміщення контролерів є двері, а об'єктами – кімнати. Для заданого плану приміщення треба визначити мінімальну кількість контролерів, щоб кожна кімнату контролював хоча б один контролер, та місця (двері) їх розміщення.

### **Математична модель**

#### Позначення

$i$  – поточний номер двері ( $D_i$ ),  $i = \overline{1, n}$

$j$  – поточний номер кімнати ( $K_j$ ),  $j = \overline{1, m}$

$A = \{a_{ij}\}$  – матриця опису приміщення «кімнати-двері» розміром  $m \times n$

де  $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо з } i\text{-их дверей видно } j\text{-ту кімнату} \\ 0, \text{ у іншому випадку} \end{cases}$

$X = \{x_i\}$  – план розміщення охоронців, де  $x_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо охоронець стоїть у } i\text{-их дверях} \\ 0, \text{ у іншому випадку} \end{cases}$

#### **Задача оптимізації**

I. Знайти план розміщення контролерів  $X = \{x_i\}$ , за яким

II. Загальна їх кількість (ЦФ)  $K = x_1 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \min$

III. за обмежень:

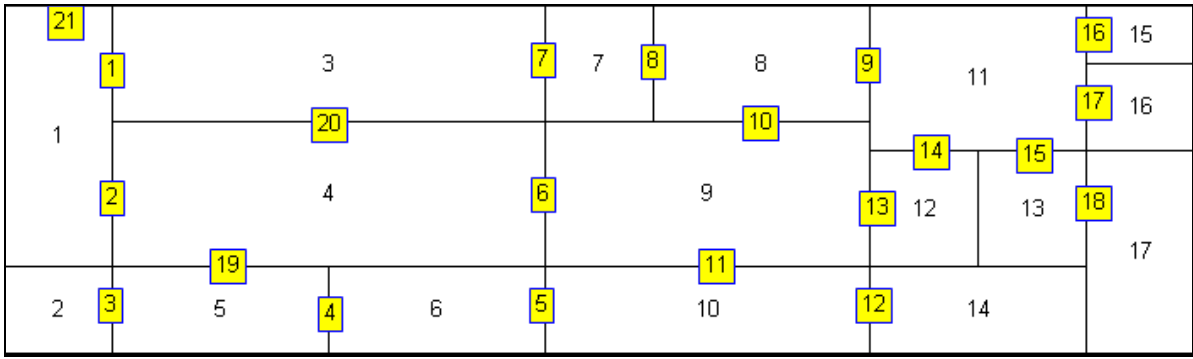
$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq 1$  для  $j = \overline{1, m}$  (Кількість контролерів для кожної кімнати  $\geq 1$ )

та граничних умов: усі  $x_i = 1/0$  (двійкового типу).

Приклад: кімнати ( $m = 17$ ); двері ( $n = 21$ ).

#### Порядок роботи

1. Накреслити план приміщення, позначити номерами кімнати та двері між ними:



2. Сформувати матрицю А «кімнати-двері», де  $a_{ij} = 1$ , якщо  $i$ -ту кімнату видно із  $j$ -их дверей:

	Д1	Д2	Д3	Д4	Д5	Д6	Д7	Д8	Д9	Д10	Д11	Д12	Д13	Д14	Д15	Д16	Д17	Д18	Д19	Д20	Д21	
К1	1	1																				1
К2			1																			
К3	1						1															1
К4		1				1														1	1	
К5			1	1																1		
К6				1	1																	
К7							1	1														
К8							1	1	1													
К9						1			1	1		1										
К10				1					1	1												
К11									1				1	1	1	1						
К12												1	1									
К13															1				1			
К14											1											
К15																1						
К16																	1					
К17																			1			

3. Сформувати рядок  $X$  (план розміщення охоронців)

4. Обчислити значення ЦФ (сума елементів рядка  $X$ )

5. Обчислити стовпець Кількість контролерів (дверей) до певної кімнати за допомогою функції СУММПРОИЗВ(рядок А;Х)

	Д1	Д2	Д3	Д4	Д5	Д6	Д7	Д8	Д9	Д10	Д11	Д12	Д13	Д14	Д15	Д16	Д17	Д18	Д19	Д20	Д21	Кільк. дв.	
K1	1	1																				1	0
K2			1																				0
K3	1						1														1		0
K4		1				1														1	1		0
K5			1	1																1			0
K6				1	1																		0
K7							1	1															0
K8								1	1	1													0
K9						1				1	1		1										0
K10					1						1	1											0
K11									1					1	1	1	1						0
K12													1	1									0
K13															1					1			0
K14												1											0
K15																1							0
K16																	1						0
K17																			1				0
X																							0
																							цф

6. Курсор на цільову клітинку, командою *Сервис*→*Поиск решения* виклик програми *Поиск решения*, у вікні:

- Установить целевую ячейку: АК20
- Равной: минимальному значению
- Изменяя ячейки: Р20:АJ20 (План)
- Ограничения: Кількість контролерів  $\geq 1$  та План = двоичное

The screenshot shows the 'Поиск решения' (Solver) dialog box in Excel. The target cell is \$AK\$20, which contains the formula =СУММ(Р20:АJ20). The goal is set to 'To the minimum of the objective cell'. The variable cells are \$P\$20:\$AJ\$20. Constraints include \$AK\$2:\$AK\$18 >= 1 and \$P\$20:\$AJ\$20 = двоичное. The 'Parameters' checkbox is checked. The background shows a network diagram with nodes and edges, and a grid with data for days Д1 through Д21 and a total cell 'цф'.

• **Параметры:**

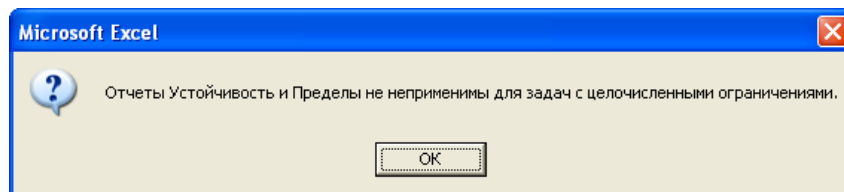
Линейная модель  
 Неотрицательные значения

- Натиснути на кнопку **Выполнить** і отримати результат

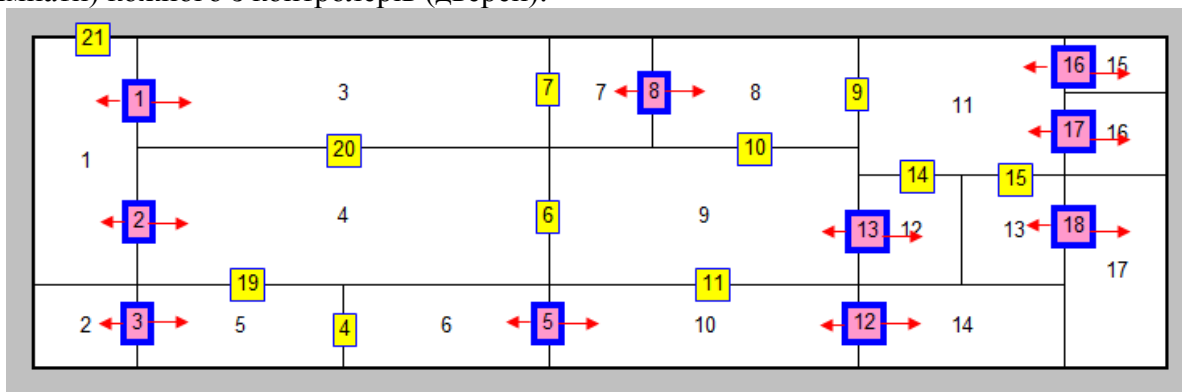


	Д1	Д2	Д3	Д4	Д5	Д6	Д7	Д8	Д9	Д10	Д11	Д12	Д13	Д14	Д15	Д16	Д17	Д18	Д19	Д20	Д21	Кільк. дв.	
K1	1	1																				1	2
K2			1																				1
K3	1							1													1		1
K4		1						1												1	1		1
K5			1	1																1			1
K6				1	1																		1
K7								1	1														1
K8									1	1	1												1
K9								1			1	1	1										1
K10					1						1	1											2
K11									1					1	1	1	1						2
K12													1	1									1
K13															1				1				1
K14												1											1
K15																1							1
K16																	1			1			1
K17																			1				1
X	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	10	цф

Увага: для задач оптимізації з цілочисловими обмеженнями *Отчет Устойчивость* не застосовується:



7. На плані приміщення зафарбувати зайняті двері й зобразити стрілками зони контролю (кімнати) кожного з контролерів (дверей):



### Аналіз отриманого результату

I. Знайдено оптимальний план розміщення контролерів:

X	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

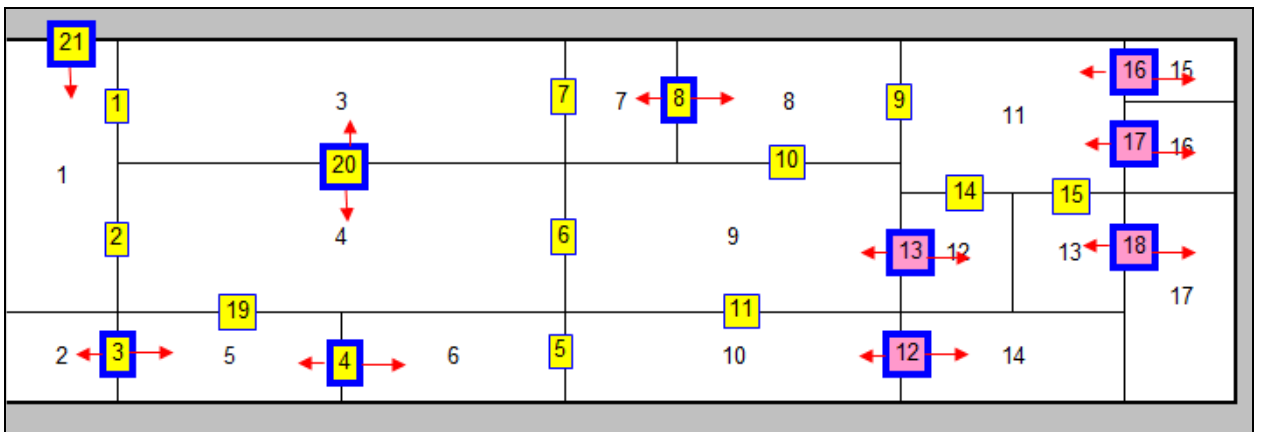
II. Мінімальна кількість контролерів дорівнює 10 осіб.

III. За обмежень: три кімнати (1, 10, 11) контролюються з двох пунктів (дверей), усі інші – з одного.

### Модифікація моделі

**Умова 1.** Двері Д21 (кімната 1) є входними й у них обов'язково має бути контролер, для врахування цієї умови в модель додається обмеження:  $x_{21} = 1$ , результат:

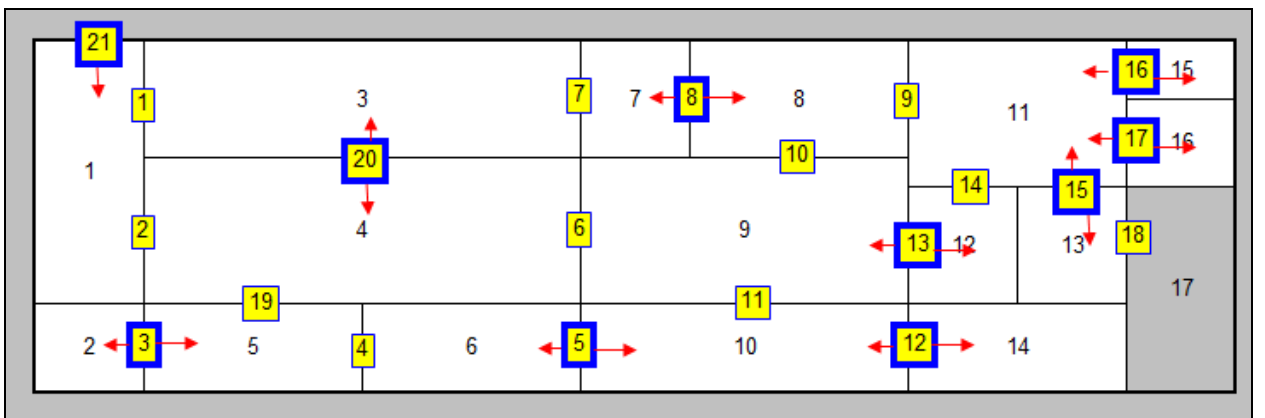
x	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	10
																						цф



**Умова 2.** Кімната K17 не вимагає контролю, додається обмеження:  $\sum_{i=1}^n a_{i,17} x_i = 0$ , резуль-

тат:

x	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	10
																						цф



### Задача 5.6. Про оптимальне розміщення технічних засобів дорожнього контролю

**ДАІ замінить постових автоматичними комплексами**

Державна автоінспекція буде відходити від практики контролю за дорожнім рухом людиною, впроваджуючи технічні засоби фіксації порушень. Про це заявив міністр внутрішніх справ України В. Захарченко.

(з газет)

#### Постановка задачі

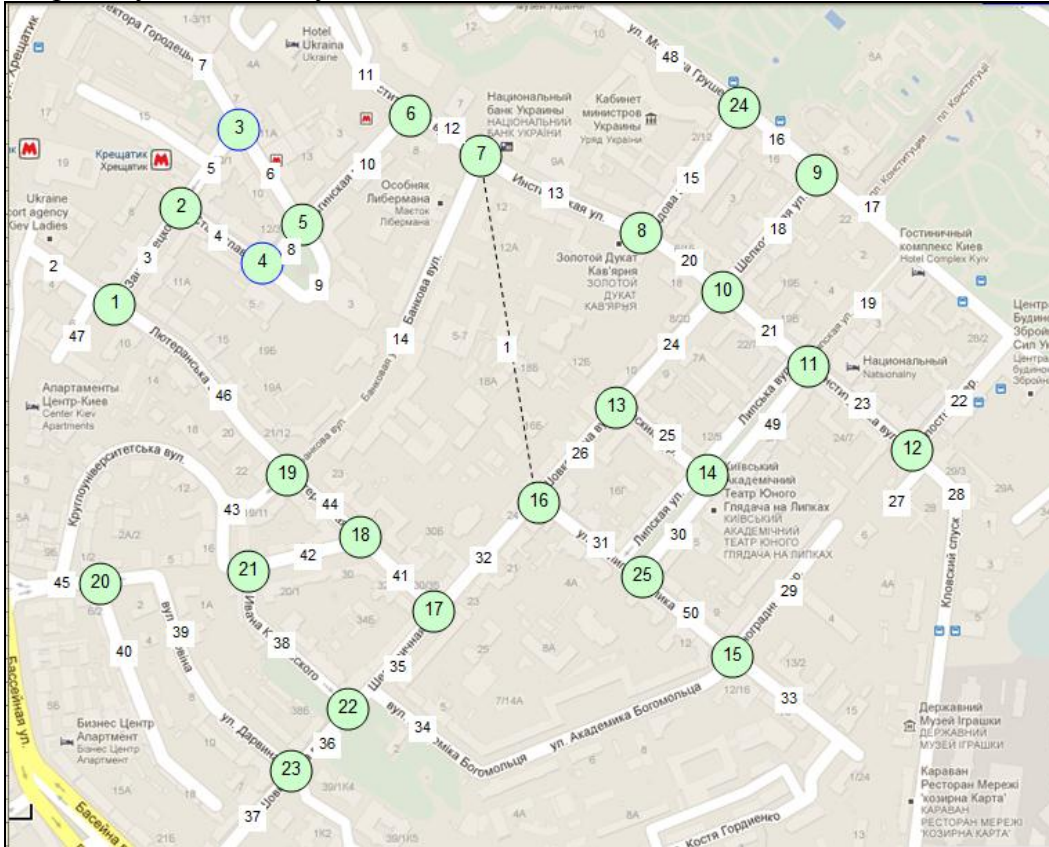
Транспортна мережа складається з вузлів (перехресть доріг) та дуг, що з'єднують пари вузлів. Вузли транспортної мережі є пунктами контролю – місцями розташування технічних засобів (сканерів), щоб контролювати ділянки доріг (дуги мережі), що сходяться й розходяться у перехресті або ж всередині криволінійної ділянки. Визначено потенційний набір пунктів, де можуть бути встановлені сканери, треба оптимізувати схему розміщення сканерів, визначивши пункти контролю для розташування сканерів та їх мінімальну кількість, щоб кожна ділянка (дуга) мережі була під контролем хоча б одного сканера.

## Приклад

Транспортна мережа складається з 25 вузлів та 50 дуг, що їх з'єднують.

Карта регіону та потенційні місця розташування сканерів:

- кружечками позначено вузли (пункти контролю)
- прямокутниками – дуги.



## Математична модель

### Позначення

$i$  – поточний номер дуги,  $i = 1, \dots, 50$

$j$  – поточний номер вузла,  $j = 1, \dots, 25$

$a_{ij}$  – ознака існування зв'язку між  $i$ -ою дугою й  $j$ -им вузлом ( $a_{ij} = 1$ , якщо є зв'язок, інакше, 0)

$x_j$  – шукана змінна двійкового типу,  $x_j = 1$ , якщо у  $j$ -му вузлі треба встановити сканер, інакше,  $x_j = 0$

$S$  – шукана мінімальна кількість сканерів.

### Задача оптимізації

I. Знайти план розташування сканерів  $X = (x_1, \dots, x_{25})$ , щоб

II. ЦФ  $S = x_1 + \dots + x_{25} \rightarrow \min$

III. за обмежень:  $\sum_{j=1}^{25} a_{ij} x_j \geq 1 \quad i = 1, \dots, 50$

та граничних умов:  $x_j \in (0, 1)$ .

### Таблична модель і результат

	В-1	В-2	В-3	В-4	В-5	В-6	В-7	В-8	В-9	В-10	В-11	В-12	В-13	В-14	В-15	В-16	В-17	В-18	В-19	В-20	В-21	В-22	В-23	В-24	В-25	Под наглядом	По 2	
Д-1						1										1										1		
Д-2	1																										1	
Д-3	1	1																									1	
Д-4		1		1																							1	
Д-5		1	1																								1	
Д-6			1		1																						1	
Д-7			1																								1	
Д-8				1	1																						1	
Д-9				1	1																						1	
Д-10					1	1																					1	
Д-11						1																					1	
Д-12						1	1																				1	
Д-13							1	1																			1	
Д-14							1													1							1	
Д-15								1																	1		2	1
Д-16									1																1		2	1
Д-17									1																		1	
Д-18									1	1																	1	
Д-19											1																1	
Д-20								1		1																	1	
Д-21											1	1															1	
Д-22												1															1	
Д-23											1	1															2	1
Д-24													1														1	
Д-25												1	1														2	1
Д-26													1			1											2	1
Д-27												1															1	
Д-28												1															1	
Д-29															1												1	
Д-30																1									1		1	
Д-31																	1								1		1	
Д-32																	1	1									1	
Д-33																1											1	
Д-34																							1				1	
Д-35																		1									1	
Д-36																								1			1	
Д-37																								1			1	
Д-38																					1	1					1	
Д-39																					1			1			2	1
Д-40																						1					1	
Д-41																		1	1								1	
Д-42																			1			1					1	
Д-43																				1		1					1	
Д-44																			1	1							2	1
Д-45																					1						1	
Д-46	1																			1							2	1
Д-47	1																										1	
Д-48																									1		1	
Д-49												1															1	
Д-50															1											1	1	
Х	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	18		
	В-1	В-2	В-3	В-4	В-5	В-6	В-7	В-8	В-9	В-10	В-11	В-12	В-13	В-14	В-15	В-16	В-17	В-18	В-19	В-20	В-21	В-22	В-23	В-24	В-25			
	4	0	3	3	0	3	0	3	3	0	3	4	3	3	3	4	0	3	4	3	0	3	3	3	0		58	



## Задача 5.7. Про оптимальний розкрій

### Постановка задачі

Із листового матеріалу (метал, скло, фанера, ДВП, ДСП, пластик) стандартного розміру необхідно виготовити за певною технологією (розкроєм, штамповкою) комплект з  $m$  заготовок заданих розмірів прямокутної форми. Для цього є набір  $n$  типів шаблонів розкрою матеріалу, за кожним шаблоном виготовляється певна кількість заготовок заданого розміру і є певні залишки матеріалу.

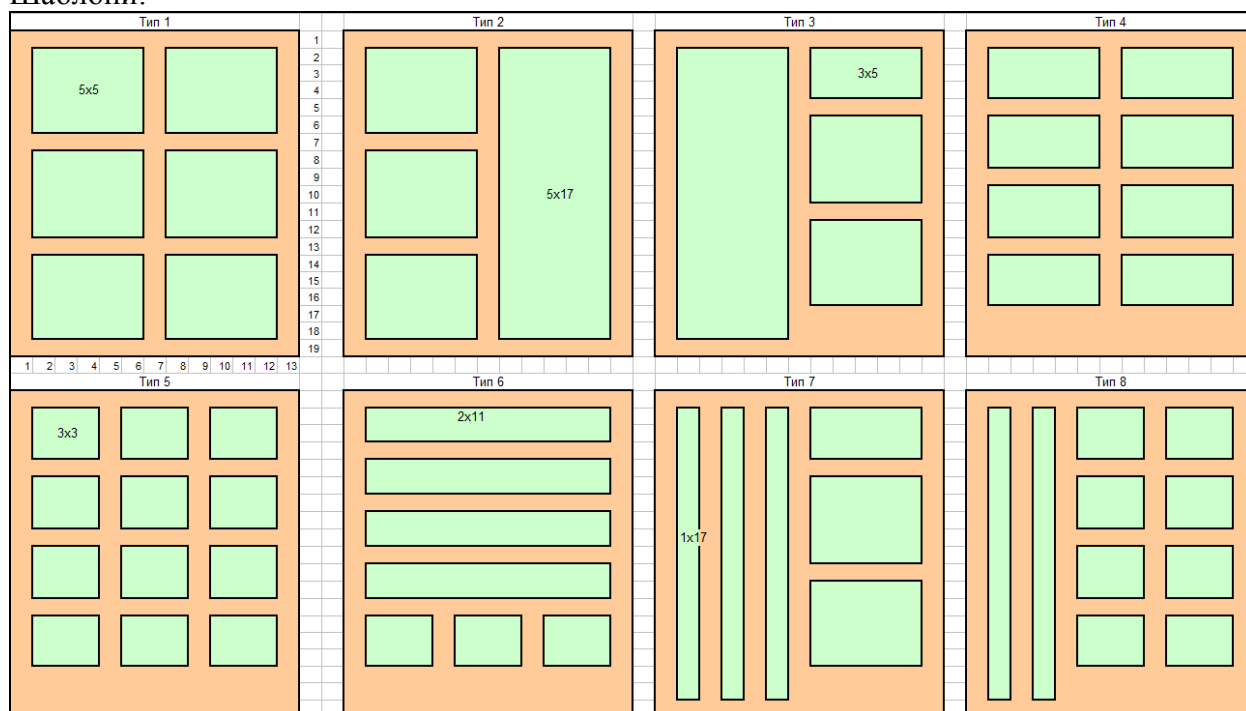
Специфіка проблеми:

- є два варіанти цільової функції цілочислових аргументів щодо мінімізації: а) кількості одиниць матеріалу (у цілих числах); б) кількості відходів (у дійсних числах)
- фіксовані типи шаблонів розкрою і значення замовлень унеможливають точне виконання замовлення, тож неминуче виготовлення заготовок поза замовлення.

### Приклад

З матеріалу прямокутної форми розміром  $13 \times 19$  треба виготовити заготовки прямокутної форми 6 видів у заданій кількості, користуючись 8 шаблонами.

Шаблони:



Початкові дані:

Заготовка	a	b	s	Замовлення (Z)	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4	Тип 5	Тип 6	Тип 7	Тип 8
5x5	5	5	25	20	6	3	2				2	
5x17	5	17	85	12		1	1					
3x5	3	5	15	56			3	6			1	
3x3	3	3	9	120					12	3		8
2x11	2	11	22	14						4		
1x17	1	17	17	9							1	2

**Варіант 1.** Визначити оптимальний план розкрою (скільки листів і за яким шаблоном розкроїти), щоб мінімізувати загальні витрати матеріалу.

## Задача оптимізації I

- I. Знайти вектор  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , де  $x_i$  – кількість листів, розкrojених за  $i$ -им шаблоном,  $i = 1, \dots, 8$ , щоб
- II. ЦФ: загальні відходи  $V = s_1 k_{11} x_1 + \dots + s_6 k_{6,8} x_8 \rightarrow \min$ , де  $s_i$  – площа  $i$ -ої заготовки,  $k_{ij}$  – кількість заготовок  $i$ -го типу, розкrojених за  $j$ -им шаблоном,  $m = 6, n = 8$
- III. за обмеження:  $k_{i1} x_1 + k_{i2} x_2 + \dots + k_{in} x_n = z_i, i = 1, \dots, m$  (виготовлено = замовлення)  
та граничних умов: усі  $x_i \geq 0$ , додатково,  $x_i$  – цілого типу.

Зауваження: Оскільки це задача ЦЛП, де двоїсті оцінки не формуються принципово, розв'яжемо задачу у два етапи:

- а) як задачу лінійного програмування (ЛП), щоб отримати двоїсті оцінки початкових даних;  
б) як задачу ЦЛП введенням відповідного обмеження на невідомі.

## Комп'ютерна реалізація математичної моделі

Задача ЛП, обмеження – рівняння:

The screenshot shows an Excel spreadsheet with columns A through X and rows 1 through 13. The spreadsheet contains data for a linear programming model, including variables (a, b, s), types (Тип 1-8), and constraints (Замовлення (Z), Виготовлено, Різниця). A dialog box titled "Результаты поиска решения" (Search Results) is open, displaying the message "Поиск не может найти подходящего решения." (Search cannot find a suitable solution). The dialog box has buttons for "Сохранить найденное решение" (Save found solution), "Восстановить исходные значения" (Restore original values), "OK", "Отмена" (Cancel), "Сохранить сценарий..." (Save scenario...), and "Справка" (Help).

## Аналіз результату

Неможливо знайти такі значення невідомих ( $X$ ), щоб задовольнити обмеження-рівняння, тобто, щоб кількість виготовлених заготовок *точно* дорівнювала замовленню.

В табличній моделі послаблюємо це обмеження заміною знака « $=$ » на « $\geq$ », результат:

	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4	Тип 5	Тип 6	Тип 7	Тип 8	Замовлення (Z)	Виготовлено	Різниця	Т-ціна
	6	3	2				2		20	37	17	0,0
		1	1						12	19	7	0,0
			3	6			1		56	56	0	22,3
					12	3		8	120	120	0	11,6
						4			14	14	0	24,3
							1	2	9	9	0	24,2
Площа	150	160	180	90	108	115	82	106				
Відходи	97	87	67	157	139	132	165	141				
План (X)	0	0	18,7	0	6,13	3,5	0,0	4,5	32,79			
Відходів	0	0	1251	0	851	462	0	635	3198,54	ЦФ		
Н-вартість	97	87	0	23	0	0	119	0				

## Аналіз отриманого результату

### Пряма задача

Це «ідеальний» результат, що передбачає подільність листів матеріалу, зокрема, 18,7 листів розкrojити 3-им шаблоном, 6,12 листів – 5-им тощо, за яким мінімальна кількість відходів становить величину 3198,54 од. Результат став можливим з-за виготовлення поза замовлення 17 од. 1-ої та 7 од. 2-ої заготовок.

### Двоїста задача

Найбільша цінність цього результату – двоїсті оцінки початкових даних.

Тіньова ціна замовлень вказує на їх «невигідність» – 3-тє, 5-тє і 6-тє замовлення мають оцінки приблизно 22-24, на стільки збільшаться загальні витрати при збільшенні на 1 їх замовлень.

Наприклад, якщо треба виготовити 10 заготовок 6-го типу, тоді витрати зростуть на 24,2, а оптимальний план розкрою буде таким:

	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4	Тип 5	Тип 6	Тип 7	Тип 8	Замовлення (Z)	Виготовлено	Різниця
	6	3	2				2		20	37	17
		1	1						12	19	7
			3	6			1		56	56	0
					12	3		8	120	120	0
						4			14	14	0
							1	2	10	10	0
Площа	150	160	180	90	108	115	82	106			
Відходи	97	87	67	157	139	132	165	141			
План (X)	0	0	18,7	0	5,79	3,5	0,0	5	32,96		
Відходів	0	0	1251	0	805	462	0	705	3222,71	ЦФ	

Нормована вартість вказує на збільшення ЦФ (загальних витрат) при вимушеному використанні шаблонів. Наприклад, найгіршими є шаблони: 7-ий (119), 1-ий (97) та 2-ий (87), бо там утворюється найбільше відходів. Наприклад, за технологічними вимогами треба розкрити 1 лист за 7-им шаблоном, «розплатою» за відхилення від ідеального плану є збільшення кількості матеріалу і загальних витрат, результат:

	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4	Тип 5	Тип 6	Тип 7	Тип 8	Замовлення (Z)	Виготовлено	Різниця
	6	3	2				2		20	39	19
		1	1						12	18	6
			3	6			1		56	56	0
					12	3		8	120	120	0
						4			14	14	0
							1	2	10	10	0
Площа	150	160	180	90	108	115	82	106			
Відходи	97	87	67	157	139	132	165	141			
План (X)	0	0	18,3	0	6,12	3,5	1,0	4,5	33,46		
Відходів	0	0	1228	0	851	462	165	635	3341,21	ЦФ	

### Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов

**Умова 1.** Повернемося до ідеального варіанту. Неприємно виготовляти зайві заготовки, тож якщо відмовитися від цього неможливо, можна хоча б зменшити різницю «Виготовлено – Замовлення», для цього треба увести додаткове обмеження. Наприклад, для 1-ої заготовки обмежимо цю різницю значенням 5, результат:

	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4	Тип 5	Тип 6	Тип 7	Тип 8	Замовлення (Z)	Виготовлено	Різниця
	6	3	2				2		20	25	5
		1	1						12	12	0
			3	6			1		56	56	0
					12	3		8	120	120	0
						4			14	14	0
							1	2	9	9	0
Площа	150	160	180	90	108	115	82	106			
Відходи	97	87	67	157	139	132	165	141			
План (X)	0	0	12,5	3,08	6,13	3,5	0,0	4,5	29,71		
Відходів	0	0	837	484	851	462	0	635	3269,46	ЦФ	

**Умова 2.** Визначивши «цінність» початкових даних (замовлень, відходів для шаблонів) за допомогою двоїстих оцінок, повертаймося до цілочислової природи задачі про оптимальний розкрій уведенням принципового обмеження на шукані змінні – вони усі є цілочисловими, результат:



	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4	Тип 5	Тип 6	Тип 7	Тип 8	Замовлення (Z)	Виготовлено	Різниця
	6	3	2				2		20	38	18
		1	1						12	19	7
			3	6			1		56	57	1
					12	3		8	120	124	4
						4			14	16	2
							1	2	9	10	1
Площа	150	160	180	90	108	115	82	106			
Відходи	97	87	67	157	139	132	165	141			
План (X)	0	0	19	0	6	4	0	5	34		
Відходів	0	0	1273	0	834	528	0	705	3340	ЦФ	

### Аналіз результату

Для виконання замовлення треба розкроїти 34 листа, мінімальні відходи складуть величину 3340 од. «Розплатою» за реальний цілочисельний план є зайві заготовки усіх розмірів (стовпець Різниця). Якщо з цим змиритися важко, спробуємо зменшити їх значення, у першу чергу, для 1-ої заготовки (18) хоча до умови «не більше 5», результат:

O12		=СУММ(G12:N12)																								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	
1																										
2	Заготовка	a	b	s			Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4	Тип 5	Тип 6	Тип 7	Тип 8	Замовлення (Z)	Виготовлено	Різниця									
3	5x5	5	5	25			6	3	2					2	20	24	4									
4	5x17	5	17	85				1	1						12	12	0									
5	3x5	3	5	15					3	6			1		56	60	4									
6	3x3	3	3	9							12	3		8	120	124	4									
7	2x11	2	11	22											14	16	2									
8	1x17	1	17	17									1	2	10	10	0									
9	Лист	13	19	247			Площа	150	160	180	90	108	115	82	106											
10							Відходи	97	87	67	157	139	132	165	141											
11							План (X)	0	0	19	0	6	4	0	5	31,00										
12							Відходів	0	0	804	628	834	528	0	705	3499,00	ЦФ									
13							Н-варгість	97	87	0	23	0	0	119	0											
14																										
15																										

Вийшло краще, ніж очікувалося – за новим планом різниці стали меншими, менше листів треба розкроїти, але (за все треба платити!) збільшилися загальні витрати (3499 – 3340 = 159).

### Варіант 2 (мінімізація матеріалу)

Розроблену табличну модель використовуємо для дещо іншої задачі з, відповідно, дещо іншою математичною моделлю.

### Задача оптимізації 2

I. Знайти вектор  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , де  $x_i$  – кількість листів, розкrojених за  $i$ -им шаблоном,  $i = 1, \dots, 8$ , щоб

II. ЦФ: загальна кількість листів  $K = \sum_{j=1}^8 x_j = x_1 + \dots + x_n \rightarrow \min$

III. за обмеження:  $k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + \dots + k_{in}x_n = z_i \quad i = 1, \dots, m$  (виготовлено  $\geq$  замовлення) та граничних умов: усі  $x_i \geq 0$ , додатково,  $x_i$  – цілого типу.

### Комп'ютерна реалізація математичної моделі

I знову – два етапи:

- ЛП;
- ЦЛП.

Моделю ЛП, «ідеальний» результат:

	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4	Тип 5	Тип 6	Тип 7	Тип 8	Замовлення (Z)	Виготовлено	Різниця	T-ціна
	6	3	2				2		20	24	4	0,00
		1	1						12	12	0	0,50
			3	6			1		56	56	0	0,17
					12	3		8	120	120	0	0,08
						4			14	14	0	0,19
							1	2	10	10	0	0,17
Площа	150	160	180	90	108	115	82	106				
Відходи	97	87	67	157	139	132	165	141				
План (X)	0	0	12	3,33	5,79	3,5	0	5	29,63			
Відходів	0	0	804	523	805	462	0	705	3299,38	ЦФ		
H-вартість	1,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,67	0,0				

## Аналіз результату

### Пряма задача

Знайдено оптимальний план розкрою, за яким мінімальна кількість листів склала величину 29,63, відповідні витрати – 3299,38.

### Двоїста задача

Тіньові ціни визначають «цінність» замовлень, найгірша – 2-га.

Нормовані вартості визначають «цінність» витрат для шаблонів, найгіршими є 1-ий, 7-ий та 2-ий шаблони.

### Модель ЦЛП, «реальний» результат:

	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4	Тип 5	Тип 6	Тип 7	Тип 8	Замовлення (Z)	Виготовлено	Різниця
	6	3	2				2		20	26	6
		1	1						12	13	1
			3	6			1		56	57	1
					12	3		8	120	120	0
						4			14	16	2
							1	2	10	12	2
Площа	150	160	180	90	108	115	82	106			
Відходи	97	87	67	157	139	132	165	141			
План (X)	0	0	13	3	5	4	0	6	31		
Відходів	0	0	871	471	695	528	0	846	3411	ЦФ	

Порівняння варіантів ЦФ: Вар. 1 (min Відходи), Вар. 2 (min Матеріал)

З порівняльної таблиці видно, що показники «Листи» та «Витрати» є антагоністами (зворотна пропорція), тож ОПР в процесі прийняття рішень сам визначає, що йому важливіше – мінімізувати кількість матеріалу, не зважаючи на збільшені витрати, чи навпаки, визначаючи відповідну оптимізаційну модель:

	ЛП		ЦЛП	
	Вар. 1	Вар. 2	Вар. 1	Вар. 2
Листів	32,79	29,63	34	31
Відходів	3198,54	3299,38	3340	3411

## Задача 5.8. Про надійні перевезення

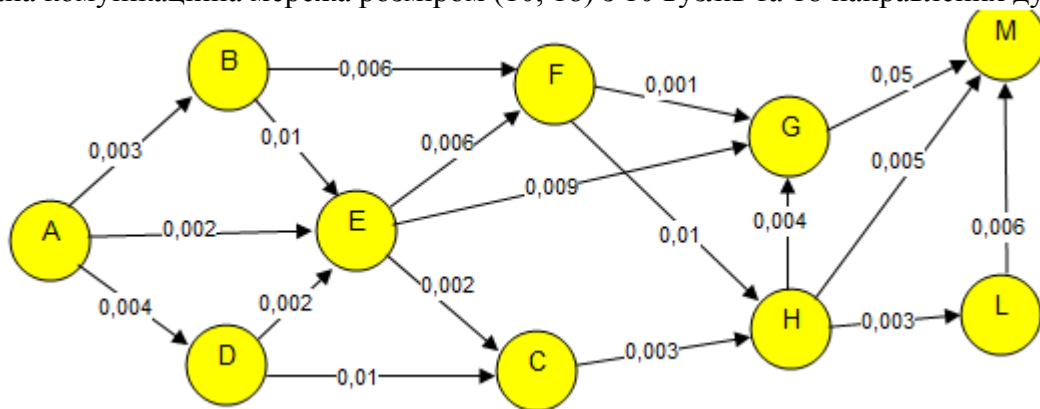
### Постановка задачі

Компанія спеціалізується на перевезенні небезпечних (паливо, хімічні речовини, рідкі та тверді відходи, вибухівка, зброя) чи негабаритних вантажів будь-якими транспортними комунікаціями (дорогами, водою чи повітрям). На відміну від звичайних підходів щодо пошуку шляхів для мінімізації транспортних витрат, її задачею є пошук надійних шляхів, де на усіх ділянках мережі оцінюється й враховується ймовірність виникнення інцидентів

(аварійних ситуацій), бо наслідки таких інцидентів мають серйозну економічну, екологічну, соціальну й навіть політичну вагу.

Приклад.

Задана комунікаційна мережа розміром (10, 18) з 10 вузлів та 18 направлених дуг



де число  $p_{ij}$  на кожній дузі  $(i, j)$  визначає потенційну ймовірність виникнення аварійної ситуації,  $i, j \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, L, M\}$ . Відповідно, число  $(1 - p_{ij})$  визначає ймовірність того, що така ситуація не станеться на ділянці  $(i, j)$ . Ставиться задача – знайти шлях  $S$  від  $A$  до  $M$  за двома критеріями: на максимум та мінімум цільової функції, щоб оцінити діапазон надійності мережі й відповідні економічні наслідки з-за можливого інциденту.

**Задача оптимізації**

I. Знайти вектор  $X = \{x_{ij}\}$ , такий, щоб

II. ЦФ  $B = \prod_{i,j} (1 - p_{ij}) \rightarrow \max$  (або  $\min$ )

III. за обмежень:

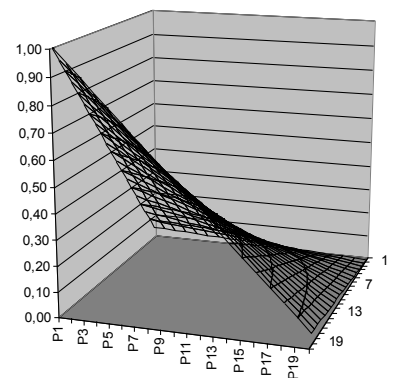
$F_{\text{вих}}(A) = -1$

$F_{\text{вих}}(M) = 1$

$F_{\text{вих}}(i) - F_{\text{вих}}(j) = 0, i \neq A, M$

усі  $x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо дуга } (i, j) \in S \\ 0, \text{ інакше} \end{cases}$

Умова балансу вхідних та вихідних потоків для вузла

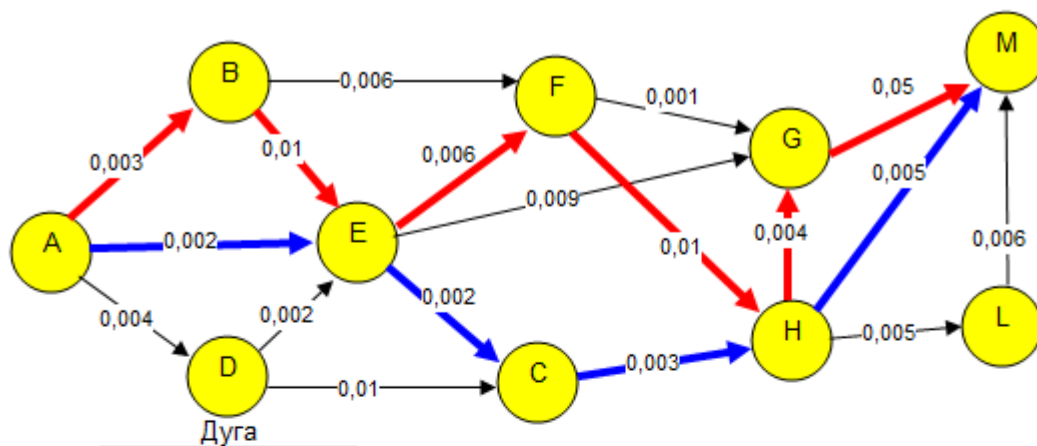


Це – модель нелінійного програмування з шуканими невідомими булевого типу, де цільова функція нелінійна, на рисунку – її графік. Для пошуку оптимуму рекомендується відшукувати результат з різними початковими умовами (значеннями плану  $X$ ) із врахуванням властивостей градієнтного методу оптимізації нелінійних задач.

**Результат та його аналіз**

Знайдено шляхи за двома критеріями: на максимум **(0,988)** та мінімум **(0,919)** ЦФ.

Здається, що різниця між ними незначна, але економічна оцінка втрат зовсім інша: приблизно 12 та 81 при номінальній вартості поновлювальних робіт після інциденту 1000 гр. од.



Дуга

План (X)	Початок	Кінець	Йм. авар.	Йм. безав.	
0	A	B	0,003	1,000	1
1	A	E	0,002	<b>0,998</b>	2
0	A	D	0,004	1,000	3
0	D	E	0,002	1,000	4
0	D	C	0,01	1,000	5
0	B	F	0,006	1,000	6
0	B	E	0,01	1,000	7
0	E	F	0,006	<b>1,000</b>	8
0	E	G	0,009	1,000	9
1	E	C	0,002	0,998	10
0	F	G	0,001	<b>1,000</b>	11
0	F	H	0,01	1,000	12
1	C	H	0,003	0,997	13
0	H	G	0,004	1,000	14
0	H	L	0,003	1,000	15
1	H	M	0,005	0,995	16
0	G	M	0,05	<b>1,000</b>	17
0	L	M	0,006	1,000	18
			<b>0,988</b>		

Вузол	Вх-Вих	ПЧ	
A	-1	-1	1
B	0		2
D	0		3
E	0		4
F	0		5
C	0		6
G	0		7
H	0		8
L	0		9
M	1	1	10

ЦФ

### Модифікації

Реальна ситуація змушує у цій «ідеальній» моделі врахувати певні зовнішні умови, відповідно, отримують «реальні» моделі, які застосовують для прийняття відповідальних рішень.

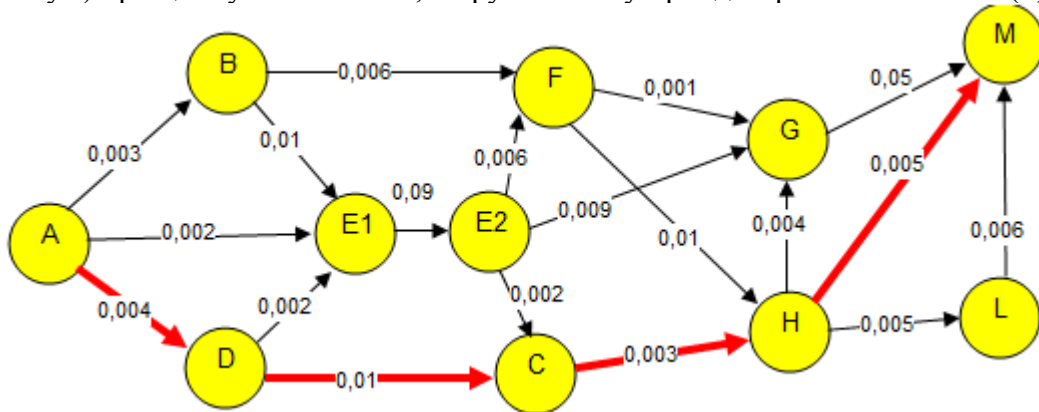
А саме, треба:

- 1) Врахувати надійність вузлів (напружений рух транзитним населеним пунктом), для цього певні «проблемні» вузли представити двома простими вузлами й зваженою дугою вузла.
- 2) В мережі використати ненаправлені дуги для пошуку раціональних напрямків руху, для цього ненаправлену дугу представити парою направлених назустріч дугами з відповідними ваговими коефіцієнтами.
- 3) Додати обмеження для заборони певних «добрих» (що проходять через населені пункти, зони відпочинку, переїзди залізничних колій чи водойми, канали) чи вимушеного включення «поганих» (гірська місцевість, відкрите море) ділянок. Для цього відповідні шукані змінні замінити «0» чи «1».

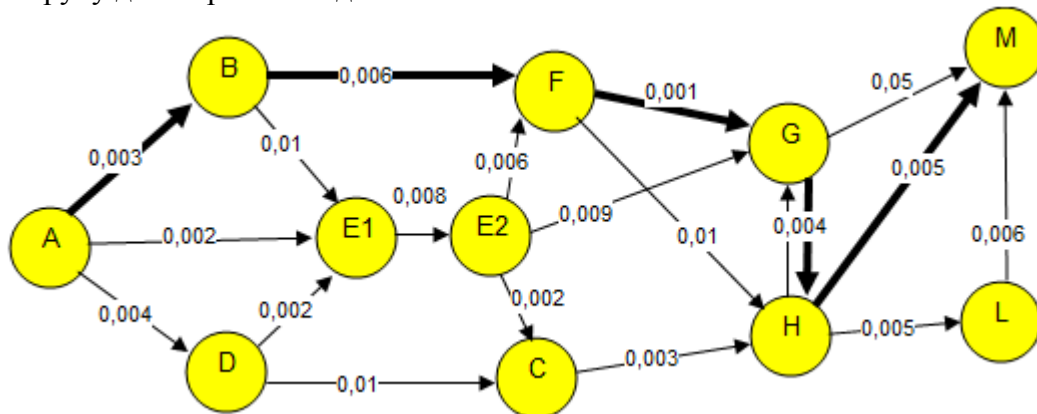
### Результати модифікації:

1) «Проблемний» вузол E (це, наприклад, крупне місто із насиченими потоками транспортних засобів та пішоходів) «розрізано» на прості вузли: вхід (E1) та вихід (E2) й представлений дугою (E1, E2) з досить високою ймовірністю інциденту  $p_{E1,E2} = 0,09$ . Розмір нової

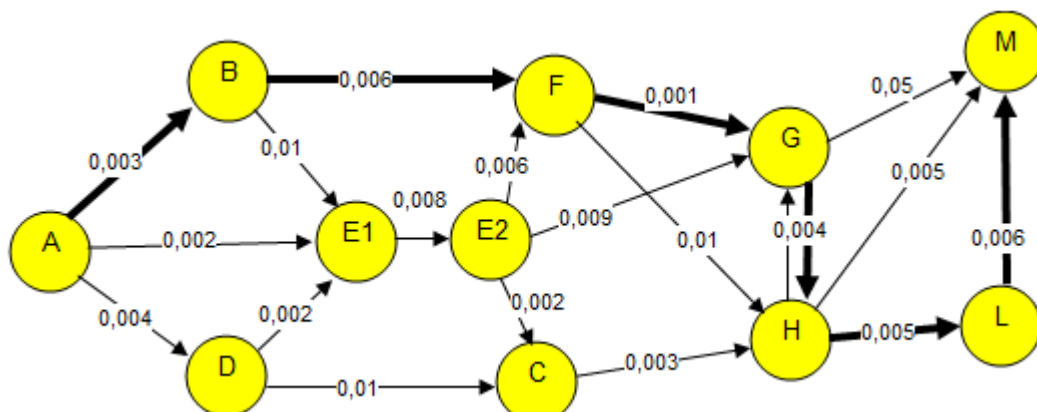
задачі (19, 11). Тепер шуканий оптимальний шлях пройшов поза вузол E, ясно, що ЦФ (на максимум) при цьому зменшиться, бо рух вантажу пройде гіршими шляхами (**0,978**):



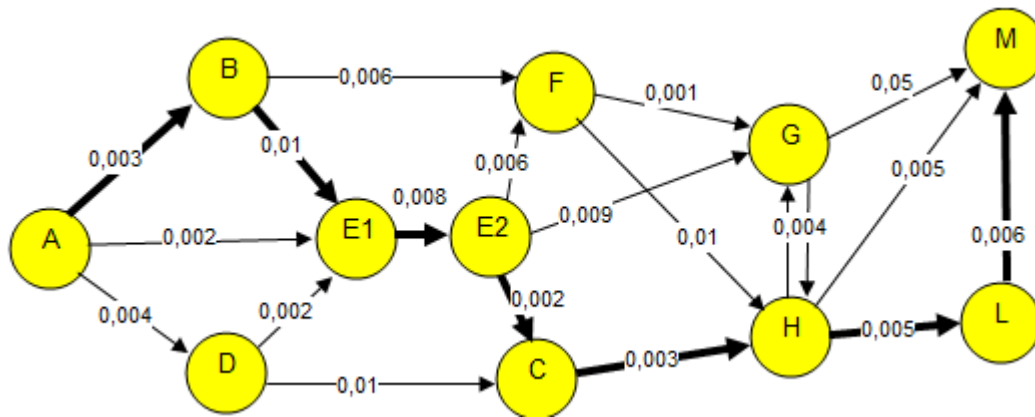
2) На ділянці між вузлами G та H відкрито рух в обох напрямках, тепер вона представлена двома направленими дугами: (G,H) та (H,G) з однаковим ваговим коефіцієнтом 0,004 (вони можуть бути різними), в задачі треба додатково визначити напрямок руху цією ділянкою, результат: завдяки руху у двох напрямках значення ЦФ покращилось (**0,981**), напрямком руху двосторонньою ділянкою G →H:



3) Ставиться умова заборонити рух «вигідною» ділянкою H→M, результат: значення ЦФ погіршилось (**0,975**), рух між пунктами G та M йде за ланцюгом G→H→L→M:



Додаткова умова – транспорт обов’язково має пройти «поганою» ділянкою (C, H), результат: значення ЦФ суттєво погіршилось (**0,884**), змінено маршрут між пунктами B та M, це ланцюг B→E1→E2→C→H→L→M:

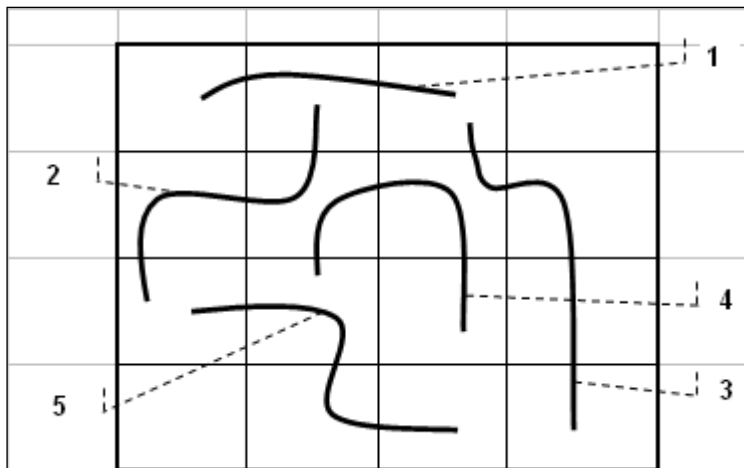


**Висновок:** розроблена оптимізаційна модель з невідомими (0,1)-типу дозволяє розв'язувати нелінійні потокові задачі із можливістю модифікувати модель введенням відповідних обмежень.

### Задача 5.9. Про водопровідника

#### Постановка задачі

На площі, вкритій важкими залізобетонними плитами прямокутної форми й асфальтом, під землею прокладені 5 різних трубопроводів, план прокладки труб показано на рисунку. Водопровідник отримав завдання встановити на кожній трубі по одному вентилю (у будь-якому місці труби в межах площі), щоб мати можливість дистанційно перекривати їх у



будь-який момент. Найбільш трудомісткою й тривалою операцією у цій роботі є підняття плити, щоб дістатися до труб, й наступне повновлення покриття, тому ставиться задача мінімізації кількості плит, які треба підняти, щоб оперативно виконати завдання.

Найбільш просто, не оптимально, це завдання можна виконати простим перебором, піднявши плиту над кожною трубою, всього їх 5. Якщо ж встановлюється вентилів

більше, ніж по одному, задача суттєво ускладнюється.

Зараз наша задача – знайти якнайменшу кількість плит й номери тих, які треба підняти.

#### Математична модель

Основним об'єктом, який визначається шуканою невідомою й відповідною моделлю, є плита, яка має лише два стани: піднята/не піднята, звідси й булів тип цієї невідомої. Вигляд математичної моделі та її таблична реалізація залежать від форми опису сукупності плит, таких форм дві: матрична і векторна. За матричною формою треба знайти компакту матрицю розміром  $4 \times 4$ , за векторною – «довгий» вектор з 16 елементів.

На користь матриці свідчить регулярна (таблична) форма площі та й табличний документ буде мати кращий вигляд, тож приймаємо рішення щодо використання в моделі компактної матричної форми, суттєво наближеної за формою до зовнішнього вигляду прямокутної площі з плитами.

## Математична модель

### Позначення

$X = \{x_{ij}\}$  – матриця розміром  $4 \times 4$  буліва типу,  $i = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, 4$ , де:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо плита піднята} \\ 0, & \text{якщо ні} \end{cases}$$

$Z$  – загальна кількість піднятих плит,

$k$  – поточний номер труби ( $k = 1, \dots, 5$ )

$T = \{t_k\}$  – множина труб, накритих плитами:

$$t_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}\}$$

$$t_2 = \{x_{31}, x_{21}, x_{22}, x_{12}\}$$

$$t_3 = \{x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{44}\}$$

$$t_4 = \{x_{32}, x_{22}, x_{23}, x_{33}\}$$

$$t_5 = \{x_{31}, x_{32}, x_{42}, x_{43}\}$$

$V = \{v_k\}$  – кількість вентилів на  $k$ -ій трубi (в завданні усі  $v_k = 1$ ).

### Задача оптимізації

I. Знайти матрицю  $X = \{x_{ij}\}$ , таку, щоб

II.  $Z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 x_{ij} \rightarrow \min (\text{ЦФ})$

III. за обмежень:

$$\sum_{t_k} x_{ij} = v_k \quad (\text{на кожній трубi } v_k \text{ вентилів), де: ліва частина обмеження (ЛЧ) є сумою}$$

елементів матриці (дискретних ділянок труб під плитами, які є потенційними місцями для встановлення вентилів), що належать  $k$ -ій трубi, а права частина (ПЧ) – задана кількість вентилів на цій трубi;

та граничних умов: усі  $x_{ij} \geq 0$ ,  $x_{ij} \in \{0, 1\}$  (буліва типу).

### Таблична модель

#### Початкові дані і формули

	ЛЧ	ПЧ	ЦФ=		ЛЧ	ПЧ
Труба 1	1	1	3	Труба 1	=H3+I3+J3	1
Труба 2	1	1		Труба 2	=H5+H4+I4+I3	1
Труба 3	1	1		Труба 3	=J3+K4+K5+K6+J4	1
Труба 4	1	1		Труба 4	=I5+I4+J4+J5	1
Труба 5	1	1		Труба 5	=H5+I5+I6+J6	1
		Вентилів				Вентилів

#### Результат і ілюстрація:

	1	2	3	4				
1	0	1	0	0				
2	0	0	1	0				
3	0	0	0	0				
4	0	1	0	0				

### Аналіз результату

Для встановлення по одному вентилю на кожну трубу треба підняти 3 із 16 плит. (У цьому прикладі є й інші варіанти підйому 3-ох плит). Модель дозволяє вносити зміни в умови задачі. Якщо необхідно встановити більше, ніж по одному вентилю на трубу, достатньо вказати цю кількість у колонці ПЧ (правої частини обмеження) і отримати результат.

Завдання 2. Встановити 11 вентилів згідно завдання (стовпець ПЧ):

	ЛЧ	ПЧ	ЦФ=
Труба 1	3	3	7
Труба 2	2	2	
Труба 3	3	3	
Труба 4	1	1	
Труба 5	2	2	
	Вентилів		

### Результат

Треба підняти 7 з 16 плит:

	1	2	3	4				
1	1	1	1	0				
2	0	0	0	1				
3	1	1	0	0				
4	0	0	0	1				

### Задача 5.10. Про оптимальний розклад

#### Постановка задачі

Розклади стосуються людей чи машин, стан яких на певному етапі визначається двома значеннями – людина у певний день на роботу: вийшла/не вийшла, машина на певній стадії працює/не працює тощо. Відповідно, розклад має вигляд комбінації булевих величин типу багаторозрядного двійкового числа: 011101101110001.



### Приклад.

Протягом тижня (7 днів) 10 працівниць виконують покладені на них функції, на кожен день відомі потреби (попит, замовлення) на їх чисельність. Треба визначити розклад виходу на роботу, щоб задовольнити ці потреби із загальною мінімальною кількістю чол./днів.

### Математична модель

#### Позначення

$i$  – номер працівника,

$j$  – номер дня тижня,

$x_{ij}$  – ознака того, працює (1) чи ні (0)  $i$ -ий працівник в  $j$ -ий день тижня,

$p_j$  – попит в  $j$ -ий день.

#### Задача оптимізації

I. Знайти матрицю  $X(10 \times 7)$ , таку, щоб

II. загальна кількість чол./днів (ЦФ)  $\sum_{i,j} x_{ij} \rightarrow \min, i=1, \dots, 10; j=1, \dots, 7$

III. за обмежень:  $\sum_{i=1}^{10} x_{ij} = p_j$ , тобто, загальна кількість працівників у кожний  $j$ -ий робочий день дорівнює попиту  $p_j$

і граничних умов: всі невідомі – буліва типу.

### Таблична модель

#### Результат

	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	Оптимальний розклад									
	Нд	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб			Днів
Лариса	0	1	1	1	1	1	1			6
Надя	0	1	1	1	1	1	1			6
Галя	0	1	1	1	1	1	1			6
Аня С.	1	1	1	1	0	0	1			5
Аня В.	1	0	1	1	1	0	1			5
Ліда	0	1	1	1	0	1	1			5
Олена	1	0	1	1	1	1	1			6
Оксана	1	0	0	1	1	1	1			5
Віта	0	1	0	1	1	1	1			5
Жанна	0	0	0	0	1	0	1			2
<b>Всього:</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>10</b>			<b>51</b>
<b>Треба:</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>10</b>			

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку:

Равной:  максимальному значению  минимальному значению

Изменяя ячейки:

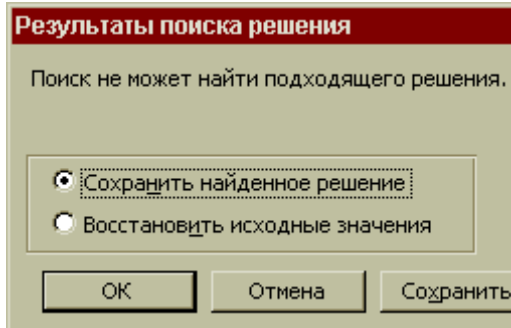
Ограничения:

#### Аналіз результату

Для задоволення попиту треба 51 год./чол., графік зайнятості явно нерівномірний.

#### Модифікація моделі

**Умова 1:** знайти оптимальний розклад для 5-денного робочого тижня для кожного (додаткове строге обмеження  $\sum_j x_{ij} = 5$ ):



	Оптимальний розклад							Днів
	Нд	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	
Лариса	0	1	1	0	1	1	1	5
Надя	0	0	1	1	1	1	1	5
Галя	0	1	1	1	1	0	1	5
Аня С.	1	1	1	1	0	0	1	5
Аня В.	1	0	1	1	1	0	1	5
Ліда	0	1	1	1	0	1	1	5
Олена	1	0	1	1	1	1	0	5
Оксана	1	0	0	1	1	1	1	5
Віта	0	1	0	1	1	1	1	5
Жанна	0	1	0	1	1	1	1	5
<b>Всього:</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>50</b>
<b>Треба:</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	

### Аналіз результату

Не вдалося здійснити цей варіант, мало людей, щоб мати два вихідних дня кожному працівнику. Вихід – або наймати нових людей або хтось буде мати один вихідний день.

**Умова 2:** послабити строге 5-денне обмеження  $\sum_j x_{ij} = 5$  на нестроге  $\sum_j x_{ij} \geq 5$ , щоб ко-

мусь довелося працювати 6 днів на тиж-  
день).

Результат (це буде Оксана):

Отже, кожен з планів – це певна комбінація змінних буліва типу.

	Оптимальний розклад							Днів
	Нд	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	
Лариса	0	1	1	0	1	1	1	5
Надя	0	1	0	1	1	1	1	5
Галя	0	1	1	1	1	0	1	5
Аня С.	1	1	1	1	0	0	1	5
Аня В.	1	0	1	1	1	0	1	5
Ліда	1	0	1	1	0	1	1	5
Олена	0	0	1	1	1	1	1	5
Оксана	0	1	1	1	1	1	1	<b>6</b>
Віта	0	1	0	1	1	1	1	5
Жанна	1	0	0	1	1	1	1	5
<b>Всього:</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	<b>51</b>
<b>Треба:</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	

### Задача 5.11. Транспортна задача з фіксованими доплатами

Це – задача оптимізації, де змінні буліва типу виконують допоміжну «сигнальну» роль, фіксуючи виконання певних логічних умов.

Розглядається транспортна задача з *фіксованими доплатами* – таку назву отримала модель, до якої зводиться багато практичних задач. Їх особливість – врахування фіксованих (одиничних) витрат незалежно від результатів прямого призначення (виготовлення продукції, перевезення, придбання, зберігання), що неможливо зробити в лінійному програмуванні.

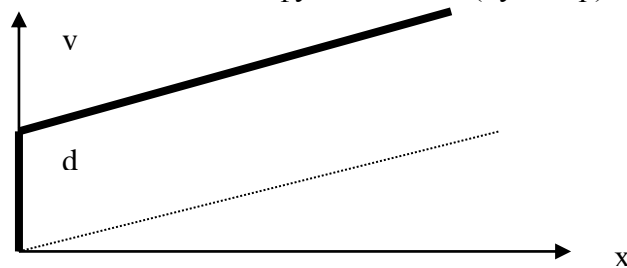
На прикладі досить зрозумілої задачі про перевезення – це врахування витрат, з якими пов'язана уся підготовча робота перед рейсом: заправка паливом, оформлення документації, контроль обладнання щодо дотримання норм безпеки, розігрів двигуна тощо. Або, скажімо, при в'їзді на оплачувану ділянку швидкісної траси на контрольному пункті треба внести певну разову оплату і не має значення довжина маршруту чи величина вантажу, з яким машина в'їжджає на цю ділянку.

Основна відмінність від моделі класичної транспортної задачі: за експлуатацію ділянки ( $i, j$ ) встановлюється додаткова фіксована доплата  $d_{ij}$  (незалежно від відстані і об'єму вантажу), лише якщо по ній здійснюється перевезення ( $x_{ij} > 0$ ), в принципі, хоч  $x_{ij} = 1$  грам. Відповідно, вводиться додаткова змінна буліва типу (ми казали – її називають сигнальною, альтернативною чи індикатором), що фіксує цей факт.

Відповідно, реалізується умова «якщо-то», тобто, якщо здійснюється перевезення, то стягується доплата:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x_{ij} = 0 \\ 1, & \text{якщо } x_{ij} > 0 \end{cases} \text{ і тоді ЦФ має вигляд: } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} x_{ij} + d_{ij} y_{ij}) \rightarrow \min$$

ЦФ такого типу називається неоднорідною і розривною, точка розриву утворена між вертикальною й похилою лініями. Фактично, з-за логічної функції «ЯКЩО» (рос. ЕСЛИ, англ. IF) маємо суто нелінійну модель, де функція витрат на перевезення  $v = cx + d$  (жирна ламана лінія) відрізняється від лінійної функції  $v = cx$  (пунктир) і має вигляд:



#### Алгоритм Балінського<sup>46</sup>

Покажемо, що введенням альтернативної змінної  $y_{ij}$  буліва типу ми відмовляємось від логічної функції «ЯКЩО» й маємо клас моделей частково-цілочислового лінійного програмування (ЧЦЛП), де застосовуються симплекс-метод й метод «гілок і границь» разом, це суттєво прискорює пошук оптимуму й дозволяє отримати двоїсті оцінки плану, комбінуючи моделі ЛП та ЦЛП.

Для транспортної задачі з фіксованими доплатами (або неоднорідної транспортної задачі) Балінським запропонований оригінальний підхід зведення цієї нелінійної задачі до задачі ЧЦЛП. Ясно, що якщо доплата  $d_{ij} = 0$ , маємо класичну транспортну задачу ЛП, якщо ж  $d_{ij} > 0$ , тоді кожний доданок ЦФ є розривною й явно нелінійною функцією з відповідними труднощами пошуку глобального оптимуму.

Уведенням додаткових цілочислових змінних вдалося перевести цю задачу в клас ЧЦЛП, для цього після введення початкових даних (матриця відстаней  $C$ , стовпець запасів  $Z$  і рядок попиту  $P$ ) знайдемо матрицю  $G$  з елементами  $g_{ij} = \min(z_i, p_j)$ . Тепер треба знайти змінні  $y_{ij}$  буліва типу, щоб задовольнити додаткове обмеження:  $x_{ij} \leq g_{ij} y_{ij}$ .

Пояснення: обмеження відповідає вище визначеному зв'язку між  $x_{ij}$  та  $y_{ij}$  ( $x_{ij} \leq g_{ij} y_{ij}$ ):

- якщо  $y_{ij} = 0$ , тоді  $x_{ij} = \min(z_i, p_j) \times 0 = 0$ ;
- якщо  $y_{ij} = 1$  тоді  $x_{ij} = \min(z_i, p_j) \times 1 = \min(z_i, p_j)$ .

Пошук мінімуму з двох величин – запасу і попиту – у будь-якій клітинці матриці перевезень  $X$  є принципом розв'язання транспортної задачі. Таким чином, умова означає, що змінна  $x_{ij}$  приймає два можливих значення:

- $0$ , якщо клітинка вільна ( $x_{ij} < \min(z_i, p_j)$ ),
- $\min(z_i, p_j)$ , якщо клітинка зайнята меншим з двох чисел:  $x_{ij} = \min(z_i, p_j)$ .

<sup>46</sup> Balinski M. L. Fixed-cost transportation problems. Naval Res. Log. Quart., 1961, 8, №1;  
Balinski M. L. Integer programming: methods, uses, computation, Manag. Sci., 1965, 12, №3

Додамо, що можливість зведення задачі з розривною ЦФ до частково цілочисельної задачі базується на наявності верхніх границь для невідомих  $x_{ij}$  – цей прийом взагалі характерний для цілочислового програмування. В транспортній задачі ці границі визначаються явно:  $x_{ij} = \min(z_i, p_j)$ , у загальній задачі їх треба визначати явно.

### Задача оптимізації

I. Знайти план  $X(5 \times 6)$  і матрицю додаткових змінних  $Y(5 \times 6)$ , де елемент  $x_{ij}$  – об'єм перевезень від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача, елемент  $y_{ij} \in \{0, 1\}$ , такі, щоб

II. загальні витрати (ЦФ)  $V = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} x_{ij} + d_{ij} y_{ij}) \rightarrow \min$ , де:

$c_{ij}$  – питомі витрати на транспортування  $(i-j)$ -ою ділянкою,

$d_{ij}$  – фіксована доплата за користування  $(i-j)$ -ою ділянкою,

$y_{ij}$  – ознака-індикатор перевезення  $(i-j)$ -ою ділянкою,

III. за обмежень:

$$\text{а) } \sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq z_i, \text{ вивезено } \leq \text{запаси}$$

$$\text{б) } \sum_{i=1}^3 x_{ij} = p_j, \text{ ввезено } = \text{попит}$$

$$\text{в) } x_{ij} \leq \min(z_i, p_j) \times y_{ij},$$

та граничних умов: всі  $x_{ij} \geq 0$ .

### Таблична модель

#### Початкові дані

- матриця питомих витрат ( $C$ )
- матриця доплат ( $D$ )
- вектор запасів постачальників ( $Z$ )
- вектор потреб споживачів ( $P$ ).

Після введення початкових даних формуємо матрицю  $G$ , елементи якої – мінімальні значення запасу і попиту (відповідна формула має змішану адресацію).

Рекомендується складовим табличної моделі надати змістовні імена.

#### Підготовка даних

С	Спож 1	Спож 2	Спож 3	Спож 4	Спож 5	Спож 6	Запас ( $Z$ )
Пост 1	3	5	7	9	11	13	23,2
Пост 2	6	4	2	3	7	5	9,9
Пост 3	5	7	9	11	13	4	88,0
Пост 4	4	12	4	7	11	9	90,8
Пост 5	2	6	10	14	5	6	34,0
Попит ( $P$ )	10,4	20,5	45,6	38,3	15,0	50,0	

D	Спож 1	Спож 2	Спож 3	Спож 4	Спож 5	Спож 6
Пост 1	0,9	1,5	5,2	2,3	0,4	3,3
Пост 2	1,1	1,8	4,6	2,9	0,9	3,8
Пост 3	1,3	2,1	4,0	3,5	1,4	4,3
Пост 4	1,5	2,4	3,4	4,1	1,9	4,8
Пост 5	1,7	2,7	2,8	4,7	2,4	5,3
<b>G min(P;Z)</b>						
	Спож 1	Спож 2	Спож 3	Спож 4	Спож 5	Спож 6
Пост 1	10,4	20,5	23,2	23,2	15,0	23,2
Пост 2	9,9	9,9	9,9	9,9	9,9	9,9
Пост 3	10,4	20,5	45,6	38,3	15,0	50,0
Пост 4	10,4	20,5	45,6	38,3	15,0	50,0
Пост 5	10,4	20,5	34,0	34,0	15,0	34,0

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку:

Равной:  максимальному значению  значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

### Результат (лінійна модель)

План перевезень									
X	Спож 1	Спож 2	Спож 3	Спож 4	Спож 5	Спож 6	Вивезено	Залишок	Т-ціна
Пост 1	0	20,5	0	0	0	0	20,5	2,7	0
Пост 2	0	0	0	9,9	0	0	9,9	0,0	-3,81
Пост 3	0	0	0	0	0	50	50,0	38,0	0
Пост 4	0	0	45,6	28,4	0	0	74,0	16,8	0
Пост 5	10,4	0	0	0	15	0	25,4	8,6	0
Ввезено	10,4	20,5	45,6	38,3	15	50			
Т-ціна	2,2	5,1	6,3	7,1	5,2	6,2			
Y	Спож 1	Спож 2	Спож 3	Спож 4	Спож 5	Спож 6			
Пост 1	0	1	0	0	0	0			
Пост 2	0	0	0	1	0	0			
Пост 3	0	0	0	0	0	1			
Пост 4	0	0	1	0,7	0	0			
Пост 5	1	0	0	0	1	0			

### Аналіз рішення

Доплата							
DY	Спож 1	Спож 2	Спож 3	Спож 4	Спож 5	Спож 6	DY
Пост 1	0	1,5	0	0	0	0	19,24
Пост 2	0	0	0	2,9	0	0	
Пост 3	0	0	0	0	0	4,3	
Пост 4	0	0	3,4	3,0	0	0	
Пост 5	1,7	0	0	0	2,4	0	

Оплата перевезень							
СХ	Спож 1	Спож 2	Спож 3	Спож 4	Спож 5	Спож 6	СХ
Пост 1	0	102,5	0	0	0	0	809,2
Пост 2	0	0	0	29,7	0	0	
Пост 3	0	0	0	0	0	200	
Пост 4	0	0	182,4	198,8	0	0	
Пост 5	20,8	0	0	0	75	0	
СХ+DY	Спож 1	Спож 2	Спож 3	Спож 4	Спож 5	Спож 6	ЦФ=СХ+DY
Пост 1	0	104	0	0	0	0	828,44
Пост 2	0	0	0	32,6	0	0	
Пост 3	0	0	0	0	0	204,3	
Пост 4	0	0	185,8	201,8	0	0	
Пост 5	22,5	0	0	0	77,4	0	

### Пряма задача

Отримано план перевезень  $X$  і матрицю  $Y$  коефіцієнтів доплат ( $0 \leq u_{ij} \leq 1$ ) дійсного типу (оскільки праві частини обмежень ТЗ дійсні числа), щоб мати змогу отримати відповідні двоїсті оцінки. Витрати на транспортування для забезпечення попиту складаються з витрат під час перевезень (залежать від відстаней)  $СХ$  й фіксованих витрат на підготовку до руху  $DY$ :  $809,20 + 19,24 = 828,44$ .

### Двоїста задача

*Тиньові ціни* запасів (від'ємні числа) вказують на можливість зменшення транспортних витрат за рахунок поповнення запасів дефіцитних постачальників, таких виявився один (з оцінкою -3,81).

*Нормовані вартості* споживачів (додатні числа) вказують на вплив попиту на значення ЦФ.

Додатково (показано фрагмент) отримано оцінки відстаней транспортної мережі (додатні числа), які вказують на величину зменшення «нульових» відстаней, щоб бути їм завантаженими:

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$25	Пост 1 Спож 1	0,0	0,8	3	1E+30	0,84
\$C\$25	Пост 1 Спож 2	20,5	0,0	5	1,06	6,41E+14
\$D\$25	Пост 1 Спож 3	0,0	0,9	7	1E+30	0,95
\$E\$25	Пост 1 Спож 4	0,0	2,0	9	1E+30	1,99
\$F\$25	Пост 1 Спож 5	0,0	5,9	11	1E+30	5,87
\$G\$25	Пост 1 Спож 6	0,0	6,8	13	1E+30	6,84
\$B\$26	Пост 2 Спож 1	0,0	7,7	6	1E+30	7,65
\$C\$26	Пост 2 Спож 2	0,0	2,9	4	1E+30	2,92
\$D\$26	Пост 2 Спож 3	0,0	0,0	2	0,95	2,20
\$E\$26	Пост 2 Спож 4	9,9	0,0	3	2,20	0,95
\$F\$26	Пост 2 Спож 5	0,0	5,7	7	1E+30	5,75
\$G\$26	Пост 2 Спож 6	0,0	3,0	5	1E+30	3,04
\$B\$27	Пост 3 Спож 1	0,0	2,8	5	1E+30	2,84
\$C\$27	Пост 3 Спож 2	0,0	1,9	7	1E+30	1,93
\$D\$27	Пост 3 Спож 3	0,0	2,8	9	1E+30	2,81
\$E\$27	Пост 3 Спож 4	0,0	3,9	11	1E+30	3,89
\$F\$27	Пост 3 Спож 5	0,0	7,8	13	1E+30	7,84

### **Результат (цілочислова модель)**

Змінюємо умову для елементів матриці  $Y$

**Изменение ограничения**

Ссылка на ячейку:  Ограничение:

і отримуємо такий результат (лише пряма задача):

План перевезень								
X	Спож 1	Спож 2	Спож 3	Спож 4	Спож 5	Спож 6	Вивезено	Залишок
Пост 1	0	20,5	0	0	0	0	20,5	2,7
Пост 2	0	0	0	9,9	0	0	9,9	0,0
Пост 3	0	0	0	0	0	50	50,0	38,0
Пост 4	0	0	45,6	28,4	0	0	74,0	16,8
Пост 5	10,4	0	0	0	15	0	25,4	8,6
Ввезено	10,4	20,5	45,6	38,3	15	50		
Т-ціна	2,2	5,1	6,3	7,1	5,2	6,2		
Y	Спож 1	Спож 2	Спож 3	Спож 4	Спож 5	Спож 6		
Пост 1	0	1	0	0	0	0		
Пост 2	0	0	0	1	0	0		
Пост 3	0	0	0	0	0	1		
Пост 4	0	0	1	1	0	0		
Пост 5	1	0	0	0	1	0		

Доплата							
DY	Спож 1	Спож 2	Спож 3	Спож 4	Спож 5	Спож 6	DY
Пост 1	0	1,5	0	0	0	0	20,30
Пост 2	0	0	0	2,9	0	0	
Пост 3	0	0	0	0	0	4,3	
Пост 4	0	0	3,4	4,1	0	0	
Пост 5	1,7	0	0	0	2,4	0	
Оплата перевезень							
CX	Спож 1	Спож 2	Спож 3	Спож 4	Спож 5	Спож 6	CX
Пост 1	0	102,5	0	0	0	0	809,20
Пост 2	0	0	0	29,7	0	0	
Пост 3	0	0	0	0	0	200	
Пост 4	0	0	182,4	198,8	0	0	
Пост 5	20,8	0	0	0	75	0	
CX+DY	Спож 1	Спож 2	Спож 3	Спож 4	Спож 5	Спож 6	ЦФ=CX+DY
Пост 1	0	104	0	0	0	0	829,50
Пост 2	0	0	0	32,6	0	0	
Пост 3	0	0	0	0	0	204,3	
Пост 4	0	0	185,8	202,9	0	0	
Пост 5	22,5	0	0	0	77,4	0	

Зміни торкнулися лише доплат, які збільшилися на 1,06 за рахунок заміни змінної  $u_{44} = 0,7$  на 1.

## Задача 5.12. Оцінювання ефективності прийнятих інвестиційних рішень

### Постановка задачі

Адміністрація регіону організувала тендер для реалізації крупного замовлення протягом визначеного терміну (горизонту планування). У тендері погодилися прийняти участь кілька інвестиційних компаній, кожна з власним проектом та вимогами щодо ресурсного забезпечення протягом усього періоду планування й очікуваною прибутковістю (NVP, net present value, чиста приведена вартість). Треба оцінити, визначити й підтримати один чи кілька кращих проектів із врахуванням місцевих ресурсних обмежень (обладнання, кошти, персонал, земельна ділянка) на його реалізацію, щоб максимізувати сукупну прибутковість.

### Приклад

Представник адміністрації для здійснення замовлення протягом 5 років серед 10 запропонованих проектів вибрав 6 для подальшого детального аналізу й оптимального вибору за умов обмеженого фінансування за визначеним планом бюджетування по роках: 250, 75, 50, 50, 50 (гр. од.).

Початкові дані:

Проект	Оч. доходн.	Вимоги щодо коштів				
		Рік 1	Рік 2	Рік 3	Рік 4	Рік 5
П-1	141	75	25	20	15	10
П-2	187	90	35	0	0	30
П-3	121	60	15	15	15	15
П-4	83	30	20	10	5	5
П-5	265	100	25	20	20	20
П-6	127	50	20	10	30	40
	Бюджет	250	75	50	50	50
	Треба	405	140	75	85	120

Видно, що наявний бюджет не дозволяє вибрати усі запропоновані проекти, виникає задача оптимального вибору кращих проектів.

### Позначення:

$x_i$  – шукана невідома,  $i = 1, \dots, 6$ ,  $x_i = 1$ , якщо  $i$ -ий проект вибрано,  $x_i = 0$ , якщо ні

$v_{ij}$  – вимоги  $i$ -го проекту у  $j$ -ий рік планування

$b_j$  – бюджет у  $j$ -ий рік планування

$D$  – сукупний дохід.

### Задача оптимізації

I. Знайти план інвестування  $X = \{x_i\}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , такий, щоб

II. ЦФ  $D = 141x_1 + 187x_2 + 121x_3 + 83x_4 + 265x_5 + 127x_6 \rightarrow \max$

III. за обмежень:

$$\sum_{i=1}^6 v_{ij}x_i \leq b_j \text{ для } j = 1, \dots, 5$$

$$\text{усі } x_i \geq 0, x_i \in \{0, 1\}.$$

Це – модель цілочислового (точніше, булевого) програмування, яку реалізують методом «гілок і границь». Пропонується задачу розв'язати у два етапи:

- «неперервний» варіант, симплекс-методом знайти розв'язок задачі лінійного програмування (ЛП), щоб хоча б орієнтовно оцінити початкові дані (доходність проектів і щорічні бюджети) за допомогою результатів двоїстої задачі ЛП
- дискретний варіант, методом «гілок і границь» знайти розв'язок задачі ЦЛП з булевими змінними.



## Результат

### Неперервний варіант

Якщо б шукані змінні (кількість проектів кожного типу) мали дійсний тип, треба було б вибрати 2,5 одиниць проекту 5 й отримати «ідеальну» доходність у 662,5 гр. од.

Їх негативна «цінність» у вигляді двоїстих оцінок доходності вказує, що 6-ий проект найгірший (вимагає ресурсів багато, а поверне порівняно мало), за ним 2-ий й 3-ий, 4-ий проект претендує бути вибраним, 1-ий проект – кращий серед «поганих».

Двоїсті оцінки бюджетних коштів (т.зв. «тіньові ціни») вказують на їх позитивну «цінність», тобто, оцінки 3,35 для 3-го та 9,9 для 5-року вказують, коли треба б було мати більше коштів.

Проект	Оч. доходн.	Вимоги щодо коштів					План (X)	"Цінність"
		Рік 1	Рік 2	Рік 3	Рік 4	Рік 5		
П-1	141	75	25	20	15	10	0	-25
П-2	187	90	35	0	0	30	0	-110
П-3	121	60	15	15	15	15	0	-78
П-4	83	30	20	10	5	5	0	0
П-5	265	100	25	20	20	20	2,5	0
П-6	127	50	20	10	30	40	0	-303
	ПЧ (Бюджет)	250	75	50	50	50		
	ЛЧ	250	62,5	50	50	50	662,5	
	Залишок	0	13	0	0	0		
	Т-ціна	0	0	3,35	0	9,9		

### Дискретний варіант

Знайдено оптимальний план інвестування, за яким кращими виявилися проекти: 1, 4 та 5, загальна доходність склала 489. В план гарантовано увійшов 5-ий проект, а залишки ресурсів розподілили між собою 4-ий та 1-ий проекти. 3-за дискретного характеру невідомих щорічні залишки ресурсів:

Проект	Оч. доходн.	Вимоги щодо коштів					План (X)
		Рік 1	Рік 2	Рік 3	Рік 4	Рік 5	
П-1	141	75	25	20	15	10	1
П-2	187	90	35	0	0	30	0
П-3	121	60	15	15	15	15	0
П-4	83	30	20	10	5	5	1
П-5	265	100	25	20	20	20	1
П-6	127	50	20	10	30	40	0
	ПЧ (Бюджет)	250	75	50	50	50	
	ЛЧ	205	70	50	40	35	489
	Залишок	45	5	0	10	15	

Щорічні залишки бюджетних коштів можуть допомогти перерозподілити ресурси по роках. Наприклад, якщо бюджет 3-го року довести до 75 од., отримуємо такий план:

Проект	Оч. доходн.	Вимоги щодо коштів					План (X)
		Рік 1	Рік 2	Рік 3	Рік 4	Рік 5	
П-1	141	75	25	20	15	10	1
П-2	187	90	35	0	0	30	0
П-3	121	60	15	15	15	15	1
П-4	83	30	20	10	5	5	0
П-5	265	100	25	20	20	20	1
П-6	127	50	20	10	30	40	0
	ПЧ (Бюджет)	250	75	75	50	50	
	ЛЧ	235	65	55	50	45	527
	Залишок	15	10	20	0	5	

Запропонована «ідеальна» модель може бути вдосконалена шляхом врахування певних додаткових умов, а саме:

1. Крім коштів наявний бюджет й вимоги проектів доповнюються іншими ресурсами, наприклад, робочою силою, земельними ділянками, транспортними комунікаціями, приміщеннями тощо
2. Переможцями тендеру можуть бути обмежена кількість проектів чи їх композицій (не більше, ніж)
3. Між проектами може існувати логічна залежність.

### Розширені варіанти моделі

**Умова 1.** Крім коштів, задано бюджет і вимоги щодо площі земельних ділянок, що поступово вводяться в процес:

	Рік 1	Рік 2	Рік 3	Рік 4	Рік 5
	3	9	8	19	6
	12	19	9	23	8
	16	33	11	5	12
	9	14	23	7	8
	11	7	5	9	7
	78	6	13	10	7
ПЧ (Бюджет)	100	45	50	50	67
Треба	129	88	69	73	48

### Результат

Проект	Оч. доходн.	Вимоги щодо коштів						План (X)	Проект	Вимоги щодо земельних ділянок				
		Рік 1	Рік 2	Рік 3	Рік 4	Рік 5	Рік 1			Рік 2	Рік 3	Рік 4	Рік 5	
П-1	141	75	25	20	15	10	0	П-1	3	9	8	19	6	
П-2	187	90	35	0	0	30	1	П-2	12	19	9	23	8	
П-3	121	60	15	15	15	15	0	П-3	16	33	11	5	12	
П-4	83	30	20	10	5	5	0	П-4	9	14	23	7	8	
П-5	265	100	25	20	20	20	1	П-5	11	25	5	9	7	
П-6	127	50	20	10	30	40	0	П-6	78	6	13	10	7	
ПЧ (Бюджет)		250	75	50	50	50		ПЧ (Бюджет)	100	45	50	50	67	
ЛЧ		190	60	20	20	50	452	ЛЧ	23	44	14	32	15	
Залишок		60	15	30	30	0		Залишок	77	1	36	18	52	

Тендер виграли 1-ий та 5-ий проекти.

**Умова 2.** Тендерна комісія хоче вибрати одного переможця, цю умову можна реалізувати додаванням обмеження: сума усіх невідомих дорівнює 1, результат:

Проект	Оч. доходн.	Вимоги щодо коштів						План (X)	Проект	Вимоги щодо земельних ділянок				
		Рік 1	Рік 2	Рік 3	Рік 4	Рік 5	Рік 1			Рік 2	Рік 3	Рік 4	Рік 5	
П-1	141	75	25	20	15	10	0	П-1	3	9	8	19	6	
П-2	187	90	35	0	0	30	0	П-2	12	19	9	23	8	
П-3	121	60	15	15	15	15	0	П-3	16	33	11	5	12	
П-4	83	30	20	10	5	5	0	П-4	9	14	23	7	8	
П-5	265	100	25	20	20	20	1	П-5	11	25	5	9	7	
П-6	127	50	20	10	30	40	0	П-6	78	6	13	10	7	
ПЧ (Бюджет)		250	75	50	50	50		ПЧ (Бюджет)	100	45	50	50	67	
ЛЧ		100	25	20	20	20	265	ЛЧ	11	25	5	9	7	
Залишок		150	50	30	30	30	1	Залишок	89	20	45	41	60	

Умову 2 знімаємо.

**Умова 3.** За технологічними умовами 4-ий проект не можна вибирати, якщо не буде вибрано 5-ий проект, цю умову можна реалізувати додаванням обмеження:  $x_4 - x_5 \leq 0$ .

За цим обмеженням:

- не вибрано обидва проекти ( $0 + 0 = 0$ )
- вибрано обидва проекти ( $1 - 1 = 0$ )
- не вибрано 4-ий і вибрано 5-ий ( $0 - 1 = -1 \leq 0$ )

але якщо вибрано 4-ий і не вибрано 5-ий, тоді  $1 - 0 = 1$ , нерівність порушується:

Проект	Оч. доходн.	Вимоги щодо коштів						План (X)	Проект	Вимоги щодо земельних ділянок				
		Рік 1	Рік 2	Рік 3	Рік 4	Рік 5	Рік 1			Рік 2	Рік 3	Рік 4	Рік 5	
П-1	141	75	25	20	15	10	0	П-1	3	9	8	19	6	
П-2	187	90	35	0	0	30	1	П-2	12	19	9	23	8	
П-3	121	60	15	15	15	15	0	П-3	16	33	11	5	12	
П-4	83	30	20	10	5	5	0	П-4	9	14	23	7	8	
П-5	265	100	25	20	20	20	1	П-5	11	25	5	9	7	
П-6	127	50	20	10	30	40	0	П-6	78	6	13	10	7	
	ПЧ (Бюджет)	250	75	50	50	50		ПЧ (Бюджет)	100	45	50	50	67	
	ЛЧ	190	60	20	20	50	452	ЛЧ	23	44	14	32	15	
	Залишок	60	15	30	30	0	-1	Залишок	77	1	36	18	52	

За цією умовою прийнято рішення: «не вибирати 4-ий і вибрати 5-ий проект (разом з 2-им).

**Висновок:** побудована модель ЦПП із додатковими обмеженнями може слугувати ефективним інструментом інвестиційного менеджменту регіонального масштабу.

### Задача 5.13. Оптимізація з неопуклою і дискретною ОДР (умова “або-або”)

Уявіть купу кам'яних уламків, на яку під певним кутом опускається пласка конструкція (хоч би звичайна фанера), й треба визначити точку їх дотику – це наочний приклад ситуації, коли точка оптимуму (дотику) належить лише окремій складовій (уламку) загальної сукупності таких точок (купи).

В задачі графічним методом, наочно, демонструється пошук оптимуму в т.зв. «незв'язаній» ОДР, у прикладі вона складається з двох виокремлених «дискретів» у вигляді трикутників, кожен з яких описується трьома нерівностями, цільова функція – лінійна.

Шукана точка оптимуму може належати **або** одному, **або** іншому трикутнику, але ж ніяк обом одночасно, бо вони не мають ані однієї спільної точки, це обмеження на шукані невідомі типу «або-або». Хоча один трикутник є опуклою фігурою, їх сукупність утворює дискретну неопуклу (з розривами) ОДР нелінійної задачі оптимізації з лінійною ЦФ.

Невідомі у цій задачі дійсного типу, дискретний характер ОДР ставить умову оптимальній точці належати лише одному з двох трикутників, або 1-му, або 2-му.

Цим прикладом доводиться, що у дискретному програмуванні (ДП) далеко не завжди ставиться умова цілочисельності плану й тому вірним є вираз ЦПП  $\subset$  ДП, тобто, ЦПП є складовою (підмножиною) ДП.

Отже, специфікою цієї задачі є логічна умова типу “або-або” щодо приналежності шуканої невідомої (з координатами  $x_1, x_2$ ) одному з двох трикутників.

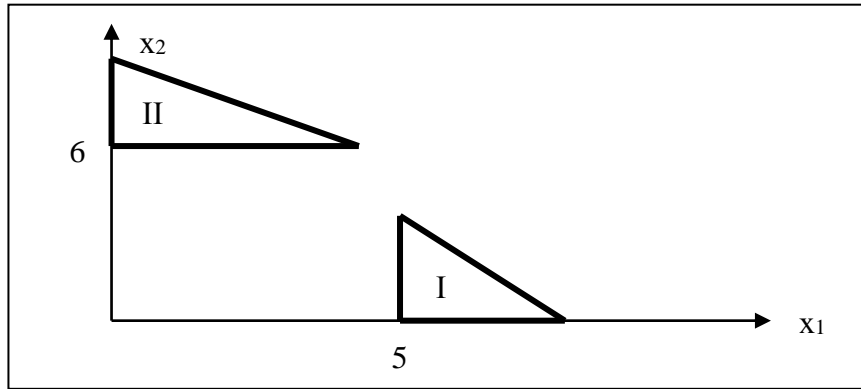
Реалізувати цю умову можна введенням двох (по числу областей) допоміжних “сигнальних” змінних буліва типу  $y_1, y_2$ .

Таким чином, оптимізаційна модель має таку структуру:

- I. Шукані невідомі дійсного та цілочислового типу
- II. ЦФ є лінійною функцією
- III. Обмеження – неопукла (дискретна) ОДР.

#### Приклад.

Незв'язана ОДР утворена двома геометричними фігурами на площині  $x_1, x_2$ :



### Задача оптимізації

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2)$ .

Для аналітичного (формульного) опису ОДР вводимо дві шукані змінні буліва типу:

- $y_1$  – “відповідає” за приналежність точки  $(x_1, x_2)$  1-му трикутнику (область I)
- $y_2$  – “відповідає” за приналежність точки  $(x_1, x_2)$  2-му трикутнику (область II):

$$y_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо точка} \in I \\ 1, & \text{якщо точка} \in II \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} 0, & \text{якщо точка} \in I \\ 1, & \text{якщо точка} \in II \end{cases}$$

II. ЦФ  $x_1 + x_2 \rightarrow \max$

III. ОДР складається з двох незв’язаних трикутників й описується двома альтернативними (типу “або-або”) обмеженнями:

- або область I:  $3x_1 + 2x_2 \leq 24, x_1 \geq 5, x_2 \geq 0$
- або область II:  $x_1 + 2x_2 \leq 16, x_2 \geq 6, x_1 \geq 0$ .

Тепер задану ОДР щодо змінних  $x_1, x_2$  можна описати двома системами нерівностей (А, Б) і додатковою системою для змінних  $y_1, y_2$  (В) для 4-вимірного лінійного простору  $(x_1, x_2, y_1, y_2)$ :

	Ліва частина	Знак	Права частина
А	$3x_1 + 2x_2 - 24$	$\leq$	$24y_1$
	$x_1 - 5$	$\geq$	$-5y_1$
Б	$x_1 + 2x_2 - 16$	$\leq$	$16y_2$
	$x_2 - 6$	$\geq$	$-6y_2$
В	$y_1 + y_2$	$=$	$1$
	$y_1, y_2$	$\in$	$\{0, 1\}$
	$x_1, x_2, y_1, y_2$	$\geq$	$0$

Пояснення обмежень (А, Б):

- якщо  $y_1 = 0$ , то з умови  $y_1 + y_2 = 1$  випливає, що  $y_2 = 1$ , тоді з нерівності (А) маємо:  $3x_1 + 2x_2 \leq 24, x_1 \geq 5$ , тобто, це задана область I. Відповідно, з (Б) маємо:  $x_2 \geq 6$  та  $x_1 + 2x_2 \leq 32$ , які виконуються автоматично (це –не область II);
- якщо ж  $y_1 = 1$ , то з умови  $y_1 + y_2 = 1$  випливає, що  $y_2 = 0$ , тоді з нерівності (А) маємо:  $3x_1 + 2x_2 \leq 48, x_1 \geq 0$ , тобто, це явно не область I. Відповідно, з (Б) маємо:  $x_2 \geq 6$  та  $x_1 + 2x_2 \leq 16$ , це задана область II, ці умови виконуються автоматично.

Якщо цю систему нерівностей перетворити на СЛАР додаванням додаткових змінних ( $x_3$  та  $x_4$  для системи А,  $x_5$   $x_6$  для системи Б), отримаємо невизначену СЛАР з 5-ти рівнянь й 8 невідомих  $(x_1, \dots, x_6, y_1, y_2)$ :

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 - 24y_1 &= 0 \\
x_1 - 5x_2 - x_4 + 5y_1 &= 0 \\
x_1 + 2x_2 + x_5 - 16y_2 &= 16 \\
x_2 + x_6 + 6y_1 &= 0 \\
y_1 + y_2 &= 1.
\end{aligned}$$

У цій моделі дискретними є лише додаткові змінні  $y_1, y_2$ , які не входять в план (для графічного методу), а шукані змінні  $x_1$  та  $x_2$  мають дійсний тип, задачі такого типу відносять до класу ЧЦПП.

### Таблична і графічна моделі

Початкові дані: коефіцієнти обмежень для кожної області, обчислюються ліві та праві частини обмежень згідно ОДР (системи нерівностей А, Б, В).

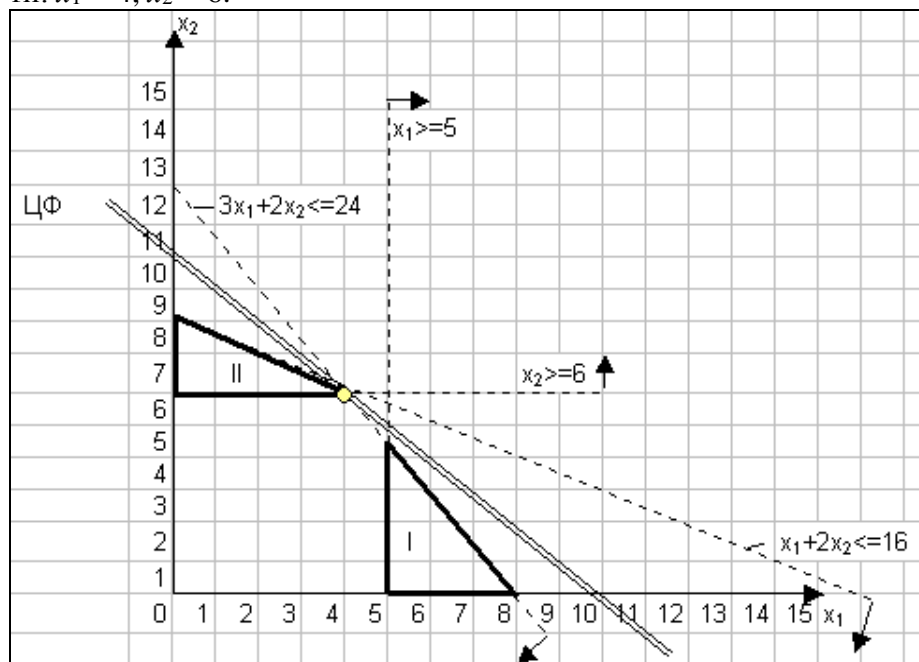
Основний результат:  $x_1 = 4, x_2 = 6, ЦФ = 10$ ,

додатковий результат:  $y_1 = 1, y_2 = 0$  – що свідчить про те, що оптимальна точка знаходиться у 2-му трикутнику.

Задача з неопуклою ОДР						
	$x_1$	$x_2$	Константа	Ліва частина	Знак	Права частина
План	4	6				
Область I	3	2	24	0	$\leq$	24
	1	0	5	-1	$\geq$	-5
Область II	1	2	16	0	$\leq$	0
	0	1	6	0	$\geq$	0
ЦФ	1	1	10			
	$y_1$	$y_2$	Обмеж (y)			
	1	0	1	1		

### Графічний розв'язок:

Лінія ЦФ  $x_1 + x_2 = 1$ , рухаючись паралельним переносом у напрямку нуля, торкнулася точки у вершині трикутника II, утвореній перетином ліній:  $x_2 = 6$  та  $x_1 + x_2 = 16$ , її координати:  $x_1 = 4, x_2 = 6$ .



## Глава 6. Моделі динамічної оптимізації

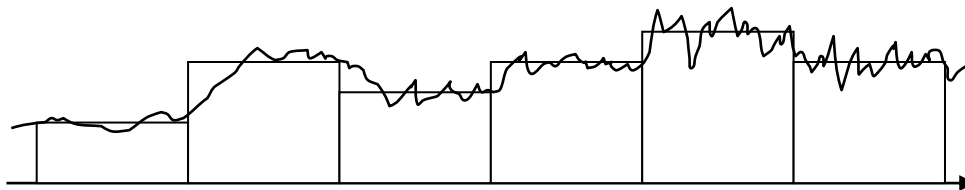
### Загальні відомості

На відміну від статичних, незалежних від часу, моделей, що описують *стани* об'єктів, динамічні моделі описують економічні чи управлінські *процеси*, тобто, поведінку систем в русі, в динаміці, в залежності від часових періодів, що були, є чи будуть. Динамічні моделі дозволяють прогнозувати розвиток процесу на майбутнє, щоб вже зараз мати уявлення про його результати і відповідним чином реагувати на певні наслідки цього розвитку.

Динамічне моделювання – багатокроковий процес, кожен крок відповідає поведінці економічної системи у певний часовий період. Кожен поточний  $i$ -ий крок отримує результати попереднього ( $i-1$ )-го кроку, за певними правилами визначає  $i$ -ий результат і формує дані для наступного ( $i+1$ )-го кроку.

Таким чином, динамічна модель в прискореному режимі дозволяє дослідити розвиток складної економічної системи, скажімо, бюджетного процесу чи виробничої програми підприємства протягом певного періоду планування, скажімо, п'ятирічки, до того ж в умовах змін ресурсного забезпечення (сировини, кадрів, фінансів, техніки) й отримані результати врахувати у відповідному плані розвитку підприємства на заданий період.

В процесі моделювання реальний, неперервний за природою, динамічний процес з метою спрощення дослідження і розрахунків отримує дискретний (переривчастий) характер шляхом наближення і заміни (апроксимації) криволінійних ділянок прямими лініями в межах відокремлених зон однакового розміру:



Ідея заміни неперервного процесу дискретним (дискретизації) вже обговорювалася у попередніх темах, вона, зокрема, реалізована в самих цифрових комп'ютерах, які прийшли на заміну аналоговим комп'ютерам неперервної дії (де потік електричного струму, рідини чи повітря відтворює реальний процес у певному масштабі), в методах чисельної математики, де, скажімо, інтеграл неперервної функції наближено обчислюється як сума прямокутників чи трапецій, чи в існуючій системі планування, коли вважається, що протягом певного часового періоду (дня, тижня, місяця чи кварталу) певні показники вважаються незмінними.

Тепер замість неперервної і плавної кривої, яка описує поведінку певного показника, скажімо, випуск готової продукції, на границях фіксованих зон з'являються „пороги”, які, в разі дискретизації, певним чином враховуються, „зшиваються”, зокрема, як переходящі об'єми незавершеного виробництва чи ресурсні запаси. В межах окремого часового періоду процес описується пропорційними (лінійними) чи нелінійними (зокрема, дискретними) співвідношеннями і відповідні задачі оптимального планування реалізуються методами лінійного чи дискретного програмування.

Таким чином, досить складний процес динамічного моделювання на весь період (горизонт) планування  $T$ , що складається з  $N$  окремих кроків-періодів, асоціюється з фільмом, складеним з окремих моментальних кадрів, кожен з кадрів відповідає певному „моменту” (періоду), а плавність переходу між кадрами забезпечується збереженням збалансованості і спадковості кроків.

В статичних моделях невідомі змінні можуть мати різну природу, позначення і вимір, скажімо, в задачі про оптимальний план виробництва індекс змінної вказує на номер

продукту: змінна  $x_1 = 23$  стосується кількості 1-го продукту (т), а  $x_2 = 0,05$  – зовсім іншого 2-го продукту (г).

В динамічних моделях невідомі змінні мають одну природу і вимір, у позначенні мають індекс, який вказує на номер періоду. Скажімо, в задачі розподілу інвестицій  $x_1 = 23$  (тис. грн.) означає об'єм інвестування протягом 1-го періоду, а  $x_2 = 123$  (тис. грн.) – 2-го періоду, в задачі випуску і відвантаження продукції значення змінної  $x_{1,4} = 56$  означає, що 56 одиниць продукту, виготовленого у 1-му періоді, відвантажено у 4-му періоді.

Тип невідомої змінної може бути дійсним чи цілочисловим, що впливає на вибір методу оптимізації: застосовується “неперервний” симплекс-метод чи “дискретний” метод “гілок і границь” з відповідними аналітичними можливостями.

Якщо це допустимо, зручно і наочно, динамічну задачу представляють мережею, відповідно, для неї застосовують модель потокового програмування.

Таким чином, кожна нова модель оптимізації використовує засоби, розглянуті у попередніх темах, так динамічна модель, що зараз вивчається, має у своєму “арсеналі” інструменти лінійного, потокового та дискретного програмування.

Одна з найважливіших рис сучасної економіки на всіх рівнях управління – динамічність – визначається реалізацією потоків різного призначення (матеріальних, людських чи фінансових) протягом періоду планування. На виробництві мова йде про визначення планів виробництва із врахуванням витрат на технологічний процес та супроводження продукції, зокрема, її зберігання. У фінансовій сфері інвестиційні потоки матеріалізуються у прирості основних фондів та потужностей, а будь-який приріст, у свою чергу, передбачає взаємодію певних показників на попередніх та наступних часових періодах, тобто, динаміку відповідних економічних процесів.

Динамічний характер економічних процесів вимагає приведення майбутніх капітальних та інших витрат до поточних за допомогою коефіцієнтів дисконтування. Одночасно динаміка вимагає врахування інших специфічних фінансових потоків та непрямих економічних зв'язків на рівні балансових розрахунків.

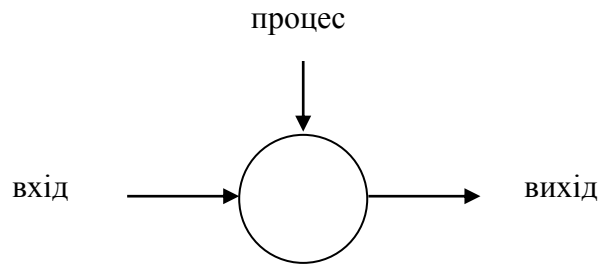
Отже, динамічний процес повинен бути збалансованим і оптимальним – в цьому специфіка ринкових відносин, коли підприємство (фірма, компанія, галузь) прагне отримати максимальний прибуток чи максимально задовольнити ринковий попит за об'ємом, структурою чи якістю із врахуванням ресурсних чи часових обмежень чи довести до мінімуму втрати, що супроводжують цей процес.

Дослідження цієї проблеми визначає необхідність побудови відповідної економіко-математичної моделі, бо саме шляхом комп'ютерного моделювання можна своєчасно визначити оптимальний варіант управління відповідними, скажімо, продуктовими чи фінансовими потоками, щоб його реалізувати у бізнес-планах.

Класичні задачі оптимізації, розглянуті у попередніх темах, локалізовані у часі, бо обмежуються одним часовим періодом, відповідні моделі називають статичними, оскільки час входить лише як певна одиниця вимірювання чи ресурс, наприклад, тривалість транспортування, продуктивність машини, кількість чол/год.

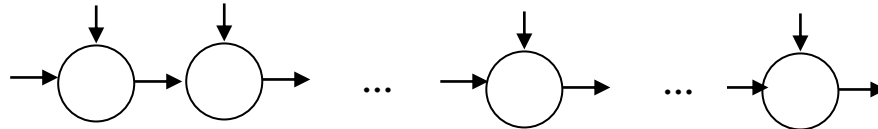
На відміну від них динамічні моделі охоплюють кілька часових періодів, що є більш реалістичним відображенням дійсності, бо досить часто менеджеру треба приймати рішення саме в залежності від часу, адже рішення, прийняті раніше, суттєво впливають на наступні рішення. Саме тому залежність прийняття рішень від часу робить динамічне моделювання виключно корисним засобом аналізу, коли інтуїція людини не в змозі охопити й оцінити наслідки багатьох взаємопов'язаних рішень.

Графічна модель типу “вхід-вихід” для таких задач складається з трьох компонент: вхід → процес → вихід, які утворюють відокремлений об'єкт – подію:



де «вхід» і «вихід» визначають динаміку досліджуваного явища в момент  $t$ , а «процес» визначає вплив зовнішнього середовища.

Динамічна модель є багатоетапною процедурою у вигляді ланцюжка з  $N$  3-компонентних моделей-подій:



“Розплатою” за кращу наближеність динамічної моделі до реальної ситуації є необхідність врахування деталей, що супроводжують окремі етапи і весь процес прийняття рішень загалом. Адже кожен часовий період має власний критерій ефективності, але треба визначити єдиний критерій, що інтегрує локальні критерії у загальний, який визначає узагальнену ефективність за весь період планування. Частіше за все загальний критерій є зваженою сумою критеріїв для окремих періодів, де вагові коефіцієнти періодів та умови їх функціонування можуть залежати від часу. Важливою рисою динамічних моделей є необхідність синхронізації подій, а також визначення початкових і кінцевих умов.

Звичайними динамічними багатоетапними процесами є конвеєрне виробництво, що розвивається у просторі і часі, транспортування різноманітних потоків ресурсів (напівфабрикатів, готової продукції, матеріалів, фінансів, робочої сили, сировини тощо), тактичне чи стратегічне планування, коли розглядається перехід від одного фіксованого часового періоду (події) до наступного. Часові періоди вимірюються від хвилин (збиральні виробничі процеси) до місяців чи років в залежності від рівня планування.

Специфікою динамічної моделі певного процесу, що триває у часі, є визначення локальної моделі окремого, досить типового  $i$ -го періоду (фази, події) і об’єднання їх у загальну  $N$ -фазну модель із загальним стартом і фінішем (де визначені початкові і кінцеві граничні умови). Фактично, мова йде про одночасне розв’язання  $N$  локальних статичних задач оптимізації, але за глобальним критерієм ефективності із врахуванням проміжних зв’язків.

Для розв’язання динамічних задач оптимізації в математичному програмуванні сформувався відповідний клас моделей під назвою *динамічне програмування*, його засновником є відомий американський математик Р. Беллман<sup>47</sup>. Ним запропоновано спеціальний метод розв’язання задач цього класу на основі “принципу оптимальності”, згідно якого оптимальний розв’язок  $n$ -вимірної задачі (з  $n$  невідомими) відшукується шляхом її деконпозиції (розбиття) на  $n$  етапів, кожен з яких представляє підзадачу відносно однієї змінної. Обчислення виконуються таким чином, що оптимальні результати однієї підзадачі є початковими даними для наступної підзадачі із врахуванням рівнянь та обмежень зв’язку між ними, результати останньої з них є результатом всієї задачі.

Фактично цей метод за своїм принципом є прискореним перебором варіантів в дереві розв’язків (типу методу “гілок і границь”).

Його суттєвим недоліком, названим Беллманом “прокляттям розмірності”, є надто високі вимоги до об’єму пам’яті комп’ютера для задачі великого розміру з кількома невідомими, де треба зберігати всі поточні варіанти, за якими зворотнім шляхом визначається оптима-

<sup>47</sup> Ричард Беллман (Bellman, 1920-1984), крупний американський математик, відомий заснуванням теорії і своїми дослідженнями з динамічного програмування. Публікації (рос.): Динамическое программирование, 1960; Прикладные задачи динамического программирования, 1965 (разом з С. Дрейфусом).



льний план. Його достоїнством є суто алгоритмічний і дискретний характер і можливість розв'язувати складні задачі нелінійної оптимізації, пов'язані, зокрема, з моделюванням динаміки і управлінням рухом літаків та ракет, характеристики яких, зрозуміло, суттєво змінюються з часом. Тому траєкторія польоту представляється багатоетапною оптимізаційною процедурою, де на кожному етапі враховується вплив відповідних факторів.

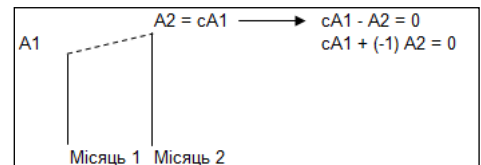
Розглянуті нижче динамічні задачі реалізовані за суттєво простішими правилами, завдяки чому табличний документ є досить компактним, а задача – досить пристойного розміру. Аналогічним чином були розв'язані задачі потокового програмування, які за своїх мережевих властивостей часто відносять до задач динамічного програмування.

### Задача 6.1. Оптимальне планування грошових потоків із врахуванням ризик-фактору

Для добре організованих технологічних процесів прийняті рішення на початку планового періоду мають досить чіткий й прогнозований ефект у майбутньому. Зате для бізнес-сфери це частіше не так, бо протягом тривалого часу на відповідний бізнес-процес впливають непередбачувані раніше фактори (ризик-фактори) й, відповідно, кінцевий результат може досить сильно відрізнятись від попередніх прогнозів.

Виникає практична задача – сформулювати прогноз на майбутнє із врахуванням ризиків з-за можливого впливу на процес дослідження нових факторів чи результатів суміжних процесів.

Для розробки економіко-математичної моделі для розв'язання задач такого типу розглянемо досить розповсюджену задачу багатоперіодного планування грошових потоків (multi-period cash-flow problem) зі сфери фінансового та інвестиційного менеджменту. Ризикованість прийняття рішень у цій задачі пов'язана з невизначеністю поточних процентних ставок, за якими обчислюється майбутня вартість грошей.



#### Приклад

Мале й успішне підприємство зі сфери громадського харчування (ресторан типу fast food) вирішило збудувати новий заклад протягом 6 місяців, для цього треба сформулювати відповідний фонд розвитку. Будівельна компанія визначила розмір фонду у 800 певних гр. од. й хоче мати 250 од. на початку 3-го та 5-го місяців, а кінцевий платіж у 300 од. отримати на початку 7-го місяця по завершенню будівництва. Менеджер ресторану хоче вкласти кошти у банк, де запропоновані 4 варіанти інвестування у такій формі:

Інвестпроект	Місяці	Період	Ставка за період
A	1, 2, 3, 4, 5, 6	1	1,8%
B	1, 3, 5	2	3,5%
C	1, 4	3	5,8%
D	1	6	11,0%

Таблиця показує, що, наприклад, за варіантом А повертаються є гроші щомісяця, збільшуючи поточну суму на 1,8%, за варіантом В гроші повертаються через кожні 2 місяці зі ставкою 3,5%, за варіантом С гроші повертаються через 3 місяця, а за варіантом D – через 6 місяців з відповідними ставками. Вимоги до обов'язкових проміжних платежів, які можуть змінюватися, як і ставки банків (саме тут сховані ризики), суттєво ускладнюють задачу, бо існує безліч варіантів допустимих планів, бо кошти у середині банку можуть переходити за відповідними варіантами, тож – за яким варіантом й скільки вкласти грошей на початку 1-го місяця, щоб накопичені кошти за наступні місяці дали можливість виконати часовий план платежів й мінімізувати суму початкових внесків – це актуальна задача оптимального планування грошових потоків на заданий період (у прикладі 6 місяців).

## Математична модель

### Позначення

$A1, A2, A3, A4, A5, A6$  – суми коштів за варіантом А на початок кожного з 6 місяців

$B1, B3, B5$  – суми коштів за варіантом В на початок 1, 3 та 5 місяців

$C1, C4$  – суми коштів за варіантом С на початок 1 та 4 місяців

$D1$  – сума коштів за варіантом D на початок 1 місяця

$A1, B1, C1, D1$  – шукані невідомі, їх значення – суми внесків на початку 1-го місяця за відповідними 4-ма варіантами, усі інші змінні обчислюються за рекурентними формулами.

### Задача оптимізації

I. Знайти  $A1, B1, C1, D1$ , такі, щоб

II. ЦФ  $S = A1 + B1 + C1 + D1 \rightarrow \min$

III. за обмежень:

$$1,018A1 - 1A2 = 0$$

$$1,035B1 + 1,018A2 - 1A3 - 1B3 = 250$$

$$1,058C1 + 1,018A3 - 1A4 - 1C4 = 0$$

$$1,035D3 + 1,018A4 - 1A5 - 1B5 = 250$$

$$1,018A5 - 1A6 = 0$$

$$1,11D1 + 1,058C4 + 1,035B5 + 1,018A6 = 300$$

та граничних умов:  $A_i, B_i, C_i, D_i \geq 0$  для  $i = 1, \dots, 6$ .

Це модель динамічного програмування, де враховується параметр «час», обчислювальний процес складається з окремих кроків ( $i$ ), в прикладі їх 6. На кожному кроці йде перерахунок поточних даних, визначаються шукані величини й значення узагальненої цільової функції. Модель ускладнюється наявністю ризик-фактору, що робить модель ще й нелінійною.

### Результат та його аналіз

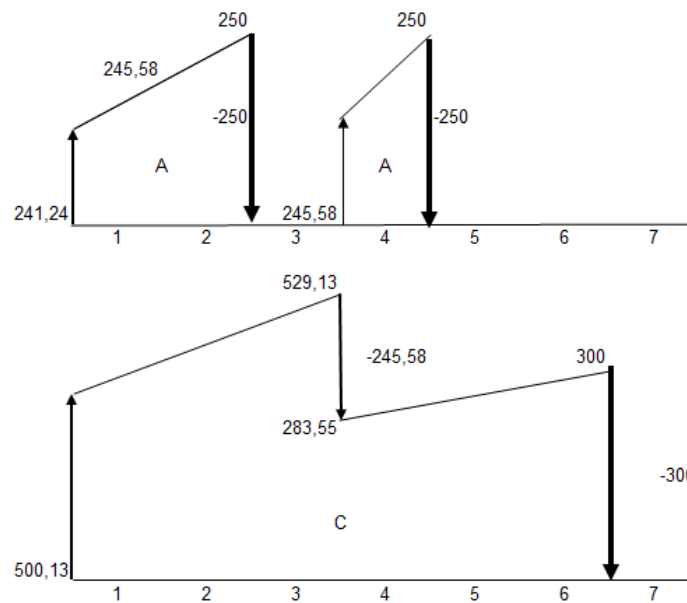
\*буква  $w$  (від *wait* - чекати) вказує на періоди, коли виплати заборонені

Інвестиції	Поч. м-ць	Кін. м-ць	Сума	Ставка	Вхідні/Вихідні грошові потоки на початок нового місяця							
					Місяць 1	Місяць 2	Місяць 3	Місяць 4	Місяць 5	Місяць 6	Місяць 7	
A1	1	2	241,24	1,8%	-1	1,018						
B1	1	3	0,00	3,5%	-1	w	1,035					
C1	1	4	500,13	5,8%	-1	w	w	1,058				
D1	1	7	0,00	11,0%	-1	w	w	w	w	w		1,11
A2	2	3	245,58	1,8%		-1	1,018					
A3	3	4	0,00	1,8%			-1	1,018				
B3	3	5	0,00	3,5%			-1	w	1,035			
A4	4	5	245,58	1,8%				-1	1,018			
C4	4	7	283,55	5,8%				-1	w	w		1,058
A5	5	6	0,00	1,8%					-1	1,018		
B5	5	7	0,00	3,5%					-1	w		1,035
A6	6	7	0,00	1,8%							-1	1,018
			741,36				0	250	0	250	0	300
			ЦФ				0	250	0	250	0	300

Менеджер ресторану має зробити два перших внески:  $A1 = 241,24$  од.,  $C1 = 500,13$  од.,  $B1 = D1 = 0$ , разом 741,36 од., отже, це мінімально можлива сума перших внесків, щоб розраховуватися з виконавцями згідно плану платежів. Далі ці гроші «крутяться» шляхом поступового нарахування за визначеними ставками, накопичення за певні місяці й відрахувань для здійснення необхідних платежів, для цього «гроші працюють», переходячи з одного варіанту нарахувань до іншого, якщо це вигідно.

Рух грошових потоків:

- варіант А: внесок 241,24 од., сума на початок 2-го місяця 245,58 од., на початок 3-го місяця є 250,0 од. й здійснюється перша виплата (250 од.)
- варіант С: внесок 500,13 од., через 3 місяці на початок 4-го місяця, сума 529,13 од., оскільки у цей місяць відрахувань нема, з цієї суми переводиться сума 245,58 од. на варіант А, за яким на наступний місяць передбачені платежі, є залишок 283,55 од., який через наступні 3 місяці на початок 7-го місяця складе суму 300,0 од. й буде здійснена третя виплата (300 од.)
- варіант А: на початок 4-го місяця переведена сума 245,58 од. з варіанту С, сума на початок наступного 5-го місяця наросте й складе величину  $1,018 \cdot 245,58 = 250$  од., що дасть змогу здійснити другу виплату (250 од.):



Як видно, модель точно визначає грошові потоки на кожному кроці динамічного процесу, автоматично узгоджуючи процедури внутрішніх переходів. Ясно, що при інших початкових даних (ставки, план платежів) модель знайде відповідний оптимальний план. Модель універсальна й може застосовуватися для будь-якого горизонту планування та варіантів інвестування.

### Модифікація моделі з урахуванням ризику

Банк має внутрішні проблеми й не завжди спроможний повернути вчасно кошти згідно контракту. Зокрема, за досвідом 4 варіанти інвестування (А, В, С, D) характеризуються такими ризиками (за 10-бальною шкалою, чим більший бал, тим більший ризик): А (1), В (3), С (8), D (6).

Менеджер ресторану відшукує новий план формування фонду оплати праці із врахуванням ризиків неповернення грошей на оплату будівельних робіт за умови, що зважений середній ризик щомісяця не перевищить 5 балів. Для цього у розроблену модель вводяться додаткові обмеження для кожного місяця, їх 6, що враховують ризик-ситуацію.

#### Формування додаткових обмежень

Зважений середній ризик у 1-му місяці, коли робиться перший внесок (A1, B1, C1, D1), визначається нерівністю:

$$\frac{1A1 + 3B1 + 8C1 + 6D1}{A1 + B1 + C1 + D1} \leq 5 \text{ або після спрощення й алгебраїчних перетворень:}$$

$$(1-5)A1 + (3-5)B1 + (8-5)C1 + (6-5)D1 \leq 0 \text{ або } -4A1 - 2B1 + 3C1 + 1D1 \leq 0.$$

Аналогічно формуються інші 5 обмежень.

Додаткова система нерівностей-обмежень:

$$-4A1 - 2B1 + 3C1 + 1D1 \leq 0$$

$$-2B1 + 3C1 + 1D1 - 4A2 \leq 0$$

$$3C1 + 1D1 - 4A3 - 2B3 \leq 0$$

$$1D1 - 2B3 - 4A4 + 3C4 \leq 0$$

$$1D1 + 3C4 - 4A5 - 2B5 \leq 0$$

$$1D1 + 3C4 - 2B5 - 4A6 \leq 0.$$

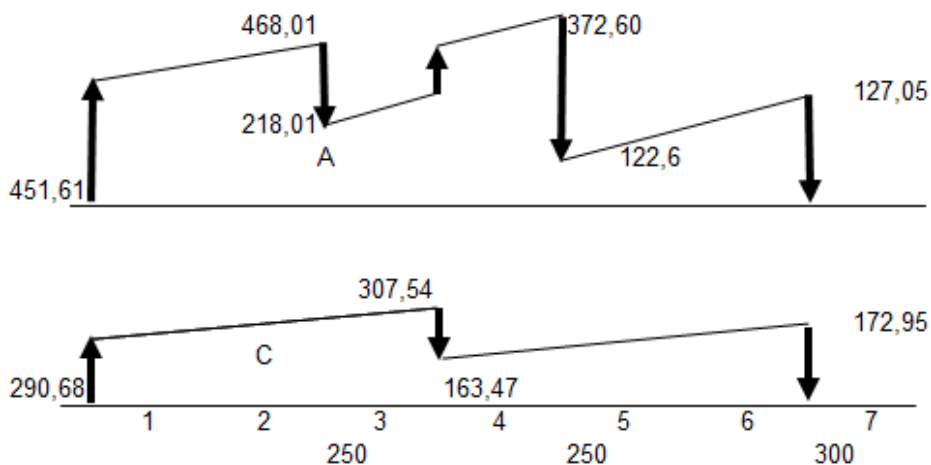
### Результат та його аналіз

Вхідні/Вихідні грошові потоки на початок нового місяця												Ф-ризики						
Інвестиції	Поч. м-ць	Кін. м-ць	Сума	Ставка	Місяць 1	Місяць 2	Місяць 3	Місяць 4	Місяць 5	Місяць 6	Місяць 7	Місяць 1	Місяць 2	Місяць 3	Місяць 4	Місяць 5	Місяць 6	
A1	1	2	451,61	1,8%	-1	1,018						1	-4					
B1	1	3	0,00	3,5%	-1	w	1,035					3	-2	-2				
C1	1	4	290,68	5,8%	-1	w	w	1,058				8	3	3	3			
D1	1	7	0,00	11,0%	-1	w	w	w	w	w		6	1	1	1	1	1	1
A2	2	3	459,74	1,8%		-1	1,018					1						
A3	3	4	218,01	1,8%			-1	1,018				1						
B3	3	5	0,00	3,5%			-1	w	1,035			3						
A4	4	5	366,01	1,8%				-1	1,018			1						
C4	4	7	163,47	5,8%				-1	w	w	1,058	8			3	3	3	3
A5	5	6	122,60	1,8%					-1	1,018		1						
B5	5	7	0,00	3,5%					-1	w	1,035	3						
A6	6	7	124,81	1,8%						-1	1,018	1						
ЦФ			742,29			0	250	0	250	0	300		-934	-967	0	-974	0	-9
																	5	максимальний
																		ризики

У цих умовах план інвестування змінився кількісно:

$A1 = 451,61$  од.;  $C1 = 290,68$  од., у порівнянні з попереднім планом (741,36 од.) дещо збільшилася мінімальна сума перших внесків зі значенням 742,29 од. Зате у цьому плані домінує найбільш надійний й гнучкий варіант А, його доповнює хоча й ненадійний, але найкраще гармонізований варіант С зі значно меншим першим внеском.

Схема руху грошових потоків протягом горизонту планування:



### Задача 6.2. Динамічна модель “виробництво-запаси” (векторна версія)

#### Постановка задачі

Процес виробництва однорідної продукції протягом періоду планування ставить за мету задоволення попиту, який змінюється у часі (скажімо, в залежності від сезону). Це: видобуток енергетичних ресурсів, продукції аграрного сектору економіки, надання послуг із явно сезонним характером попиту.

З-за нерівномірного графіку постачання й споживання існують моменти, коли кількість виробленої продукції перевищує попит й навпаки, коли попит перевищує виробничі мож-

ливості підприємства. Для узгодження графіків виробництва й споживання утворюються запаси: природного газу у підземних газосховищах, вугілля на опалювальний період, збиральної техніки та нафтопродуктів в період збирання врожаю, будівельних матеріалів, харчових продуктів, одяжі та взуття для відповідного сезону, фінансів для здійснення інвестиційних проектів тощо.

Раціональна виробнича політика на тривалий часовий період планування визначає періоди, коли попит забезпечується виготовленою продукцією чи використанням запасів на складах чи сховищах.

Таким чином, мова йде, фактично, про оптимізаційну задачу за критерієм *мінімізації витрат*, пов'язаних зі створенням, використанням й супроводженням різноманітних запасів (коротко – задача оптимального управління запасами). Ці витрати, як відомо, складають суттєву частку собівартості продукції.

Загальні витрати складаються з витрат на суто виробництво і витрат на супроводження продукції, зокрема, на її зберігання у вигляді запасів. Задані питомі витрати на випуск одиниці продукції та її зберігання, необхідно визначити оптимальний графік виробництва по періодам (скільки і коли), який мінімізує загальні витрати.

## Математична модель

### Позначення

Весь період планування  $T$  складається з  $N$  часових періодів (днів, тижнів, місяців).

Для кожного  $t$ -го періоду ( $t = 1, \dots, N$ ) задано:

$d_t$  - замовлення на продукт (попит), яке треба задовольнити ( $d_t \geq 0$  для всіх  $t$ )

$c_t$  – питомі виробничі витрати на випуск одиниці продукту в  $t$ -ий період

$M_t$  – максимально допустимий об'єм випуску (визначається потужністю обладнання чи розміром складу готової продукції)

$y_0$  – перехідний запас на початок 1-го періоду, “вхід”

$y_N$  – перехідний запас на кінець  $N$ -го періоду, “вихід”

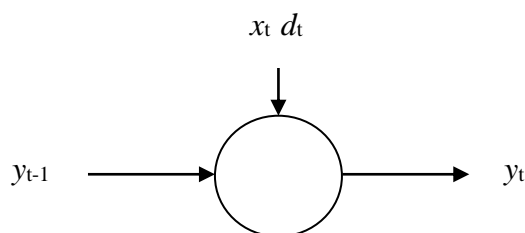
$y_t$  – запас на кінець поточного  $t$ -го періоду

$y_{t-1}$  – запас на початок  $t$ -го періоду (при  $t = 1$  це  $y_0$ )

$v_t$  – питома вартість зберігання одиниці запасу

$x_t$  – об'єм випуску в  $t$ -ий період (шукана величина)

$Z$  – загальні витрати за період  $T$ .



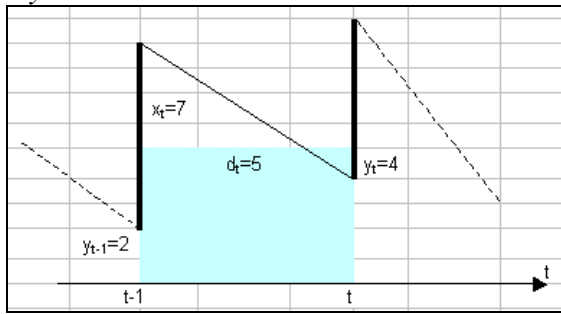
В основу обчислень покладено рівняння матеріального балансу:  $y_t = y_{t-1} + x_t - d_t$ , тобто, це рекурентна<sup>48</sup> формула:

**Запас на кінець періоду = Запас на початок періоду + Випуск – Попит**

**Приклад:** на поточний  $t$ -ий період попит (витрати) на продукт складає 5 од., перехідний запас з попереднього  $(t-1)$ -го періоду дорівнює 2 од., випуск склав 7 од., відповідно, запас на кінець  $t$ -го періоду дорівнює:

<sup>48</sup> Рекурсія – визначення об'єкту через себе, тобто, визначення об'єкту з використанням раніше визначених об'єктів. Приклади: обчислення факторіалу ( $n!$ ): якщо при  $n = 0$   $n! = 1$ , тоді для  $n > 0$   $n! = n \times (n-1)!$ ; обчислення чисел Фібоначчі: якщо  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ , тоді  $x_3 = x_2 + x_1 = 2$ ,  $x_4 = x_3 + x_2 = 3$  тощо. Це базове поняття в комп'ютерному програмуванні, визначене командою присвоєння:  $x := x + a$ , що ефективно реалізується в табличному процесорі Excel: (команда в A2) = A1 + \$B\$1, (команда в A3) = A2 + \$B\$1.

$$y_t = 2 + 7 - 5 = 4.$$



Пояснення (рекурентна формула):

Період  $t = 1$ : задано  $y_0, x_1, y_1$ ; тоді  $y_1 = y_0 + x_1 - d_1$

Період  $t = 2$ :  $y_2 = y_1 + x_2 - d_2 = (y_0 + x_1 - d_1) + x_2 - d_2 = y_0 + (x_1+x_2) - (d_1+d_2)$

Період  $t = 3$ :  $y_3 = y_2 + x_3 - d_3 = [y_0 + (x_1+x_2) - (d_1+d_2)] + x_3 - d_3 = y_0 + (x_1+x_2+x_3) - (d_1+d_2+ d_3)$

...

Період  $N$ :  $y_N = y_0 + (x_1 + \dots + x_N) - (d_1 + \dots + d_N)$ ,

де  $y_N$  – величина, що визначається всіма попередніми величинами (вихід). Ця величина може бути нульовою чи ненульовою (в залежності від заданого обмеження на цю величину).

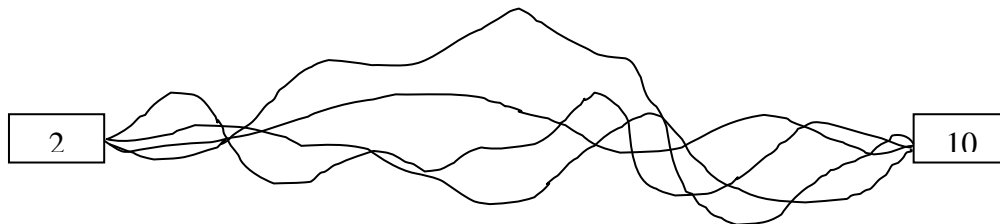
Обмеження

Замовлення  $d_i$  буде задоволено, якщо у період  $t$ :  $y_t = y_{t-1} + x_t - d_t \geq 0$ , відповідно, повинна виконуватися умова: кінцевий запас  $t$ -го періоду  $y_t \geq 0$ .

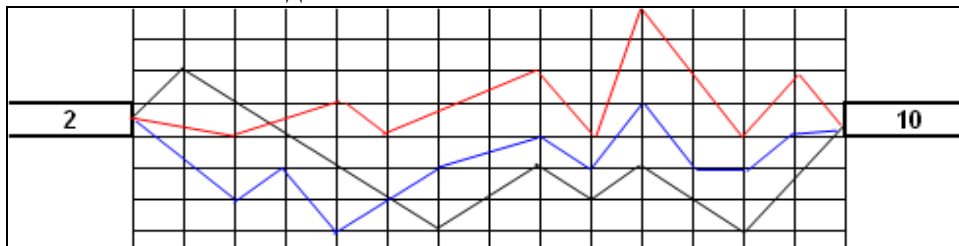
Передбачається, що продукція на склад поступає рівномірно, тому середні витрати на зберігання запасу на кінець періоду дорівнюють  $v_t \frac{y_{t-1} + y_t}{2}$ .

Динамічний процес, що моделюється, можна представити у вигляді мотузки з двома закріпленими кінцями (2; 10), зате її середина може приймати будь-які положення (траєкторії), з яких треба вибрати найкраще.

Варіанти: без обмежень, з обмеженням на фіксовані проміжні значення, наприклад, на ці-



лочисловий тип невідомих  $X$ :



Якраз першими задачами, для розв'язання яких розроблялися методи динамічного програмування, були задачі пошуку кращої траєкторії руху літака-перехоплювача чи ракети, для яких фіксувалися лише точки старту й фінішу. Для цих задач допустимий вектор  $X = (x_1, \dots, x_N)$  називається управлінням й ставилася задача пошуку оптимального управління

за певним критерієм (максимум швидкості чи мінімум витрат палива) та спеціальними обмеженнями.

### Задача 6.3. Про оптимальне управління запасами (“випуск-зберігання”)

#### Постановка задачі

В умовах нерівномірного (сезонного) попиту на продукцію, ресурси чи послуги оптимальною організацією виробничого процесу у певні «холодні» періоди утворюються запаси, за рахунок яких задовольняється попит у «гарячий» період.

#### Задача оптимізації

I. Знайти такий план виробництва у вигляді вектора  $X = \{x_t\}$ ,  $t=1, \dots, N$ , де  $x_t$  – об’єм випуску продукту в  $t$ -ий період,  $N$  – кількість часових періодів, щоб

II. цільова функція (загальні витрати на випуск і зберігання)

$$Z = \sum_{t=1}^N c_t x_t + \sum_{t=1}^N v_t \frac{y_{t-1} + y_t}{2} \rightarrow \min ,$$

III. за обмежень:

$$y_t = y_{t-1} + x_t - d_t \text{ (рівняння матеріального балансу)}$$

$$y_t \geq 0 \text{ (умова задоволення попиту)}$$

та граничних умов  $x_t \geq 0$ .

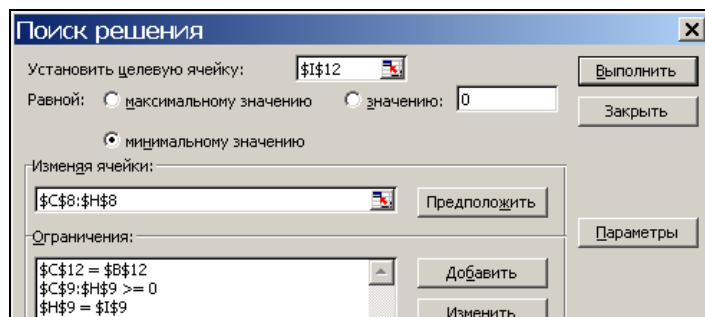
#### Таблична модель:

##### Початкові дані:

	Період 0	Горизонт планування					
		Період 1	Період 2	Період 3	Період 4	Період 5	Період 6
попит на продукт (D)		13,3	14,3	10,1	8,9	17,3	19,9
виробничі витрати (C)		5,5	8,9	3	11,5	9,6	9,9
витрати на зберігання (V)		1,6	1,1	2,2	2,8	2,4	3,1

#### Результат:

План (X)		25,6	0,0	36,3	0,0	0,0	29,9	обмеж (y <sub>6</sub> )	т-ціна
залишок на кінець (Y <sub>t</sub> )		14,3	0,0	26,2	17,3	0,0	10,0	10	11,5
Витрати на вир-во (CX)		140,8	0,0	108,9	0,0	0,0	296,0	545,7	
Вит. на зберігання (VY)	Обмеж (y <sub>0</sub> )	13,0	7,9	28,8	60,9	20,8	15,5	146,9	
залишок на початок (Y <sub>t-1</sub> )	2	2,0	14,3	0,0	26,2	17,3	0,0	692,6	
Потужність (M)		20,0	15,0	15,0	10,0	12,0	25,0	цф=	
Норм. вартість	0,0	0,0	2,1	0,0	6,0	1,5	0,0		
Т-ціна (попиту)		0,0	5,5	0,0	0,0	0,9	0,0		



Пояснення (рекурентна формула):

(початкова умова)

$$\text{залишок на кінець 1-го періоду } y_1 = 2 (y_0) + 25,6 (x_1) - 13,3 (d_1) = 14,3$$

залишок на кінець 2-го періоду  $y_2 = 14,3 (y_1) + 0 (x_2) - 14,3 (d_2) = 0$

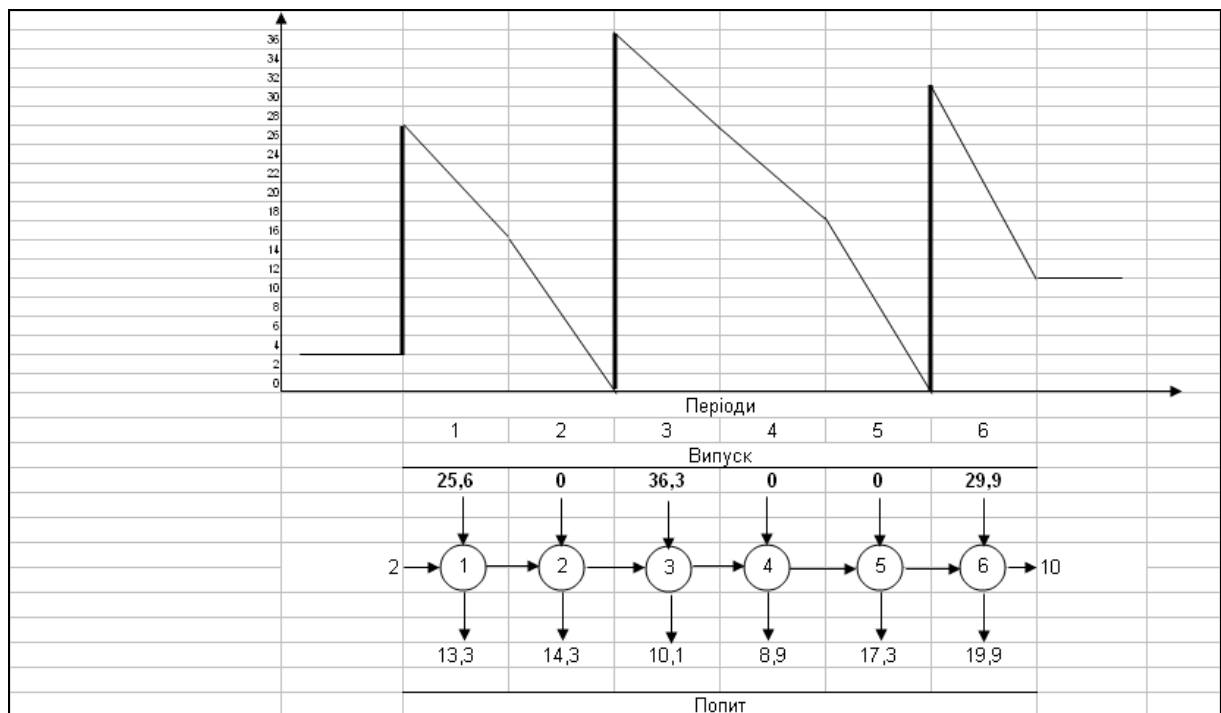
залишок на кінець 3-го періоду  $y_3 = 0 (y_2) + 36,3 (x_3) - 10,1 (d_3) = 26,2$

...

залишок на кінець 6-го періоду  $y_6 = 0 (y_5) + 29,9 (x_5) - 19,9 (d_6) = 10$  (кінцева умова).

## Результат

Багатоперіодна модель "випуск-зберігання"								
Період 0	Горизонт планування						Період 7	т-ціна
	Період 1	Період 2	Період 3	Період 4	Період 5	Період 6		
попит на продукт (D)	13,3	14,3	10,1	8,9	17,3	19,9		
виробничі витрати (C)	5,5	8,9	3	11,5	9,6	9,9		
витрати на зберігання (V)	1,6	1,1	2,2	2,8	2,4	3,1		
<b>План (X)</b>	<b>25,6</b>	<b>0,0</b>	<b>36,3</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	<b>29,9</b>	обмеж ( $y_6$ )	т-ціна
залишок на кінець ( $Y_t$ )	14,3	0,0	26,2	17,3	0,0	10,0	→10	11,5
Витрати на вир-во (CX)	140,8	0,0	108,9	0,0	0,0	296,0		545,7
Вит. на зберігання (VY)	13,0	7,9	28,8	60,9	20,8	15,5		146,9
залишок на початок ( $Y_{t-1}$ )	2	2,0	14,3	0,0	26,2	17,3		<b>692,6</b>
Потужність (M)		20,0	15,0	15,0	10,0	12,0		25,0
Норм. вартість	0,0	0,0	2,1	0,0	6,0	1,5		0,0
Т-ціна (попиту)		0,0	5,5	0,0	0,0	0,9		0,0



## Аналіз результатів

### Пряма задача

Оптимальний план випуску продукції  $X = (25,6; 0; 36,6; 0; 0; 29,9)$  визначає, що попит задовольняється за рахунок випуску в 1-му (25,6), 3-му (36,6) та 6-му (29,9) періодах, у інші періоди (2, 4, 5) – за рахунок запасу готової продукції, що зберігається на складі, загальні витрати (ЦФ) = 692,6 (з них на виробництво склали 545,7, на зберігання 146,9) за умови наявності початкового (2) та забезпечення кінцевого (10) запасу.



### Двоїста задача

- нормовані вартості невідомих (значень попиту щодо вектора  $X$ ) вказують на збільшення загальних витрат при вимушеному випуску продукту у “невигідні” періоди (2, 4, 5). Наприклад, випуск продукту у 4-му періоді приведе до збільшення ЦФ на 6 за кожну одиницю продукту
- тіньова ціна кінцевого запасу ( $t_N = 10$ ) величиною 11,5 вказує на збільшення ЦФ при збільшенні вимог до цього запасу на 1
- аналогічний зміст тіньової ціни початкового запасу ( $t_0 = 2$ ), але у даному випадку – не впливає на ЦФ (дорівнює 0)
- тіньові ціни попиту вказують на зростання витрат при їх збільшенні на 1.

**Варіант 1:** план випуску обмежується максимально допустимою потужністю  $M$  обладнання (по періодам), в математичну модель додається обмеження:  $x_t \leq M_t$  (випуск в період  $t$  обмежується потужністю обладнання чи розміром складу)

План (X)		20,0	9,8	15,0	10,0	12,0	25,0	обмеж ( $y_6$ )	т-ціна
залишок на кінець ( $Y_t$ )		8,7	4,2	9,1	10,2	4,9	10,0	→10	19,9
Витрати на вир-во (СХ)		110,0	87,2	45,0	115,0	115,2	247,5		719,9
Вит. на зберігання (VУ)	Обмеж ( $y_0$ )	8,6	7,1	14,6	27,0	18,1	23,1		98,5
залишок на початок ( $Y_{t-1}$ )	2	2,0	8,7	4,2	9,1	10,2	4,9		818,4
Потужність (M)		20	15	15	10	12	25		цф=
Норм. вартість	0,0	-2,0	0,0	-7,5	-1,5	-6,0	-8,5		
Т-ціна (попиту)		0,0	5,5	0,0	0,0	0,9	0,0		

**Результат:** виробництво змушене діяти у всіх періодах, відповідно, збільшені загальні витрати (з 692,6 до 818,4). Від’ємні нормовані вартості невідомих вказують на можливість зменшення витрат за рахунок підвищення потужності підприємства. Цим фактом доцільно скористатися, коли мова зайде про план розвитку підприємства чи при плануванні ремонтних робіт, коли частина обладнання тимчасово виводиться з експлуатації. Наприклад, у 2-му періоді обладнання недовантажене (9,8 проти 15), зате підвищення потужності у 6-му періоді на 1 зменшить витрати (ЦФ) на 8,5, у 3-му – на 7,5, у 5-му – на 6,5.

### Графік виробничого процесу



**Варіант 2:** продукція неподільна, попит і шуканий план – цілочислового типу.

Початкові дані (попит задано у цілих числах):

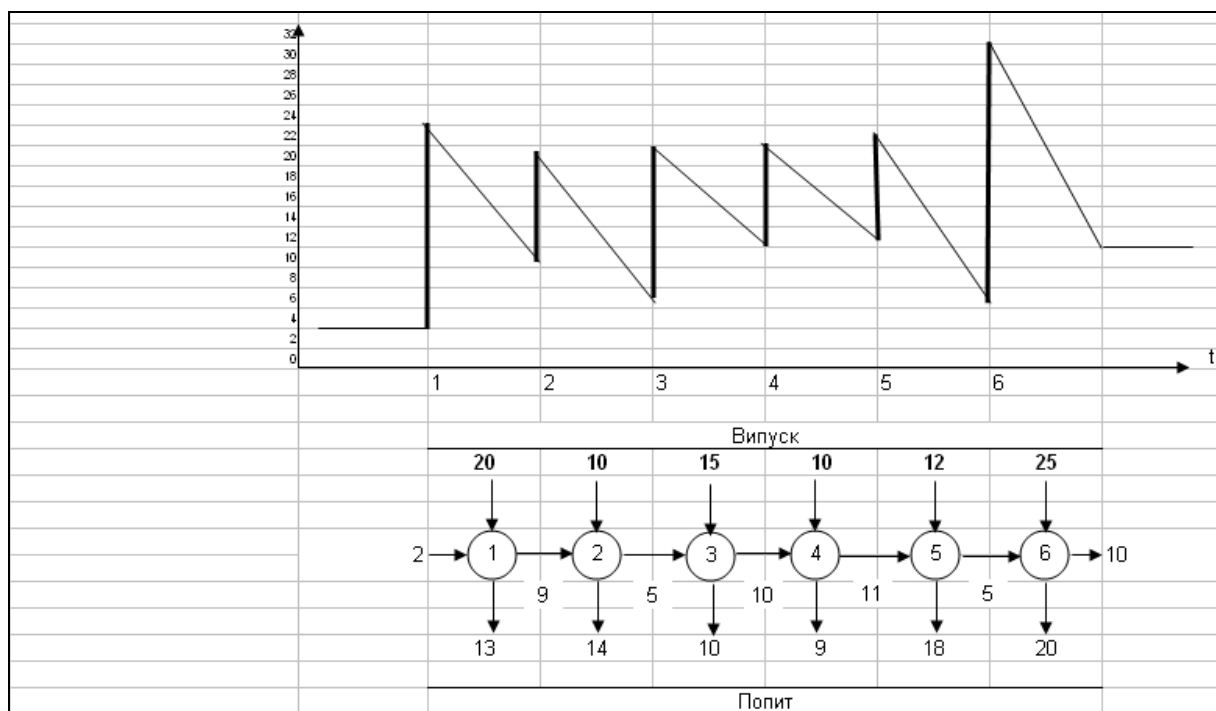
	Період 0	Горизонт планування						Період 7
		Період 1	Період 2	Період 3	Період 4	Період 5	Період 6	
попит на продукт (D)		13	14	10	9	18	20	
виробничі витрати (C)		5,5	8,9	3	11,5	9,6	9,9	
витрати на зберігання (V)		1,6	1,1	2,2	2,8	2,4	3,1	

## Результат

План (X)		20	10	15	10	12	25	обмеж ( $y_6$ )
залишок на кінець ( $Y_t$ )		9,0	5,0	10,0	11,0	5,0	10,0	→ 10
Витрати на вир-во (CX)		110,0	89,0	45,0	115,0	115,2	247,5	721,7
Вит. на зберігання (VY)	Обмеж ( $y_0$ )	8,8	7,7	16,5	29,4	19,2	23,3	104,9
залишок на початок ( $Y_{t-1}$ )	2 →	2,0	9,0	5,0	10,0	11,0	5,0	826,6
Потужність (M)		20	15	15	10	12	25	цф=

## Табличний документ

Багатоперіодна модель "випуск-зберігання" (ЦЛП)								
	Період 0	Горизонт планування						Період 7
		Період 1	Період 2	Період 3	Період 4	Період 5	Період 6	
попит на продукт (D)		13	14	10	9	18	20	
виробничі витрати (C)		5,5	8,9	3	11,5	9,6	9,9	
витрати на зберігання (V)		1,6	1,1	2,2	2,8	2,4	3,1	
План (X)		20	10	15	10	12	25	обмеж ( $y_6$ )
залишок на кінець ( $Y_t$ )		9	5	10	11	5	10	→ 10
Витрати на вир-во (CX)		110,0	89,0	45,0	115,0	115,2	247,5	721,7
Вит. на зберігання (VY)	Обмеж ( $y_0$ )	8,8	7,7	16,5	29,4	19,2	23,3	104,9
залишок на початок ( $Y_{t-1}$ )	2 →	2,0	9,0	5,0	10,0	11,0	5,0	826,6
Потужність (M)		20	15	15	10	12	25	цф=



**Висновок.** Векторна версія задачі «виробництво-зберігання» передбачає реалізацію послідовного випуску і накопичення продукції та її використання у найближчі періоди. Нею не може бути реалізована ситуація створення запасу продукції «авансом» для використання у визначений майбутній період (під замовлення). Наприклад, завод по виготовленню вагонів метро виготовляє партію вагонів, які будуть відвантажені замовнику лише в момент появи фінансових коштів та готовності відповідної лінії метрополітену. До того часу готова продукція зберігається на складі, ці витрати на зростають з терміном зберігання (за рекурентною формулою). Саме можливість зберігання продукції протягом певних періодів, коли при переході з одного періоду до іншого вартість зберігання ступінчато змінюється, робить модель цієї задачі **динамічною**.

Також можлива ситуація, коли замовлення задовольняється шляхом отримання продукції ззовні (по імпорту), ця технологія надзвичайно актуальна в сучасних умовах глобалізації ринків та виробничої сфери (це аналог статичної задачі «випускати-купувати» ЛП). Для таких ситуацій користуються матричною версією цієї задачі, де невідомі величини  $x_{ij}$  є елементами матриці  $X$ , де визначається джерело ( $i$ ), період постачання ( $j$ ) і величина поставки (значення  $x_{ij}$ ).

#### **Задача 6.4. Динамічна транспортна модель “виробництво-запаси”**

Універсальність транспортної моделі дозволяє її застосовувати до розв’язання задач, що не мають безпосереднього відношення до транспортування, це – різноманітні задачі розподілу ресурсів (праці, сировини, фінансів, готової продукції). До таких задач відносять зокрема такі, де у ролі постачальників виступають певні дії чи рішення, прийняті у попередні періоди, а у ролі споживачів транспортної моделі – певні часові періоди з відповідними параметрами («цінами», «ваговими» коефіцієнтами), за якими здійснюється календарне планування (тижні, місяці, квартали, роки). Відповідні транспортні моделі, де враховується час як параметр, називають динамічними.

Характерна властивість динамічних моделей – результат, отриманий у попередній період, впливає на прийняття рішення у наступний період, а розподіл дій (подій) є синхронізованим у часі (горизонті планування).

#### Постановка задачі

Процес виробництва однорідної продукції протягом періоду планування  $T$  ставить за мету задоволення попиту, який змінюється у часі (скажімо, в залежності від сезону). Загальні витрати складаються з витрат на виробництво, зберігання та доставку ззовні. Можливості підприємства обмежуються максимальною потужністю технологічного обладнання і вмістом складів для зберігання готової продукції, тому виробнича політика на тривалий часовий період планування визначає періоди, коли попит треба забезпечити виготовленою продукцією безпосередньо з власного цеху, а коли використанням запасів готової продукції зі складу чи ззовні (імпорту).

Таким чином, мова йде про задачу оптимального управління потоком продукції за схемою “виробництво-запаси-імпорт” з позицій мінімізації загальних витрат.

Для цієї задачі відомі попит, питомі витрати на випуск одиниці продукції, її зберігання та придбання за імпортом, необхідно визначити оптимальний графік виробництва, створення запасів та отримання імпорту по періодам (що, скільки і коли), який мінімізує загальні витрати.

Як і раніше, додатковим й надто важливим результатом є двоїсті оцінки обмежуючих факторів (попит, потужність обладнання, об’єм складу і величина перехідних запасів), які дозволяють визначити раціональну політику розвитку підприємства.

Для побудови динамічної моделі цього типу скористаємось матричною моделлю транспортної задачі, де в ролі джерел постачання (рядки матриці) виступають об’єми випуску продукції на виробництві у часові періоди, отримання продукції по імпорту чи зі складів, а в ролі споживачів (стовпці матриці) – попит у часові періоди.

Модель використовує три матриці: питомих виробничих витрат (початкові дані); плану (звідки, куди і скільки) і витрат на задоволення попиту, і три вектори:

попиту ( $P$ ), виробничих потужностей ( $V$ ) і об’ємів складів, а також величину початкового (перехідного) запасу ( $y_0$ ).

За допомогою рекурентних формул обчислюються витрати на зберігання (чим триваліше зберігання, тим воно дорожче) і розподілу виготовленої продукції по періодам зберігання та постачання.

## Математична модель

### Позначення

Як і раніше, весь період планування  $T$  складається з  $N$  часових періодів (днів, тижнів, місяців).

Для кожного  $t$ -го періоду постачання (виробництво, склад, імпорт) і  $z$ -го періоду задоволення попиту ( $t, z = 1, \dots, N$ ) задано:

$t$  – поточний номер рядка матриці (період випуску)

$z$  – поточний номер стовпця матриці (період отримання)

$d_z$  - замовлення на продукт (попит), яке треба задовольнити ( $d_z \geq 0$  для всіх  $z$ ),

$V$  – матриця питомих витрат, де:

$v_{tt}$  – питомі «чисті» виробничі витрати на випуск і відвантаження одиниці продукту в той же  $t$ -ий період випуску (без зберігання), головна діагональ матриці питомих витрат (28; 27; 27,8; 29),

$v_{tz}$  – питомі «брудні» витрати на продукт, який виготовлений в  $t$ -ий і відвантажений у майбутній

$z$ -ий період зі складу ( $z > t$ ), це верхня трикутна підматриця (де з кожним наступним періодом вартість зростає на 0,3 за рахунок зберігання),

$v_{tz}$  – питомі «форс-мажорні» витрати на продукт, який виготовлений в  $t$ -ий період виробництва і відвантажений замовнику в  $z$ -ий період ( $z < t$ ) зі складу (це нижня трикутна підматриця зі значеннями 500, які виконують роль заборони явно некоректних дій типу: випустити у квітні, щоб відвантажити у січні. Правда, можливі ситуації, коли ці значення мають сенс у складних ситуаціях, де допускається виконання замовлення із запізненням, скажімо, відвантаження продукції за січневим замовленням на три місяці пізніше з числа випущеної у квітні продукції. Тоді ця величина у клітинці «Випуск (квітень) – Січень» вказує додаткові досить солідні витрати (порівняйте 28 і 500), пов'язані з вчасно невиконаним замовленням – на проведення спеціальних перемовин, узгоджень, компенсацію втрат замовника чи клієнтів з-за затримки поставки замовленої продукції). Інша ситуація – забезпечення січневого замовлення у квітні за рахунок імпорту;

Питомі витрати	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень
Випуск (січень)	28	28,3	28,60	28,90	29,05
Випуск (лютий)	500	27	27,30	27,60	27,75
Випуск (березень)	500	500	27,80	28,10	28,25
Випуск (квітень)	500	500	500	29	29,15

$P_t$  – максимально допустима виробнича потужність в  $t$ -ий період

$y_0$  – початковий запас, «вхід»

$x_{tz}$  – об'єм відвантаження продукції, виготовленої в  $t$ -ий період, споживачам в  $z$ -ий період (у тому числі й  $t$ -ий), елементи цієї матриці треба знайти.

### Задача оптимізації

I. Знайти матрицю  $X = \{x_{tz}\}$  розміром  $N \times N$ ,  $t, z = 1, \dots, N$ , таку, щоб

II. ЦФ Загальні витрати на виробництво, зберігання та імпорт  $VX \rightarrow \min$

III. при обмеженнях:

$$\sum_{t=1}^N x_{tz} = d_z \text{ – повне забезпечення попиту згідно замовлень}$$

$$x_{tt} \leq P_t \text{ – випуск в } t\text{-ий період не перевищує максимальної потужності}$$

та граничних умовах – всі невідомі  $x_{tz}$  невід’ємні (цілий тип забезпечується властивістю транспортної моделі).

### Приклад

Планується діяльність підприємства на 4 місяці, протягом яких продукт виготовляється, частина зразу відвантажується, а залишки у вигляді запасів зберігаються на складі, щоб у відповідний період задовольнити попит. Якщо власними ресурсами попит не забезпечується, або випускати і зберігати виходить дорожче, використовують імпорт. Виробничий процес починається, маючи початковий (перейшов з попереднього періоду планування) запас, величиною 15 од., який зберігається на складі і може бути використаний будь-коли. Задана матриця витрат, де на головній діагоналі – витрати на виробництво, вище її – витрати на зберігання (за кожен місяць 0,3 од.), нижче її – витрати на придбання імпорту. Задані обмеження на максимальний об’єм виробництва (Потужність).

### Таблична модель

#### Початкові дані

Питомі витрати	Вартість зберігання =				
	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень
Випуск (січень)	28	28,3	28,6	28,9	29,05
Випуск (лютий)	500	27	27,3	27,6	27,75
Випуск (березень)	500	500	27,8	28,1	28,25
Випуск (квітень)	500	500	500	29	29,15
Початковий запас	0,15	0,45	0,75	1,05	1,20

#### Формули:

Питомі витрати	Вартість зберігання =				
	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень
Випуск (січень)	28	=C4+\$F\$2	=D4+\$F\$2	=E4+\$F\$2	=F4+\$F\$2/2
Випуск (лютий)	500	27	=D5+\$F\$2	=E5+\$F\$2	=F5+\$F\$2/2
Випуск (березень)	500	500	27,8	=E6+\$F\$2	=F6+\$F\$2/2
Випуск (квітень)	500	500	500	29	=F7+\$F\$2/2
Початковий запас	=F\$2/2	=C8+\$F\$2	=D8+\$F\$2	=E8+\$F\$2	=F8+\$F\$2/2

#### Результат

Відвантаження	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Всього	Потужність	Резерв	T-ціна
Випуск (січень)	43	0	10	0	0	53	60	7	0,0
Випуск (лютий)	0	36	19	0	7	62	62	0	-1,3
Випуск (березень)	0	0	5	59	0	64	64	0	-0,8
Випуск (квітень)	0	0	0	0	0	0	66	66	0,0
Початковий запас	15	0	0	0	0	15	15	0	-27,7
Всього	58	36	34	59	7		У <sub>0</sub>		
Попит	58	36	34	59	7				
T-ціна	28,0	28,3	28,6	28,9	29,0				
Сумарні витрати	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Всього			
Випуск (січень)	1204,00	0	286,00	0	0	1490,00			
Випуск (лютий)	0	972,00	518,70	0	194,25	1684,95			
Випуск (березень)	0	0	139,00	1657,90	0	1796,90			
Випуск (квітень)	0	0	0	0	0	0,00			
Початковий запас	2,25	0	0	0	0	2,25			
Всього	1206,25	972,00	943,70	1657,90	194,25	4974,1	ЦФ		

## Аналіз результатів

### Пряма задача:

матриця потоків показує по рядках об'єми продукції, які замовники отримують зразу чи зі складу, наприклад, січневий випуск продукції відвантажується так: січень (43), березень (10), всього у січні випущено 53 за потужністю 60. Початковий запас відвантажено у січні для задоволення замовлення (58). Загальні витрати склали 4974,1 гр. од., які розподілені по періодах споживання.

### Двоїста задача

нормовані вартості “нульових” невідомих вказують на збільшення загальних витрат при вимушеному визначенні відповідного потоку. Наприклад, вимушений випуск продукції у травні приведе до збільшення ЦФ майже на 21 на кожну одиницю продукту (фрагмент):

Изменяемые ячейки		Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
Ячейка	Имя					
\$B\$11	Випуск (січень) Січень	54,9	0,0	28,0	0	0,8
\$C\$11	Випуск (січень) Лютий	0	0	28,3	1E+30	0
\$D\$11	Випуск (січень) Березень	0	0	28,6	1E+30	0
\$E\$11	Випуск (січень) Квітень	0	0	28,9	1E+30	0
\$F\$11	Випуск (січень) Травень	0	0	29,1	1E+30	0
\$B\$12	Випуск (лютий) Січень	0	473	500,0	1E+30	473,3
\$C\$12	Випуск (лютий) Лютий	36,6	0,0	27,0	0	28,3
\$D\$12	Випуск (лютий) Березень	0	0	27,3	1E+30	0
\$E\$12	Випуск (лютий) Квітень	25,7	0,0	27,6	0	0
\$F\$12	Випуск (лютий) Травень	0	0	27,8	1E+30	0
\$B\$13	Випуск (березень) Січень	0	473	500,0	1E+30	472,8
\$C\$13	Випуск (березень) Лютий	0,0	472,5	500,0	1E+30	472,5

тіньові ціни випуску продукції (від'ємні числа) вказують на зменшення ЦФ при збільшенні потужності на 1. Наприклад, збільшення на 1 «дефіцитної» потужності у лютому зменшить загальні витрати на 1,3. Збільшення початкового запасу на 1 приведе до зменшення ЦФ на 27,7. Ці дані корисні для визначення політики розвитку підприємства, зокрема, для управління розвитком технологічної бази та складського господарства.

**Варіант 1:** додається обмеження на складські приміщення, у всі періоди 45 од.

### Результат:

Відвантаження	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Всього	Потужність	Резерв	Склад	Т-ціна
Випуск (січень)	45	0	0	0	0	45	60	15	45	-0,1
Випуск (лютий)	0	36	0	2	7	45	62	17	45	-1,4
Випуск (березень)	0	0	32,0	13	0	45	64	19	45	-0,9
Випуск (квітень)	0	0	0	44	0	44	66	22	45	0,0
Початковий запас	13	0	2	0	0	15	15	0		-27,9
Всього	58	36	34	59	7		У0			
Попит	58	36	34	59	7					
Т-ціна	28,1	28,4	28,7	29,0	29,1					
Сумарні витрати	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Всього				
Випуск (січень)	1260,00	0	0,00	0	0	1260,00				
Випуск (лютий)	0	972,00	0,00	55	194,25	1221,45				
Випуск (березень)	0	0	889,60	365,30	0	1254,90				
Випуск (квітень)	0	0	0	1276	0	1276,00				
Початковий запас	1,95	0	1	0	0	3,45				
Всього	1261,95	972,00	891,10	1696,50	194,25	5015,8	ЦФ			

**Варіант 2:** використання імпорту (попит перевищує виробничі потужності)

### Результат:

Відвантаження	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Всього	Потужність	Резерв	Склад	Т-ціна
Випуск (січень)	60	0	0	0	0	60	60	0	45	-472,0
Випуск (лютий)	0	36	0	26	0	62	62	0	45	-1,4
Випуск (березень)	0	0	34	23	7	64	64	0	45	-0,9
Випуск (квітень)	3	0	0	10	0	13	66	53	45	0,0
Початковий запас	15	0	0	0	0	15	15	0		-499,9
Всього	78	36	34	59	7		У <sub>0</sub>			
Попит	78	36	34	59	7					
Т-ціна	500	28,4	28,7	29,0	29,1					

Сумарні витрати	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Всього	
Випуск (січень)	1680,00	0	0,00	0	0	1680,00	
Випуск (лютий)	0	972,00	0,00	718	0,00	1689,60	
Випуск (березень)	0	0	945,20	646,30	198	1789,25	
Випуск (квітень)	1500	0	0	290	0	1790,00	
Початковий запас	2,25	0	0	0	0	2,25	
Всього	3182,25	972,00	945,20	1653,90	197,75	6951,1	ЦФ

### Аналіз результату

Максимальне замовлення у січні складає величину 60 (потужність) + 15 (початковий запас) = 75. Тому попит у 75 од., виконується за рахунок придбання 3-ох од. за імпортом (по 500 од.), ЦФ = 6951,1.

Відповідно, суттєво зросли «цінності» випуску продукції у січні (т-ціна = -472) та початкового запасу (т-ціна = -499,9).

### Задача 6.5. Динамічна модель дивідендної політики акціонерного товариства

#### Постановка задачі

Акціонерне товариство (АТ) має суму інвестицій  $A_0$ , акціонерам треба виплатити  $p\%$  нарахувань, отриманих протягом періоду планування ( $T$ ) в умовах нерівномірних щомісячних процентних ставок так, щоб максимізувати прибуток.

#### Приклад

$A_0 = 100$  гр. од.,  $T = 12$  місяців,  $p\% = 4\%$ .

#### Задача оптимізації

I. Знайти план виплати щомісячних дивідендів  $D = (d_1, \dots, d_{12})$  такий, щоб

II. ЦФ  $S = \sum_{t=1}^{12} y_t - y_0 \rightarrow \max$   $y_t = y_{t-1} \left(1 + \frac{r_t}{100}\right) - d_t$ ,  $y_0 = A_0$

III. а) без обмежень (без виплат)

б) за обмежень:  $\sum_{t=1}^{12} d_t = 0.04S$

та граничних умов: усі  $d_t \geq 0$ .

#### Комп'ютерна реалізація математичної моделі

**Варіант:** а) без обмежень на виплату дивідендів

Результат:

Грошові потоки														
№ періода (%)	Початкова інвестиція												ЦФ=	88,54
	січень	лютий	березень	квітень	травень	червень	липень	серпень	вересень	жовтень	листопад	грудень		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
8,0	4,0	6,0	4,0	3,0	7,0	6,5	3,4	5,6	3,3	6,1	8,4			
на початок	100,00	108,00	112,32	119,06	123,82	127,54	136,46	145,33	150,28	158,69	163,93	173,93		
на кінець	108,00	112,32	119,06	123,82	127,54	136,46	145,33	150,28	158,69	163,93	173,93	188,54		
прибуток	8,00	4,32	6,74	4,76	3,71	8,93	8,87	4,94	8,42	5,24	10,00	14,61		

### Аналіз результату

Якщо не робити виплати дивідендів (вектор  $D = 0$ ), тоді прибуток від інвестування за заданими щомісячними процентними ставками складе величину  $S = 88,54$  од.

Варіант: б) обов'язкова виплата дивідендів ( $4\%S$ )

### Результат:

Грошові потоки															
№ періода (%)	Початкова інвестиція												Виплати =	3,41	4%
	січень	лютий	березень	квітень	травень	червень	липень	серпень	вересень	жовтень	листопад	грудень			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12				
8,0	4,0	6,0	4,0	3,0	7,0	6,5	3,4	5,6	3,3	6,1	8,4				
на початок	100,00	108,00	112,32	119,06	123,82	127,54	136,46	145,33	150,28	158,69	163,93	173,93			
на кінець	108,00	112,32	119,06	123,82	127,54	136,46	145,33	150,28	158,69	163,93	173,93	185,13			
прибуток	8,00	4,32	6,74	4,76	3,71	8,93	8,87	4,94	8,42	5,24	10,00	11,20			
дивіденди	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,41	3,41		
н-варт	-0,72	-0,65	-0,56	-0,50	-0,46	-0,37	-0,29	-0,24	-0,18	-0,14	-0,08	0,00			

### Аналіз результату

#### Пряма задача

Прибуток від інвестування за заданими щомісячними процентними ставками складе величину  $S = 85,13$  од., з них 3,41 од. – це дивіденди, які найкраще виплатити наприкінці року у грудні.

#### Двоїста задача

Нормовані вартості заданих процентних ставок (від'ємні числа) вказують на потенційні витрати при вимушених виплатах дивідендів у відповідні місяці, найбільші витрати – на початку року, коли накопичення невеликі й надалі при нарощуванні грошових потоків принесуть менше користі, найменші – наприкінці року, коли накопичена більша сума й процес накопичення завершено.

### Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов

Умова 1: треба виплатити 1 од. дивідендів у першому півріччі, для її реалізації у модель

уводиться додаткове обмеження:  $\sum_{t=1}^6 d_t = 1$ .

### Результат:

Грошові потоки															
№ періода (%)	Початкова інвестиція												Виплати =	3,39	4%
	січень	лютий	березень	квітень	травень	червень	липень	серпень	вересень	жовтень	листопад	грудень			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12				
8,0	4,0	6,0	4,0	3,0	7,0	6,5	3,4	5,6	3,3	6,1	8,4				
на початок	100,00	108,00	112,32	119,06	123,82	127,54	135,46	144,27	149,17	157,53	162,73	172,65			
на кінець	108,00	112,32	119,06	123,82	127,54	135,46	144,27	149,17	157,53	162,73	172,65	184,76			
прибуток	8,00	4,32	6,74	4,76	3,71	7,93	8,81	4,91	8,35	5,20	9,93	12,11			
дивіденди	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2,39	3,39		
н-варт	-0,35	-0,29	-0,19	-0,14	-0,09	0,00	-0,29	-0,24	-0,18	-0,14	-0,08	0,00			
	1,0	1-ше півріччя													

### Аналіз результату

#### Пряма задача

Прибуток від інвестування за заданими щомісячними процентними ставками складе величину  $S = 84,76$  од., з них 3,39 од. – це зменшена сума дивідендів, які найкраще виплатити якнайпізніше протягом півріччя – у червні (1 од.) та наприкінці року у грудні (2,39 од.).

#### Двоїста задача



Значення нормованих вартостей заданих процентних ставок (від'ємні числа) вказують на потенційні витрати при вимушених витратах у відповідні місяці.

**Умова 2:** бажано виплачувати дивіденди щомісяця частками по  $k_t = \frac{1}{12} S$ , для її реалізації

у модель вводиться додаткове обмеження:  $d_t = k_t, t = 1, \dots, 12$ .

### Результат:

Грошові потоки															
100,00	Початкова інвестиція														
	січень	лютий	березень	квітень	травень	червень	липень	серпень	вересень	жовтень	листопад	грудень			
№ періода	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Виплати =	3,36	4%
(%)	8,0	4,0	6,0	4,0	3,0	7,0	6,5	3,4	5,6	3,3	6,1	8,4	ЦФ=	83,96	
на початок	100,00	107,72	111,75	118,17	122,62	126,02	134,56	143,03	147,61	155,60	160,45	169,96			
на кінець	107,72	111,75	118,17	122,62	126,02	134,56	143,03	147,61	155,60	160,45	169,96	183,96		183,96	
прибуток	7,72	4,03	6,43	4,45	3,40	8,54	8,47	4,58	7,99	4,85	9,51	14,00			
дивіденди	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28		3,36	сума
обмеження	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28			
t-ціна	-0,71	-0,64	-0,55	-0,50	-0,45	-0,36	-0,28	-0,24	-0,18	-0,14	-0,08	0,00			

### Аналіз результату

#### Пряма задача

Прибуток від інвестування за заданими щомісячними процентними ставками складе величину  $S = 83,96$  од., з них 3,36 од. – це зменшена сума дивідендів, які виплачуються щомісяця величиною приблизно  $k_t = 0,28$  од.

#### Двоїста задача

Тіньові ціни уведених обмежень (рядок «обмеження») на шукані значення дивідендів (від'ємні числа) вказують на потенційні витрати при вимушеному збільшенні витрат у відповідні місяці, найгірше – на початку року.

### Задача 6.6. Про заміну машинного парку (мережева матрична версія)

Горизонт планування складається з 4-ох часових періодів (років). Треба визначити поведінку щодо підтримання технічного стану машинного парку на заданому рівні при мінімізації витрат на його утримання за схемою “придбати-обслуговувати-замінити”. Пропонується мережева версія моделі, де простір пошуку (час і стан машини) мають дискретний характер і розв'язок зводиться до пошуку екстремального шляху на мережі, представленій матрицею.

Обмеження: кожного року можна придбати не більше однієї машини.

Припущення: ціна машини і експлуатаційні витрати не залежать від року, у якому машину купують чи обслуговують.

### Математична модель (матрична версія)

#### Позначення:

$N$  – число періодів ( $N = 4$ ), кожному періоду відповідає дуга сітки

$i$  – номер початку дуги:  $i = 1, 2, 3, 4$

$j$  – номер кінця дуги:  $j = 2, 3, 4, 5$

$c_{ij}$  – витрати на придбання машини на початку  $i$ -го періоду і його обслуговування до початку  $j$ -го періоду, ці величини утворюють матрицю вартостей  $C$

$x_{ij}$  – невідома змінна,  $x_{ij} = 1$ , якщо машина придбана в  $i$ -му періоді й замінюється в  $j$ -му періоді, і 0, в іншому випадку

$Z$  – загальні витрати:  $Z = \sum c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$ .

Види витрат та їх оцінку розглянемо на трьох можливих стратегіях:

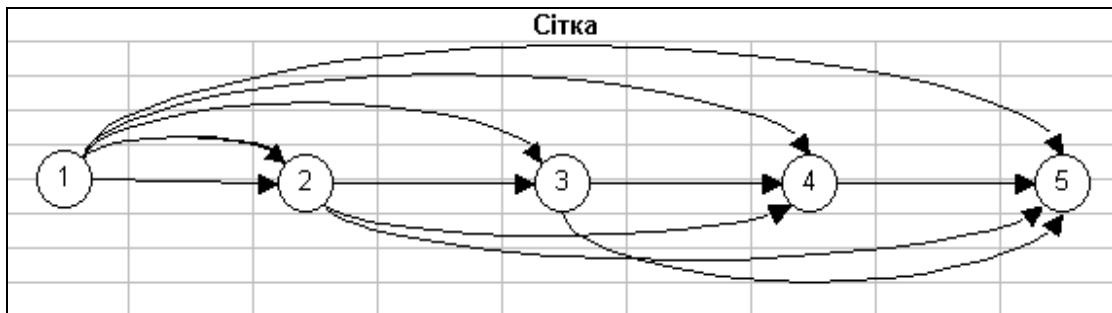
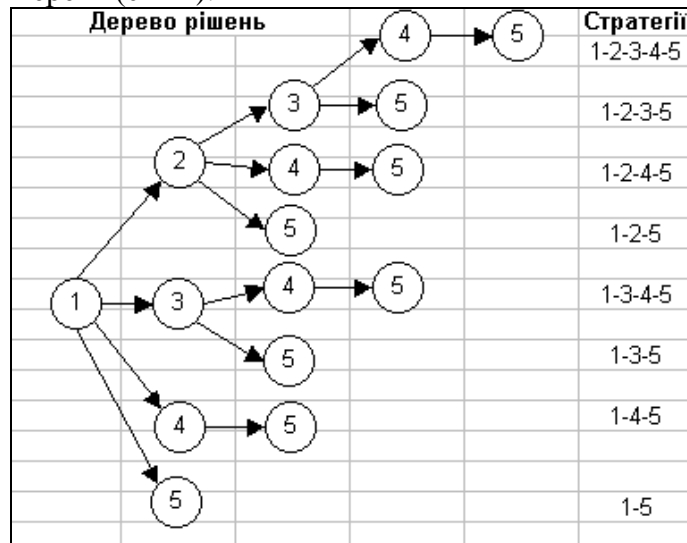
- купувати нову машину на початку кожного періоду, це найбільші витрати на придбання і нульові витрати на обслуговування, загальні витрати становлять:  $c_{12} + c_{23} + c_{34} + c_{45}$

- купити нову машину на початку першого періоду і далі витратитися лише на її ремонт та обслуговування; це разові витрати на придбання і найбільші – на обслуговування, загальні витрати становлять:  $c_{15}$
  - купити нову машину на початку 1-го та 4-го періодів, загальні витрати становлять:  $c_{14}+c_{45}$  тощо.
- Отже, існує багато можливих варіантів, серед яких треба знайти найкращий, у прикладі – з найменшими витратами. Тому задача про заміну є типовою оптимізаційною задачею.

Початкові дані:

- ціна нової машини = 1,6 тис. гр. од.,
- вартість обслуговування: = 0,5; 1,0; 1,5 і 2,2 тис. гр. од. за 1, 2, 3 і 4 періоди експлуатації, відповідно.

Схематично всі варіанти (переходи) можна зобразити у вигляді розгорнутого дерева рішень чи компактної мережі (сітки):



Мережа (мережева модель процесу придбання та обслуговування машини) складається з 4 пар вузлів, кожна з яких відповідає певному часовому періоду: пара 1-2 – перший рік, пара 2-3 – другий рік тощо, а дуги на ній – це певні стратегії, вони показують, наприклад, що придбана на початку першого періоду (початок – вузол 1) машина може експлуатуватися один (1→2), два (1→3), три (1→4) чи чотири (1→5) роки – їх показано стрілками.

Якщо вибрано лише один період експлуатації (1→2), тоді на початку другого періоду (початок – вузол 2) купують нову машину, яка експлуатується один (2→3), два (2→4) чи три (2→5) роки тощо. Кожна стратегія має певну вартісну оцінку.

Отже, маємо багатоваріантну оптимізаційну задачу, де серед багатьох можливих і допустимих варіантів треба вибрати кращий за певним критерієм.

### Можливі стратегії та їх вартості

На рисунку вертикальними жирними лініями позначені придбання та заміни, а горизонтальними подвійними – ремонт і експлуатація, числами – відповідні витрати. Зокрема, кольором виділений знайдений нижче оптимальний варіант, за яким першу машину придбали на початку 1-го року, далі два роки її експлуатації, заміна на початку 3-го року і її експлуатація у 3-4 періодах:

	Період планування					
	Початок	1 рік	2 рік	3 рік	4 рік	5 рік
1 рік	1,6	0,5	1,0	1,5	2,2	
2 рік		1,6	0,5	1,0	1,5	
3 рік			1,6	0,5	1,0	
4 рік				1,6	0,5	
Кінець						

### Пояснення:

#### Рік 1:

- стратегія (1→2): купити нову машину (ціна 1,6) і експлуатувати її 1 рік, витрати:  $1,6 + 0,5 = 2,1$ ,

перехід до стратегій 2-го року

	Початок	1 рік
рік	1,6	0,5

- стратегія (1→3): купити нову машину (1,6) і експлуатувати її 2 роки, витрати:  $1,6 + 0,5 + 1,0 = 3,1$ ,

перехід до стратегій 3-го року

	Початок	1 рік	2 рік
1 рік	1,6	0,5	1,0

- стратегія (1→4): купити нову машину (1,6) і експлуатувати її 3 рік, витрати:  $1,6 + 0,5 + 1,0 + 1,5 = 4,6$ ,

перехід до стратегій 4-го року

	Початок	1 рік	2 рік	3 рік
1 рік	1,6	0,5	1,0	1,5

- стратегія (1→5): купити нову машину (1,6) і експлуатувати її 4 роки, витрати:  $(0,5 + 1,0 + 1,5 + 2,2) = 6,8$

	Початок	1 рік	2 рік	3 рік	4 рік
1 рік	1,6	0,5	1,0	1,5	2,2

#### Рік 2:

- стратегія (2→3) купити нову машину (1,6) і експлуатувати її 1 рік, витрати:  $1,6 + 0,5 = 2,1$ ,

перехід до стратегії 3-го року

- стратегія (2→4) купити нову машину (1,6) і експлуатувати її 2 рік, витрати:  $1,6 + 0,5 + 1,0 = 3,1$ ,

перехід до стратегії 4-го року

- стратегія (2→5) купити нову машину (1,6) і експлуатувати її 3 рік, витрати:  $1,6 + 0,5 + 1,0 + 1,5 = 4,6$ .

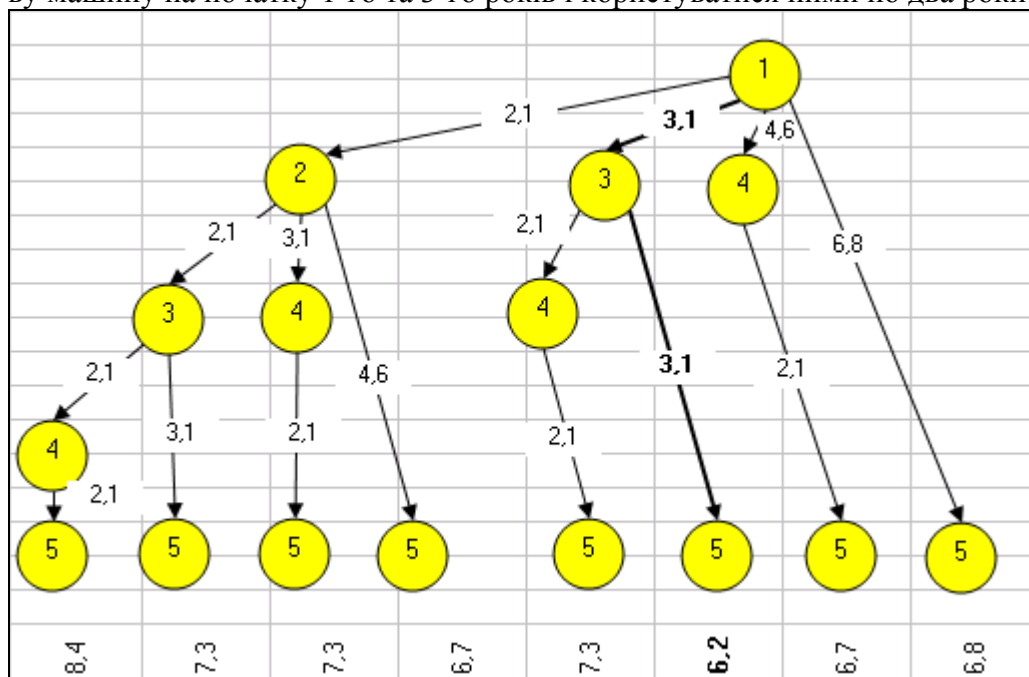
Рік 3:

- стратегія (3→4) купити нову машину (1,6) і експлуатувати її 1 рік, витрати: 1,6 + 0,5 = **2,1**,  
перехід до стратегії 4-го року
- стратегія (3→5) купити нову машину (1,6) і експлуатувати її 2 роки, витрати: 1,6 + 0,5 + 1,0 = **3,1**.

Рік 4:

- стратегія (4→5) купити нову машину (1,6) і експлуатувати її 1 рік, витрати: 1,6 + 0,5 = **2,1**.

Отже, всі стратегії у наочній формі представлені у вигляді дерева рішень, найдорожчий варіант (1→2→3→4) – кожного року купувати нову машину (8,4), за найдешевшим (оптимальним) планом (1→3→5) витрати склали 6,2. Згідно цього плану, вигідно купити нову машину на початку 1-го та 3-го років і користуватися ними по два роки.



**Задача оптимізації**

I. Знайти матрицю  $X = \{x_{ij}\}$ , де  $x_{ij} = 1$ , якщо машину придбати в  $i$ -ий період, яка буде замінена в  $j$ -ий період,

$x_{ij} = 0$ , у іншому випадку, таку, щоб

II. ЦФ Загальні витрати  $Z = \sum_{i=1}^N C_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$

III. за обмежень:

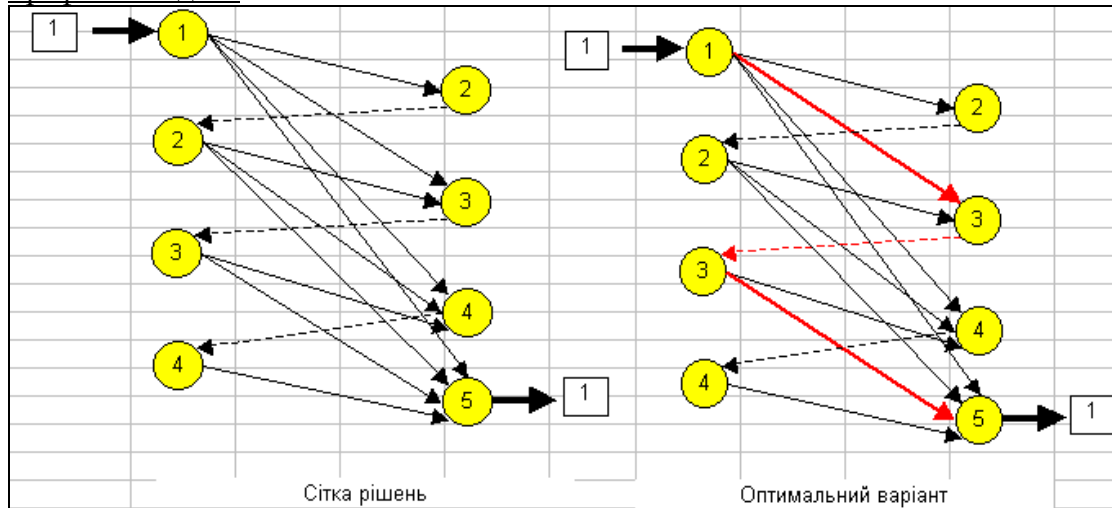
$$\sum_{j=1}^N x_{1j} = 1 \text{ (на початку періоду – 1 машина)}$$

$$\sum_{i=1}^N x_{iN} = 1 \text{ (у кінці періоду – 1 машина)}$$

$$\sum_j x_{ij} = \sum_i x_{ij} \text{ для } i > 1, j < N \text{ (баланс для проміжних періодів)}$$

та граничних умов – всі  $x_{ij} \geq 0$ .

## Графічна модель



## Таблична модель

### Початкові дані

ЗАДАЧА ПРО ЗАМІНУ				
Початкові дані (питомі витрати)				
Придбання	Ремонт та обслуговування			
1,6	0,5	1,0	1,5	2,2
Ланцюг	2,1	3,1	4,6	6,8
	Рік 1	Рік 2	Рік 3	Рік 4
Придбання + обслуговування				
Норми	2 рік	3 рік	4 рік	5 рік
1 рік	2,1	3,1	4,6	6,8
2 рік		2,1	3,1	4,6
3 рік			2,1	3,1
4 рік				2,1

### Результати:

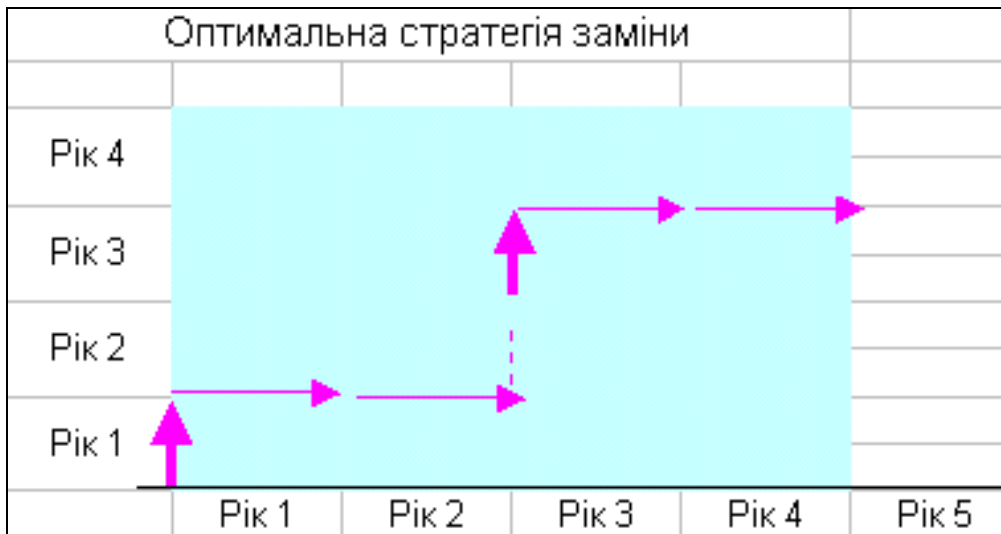
План	2 рік	3 рік	4 рік	5 рік	Обмеж
1 рік	0	1	0	0	1
2 рік	0	0	0	0	0
3 рік	0	0	0	1	1
4 рік	0	0	0	0	0
Входи	0	1	0	1	
					6,2 Тц (4 рік)

Витрати	2 рік	3 рік	4 рік	5 рік	Виходи	Т-ціна
1 рік	0,0	3,1	0,0	0,0	3,1	0
2 рік	0,0	0,0	0,0	0,0	0	-2,1
3 рік	0,0	0,0	0,0	3,1	3,1	-3,1
4 рік	0,0	0,0	0,0	0,0	0	-4,6
Всього	0	3,1	0	3,1	6,2	Витрати (ЦФ)
Н-вартості	2 рік	3 рік	4 рік	5 рік		
1 рік				0,6		
2 рік		1,1	0,6	0,5		
3 рік	1,0		0,6			
4 рік	2,5	1,5		0,5		

## Аналіз результату

### Пряма задача

Оптимальний план:  $x_{13}=1$  машину купують на початку 1-го року і експлуатують її до 3-го року;  $x_{35}=1$ , на 3-му році заміна і експлуатація протягом двох років, мінімальні загальні витрати склали 6,2 од.



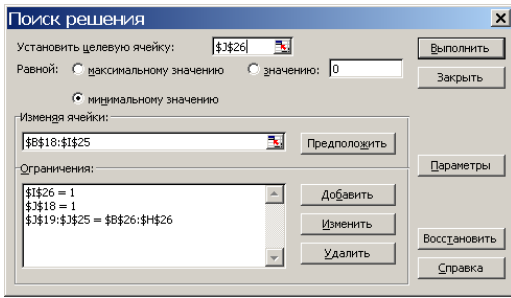
Двоїста задача

- нормовані вартості для невідомих вказують на збільшення витрат при відповідних вимушених діях
- тіньові ціни обмежень вказують на варіанти зниження загальних витрат.

**Таблична модель (8 періодів)**

<b>ЗАДАЧА ПРО ЗАМІНУ</b>									
Придбання	Ремонт та обслуговування								
<b>1,6</b>	0,5	1,2	1,8	2,3	2,8	3,6	4,2	5,3	
Витрати	2,1	3,3	5,1	7,4	10,2	13,8	18	23,3	
	Період 1	Період 2	Період 3	Період 4	Період 5	Період 6	Період 7	Період 8	Період 9
	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	2,1	3,3	5,1	7,4	10,2	13,8	18,0	23,3	
2		2,1	3,3	5,1	7,4	10,2	13,8	18,0	
3			2,1	3,3	5,1	7,4	10,2	13,8	
4				2,1	3,3	5,1	7,4	10,2	
5					2,1	3,3	5,1	7,4	
6						2,1	3,3	5,1	
7							2,1	3,3	
8								2,1	
	2	3	4	5	6	7	8	9	Виходи
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Входи	0	1	0	1	0	1	0	1	13,2 ЦФ
Оптимальна стратегія заміни: (1-3) + (3-5) + (5-7) + (7-9)									

Нові машини рекомендується придбати у 3-му, 5-му, 7-му та 9-му періодах, що забезпечить найменші експлуатаційні витрати (13,2).



## Задача 6.7. Про заміну техніки та обладнання (мережева векторна версія)

### Постановка задачі

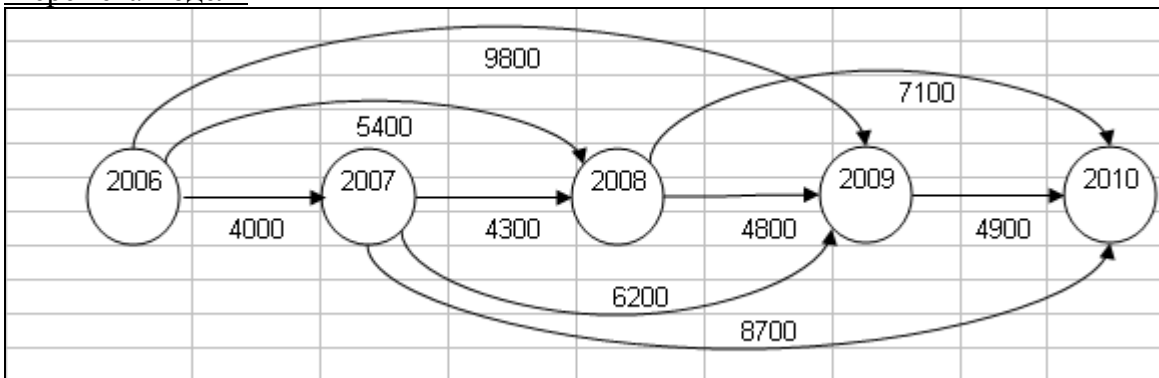
Таксопарк формує план оновлення парку своїх машин на наступні 5 років (2006-2010) з розрахунку, що кожний автомобіль має відпрацювати не менше одного і не більше 3-ох років. Таблиця початкових даних вказує рік купівлі машин (2006-2009) і вартості їх обслуговування протягом наступних років періоду планування.

Рік придбання	Вартість заміни		
	1-ий рік	2-ий рік	3-ий рік
2006	4000	5400	9800
2007	4300	6200	8700
2008	4800	7100	
2009	4900		

Задачу можна представити орієнтованим графом (мережею, сіткою), вузлами якої є роки, їх 5, а дугами (їх 9) – періоди експлуатації: з вузлів 2006 та 2007 їх виходить по 3 (3 роки експлуатації), з 2008 – по 2 (бо до кінця 2010 року залишається 2 роки), з 2009 – 1 дуга, їх довжині задані таблицею.

Розв'язок зводиться до пошуку найкоротшого шляху у цій сітці, побудованій із врахуванням діючих обмежень: термін експлуатації 1÷3 роки, в один рік можна придбати 1 машину (одиничний потік).

### Мережева модель



### Математична модель

#### Позначення

З теорії потокової оптимізації табличними засобами щодо позначень відомо, що:

- кожен вузол має для зручності певний порядковий номер (в обчисленнях не використовується) і власну назву (наприклад, «2008») для обчислень, відповідно, усі вузли утворюють вектор з назв (в прикладі – 5 елементів);
- кожна дуга для зручності має певний порядковий номер і власну назву, наприклад, №1, «2006-2007» (в обчисленнях не використовуються), для табличних обчислень має власні

початок і кінець, наприклад, (2006, 2009), які у точності (зв'язуванням чи копіюванням, але не набором) задають з множини назв вузлів, відповідно, усі дуги для обчислень представлені двома векторами: початків і кінців (в прикладі – по 9 елементів кожний).

Отже:

$i$  – номер дуги (період експлуатації),  $i = 1, \dots, 9$

$j$  – номер вузла,  $j = 1, \dots, 5$

$N = \{n_j\}$  – множина назв вузлів, де  $n_j$  – назва  $j$ -го вузла, у прикладі множина:  $N = \{2006, 2007, 2008, 2009, 2010\}$

$p_i, k_i$  – назви початку і кінця кожної  $i$ -ої дуги,  $p_i, k_i \in N$

$x_i$  – потік  $i$ -ою дугою, якщо по  $i$ -ій дузі є потік (у цей період машина знаходиться в експлуатації), тоді  $x_i = 1$ , інакше  $x_i = 0$ ,

$F_{\text{вх}}(j)$  – сума вхідних потоків в  $j$ -ий вузол

$F_{\text{вих}}(j)$  – сума вихідних потоків в  $j$ -ий вузол

$d_i$  – довжина  $i$ -ої дуги (вартість експлуатації протягом  $i$ -го періоду)

$D$  – загальна довжина шляху від початку (вузол 2006) до кінця (вузол 2010).

### Задача оптимізації

I. Знайти вектор  $X = \{x_i\}$ , такий, щоб

II. ЦФ  $D = \sum_{i=1}^9 d_i x_i \rightarrow \min$

III. за обмежень:

$F_{\text{вх}}(1) = -1$  (потік втікає у вузол-джерело)

$F_{\text{вих}}(9) = 1$  (потік витікає з вузла-стоку)

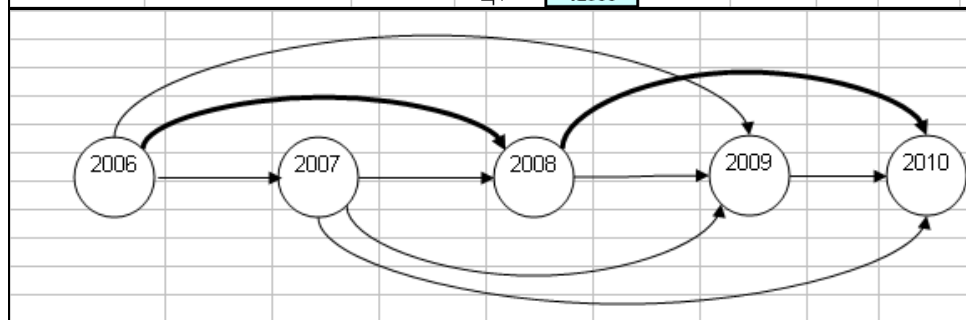
$F_{\text{вх}}(j) = F_{\text{вих}}(j)$  для  $j > 1, j < 9$  (принцип збереження потоку у проміжному вузлі)

та граничних умов: усі  $x_i \in \{0, 1\}$ .

### Таблична модель

#### Початкові дані і результат

№	Дуга	Початок	Кінець	Вартість	План	Н-варт	№	Вузол	Вхідні	Вихідні	Вх-Вих	ПЧО
1	2006-2007	2006	2007	4000	0	0	1	2006	0	1	-1	-1
2	2006-2008	2006	2008	5400	1	0	2	2007	0	0	0	
3	2006-2009	2006	2009	9800	0	2200	3	2008	1	1	0	
4	2007-2008	2007	2008	4300	0	2900	4	2009	0	0	0	
5	2007-2009	2007	2009	6200	0	2600	5	2010	1	0	1	1
6	2007-2010	2007	2010	8700	0	200						
7	2008-2009	2008	2009	4800	0	2600						
8	2008-2010	2008	2010	7100	1	0						
9	2009-2010	2009	2010	4900	0	0						
				ЦФ=	12500							



### Аналіз результату

#### Пряма задача

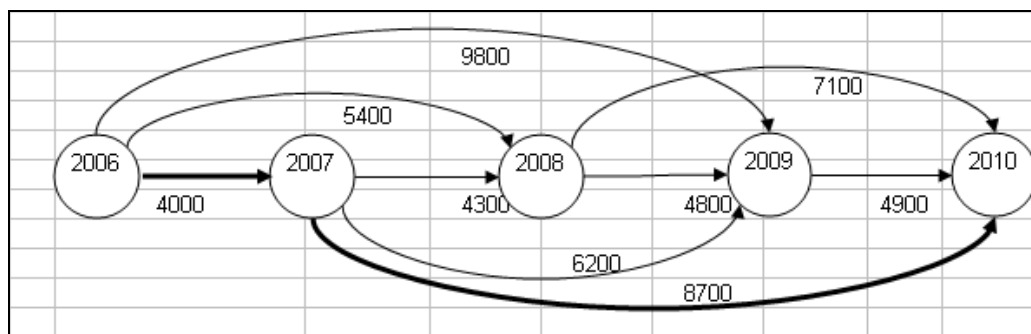
Оптимальний план передбачає придбання двох машин у 2006 та 2008 рр.: перша експлуатується 3 роки у період 2006-2008 рр., друга – 2 роки у період 2008-2010 рр., мінімальні загальні витрати складуть 12500 гр. од.

#### Двоїста задача



Нормовані вартості невідомих вказують на збільшення витрат, якщо машина вольовим рішенням буде придбана у інші роки. Наприклад, двоїста оцінка для дуги  $x_6 = 0$  дорівнює 200 – якщо буде вирішено придбати машину у 2007 році, загальні витрати збільшаться на 200 гр.од.:

№	Дуга	Початок	Кінець	Вартість	План
1	2006-2007	2006	2007	<b>4000</b>	<b>1</b>
2	2006-2008	2006	2008	5400	0
3	2006-2009	2006	2009	9800	0
4	2007-2008	2007	2008	4300	0
5	2007-2009	2007	2009	6200	0
6	2007-2010	2007	2010	<b>8700</b>	<b>1</b>
7	2008-2009	2008	2009	4800	0
8	2008-2010	2008	2010	7100	0
9	2009-2010	2009	2010	4900	0
			ЦФ=	<b>12700</b>	



## Глава 7. Максимізація/мінімізація нелінійної функції однієї змінної

Досить часто тема нелінійної оптимізації (максимізації/мінімізації) починається з постановки нелінійної й багатовимірної оптимізаційної задачі із  $n$  шуканими невідомими у формі:

I. Знайти план  $X = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , щоб

II. ЦФ  $y = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min)$

III. за обмежень:  $g_k(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \leq b_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ ,

що із самого початку викликає багато запитань користувачів-нематематиків з-за складності математичного й алгоритмічного апарату та специфічної термінології, що застосовується, високого рівня абстракції й, головне, з-за неможливості проілюструвати хід процесу оптимізації у наочній формі (коли  $n > 2$ ).

Тож є три причини вивчення методів оптимізації нелінійної функції однієї змінної ( $n = 1$ ) [18, 29, 85]:

- на одновимірних задачах можна краще зрозуміти труднощі, що виникають при розв'язанні нелінійних оптимізаційних задач
- у багатьох методах алгоритм розв'язання багатовимірної нелінійної задачі на окремому кроці, по суті, розв'язує одновимірну задачу
- засобами наукової графіки можна графічно розв'язати й наочно представити процес нелінійної оптимізації.

### Нелінійні функції однієї змінної та їх властивості

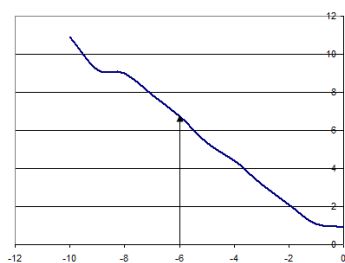
**Функція** Якщо задано правило, за яким кожному значенню змінної  $x \in J$  ставиться у відповідність єдине значення  $y$ , то говорять, що задано залежність або функцію  $y = f(x)$ , де:

- $x$  – незалежна змінна (аргумент),
- $y$  – залежна змінна (функція),
- $J$  – проміжок значень  $x$ , що називається областю визначення функції (ОВФ),
- $X$  – множина значень  $x$ , які приймає функція в ОВФ, це – область значень функції (ОЗФ),
- $Y$  – множина значень функції  $y$
- $f$  – відображення (закон), за яким елементи (точки) множини  $X$  переходять в елементи (точки) множини  $Y$ , відображення може бути:

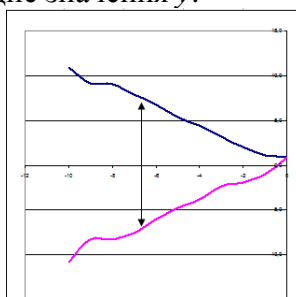
а) однозначним (одному значенню  $x$  відповідає одне значення  $y$ ) й неоднозначним або багатозначним, коли:

б) одному значенню  $x$  відповідає кілька значень  $y$  або

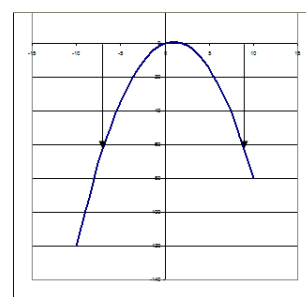
в) кільком значенням  $x$  відповідає одне значення  $y$ :



(а)



(б)



(в)

Проміжки визначення і значень функції можуть бути: відкритими, замкненими, напіввідкритими, обмеженими та необмеженими, що важливо для задач умовної оптимізації (з обмеженнями).

Способи, форми і комп'ютерні засоби задання функції:

- графічний (графік функції, наукова графіка),
- аналітичний (формулою, редактор формул),
- табличний (на папері, електронна таблиця).

Нелінійна функція може бути:

- неперервною й перервною (розривною, в їх числі – дискретна)
- необмеженою й обмеженою
- монотонно зростаючою чи монотонно спадною, усюди чи на окремих проміжках
- парною чи непарною
- вигнутою (догори) чи опуклою (донизу)
- елементарною, простою чи складеною тощо.

Першою конструкцією, де використовується нелінійна функція, є нелінійне рівняння.

### Задача 7.1. Розв'язання нелінійного рівняння

Попередницею надбудови Solver for Excel (*Поиск решения*), якою ми користуємось, є надбудова Goal Seek (*Подбор параметра*, досл. «цільовий пошук»), яка визначила інтерфейс користувача з програмою, який пізніше був використаний в програмі Solver.

Програма *Подбор параметра* призначена для розв'язання нелінійного рівняння з однією невідомою  $f(x) = b$ , де:  $f(x)$  – ліва частина (ЛЧ),  $b$  – права частина (ПЧ) рівняння,  $x$  – шукана невідома, за допомогою вбудованого обчислювального методу ітераційного (багатокрокового) типу.

При  $b = 0$  значення  $x$  називається коренем рівняння  $f(x) = 0$ .

Отже, програма-надбудова *Подбор параметра* – потужний засіб Excel для реалізації аналізу «що-якщо» шляхом розв'язання рівняння  $f(x) = 0$ .

Розв'язати рівняння за технологією «Що-Якщо?», значить, отримати відповідь на запитання, ЩО є значенням  $x$ , ЯКЩО функція  $f(x) = 0$ ?

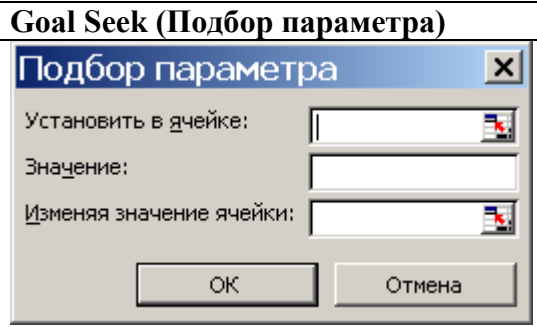
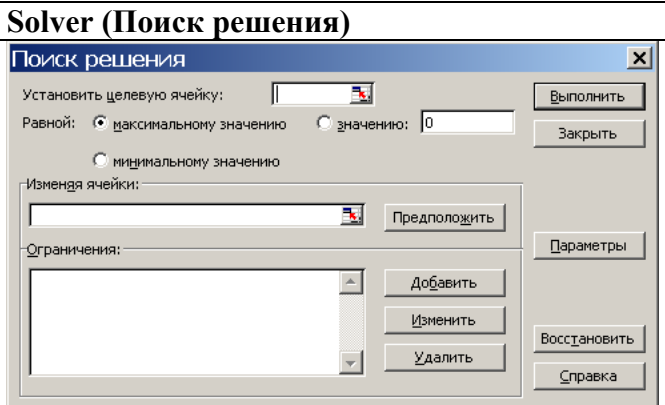
#### Програма Подбор параметра

Виклик:

Excel 2003: Сервис → Подбор параметра

Excel 2007/2010: Данные → Анализ «что если» → Подбор параметра.

Інтерфейс програм *Подбор параметра* й *Поиск решения* в Excel 2003 (порівняльна таблиця)

Goal Seek (Подбор параметра)		Solver (Поиск решения)	
			
Оригінал	Версія (рос. мо-ва)	Оригінал	Версія (рос. мова)
Set cell:	Установить в	Set Target Cell:	Установить целевую

	ячейке (ЛЧ):		ячейку: (ЦФ)
To value:	Значение: (ПЧ)	Value of:	Значение:
By changing cell:	Изменяя значение ячейки: (x)	By changing cell:	Изменяя ячейки: (план X)
		Equal to:	Равной:
		Subject to the Constraints:	Ограничение:
		Solve	Выполнить
		Add	Добавить
		Change	Изменить
		Delete	Удалить
		Options	Параметры

### Приклад 1.

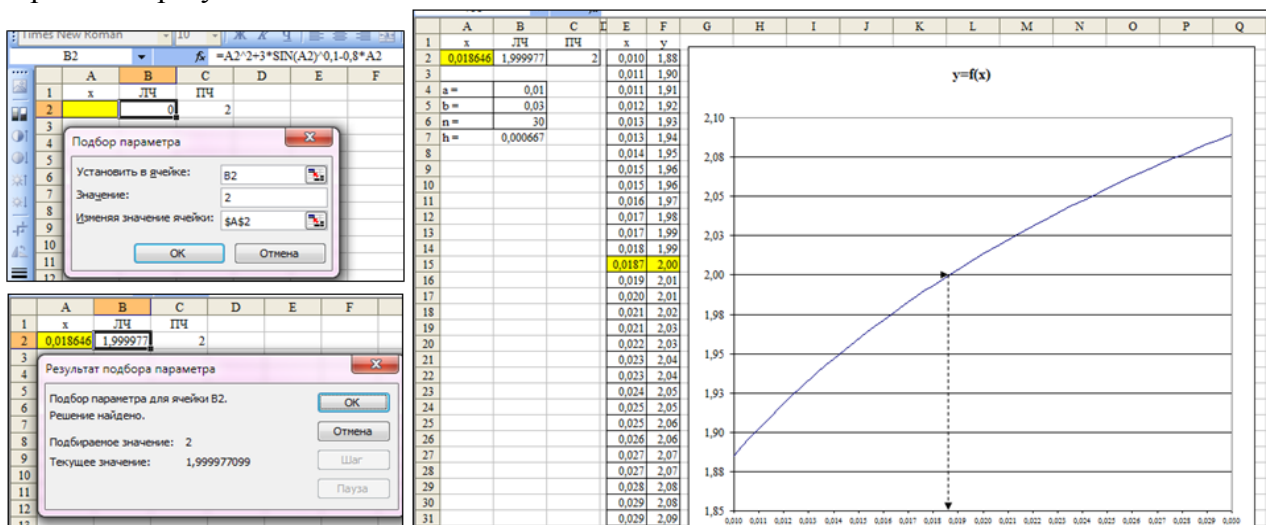
Розв'язати нелінійне рівняння  $x^2 + 3\sin x^{0,1} - 0,8x = 2$

#### Порядок роботи:

- визначити таблицю з трьох клітинок:
  - для невідомої  $x$  (адреса A2), її вміст за умовчужанням 0
  - для ЛЧ рівняння (адреса B2), її вміст - формула  $=A2^2 + 3*\text{SIN}(A2^{0,1}) - 0,8*A2$
  - для ПЧ рівняння (адреса C2), її вміст 2
- виклик надбудови *Подбор параметра* й визначити у її вікні необхідні значення трьох полів:
  - **Установить в ячейке:** B2, там уведено вираз  $f(x)$
  - **Значение:** (вводимо 2, бо посилання на адресу не діє), це значення ПЧ
  - **Изменяя значение ячейки:** (вказуємо A2), тобто, підбір параметру  $x$  здійснюється послідовною зміною значення  $x$ .

Після натискання кнопки ОК починається автоматичний процес підбору параметру  $x$  (вбудованим обчислювальним методом розв'язання нелінійних рівнянь з однією невідомою ітераційного типу), для заданого рівняння  $f(x) = 2$  корінь  $x \approx 0,1864$ .

Для перевірки будемо графік цього рівняння на проміжку  $[0,01; 0,03]$ , щоб підтвердити отриманий результат обчислень:



#### Програма *Поиск решения*

Покажемо логічний зв'язок між програмами *Подбор параметра* й *Поиск решения*.

Демонструється використання локалізованих й оригінальних версій надбудови *Поиск решения*.

## Програма *Поиск решения (Excel 2003)*

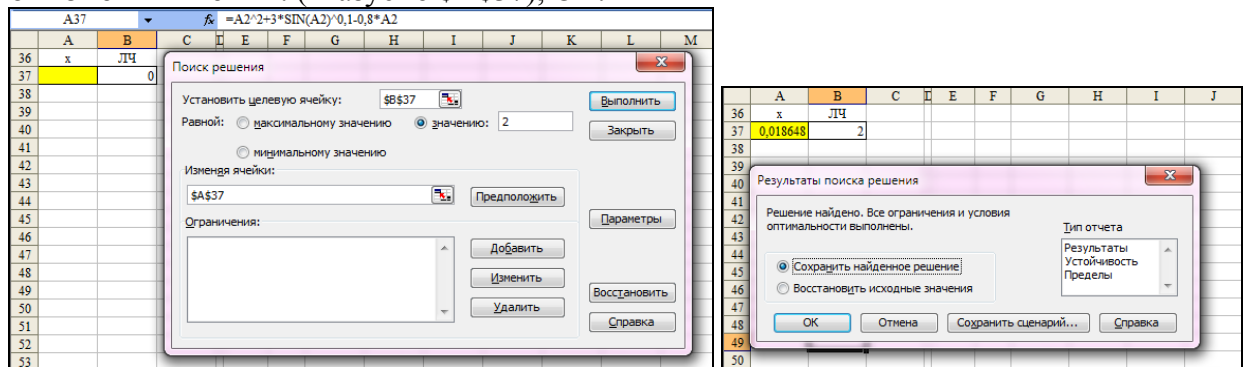
Виклик: Сервис → Поиск решения

### Приклад 2.

Розв'язати нелінійне рівняння  $x^2 + 3\sin x^{0.1} - 0,8x = 2$  за допомогою програми *Поиск решения*.

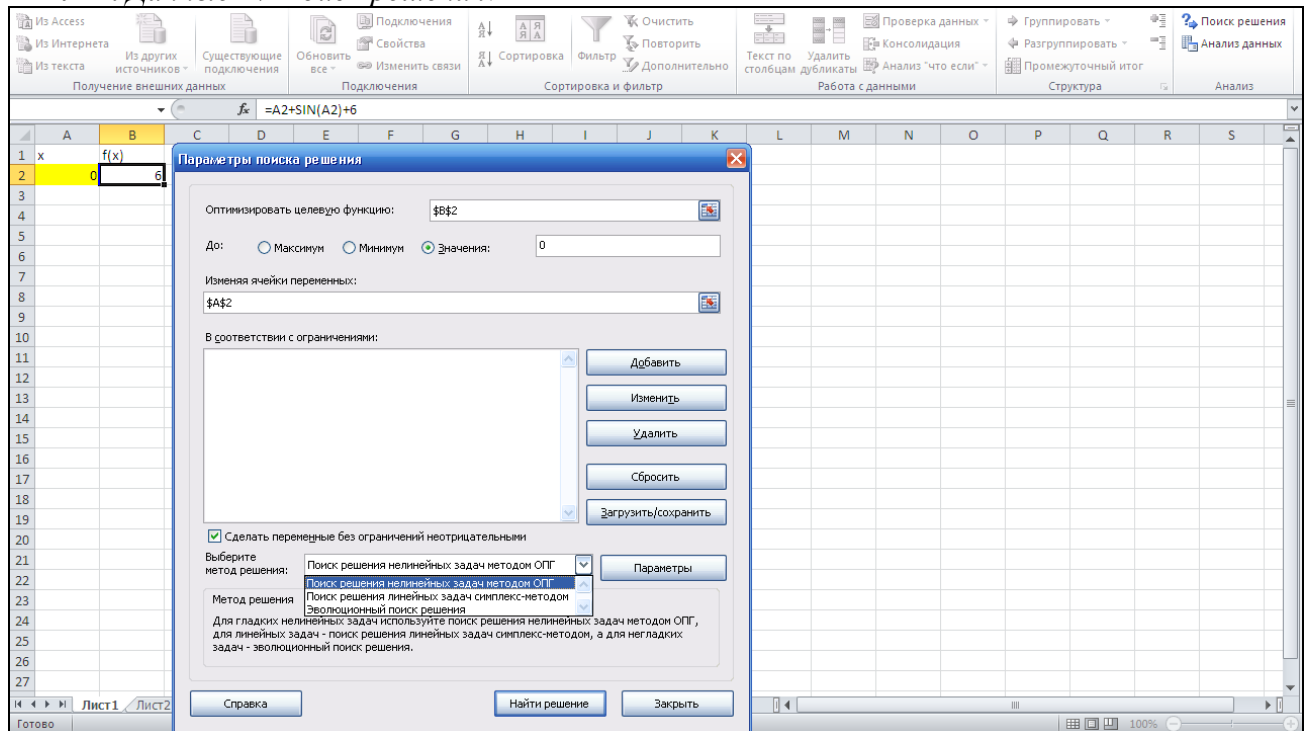
### Порядок роботи:

- визначити таблицю з двох клітинок:
  - для невідомої  $x$  (A37), її вміст за умовчанням 0
  - для ЛЧ рівняння (B37), її вміст - формула  $=A37^2 + 3*\text{SIN}(A37^{0,1}) - 0,8*A37$
- курсор в клітинку B37
- виклик надбудови *Поиск решения* й визначити у її вікні *Поиск* необхідні значення трьох полів:
  - **Установить целевую ячейку:** \$B\$37, там уведено вираз  $f(x)$
  - **значению:** (вводимо 2), це значення ПЧ
  - **Изменяя ячейки:** (вказуємо \$A\$37), ОК:



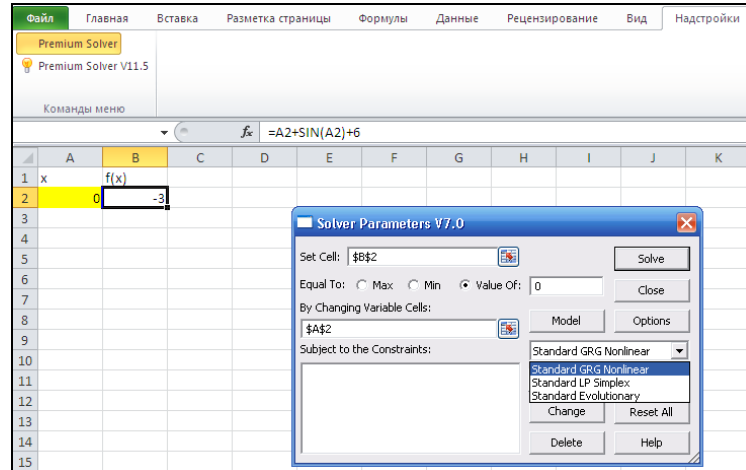
## Програма *Поиск решения (Excel 2010)*

Виклик: Данные → Поиск решения:



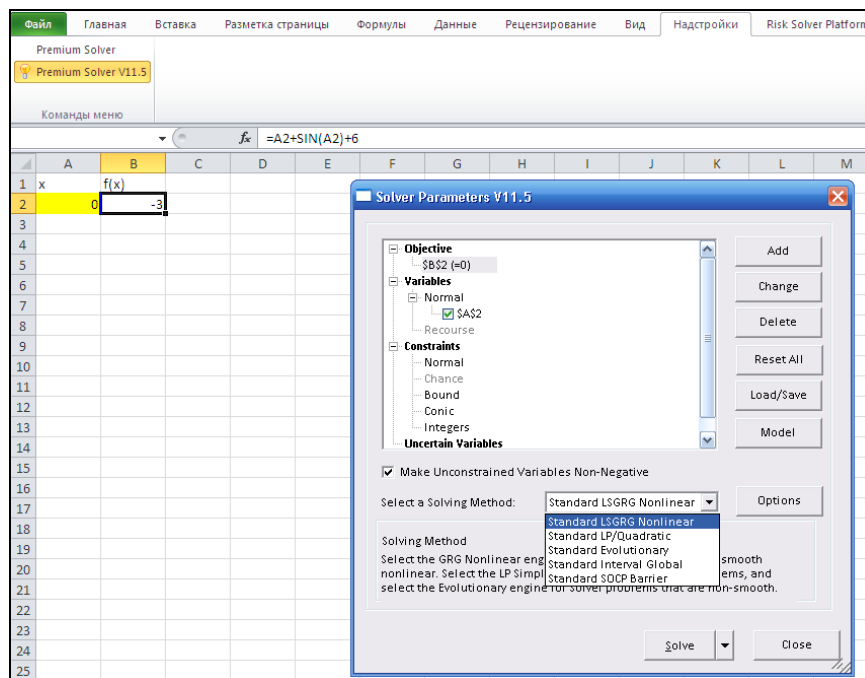
## Програма *Premium Solver 7.0*

Виклик: *Надстройки* → *Premium Solver*



## Програма *Premium Solver 11.5*

Виклик: *Надстройки* → *Premium Solver V.11.5*

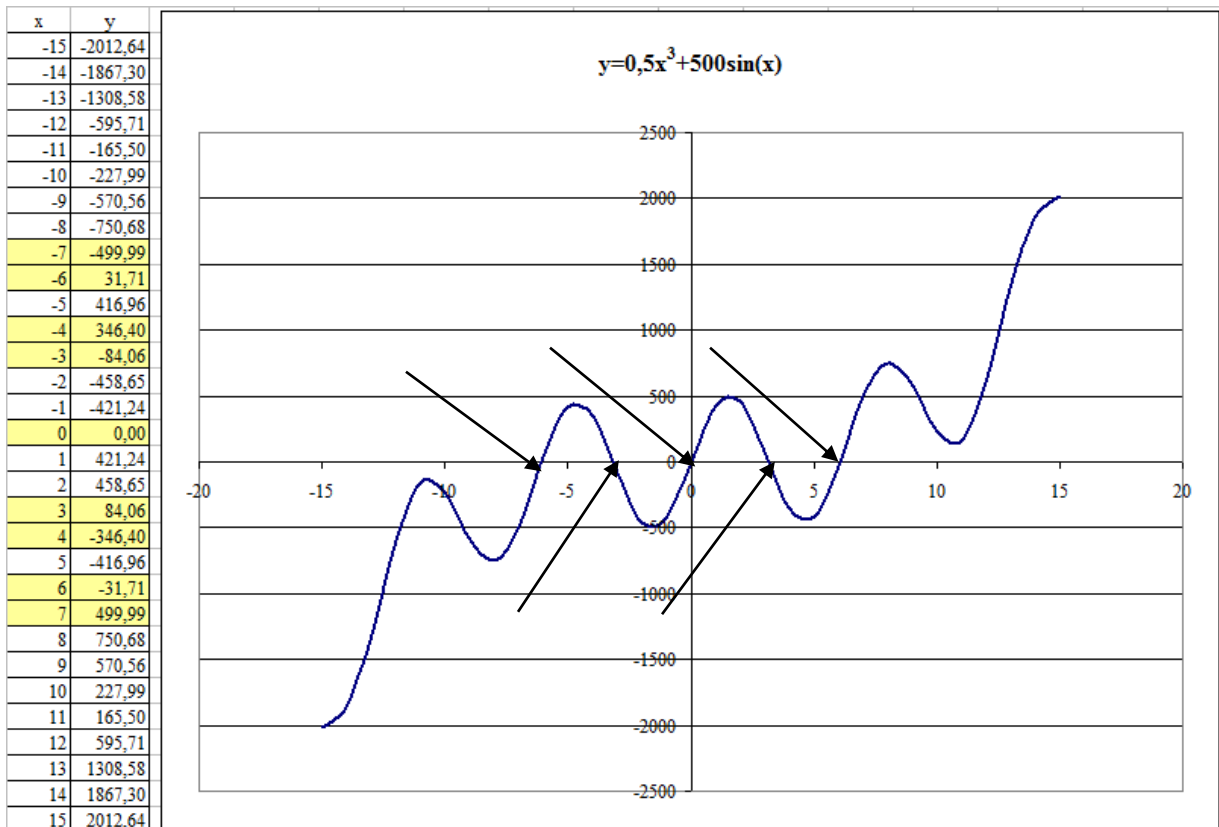


### Приклад 3.

Розв'язати нелінійне рівняння  $y = 0,5x^3 + 500\sin(x)$  за допомогою надбудови *Подбор параметра*.

### Порядок роботи:

- побудувати графік функції й приблизно виокремити її корені (їх 5, показані стрілками), їх проміжки: (-7; -6); (-4; -3); 0; (3; 4); (6; 7)



■ визначити таблицю з двох клітинок:

- для невідомої  $x$  (адреса A2), її вміст – від’ємне число (наприклад, -1000)
- для ЛЧ рівняння (адреса B2), її вміст - формула  $=0,5*A2^3 + 500*SIN(A2)$

■ виклик надбудови *Подбор параметра* й визначення необхідних значень трьох полів:

- **Установить в ячейке:** B2, там уведено вираз  $f(x)$
- **Значение:** (вводимо 0), це значення ПЧ
- **Изменяя значение ячейки:** (вказуємо A2).

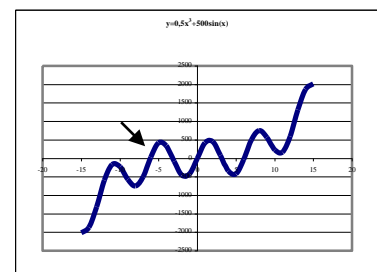
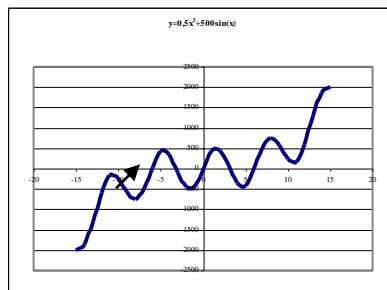
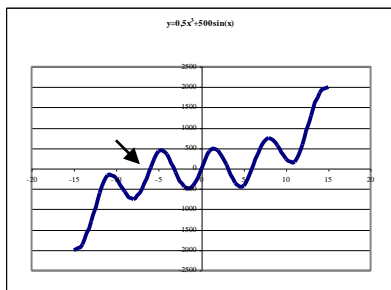
Після натискання кнопки ОК починається автоматичний процес підбору параметра  $x$ , його перший зліва корінь  $x_1 \approx -5,87$ .

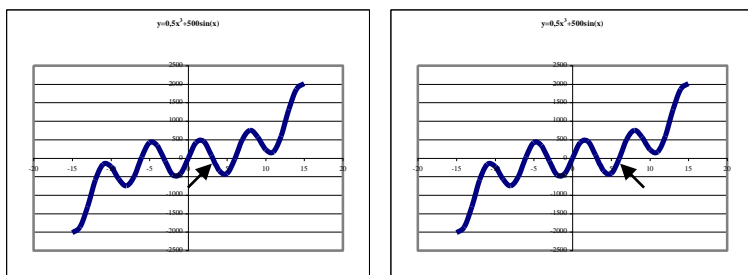
Щоб знайти наступний корінь, вписуємо у клітинку A2 число трохи більше за -5,87, наприклад, -4, й аналогічним чином знаходимо  $x_2 \approx -3,21$ .

Вписуємо в A2 число -1 й отримуємо  $x_3 = 0$ .

Вписуємо в A2 число 2 й отримуємо  $x_4 \approx 3,21$ .

Вписуємо в A2 число 5 й отримуємо  $x_5 \approx 5,87$ .

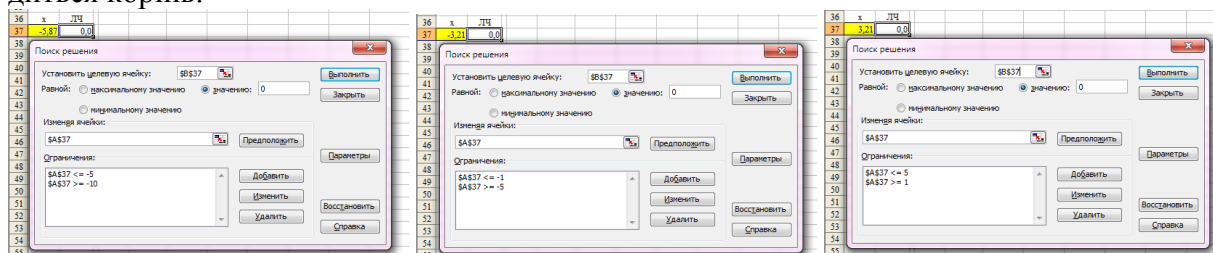




#### Приклад 4.

Розв'язати нелінійне рівняння  $y = 0,5x^3 + 500\sin(x)$  за допомогою надбудови *Поиск решения*.

Після побудови графіка функції й грубого виокремлення коренів послідовно відшуковують усі корені шляхом уведення кожного разу границь відповідного проміжку, де знаходиться корінь:



#### Задача 7.2. Обчислення похідної функції однієї змінної в Excel

**Похідна функції** Якщо аргумент функції  $y = f(x)$  змінює своє значення зі значення  $x_0$  до значення  $x_1$ , відповідно змінюється значення функції з  $f(x_0)$  до  $f(x_1)$ .

Тож вираз  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , де  $\Delta x = x_1 - x_0$ ,  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  – різниці чи прирости аргументу  $x$  й функції  $y$ , називають *різницею відношенням*, а його границю (якщо існує) – *похідною функції*  $y = f(x)$  у точці  $x_0$ :  $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Якщо функція  $y = f(x)$  має похідну в кожній точці у заданому інтервалі  $[x_{\min}; x_{\max}]$ , вона *диференційовна* на цьому інтервалі, це одна із властивостей неперервної функції, яку називають ще гладкою, без розривів, для оптимізації якої можна використати градієнтні методи.

Обчислення похідної вручну за стандартними правилами приводить до точного результату в аналітичній формі, тобто, у вигляді формули, куда надалі треба підставити координати точки, щоб обчислити значення похідної функції у цій точці.

При оптимізації нелінійної функції, одно- чи багатовимірної на комп'ютері, зокрема, в Excel, похідна функції обчислюється наближено (бо кожна ділянка нелінійної функції замінюється прямою) вбудованими чисельними методами за допомогою формули кінцевих різниць, які повертають результат у числовій формі. Цінність цієї методики полягає у тому, що чисельним методом можна знайти похідну досить складної функції.

Застосовується формула  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , де приріст  $\Delta x$  – дуже мала величина.

Покажемо на прикладі, як цей результат можна отримати в Excel.

**Приклад.** Обчислити похідну функції  $y = 2x^3 + x^2 + 5$  для  $n$  точок,  $n = 25$ ,  $x \in [2; 4]$ ,  $\Delta x = 0,1$ , побудувати графіки функції та її похідної.

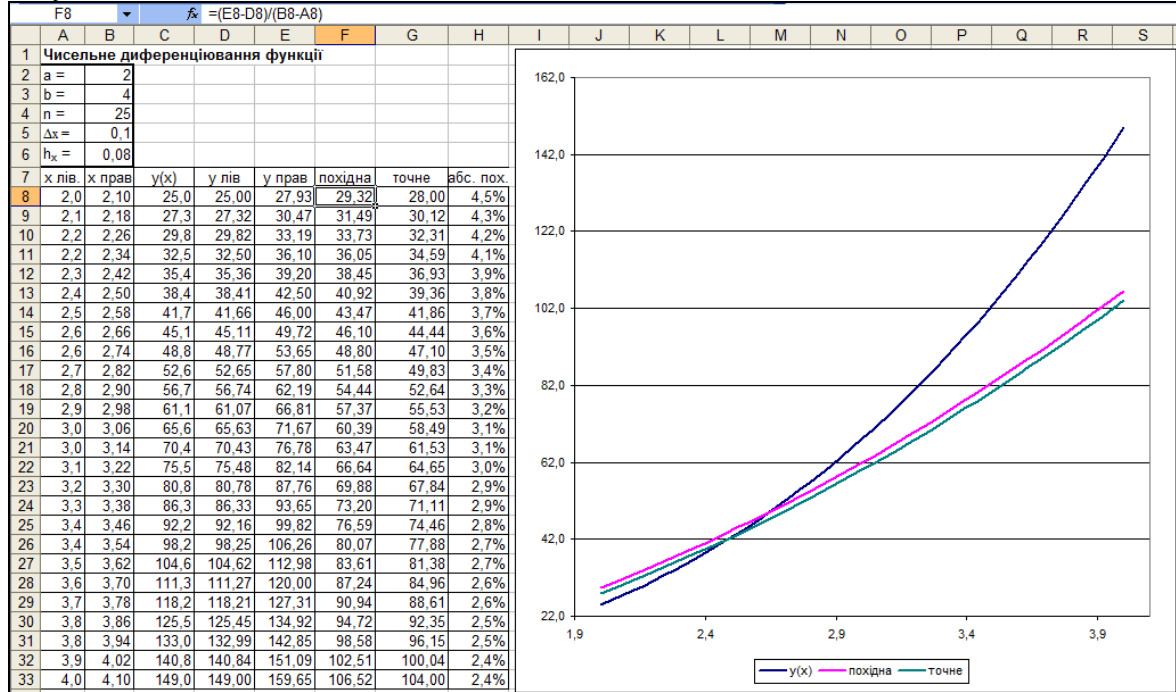
Точне значення (формула):  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 2x$ .



### Порядок роботи

- 1) Увести початкові дані:  $a, b, n, \Delta x, h_x$
- 2) Сформувати таблицю зі значеннями:  $X_{\text{лів}}, X_{\text{прав}}, U_{\text{лів}}, U_{\text{прав}}$ , похідна, точне, абс. похибка, де  $X_{\text{прав}} = X_{\text{лів}} + \Delta x$
- 3) Обчислити похідні за точною й наближеною формулами
- 4) Побудувати графіки функції та її похідної (за обома формулами).

### Результат

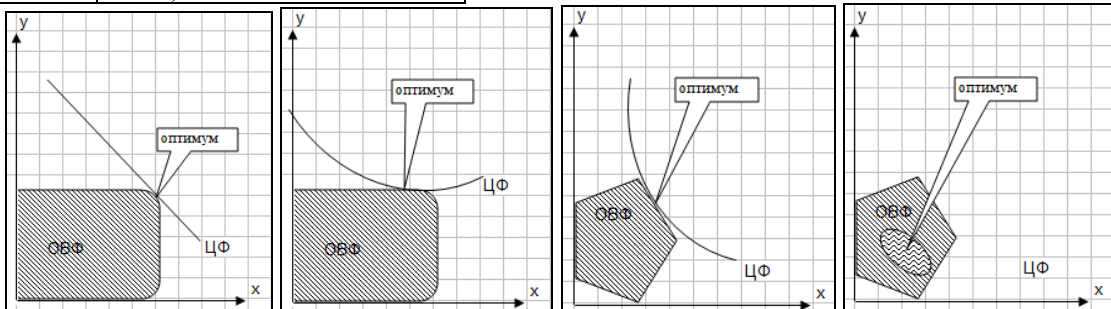


### Задача 7.3. Максимізація функції з однією змінною (градієнтний метод)

Властивості задачі нелінійної оптимізації залежать від форми ЦФ та обмежень й визначають її математичну модель та обчислювальний метод для реалізації.

Основні форми ЦФ й обмежень

ЦФ	Обмеження	Обмеження
Лінійна	Нелінійні	
Нелінійна	Нелінійні	
Нелінійна	Лінійні (оптимум ззовні)	
Нелінійна	Лінійні (оптимум всередині)	



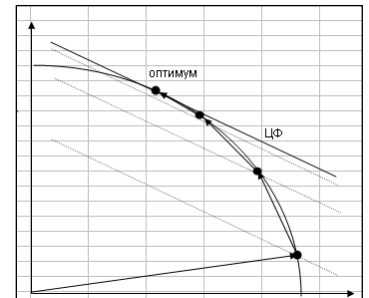
В лінійному програмуванні оптимум завжди знаходиться у кутовій точці, що суттєво спрощує його пошук.

Нелінійне програмування відрізняється від лінійного програмування тим, що оптимум може знаходитися як на границі ОВФ, так й у її середині, що значно ускладнює його пошук. Відповідно, стратегія пошуку нелінійного оптимуму не має нічого спільного з лінійним пошуком. Зокрема, нелінійна оптимізація базується на використанні градієнтних методів, бо саме градієнт функції дозволяє визначити напрямок й величину кроку зміни аргументу на шляху від заданої точки старту до шуканої точки оптимуму.

В Excel для пошуку оптимуму нелінійної задачі використовується вдосконалений метод приведенного градієнту (generalized reduced gradient, GRG; рос. Обобщенного понижающего градиента, ОПГ, в Excel 2010) ітераційного типу, пристосований для надбудови *Поиск решения*.

Ідея градієнтного методу пошуку екстремуму функції (запропонована в 1847 р. О. Коші<sup>49</sup>):

- вибирається початкова (стартова) точка  $x_0$  (інакше, початкове наближення у вигляді набору довільних значень шуканих невідомих)
- обчислюється градієнт (вектор перших часткових похідних ЦФ в околі цієї точки), який визначає наближення: крок  $i$  напрям руху в наступну точку для покращення ЦФ
- у наступних точках процедура наближення повторюється, доки ці похідні не стануть нульовими, що свідчить про досягнення екстремуму ЦФ (локального чи глобального).



Саме тому результати використання градієнтних методів пошуку екстремуму функції сильно залежать від властивостей функції. Відсутність єдиного й гарантованого обчислювального методу з-за розмаїття нелінійних задач змушує застосовувати різні методи (як в програмі *Premium Solver V.11.5*), якщо ж метод один (як в програмі *Поиск решения*), рекомендується задавати різні початкові наближення для складної нелінійної задачі.

Таким чином, нелінійна задача оптимізації є, фактично, узагальненою задачею оптимізації (МП), бо всі інші задачі оптимізації, в тому числі, задача ЛП, є частковими варіантами цієї загальної задачі.

## Градієнтний метод

### Визначення

Задана функція, скажімо, трьох змінних (аргументів)  $u=f(x, y, z)$  й стартова точка з координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Градієнтом<sup>50</sup> функції  $n$  ( $n = 3$ ) змінних у заданій точці називається вектор, координатами якого є часткові похідні функції  $u=f(x, y, z)$  по відповідним аргументам, обчисленим у заданій точці  $(x_0, y_0, z_0)$ :

$$\text{gradu} = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

### Приклад

Знайти градієнтним методом максимум функції  $z = f(x_1, x_2)$  двох змінних  $(x_1, x_2)$

$z = f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 5$ , починаючи ітераційний процес з початкової точки  $x_0$   $(4, 5)$ . У цій точці  $z_0 = 4 \times 4 + 2 \times 5 - 4^2 - 5^2 + 5 = -10$ .

<sup>49</sup> Коші (Cauchy), Огюстен Луї (1789-1857) – видатний французький математик, написав і опублікував понад 800 праць з різних розділів математики, механіки та математичної фізики. Вперше запропонував використовувати у якості напрямку набір часткових похідних, який тепер називається градієнтом функції  $f(x)$  в точці  $x$  й представляє собою напрямок найшвидшого зростання функції в околі цієї точки (для задачі на максимум ЦФ)

<sup>50</sup> Градієнт (від лат. *gradiens* – крокуючий, зростаючий, звідси **градація** й **градус**), в математиці – вектор, який своїм значенням вказує напрям найшвидшого зростання значення функції, яке змінюється у русі від однієї точки ОВФ до іншої точки, а по величині (модулю) дорівнює швидкості росту цього значення у визначеному напрямі. У широкому розумінні «градієнтн-ий,-а» – це покрокова зміна певної властивості, наприклад, кольору тканини чи кольорової заливки автофігури

### Розв'язок

1) Обчислити часткові похідні й градієнт функції в аналітичній (формула) та числовій формах для початкової точки  $x_0(4, 5)$ :

$$\text{часткові похідні: } \frac{\partial z}{\partial x_1} = 4 - 2x_1 \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = 2 - 2x_2$$

$$\text{градієнт: } \nabla z(x) = (4 - 2x_1; 2 - 2x_2) \quad \nabla z(x_0) = (4 - 2 \times 4; 2 - 2 \times 5) = (-4; -8)$$

2) Визначити нову точку  $x_1$ :

$$x_1 = x_0 + \lambda \nabla z(x_0) = (4; 5) + \lambda(-4; -8) = (4 - 4\lambda; 5 - 8\lambda).$$

Градієнт у новій точці:

$$\nabla z(x_1) = (4 - 2 \times (4 - 4\lambda); 2 - 2 \times (5 - 8\lambda)) = (-4 + 8\lambda; -8 + 16\lambda)$$

3) Розв'язати рівняння відносно невідомої  $\lambda$ :

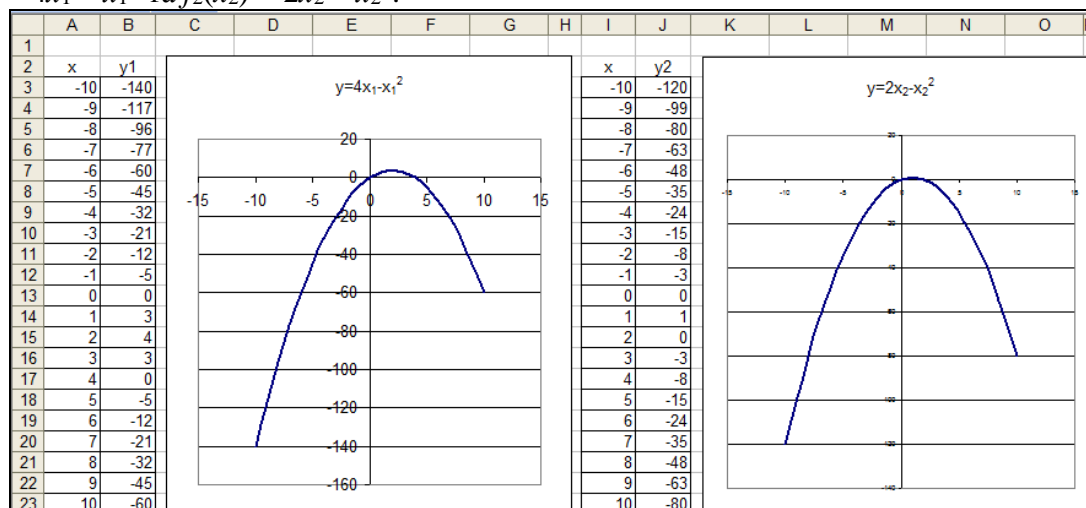
$$\nabla z(x_0) \times \nabla z(x_1) = (-4; -8) \times (-4 + 8\lambda; -8 + 16\lambda) = 80 - 160\lambda = 0 \quad \lambda = 0.5,$$

$$x_1 = (4 - 4\lambda; 5 - 8\lambda) = (4 - 4 \times 0.5; 5 - 8 \times 0.5) = (2; 1)$$

$$\nabla z(x_1) = (4 - 2 \times 2; 2 - 2 \times 1) = (0; 0).$$

Отже, градієнт у точці  $x_1$  нульовий  $(0; 0)$  й точка  $x_1 = (2; 1)$  є стаціонарною, оскільки функція вигнута (опукла уверх, де досягається максимум функції), бо є сумою двох вигнутих функцій:

$$f_1(x_1) = 4x_1 - x_1^2 \quad \text{та} \quad f_2(x_2) = 2x_2 - x_2^2:$$



**Результат:** у знайдений точці  $x_1 = (2; 1)$  досягнуто максимальне значення функції:

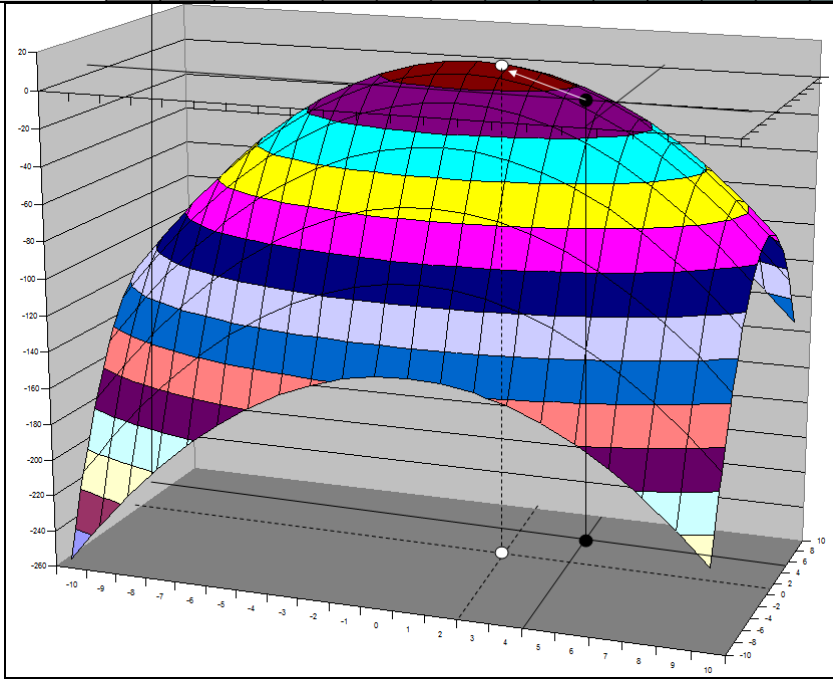
$$\max(z) = 4 \times 2 + 2 \times 1 - 2^2 - 1^2 + 5 = 10.$$

$$\text{Відстань переміщення (модуль градієнта)} \quad \Delta x = \lambda \nabla z(x_0) = 0.5 \times \sqrt{4^2 + 8^2} \approx 4.5.$$

### Ілюстрація в Excel

- 1) Побудована таблиця значень функції  $z = f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 5$  для  $-10 \leq x_1, x_2 \leq 10$ , крок = 1
- 2) За табличними даними побудована діаграма *Поверхність*
- 3) На діаграмі показані точки  $x_0$  та  $x_1$  й відповідні значення функції
- 4) Побудована розрахункова таблиця, яка реалізує вказаний алгоритм. Часткові похідні розраховуються вручну в аналітичній формі. Рівняння з однією невідомою  $\lambda$  розв'язується за допомогою надбудови *Подбор параметра*.
- 5) Побудована розрахункова таблиця, яка реалізує вказаний алгоритм. Часткові похідні розраховуються числовими методами наближено із заданою точністю (6 знаків), реалізованими в надбудові *Поиск решения*, яка розв'язує нелінійну задачу вбудованим методом Ньютона.

	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-10	-255	-234	-215	-198	-183	-170	-159	-150	-143	-138	-135	-134	-135	-138	-143	-150	-159	-170	-183	-198	-215
-8	-211	-190	-171	-154	-139	-126	-115	-106	-99	-94	-91	-90	-91	-94	-99	-106	-115	-126	-139	-154	-171
-6	-175	-154	-135	-118	-103	-90	-79	-70	-63	-58	-55	-54	-55	-58	-63	-70	-79	-90	-103	-118	-135
-4	-147	-126	-107	-90	-75	-62	-51	-42	-35	-30	-27	-26	-27	-30	-35	-42	-51	-62	-75	-90	-107
-2	-127	-106	-87	-70	-55	-42	-31	-22	-15	-10	-7	-6	-7	-10	-15	-22	-31	-42	-55	-70	-87
0	-115	-94	-75	-58	-43	-30	-19	-10	-3	2	5	6	5	2	-3	-10	-19	-30	-43	-58	-75
2	-111	-90	-71	-54	-39	-26	-15	-6	1	6	9	10	9	6	1	-6	-15	-26	-39	-54	-71
4	-115	-94	-75	-58	-43	-30	-19	-10	-3	2	5	6	5	2	-3	-10	-19	-30	-43	-58	-75
6	-127	-106	-87	-70	-55	-42	-31	-22	-15	-10	-7	-6	-7	-10	-15	-22	-31	-42	-55	-70	-87
8	-147	-126	-107	-90	-75	-62	-51	-42	-35	-30	-27	-26	-27	-30	-35	-42	-51	-62	-75	-90	-107
10	-175	-154	-135	-118	-103	-90	-79	-70	-63	-58	-55	-54	-55	-58	-63	-70	-79	-90	-103	-118	-135



Пошук максимуму функції

Задано початкове наближення – чорна точка (4; 5) на площині  $(x_1, x_2)$ , для неї на графіку функції – поверхні обчислено значення функції  $z = -10$ , чорна точка.

Гradientним методом визначена нова – біла точка (2; 1) на площині  $(x_1, x_2)$ , для якої знайдено значення функції  $z = 10$ , яке є максимальним.

Реалізація в Excel (табличні розрахунки, похідні визначені в аналітичній формі й обчислюються точно)

H6    fx =D6*D7+E6*E7										
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	Гradientний метод (максимум функції)									
2	$z=f(4x_1+2x_2-x_1^2-x_2^2+5)$									
3	Gradient									
4	Точка		4-2x <sub>1</sub>	2-2x <sub>2</sub>						
5	Ітерація	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	Функція	лямбда	Рівняння	Модуль гр.	Відстань
6	1	4	5	-4	-8	-10	0,5	0	8,94	4,47
7	2	2	1	0	0	10				
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										

Подбор параметра

Установить в ячейке: H6

Значение: 0

Изменяя значение ячейки: \$G\$6

OK    Отмена

Реалізація в Excel (Поиск решения, похідні наближено обчислюються вбудованим числовим методом)

C5	fx =4*A5+2*B5-A5^2-B5^2+5				
	A	B	C	D	E
1	Гradientний метод (максимум функції)				
2	z=f(4x <sub>1</sub> +2x <sub>2</sub> -x <sub>1</sub> <sup>2</sup> -x <sub>2</sub> <sup>2</sup> +5)				
3					
4	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	z		
5	4	5	-10		
6					

Поиск решения

Установить целевую ячейку: \$C\$5

Равной:  максимальному значению  значению: 0

минимальному значению

Изменяя ячейки: \$A\$5:\$B\$5

Ограничения:

Добавить Изменить Удалить

Выполнить Закреть Параметры Восстановить Справка

Параметры поиска решения

Максимальное время: 100 секунд

Предельное число итераций: 100

Относительная погрешность: 0,000001

Допустимое отклонение: 5 %

Сходимость: 0,0001

Динамическая модель  Автоматическое масштабирование

Неотрицательные значения  Показывать результаты итераций

Оценки:  линейная  квадратичная

Разности:  прямые  центральные

Метод поиска:  Ньютона  сопряженных градиентов

OK Отмена Загрузить модель... Сохранить модель... Справка

Гradientний метод (максимум функції)		
z=f(4x <sub>1</sub> +2x <sub>2</sub> -x <sub>1</sub> <sup>2</sup> -x <sub>2</sub> <sup>2</sup> +5)		
x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	z
1,9999994	1,0000003	10

#### Задача 7.4. Управління запасом: задача про економічний розмір замовлення

Запаси (*inventory*) – це певний ресурс (сировина, матеріали, інструменти, запасні частини, готова продукція, кошти, навіть персонал), який не використовується за призначенням, а зберігається і утримується в належному стані для майбутнього використання. Їх створюють і супроводжують для забезпечення надійного виробничого процесу чи надання послуг у відповідності з попитом, що вимагає витратити кошти на їх утворення (визначення постачальника, оформлення документації, доставка) та зберігання. Тому актуальною є проблема управління товарно-матеріальними запасами з тим, щоб зекономити частину цих витрат і одночасно краще задовольнити вимоги споживачів (виконати їх швидше, якісніше, зручніше).

Запас на виробництві - це предмети, які становляться часткою продукції чи вносять вклад у виробництво: сировина, готова продукція, комплектуючі, допоміжні матеріали і незавершене виробництво. Запас у сфері надання послуг (магазини, салони, майстерні, пошта, банки, ресторани, служби прокату та дозвілля, транспортні організації) – це товари на продаж, фахівці, запасні частини, гроші, харчові продукти, транспортні засоби, атракціони, театри і кінозали.

Якщо запасів багато, це, одночасно добре (надійно забезпечується попит) і погано (великі витрати на зберігання) – тож повинна бути “золота середина” у вигляді оптимального запасу. Оптимально управляти запасом – значить, визначати такі моменти та об’єми постачання для поповнення запасу, щоб мінімізувати загальні витрати на утворення і утримання запасів згідно їх витрачання (попиту).

Припущення:

- фіксований розмір замовлення
- стабільний попит
- миттєве поповнення запасу
- відсутність дефіциту на готову продукцію.

Система з фіксованим розміром замовлення заснована на пошуку такого розміру замовлення, який мінімізує загальні витрати, що складаються з:

- витрат на **виконання** (пошук постачальника, оформлення документації, доставка) замовлення і
- витрат на його **зберігання** (розміщення, охорону, контроль якості, обслуговування).

Вперше ця модель визначена Ф. Харрисом, але більш відома під назвою «формула Вілсона»<sup>51</sup>.

### Математична модель

#### Позначення:

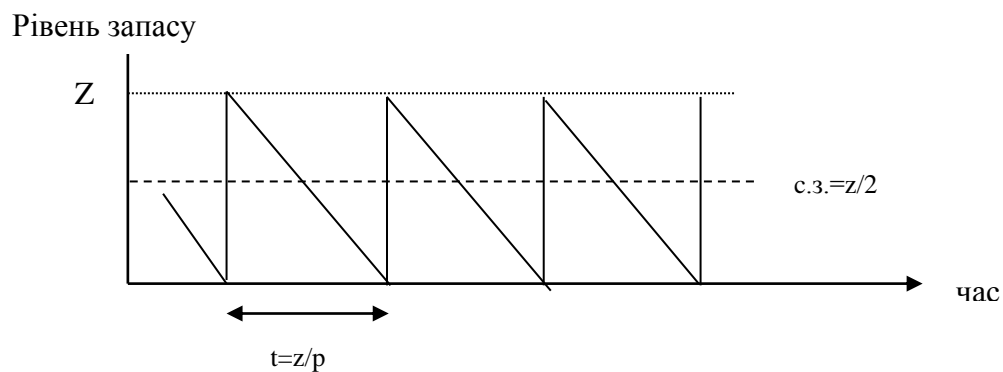
$z$  - об'єм замовлення (шукана величина)

$S$  – попит (на період планування)

$p$  - інтенсивність попиту (розходу, тобто, кількість продукту, що витрачається в од. часу, скажімо, за годину, місяць чи рік), наприклад,  $p=S/365$

$t$  - тривалість циклу замовлення (годин, днів, тижнів) від отримання запасу до його повного витрачення,  $t = z/p$ .

Ідеальна схема постачання має вигляд:



На схемі: замовлення об'ємом  $z$  миттєво оформлюється й передається на зберігання (вертикальна лінія), в процесі виробництва цей запас рівномірно розходується з інтенсивністю (швидкістю) попиту  $p$  (діагональ) й поповнюється миттєво, коли рівень запасу  $z = 0$ . Відповідно, тривалість циклу замовлення  $t = z/p$  од. часу.

Наприклад, є запас  $z = 100$  од., який розходується зі швидкістю  $p = 10$  од./год. Виходить, що через кожні 10 годин треба поповнити запас у 100 од., щоб виробничий процес не зупинився, середній рівень запасу протягом періоду  $t$  (с.з.)  $= z/2 = 50$  од.

Задача визначення економічного розміру замовлення одного продукту найпростіша, зате найкраще передає специфіку математичної моделі нелінійної оптимізаційної задачі з однією невідомою ( $z$ ).

Для її розв'язання використаємо три способи:

- **графічний** (побудовою графіків математичних функцій засобами наукової графіки),
- **формульний** (за виведеною формулою Вілсона) й
- **оптимізаційний** (за моделлю нелінійного програмування).

Розглянемо простий процес постачання за умови: задано попит на період планування, розмір замовлення фіксований, поповнення замовлення миттєве.

Приклади режимів постачання: період: 1 рік; задано попит = 100, можливий розмір замовлення (2 варіанти):

$$z_1 = 25,$$

$$z_2 = 50,$$

відповідно, кількість поставок:

$$k_1 = 100/25 = 4,$$

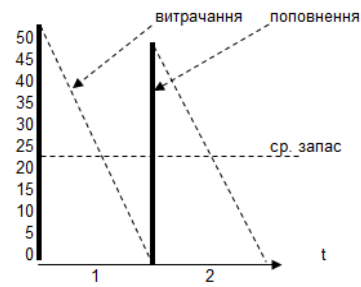
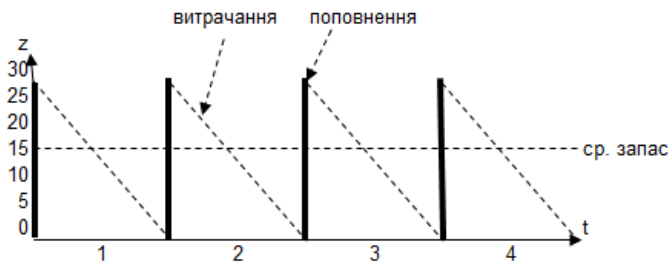
$$k_2 = 100/50 = 2,$$

<sup>51</sup> Harris, F. W. Operations Cost (Factory Management Series), Chicago: Shaw (1915).  
Wilson, R. H. "A Scientific Routine for Stock Control", Harvard Business Review (1934).

середнє значення запасу:

$$z_{\text{ср}1} = 25/2 = 12,5,$$

$$z_{\text{ср}2} = 50/2 = 25:$$



У першому варіанті треба 4 рази витратити кошти на оформлення замовлення і протягом кожного кварталу витрачатися на зберігання 12,5 одиниць запасу; у другому, аналогічно: 2 рази оформити замовлення і протягом півроку зберігати 25 одиниць, виникає запитання: який варіант постачання дешевший?

Відповідь залежить від питомих витрат на: оформлення замовлення й зберігання одиниці продукту.

### Постановка задачі

На певний період планування (рік) задано попит на один продукт, треба визначити оптимальний (економічний) розмір замовлення, за яким загальні витрати на задоволення попиту, а саме, на:

- купівлю,
- оформлення замовлення та
- зберігання кожного замовлення мінімальні.

### Математична модель

#### Позначення:

$z$  – розмір замовлення,

$z_{\text{опт}}$  – його шукане оптимальне значення,

$D$  – попит (на рік),

$C$  – ціна за одиницю продукту,

$v_{\text{оф}}$  – питомі витрати на оформлення замовлення (будь-якого розміру),

$v_{\text{зб}}$  – питомі витрати на зберігання замовлення,  $v_{\text{зб}} = pC$ , де  $p$  – % від ціни продукту, тоді формула

$$V = f(z) = DC + \frac{D}{z} v_{\text{оф}} + \frac{z}{2} pC \quad (1)$$

визначає загальні витрати на купівлю, оформлення та зберігання замовлення, де:

$DC$  – вартість річного попиту (не залежить від величини  $z$ ),

$\frac{D}{z} v_{\text{оф}}$  – вартість  $\frac{D}{z}$  оформлень (залежить від  $z$ , обернена пропорція: чим більше замовлення, тим нижчі ці витрати),

$\frac{z}{2} pC$  – вартість зберігання середнього запасу  $\frac{z}{2}$  од. протягом одного періоду постачання (залежить пропорційно від  $z$ : чим більше замовлення, тим більші ці витрати).

### Графічний спосіб

Початкові дані:

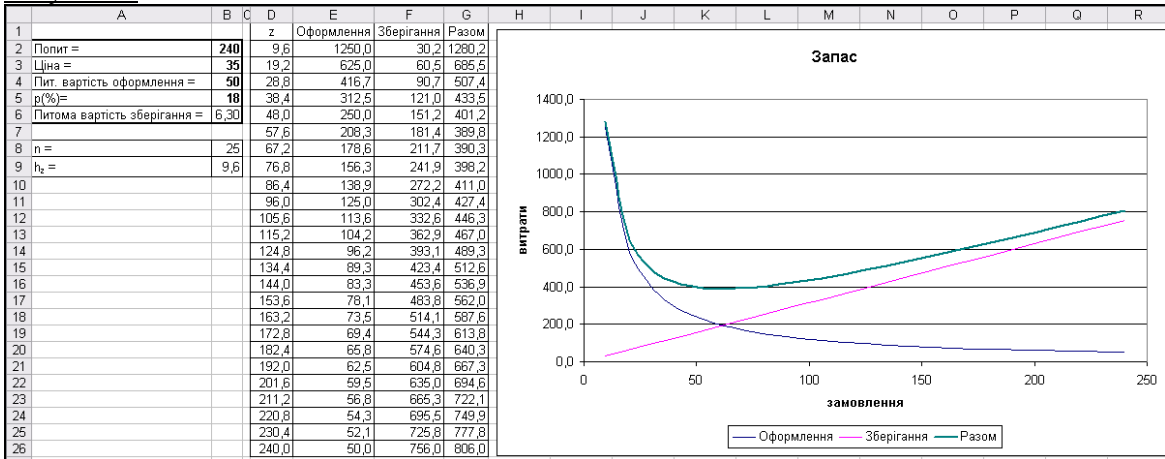
Попит (D) =	240
Ціна (C) =	35
Пит. вартість оформлення ( $v_{of}$ ) =	50
Процент $p$ (%) =	18
Питома вартість зберігання ( $pC$ ) =	6,30

Теоретично запас можна поповнювати розміром в діапазоні від 1 (240 оформлень, зберігання 1 од.) до 240 (1 оформлення, зберігання 240 од.), десь у цьому діапазоні відшукується «золота середина».

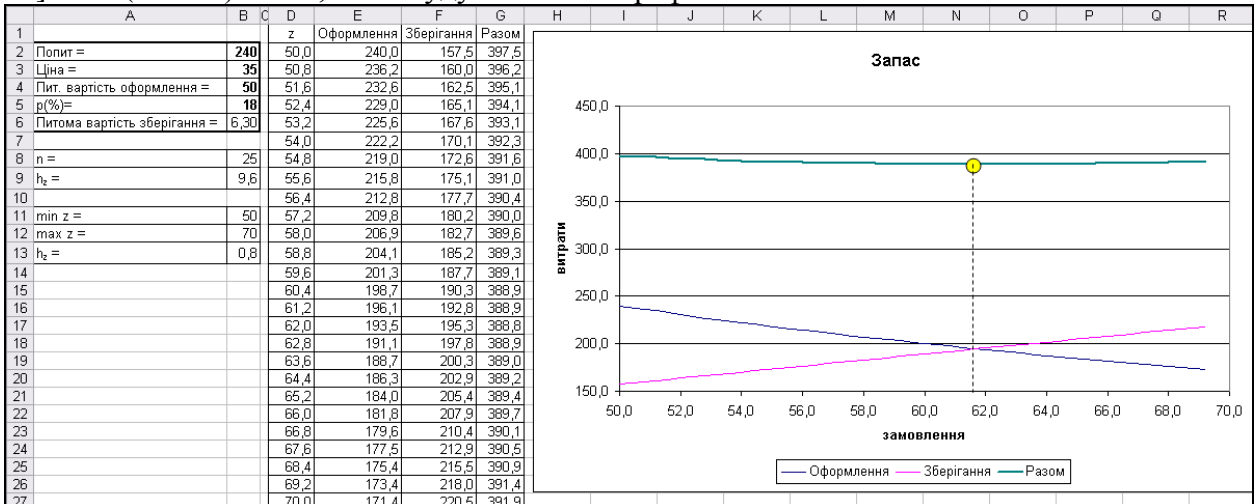
#### Порядок роботи:

- 1) Створити таблицю з 4-ох стовпців: Запас ( $z$ ), Оформлення, Зберігання, Разом
- 2) Діапазон  $z \in [0, 240]$  розбити на  $n$  кроків (наприклад,  $n = 25$ ), обчислити величину кроку  $h_z = 240/n$  ( $h_z = 9,6$ ), заповнити стовпець Запас ( $z$ ) значеннями  $z$  від 9,6 до 240 з кроком  $h_z$
- 3) Для поточних значень  $z$  за формулою (1) обчислити 3 складових витрат (оформлення, зберігання) й знайти їх суму
- 4) Виділити таблицю і побудувати діаграму Точечная

#### Результат:



Добре видно, що графік загальних витрат (стовпець Разом) має явний мінімум й значення  $z_{opt}$  знаходиться десь в діапазоні від 50 до 70. Щоб отримати більш точне значення, необхідно таблицю шляхом обчислення нового значення кроку по  $z$ , змінивши діапазон  $z \in [50, 70]$ :  $h_z = (70 - 50)/25 = 0,8$  і побудуємо новий графік:





Оптимальний розмір замовлення дорівнює приблизно 61,5 од.

### Формульний спосіб

Рівняння (1) можна записати у вигляді:  $V = A + f(z)$ , де:  $A = DC$  – постійна складова, що не залежить від  $z$ ,  $f(z)$  – змінна складова, залежить від  $z$ , саме її мінімальне значення забезпечить мінімум загальної вартості  $V$ .

### Математична модель

Знайти оптимальне значення незалежної змінної (аргументу)  $z_{opt}$ , за яким значення залежної величини (функції)  $f(z)$  мінімальне. Для цього функцію  $f(z)$  треба продиференціювати по змінній  $z$ , результат прирівняти 0 й знайти шукане значення  $z_{opt}$ :

$$\frac{df(z)}{dz} = -\frac{v_{of}D}{z^2} + \frac{pC}{2} = 0, \text{ звідси } z_{opt} = \sqrt{\frac{2Dv_{of}}{pC}}. \text{ Це – формула Вілсона.}$$

$$\text{Отже, } \min V = DC + \frac{D}{z_{opt}} v_{of} + \frac{z_{opt}}{2} pC.$$

Результат:

Попит =	240	Розмір замовлення =	61,72
Ціна =	35	Кількість поставок (ціле) =	3,89
Пит. вартість оформлення =	50	Вартість купівлі =	8400,00
p(%)=	18	Вартість оформлення =	194,42
Питома вартість зберігання =	6,30	Вартість зберігання =	194,42
		Разом =	8788,84

Точне значення за формулою Вілсона  $z_{opt} = 61,72$ , кількість поставок 3,89, відповідні загальні витрати склали величину 8788,84 гр. од., де приблизно 5% – це витрати на утворення і супроводження запасу.

Розмір замовлення =	60,00
Кількість поставок (ціле) =	4,00
Вартість купівлі =	8400,00
Вартість оформлення =	200,00
Вартість зберігання =	189,00
Разом =	8789,00

Це «ідеальний» варіант, реальна ж кількість поставок 4, тоді величина замовлення дорівнює  $240/4 = 60$  проти 61,72, маємо відхилення від оптимуму в меншу сторону.

Відхилення від оптимального плану постачання (4 поставки) збільшить суму витрат, бо при меншій кількості поставок (замовлення більш крупне) витрати збільшаться за рахунок більших витрат на зберігання й, навпаки (в прикладі розмір замовлення замість 61,72 дорівнює 60) при більшій кількості поставок і дрібніших замовленнях витрати збільшаться за рахунок витрат на частіше оформлення (в прикладі на 0,16 гр. од.). Тож 4 поставки – це оптимум для реального стану процесу.

### Оптимізаційний спосіб

Ця задача за своєю суттю оптимізаційна за критерієм мінімуму ЦФ, наявність шуканої невідомої у знаменнику цільової функції робить цю задачу нелінійною. Оптимізаційний спосіб є універсальним і точним, на відміну від двох попередніх способів, застосовується в одно- та багатопродуктових задачах управління запасами з можливістю врахування певних обмежень на величину замовлення. Для цієї задачі застосовується модель нелінійного програмування.

### Задача нелінійної оптимізації

I. Знайти таке значення  $z$ , щоб

$$\text{II. ЦФ } V = f(z) = DC + \frac{D}{z} v_{\text{оф}} + \frac{z}{2} pC \rightarrow \min$$

за граничної умови:  $z \geq 0$ .

Результат (рис. а):

Попит =	<b>240</b>	
Ціна =	<b>35</b>	
Пит. вартість оформлення =	<b>50</b>	
p(%)=	<b>18</b>	
Питома вартість зберігання =	6,30	
Розмір замовлення =	<b>61,72</b>	
Кількість поставок (ціле) =	3,89	
Вартість купівлі =	8400,00	
Вартість оформлення =	194,42	
Вартість зберігання =	194,42	
Разом =	<b>8788,84</b>	ЦФ

(а)

Розмір замовлення =	<b>60,00</b>	
Кількість поставок (ціле) =	4	
Вартість купівлі =	8400,00	
Вартість оформлення =	200,00	
Вартість зберігання =	189,00	
Разом =	<b>8789,00</b>	ЦФ

(б)

**Пряма задача:**  $z_{\text{опт}} = 61,72$ , мінімум ЦФ = 8788,84 гр. од.

**Двоїста задача:** двоїста оцінка шуканої невідомої під назвою множник Лагранжа (в оригіналі – reduced gradient, рос. Понижающий градиент, аналог тіньової ціни для лінійних задач) дорівнює 3,15 – це умовна питома швидкість, з якою ЦФ буде змінюватися при зміні значення  $z_{\text{опт}}$  у найближчому околі.

### Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов

**Умова 1.** Оскільки кількість поставок – ціле число, для реальної ситуації треба додати відповідне обмеження на шукану величину у вигляді формули

$$\text{ЦЕЛОЕ}(\text{Попит}/\text{Замовлення}) + 1,$$

яке входить у ЦФ, тоді результат буде дещо іншим (рис. б).

Отже, для задоволення попиту (240 од. на рік) треба здійснити **4** поставки щокварталу, кожного разу поїхати у відрядження, там оформити документацію, оплатити (**8400** гр. од.) і отримати товар у постачальника, доставити і передати на склад для зберігання **60** од., (на все це передбачено **200** гр. од.), що буде коштувати **189** гр. од., для оплати усіх витрат для одного замовлення треба мати **8789** гр. од. Будь-які відхилення від оптимуму щодо розміру замовлення будуть вимагати лише більше коштів.

**Умова 2.** Склад підприємства може вмістити не більше 18 одиниць продукту, відповідно, в модель додається обмеження:  $z \leq 18$ , результат (рис. а), де за рахунок 14 поставок замість 4-ох оптимальних, суттєво зростають витрати на оформлення, якщо ж продукт неподільний (вимірюється в штуках) і, відповідно, розмір замовлення – ціле число, тоді додається обмеження  $z$  – целое (рис. б):

Розмір замовлення =	<b>17,14</b>	
Кількість поставок (ціле) =	14	
Вартість купівлі =	8400,00	
Вартість оформлення =	700,00	
Вартість зберігання =	54,00	
Разом =	<b>9154,00</b>	

(а)

Розмір замовлення =	<b>18</b>	
Кількість поставок (ціле) =	14	
Вартість купівлі =	8400,00	
Вартість оформлення =	700,00	
Вартість зберігання =	56,70	
Разом =	<b>9156,70</b>	

(б)

**Умова 3.** Треба задовольнити попит підприємства, здійснивши за рік рівно 11 поставок. Але за цією умовою неможливо знайти розв'язок рівняння (1) у цілих числах, тоді при розмірі замовлення у 22 од. треба придбати 242 од. замість заданих 240:

Розмір замовлення =	<b>21,8</b>
Кількість поставок (ціле) =	11,00
Вартість купівлі =	8400,00
Вартість оформлення =	550,00
Вартість зберігання =	68,73
Разом =	<b>9018,73</b>

## Глава 8. Моделі багатовимірної нелінійної оптимізації

### Загальні відомості

Нелінійність – це надзвичайно розповсюджена, цілком природна ситуація, бо ж сама природа і світ – нелінійні, нелінійними є складні взаємовідносини між величинами, що характерне для технічних, фінансових, біологічних та інших процесів. То ж нелінійність реальних, зокрема, економічних задач суттєво розширює можливості врахування існуючих властивостей та рис, хоча щодо їх розв’язання дослідники мусять “розраховуватися” підвищеною складністю отримання бажаного результату аж до неможливості його отримання взагалі.

Нелінійність виникає дуже просто – достатньо порушити одну з трьох умов лінійності, й вже маємо нелінійну задачу. Скажімо, порушення «скромної» умови дійсного типу невідомих приводить до нелінійних за такою ознакою цілочислових моделей оптимізації.

Згадаймо, в задачах лінійного програмування (у тому числі, потокового та динамічного програмування) ЦФ і обмеження – лінійні залежності і невідомі – неперервні дійсні числа, для них гарантується отримання єдиного (глобального) екстремуму, тож якщо він існує – це “ідеал” оптимізації. Саме тому усюди, де допустимо, використовують техніку лінеаризації ЦФ та обмежень, адже на практиці лінійні задачі скоріше виключення, ніж правило, бо дуже часто величини (ціни, процентні ставки, тарифи), що впливають на кінцевий результат, є непропорційно залежними від невідомих (об’ємів товарів чи інвестицій) і тому загальний результат описується нелінійними співвідношеннями.

Тому лінійні моделі – це вимушена “ідеалізація” певної реальної ситуації, коли впливаючі на результат величини за відповідних умов чи коротких періодів фіксуються як константи, бо лінійні моделі простіші для розрахунків та аналізу. Отримавши “лінійний” результат, переходять до врахування реального стану ситуацій і, відповідно, до формування нелінійних моделей.

Скажімо, в лінійних задачах припускають, що прибуток (собівартість, капітальні витрати) на одиницю реалізованої продукції, а також норми розходу ресурсу на виготовлення одиниці продукту є величинами, що пропорційно (лінійно) залежать від об’єму виробництва. Таке припущення часто є занадто спрощеним і застосовується на певний досить короткий період часу.

В дійсності собівартість і, відповідно, доходи за реалізацію одиниці продукції неоднакові при різних об’ємах виробництва – збільшення об’єму випуску продукції супроводжується, як правило, зниженням її собівартості, від чого буде зменшуватися й доход.

Нормовані витрати на одиницю продукції (в тому числі, витрати праці, основних засобів, матеріалів, палива, електроенергії) теж знаходяться у певній, загалом нелінійній, залежності від об’єму виробничої програми. Скажімо, в транспортних задачах, що виникають зокрема, на залізниці, в авто-, авіаперевезеннях або в Інтернет-торгівлі нелінійність пов’язана із залежністю витрат на доставку одиниці продукції від об’єму вантажу, чим важче, тим дорожче, чим довше, тим дешевше. В той же час, підприємства зацікавлені випускати продукцію великими партіями, бо чим більша серія, тим нижча собівартість продукції. У торгівлі ціна товару залежить від об’єму продажу, спочатку вона трохи вища на номінальну, потім тримається певний час на номіналі, а далі поступово знижується до певної граничної ціни, щоб дати можливість оновити асортимент.

Все це вимагає вводити нелінійні співвідношення як в ЦФ, так і в обмеження для розв’язання відповідних задач. Таким чином, нелінійність найкраще відтворює практичну ситуацію і це добре, з одного боку. Але, з другого боку, якщо в ЛП розроблені ефективні і універсальні обчислювальні методи оптимізації, зокрема, симплекс-метод, то для загальної задачі НЛП таких методів не існує. Вихід з цієї ситуації – розробка спеціальних мето-

дів нелінійної оптимізації, які можуть бути використані лише для певних класів нелінійних задач з характерними властивостями щодо ЦФ та обмежень<sup>52, 53</sup>.

Нелінійна оптимізація базується на методах розв'язання нелінійного рівняння та їх систем. Оскільки зміна значень нелінійного рівняння непропорційна, як у ЛП, у нелінійній оптимізації активно застосовується апарат математичного аналізу (диференційне та інтегральне числення).

Тож, як не дивно, в історичному плані значно складніша за реалізацією нелінійна оптимізація має давнішу історію у порівнянні з лінійною оптимізацією. У свою чергу, нерозв'язані практичні задачі, алгоритми, методи, моделі і досвід лінійної оптимізації дали серйозний поштовх до розвитку різноманітних моделей нелінійної оптимізації, де кожна модель й відповідний метод мають власну область застосування.

### **Типи нелінійних задач оптимізації та методика пошуку оптимуму**

Як вже добре відомо, для лінійних задач оптимум знаходять симплекс-методом, який знаходиться в одній з кутових точок ОДР. Для нелінійних задач ця методика не використовується, бо оптимум може знаходитися на обмежувачій лінії чи всередині ОДР, чим ускладнюється його пошук.

Два класи задач нелінійної оптимізації:

- без обмежень
- з обмеженнями.

Два типи цільових функцій та обмежень:

- гладкі (опуклі, вигнуті)
- негладкі (з розривами).

Два типи екстремумів:

- локальні
- глобальний.

Всю множину моделей нелінійних задач оптимізації з позицій можливості отримати оптимум можна розділити на дві групи у відповідності до властивостей ЦФ та функцій обмежень:

Група 1:

- опукле програмування (вигнуті чи опуклі функції)
- квадратичне програмування
- сепарабельне програмування, де досягається глобальний оптимум;

Група 2:

- повністю нелінійне програмування (НЛП) та
- геометричне програмування, де гарантовано досягається локальний оптимум.

Можливі варіанти нелінійних задач з обмеженнями:

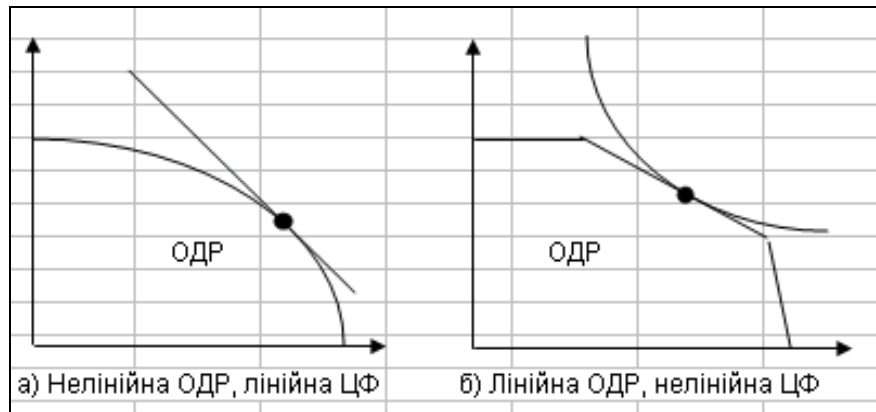
(а) задача з лінійною ЦФ та нелінійною ОДР, оптимум, якщо він є, знаходиться в будь-якій точці ОДР;

(б) задача з нелінійною ЦФ та лінійною ОДР, хоча ОДР лінійна і має кутові точки, оптимум може знаходитися будь-де:

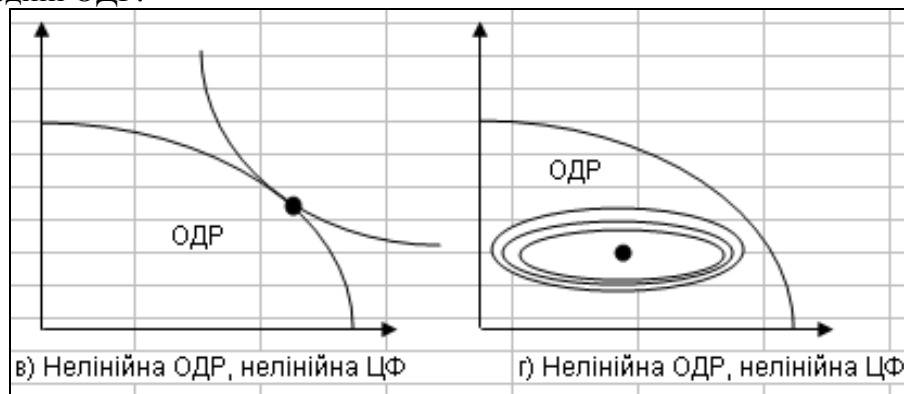
---

<sup>52</sup> Д. Химмельблау. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975

<sup>53</sup> У. Зангвилл. Нелинейное программирование. Единый подход. – М.: Советское радио, 1973



(в)–(г) задача з нелінійною ЦФ та нелінійною ОДР, оптимум знаходиться на поверхні й навіть всередині ОДР:



### Задача нелінійної оптимізації

I. Знайти план  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , такий, щоб

II. ЦФ  $C = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min)$

III за обмежень:

$$g_1(x_1, \dots, x_n) \leq (=, \geq) b_1$$

...

$$g_m(x_1, \dots, x_n) \leq (=, \geq) b_m$$

та граничних умов - всі  $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ .

### Задача 8.1. Розв'язання визначених систем нелінійних рівнянь

#### Графічний метод

##### Приклад 1

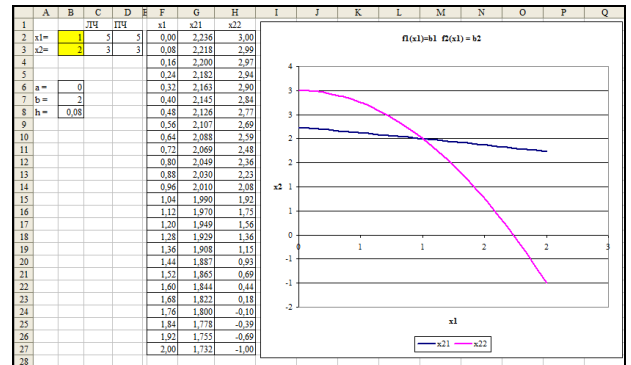
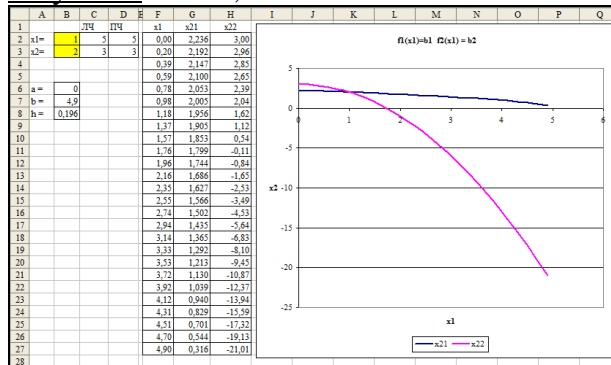
Задано систему двох нелінійних рівнянь  $\begin{cases} x_1 + x_2^2 = 5 \\ x_1^2 + x_2 = 3 \end{cases}$  з двома невідомими, яку можна розв'язати графічним методом. Для цього одну з невідомих, наприклад,  $x_1$ , вважаємо аргументом, тоді друга невідома,  $x_2$ , є функцією, відповідно, розв'язок є точкою перетину графіків двох нелінійних функцій.

##### Порядок роботи

1) Сформувати таблицю з 3-ох стовпців та 2-ох рядків, 1-ий стовпець визначений для шуканих невідомих, 2-ий – для лівих частин (ЛЧ), 3-ій – для правих частин рівнянь (ПЧ)

- 2) Визначити діапазон зміни аргументу  $x_1$  ( $a, b$ ) та крок зміни його значення ( $h_{x1}$ )
- 3) Побудувати таблицю з 3-ох стовпців для табулювання двох функцій, виражених з двох рівнянь
- 4) Побудувати діаграму *Точечная*.

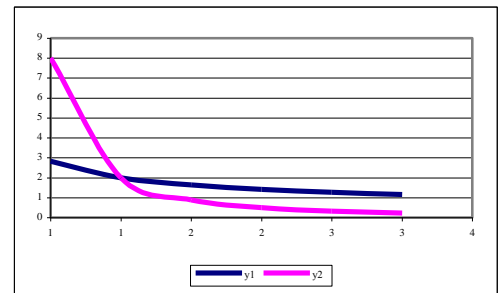
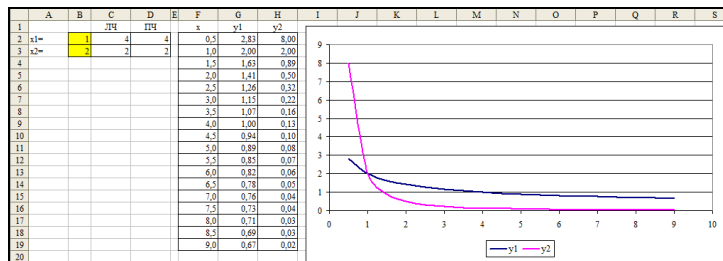
Результат:  $x_1 = 1, x_2 = 2$



### Приклад 2

Розв'язати графічним методом систему двох нелінійних рівнянь  $\begin{cases} x_1 x_2^2 = 4 \\ x_1^2 x_2 = 2 \end{cases}$ .

Результат:  $x_1 = 1, x_2 = 2$

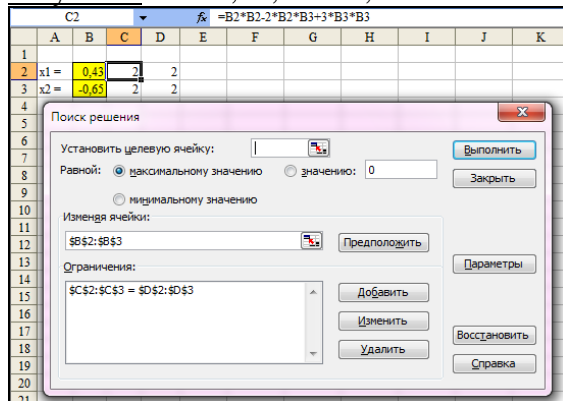


### Приклад 3

Задано систему двох нелінійних рівнянь у неявній формі:  $\begin{cases} x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 2 \\ 4x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 = 2 \end{cases}$ .

Це задача нелінійної оптимізації, де ЦФ = 0, а обмеження є ЛЧ = ПЧ, застосовується розв'язувач *Поиск решения*.

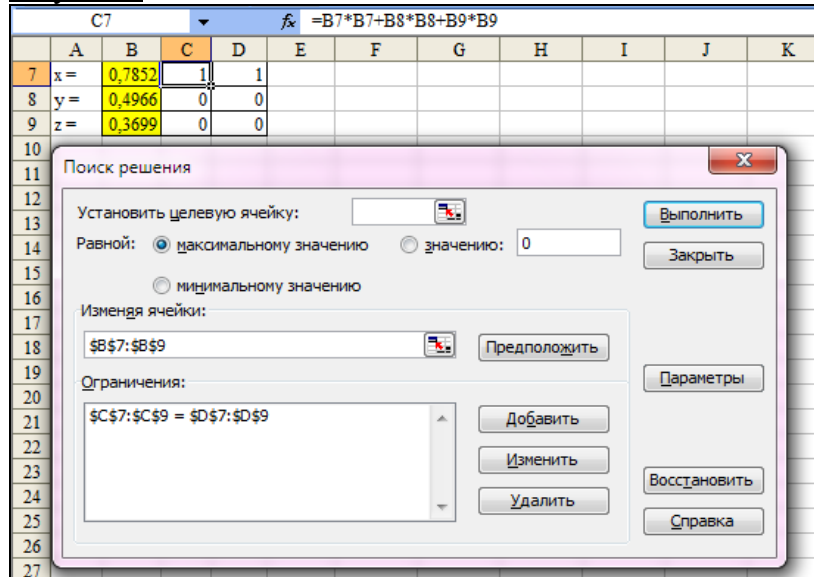
Результат:  $x_1 \approx 0,43; x_2 \approx -0,65$ .



### Приклад 4<sup>54</sup>

Розв'язати систему трьох нелінійних рівнянь: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

### Результат



### Задача 8.2. Метод множників Лагранжа

Метод множників Лагранжа<sup>55</sup> використовують для розв'язання нелінійної задачі оптимізації з  $n$  шуканими невідомими та  $m$  обмеженнями-рівняннями.

У ті далекі часи завдяки щойно винайденому диференційному та інтегральному численню математики вміли знаходити екстремум нелінійної функції. Але практика ставила задачі на пошук екстремуму функції з обмеженнями на шукані невідомі і Лагранж винайшов метод розв'язання таких задач шляхом переходу від задачі з обмеженнями (задачі на умовний екстремум) до задачі без обмежень (безумовний екстремум).

Для цього за початковими даними складається функція Лагранжа, яка залежить від  $n$  невідомих  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) й  $m$  шуканих коефіцієнтів – множників Лагранжа (МЛ)  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ :

$$L(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(X),$$

після її диференціювання по  $n + m$  невідомим формується система з  $n + m$  лінійних й нелінійних рівнянь, яку розв'язують відповідними методами.

З економічної точки зору отримані після розв'язання системи МЛ  $\lambda_j$  за змістом близькі тіншовим цінам в лінійних задачах оптимізації – вони показують “впливовість” правих частин відповідних обмежень (запасів ресурсів, об'ємів, місткості) у вигляді швидкості зростання/спадання значення ЦФ при зміні значень правих частин обмежень, це похідна функції Лагранжа, її значення змінюється зі зміною правої частини обмеження. Відмінність їх від тіншових цін ЛП – множники Лагранжа не показують, на скільки можна змінити зна-

<sup>54</sup> Б.П. Демидович, И.А. Марон. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с. Методом Ньютона зроблено три наближення із заданого початкового наближення (0,5; 0,5; 0,5), на кожному з них обчислюється: матриця Якобі, з неї формується СЛАР, для якої обчислюється визначник й обернена матриця, усі ці дії виконує *Поиск решения* автоматично

<sup>55</sup> Лагранж (Lagrange), Жозеф Луї (1736-1813) – видатний французький математик і механік. Найважливіша його заслуга в галузі математики – він разом з Л. Ейлером є розробником варіаційного числення, в якому розроблені загальні методи визначення екстремумів функціоналів, та класичної аналітичної механіки



чення правих частин обмежень для збереження структури плану, це зазвичай роблять експериментальним шляхом.

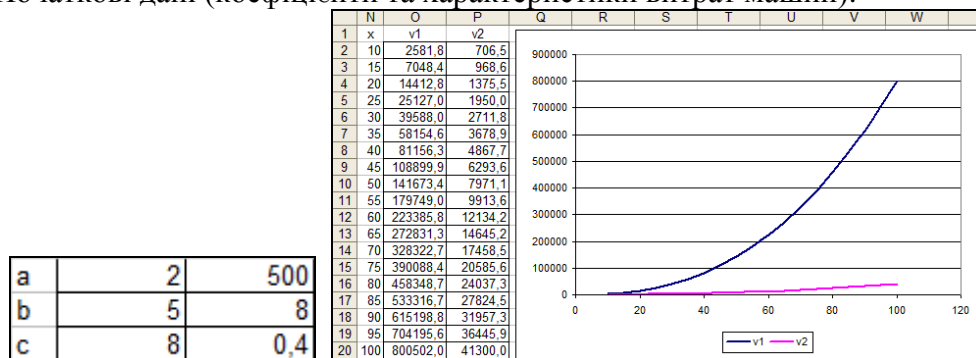
### Задача оптимізації

- I. Знайти вектор  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , щоб
- II. ЦФ  $f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max/\min$
- III. за обмежень-рівнянь:  $g_j(x_1, \dots, x_n) = 0, j = 1, \dots, m$ .

#### Приклад.

На двох машинах різного типу треба виготовити задану кількість продукту  $z$  таким чином, щоб загальні витрати на їх експлуатацію були мінімальними. Витрати для кожної машини описуються опуклою функцією  $v(x) = a + bx + cx^{2.5}$ . Отже, шуканими невідомими є значення  $x_1$  та  $x_2$ , це кількості продукції, що буде виготовлена на 1-ій та 2-ій машинах, звідси обмеження-рівняння:  $x_1 + x_2 = z$ .

Початкові дані (коефіцієнти та характеристики витрат машин):



### Задача оптимізації

- I. Знайти такий план  $X = (x_1, x_2)$ , щоб
- II. ЦФ (загальні витрати)  $V = v_1 + v_2 \rightarrow \min$ , де
 
$$v_1 = a_1 + b_1x_1 + c_1x_1^{2.5},$$

$$v_2 = a_2 + b_2x_2 + c_2x_2^{2.5}$$
- III. за обмеження:  $x_1 + x_2 = z$ ,  
та граничних умов:  $x_1, x_2 \geq 0$ .

Це – задача на умовний екстремум, де умовою-обмеженням є рівняння  $x_1 + x_2 = z$ .

За Лагранжем ця задача умовної оптимізації перетворюється на задачу безумовного екстремуму, яку далі розв’язують класичним методом (пошук першої похідної, прирівнювання її нулю тощо).

### Реалізація “ручним” методом

Утворюється функція Лагранжа, яка складається з двох частин: заданої ЦФ та обмеження, помноженого на невідомий коефіцієнт  $\lambda$  (це шуканий множник Лагранжа), для наведеного прикладу ця функція має такий вигляд:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = [(a_1 + b_1x_1 + c_1x_1^{2.5}) + (a_2 + b_2x_2 + c_2x_2^{2.5})] + \lambda(z - x_1 - x_2)$$

для якої треба знайти мінімум.

Для цього функцію  $L(x_1, x_2, \lambda)$  тричі диференціюють по трьох невідомих змінних:  $x_1, x_2, \lambda$ , отримані вирази прирівнюють нулю і розв’язують систему трьох нелінійних рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = b_1 + 2,5c_1x_1^{1,5} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = b_2 + 2,5c_2x_2^{1,5} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = z - x_1 - x_2 = 0.$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь в Excel за допомогою програми Поиск решения, цільова функція відсутня.

Розв'язок системи нелінійних рівнянь в Excel

	A	B	C	E	F
1	x1	x2	L		
2	11,98	88,02	833,9		
3				лч	пч
4	a1	a2		0,00	0
5	2	500		0,00	0
6				0,00	0
7	b1	b2			
8	5	8			
9	c1	c2			
10	8	0,4			
11					
12	z =	100			
13					
14	v1	v2	V (ЦФ)		
15	4032,31	30282,4	34314,67		
16					
17					
18					

Знайдені значення  $x_1$  та  $x_2$  (12 та 88) підставляємо в формулу ЦФ, згідно якої виготовлення 100 од. продукту на двох машинах за таким планом забезпечує мінімальні витрати величиною 34314,67 гр. од.

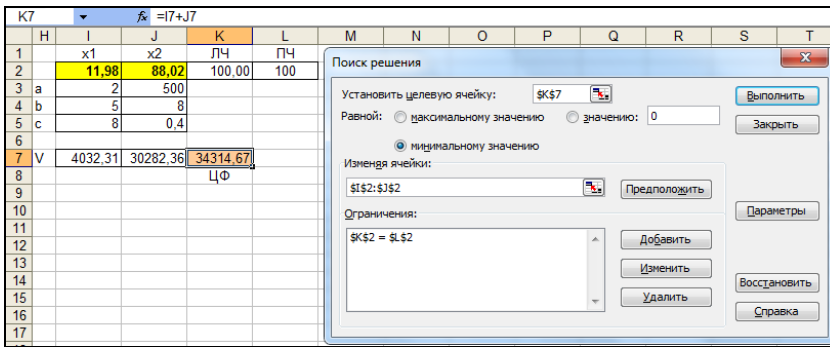
Отже, в економічних дослідженнях множники Лагранжа мають цікаву і корисну властивість – вони показують чутливість розв'язку нелінійної задачі щодо правих частин обмежень (в прикладі  $z = 100$ ). Якщо множник  $\lambda = 0$ , значення правої частини обмеження не впливає на результат, якщо ж значення множника ненульове (в прикладі  $\lambda = 833,9$ ), воно вказує на швидкість, з якою зміниться ЦФ при зміні граничного значення обмеження  $z$  на одиницю, зі 100 до 101 (перевірка: при  $z = 101$  ЦФ збільшиться на 840 гр. од.).

Саме ідея використання множників Лагранжа для оцінки впливу правих частин обмежень на значення ЦФ у свій час надихнула майбутніх Нобелівських лауреатів Л. В. Канторовича віднайти названі ним “дозволяючі множники” (або об'єктивно обумовлені оцінки), а Т. Купманса – “тіньові ціни” для задач лінійного програмування, щоб мати можливість оцінити, зокрема, вплив обмежень на запас ресурсу в лінійній задачі оптимізації.

Виникнення і розвиток нелінійного програмування дозволив застосувати ідеї методу множників Лагранжа до економічних задач з обмеженнями-нерівностями (теорема Куна-Таккера), що реалізовано, зокрема, в програмі Поиск решения.

Класичний “ручний” метод передбачає побудову функцію Лагранжа, диференціювання її по всіх “старих” та “нових” невідомих, прирівнення отриманих виразів нулю, а далі розв'язання побудованої системи нелінійних рівнянь. Суттєвий недолік такої методики – багато ручної роботи, що не дозволяє реалізувати її для задач великого розміру. Але сама ідея тепер успішно реалізована в сучасних машинних алгоритмах, що дає змогу розв'язувати практичні нелінійні задачі оптимізації.

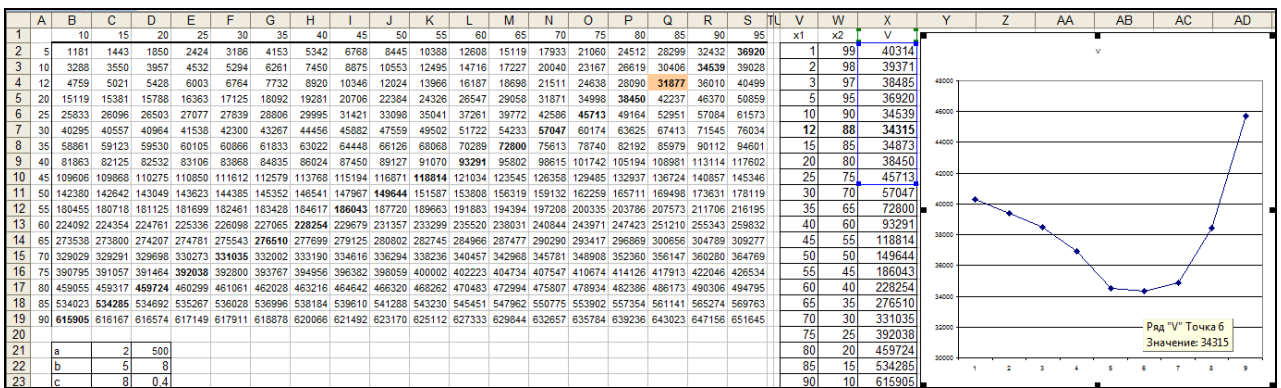
**Реалізація за допомогою розв'язувача Поиск решения**



Ограничения		Результ.	Лагранжа
Ячейка	Имя значение	Множитель	
\$K\$2	ЛЧ	100,00	833,86

План  $X = (12, 88)$  забезпечує мінімум витрат на виготовлення 100 од. продукту величиною 34314,7 гр. од. Двоїста оцінка ПЧ обмеження – множник Лагранжа – зі значенням 833,86 вказує на приблизну швидкість зростання ЦФ при збільшенні замовлення на 1.

### Графічна ілюстрація



### Задача 8.3. Про суміш (модель з неоднорідною розривною ЦФ)

Ідея алгоритму Балінського, розробленого для транспортної задачі з фіксованими доплатами, використовується для загальної моделі з неоднорідною розривною цільовою функцією на прикладі векторної задачі про оптимальну суміш. Ця класична задача ЛП доповнюється умовою фіксованої доплати за включення у суміш певної компоненти (незалежно від її кількості).

#### Постановка задачі

Суміш складається з 5 елементів (речовин), що містяться у 6 альтернативних компонентах (продуктах).

Задано:

- технологічну матрицю  $A(5 \times 6)$ , елемент якої  $a_{ij}$  вказує вміст  $i$ -го елемента в одиниці  $j$ -го компонента,  $i = 1, \dots, 5; j = 1, \dots, 6$ ;
- вектор-стовпець норм  $Z(5)$ , елемент якого  $z_i$  визначає нижню границю вмісту  $i$ -го елемента у суміші
- вектор-рядок цін  $C(6)$ , елемент якого  $c_j$  визначає ціну одиниці  $j$ -го компонента
- вектор-рядок додаткових витрат  $D(6)$ , елемент якого  $d_j$  визначає витрати на оформлення замовлення і доставку одиниці  $j$ -го компонента, якщо він застосовується у суміші
- вектор-рядок  $G(6)$ , елемент якого  $g_j$  є верхньою границею на шукане значення  $x_j$  (необхідна умова моделей ЦЛП).

### Задача оптимізації

I. Знайти план  $X(6)$ , де елемент  $x_j$  – кількість  $j$ -го компонента у суміші, та вектор додаткових змінних  $Y(6)$ , такі, щоб

II. загальні витрати (ЦФ)

$$\sum_{j=1}^6 c_j(x_j) \rightarrow \min$$

$$де c_j(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{при } x_j = 0 \\ c_j x_j + d_j y_j, & \text{при } x_j > 0 \end{cases}$$

де:

$c_j$  – ціна  $j$ -го компонента,

$d_j$  – фіксована доплата за використання  $j$ -го компонента,

$y_j$  – ознака використання  $j$ -го компонента у суміші,  $y_j \in \{0,1\}$

III. за обмежень:

$$\sum_{j=1}^6 a_{ij} x_j \geq z_i, \text{ вміст } \geq \text{нижня границя}$$

$x_j \leq g_j y_j$ , спосіб врахування фіксованих доплат обмеженням зверху значення невідомої  $x_j$ .

та граничних умов: всі  $x_j \geq 0$ .

### Лінійна модель

Тимчасово не враховується цілочисельність вектора  $Y$ , щоб мати можливість отримати двоїсті оцінки обмежуючих факторів симплекс-методом і мати уявлення про їх вплив на кінцевий результат:

- цін компонентів (C), оцінка – їх нормована вартість,
- нижніх границь на вміст елементів (Z), оцінка – їх тіньова ціна.

### Результат

Задача про суміш з фіксованими доплатами (алгоритм Балінського)										
C	Комп 1	Комп 2	Комп 3	Комп 4	Комп 5	Комп 6	НГ (Z)	Вміст	Перевищення	T-ціна
Елемент 1	6,6	5,4	7,0	9,6	9,0	9,5	111	120,9	9,9	0
Елемент 2	2,1	6,9	6,9	6,7	5,9	9,3	55	113,9	58,9	0
Елемент 3	9,1	7,5	7,6	6,6	7,0	7,3	22	126,8	104,8	0
Елемент 4	7,6	6,8	5,8	7,8	6,4	7,2	18	115,1	97,1	0
Елемент 5	1,3	9,3	9,4	6,9	9,7	8,2	166	166,0	0,0	3,96
Вартість комп. (C)	10	20	45	30	35	50				
Витрати зам. (D)	21	12	21	32	43	9				
G (верх. гран (x))	10	10	10	10	10	10				
План (X)	0	10,00	0	0	7,49	0				
Додаткові (Y)	0,0	1,0	0,0	0,0	0,75	0,0				
Обмеж GY	0,00	10,00	0,00	0,00	7,49	0,00				
Витрати										
CX	0	200	0	0	262,15	0	462,15			
DY	0	12	0	0	32,21	0	44,21			
Сума	0	212	0	0	294,35	0	506,35	ЦФ		
Двоїсті оцінки (нормовані вартості)										
C	4,70	-14,83	7,74	2,58	0,00	17,54				
Y	10	0	45	30	0	50				

### Аналіз результатів

Пряма задача: план  $X = (0; 10; 0; 0; 7,49; 0)$ , суміш складається з двох компонентів – 2-го та 5-го видів. Ясно, що вигідним є 2-ий компонент, але з-за обмеження зверху змушено добираємо корисні речовини за рахунок 5-го, дорожчого, компоненту; мінімальна вартість (ЦФ) = 506,35 (результат не точний, бо занижено витрати на доставку 5-го компоненту, адже  $y_5 = 0,7$ , а не 1).

Двоїста задача: нормована вартість цін (рядок C) вказує на зміну значення ЦФ при вимушеному збільшенні невідомої плану на 1. Для невідомої  $x_2$  цей показник – від'ємне число, воно вказує на можливе зменшення вартості суміші при підвищенні верхньої границі для

вигідного 2-го компоненту на 1; тіньова ціна 5-го елементу (3,96) вказує на подорожчання суміші при збільшенні нижньої границі на 1 і навпаки.

Ці дані є орієнтиром щодо покращення кінцевого результату, зокрема, маємо вартісні оцінки усіх можливих компонентів, їх рейтинг вигідності (в порядку зменшення): 2-5-4-1-3-6.

### Цілочислова (двійкова) модель

Додається умова цілочисельності вектора  $Y$

Результат:

Задача ЦПП про суміш з фіксованими доплатами (алгоритм Балінського)									
С	Комп 1	Комп 2	Комп 3	Комп 4	Комп 5	Комп 6	НГ (Z)	Вміст	Перевищення
Елемент 1	6,6	5,4	7,0	9,6	9,0	9,5	111	120,9	9,9
Елемент 2	2,1	6,9	6,9	6,7	5,9	9,3	55	113,9	58,9
Елемент 3	9,1	7,5	7,6	6,6	7,0	7,3	22	126,8	104,8
Елемент 4	7,6	6,8	5,8	7,8	6,4	7,2	18	115,1	97,1
Елемент 5	1,3	9,3	9,4	6,9	9,7	8,2	166	166,0	0,0
Вартість комп. (C)	10	20	45	30	35	50			
Витрати зам. (D)	21	12	21	32	43	9			
G (верх. гран (x))	10	10	10	10	10	10			
План (X)	0	10,00	0	0	7,49	0			
Додаткові (Y)	0	1	0	0	1	0			
Обмеж GY	0,00	10,00	0,00	0,00	10,00	0,00			
Витрати									
СХ	0	200	0	0	262,15	0	462,15		
ДY	0	12	0	0	43,00	0	55,00		
Сума	0	212	0	0	305,15	0	517,15	ЦФ	

### Задача 8.4. Про оптимальний план виробництва (НЛП)

#### Постановка задачі

В класичній задачі про оптимальний план виробництва ціна реалізації фіксована для будь-якого об'єму випуску. У реальному виробничому процесі вважається, що дохід ( $D$ ) від реалізації  $n$  видів готової продукції залежить, як правило, нелінійно, від об'єму випуску ( $X$ ), бо ціна реалізації за продукт ( $c_z$ ) є змінною, що нелінійно залежить від об'єму реалізації,  $c_z=f(x)$ , нелінійно, бо досить часто ця функція дискретна (ступінчаста), яка різко змінює своє значення при досягненні певного порогового значення. Й, зрозуміло, план виробництва залежить від відповідного ресурсного забезпечення, зокрема, від потужності  $l$  одиниць машинного парку ( $R$ ) та  $m$  видів сировини, яка закуповується для використання за відповідною ціною,  $z_j$ . Тому цільовою функцією є значення прибутку ( $P$ ), що визначається різницею між доходом від реалізації готової продукції ( $D$ ) й витратами на ресурсне забезпечення виробничого процесу ( $V$ ).

#### Задача оптимізації

I. Знайти план  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , такий, щоб

$$D = \sum_{i=1}^n c_z(x) x \text{ дохід};$$

II. ЦФ (загальний прибуток)  $P = D - V \rightarrow \max$ , де:

$$V = \sum_{j=1}^m z_j k_j \text{ - витрати}$$

$z_j$  та  $k_j$  – ціна та кількість сировини  $j$ -го виду ( $j = 1, \dots, m$ );

III. за обмежень:

$$(3.1) \sum_{i=1}^n r_{li} x_i \leq R_l \text{ - витрати машинних ресурсів обмежені їх запасами, } l = 1, \dots, L$$

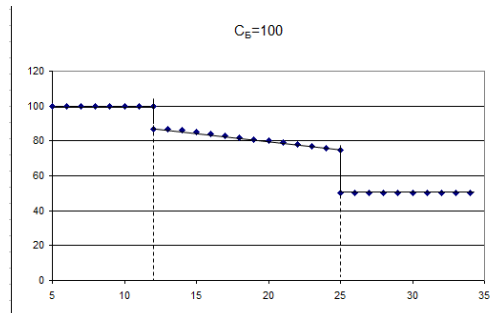
$$(3.2) x_i \leq p_i \text{ - випуск продукції обмежений попитом}$$

та граничних умов: всі  $x_i \geq 0$  (додатково – цілого типу).

### Приклад.

Треба розв'язати задачу про оптимальний план виробництва 3-х видів продуктів (Пр-1, Пр-2, Пр-3) з використанням наявних ресурсів: запасів машинного часу 4-х видів машин та кількостей 5-ти видів сировини, яка купується; дохід від реалізації  $x$  одиниць продукту визначається величиною  $c_z x$ , де змінна ціна  $c_z$  задана нелінійною ступінчастою (з розривами) функцією, яка визначає залежність ціни від об'єму  $x$  реалізації ( $x$  обчислюється як частка попиту  $p$ ):

$$c_z = \begin{cases} c_b, & x \leq \frac{p}{4} \\ c_b - \frac{c_b x}{2p}, & x \leq \frac{p}{2} \\ \frac{c_b}{2}, & x > \frac{p}{2} \end{cases}$$



### Задача оптимізації

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2, x_3)$ , такий, щоб

II. ЦФ (загальний прибуток)  $P = (c_{z1}x_1 + c_{z2}x_2 + c_{z3}x_3) - (z_1k_1 + z_2k_2 + z_3k_3 + z_4k_4 + z_5k_5) \rightarrow \max$

III. за обмежень:

$$(3.1) \begin{cases} 20x_1 + 10x_2 + 10x_3 \leq 2400 \\ 12x_1 + 28x_2 + 16x_3 \leq 500 \\ 15x_1 + 6x_2 + 16x_3 \leq 2400 \\ 10x_1 + 15x_2 + 0x_3 \leq 2400 \end{cases} \quad \text{– витрати машинних ресурсів обмежені їх запасами,}$$

$$(3.2) \begin{cases} x_1 \leq 100 \\ x_2 \leq 40 \\ x_3 \leq 60 \end{cases} \quad \text{– випуск продукції обмежений попитом}$$

та граничних умов: всі  $x_i \geq 0$  (додатково – цілого типу).

### Таблична модель

#### Результат

	Пр-1	Пр-2	Пр-3				
План (X)	15,5	2,7	15,0				
Попит	100	40	60				
Ціна базова	90	100	70				
Ціна змінна	90,0	100,0	70,0	Дохід	Прибуток (ЦФ)		
Дохід	1393,3	265,1	1050,0	2708,4	1461,31		
Ресурси	Питомі витрати			Запас	Використано	Залишки	Мн. Лагранжа
М-1	20	10	10	2400	486,1	1913,9	0
М-2	12	28	16	500	500,0	0,0	2,04
М-3	15	6	16	2400	488,1	1911,9	0
М-4	10	15	0	2400	194,6	2205,4	0
Сировина					Використано	Вартість	Ціна
С-1	1	0	0	1	15,5	309,6	20
С-2	1	1	0	1	18,1	362,6	20
С-3	0	1	1	1	17,7	353,0	20
С-4	1	0	0	1	15,5	77,4	5
С-5	1	1	2	1	48,1	144,4	3
						1247,09	
						Витрати	

### Аналіз результату

**Пряма задача:** план  $X = (15,5; 2,7; 15,0)$ , прибуток (ЦФ) = 1461,31 = 2708,40–1247,09. Оскільки значення плану не перевищують чверті попиту, змінна ціна дорівнює базовій.

Визначений план обмежений недостатнім ресурсом машини М-2, це – «вузьке місце» процесу.

**Двоїста задача:** множник Лагранжа для «дефіцитної» машини (2,04) вказує на швидкість зростання значення ЦФ при збільшенні відповідного запасу на 1.

### Модифікація моделі

**Умова 1.** Прийнято рішення про збільшення ресурсу М-2 на 1.

Результат

	Пр-1	Пр-2	Пр-3		
План (X)	15,5	2,7	15,0		
Попит	100	40	60		
Ціна базова	90	100	70		
Ціна змінна	90,0	100,0	70,0	Дохід	Прибуток (ЦФ)
Дохід	1393,0	268,8	1050,0	2711,8	1463,29

**Умова 2.** Машина М-2 вийшла на нормальний режим експлуатації, її ресурс дорівнює 2400 од.

Результат

	Пр-1	Пр-2	Пр-3		
План (X)	25,00	29,34	23,86		
Попит	100	40	60		
Ціна базова	90	100	70		
Ціна змінна	90,0	50,0	56,1	Дохід	Прибуток (ЦФ)
Дохід	2250,0	1466,9	1338,3	5055,2	1973,19

Ресурси	Питомі витрати			Запас	Використано	Залишки	
М-1	20	10	10	2400	1032,0	1368,0	
М-2	12	28	16	2400	1503,3	896,7	
М-3	15	6	16	2400	932,9	1467,1	
М-4	10	15	0	2400	690,1	1709,9	
Сировина					Використано	Вартість	Ціна
С-1	1	0	0	1	25,0	500,0	20
С-2	1	1	0	1	54,3	1086,7	20
С-3	0	1	1	1	53,2	1064,0	20
С-4	1	0	0	1	25,0	125,0	5
С-5	1	1	2	1	102,1	306,2	3
						3081,99	
						Витрати	

### Аналіз результату

**Пряма задача:** оптимальний план  $X = (25; 29,34; 23,86)$ , прибуток (ЦФ) = 1973,19 (після кількох спроб).

На відміну від лінійної задачі є залишки машинних ресурсів, в результаті нелінійної оптимізації значення змінної ціни й плану випуску визначені такими, що збільшувати випуск надалі не вигідно, це така собі «золота середина», бо зі збільшенням випуску ціна реалізації зменшується, а кількість необхідної сировини та її вартість за фіксованою ціною при цьому збільшуються, відповідно, прибуток буде зменшуватися – в цьому специфіка нелінійної моделі (аналог – альпініст досяг вершини й подальший його рух веде до спуску).

Двоїста задача: оскільки дефіцитних ресурсів нема, множник Лагранжа нульовий.

Висновок: за визначеною нелінійною ціновою політикою немає сенсу вдосконалювати ресурсну базу, яка, як в прикладі, виявилася недовантаженою, для покращення результату бажано змінити витратну складову з лінійної (пропорційної) на нелінійну.

**Умова 3.** Прийнято рішення обчислювати дохід за базовою ціною, що не залежить від випуску. За цим рішенням для поставленої задачі використовується модель лінійного програмування, яка реалізується обома методами – симплекс-методом та градієнтним методом.

### Результат

	Пр-1	Пр-2	Пр-3				
План (X)	81,82	16,36	60,00				
Попит	100	40	60				
Ціна базова	90	100	70				
Ціна змінна	45,0	79,5	35,0	Дохід	Прибуток (ЦФ)		
Дохід	7363,6	1636,4	4200,0	13200,0	7009,09		
Ресурси	Питомі витрати			Запас	Використано	Залишки	Мн. Лагранжа
М-1	20	10	10	2400	2400,0	0,0	1,12
М-2	12	28	16	2400	2400,0	0,0	1,64
М-3	15	6	16	2400	2285,5	114,5	0
М-4	10	15	0	2400	1063,6	1336,4	0
Сировина					Використано	Вартість	Ціна
С-1	1	0	0	1	81,8	1636,4	20
С-2	1	1	0	1	98,2	1963,6	20
С-3	0	1	1	1	76,4	1527,3	20
С-4	1	0	0	1	81,8	409,1	5
С-5	1	1	2	1	218,2	654,5	3
						6190,91	
Н-град.	0	0	6,64			Витрати	

### Аналіз результату

Пряма задача: план  $X = (81,82; 16,36; 60)$ , прибуток (ЦФ) = 7009,09 (після кількох спроб).

Є дефіцитні машинні ресурси, з-за чого план менше замовлення (окрім Пр-3), для порівняння обчислені змінні ціни для визначеного плану.

Двоїста задача: для дефіцитних ресурсів (М-1, М-2) визначені значення множників Лагранжа (аналог тіньових цін для нелінійних задач), ресурс М-2 «цінніший» за М-1, якщо ставити задачу вдосконалювати машинний парк.

Оцінка «нормований градієнт» (аналог нормованої вартості для лінійних задач) для «вигідного» продукту Пр-3 (6,64), випуск якого обмежено попитом, вказує на потенційне збільшення прибутку при збільшенні попиту на 1.

Ось перевірка:

	Пр-1	Пр-2	Пр-3		
План (X)	81,55	15,91	61,00		
Попит	100	40	61		
Ціна базова	90	100	70		
Ціна змінна	45,0	80,1	35,0	Дохід	Прибуток (ЦФ)
Дохід	7339,1	1590,9	4270,0	13200,0	7015,73

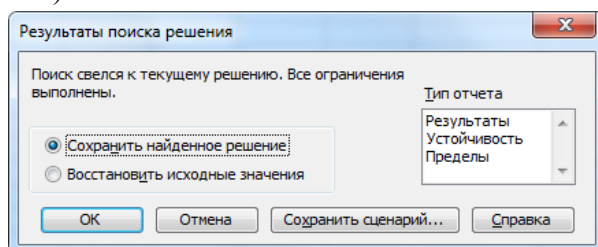
### Зауваження

Вже було вказано, що градієнтний метод для негладкої цільової функції знаходить локальний оптимум для заданого початкового наближення. Для пошуку кращого результату у напрямку до глобального оптимуму рекомендується задавати інші початкові наближення,

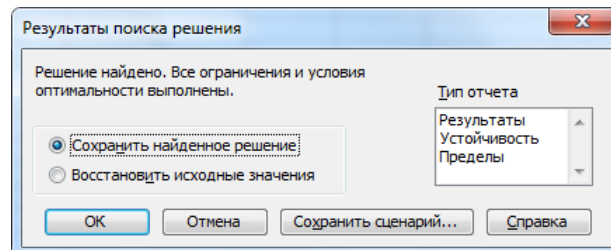


вносити зміни в параметри розв'язувача *Поиск решения* (оценки: квадратичные; разности: центральные; метод поиска: сопряженных градиентов).

Перший, не остаточний результат супроводжується виведенням повідомлення (1), це значить, як й у героя Нікуліна, «будем искать...», після чого треба повторити запуск розв'язувача, аж поки не буде виведено повідомлення (2), вже тоді можна формувати звіт Устойчивость для отримання двоїстих оцінок (множники Лагранжа, нормований градієнт).



(1)



(2)

### Задача 8.5. Мінімізація ризику інвестиційного портфелю

Це – типова, важлива і дуже розповсюджена фінансова задача, яка виникає в практиці ресурсного забезпечення, страхування, інвестування, банківської справи тощо, де мова йде про пошук оптимального розподілу цілого (як правило, суми коштів) на окремі частки.

#### Постановка задачі

Інвестор має намір вкласти  $S$  грн. в  $n$  цінних паперів (ЦП) і хоче визначити, яку частку цієї суми найкраще вкласти у кожний вид ЦП. Вибраний набір ЦП носить назву інвестиційний портфель.

Найкращим може бути один з двох альтернативних варіантів:

- **мінімізація** ризику при обмеженні на дохід (обережний підхід) або
- **максимізація** доходу при обмеженні на ризик (ризикований, сміливий підхід).

Вже відзначалося, що в інвестиційному менеджменті набір часток суми інвестування називається *портфель* (portfolio), оптимальним портфелем є такий набір, який інвестор визнає для себе найкращим щодо відношення між доходністю вкладень та ризиком втрат.

Отже, інвестор хоче вкласти кошти в акції (цінні папери, ЦП)  $N$  підприємств таким чином, щоб портфель  $X=(x_1, \dots, x_N)$  супроводжувався мінімальним ризиком при фіксованому рівні очікуваного доходу.

**Дохід**  $d_t$ , отриманий за певний період часу  $t$  від інвестування суми  $C_0$ , яка зросла за цей період до  $C_t$ , є числом (додатнім чи від'ємним)

$$d_t = \frac{(C_t - C_0)}{C_t}, \text{ наприклад, при } C_0=110, C_t=112,5, d_t = (112,5-110)/110 \approx 0,023.$$

**Ризик** в теорії інвестування прийнято вимірювати величиною можливого розбросу (мінливості) доходу портфелю від середнього значення, цей розброс в математичній статистиці називається варіацією або дисперсією.

Ставиться задача мінімізувати величину варіації доходу (інакше, мінімізувати ризик) для заданого значення очікуваного доходу (це обмеження знизу, тобто, дохід має бути не меншим заданого значення).

Початкові дані для цієї задачі зосереджені у статистиці доходів для всіх  $N$  ЦП, накопиченій за  $T$  часових періодів (років), тобто, це є матриця  $D$  розміром  $T \times N$ , де кожен з її елементів  $d_{ij}$  є доходом, отриманим в  $i$ -ий період для  $j$ -го ЦП.

З цієї матриці можна отримати:

- середнє значення доходу від  $j$ -го ЦП  $sd_j = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T d_{ij}$
- варіацію (дисперсію) доходу від  $j$ -го ЦП  $\sigma_j^2 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (d_{ij} - sd_j)^2$
- коваріацію<sup>56</sup> доходу від  $j$ -го та  $k$ -го ЦП  $\sigma_{jk} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (d_{ij} - sd_j)(d_{ik} - sd_k)$ .

Варіація (дисперсія) доходу (ЦФ) обчислюється за загальною формулою:

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^N \sigma_{ik} x_i x_k$$

це квадратична функція, для якої треба знайти мінімум.

Існує два варіанти цієї задачі:

- значення середніх доходів, їх варіацій та коваріацій задані (модель Марковіца)
- задана статистика доходів (матриця  $D$ ), з якої знаходять значення середніх доходів, їх варіацій та коваріацій (модель Шарпа).

Приклад (модель Марковіца)

Інвестування стосується двох ЦП, для яких задані доходності ( $d_1, d_2$ ), дисперсії ( $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ ) та коваріація ( $\sigma_{12}$ ). Треба знайти оптимальний портфель ( $x_1, x_2$ ), який забезпечує мінімальний ризик.

### Задача оптимізації

I. Знайти план інвестування (портфель)  $X = (x_1, x_2)$ , такий, щоб

II. загальний ризик (ЦФ)  $R = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\sigma_{12} x_1 x_2 \rightarrow \min$

III. за обмеження  $x_1 + x_2 = 1$

та граничних умов – всі  $x_i \geq 0$ .

### Таблична модель 1

Це – «ідеальний» варіант, за яким портфель майже у відношенні 4:6 розділено на два ЦП (ЦП 1 та ЦП 2), визначено мінімальний ризик (4,55%) без фіксації значення доходу, це значення автоматично обчислено і склало величину 3,45:

Оптимальний портфель інвестицій (доходи, варіації та коваріації задані)				
Критерій - мінімум ризику при обмеженні на доход				
	ЦП 1	ЦП 2	Сума	Обмеження
Портфель	36,4%	63,6%	100,00%	1
Доходність (%)	6%	2%		
Доход %	2,2%	1,3%	3,45%	
Дисперсія	0,09	0,06		
Коваріація	0,02		0,0093	
Дисперсія	0,012	0,024	4,55%	ЦФ (Ризик)

### Таблична модель 2

Зафіксовано обмеження на величину доходу (5%), відповідно, мінімальний ризик зріс до 6,2%, змінилася й структура портфеля:

<sup>56</sup> число, яке характеризує залежність доходу від двох ЦП, які певним чином зв'язані між собою і впливають один на одного, за змістом – взаємодія двох масивів. Коваріація масиву "сам з собою" є його варіацією (дисперсією)

Оптимальний портфель інвестицій (доходи, варіації та коваріації задані)				
Критерій - мінімум ризику при обмеженні на доход				
	ЦП 1	ЦП 2	Сума	Обмеження
Портфель	75,0%	25,0%	100,00%	1
Доходність (%)	6%	2%		Мн. Лагранжа
Доход %	4,5%	0,5%	5,00%	5%
Дисперсія	0,09	0,06		
Коваріація	0,02		0,0075	
Дисперсія	0,051	0,004	6,19%	ЦФ (Ризик)

### Аналіз результату

Пряма задача: отримано оптимальний портфель  $X = (0,75; 0,25)$ , який забезпечує мінімальний ризик зі значенням загальної дисперсії 0,0619 (або 6,19%) при обмеженні на доход (нижня границя)  $d_1x_1 + d_2x_2 \geq 0,05$  (5%).

Двоїста задача: тіньова ціна (множник Лагранжа) обмеження 5% доходу (2,12) вказує на швидкість зростання ризику при збільшенні значення цього обмеження.

### Таблична модель 3

Зафіксовано обмеження на величину інвестиції (50%), відповідно, мінімальний ризик зріс до 4,75%, рівень доходу забезпечується на рівні 4%:

Оптимальний портфель інвестицій (доходи, варіації та коваріації задані)				
Критерій - мінімум ризику при обмеженні на доход				
	ЦП 1	ЦП 2	Сума	Обмеження
Портфель	50%	50%	100,00%	1
Доходність (%)	6%	2%		50% max інвестиція
Доход %	3,0%	1,0%	4,00%	
Дисперсія	0,09	0,06		
Коваріація	0,02		0,0100	
Дисперсія	0,023	0,015	4,75%	ЦФ (Ризик)

### Задача 8.6. Визначення середнього доходу ЦП та оцінок ризику

#### Приклад (модель Шарпа)

Інвестування стосується трьох ЦП, для яких задані лише доходності ( $d_1, d_2, d_3$ ) за 12 часових періодів (місяців), а дисперсії ( $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ ) та коваріації ( $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ ), які є оцінками ризику, треба знайти з наведеної статистики доходності ЦП і далі визначити значення оптимального портфеля ( $x_1, x_2, x_3$ ), який забезпечує мінімальний ризик.

Середній дохід дуже просто обчислюється за допомогою функції Excel =срзнач(діапазон), а варіації (дисперсії) та коваріації – за допомогою функції =ковар (діапазон 1; діапазон 2):

Оптимальний портфель інвестицій (за статистикою доходів)			
Мінімізувати дисперсію доходу портфелю			
Статистика			
Період (м-ць)	Доход ЦП 1	Доход ЦП 2	Доход ЦП 3
Січень	3,0%	2,5%	4,9%
Лютий	1,3%	2,0%	2,0%
Березень	2,6%	2,6%	1,9%
Квітень	-1,6%	-2,2%	-2,8%
Травень	-2,1%	1,4%	6,9%
Червень	3,6%	1,7%	-3,5%
Липень	3,8%	3,1%	1,3%
Серпень	8,9%	3,5%	7,2%
Вересень	9,0%	9,5%	2,1%
Жовтень	8,3%	9,0%	1,1%
Листопад	3,5%	-2,2%	0,6%
Грудень	1,6%	7,5%	90,8%
Середн. дохід	<b>3,49%</b>	<b>3,20%</b>	<b>9,38%</b>

Варіації/Коваріації					
$\sigma_{11}$	$\sigma_{22}$	$\sigma_{33}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_{23}$
0,0012	0,0013	0,0612	0,0008	-0,0012	0,0034
$\sigma_{11}x_1^2$	$\sigma_{22}x_2^2$	$\sigma_{33}x_3^2$	$\sigma_{12}x_1x_2$	$\sigma_{13}x_1x_3$	$\sigma_{23}x_2x_3$
0,000381	0,000259	0,000001	0,000198	-0,000002	0,000005
<b>0,0010</b>	ЦФ				

Маючи значення варіацій ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) та коваріацій ( $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ ), можна обчислити значення цільової функції.

### Задача оптимізації

I. Знайти план інвестування (портфель)  $X = (x_1, x_2, x_3)$ , такий, щоб

II. загальний ризик (ЦФ)  $R = \sigma_1^2x_1^2 + \sigma_2^2x_2^2 + \sigma_3^2x_3^2 + 2(\sigma_{12}x_1x_2 + \sigma_{13}x_1x_3 + \sigma_{23}x_2x_3) \rightarrow \min$

III. за обмеження

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

та граничних умов – всі  $x_i \geq 0$ .

### Таблична модель 1

Оптимізація					
	ЦП 1	ЦП 2	ЦП 3	Сума	Обмеж
Портфель	<b>55,31%</b>	<b>44,34%</b>	<b>0,35%</b>	100%	100%
Дохід	1,93%	1,42%	0,03%	<b>3,4%</b>	
	<b>0,10%</b>			Всього	
	ЦФ (Ризик)				

Це – «ідеальний» варіант, за яким портфель майже на половину розділено на два ЦП (ЦП 1 та ЦП 2), визначено мінімальний ризик (0,1%) без фіксації значення доходу, це значення автоматично обчислено і склало величину 3,4%.

### Таблична модель 2

Зафіксовано обмеження на величину доходу (5%), відповідно, мінімальний ризик зріс до 0,42%, змінилася й структура портфеля, рис. 7.21:

Оптимізація					
	ЦП 1	ЦП 2	ЦП 3	Сума	Обмеж
Портфель	<b>74,36%</b>	<b>0,00%</b>	<b>25,64%</b>	100%	100%
Дохід	2,60%	0,00%	2,40%	<b>5,0%</b>	5%
	<b>0,42%</b>			Всього	
	ЦФ (Ризик)				

### Таблична модель 3

Зафіксовано додаткове обмеження на величину окремої інвестиції (не більше 50% загальної суми), відповідно, мінімальний ризик зріс до 0,51%, змінилася й структура портфеля:

Оптимізація						
	ЦП 1	ЦП 2	ЦП 3	Сума	Обмеж	
Портфель	50,00%	23,21%	26,79%	100%	100%	
Доход	1,75%	0,74%	2,51%	5,0%	5%	
	0,51%			Всього	50% інвестиція (max)	
	ЦФ (Ризик)					

Заміною ЦФ та обмежень місцями й критерієм розв'язують нелінійну задачу про максимізацію доходу.

### Задача 8.7. Управління запасами кількох продуктів

#### Постановка задачі

Підприємство створює запаси  $n$  продуктів, маючи на закупівлю певні кошти, а для зберігання отриманих запасів – складські приміщення із заданою місткістю, сума наявних коштів і властивості складів – суттєві обмежуючі фактори.

Це – багатопродуктова задача управління запасами, розв'язок якої базується на даних попередньої однопродуктової задачі.

#### Приклад

$n = 10$ . Початкові дані:

Назва продукту	Об'єм (W), м <sup>3</sup>	Попит, D	% варт. замовл.(p)	Ціна, C	Вартість оформлення, $v_{of}$	Вартість зберігання, $v_{zb}$
Продукт 1	7,0	1000	24%	8,22	25	1,97
Продукт 2	5,3	345	25%	78,98	20	19,75
Продукт 3	0,2	200	23%	12,00	27	2,76
Продукт 4	1,5	100	20%	123,00	10	24,60
Продукт 5	5,5	90	20%	89,78	12	17,96
Продукт 6	4,5	500	22%	2,88	45	0,63
Продукт 7	123,5	120	20%	13,56	200	2,71
Продукт 8	7,8	350	18%	56,77	65	10,22
Продукт 9	56,9	700	21%	11,12	200	2,34
Продукт 10	80,0	45	20%	10,00	54	2,00

Додаткові позначення:  $p_i$  – % ціни  $i$ -го продукту, який визначає питому вартість зберігання (досвід з практики – чим товар дорожчий, тим дорожче обходиться його зберігання).

#### Задача оптимізації

I. Знайти такі значення  $Z_{opt} = (z_1, \dots, z_{10})$ , щоб

II. ЦФ  $V = \sum_{i=1}^n v_i \rightarrow \min$ , для  $i = 1, \dots, 10$ , де:

$$v_i = v_{ofi} + v_{zbi} \text{ (загальні витрати)}$$

$$v_{ofi} = \frac{D_i}{z_i} v_{ofi} \text{ (оформлення)}$$

$$v_{zbi} = \frac{z_i}{2} p_i C_i \text{ (зберігання)}$$

III. за обмеження:  $z_i \geq 0.01$

та граничних умов:  $z_i \geq 0$  та, можливо, усі  $z_i$  – цілого типу.

#### Комп'ютерна реалізація математичної моделі

### Порядок роботи

1. Увести початкові дані
2. Визначити стовпець для шуканих невідомих
3. Сформувати стовпці для обчислень. Зауваження: оскільки шукана невідома стоїть у знаменнику певних формул, на початку треба задати їх довільне ненульове значення (наприклад, 1)
4. Увести усі формули, знайти суми витрат і загальну суму (ЦФ)
5. Знайти «ідеальний» розв'язок без обмежень на кошти і складські приміщення. Для контролю обчислюються значення невідомих за формулою Уїлсона – вони мають співпасти.
6. Наступні кроки – рух до «реального» плану поступовим уведенням обмежень на розмір складських приміщень та врахування зовнішніх умов.

Замовлення (формула Уїлсона)	Замовлення (z)	Об'єм замовлення	Вартість замовлення	Витрати на оформлення	Витрати на зберігання	Витрати на оф. та зб.	Разом
61,72	1	7,0	8400,0	12000,0	3,2	12003,2	20403,2
26,44	1	5,3	27248,1	6900,0	9,9	6909,9	34158,0
62,55	1	0,2	2400,0	5400,0	1,4	5401,4	7801,4
9,02	1	1,5	12300,0	1000,0	12,3	1012,3	13312,3
10,97	1	5,5	8080,2	1080,0	9,0	1089,0	9169,2
266,50	1	4,5	1440,0	22500,0	0,3	22500,3	23940,3
133,04	1	123,5	1627,2	24000,0	1,4	24001,4	25628,6
66,73	1	7,8	19869,5	22750,0	5,1	22755,1	42624,6
346,27	1	56,9	7784,0	140000,0	1,2	140001,2	147785,2
49,30	1	80,0	450,0	2430,0	1,0	2431,0	2881,0
		<b>292</b>			ЦФ=	<b>238104,6</b>	<b>327703,6</b>

### Результат 1 (ідеальний)

Замовлення (формула Уїлсона)	Замовлення (z)	Об'єм замовлення	Вартість замовлення	Витрати на оформлення	Витрати на зберігання	Витрати на оф. та зб.	Разом
61,72	<b>61,72</b>	432,0	8400,0	194,4	194,4	388,8	8788,8
26,44	<b>26,44</b>	140,1	27248,1	261,0	261,0	522,0	27770,1
62,55	<b>62,55</b>	12,5	2400,0	86,3	86,3	172,6	2572,6
9,02	<b>9,02</b>	13,5	12300,0	110,9	110,9	221,8	12521,8
10,97	<b>10,97</b>	60,3	8080,2	98,5	98,5	196,9	8277,1
266,50	<b>266,50</b>	1199,3	1440,0	84,4	84,4	168,9	1608,9
133,04	<b>133,04</b>	16430,2	1627,2	180,4	180,4	360,8	1988,0
66,73	<b>66,73</b>	520,5	19869,5	340,9	340,9	681,9	20551,4
346,27	<b>346,27</b>	19702,9	7784,0	404,3	404,3	808,6	8592,6
49,30	<b>49,30</b>	3943,6	450,0	49,3	49,3	98,6	548,6
		<b>42455</b>				<b>3621,0</b>	<b>93220,0</b>

Загальний вигляд табличного документа

	A	B	C	D	E	F	G	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Назва продукту	Об'єм (W), м <sup>3</sup>	Попит, D	% варт. замовл.(p)	Ціна, C	Вартість оформлення, V <sub>оф</sub>	Вартість зберігання, y	Замовлення (формула Уїлсона)	Замовлення (z)	Об'єм замовлення	Вартість замовлення	Витрати на оформлення	Витрати на зберігання	Витрати на оф. та зб.	Разом
2	Продукт 1	7,0	240	18%	35,00	50	6,30	61,72	<b>61,72</b>	432,0	8400,0	194,4	194,4	388,8	8788,8
3	Продукт 2	5,3	345	25%	78,98	20	19,75	26,44	<b>26,44</b>	140,1	27248,1	261,0	261,0	522,0	27770,2
4	Продукт 3	0,2	200	23%	12,00	27	2,76	62,55	<b>62,55</b>	12,5	2400,0	86,3	86,3	172,6	2572,7
5	Продукт 4	1,5	100	20%	123,00	10	24,60	9,02	<b>9,02</b>	13,5	12300,0	110,9	110,9	221,8	12521,8
6	Продукт 5	5,5	90	20%	89,78	12	17,96	10,97	<b>10,97</b>	60,3	8080,2	98,5	98,5	196,9	8277,1
7	Продукт 6	4,5	500	22%	2,88	45	0,63	266,50	<b>266,50</b>	1199,3	1440,0	84,4	84,4	168,9	1608,9
8	Продукт 7	123,5	120	20%	13,56	200	2,71	133,04	<b>133,04</b>	16430,2	1627,2	180,4	180,4	360,8	1988,0
9	Продукт 8	7,8	350	18%	56,77	65	10,22	66,73	<b>66,73</b>	520,5	19869,5	340,9	340,9	681,9	20551,4
10	Продукт 9	56,9	700	21%	11,12	200	2,34	346,27	<b>346,27</b>	19702,8	7784,0	404,3	404,3	808,6	8592,6
11	Продукт 10	80,0	45	20%	10,00	54	2,00	49,30	<b>49,30</b>	3943,6	450,0	49,3	49,3	98,6	548,6
12										<b>42455</b>	<b>89599,00</b>			ЦФ=	<b>3620,97</b> 93219,9

### Аналіз отриманого результату

Отримано «ідеальний» варіант, оптимізаційні обчислення без обмежень співпадають з обчисленнями за формулою Вілсона. Мінімальні витрати, необхідні для задоволення попиту, склали величину 93220 гр. од., з них 3621 гр. од. – витрати на оформлення і зберігання, необхідний об'єм складських приміщень – 42455 м<sup>3</sup>. Це нижні границі витрат та вимог до складських приміщень – врахування будь-яких додаткових умов щодо розмірів замовлень потребує більших коштів чи об'ємів складів.

### Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов

**Умова 1.** Врахувати цілочисловий тип невідомих, результат

Замовлення (формула Уїлсона)	Замовлення (z)	Об'єм замовлення	Вартість замовлення	Витрати на оформлення	Витрати на зберігання	Витрати на оф. та зб.	Разом
61,72	<b>62</b>	434,0	8400,0	193,5	195,3	388,8	8788,8
26,44	<b>26</b>	137,8	27248,1	265,4	256,7	522,1	27770,2
62,55	<b>63</b>	12,6	2400,0	85,7	86,9	172,7	2572,7
9,02	<b>9</b>	13,5	12300,0	111,1	110,7	221,8	12521,8
10,97	<b>11</b>	60,5	8080,2	98,2	98,8	196,9	8277,1
266,50	<b>267</b>	1201,5	1440,0	84,3	84,6	168,9	1608,9
133,04	<b>133</b>	16425,5	1627,2	180,5	180,3	360,8	1988,0
66,73	<b>67</b>	522,6	19869,5	339,6	342,3	681,9	20551,4
346,27	<b>346</b>	19687,4	7784,0	404,6	404,0	808,6	8592,6
49,30	<b>49</b>	3920,0	450,0	49,6	49,0	98,6	548,6
		<b>42415</b>				<b>3621,1</b>	<b>93220,1</b>

Витрати майже не збільшились, зате результат став ближчим до реальності.

**Умова 2.** Врахувати обмеження на розмір складських приміщень 22000 м<sup>3</sup> проти «ідеальних» 42455 м<sup>3</sup>. «Розплатою» за це обмеження стало відхилення розміру замовлення від оптимуму й, відповідно, збільшення витрат на оформлення і зберігання десь на 313 гр. од.

Замовлення (формула Уілсона)	Замовлення (z)	Об'єм замовле ння	Вартість замовле ння	Витрат и на оформ лення	Витра ти на зберіг ання	Витрати на оф. та зб.	Разом	
61,72	59	413,0	8400,0	203,4	185,9	389,2	8789,2	
26,44	26	137,8	27248,1	265,4	256,7	522,1	27770,2	
62,55	61	12,2	2400,0	88,5	84,2	172,7	2572,7	
9,02	9	13,5	12300,0	111,1	110,7	221,8	12521,8	
10,97	11	60,5	8080,2	98,2	98,8	196,9	8277,1	
266,50	208	936,0	1440,0	108,2	65,9	174,1	1614,1	
133,04	58	7163,0	1627,2	413,8	78,6	492,4	2119,6	
66,73	64	499,2	19869,5	355,5	327,0	682,5	20552,0	
346,27	192	10924,8	7784,0	729,2	224,2	953,3	8737,3	
49,30	23	1840,0	450,0	105,7	23,0	128,7	578,7	
		22000				3933,7	93532,7	
		22000				ЦФ=		
		Об'єм складу, м <sup>3</sup>						

### Задача 8.8. ABC-аналіз та його застосування для управління запасами

#### Загальні відомості

В економіці, логістиці, соціології та менеджменті застосовується *принцип Парето* (Вільфредо Парето – відомий італійський соціолог і економіст, 1848-1923) або *правило 80/20*, сформовані на дослідженні й статистичному аналізі типових явищ чи подій, де задіяна велика кількість (маса) однорідних об'єктів.

Приклади таких масових явищ та однорідних об'єктів:

- надання будь-яких послуг населенню (торгівельних, медичних, освітніх, юридичних) та відповідна клієнтура (покупці, пацієнти, студенти);
- виробництво товарів із використанням запасів широкої номенклатури необхідних різноманітних ресурсів (матеріали, інструменти, сировина);
- соціально-політичні процеси типу виборів в органи влади (виборці);
- будь-яке оцінювання у вигляді складання рейтингів шляхом опитування тощо.

Основна специфіка задач, що розв'язуються за цим принципом, – це виділення із заданої маси певного невеликого за розмірами впливового «ядра», враховуючи чи керуючи яким можна з великою ймовірністю враховувати чи керувати масою.

Сутність принципу Парето – «більшість наслідків викликані невеликою кількістю причин», звідси – ідея: якщо визначити цю невелику кількість причин («ядро»), тоді аналізуючи його поведінку чи керуючи цими причинами можна передбачати чи контролювати їх наслідки. Шукане «ядро» це та «точка опору», яку, за легендою, шукав Архімед, вигукуючи: «Дайте мені точку опору і я переверну Землю!».

Отже принцип Парето стверджує, що у багатьох типових ситуаціях приблизно 80% наслідків є результатом 20% причин (звідси 80/20) або, 20% зусиль дають 80% результату, а інші 80% зусиль – лише 20% результату. Так, 80% земельних угідь тодішньої Італії належало 20% населення, за цим же принципом у торгівлі 80% закупівель здійснюють 20% постійних клієнтів, а 80% вартості усього товару в магазині належить 20% найменувань товарів, 80% відкриттів і винаходів належить 20% науковців тощо. Числа 20 та 80 досить умовні й визначають лише певну статистично визначену пропорцію і не завжди є точно такими, у кінцевому рахунку цю пропорцію визначає сам дослідник, наприклад, 75/20.

Цей принцип застосовують як базовий підхід до аналізу факторів ефективності будь-якої діяльності та оптимізації її результатів, висновок: *якщо правильно вибрати мінімум найважливіших дій (20%), тоді можна швидко отримати значну частину від запланованого*



повного результату (80%), при цьому подальші зусилля на покращення малоефективні, звідси задача: визначити цей мінімум.

Принцип 80/20 є основою універсального й досить популярного методу ABC та аналізу за цим методом. *ABC-аналіз* – це технологія виявлення впливовості (важливості, вагомості, місця у рейтингу, рекорду) окремих однотипних складових (предметів, товарів, осіб, організацій, політичних структур), яких загалом дуже багато, на загальний економічний, соціальний чи інший показник функціонування об'єкту дослідження. Саме для знайдених найважливіших складових (лідерів), відповідно визначаються спеціальні режими управління їх ресурсним забезпеченням, що, вважається, позитивно вплине на ефективність усієї системи.

Отже, результат ABC-аналізу – розбиття будь-якої однорідної маси (номенклатури товарів супермаркету чи запасів на складі крупного машинобудівного підприємства) за їх впливом на загальний показник на три нерівномірні групи: А, В та С (такі групи ще називають кластерами).

Наприклад, торгівельна мережа складається із сотень магазинів різного розміру, різних можливостей й економічної ефективності і вважається, що якість функціонування усієї мережі залежить у першу чергу від найвпливовіших магазинів (лідерів), які треба виявити з цих сотень відповідним аналізом їх показників, щоб надалі сприяти їх успішній діяльності. Будь-хто може розширити цей підхід на власний розсуд, визначивши для себе, скажімо, ABCDEF-аналіз, за яким формує 6 груп з відповідними граничними значеннями певного показника (успішність студентів, активність виборців, асортимент товарів).

### Задача управління запасами товарів на складі

Треба визначити важливість кожного з товарів, показниками яких є, окрім назви і виробника, кількість, ціна, витрати чи тривалість зберігання тощо, які беруть до аналізу (це – параметр дослідження), для формування груп А, В та С.

Задача: задано список з  $n$  товарів, кожен товар характеризується ціною і кількістю, відповідно, маємо *вартість* і *кількість* кожного товару, тоді групи формуються за відношенням «вартість»/«кількість», якщо визначається впливовість за вартістю, чи «кількість»/«вартість», якщо важливо знати про очікуваний дефіцит.

За ABC-методом:

- групу **А** утворюють товари-«лідери», які вносять максимальний вклад у формування вартості (вартість – цільова функція або параметр дослідження)
- товари-«середнячки» групи **В** вносять відчутний вклад, але не є визначальними
- товари-«аутсайтери» групи **С**, яких найбільше за кількістю, вкладають у загальну вартість незначну суму, але відмовлятися від них не слід, бо вони потенційно можуть доповнювати товари груп А та В (купуючи кошову відеокамеру, ми купуємо певні дрібнички до неї) або ж без них не було б взагалі групи А.

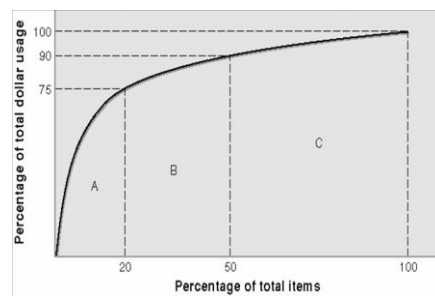
Приблизний розподіл по групах:

Група	Вклад по параметру дослідження, %	Вклад по кількості, %
А	80	20
В	15	30
С	5	50

Якраз група А відповідає принципу Парето або правилу 80/20 – достатньо виявити серед усіх товарів «лідерів», їх приблизно 20%, які «витягують» 80% обігу, й забезпечити не усім порівну, а саме цим «лідерам» максимальну увагу, організаційну підтримку і якісний контроль за їх запасами, тоді можна розраховувати на успіх.

В графічній формі АВС-аналіз має вигляд «кривої Парето», кожна точка якої вказує на відношення вартість/кількість у %-вимірі.

Таким чином, з позицій проблематики з управління запасами метод АВС є корисним для визначення важливої й критичної за стратегічними наслідками й одночасно невеликої за розмірами групи А, пильний і регулярний контроль за якою здійснювати значно простіше і дешевше, ніж за усіма однаковим чином.



#### Приклад

Задано список зі 105 товарів чи предметів, треба визначити групи А, В та С. Це нескладна з позицій математики, але досить громіздка інформаційна задача, яку в Excel можна розв'язати досить просто, користуючись вбудованими засобами технології баз даних (процедури сортування та фільтрації) та ділової графіки (для побудови кривої Парето).

#### Критерії:

- а) «максимум»: показник дослідження «вартість» (пошук найбільш коштовних товарів, які, на думку менеджерів, визначають ефективність бізнес-діяльності, за їх запасами треба слідкувати найбільш уважно);
- б) «мінімум»: показник дослідження «кількість» (пошук найменших кількостей товарів, які є претендентами на дефіцит, їх запаси треба поповнювати у першу чергу).

#### Задачі, критерії і способи розв'язання:

- на максимум, сортуванням
- на максимум, фільтрацією
- на максимум/мінімум, оптимізацією та фільтрацією.

*Рекомендація:* таблицю початкових даних увести один раз на аркуш «Дані» і на інших аркушах зробити її копії для виконання відповідних завдань.

#### **Сортування. Задача на максимум**

#### Порядок роботи:

- 1) Увести таблицю початкових даних (замість «предмет» вказати їх назви):

Предмет	Ціна	Кількість	Сума	Предмет	Ціна	Кількість	Сума	Предмет	Ціна	Кількість	Сума
Предмет 1	0,66	56	36,96	Предмет 36	0,35	37	12,95	Предмет 71	7,54	12	90,48
Предмет 2	8,17	8	65,36	Предмет 37	4,75	100	475,00	Предмет 72	8,99	25	224,75
Предмет 3	3,75	87	326,25	Предмет 38	9,45	14	132,30	Предмет 73	3,91	1073	4195,43
Предмет 4	8,93	5	44,65	Предмет 39	4,40	62	272,80	Предмет 74	5,20	62	322,40
Предмет 5	2,46	17	41,82	Предмет 40	1,36	76	103,36	Предмет 75	7,07	72	509,04
Предмет 6	9,29	61	566,69	Предмет 41	1,58	32	50,56	Предмет 76	7,79	15	116,85
Предмет 7	4,24	39	165,36	Предмет 42	9,44	74	698,56	Предмет 77	9,46	67	633,82
Предмет 8	2,15	86	184,90	Предмет 43	8,60	36	309,60	Предмет 78	2,95	53	156,35
Предмет 9	8,40	42	352,80	Предмет 44	5,86	37	216,82	Предмет 79	3,61	96	346,56
Предмет 10	8,11	45	364,95	Предмет 45	3,41	70	238,70	Предмет 80	8,86	3	26,58
Предмет 11	0,90	54	48,60	Предмет 46	3,27	54	176,58	Предмет 81	5,50	61	335,50
Предмет 12	0,65	81	52,65	Предмет 47	0,99	76	75,24	Предмет 82	1,72	14	24,08
Предмет 13	3,97	41	162,77	Предмет 48	1,73	26	44,98	Предмет 83	3,16	76	240,16
Предмет 14	1,99	39	77,61	Предмет 49	91,35	34	3105,90	Предмет 84	3,27	3	9,81
Предмет 15	6,42	5	32,10	Предмет 50	5,62	88	494,56	Предмет 85	6,76	45	304,20
Предмет 16	9,22	39	359,58	Предмет 51	0,84	74	62,16	Предмет 86	4,69	20	93,80
Предмет 17	9,41	49	461,09	Предмет 52	0,13	64	8,32	Предмет 87	9,15	38	347,70
Предмет 18	6,71	40	268,40	Предмет 53	9,08	33	299,64	Предмет 88	4,13	17	70,21
Предмет 19	5,55	33	183,15	Предмет 54	4,34	68	295,12	Предмет 89	9,01	69	621,69
Предмет 20	1,79	92	164,68	Предмет 55	4,39	96	421,44	Предмет 90	3,71	47	174,37
Предмет 21	3,33	70	233,10	Предмет 56	1,82	53	96,46	Предмет 91	5,89	85	500,65
Предмет 22	9,88	91	899,08	Предмет 57	1,73	82	141,86	Предмет 92	8,03	60	481,80
Предмет 23	5,71	40	228,40	Предмет 58	9,75	43	419,25	Предмет 93	7,64	18	137,52
Предмет 24	9,46	68	643,28	Предмет 59	5,25	60	315,00	Предмет 94	6,82	36	245,52
Предмет 25	5,15	12	61,80	Предмет 60	5,33	7	37,31	Предмет 95	8,70	84	730,80
Предмет 26	4,61	98	451,78	Предмет 61	9,91	32	317,12	Предмет 96	1,13	69	77,97
Предмет 27	2,10	16	33,60	Предмет 62	5,53	43	237,79	Предмет 97	2,44	31	75,64
Предмет 28	3,51	35	122,85	Предмет 63	2,45	2033	4980,85	Предмет 98	0,91	81	73,71
Предмет 29	1987,19	1	1987,19	Предмет 64	9,43	88	829,84	Предмет 99	2,95	64	188,80
Предмет 30	9,05	7	63,35	Предмет 65	9,01	44	396,44	Предмет 100	4,24	51	216,24
Предмет 31	8,05	55	442,75	Предмет 66	7,44	90	669,60	Предмет 101	12,23	45	550,35
Предмет 32	9,26	83	768,58	Предмет 67	5,59	84	469,56	Предмет 102	2,25	587	1320,75
Предмет 33	1,64	55	90,20	Предмет 68	0,88	86	75,68	Предмет 103	120,12	562	67507,44
Предмет 34	9,32	62	577,84	Предмет 69	3,41	52	177,32	Предмет 104	6,54	11	71,94
Предмет 35	8,35	8	66,80	Предмет 70	8,95	69	617,55	Предмет 105	6,12	147	899,64

2) Зробити на іншому аркуші копію цієї таблиці (Таблиця 2), у якій здійснюються наступні дії

3) Відсортувати таблицю 2 за полем «Сума» у порядку спадання, обчислити загальну суму і пронумерувати відсортовану таблицю

4) Обчислити стовпець «% №№» (елемент стовпця «№» розділити на кількість номерів, у прикладі на 105)

5) Обчислити стовпець «% варт.» (елемент стовпця «Сума» розділити на загальну суму вартостей, у прикладі на 109829,74)

6) Обчислити стовпець «Кумулятивна<sup>57</sup> сума % варт.», де до попереднього значення додається поточна, наприклад: (Предмет 103) 61,47%; (Предмет 63) 61,47% + 4,54% = 66,00% (округл. до 2-ох знаків); (Предмет 73) 66,00% + 3,82% = 69,82% тощо

7) Визначити групи А, В, С, орієнтуючись на поточні значення % вартості (як у прикладі) чи % кількості, для зручності виділити кольором і пронумерувати кожену групу

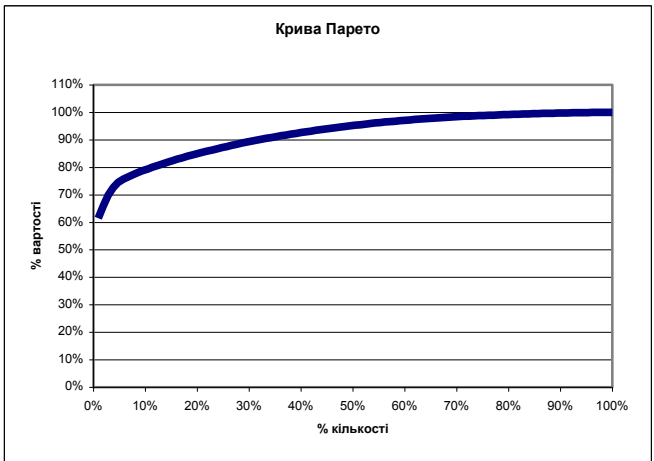
8) Для побудови діаграми Парето виділити два стовпці: «% №№» та «Кум. Сум. % варт.» і побудувати діаграму «Точечная».

Результат:

<sup>57</sup> накопичувальна

№	Предмет	Ціна	Кількість	Сума	№	% №№	% варт.	Кум. Сум.	% варт.	
1	Предмет 103	120,12	562	67507,44	1	0,95%	61,47%		61,47%	1
2	Предмет 63	2,45	2033	4980,85	2	1,90%	4,54%		66,00%	2
3	Предмет 73	3,91	1073	4195,43	3	2,86%	3,82%		69,82%	3
4	Предмет 49	91,35	34	3105,90	4	3,81%	2,83%		72,65%	4
5	Предмет 29	1987,19	1	1987,19	5	4,76%	1,81%		74,46%	5
6	Предмет 102	2,25	587	1320,75	6	5,71%	1,20%		75,66%	6
7	Предмет 105	6,12	147	899,64	7	6,67%	0,82%		76,48%	7
8	Предмет 22	9,88	91	899,08	8	7,62%	0,82%		77,30%	8
9	Предмет 64	9,43	88	829,84	9	8,57%	0,76%		78,05%	9
10	Предмет 32	9,26	83	768,58	10	9,52%	0,70%		78,75%	10
11	Предмет 95	8,70	84	730,80	11	<b>10,48%</b>	<b>0,67%</b>		<b>79,42%</b>	11
12	Предмет 42	9,44	74	698,56	12	11,43%	0,64%		80,05%	1
13	Предмет 66	7,44	90	669,60	13	12,38%	0,61%		80,66%	2
14	Предмет 24	9,46	68	643,28	14	13,33%	0,59%		81,25%	3
15	Предмет 77	9,46	67	633,82	15	14,29%	0,58%		81,83%	4
16	Предмет 89	9,01	69	621,69	16	15,24%	0,57%		82,39%	5
17	Предмет 70	8,95	69	617,55	17	16,19%	0,56%		82,96%	6
18	Предмет 34	9,32	62	577,84	18	17,14%	0,53%		83,48%	7
19	Предмет 6	9,29	61	566,69	19	18,10%	0,52%		84,00%	8
20	Предмет 101	12,23	45	550,35	20	19,05%	0,50%		84,50%	9
21	Предмет 75	7,07	72	509,04	21	20,00%	0,46%		84,96%	10
22	Предмет 91	5,89	85	500,65	22	20,95%	0,46%		85,42%	11
23	Предмет 50	5,62	88	494,56	23	21,90%	0,45%		85,87%	12
24	Предмет 92	8,03	60	481,80	24	22,86%	0,44%		86,31%	13
25	Предмет 37	4,75	100	475,00	25	23,81%	0,43%		86,74%	14
26	Предмет 67	5,59	84	469,56	26	24,76%	0,43%		87,17%	15
27	Предмет 17	9,41	49	461,09	27	25,71%	0,42%		87,59%	16
28	Предмет 32	4,51	98	451,78	28	26,67%	0,41%		88,00%	17
29	Предмет 31	8,05	55	442,75	29	27,62%	0,40%		88,40%	18
30	Предмет 55	4,39	96	421,44	30	28,57%	0,38%		88,79%	19
31	Предмет 58	9,75	43	419,25	31	29,52%	0,38%		89,17%	20
32	Предмет 65	9,01	44	396,44	32	30,48%	0,36%		89,53%	21
33	Предмет 10	8,11	45	364,95	33	31,43%	0,33%		89,86%	22
34	Предмет 16	9,22	39	359,58	34	32,38%	0,33%		90,19%	23
35	Предмет 9	8,40	42	352,80	35	33,33%	0,32%		90,51%	24
36	Предмет 87	9,15	38	347,70	36	34,29%	0,32%		90,83%	25
37	Предмет 79	3,61	96	346,56	37	35,24%	0,32%		91,14%	26
38	Предмет 81	5,50	61	335,50	38	36,19%	0,31%		91,45%	27

79	Предмет 96	1,13	69	77,97	78	74,29%	0,07%		98,78%	27
80	Предмет 14	1,99	39	77,61	79	75,24%	0,07%		98,85%	28
81	Предмет 68	0,88	86	75,68	80	76,19%	0,07%		98,92%	29
82	Предмет 97	2,44	31	75,64	81	77,14%	0,07%		98,98%	30
83	Предмет 47	0,99	76	75,24	82	78,10%	0,07%		99,05%	31
84	Предмет 98	0,91	81	73,71	83	79,05%	0,07%		99,12%	32
85	Предмет 104	6,54	11	71,94	84	80,00%	0,07%		99,19%	33
86	Предмет 88	4,13	17	70,21	85	80,95%	0,06%		99,25%	34
87	Предмет 35	8,35	8	66,80	86	81,90%	0,06%		99,31%	35
88	Предмет 2	8,17	8	65,36	87	82,86%	0,06%		99,37%	36
89	Предмет 30	9,05	7	63,35	88	83,81%	0,06%		99,43%	37
90	Предмет 51	0,84	74	62,16	89	84,76%	0,06%		99,48%	38
91	Предмет 25	5,15	12	61,80	90	85,71%	0,06%		99,54%	39
92	Предмет 12	0,65	81	52,65	91	86,67%	0,05%		99,59%	40
93	Предмет 41	1,58	32	50,56	92	87,62%	0,05%		99,63%	41
94	Предмет 11	0,90	54	48,60	93	88,57%	0,04%		99,68%	42
95	Предмет 48	1,73	26	44,98	94	89,52%	0,04%		99,72%	43
96	Предмет 4	8,93	5	44,65	95	90,48%	0,04%		99,76%	44
97	Предмет 5	2,46	17	41,92	96	91,43%	0,04%		99,80%	45
98	Предмет 60	5,33	7	37,31	97	92,38%	0,03%		99,83%	46
99	Предмет 1	0,66	56	36,96	98	93,33%	0,03%		99,87%	47
100	Предмет 27	2,10	16	33,60	99	94,29%	0,03%		99,90%	48
101	Предмет 15	6,42	5	32,10	100	95,24%	0,03%		99,93%	49
102	Предмет 80	8,86	3	26,58	101	96,19%	0,02%		99,95%	50
103	Предмет 82	1,72	14	24,08	102	97,14%	0,02%		99,97%	51
104	Предмет 36	0,35	37	12,95	103	98,10%	0,01%		99,98%	52
105	Предмет 84	3,27	3	9,81	104	99,05%	0,01%		99,99%	53
106	Предмет 52	0,13	64	8,32	105	100,00%	0,01%		100,00%	54
107				109829,74		50,48%			4,92%	



### Аналіз результату:

- групу А утворили 11 предметів, це 10,48% кількості і 79,42% вартості, після округлення, **80/10**
- групу В утворили 40 предметів, це  $(48,57-10,48) = 38,1$  % кількості і  $(94,87-79,42) = 15,45$ % вартості, після округлення, **15/38**
- групу С утворили 54 предмета, що залишились, це  $(100 - 48,57) = 51,43$ % кількості і усього  $(100-94,87) = 5,13$ % вартості, після округлення, **5/52**.

### Розподіл по групах:

Група	Вартість, %	Кількість, %	Кількість
<b>А</b>	<b>80</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
<b>В</b>	<b>15</b>	<b>38</b>	<b>40</b>
<b>С</b>	<b>5</b>	<b>52</b>	<b>54</b>

Крива Парето показує співвідношення «% вартості»/«% кількості».

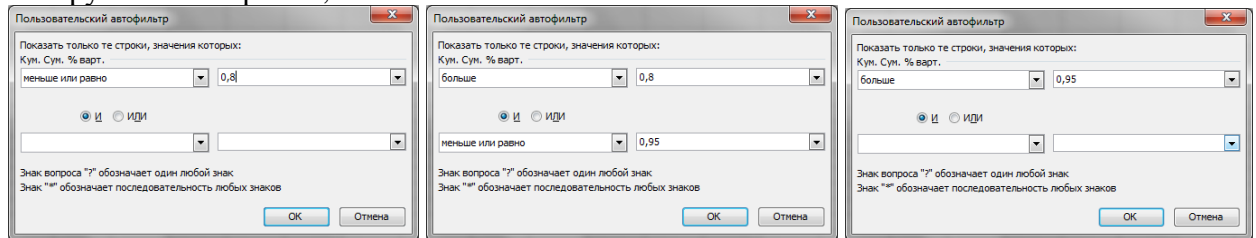
### Фільтрація. Задача на максимум

### Порядок роботи:

Виконати дії 1) – 6)

7) Визначити групи А, В, С, користуючись засобом «Пользовательский автофильтр», де кожна група визначається налаштуванням фільтра для відповідного поля (стовпця), у прикладі – для стовпця «Кум. сум. % варт.»:

- група А: % варт.  $\leq 0,8$
- група В: % варт.  $> 0,8$  И % варт.  $\leq 0,95$
- група С: % варт.  $> 0,95$ :



А

В

С

Група А:

	А	В	С	Д	Е	Г	Н	И	К	М	О	Р
1	Предмет	Цена	Кількість	Сума	№	% №№	% варт	Кум. Сум.	% варт			
2	Предмет 103	120,12	562	67507,44	1	0,95%	61,47%	61,47%				
3	Предмет 63	2,45	2033	4980,85	2	1,90%	4,54%	66,00%				
4	Предмет 73	3,91	1073	4195,43	3	2,86%	3,82%	69,82%				
5	Предмет 49	91,35	34	3105,90	4	3,81%	2,83%	72,65%				
6	Предмет 29	1987,19	1	1987,19	5	4,76%	1,81%	74,46%				
7	Предмет 102	2,25	587	1320,75	6	5,71%	1,20%	75,66%				
8	Предмет 105	6,12	147	899,64	7	6,67%	0,82%	76,48%				
9	Предмет 22	9,88	91	899,08	8	7,62%	0,82%	77,30%				
10	Предмет 64	9,43	88	829,84	9	8,57%	0,76%	78,05%				
11	Предмет 32	9,26	83	768,58	10	9,52%	0,70%	78,75%				
12	Предмет 95	8,70	84	730,80	11	10,48%	0,67%	79,42%				
13	Предмет 42	9,44	74	698,56	12	11,43%	0,64%	80,05%				
14	Предмет 66	7,44	90	669,60	13	12,38%	0,61%	80,66%				
15	Предмет 24	9,46	68	643,28	14	13,33%	0,59%	81,25%				
16	Предмет 77	9,46	67	633,62	15	14,29%	0,58%	81,83%				
17	Предмет 89	9,01	69	621,69	16	15,24%	0,57%	82,39%				
18	Предмет 70	8,95	69	617,55	17	16,19%	0,56%	82,96%				
19	Предмет 34	9,32	62	577,84	18	17,14%	0,53%	83,48%				
20	Предмет 6	9,29	61	566,69	19	18,10%	0,52%	84,00%				
21	Предмет 101	12,23	45	550,35	20	19,05%	0,50%	84,50%				
22	Предмет 75	7,07	72	509,04	21	20,00%	0,46%	84,96%				
23	Предмет 91	5,89	85	500,65	22	20,95%	0,46%	85,42%				
24	Предмет 50	5,62	88	494,56	23	21,90%	0,45%	85,87%				
25	Предмет 92	8,03	60	481,80	24	22,86%	0,44%	86,31%				
26	Предмет 37	4,75	100	475,00	25	23,81%	0,43%	86,74%				
27	Предмет 67	5,59	84	469,56	26	24,76%	0,43%	87,17%				
28	Предмет 17	9,41	49	461,09	27	25,71%	0,42%	87,59%				
29	Предмет 26	4,61	98	451,78	28	26,67%	0,41%	88,00%				
30	Предмет 31	8,05	55	442,75	29	27,62%	0,40%	88,40%				
31	Предмет 55	4,39	96	421,44	30	28,57%	0,38%	88,79%				
32	Предмет 58	9,75	43	419,25	31	29,52%	0,38%	89,17%				
33	Предмет 65	9,01	44	396,44	32	30,48%	0,36%	89,53%				
34	Предмет 10	8,11	45	364,95	33	31,43%	0,33%	89,86%				
35	Предмет 16	9,22	39	359,58	34	32,38%	0,33%	90,19%				
36	Предмет 9	8,40	42	352,80	35	33,33%	0,32%	90,51%				
37	Предмет 87	9,15	38	347,70	36	34,29%	0,32%	90,83%				
38	Предмет 79	3,61	96	346,56	37	35,24%	0,32%	91,14%				

Аналогічно визначаються групи В та С.

### Оптимізація. Задача на максимум/мінімум

#### Постановка задачі (на максимум)

Знайти таку групу з  $K$  предметів, щоб сума їх вартостей була максимальною.

#### Задача оптимізації

I. Знайти  $n$  невідомих  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , таких, щоб

II. ЦФ  $V = \sum_{i=1}^{105} v_i x_i \rightarrow \max$ ,  $v_i$  – вартість  $i$ -го продукту

III. за обмежень:

$\sum_{i=1}^{105} x_i \leq K$ ,  $K$  – кількість видів продуктів, у прикладі  $K = 11$

та граничних умов: усі  $x_i$  – булевого типу.

#### Порядок роботи

1. Увести таблицю початкових даних і задати число  $K$  (Кількість)

- Сформувати стовпець  $X = \{x_i\}$ , де кожна змінна  $x_i = 1$ , якщо  $i$ -ий продукт належить шуканій групі й 0, якщо ні (булевий тип шуканих невідомих)
- Знайти суму невідомих (це ліва частина обмеження)
- Сформувати цільову функцію множенням стовпця Сума на
- У вікні Поиск решения заповнити поля ЦФ, невідомих, об
- задати тип моделі (Линейная модель)
- Знайти розв'язок задачі оптимізації
- Фільтрацією визначити знайдені продукти.

	A	B	C	D	E	F
1	Предмет	Ціна	Кількіс	Сума	X	
23	Предмет 22	9,88	91	899,08	1	
30	Предмет 29	1987,19	1	1987,19	1	
33	Предмет 32	9,26	83	768,58	1	
50	Предмет 49	91,35	34	3105,90	1	
64	Предмет 63	2,45	2033	4980,85	1	
65	Предмет 64	9,43	88	829,84	1	
74	Предмет 73	3,91	1073	4195,43	1	
96	Предмет 95	8,70	84	730,80	1	
103	Предмет 102	2,25	587	1320,75	1	
104	Предмет 103	120,12	562	67507,44	1	
106	Предмет 105	6,12	147	899,64	1	
107						
108						11

### Результат:

The screenshot shows the Excel Solver dialog box with the following settings:

- Установити цільову ячейку:  $\$C\$2$
- Равной:  максимальному значению
- Изменяя ячейки:  $\$E\$2:\$E\$106$
- Ограничения:  $\$E\$108 \leq \$E\$2$ ,  $\$E\$2:\$E\$106 = \text{двоичное}$

Below the dialog box is a summary table of the results:

Предмет	Цена	Кількість	Сума	X	ЦФ	Кількість
Предмет 1	0,66	56	36,96	0	87225,5	11
Предмет 2	8,17	8	65,36	0		
Предмет 3	3,75	87	326,25	0		
Предмет 4	8,93	5	44,65	0		
Предмет 5	2,46	17	41,82	0		
Предмет 6	9,29	61	566,69	0		
Предмет 7	4,24	39	165,36	0		
Предмет 8	2,15	86	184,90	0		
Предмет 9	8,40	42	352,80	0		
Предмет 10	8,11	45	364,95	0		

### Аналіз результату

Знайдено 11 предметів, що утворюють групу А (співпадає з результатом, отриманим сортуванням).

Цей метод досить гнучкий завдяки можливості визначити різні обмеження на шукані невідомі. Але його можна використати лише для задач до 200 невідомих, якщо користуватися стандартною версією оптимізатора Excel Solver.

### Постановка задачі (на мінімум)

Знайти таку групу  $K$  предметів, щоб сума їх кількостей була мінімальною.

### Задача оптимізації

I. Знайти  $n$  невідомих  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , таких, щоб

II. ЦФ  $V = \sum_{i=1}^{105} k_i x_i \rightarrow \min$ ,  $k_i$  –кількість  $i$ -го продукту

III. за обмежень:

$$\sum_{i=1}^{105} x_i = K, K - \text{кількість видів продуктів, у прикладі } K = 10$$

та граничних умов: усі  $x_i$  – булевого типу.

### Порядок роботи

- Увести таблицю початкових даних і задати число  $K$  (Кількість)
- Сформувати стовпець  $X = \{x_i\}$ , де кожна змінна  $x_i = 1$ , якщо  $i$ -ий продукт належить шуканій групі й 0, якщо ні (булевий тип шуканих невідомих)
- Знайти суму невідомих (це ліва частина обмеження)

- Сформувати цільову функцію множенням стовпця Кількість на стовпець X
- У вікні Поиск решения заповнити поля ЦФ, невідомих, обмежень, кнопкою Параметри задати тип моделі (Линейная модель)
- Знайти розв'язок задачі оптимізації
- Фільтрацією визначити знайдені продукти.

Результат:

Предмет	Ціна	Кількість	Сума	X
Предмет 1	0,65	56	37,0	0
Предмет 2	8,17	8	65,4	1
Предмет 3	3,75	87	326,3	0
Предмет 4	8,93	5	44,7	1
Предмет 5	2,46	17	41,8	0
Предмет 6	9,29	61	566,7	0
Предмет 7	4,24	39	165,4	0
Предмет 8	2,15	86	184,9	0
Предмет 9	8,40	42	352,8	0
Предмет 10	8,11	45	365,0	0
Предмет 11	0,90	54	48,6	0
Предмет 12	0,65	81	52,7	0
Предмет 13	3,97	41	162,9	0
Предмет 14	1,99	39	77,6	0
Предмет 15	6,42	5	32,1	1
Предмет 16	9,22	39	359,6	0
Предмет 17	9,41	49	461,1	0
Предмет 18	6,71	40	268,4	0
Предмет 19	5,55	33	183,2	0
Предмет 20	1,79	92	164,7	0
Предмет 21	3,33	70	233,1	0
Предмет 22	9,88	91	899,1	0
Предмет 23	5,71	40	228,4	0
Предмет 24	9,46	68	643,3	0
Предмет 25	5,15	12	61,8	0
Предмет 26	4,61	98	451,9	0
Предмет 27	2,10	16	33,6	0
Предмет 28	3,51	35	122,9	0
Предмет 29	1987,19	1	1987,2	1
Предмет 30	9,05	7	63,4	1
Предмет 31	8,05	55	442,8	0
Предмет 32	9,26	83	768,6	0
Предмет 33	1,64	55	90,2	0
Предмет 34	9,32	62	577,8	0
Предмет 35	8,35	8	66,8	1
Предмет 36	0,35	37	13,0	0
Предмет 37	4,75	100	475,0	0
Предмет 38	9,45	14	132,3	0

Предмет	Ціна	Кількість	Сума	X
Предмет 2	8,17	8	65,4	1
Предмет 4	8,93	5	44,7	1
Предмет 15	6,42	5	32,1	1
Предмет 29	1987,19	1	1987,2	1
Предмет 30	9,05	7	63,4	1
Предмет 35	8,35	8	66,8	1
Предмет 60	5,33	7	37,3	1
Предмет 80	8,86	3	26,6	1
Предмет 84	3,27	3	9,8	1
Предмет 104	6,54	11	71,9	1

### Аналіз результату

Визначено 10 предметів, запасів яких найменше, їх кількість коливається від 1 до 11, саме до них має бути прикута увага менеджера з метою оперативного поповнення запасів.

### Дробово-лінійне програмування

Виділено в окремий клас під назвою *дробово-лінійне програмування* (ДЛП, Linear-fractional Programming) нелінійні моделі оптимізації, які мають цільову функцію у вигляді дроби, чисельник і знаменник якого є лінійними функціями (такі цільові функції називають псевдолінійними), та лінійні обмеження на шукані невідомі. Поява таких моделей пояснюється тим, що в економіці функціями у вигляді дроби описують відносні показники: рентабельність (відношення прибутку до собівартості), продуктивність двох виробництв тощо, де чисельник і знаменник відповідають певним періодам часу або різним об'єктам, що порівнюються між собою:

$$P = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i}{b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i} \rightarrow \max (\min) .$$

Наприклад, маємо дві групи обладнання для виготовлення продукції, продуктивність кожної групи є лінійна функція, тож треба знайти такий план виробництва, щоб показник ефективності у вигляді відповідного дроби був максимальним.

Існує два підходи до розв'язання задачі ДЛП з позицій й методами:

- лінійного програмування
- нелінійного програмування

кожен з яких має власні достоїнства й недоліки, а саме:

- лінійний підхід дозволяє скористатися класичним симплекс-методом з одночасним отриманням двоїстих оцінок(+); фактично зводиться до розв'язання двох задач – заданої й допоміжної – шляхом певних формульних перетворень й відповідних ускладнень (–)
- нелінійний підхід дозволяє зразу розв'язувати поставлену нелінійну задачу градієнтним методом (+); двоїсті оцінки у формі множників Лагранжа малопродуктивні (–).

### Задача 8.9. Про оптимальне відношення двох процесів (ЛП)

Відомі американські математики А. Charnes и W. Cooper опублікували у 1962 р. результат, за яким ними запропоновано оригінальний алгоритм, що використовує класичний симплекс-метод ЛП. Його суть: використовується спеціальне (пряме) перетворення початкових даних, в результаті якого замість заданої нелінійної задачі ДЛП отримують задачу ЛП зі спеціальною структурою системи обмежень. З отриманого розв'язку лінійної задачі зворотним перетворенням отримується результат заданої нелінійної задачі<sup>58</sup>.

#### Постановка задачі.

Два технологічних процеси реалізують виготовлення двох видів продуктів, застосовуючи для цього три види ресурсів. Визначити план виробництва, за яким відносна оцінка цих процесів у вигляді відношення продуктивностей першого до другого, буде максимальною за умови забезпечення ресурсних обмежень.

Початкові дані зведені у таблицю:

	Продукт 1	Продукт 2	Знак	ПЧ
Ресурс 1	2	3	$\geq$	12
Ресурс 2	-1	2	$\leq$	6
Ресурс 3	2	2	$\leq$	8
Процес 1	5	-2		
Процес 2	2	1		

#### Математична модель

##### Позначення:

- $x_1, x_2$  – кількості продуктів першого і другого видів;
- $5x_1 - 2x_2$  – продуктивність першого процесу;
- $2x_1 + x_2$  – продуктивність другого процесу;
- $V$  – відношення двох процесів.

##### **Задача оптимізації:**

I. Знайти значення  $x_1, x_2$ , такі, щоб

II. цільова функція  $V = \frac{5x_1 - 2x_2}{2x_1 + x_2} \rightarrow \max$

III. за обмежень:

$2x_1 + 3x_2 \geq 12$  обмеження знизу (не менше, ніж...)

$-x_1 + 2x_2 \leq 6$  обмеження зверху (не більше, ніж...)

$2x_1 - 2x_2 \leq 8$  обмеження зверху (не більше, ніж...)

та граничних умов:  $x_1, x_2 \geq 0$ .

<sup>58</sup> актуальність цієї методики у ті часи пояснюється тим, що різноманітні програми, написані різними мовами для ЕОМ різних виробників, використовувалися, в основному, для задач ЛП, тому треба було розширити спектр застосування цих програм. Тож розробка Чарнса й Купера демонструє повчальний факт, що математичними засобами можна винайти оригінальні підходи й розширити можливості теорії і засобів ЛП, здатних, як буде видно нижче, розв'язувати нелінійні задачі оптимізації за певних умов



Перетворення дробової ЦФ у лінійну форму (у рядок) виконується таким чином (на наведеному прикладі):

вводять шукану змінну  $y_0 = \frac{1}{2x_1 + x_2}$ , щоб відмовитися від дробу, далі заміною

$y_1 = y_0 x_1$  переходять від шуканих невідомих  $x_1, x_2$  до нових шуканих невідомих  $y_1 = y_0 x_1, y_2$

$= y_0 x_2$ , тоді ЦФ:  $5 \left( \frac{1}{2x_1 + x_2} \right) x_1 - 2 \left( \frac{1}{2x_1 + x_2} \right) x_2 = 5y_1 - 2y_2 \rightarrow \max$

й вже є лінійною формою, обмеження після аналогічних перетворень мають вигляд:

$$2y_1 + 3y_2 \geq 12y_0$$

$$-y_1 + 2y_2 \leq 6y_0$$

$$2y_1 - 2y_2 \leq 8y_0$$

$$y_0, y_1, y_2 \geq 0,$$

до існуючих обмежень додається ще обмеження переходу (для знаменника):

$$2y_0 x_1 + y_0 x_2 = 1, \text{ тобто, } 2y_1 + y_2 = 1.$$

Таким чином, на основі нелінійної задачі ДЛП з двома невідомими  $x_1$  та  $x_2$  сформована допоміжна задача ЛП з трьома шуканими невідомими:  $y_0, y_1, y_2$ .

Після пошуку оптимальних значень змінних  $y_0, y_1, y_2$  зворотнім шляхом знаходять значення шуканих невідомих:  $x_1 = \frac{y_1}{y_0}, x_2 = \frac{y_2}{y_0}$  та двоїсті оцінки, значення ЦФ незмінне.

### Таблична реалізація

1) Увести початкові дані для нелінійної задачі (2 невідомих)

	Продукт 1	Продукт 2	Знак	ПЧ
Ресурс 1	2	3	$\geq$	12
Ресурс 2	-1	2	$\leq$	6
Ресурс 3	2	2	$\leq$	8
Процес 1	5	-2		
Процес 2	2	1		

2) Підготувати таблицю для лінійної задачі (3 невідомих) копіюванням початкових даних й введенням формул (ЛЧ):

M2		fx = СУММПРОИЗВ(H2:J2;\$H\$9:\$J\$9)					
	G	H	I	J	K	L	M
1		Продукт 1	Продукт 2	$y_0$	Знак	ПЧ	ЛЧ
2	Ресурс 1	2	3	-12	$\geq$	0	0,0
3	Ресурс 2	-1	2	-6	$\leq$	0	0,0
4	Ресурс 3	2	-2	-8	$\leq$	0	0,0
5							
6	Обм. переходу	2	1		=	1	0
7	Процес 1	5	-2				0
8							ЦФ
9	План (Y)						
10		$y_1$	$y_2$	$y_0$			
11							
12	План (X)						
13		$x_1$	$x_2$				

3) Отримати розв'язок прямої та двоїстої задач ЛП:

M7		=СУММПРОИЗВ(Н7:J7;SH\$9:SJ\$9)							O	P	Q	R	S	T	U	V
	G	H	I	J	K	L	M	N								
1		Продукт 1	Продукт 2	у <sub>0</sub>	Знак	ПЧ	ЛЧ	Т-ціна								
2	Ресурс 1	2	3	-12	≥	0	0,0	-0,69								
3	Ресурс 2	-1	2	-6	≤	0	0,0	0								
4	Ресурс 3	2	-2	-8	≤	0	0,0	1,04								
5																
6	Обм. переходу	2	1		=	1	0									
7	Процес 1	5	-2													
8								ЦФ								
9	План (Y)															
10		у <sub>1</sub>	у <sub>2</sub>	у <sub>0</sub>												
11																
12	План (X)															
13		х <sub>1</sub>	х <sub>2</sub>													
14																
15																
16																
17																

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку: \$M\$7

Равной:  максимальному значению  значению: 0

минимальному значению

Изменить ячейки: \$N\$9:\$J\$9

Ограничения:

- \$M\$2 >= \$L\$2
- \$M\$3:\$M\$4 <= \$L\$3:\$L\$4
- \$M\$6 = \$L\$6

Кнопки: Выполнить, Закрыть, Параметры, Добавить, Изменить, Удалить, Восстановить, Справка

**Зауваження:** значення невідомих:  $x_1 = \frac{y_1}{y_0}$ ,  $x_2 = \frac{y_2}{y_0}$  обчислити лише після отримання значень

$y_0, u_1, u_2$  (інакше – повідомлення про ділення на 0 на початку процесу оптимізації):

N12		=N9/\$J\$9						
	G	H	I	J	K	L	M	N
1		Продукт 1	Продукт 2	у <sub>0</sub>	Знак	ПЧ	ЛЧ	Т-ціна
2	Ресурс 1	2	3	-12	≥	0	0,0	-0,69
3	Ресурс 2	-1	2	-6	≤	0	-0,9	0
4	Ресурс 3	2	-2	-8	≤	0	0,0	1,04
5								
6	Обм. переходу	2	1		=	1	1	
7	Процес 1	5	-2				2,15	
8							ЦФ	
9	План (Y)	0,46	0,08	0,10				
10		у <sub>1</sub>	у <sub>2</sub>	у <sub>0</sub>				
11								
12	План (X)	4,8	0,8					
13		х <sub>1</sub>	х <sub>2</sub>					

### Аналіз результату

**Пряма задача:** План (X)      4,8      0,8

### Двоїста задача

Хоча розв'язується задача ЛП, суть задачі залишається без змін – вона нелінійна, тому тіньові ціни, отримані для правих частин ресурсних обмежень, втрачають сенс, вони лише вказують на напрям й відносну швидкість зміни ЦФ при збільшенні значень ПЧ на 1 – знак «-» вказує на зменшення ЦФ при збільшенні значення ПЧ, саме число (-0,69) вказує на приблизну швидкість зменшення: =0,69/12, фактично, цей показник схожий на множник Лагранжа.

### Задача 8.10. Про оптимальне відношення двох процесів (нелінійний підхід)

Задача ДЛП розв'язується як звичайна нелінійна задача оптимізації, користуючись заданими початковими даними без будь-яких допоміжних перетворень. Для цього таблицю з початковими даними доповнимо, як звичайно, формулами для обчислення лівих значень обмежень і ЦФ.

### Задача оптимізації:

- I. Знайти значення  $x_1, x_2$ , такі, щоб
- II. цільова функція  $V = \frac{5x_1 - 2x_2}{2x_1 + x_2} \rightarrow \max$
- III. за обмежень:
  - $2x_1 + 3x_2 \geq 12$  обмеження знизу (не менше, ніж...)
  - $-x_1 + 2x_2 \leq 6$  обмеження зверху (не більше, ніж...)
  - $2x_1 - 2x_2 \leq 8$  обмеження зверху (не більше, ніж...)
- та граничних умов:  $x_1, x_2 \geq 0$ .

## Таблична реалізація

Оскільки на початку процесу оптимізації при нульовому значенні плану ( $x_1 = x_2 = 0$ ) знаменник  $= 2 \cdot 0 + 0 = 0$ , у клітинці ЦФ буде виведено “аварійне” повідомлення про помилку #ДЕЛ/0! (Ділення на 0) і процес обчислень неможливий. У такому випадку треба хоча в одну з клітинок плану ввести довільне за значенням число, наприклад, 1, і програма *Поиск решения* “заспокоїться”. Це аж ніяк не вплине на кінцевий результат, бо оптимізаційними обчисленнями це число обов’язково буде оновлено.

F8		fx =F6/F7				
	A	B	C	D	E	F
1		Продукт 1	Продукт 2	Знак	ПЧ	ЛЧ
2	Ресурс 1	2	3	≥	12	5
3	Ресурс 2	-1	2	≤	6	1
4	Ресурс 3	2	-2	≤	8	0
5						
6	Процес 1	5	-2		чис.=	3
7	Процес 2	2	1		знам.=	3
8					ЦФ	1
9	План (X)	1	1			
10		$x_1$	$x_2$			

**Зауваження:** Оскільки задача оптимізації нелінійна, прапорець у вікні *Параметри* ставимо лише для граничних умов (невід’ємності) плану:

Лінійная модель  
 Неотрицательные значения

## Результат

	A	B	C	D	E	F	G
1		Продукт 1	Продукт 2	Знак	ПЧ	ЛЧ	Мн. Лагранжа
2	Ресурс 1	2	3	≥	12	12	-0,067
3	Ресурс 2	-1	2	≤	6	-3,2	0
4	Ресурс 3	2	-2	≤	8	8	0,10
5							
6	Процес 1	5	-2		чис.=	22,4	
7	Процес 2	2	1		знам.=	10,4	
8					ЦФ	2,15	
9	План (X)	4,8	0,8				
10		$x_1$	$x_2$				

## Аналіз результату

Оптимальний план  $X = (x_1, x_2) = (4,8; 0,8)$  той же, забезпечує дробовій ЦФ максимальне значення (2,15), маємо відповідні значення чисельника і знаменника.

Множник Лагранжа – аналог тіньової ціни для лінійної задачі – вказує на “цінність” правих частин обмежень для 1-го та 3-го ресурсів.

Перший ресурс обмежено знизу (вимагається витратити не менше, ніж 12), оцінка (-0,07) попереджає, що збільшення цієї нижньої границі на одиницю приведе до зменшення ЦФ зі вказаною швидкістю. Третій ресурс обмежено зверху (вимагається витратити не більш, ніж 8), то ж, підвищення цієї границі приведе до збільшення ЦФ зі швидкістю 0,1. На жаль, ми знаємо, що для нелінійних задач *Поиск решения* не дає рекомендацій про межі збільшення/зменшення граничних значень для збереження структури плану, це робиться експериментальним шляхом.

## ДЛП: методологія оцінювання відношень DEA

### Вступ

Будь-яка галузь, служба, організація чи їх підрозділи зі сфери виробництва, надання послуг чи безприбуткової діяльності<sup>59</sup> мають організаційну структуру, яка є поєднанням певної кількості однорідних складових одиниць, на найнижчому рівні організаційної структури – це окремі працівники, вищих – їх колективи. Кожна структурна одиниця характеризується фіксованим набором показників, цей набір складається з двох частин: входів та виходів у відповідному вимірі, де входи – це певні показники щодо наданих можливостей однакового типу для здійснення однакової діяльності (витрати ресурсів), а виходи – відповідні показники результатів такої діяльності (прибуток від випуску готової продукції, віддача, якість, ефективність).

Функція кожної такої одиниці – виконання типових операцій з перетворення входів на виходи, коли, скажімо, надані ресурси витрачаються для випуску кінцевої продукції (товарів чи послуг) чи здійснення певних організаційних заходів. З позицій операційного менеджменту кожен таку уніфіковану одиницю називають операційною системою, її ефективність оцінюється відношенням виходів до входів. За умови одного входу та одного виходу оцінкою ефективності окремої одиниці є відношення значення виходу до значення входу, у техніці це коефіцієнт корисної дії, яким керуються для порівняльного аналізу типових одиниць.

На підприємстві такими однорідними виконавчими одиницями є окремі працівники чи їх групи (ланки, бригади), що виконують однакою роботу, аналогічно, це: регіональні відділення в лікарнях чи банках, відділки у міліції, військові підрозділи в армії, відділи, класи, групи, факультети, філії у наукових чи навчальних закладах, команди чи окремі спортсмени у певному виді спортивних змагань, колективи та виконавці у мистецтві тощо.

Отже, для керування діяльністю будь-якої організації із розгалуженою й розподіленою у просторі структурою, складеної з однорідних одиниць, треба у першу чергу уміти об'єктивно оцінювати ефективність окремої виробничої одиниці, щоб мати змогу однозначно порівнювати їх між собою, визначаючи відповідний рейтинг і надалі ставити завдання аутсайдерам й обґрунтовано відзначати лідерів.

Задача такого оцінювання є надзвичайно актуальною й, одночасно, далеко не простою, коли кожна організаційна одиниця характеризується комбінацією кількох входів та кількох виходів різної природи. Загальний розмір такої задачі оцінювання  $n$  однорідних одиниць позначається трійкою  $(n, m, s)$ , де  $n$  – кількість одиниць,  $m$  – кількість входів,  $s$  – кількість виходів, відповідно, початковими даними задачі оцінювання є дві прямокутні матриці входів та виходів розміром  $n \times m$  та  $n \times s$  відповідно.

Майже 50 років тому для розв'язання задач оцінювання  $n$  об'єктів з  $m$  входами та  $s$  виходами ( $m, s > 1$ ) виникла на рівні ідеї, поступово сформувалася, а тепер активно розвивається й застосовується сучасна аналітична методологія оцінювання *DEA* (Data Envelopment Analysis<sup>60</sup>). Інтуїтивно вона визначає оригінальну техніку порівняльного аналізу однорідних організаційних одиниць<sup>61</sup>, яка базується на формуванні за заданими даними (входи-виходи або витрати-випуск) своєрідної границі – уявної лінії чи поверхні, на площині чи, найчастіше, в абстрактному багатовимірному просторі – що наче *огортає* дані з певного боку.

<sup>59</sup> це: сільське господарство, банківський та страховий бізнес, наукові дослідження, проектування та конструювання, освіта, екологія, економіка, державна та гуманітарна політика, охорона здоров'я, інформаційні технології, маркетинг, виробничі та сервісні операції, роздрібна торгівля, логістика, туризм, охорона правопорядку, оборона, культура та усі мистецтва, спорт, організація дозвілля тощо.

<sup>60</sup> envelopment – охоплення (рос. – охват), його суть – формування і аналіз граничної функції-фронту, що наче «охоплює» дані. За відсутністю усталеного перекладу DEA українською чи російською мовами, що зробити не просто за багатозначністю цього словосполучення, автори публікацій це поняття представляють у досить вільному перекладі й тлумаченні як от (рос.): анализ среды функционирования, анализ вложенности данных, оболочечный анализ данных, анализ огибающей массив данных кривой, комплексный анализ данных, метод свёртки, метод сравнительного оценивания; (укр.): аналіз кривої, що відображає масив даних, аналіз оболонки даних, метод побудови граничної кривої на основі показників підприємств

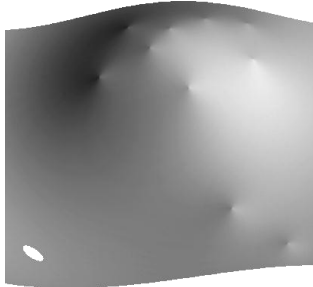
<sup>61</sup> їх точна назва DMU (decision making unit), досл. – одиничний об'єкт, що оцінюється для прийняття щодо його рішення

За своєю суттю ця границя розділяє множину одиниць навпіл, де одна частина множини (лідери) розміщується безпосередньо на границі, утворюючи її, інша частина (аутсайдери) – поза неї: в задачі на максимум під нею, на мінімум – над нею. На відміну такої границі відомі інші границі: в економічних дослідженнях це фронт ефективності (efficiency frontier), на війні це лінія фронту, між сусідніми державами – лінія державного кордону тощо, у цих прикладах класична границя перетинає множину, *розмежовуючи* одну її частину від іншої (аналог – лінія тренду, що проходить проміж точок спостережень).

Визначення такої огортуючої границі у багатовимірному просторі та одиниць, що їй належать, її дослідження та застосування – предмет методології DEA, яку вважають непараметричною, бо вона орієнтується на аналіз і вплив на кінцевий результат не окремого параметру, а на порівняльний аналіз усієї сукупності даних «входи-виходи» різної природи і виміру й вибір кращих серед багатьох претендентів.

Ясно, що це процес оптимізації, де здійснюється вибір таких невідомих, за якими досягається екстремум визначеної цільової функції за умов обмежень на шукані невідомі. Тож як і завжди в оптимізації, можливі два підходи-критерії до організації оцінювання, де кращою одиницею вважається та, для якої: а) входи (витрати) мінімальні, б) виходи (випуск) максимальні.

Так, якщо виходи кожної окремої одиниці уявити зваженою точкою на тривимірному графіку, тоді в задачі максимізації (скажімо, доходів, ефективності чи корисності) граничний фронт огортає усю сукупність цих точок зверху, наче пеленою



(рис.), де уявна угнута поверхня натягнута на кілки «високих» точок, що вважаються лідерами, під якою знаходяться усі інші точки-аутсайдери.

У задачі мінімізації входів (скажімо, витрат коштів чи матеріальних втрат) шуканий граничний фронт огортає задані точки знизу, наче підставляючи під ці уявні точки долоні, формуючись на найнижчих, найбільш економічних точках у вигляді опуклої поверхні.

Отже, в залежності від вибраного критерію оцінювання й відповідної цільової функції дані (входи-виходи) мають верхню чи нижню границі ефективності, які є основою порівняльного аналізу й прийняття рішень за методологією DEA. Цю огортуючу границю (envelopment) утворюють успішні одиниці-лідери, що за об'єктивним оцінюванням співвідношень між їх виходами і входами є кращими у порівнянні з усіма іншими. На цій границі знаходиться порівняно невелика за кількістю верхівка (топ) рейтингу будь-яких однорідних одиниць (можливо, одна), це: моделі автомобілів чи ПК, фірми з надання медичних чи туристичних послуг, компанії-виробники певної продукції, програмні продукти, наукові методи для розв'язання конкретних задач, держави за певними показниками, особистості, цінні папери, будь-які організації чи їх структурні підрозділи у певній сфері діяльності тощо, цей рейтинг складається за певними критеріями у певних сферах чи формах діяльності за певний період, тож усі, хто поза цієї границі, – аутсайдери.

Оскільки організація і здійснення такого вибору має бути оптимальними, ця методологія оцінювання стала можливою лише з появою сучасних методів і технології математичної оптимізації. Тож аналітична методологія DEA почала формуватися з середини 50-их років ХХ ст. у початковий період бурхливого застосування методів лінійного програмування (ЛП) з використанням перших вкрай недосконалих серійних комп'ютерів і скоро виокремилась визначенням специфічного класу задач, альтернативного до класичних задач математичної оптимізації.

Адже, за усталеною традицією й навіть у відповідності слову «програмування» («планування»), класичний апарат математичного програмування (ЛП у тому числі) фактично застосовується для визначення оптимального плану *на майбутнє*, формуючи відповідь на запитання «що буде, якщо...», де шойно отриманий результат оптимізаційного моделювання є лише прогнозом для наступних подій: «так буде, якщо...».

Аналітика DEA, навпаки, маючи таблицю «входи-виходи», застосовує апарат ЛП для оптимального оцінювання подій, фактів і результатів реальної діяльності об'єктів дослідження, що *вже здійснені й відтворені* у цій таблиці, відповідно, нею визначено новий тип задач оптимізації, про постановку і розв'язання яких йде мова.

З економічної теорії відомий принцип, за яким усі комбінації кількох входів ( $X$ ) та одного виходу ( $y$ ) для окремої управлінської одиниці (або операційної системи) представлені виробничою функцією  $y = f(X)$ , за допомогою якої можна знайти максимальне значення виходу ( $y$ ), яке досягається при певній комбінації входів  $X = (x_1, \dots, x_m)$ . Тож змінюючи значення певних входів як параметрів, можна сформулювати модель параметричного ЛП й побудувати відповідний фронт ефективності – граничну лінію економічного, виробничого чи організаційного процесу, яка розмежовує ефективні й неефективні комбінації входів-виходу (характерний приклад – фронт ефективності в портфельному аналізі інвестиційної діяльності).

З-за обмеженості одним виходом (інтегральним показником ефективності) й виникла проблема реалізації цього принципу і побудови такого фронту для оцінювання ефективності кількох однорідних одиниць з кількома виходами  $Y = (y_1, \dots, y_s)$ , де практично неможливо зафіксувати й проаналізувати усі комбінації «входи-виходи».

Тож сучасна методологія DEA стала складовою узагальненої технології побудови фронтів ефективності, які розділяють усю сукупність об'єктів дослідження на дві частини – ефективні й неефективні.

Оскільки порівняльною оцінкою ефективності окремої одиниці є відношення її зважених виходів (лінійна форма Виходи) до її зважених входів (лінійна форма Входи), кожна у вигляді лінійних функцій, тобто, це дріб  $e = \frac{\text{Виходи}}{\text{Входи}}$ , де шукані невідомі – вагові коефіцієнти

– входять у чисельник і знаменник. Постає задача оптимізації – якими мають бути ці вагові коефіцієнти для конкретно заданої одиниці, щоб її ефективність ( $e$ ) була максимальною за обмеження, що ефективність усіх одиниць не перевищує 1 (100%).

Якщо надалі цю ж задачу повторити для усіх інших одиниць, утворюються об'єктивні умови порівняння цих одиниць між собою, бо кожна з них тепер має оптимальні вагові коефіцієнти власних входів та виходів.

Математична модель визначеної таким чином задачі оптимізації з дробово-лінійними цільовою функцією й функціями обмежень, є явно нелінійною, тож у складі математичного програмування визначено клас моделей *дробово-лінійного програмування*, відповідно, «родзинкою» досліджень засновників DEA<sup>62</sup> став серйозний математичний результат, за яким спеціальними засобами лінеаризації нелінійна задача ДЛП зводиться до задачі ЛП з наступним її розв'язанням ефективним симплекс-методом. Це дає змогу одночасно суттєво спростити й пришвидшити процедуру пошуку оптимуму й підсилити її за рахунок отримання двоїстих оцінок і здійснення аналізу чутливості отриманого оптимального плану.

Таким чином, аналітична (Analysis) методологія DEA дозволяє:

- визначити узагальнені показники однорідних одиниць за початковими даними «входи-виходи» (Data), оцінити ці одиниці шляхом порівняння їх узагальнених показників, а за отриманими оцінками побудувати їх рейтинг
- усю сукупність однорідних одиниць розмежувати на дві групи умовною граничною лінією фронту ефективності (Envelopment), де лінію фронту визначають один чи можливо кілька ефективних лідерів (з однаковими оцінками), а поза неї – усі інші, із застосуванням засобів оптимізаційного моделювання.

<sup>62</sup> Charnes A., Cooper W. Programming with linear fractional functionals. – Naval Res. Logist. Quart. 9, 1962

Charnes A., Cooper W., Rhodes E. Measuring the efficiency of decision-making units. – Eur. J. of OR, 1978, v. 2

## Задача 8.11. Оптимальне оцінювання однорідних одиниць

### Постановка задачі

Організаційна структура  $O$  складена з  $n$  однорідних одиниць

$$O = (o_1, \dots, o_j, \dots, o_n),$$

кожна має  $m$  входів та  $s$  виходів,  $j = 1, \dots, n$ , де окрема  $j$ -та одиниця це: підрозділ будь-якої організації чи просто рядовий виконавець, необхідно оцінити ефективність кожної з них, щоб порівняти їх між собою.

Кожна  $j$ -та одиниця  $o_j$  представлена парою «входи-виходи»  $(x_j, y_j)$ , де:

$j$ -ий вхід – це вектор  $x_j = (x_{j1}, \dots, x_{ji}, \dots, x_{jm})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$j$ -ий вихід – це вектор  $y_j = (y_{j1}, \dots, y_{jr}, \dots, y_{js})$ ,  $r = 1, \dots, s$ .

Таким чином, початкові дані (складова Data у методології DEA) задані двома матрицями:

- входів  $X = \{x_{ji}\}$  розміром  $n \times m$  та
- виходів  $Y = \{y_{jr}\}$  розміром  $n \times s$ :

	m ВХОДІВ					s ВИХОДІВ				
$O_1$	$x_{1,1}$	...	$x_{1,i}$	...	$x_{1,m}$	$y_{1,1}$	...	$y_{1,r}$	...	$y_{1,s}$
...										
$O_j$	$x_{j,1}$	...	$x_{j,i}$	...	$x_{j,m}$	$y_{j,1}$	...	$y_{j,r}$	...	$y_{j,s}$
...										
$O_n$	$x_{n,1}$	...	$x_{n,i}$	...	$x_{n,m}$	$y_{n,1}$	...	$y_{n,r}$	...	$y_{n,s}$

Ставиться задача пошуку таких вагових коефіцієнтів певної ( $p$ ) одиниці,  $p = 1, \dots, n$ :

- для входів  $V = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_m)$ , де  $v_i$  – «вага»  $i$ -го входу,  $i = 1, \dots, m$  та
- для виходів  $U = (u_1, \dots, u_r, \dots, u_s)$ , де  $u_r$  – «вага»  $r$ -го виходу,  $r = 1, \dots, s$ , щоб визначити:
- максимальну ефективність цієї  $p$ -ої одиниці:

$$e_p = \frac{UY_p}{VX_p} = \frac{u_1 y_{p,1} + \dots + u_r y_{p,r} + \dots + u_s y_{p,s}}{v_1 x_{p,1} + \dots + v_i x_{p,i} + \dots + v_m x_{p,m}}$$

за умови, що оцінки ефективності усіх одиниць не перевищують 1 (100%)

$$\frac{UY_j}{VX_j} \leq 1, j = 1, \dots, n.$$

### Задача оптимізації (модель ДЛП)

I. Знайти вектори  $V = \{v_i\}$ ,  $U = \{u_r\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $r = 1, \dots, s$ , щоб

II. ЦФ  $\frac{UY_p}{VX_p} \rightarrow \max, p \in \{1, \dots, n\}$

III. при  $\frac{UY_j}{VX_j} \leq 1, j = 1, \dots, n$

$$v_i \geq 0$$

$$u_r \geq 0.$$

### Задача оптимізації (модель ЛП)

I. Знайти вектори  $V = \{v_i\}$ ,  $U = \{u_r\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $r = 1, \dots, s$ , щоб

II. ЦФ  $UY_p \rightarrow \max, p \in \{1, \dots, n\}$

III. при  $UY_j - VX_j \leq 0, j = 1, \dots, n$

$$VX_p = 1$$

$$v_i \geq 0$$

$$u_r \geq 0.$$

## Варіанти задачі та їх розв'язання

Щоб краще зрозуміти сутність методології DEA, на початку розглянемо спрощені постановки поставленої задачі, які б дозволили представити результати у наочній формі. Для цього скористаємось графічними методами розв'язання таких задач, де розв'язок задачі супроводжується побудовою відповідних геометричних конструкцій.

### Задача (5, 1, 1): 1-вхід (x), 1-вихід (y)

Оцінюються п'ять однорідних команд виконавців, що випускають однакову продукцію (Y), витрачаючи певний ресурс (X), для цього обчислюється їх продуктивність (Y/X) та ефективність (у відношенні до продуктивності кращої команди):

Одиниця	Витрати (X)	Випуск (Y)	P (Y/X)	E (P/max P)
K-1	15	60	4,0	0,80
K-2	10	48	4,8	0,96
K-3	20	70	3,5	0,70
K-4	12	60	5,0	1,00
K-5	16	72	4,5	0,90

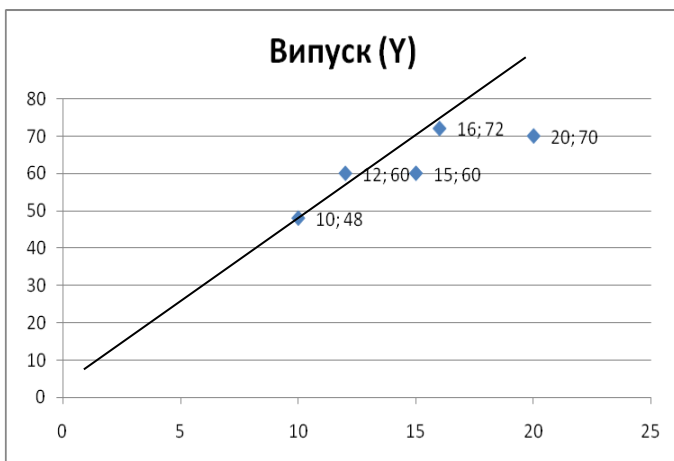
Найвищу продуктивність  $P$  (Y/X) має команда K-4 (5,0), відносно її визначається базова ефективність ( $E$ ) щодо усіх інших команд-аутсайдерів. Кожна з них, орієнтуючись на лідера, може тепер визначити для себе наступні дії, щоб отримати відповідні показники. Скажімо, якщо б команда K-1, користуючись якістю ресурсів, досвідом і технологією, що має лідера, досягла такої ж продуктивності (5), вона б:

а) випустила  $60/0,8 = 75$  од. продукції (25% росту) або ж

б) витратила для наявного результату (60)  $15*0,8=12$  од. ресурсу замість 15.

Сказане означає, що визначення ефективного лідера (інакше, *границі ефективності* для багатьох учасників) є підставою для кожного з них визначити шляхи до покращення власних показників й оцінити відповідні показники.

Отже, огортуючою масив даних границею ефективності є пряма лінія, на якій розміщується ефективний лідер K-4 ( $e_4 = 1$ ), усі інші виконавці – поза цієї лінії (аутсайдери):



### Задача (5, 1, 2): 1-вхід (x), 2-виходи (y<sub>1</sub>, y<sub>2</sub>)

Аналізується діяльність п'яти стандартних відділень банку з метою об'єктивного оцінювання їх діяльності та ранжування за показниками ефективності. Відділення надають однакові послуги і мають однакове ресурсне забезпечення (персонал, приміщення, капітал) у вартісному вимірі величиною 100 од., це означає, що витрати на надання послуг у них однакові, зате показники щодо кредитів та депозитів різні.

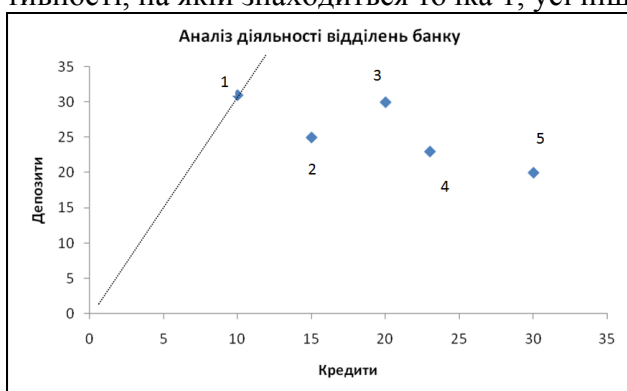




Відділення	Витрати	Вагові коефіцієнти		P	E
		3	33		
		Кредити	Депозити		
В-1	100	10	31	1053	1,000
В-2	100	15	25	870	0,826
В-3	100	20	30	1050	0,997
В-4	100	23	23	828	0,786
В-5	100	30	20	750	0,712
	Вхід	Виходи			

де стовпець P містить зважені значення продуктивностей  $p_i$ , стовпець E містить відносні (щодо максимальної продуктивності 1053 для В-1) рівні ефективності відділень, де найкращим є 1-ше (з найбільшим числом «цінних» депозитів), близькими до нього 3-тє та 2-ге відділення, рейтинг: 1, 3, 2, 4, 5.

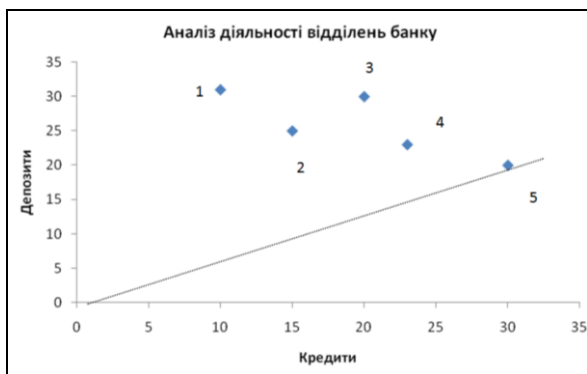
Таким чином, максимальне значення показника ефективності В-1 утворює границю ефективності, на якій знаходиться точка 1, усі інші точки за цими коефіцієнтами – аутсайтери:



Навпаки, при  $u_1=33$ ,  $u_2=3$  будемо мати інший результат:

Відділення	Витрати	Вагові коефіцієнти		P	E
		33	3		
		Кредити	Депозити		
В-1	100	10	31	423	0,403
В-2	100	15	25	570	0,543
В-3	100	20	30	750	0,714
В-4	100	23	23	828	0,789
В-5	100	30	20	1050	1,000
	Вхід	Виходи			

і тепер відділення В-5 стало лідером завдяки своїм «цінним» кредитам, визначивши інший рейтинг: 5, 4, 3, 2, 1:



Ясно, що при інших вагових коефіцієнтах виходів буде інший результат. Зокрема, для відділень, які знаходяться у різних місцях й працюють у різних умовах, «цінність» виходів у вигляді вагових коефіцієнтів буде різною, тож, якщо задати їх різні значення, відповідно, буде й інший результат, зокрема, рейтинг: 3, 1, 4, 5, 2 для таблиці:

Відділення	Витрати	Кредити	Депозити	u1	u2	P	E
В-1	100	10	31	3	33	1053	0,849
В-2	100	15	25	23	17	770	0,621
В-3	100	20	30	17	30	1240	1,000
В-4	100	23	23	18	24	966	0,779
В-5	100	30	20	21	10	830	0,669
	Вхід	Виходи				1240	max

Отже, за методологією DEA задача оцінювання набору однорідних одиниць зводиться до пошуку оптимальних значень вагових коефіцієнтів входів та виходів для кожної конкретної одиниці, за якими ефективність цієї одиниці максимізується за умови обмеження ефективності усіх одиниць.

Для наведеного прикладу треба 5 раз повторити процедуру пошуку оптимальних значень вагових коефіцієнтів входу ( $v_1$ ) та виходів ( $u_1, u_2$ ) для 5 відділень, після чого можна визначити відповідну границю ефективності, побудувавши таблицю ефективності усіх одиниць. Детально розглянемо процес розв'язання цієї задачі для відділення В-1, для цього сформуємо математичну модель ЛП з її подальшою реалізацією у вигляді електронно-табличної моделі в Excel. Надалі цей процес повторюється для усіх інших відділень.

### Задача оптимізації (відділення В-1)

I. Знайти вектори  $V = \{v_1\}$ ,  $U = \{u_1, u_2\}$ , щоб

II. ЦФ  $10u_1 + 31u_2 \rightarrow \max$  (ефективність виходів для В-1)

III. при

$$-100v_1 + 10u_1 + 31u_2 \leq 0$$

$$-100v_1 + 15u_1 + 25u_2 \leq 0$$

$$-100v_1 + 20u_1 + 30u_2 \leq 0$$

$$-100v_1 + 23u_1 + 23u_2 \leq 0$$

$$-100v_1 + 30u_1 + 20u_2 \leq 0$$

$$100v_1 = 1$$

$$v_1 \geq 0, u_1, u_2 \geq 0.$$

### Таблична модель

На рисунку наведена типова форма електронно-табличної (ЕТ) моделі задачі оптимізації для пошуку вагових коефіцієнтів та цільової функції для В-1 та вікно програми Поиск решения, показано формули ЕТ-моделі. Для усіх наступних моделей ці формули треба змінити, зберігаючи їх структуру:

Відділення	Витрати	Кредити	Депозити	Обмеження
В-1	100	10	31	1,0 = 1
В-2	100	15	25	-0,2 <= 0
В-3	100	20	30	-0,2 <= 0
В-4	100	23	23	-0,3 <= 0
В-5	100	30	20	-1,0 <= 0
Вхід	Виходи			
План	0,01	0,00	0,033	1,0 ЦФ
	$v_1$	$u_1$	$u_2$	

Формули

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Аналіз 1-го відділення банку					Обмеження			
3		Відділення	Витрати	Кредити	Депозити	=C4*\$C\$11	=	1	
4		В-1	100	10	31	=-C4*\$C\$11+СУММПРОИЗВ(\$D\$11:\$E\$11;D4:E4)	<=	0	
5		В-2	100	15	25	=-C5*\$C\$11+СУММПРОИЗВ(\$D\$11:\$E\$11;D5:E5)	<=	0	
6		В-3	100	20	30	=-C6*\$C\$11+СУММПРОИЗВ(\$D\$11:\$E\$11;D6:E6)	<=	0	
7		В-4	100	23	23	=-C7*\$C\$11+СУММПРОИЗВ(\$D\$11:\$E\$11;D7:E7)	<=	0	
8		В-5	100	30	20	=-C8*\$C\$11+СУММПРОИЗВ(\$D\$11:\$E\$11;D8:E8)	<=	0	
9			Вхід	Виходи					
10									
11		План	0,01	0	0,032258064	=СУММПРОИЗВ(\$D\$11:\$E\$11;D4:E4)		ЦФ	
12			$v_1$	$u_1$	$u_2$				

Результат: ефективність В-1 максимальна (1 або 100%), при  $v_1=0,01$ ;  $u_1=0$ ,  $u_2 \cong 0,33$ .

Тепер цю табличну модель можна використати як шаблон для розв'язання задачі оптимізації для відділень В-2, В-3, В-4 та В-5 копіюванням та внесенням певних змін.

На рисунках наведені результати для відділень В-2, В-3, В-4 та В-5, а також сформована узагальнена таблиця «Усі відділення», де визначені оптимальні вагові коефіцієнти кожного з 5 відділень. Саме ця остання таблиця дозволяє отримати кінцевий результат – визначити трьох лідерів (це В-1, В-3 та В-5 з однаковою максимальною ефективністю, що дорівнює 1), які, у свою чергу, визначили фронт ефективності, рис. 9, та двох аутсайдерів – В-4 та В-2. Для цих двох відділень не існує таких вагових коефіцієнтів, за якими б вони стали лідерами, тобто, вони явні аутсайдерами.

Є можливість об'єктивно порівняти усі відділення за значеннями їх цільових функцій й побудувати рейтинг: (В-1, В-2, В-3), В-4, В-2.

На графіку явно визначена огортаюча лінія ефективності, яка утворена трьома успішними відділеннями В-1, В-3 та В-5, яка «огортає» зверху усі 5 точок, під нею розміщені точки для 4-го та 2-го відділень-аутсайдерів, для яких пунктиром вказані їх гіпотетичні цільові позиції на границі: точка 4<sup>+</sup> (координати 25; 25) та 2<sup>+</sup> (18,1; 30,2). Наприклад, щоб В-4 став лідером, йому треба при витратах у 100 од. мати 25 од. кредиту та 25 од. депозитів (проти 23/23).

Геометричний (графічний) підхід для ілюстрації процедури оцінювання однорідних одиниць став можливим за умови, що усі відділення мають однакові витрати й два виходи, у всіх інших випадках користуються алгебраїчним (формульним) підходом:

1	Аналіз 1-го відділення банку				Обмеження	
3	Відділення	Витрати	Кредити	Депозити	1,0	= 1
4	В-1	100	10	31	0,0	<= 0
5	В-2	100	15	25	-0,2	<= 0
6	В-3	100	20	30	0,0	<= 0
7	В-4	100	23	23	-0,3	<= 0
8	В-5	100	30	20	-0,4	<= 0
9		Вхід	Виходи			
11	План	0,01	0,00	0,032	1,0	ЦФ
12		$v_1$	$u_1$	$u_2$		
14 <th colspan="4">Аналіз 2-го відділення банку</th> <th colspan="2">Обмеження</th>	Аналіз 2-го відділення банку				Обмеження	
16	Відділення	Витрати	Кредити	Депозити	1,0	= 1
17	В-1	100	10	31	0,0	<= 0
18	В-2	100	15	25	-0,2	<= 0
19	В-3	100	20	30	0,0	<= 0
20	В-4	100	23	23	-0,2	<= 0
21	В-5	100	30	20	-0,3	<= 0
22		Вхід	Виходи			
24	План	0,01	0,003125	0,03125	0,828	ЦФ
25		$v_1$	$u_1$	$u_2$		
27 <th colspan="4">Аналіз 3-го відділення банку</th> <th colspan="2">Обмеження</th>	Аналіз 3-го відділення банку				Обмеження	
29	Відділення	Витрати	Кредити	Депозити	1,0	= 1
30	В-1	100	10	31	-0,2	<= 0
31	В-2	100	15	25	-0,2	<= 0
32	В-3	100	20	30	0,0	<= 0
33	В-4	100	23	23	-0,1	<= 0
34	В-5	100	30	20	0,0	<= 0
35		Вхід	Виходи			
37	План	0,01	0,02	0,020	1,000	ЦФ
38		$v_1$	$u_1$	$u_2$		

Поиск решения

Установить целевую ячейку: \$G\$11

Равной:  максимальной значению  значению: 0  минимальному значению

Имена ячеек: \$C\$11:\$E\$11

Ограничения: \$G\$3 = \$E\$3  
\$G\$4:\$G\$8 <= \$I\$4:\$I\$8

Добавить Изменить Удалить

Выполнить Закрыть Параметры Восстановить Справка

Поиск решения

Установить целевую ячейку: \$G\$24

Равной:  максимальной значению  значению: 0  минимальному значению

Имена ячеек: \$C\$24:\$E\$24

Ограничения: \$G\$16 = \$I\$16  
\$G\$17:\$G\$21 <= \$I\$17:\$I\$21

Добавить Изменить Удалить

Выполнить Закрыть Параметры Восстановить Справка

Поиск решения

Установить целевую ячейку: \$G\$37

Равной:  максимальной значению  значению: 0  минимальному значению

Имена ячеек: \$C\$37:\$E\$37

Ограничения: \$G\$29 = \$I\$29  
\$G\$30:\$G\$34 <= \$I\$30:\$I\$34

Добавить Изменить Удалить

Выполнить Закрыть Параметры Восстановить Справка

40	Аналіз 4-го відділення банку				Обмеження	
42	Відділення	Витрати	Кредити	Депозити	1,0	= 1
43	В-1	100	10	31	-0,2	<= 0
44	В-2	100	15	25	-0,2	<= 0
45	В-3	100	20	30	0,0	<= 0
46	В-4	100	23	23	-0,1	<= 0
47	В-5	100	30	20	0,0	<= 0
48		Вхід	Виходи			
50	План	0,01	0,02	0,020	0,920	ЦФ
51		$v_1$	$u_1$	$u_2$		
53 <th colspan="4">Аналіз 5-го відділення банку</th> <th colspan="2">Обмеження</th>	Аналіз 5-го відділення банку				Обмеження	
55	Відділення	Витрати	Кредити	Депозити	1,0	= 1
56	В-1	100	10	31	-0,7	<= 0
57	В-2	100	15	25	-0,5	<= 0
58	В-3	100	20	30	-0,3	<= 0
59	В-4	100	23	23	-0,2	<= 0
60	В-5	100	30	20	0,0	<= 0
61		Вхід	Виходи			
63	План	0,01	0,0333	0,000	1,000	ЦФ
64		$v_1$	$u_1$	$u_2$		
66	Усі відділення					
67	Відділення	Витрати	Кредити	Депозити	Ефективність	
68	В-1	0,01	0	0,0323	1,000	
69	В-2	0,01	0,003125	0,0313	0,828	
70	В-3	0,01	0,02	0,02	1,000	
71	В-4	0,01	0,02	0,02	0,920	
72	В-5	0,01	0,033333	0	1,000	

Поиск решения

Установить целевую ячейку: \$G\$50

Равной:  максимальной значению  значению: 0  минимальному значению

Имена ячеек: \$C\$50:\$E\$50

Ограничения: \$G\$42 = \$I\$42  
\$G\$43:\$G\$47 <= \$I\$43:\$I\$47

Добавить Изменить Удалить

Выполнить Закрыть Параметры Восстановить Справка

Поиск решения

Установить целевую ячейку: \$G\$63

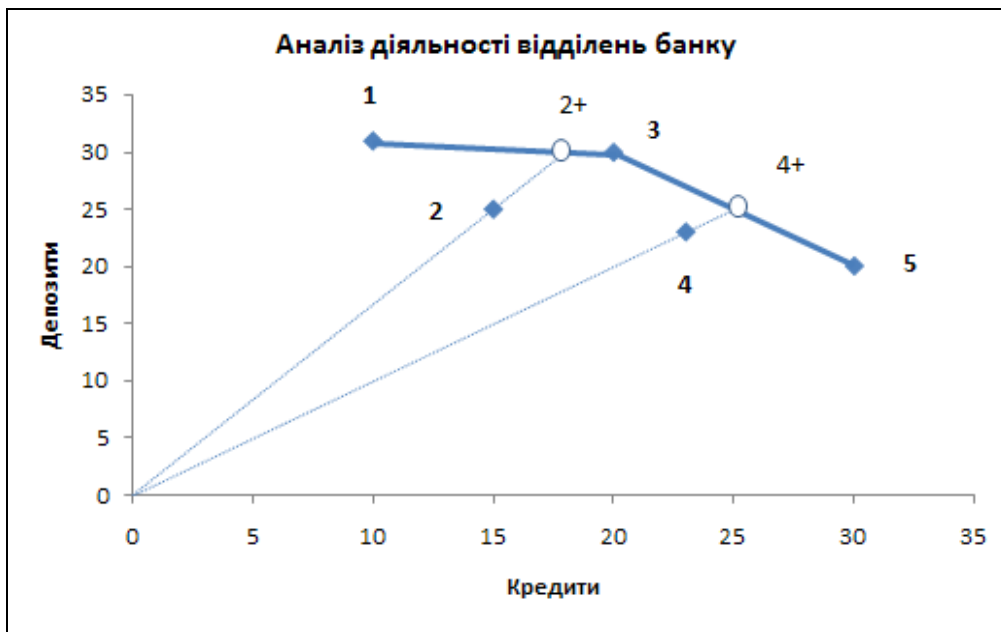
Равной:  максимальной значению  значению: 0  минимальному значению

Имена ячеек: \$C\$63:\$E\$63

Ограничения: \$G\$55 = \$I\$55  
\$G\$56:\$G\$60 <= \$I\$56:\$I\$60

Добавить Изменить Удалить

Выполнить Закрыть Параметры Восстановить Справка



**Задача (6, 2, 2): 2-входи ( $x_1, x_2$ ), 2-виходи ( $y_1, y_2$ )**

Аналізується діяльність 6 стандартних відділень сервісної організації з метою об'єктивного оцінювання їх діяльності. Відділення надають основні та додаткові послуги (виходи) і мають базове ресурсне забезпечення двох видів: штатний персонал та спеціальне обладнання (входи), усі показники надані у відповідному матеріальному чи вартісному вимірі. Відомості про діяльність цих відділень у певний часовий період представлені таблицею:

	<i>Входи</i>		<i>Виходи</i>	
	<i>Штат</i>	<i>Обладнання</i>	<i>Осн. послуги</i>	<i>Дод. послуги</i>
1	150	0,2	14	3,5
2	400	0,7	14	21
3	320	1,2	42	10,5
4	520	2,0	28	42
5	350	1,2	19	25
6	320	0,7	14	15

Це типова задача оцінювання, яка розв'язується суто алгебраїчними (не геометричними) методами шляхом розв'язання прямої та двоїстої задач ЛП.

Результатом прямої задачі є значення максимальної ефективності кожного відділення (цільова функція) та оптимальні значення вагових коефіцієнтів: входів ( $v_1, v_2$ ) та виходів ( $u_1, u_2$ ), за якими досягається така ефективність. На цьому етапі точно визначені лідери та аутсайди й, відповідно, визначено рейтинг відділень.

Результатом двоїстої задачі є «тіньові ціни» правих частин обмежень, за їх допомогою обчислюються гіпотетичні значення входів та виходів неефективних відділень-аутсайдерів, ці значення застосовуються ними як орієнтири на шляху до покращення своєї діяльності, це відповідь на запитання – якими мають бути значення їх входів та виходів, щоб досягти рівня ефективності лідерів.

**Задача оптимізації (відділення В-1)**

I. Знайти вектори  $V = \{v_1, v_2\}$ ,  $U = \{u_1, u_2\}$ , щоб

II. ЦФ  $14u_1 + 3,5u_2 \rightarrow \max$  (ефективність виходів для В-1)

III. за обмежень:

$$-(150v_1 + 0,2v_2) + 14u_1 + 3,5u_2 \leq 0$$

$$-(400v_1 + 0,7v_2) + 14u_1 + 21u_2 \leq 0$$

$$\begin{aligned}
 &-(320v_1 + 1,2v_2) + 42u_1 + 10,5u_2 \leq 0 \\
 &-(520v_1 + 2,0v_2) + 28u_1 + 42u_2 \leq 0 \\
 &-(350v_1 + 1,2v_2) + 19u_1 + 25u_2 \leq 0 \\
 &-(320v_1 + 0,7v_2) + 14u_1 + 15u_2 \leq 0 \\
 &150v_1 + 0,2v_2 = 1 \text{ (знаменник)} \\
 &v_1, v_2 \geq 0, u_1, u_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Аналогічна модель формується для усіх інших відділень.

### Таблична модель

На рисунках наведені табличні моделі задачі оптимізації для пошуку вагових коефіцієнтів та цільової функції для усіх 6 відділень з відповідними вікнами програми Поиск решения. Кожна з цих моделей має певну стандартизовану форму, що дозволяє суттєво спростити процес оптимізації – кожна модель є модифікацією базової моделі, де треба внести зміни (для В-1) у ліву частину системи обмежень (діапазон F3:F9) та вираз ЦФ (F11) й відтворити ці зміни у вікні Поиск решения.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
2		<b>Входи</b>		<b>Виходи</b>		<b>Обмеження</b>											
3	<b>В-1</b>	<i>Штат</i>	<i>Обладнання</i>	<i>Осн. послуги</i>	<i>Дод. послуги</i>	1,00000	=	1									
4	1	150	0,2	14	3,5	0,00000	<=	0									
5	2	400	0,7	14	21	-0,38793	<=	0									
6	3	320	1,2	42	10,5	0,00000	<=	0									
7	4	520	2,0	28	42	0,00000	<=	0									
8	5	350	1,2	19	25	-0,10222	<=	0									
9	6	320	0,7	14	15	-0,47660	<=	0									
11		0,005	1,121	0,050	0,084	1,0000											
12		v1	v2	u1	u2	ЦФ											
14		<b>Входи</b>		<b>Виходи</b>		<b>Обмеження</b>											
15	<b>В-2</b>	<i>Штат</i>	<i>Обладнання</i>	<i>Осн. послуги</i>	<i>Дод. послуги</i>	1,00000	=	1									
16	1	150	0,2	14	3,5	0,00000	<=	0									
17	2	400	0,7	14	21	0,00000	<=	0									
18	3	320	1,2	42	10,5	-0,20642	<=	0									
19	4	520	2,0	28	42	0,00000	<=	0									
20	5	350	1,2	19	25	-0,02818	<=	0									
21	6	320	0,7	14	15	-0,11796	<=	0									
23		0,0014	0,6422	0,0144	0,0380	1,0000											
24		v1	v2	u1	u2	ЦФ											
26		<b>Входи</b>		<b>Виходи</b>		<b>Обмеження</b>											
27	<b>В-3</b>	<i>Штат</i>	<i>Обладнання</i>	<i>Осн. послуги</i>	<i>Дод. послуги</i>	1,00000	=	1									
28	1	150	0,2	14	3,5	-0,13542	<=	0									
29	2	400	0,7	14	21	-0,43750	<=	0									
30	3	320	1,2	42	10,5	0,00000	<=	0									
31	4	520	2,0	28	42	0,00000	<=	0									
32	5	350	1,2	19	25	-0,08690	<=	0									
33	6	320	0,7	14	15	-0,35179	<=	0									
35		0,0031	0,0000	0,0170	0,0274	1,0000											
36		v1	v2	u1	u2	ЦФ											

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку: \$F\$11

Равной:  максимальной значению  значению: 0

Имена ячеек: \$B\$11:\$E\$11

Ограничения: \$F\$3 = \$H\$3, \$F\$4:\$F\$9 <= \$H\$4:\$H\$9

Добавить, Изменить, Удалить, Параметры, Восстановить, Справка

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку: \$F\$23

Равной:  максимальной значению  значению: 0

Имена ячеек: \$B\$23:\$E\$23

Ограничения: \$F\$15 = \$H\$15, \$F\$16:\$F\$21 <= \$H\$16:\$H\$21

Добавить, Изменить, Удалить, Параметры, Восстановить, Справка

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку: \$F\$35

Равной:  максимальной значению  значению: 0

Имена ячеек: \$B\$35:\$E\$35

Ограничения: \$F\$27 = \$H\$27, \$F\$28:\$F\$33 <= \$H\$28:\$H\$33

Добавить, Изменить, Удалить, Параметры, Восстановить, Справка

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
38		<b>Входи</b>		<b>Виходи</b>		Обмеження					<b>Поиск решения</b>						
39	<b>В-4</b>	<b>Штат</b>	<b>Обладнання</b>	<b>Осн. послуги</b>	<b>Дод. послуги</b>	1,00000	=	1			Установить целевую ячейку: \$F\$47						
40	1	150	0,2	14	3,5	-0,08333	<=	0			Равной: <input checked="" type="radio"/> максимальному значению <input type="radio"/> значению: 0						
41	2	400	0,7	14	21	-0,26923	<=	0			<input type="radio"/> минимальному значению						
42	3	320	1,2	42	10,5	0,00000	<=	0			Имена ячеек: \$B\$47:\$E\$47						
43	4	520	2,0	28	42	0,00000	<=	0			Ограничения: \$F\$39 = \$H\$39						
44	5	350	1,2	19	25	-0,05348	<=	0			\$F\$40:\$F\$45 <= \$H\$40:\$H\$45						
45	6	320	0,7	14	15	-0,21648	<=	0			Добавить						
46											Изменить						
47		0,0019	0,0000	0,0104	0,0168	1,0000					Удалить						
48		v1	v2	u1	u2	ЦФ					Восстановить						
50		<b>Входи</b>		<b>Виходи</b>		Обмеження					<b>Поиск решения</b>						
51	<b>В-5</b>	<b>Штат</b>	<b>Обладнання</b>	<b>Осн. послуги</b>	<b>Дод. послуги</b>	1,00000	=	1			Установить целевую ячейку: \$F\$59						
52	1	150	0,2	14	3,5	0,00000	<=	0			Равной: <input checked="" type="radio"/> максимальному значению <input type="radio"/> значению: 0						
53	2	400	0,7	14	21	0,00000	<=	0			<input type="radio"/> минимальному значению						
54	3	320	1,2	42	10,5	-0,16484	<=	0			Имена ячеек: \$B\$59:\$E\$59						
55	4	520	2,0	28	42	0,00000	<=	0			Ограничения: \$F\$51 = \$H\$51						
56	5	350	1,2	19	25	-0,02250	<=	0			\$F\$52:\$F\$57 <= \$H\$52:\$H\$57						
57	6	320	0,7	14	15	-0,09419	<=	0			Добавить						
58											Изменить						
59		0,0011	0,5128	0,0115	0,0304	0,9775					Удалить						
60		v1	v2	u1	u2	ЦФ					Восстановить						
62		<b>Входи</b>		<b>Виходи</b>		Обмеження					<b>Поиск решения</b>						
63	<b>В-6</b>	<b>Штат</b>	<b>Обладнання</b>	<b>Осн. послуги</b>	<b>Дод. послуги</b>	1,00000	=	1			Установить целевую ячейку: \$F\$71						
64	1	150	0,2	14	3,5	0,00000	<=	0			Равной: <input checked="" type="radio"/> максимальному значению <input type="radio"/> значению: 0						
65	2	400	0,7	14	21	0,00000	<=	0			<input type="radio"/> минимальному значению						
66	3	320	1,2	42	10,5	-0,23196	<=	0			Имена ячеек: \$B\$71:\$E\$71						
67	4	520	2,0	28	42	0,00000	<=	0			Ограничения: \$F\$63 = \$H\$63						
68	5	350	1,2	19	25	-0,03166	<=	0			\$F\$64:\$F\$69 <= \$H\$64:\$H\$69						
69	6	320	0,7	14	15	-0,13255	<=	0			Добавить						
70											Изменить						
71		0,0015	0,7216	0,0162	0,0427	0,8675					Удалить						
72		v1	v2	u1	u2	ЦФ					Восстановить						

Представлені результати прямої задачі для усіх відділень (вагові коефіцієнти й максимальна ефективність), за якими можна провести порівняння й визначити рейтинг відділень: (1, 2, 3, 4), 5, 6:

	A	B	C	D	E	F
75	<b>В</b>	<b>Входи</b>		<b>Виходи</b>		
76		<b>Штат</b>	<b>Обладнання</b>	<b>Осн. послуги</b>	<b>Дод. послуги</b>	<b>Ефективність</b>
77	1	0,005	1,121	0,050	0,084	1,0000
78	2	0,001	0,642	0,014	0,038	1,0000
79	3	0,003	0,000	0,017	0,027	1,0000
80	4	0,002	0,000	0,010	0,017	1,0000
81	5	0,001	0,513	0,012	0,030	0,9775
82	6	0,002	0,722	0,016	0,043	0,8675

Для відділень-аутсайдерів В-5 та В-6 розв'язується двоїста задача ЛП для отримання гіпотетичних значень їх входів та виходів, для цього програма Поиск решения формує звіт зі стійкості (Устойчивость) оптимального плану щодо змін початкових даних.

### Програмні продукти DEA-методології

Достоїнством розглянутих ЕТ-моделей, розрахованих на застосування стандартної версії надбудови Excel Solver (Поиск решения), є можливість власноруч побудувати й реалізувати математичну модель задачі оптимального оцінювання однорідних одиниць без будь-яких допоміжних програмних засобів, тому їх найкраще застосовувати у навчальному й дослідницькому процесу, де можна найкраще зрозуміти DEA-методологію оцінювання й враховувати специфічні властивості однорідних одиниць уведенням додаткових обмежень. Їх недолік – необхідність багатократно будувати й реалізовувати таку модель для



кожної одиниці (DMU), що досить незручно для крупних задач та розрахунків промислового значення.

Популярність аналітичної DEA-методології стимулює розробку спеціалізованих програм автономного користування чи у вигляді програм-надбудов. Для тих, хто користується середовищем Excel, досить зручною й потужною є надбудова DEAFrontier, розроблена проф. Дж. Жу<sup>63</sup>, її free-версія розрахована на 20 однорідних одиниць, базова (платна) версія зорієнтована на можливості Excel Solver (200 одиниць для стандартної версії Solver). Після отримання результатів прямої та двоїстої задач, користувачу залишається виконати допоміжні операції, це: компоновка звітного документа, побудова рейтингу та додаткові розрахунки одиниць тощо, головне – оптимізація для усіх одиниць здійснюється за один крок й не вимагає побудови ЕТ-моделі.

На рисунках наведені результати для розглянутої задачі оцінювання 6 одиниць та тестовий приклад для 20 одиниць, отримані за допомогою надбудови Excel DEAFrontier.

Оцінки ефективності (т-ціни)						
DMU No.	DMU Name	Efficiency	вх-1	вх-2	вих-1	вих-2
1	1	1,00000	150,00	0,20	14	3,5
2	2	1,00000	400,00	0,70	14	21
3	3	1,00000	320,00	1,20	42	10,5
4	4	1,00000	520,00	2,00	28	42
5	5	0,97750	342,12	1,17	19	25
6	6	0,86745	277,58	0,61	14	15

Оцінки ефективності															
№	Одиниця	Вх-1	Вх-2	Вх-3	Вих-1	Вих-2	Ефективність	Вх-1	Вх-2	Вх-3	Вих-1	Вих-2	Рейтинг		
1	Firm1	171,0	82,0	62,0	105,0	24,0	1,00	171,0	82,0	62,0	105,0	24,0	Firm1	1	
2	Firm2	150,9	9,8	30,4	64,0	45,6	0,87	174,0	44,0	35,0	64,0	17,0	Firm8	1	
3	Firm3	331,2	51,0	97,1	167,0	98,4	0,49	682,0	105,0	200,0	167,0	52,0	Firm9	1	
4	Firm4	404,0	78,1	188,0	230,0	130,0	0,51	791,0	153,0	412,0	230,0	38,0	Firm13	1	
5	Firm5	1027,6	110,2	297,3	487,0	318,6	0,50	2051,0	220,0	673,0	487,0	244,0	Firm15	1	
6	Firm6	709,3	87,7	228,9	349,0	221,5	0,55	1286,0	159,0	612,0	349,0	198,0	Firm18	1	
7	Firm7	2274,2	147,8	461,8	971,3	692,0	0,77	5743,0	191,0	1220,0	780,0	692,0	Firm17	0,9768	
8	Firm8	239,0	212,0	297,0	265,0	40,0	1,00	239,0	212,0	297,0	265,0	40,0	Firm10	0,9604	
9	Firm9	1656,0	799,0	1748,0	1473,0	598,0	1,00	1656,0	799,0	1748,0	1473,0	598,0	Firm2	0,8675	
10	Firm10	148,9	117,2	178,1	157,0	32,0	0,96	155,0	122,0	297,0	157,0	20,0	Firm12	0,7796	
11	Firm11	283,9	76,9	130,1	175,0	84,4	0,64	443,0	120,0	203,0	175,0	52,0	Firm7	0,7740	
12	Firm12	111,5	51,9	113,8	97,1	40,0	0,78	143,0	96,0	146,0	97,0	40,0	Firm11	0,6409	
13	Firm13	270,0	179,0	171,0	244,0	59,0	1,00	270,0	179,0	171,0	244,0	59,0	Firm19	0,5919	
14	Firm14	139,6	21,0	49,0	72,0	43,3	0,50	279,0	42,0	98,0	72,0	29,0	Firm6	0,5515	
15	Firm15	4718,0	372,0	339,0	999,0	633,0	1,00	4718,0	372,0	339,0	999,0	633,0	Firm20	0,5215	
16	Firm16	818,3	53,2	166,2	349,5	249,0	0,52	1609,0	103,0	354,0	348,0	249,0	Firm16	0,5165	
17	Firm17	6199,7	453,2	783,4	1867,5	1270,0	0,98	6347,0	504,0	802,0	1860,0	1270,0	Firm4	0,5107	
18	Firm18	3615,0	235,0	734,0	1544,0	1100,0	1,00	3615,0	235,0	734,0	1544,0	1100,0	Firm5	0,5010	
19	Firm19	1240,1	108,9	309,6	561,0	381,2	0,59	2095,0	184,0	884,0	561,0	325,0	Firm14	0,5005	
20	Firm20	1147,2	74,6	232,9	490,0	349,1	0,52	2205,0	143,0	466,0	490,0	313,0	Firm3	0,4857	

## 8.12. Задача вибору оптимальних розмірів конструкції

В окремий клас під назвою геометричне програмування в математичному програмуванні виділені нелінійні моделі оптимізації, мета яких полягає у визначенні оптимальних геометричних розмірів певних конструкцій за критерієм, скажімо, максимізації їх об'єму чи мінімізації витрат матеріалів на виготовлення.

<sup>63</sup> Joe Zhu. Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking. Data Envelopment Analysis with Spreadsheets. Springer, 2009. 267 p.

## Постановка задачі

Підприємство розробляє тару для нового продукту у вигляді банки циліндричної форми радіусом  $r$  і висотою  $h$  заданого об'єму, яку виготовляють з металевого листа штамповкою і зварюванням швів. Ці банки потім вкладають у картонну коробку заданих габаритів. Треба знайти такі оптимальні значення  $r$  і  $h$ , щоб мінімізувати витрати на матеріал та зварювальні шви і щільно упакувати банки у коробку.

## Задача оптимізації

I. Знайти значення  $r$  і  $h$ , такі, щоб

II. загальна вартість (ЦФ)  $C = C_{\text{п}} + C_{\text{ш}} \rightarrow \min$ , де:

▪ вартість витрат на матеріали  $C_{\text{п}}$  визначається площею поверхні банки, яка складається з поверхонь стінки, кришки та дна, помноженої на ціну матеріалу  $C_{\text{м}}$ :

▪  $C_{\text{п}} = C_{\text{м}}(2\pi rh + 2\pi r^2)$

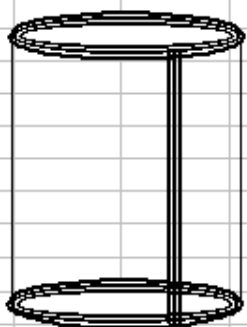
▪ вартість шва:  $C_{\text{ш}} = C_{\text{ш}}(4\pi r^2 + h)$

III. за обмежень – об'єм банки  $V \leq V_{\text{зад}}$ . (в прикладі 200)

та граничних умов: значення  $r, h > 0$ .

## Таблична модель 1 (без коробки):

Оптимальний розмір конструкції (в см)		Ціна		
Банка	Обмеж	матеріала (см <sup>2</sup> )	шва (см)	Число пі
Висота (h)	7,56	2	3	3,142
Радіус (r)	2,90			
Площа стінки (Sc)	137,8			
Площа кришки та дна (2Sd)	52,9			
Площа поверхні (Sp)	190,8			
Вартість поверхні (Cп)	381,5	Мн. Лагранжа		
Об'єм (V)	200,0	200	1,49	
Довжина шва (L)	44,0			
Вартість шва (Cш)	132,1			
Загальна вартість (Cш+Cп)	513,6			



## Аналіз результату

Пряма задача:  $r = 2,9$ ;  $h = 7,56$ ;  $C = 513,6$ .

Двоїста задача: множник Лагранжа (1,29) вказує, з якою швидкістю буде збільшуватися вартість банки при збільшенні заданого об'єму на 1.

## Таблична модель 2 (з коробкою)

Задані габарити коробки, у які будуть пакувати банки. Обмеженням є висота банки (9 см). Одночасно визначають, скільки банок розміщується в коробці.

Оптимальний розмір конструкції (в см)		Ціна	
Банка	Обмеж	матеріала (см <sup>2</sup> )	
Висота (h)	9,00		2
Радіус (r)	2,66		
Площа стінки (Sc)	150,4		
Площа кришки та дна (2Sd)	44,4		
Площа поверхні (Sp)	194,8		
Вартість поверхні (Cp)	389,7	Мн. Лагранжа	
Об'єм (V)	200,0	200	1,45
Довжина шва (L)	42,4		
Вартість шва (Cш)	127,3		
Загальна вартість (Cш+Cп)	516,9		
Коробка			Норм-градієнт
Висота	9		4,26
Ширина	20		
Довжина	30		
Кількість банок по ширині	3,76		
Кількість банок по довжині	5,64		

### Аналіз результату

Пряма задача:  $r = 2,66$ ;  $h = 9$ ;  $C = 516,9$ .

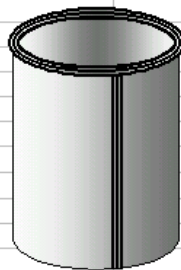
Двоїста задача: множник Лагранжа (1,45) вказує, що вартість банки тепер буде швидше збільшуватися при збільшенні заданого об'єму на 1. Нормований градієнт оцінює обмеження на висоту (4,26), вказуючи на відповідне збільшення значення ЦФ при збільшенні цього показника на 1.

Зауваження: в процесі додавання обмежень може з'явитися повідомлення програми Поиск решения про неможливість знайти оптимум. Це станеться, коли праві значення обмежень слабо обґрунтовані, взяті “зі стелі”, відповідна ОДР складається з відокремлених частин, де нема ні одної спільної точки.

Вихід – збільшити діапазон можливих значень для шуканих невідомих шляхом збільшення розмірів цих частин і «склеювання» їх в єдину ОДР, щоб мати набір допустимих точок, які задовольняють усім обмеженням.

**Умова** Для щільного розміщення банок у коробці додаємо обмеження на тип «цілий» значень кількостей банок по ширині та довжині коробки. Це обмеження стало несумісним з обмеженням на висоту банки (9 см), яке зняте, відповідно, модель сама визначила висоту банки (10,2 см), 24 штуки яких щільно розміщуються у коробці (на всяк випадок для неї визначено невеликий “люфт” 19,5×29,5) за схемою 4×6:

Оптимальний розмір конструкції (в см)		Ціна	
Банка	Обмеж	матеріала (см <sup>2</sup> )	шва (см)
Висота (h)	10,2	2	3
Радіус (r)	2,5	Число пі	3,142
Площа стінки (Sc)	160,0		
Площа кришки та дна (2Sd)	39,3		
Площа поверхні (Sp)	199,3		
Вартість поверхні (Cп)	398,5		
Об'єм (V)	200,0	200	
Довжина шва (L)	41,6		
Вартість шва (Cш)	124,8		
Загальна вартість (Cш+Cп)	523,3		
Коробка			
Висота (орієнт.)	9	довжина	
Ширина	20	20,0	19,5
Довжина	30	30,0	29,5
Кількість банок по ширині	4	цілий	
Кількість банок по довжині	6	тип	



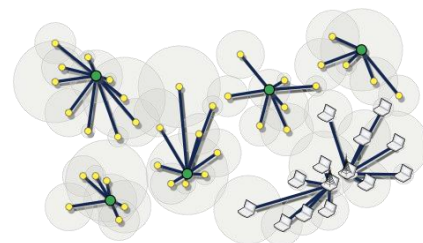
### Задачі місцезнаходження та розміщення центрів обслуговування

**Загальні відомості** Люди споконвіку приймають рішення про найкраще місцезнаходження (ДЕ) і наступного розміщення чогось (ЩО) важливого для них (де жити, купува-

ти, працювати, вчитися, лікуватися або відпочивати), щоб зі знайденого місця як із центру був зручним доступ до відповідного «оточення».

Наприклад, ще первісні люди займалися пошуком зручної та безпечної печери для розміщення у ній свого сімейства, інвентаря і запасів продуктів, оточенням служили джерела води, місця полювання, випас худоби або місця для землеробства та сусіди, відносини з якими можуть бути дружніми (до них треба бути ближчими) або ворожими (від них треба було триматися якподалі). Саме з вирішення такої задачі розпочалися пригоди Робінзона Крузо, так починалося освоєння нових територій, так розвивається світ.

Тож будь-яку задачу про визначення найкращого місцезнаходження і подальшого розміщення там одного або декількох центрів умовно і коротко називають *задачею про оптимальне розміщення* (facility location problem), яка є надзвичайно розповсюдженою: Google на запит «location problem» повертає майже 700 млн. відгуків!



Щодо до того, *що* розміщується в шуканому центрі, в зарубіжній літературі використовується універсальний термін *facility*, це усе те, що у зручній формі надає будь-які послуги, приміром, це: транспортні вузли, підприємства, склади, магазини, школи, лікарні, СТО та заправки, пости ДАІ, зупинки міського транспорту, електронні та комп'ютерні комунікатори, концентратори і термінали, засоби автоматичного контролю за рухом пасажирів чи транспорту; у шуканому місці передбачається розміщення адміністративного центру, пункту збору нафти або газу від свердловин, екстрених служб (пожежного депо, поліцейського посту, клініки швидкої допомоги, стоянки таксі), засобів життєзабезпечення (енергетичного агрегату, телефонної станції, теплоцентралі, насосної станції водопроводу або ТВ-антени колективного користування) та забезпечення безпеки (командний пункт військової бази, засоби спостереження, місця зосередження техніки і армійських підрозділів). Спираючись на ключове слово «послуги» чи сервіс, все частіше використовують термін «сервер», який розміщується для обслуговування оточення – «клієнтів».

Рішення – *де* місце найкращого розміщення «сервера» для обслуговування «клієнтів» приймаються на всіх рівнях людської діяльності, починаючи від окремих осіб та їх сімей до фірм, корпорацій, урядових установ та міжнародних організацій. Часто такі рішення є стратегічними за своєю природою і наслідками, бо вони базуються на тривалому використанні великих обсягів природних ресурсів і тому їх соціально-економічні ефекти довгострокові. Ці рішення мають бути всебічно обґрунтованими й зваженими, оптимальними, бо ж іноді прийняті рішення засновуються виключно на досягненні економічного ефекту, при проектуванні не враховується негативний вплив на навколишнє середовище місцевого, регіонального, а іноді і планетарного характеру. Приклади: розміщення у густонаселених місцевостях крупних теплових й атомних електростанцій (ЧАЕС), складів для зберігання озброєнь (Новобогданівка), шкідливих хімічних речовин і відходів життєдіяльності міст тощо.

Отже, завжди і скрізь виникає ряд важливих задач прийняття рішень, де потрібно найкращим чином визначити місця розміщення одного чи кількох центрів для колективного обслуговування оточуючих їх «клієнтів». На результат щодо розміщення істотно впливає характер взаємодії «клієнт-сервер», який може бути різним. Наприклад, у випадку зручного розміщення корисного сервера - фабрики, магазину чи школи - клієнти «притягують» сервер, щоб бути до нього ближче. Зате при визначенні місця для розміщення шкідливого сервера - тваринницької ферми, військової частини, хімічного заводу, пункту збору та утилізації твердих або радіоактивних відходів, – клієнти «відштовхують» сервер, намагаючись бути подалі від нього.

Але ж ці «притягування» чи «відштовхування» досить умовні, бо ж розташування того ж хімічного заводу чи вокзалу має свої плюси і мінуси й раціональна взаємодія «клієнт-сервер» будується за умови: «не ближче, ніж» або «не далі, ніж». Ясно, що існує незліченна кількість

допустимих місць для розміщення сервера, значить, вимагається розмістити сервер найкращим способом з урахуванням обмежень на його місцезнаходження.

Це надзвичайно широкий клас типових задач оптимізації з різними вихідними даними, критеріями оптимізації (максимум, мінімум, максмін, мінмакс) і обмеженнями на шукані невідомі.

**Історія** Для розв'язання важливих практичних завдань про розміщення сформувався самостійний «локалізаційний» науковий напрям (Location Theory, Location Analysis, Location Science) у складі оптимізаційного моделювання, де вивчаються різні постановки задач, розробляються їх математичні моделі, обчислювальні методи та алгоритми.

Початок цьому напрямку покладено в XVII столітті П. де Ферма (1601-1665), французьким професійним юристом, поетом і знавцем стародавніх, в першу чергу, давньогрецької, й сучасних мов. Саме читаючи в оригіналі праці великих греків (Евкліда, Діофанта та ін.), він захопився математикою, в чому і проявився його геній – Ферма світові відомий саме як великий математик, бо є засновником алгебраїчної теорії чисел, «декартової» аналітичної геометрії (раніше і незалежно від Декарта), теорії ймовірностей (разом з Паскалем) і принципів математичного аналізу, розвинених пізніше Ньютоном і Лейбніцем.

У Європі XVII століття стало початком «нового часу», коли в окремих розвинених країнах зміцнюється новий суспільний лад - капіталізм, супроводжений технічною та науковою революцією. Саме тому нові наукові відкриття цього періоду, зроблені в першу чергу, у фізиці та математиці, диктувалися практичними міркуваннями. Зокрема, створення перших мануфактур неявно висувало проблему їх раціонального розміщення з позицій скорочення транспортних витрат щодо джерел енергії, робочої сили, сировини і ринків збуту.

Тож як часто було в історії науки, Ферма «випадково» придумав просту, як здавалося, геометричну задачу про знаходження центру трикутника, сума відстаней з якого до вершин мінімальна. Своїми міркуваннями про розв'язання цієї задачі він поділився у листуванні з відомим італійським фізиком і математиком Е. Торрічеллі (1608-1647), знаменитим винахідником барометра, отримавши серйозну підтримку, тепер це – «точка Ферма». Швейцарський геометр Я. Штейнер (1796-1863) вніс свій внесок в цей напрям у вигляді «точок Штейнера» і «дерева Штейнера». Математична теорія про розміщення у своєму розвитку збагачується доданками з різних областей знань і практики, зокрема, німецький економіст і соціолог А. Вебер (1868-1958) застосовує цей суто математичний апарат для раціонального розміщення різних за своєю природою (у Ферма вони однорідні) економічних об'єктів (підприємств, ринків збуту, джерел сировини і трудових ресурсів), тепер це узагальнена «задача Ферма-Вебера» про розміщення об'єктів будь-якої природи.

Природно, що ця проблематика найбільш популярна у галузі математичної економіки та економічної географії, в транспортній логістиці та регіональній економіці, в організаційному управлінні та операційному маркетингу, а також в різних технічних областях, де мова йде про раціональне розміщення обладнання, елементів конструкцій, електронних схем і прокладці відповідних комунікацій.

Нарешті, ця сама по собі непроста нелінійна задача оптимального розміщення (location problem) стала складовою логістичних та організаційних задач, де узагальнена цільова функція з комплексом різноманітних обмежень на шукані невідомі в різних комбінаціях об'єднується із задачами виробництва, призначення та транспортування: location-allocation problem, transportation-location problem або transportation-location-allocation problem.

В умовах глобалізації економічних відношень актуальною є, зокрема, проблематика сегментування (кластеризація) регіональних ринків будь-якого рівня й визначення раціональних каналів для розповсюдження продуктів та послуг. В межах цієї проблематики конкретною задачею є пошук місць розташування одного чи кількох центрів обслуговування клієнтів за певними критеріями з урахуванням відповідних впливаючих факторів: відстань від певного центру до клієнта, потужність центру, ресурсні витрати на створення й супроводження комунікацій, рівень обслуговування у центрі тощо.

З позиції теорії обчислень на графах вони відносяться до класу NP-hard задач, тому для розв'язання практичних задач застосовують наближені методи і алгоритми нелінійного програмування, реалізовані у певних програмних продуктах, зокрема, в надбудові Excel Solver (Поиск решения).

Класифікація задач про розташування та їх математичних моделей:

- початкові дані детерміновані/ймовірнісні;
- потенційні місця задані/не задані;
- відшукується центр один/декілька;
- відстані задані/обчислюються;
- розміри пунктів-клієнтів задані/не задані тощо.

В залежності від постановки задачі про центр відповідна математична модель може бути лінійною чи нелінійною, знайдений оптимум буде глобальним чи локальним, комп'ютерна реалізація моделі буде простою і швидкою чи надзвичайно складною й тривалою (суттєво для нелінійних задач), результат буде точним чи наближеним.

### 8.13. Задача про оптимальний центр (метод тяжіння)

В межах інформаційної технології «клієнт-сервер» конкретною задачею є пошук місць розташування серверів (центрів обслуговування розподілених у просторі клієнтів) за певними критеріями з урахуванням відповідних впливаючих факторів, це: відстань від сервера до клієнта, потужність сервера, ресурсні витрати на створення й супроводження комунікацій, рівень обслуговування у сервері тощо.

#### Постановка задачі

$n$  клієнтів (населених пунктів, регіонів, підприємств, сукупностей певних осіб зі специфічними потребами) розміщені на певній території й мають характерні кількісні виміри: координати на площині та потужність (кількість мешканців, площа, попит тощо). Для постійного обслуговування усіх клієнтів чи їх угруповань утворюється «центр» або сервер (відділення банку чи пошти, школа, лікарня, магазин, пожежна частина, поліцейський відділок тощо), найкраще (оптимальне) місце розташування якого треба знайти за відповідним критерієм.

Типовий критерій оптимізації – **мінсум** (мінімізація суми відстаней від сервера до усіх клієнтів).

Задача виникає при спорудженні ліній комунікації, коли треба мінімізувати загальну суму витрат (чи часу) на прокладку доріг, трубопроводів чи кабельного зв'язку й утворення мережі типу «зірка».

Найбільш уживаним є **метод тяжіння** (gravity model), це найпростіша оптимізаційна модель та її комп'ютерна реалізація в Excel.

За цим методом для обслуговування  $n$  клієнтів із заданими координатами  $(x_i, y_i)$  на площині й ваговими коефіцієнтами  $m_i$  (кількість населення чи осіб певної категорії: клієнти банку, школярі, хворі, отримувачі преси тощо),  $i = 1, \dots, n$ , «зважені» координати центру обчислюють за формулами:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (*)$$

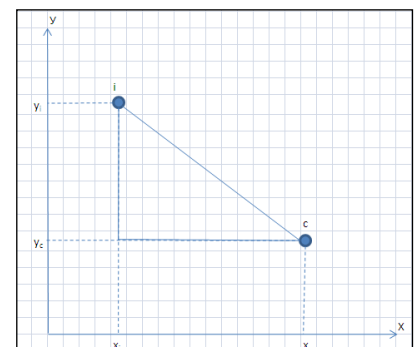
Якщо усі  $m_i = 1$ ,  $x_c = x_{\text{ср}}$ ,  $y_c = y_{\text{ср}}$ .

Для визначення координат клієнтів у форматі населених пунктів регіону (це вузли транспортної мережі) використовується електронна карта регіону, для якої формується прямокутна система координат: горизонтальну вісь  $X$  визначають номери стовпців, а вертикальну вісь  $Y$  – номери рядків.

Маючи координати пунктів (вимір – в клітинках електронної таблиці), знаходять координати центру  $(x_c, y_c)$  й обчислюють відстані між кожним  $i$ -им вузлом й центром за формулою:

- $d_i = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2}$ , це лінійна (евклідова) метрика, за теоремою Піфагора – довжина гіпотенузи трикутника або

- $d_i = |x_i - x_c| + |y_i - y_c|$ , це манхеттенська метрика, сума довжин двох катетів трикутника, використовується при розміщенні центру у місті.



Знаючи розміри карти й екрану монітора ПК (в см) та масштаб електронної карти (км/см), можна у цій системі координат наближено обчислити відстані між парами пунктів в км.

## Приклад 1

### Формування таблиці координат та відстаней

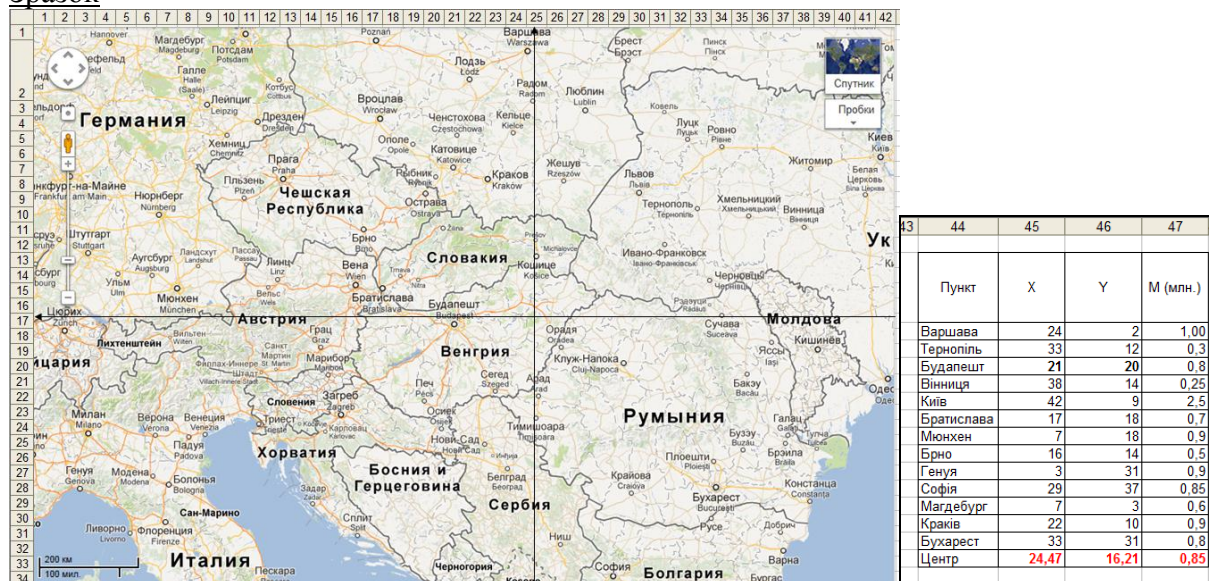
#### Порядок роботи

- 1) Створити й зберегти (у файлі чи у буфері обміну) рисунок карти регіону.
- 2) Завантажити MS Excel, рядки (вертикальна вісь Y) за стандартом вже мають числове позначення, тож треба задати лише числовий стиль (R1C1, Row-Column) позначення стовпців (це горизонтальна вісь X, що проходить зверху електронної таблиці) командою:

Excel 2003	Excel 2007/2010
Сервис → Параметры → Общие → Стиль ссылок R1C1	2007: Кнопка Office→Параметры Excel→Формулы → Работа с формулами→Стиль ссылок R1C1 2010: Файл → Параметры →Формулы → Стиль ссылок R1C1

- 3) Виділити 40-45 стовпців, а щоб клітинка мала квадратну форму (як зошит «в клітинку»), задати ширину стовпця 2 (символи), якщо використовується шрифт висотою 10 пунктів.
- 4) Вставити рисунок карти, починаючи з клітинки (1, 1), й відформатувати рисунок: обрізати зайве, пропорційно розтягнути карту у визначеній області таблиці.
- 5) Накреслити стрілки-покажчики: горизонтальну (направлену вліво) й вертикальну (направлену уверх), щоб їх пересуванням по карті точніше визначати координати вибраних пунктів.
- 6) Визначені координати внести в таблицю з 3-ох стовпців: Пункт, X, Y, яка надалі застосовується для розрахунку відстаней.
- 7) Додати стовпець зі значеннями вагових коефіцієнтів – кількістю населення у кожному пункті (М, млн.)
- 8) Обчислити координати центру ( $x_c$ ,  $y_c$ ) за формулою (\*) та значення середнього вагового коефіцієнту, функція СРЗНАЧ(m1:m13).

#### Зразок



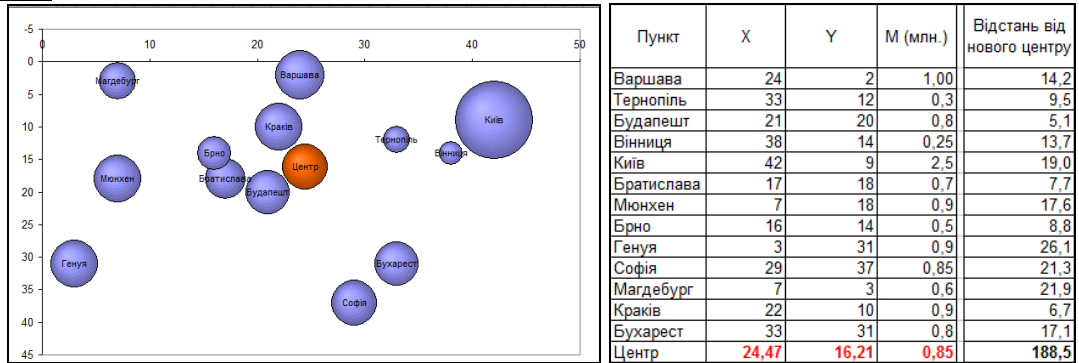
9) За трьома стовпцями (X, Y, M) таблиці побудувати й відформатувати діаграму Пузырьковая.

10) Командою<sup>64</sup> XY Chart Labels → Add Chart Labels... додати й відформатувати (розмістивши по центру, шрифт 8) надписи бульбашок-пунктів. Оскільки вісь Y визначена зверху, на діаграмі вертикальну вісь треба зобразити у зворотному напрямку, «зверху-донизу», для цього: ПКМ виділити цю вісь, команда Формат осі → Шкала → обратный порядок значений

11) Центр виділити іншим кольором.

12) Обчислити відстані від центру до кожного пункту та їх суму: за визначеним розміщенням центру це мінімальна сума (за критерієм мінсум).

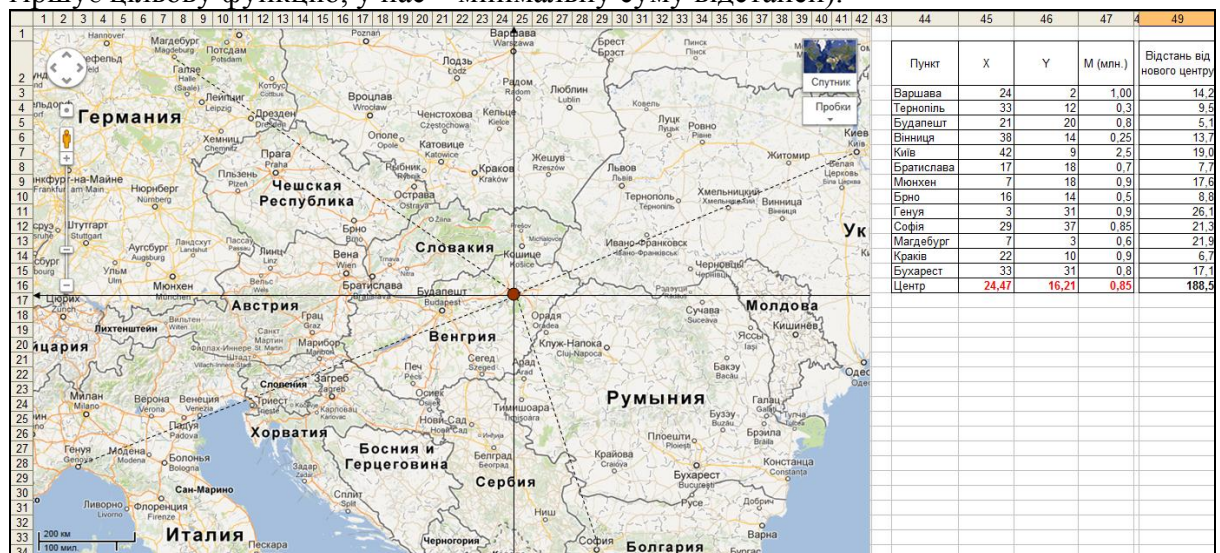
### Результат



### Аналіз отриманого результату

Знайдений оптимальний центр обслуговування мешканців 13 населених пунктів має координати (24,5; 16,2), мінімальна сума відстаней від центру до усіх пунктів склала величину 188,5 од. Найвіддаленішими стали Київ, Магдебург, Генова й Софія.

Якщо центр не будувати у визначеному розрахунками місці, а розмістити в одному із 13 зазначених міст, то ним буде Будапешт, що знаходиться найближче від нового центру на відстані в 5,1 од., відповідно, після обчислення відстаней від Будапешту як центру до усіх інших пунктів, їх сума складе величину 189,1 (адже будь-яке відхилення від оптимуму погіршує цільову функцію, у нас – мінімальну суму відстаней).

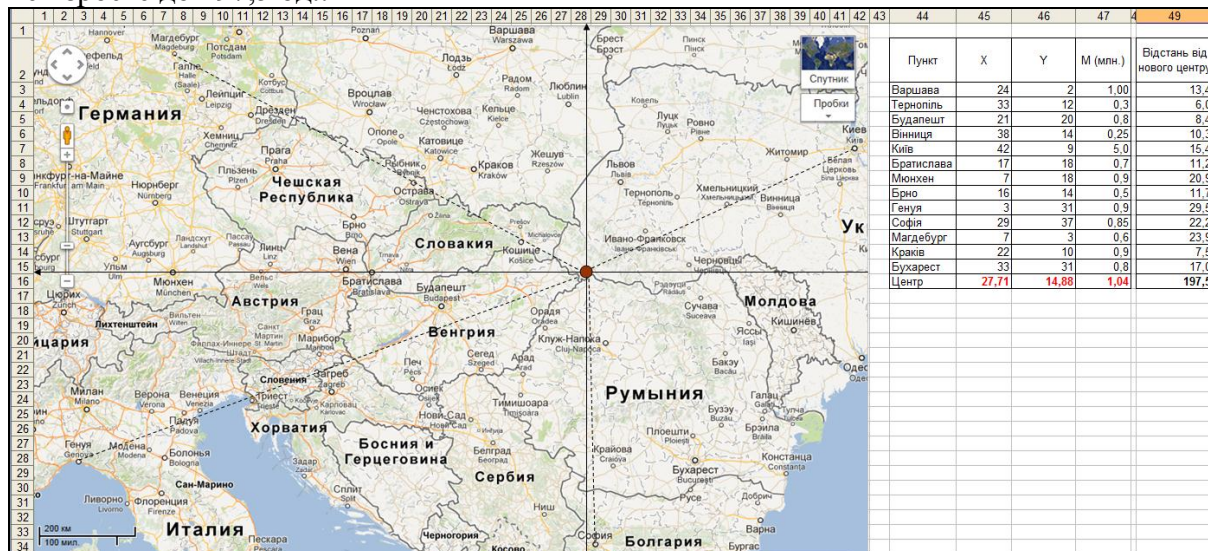


<sup>64</sup> щоб на діаграмах Точечная (XYChart) чи Пузырьковая показувати назви (мітки, labels) об'єктів (точок, бульбашок) за їх координатами, треба завчасно скачати спеціальну утиліту – програмну надбудову-«лейблер» XYChartLabeler (автор R. Bovey) за адресою <http://appspro.com>. В Excel 2003 це команда XY Chart Labels меню Сервіс, в Excel 2007/2010 – додатковий пункт меню з такою ж назвою

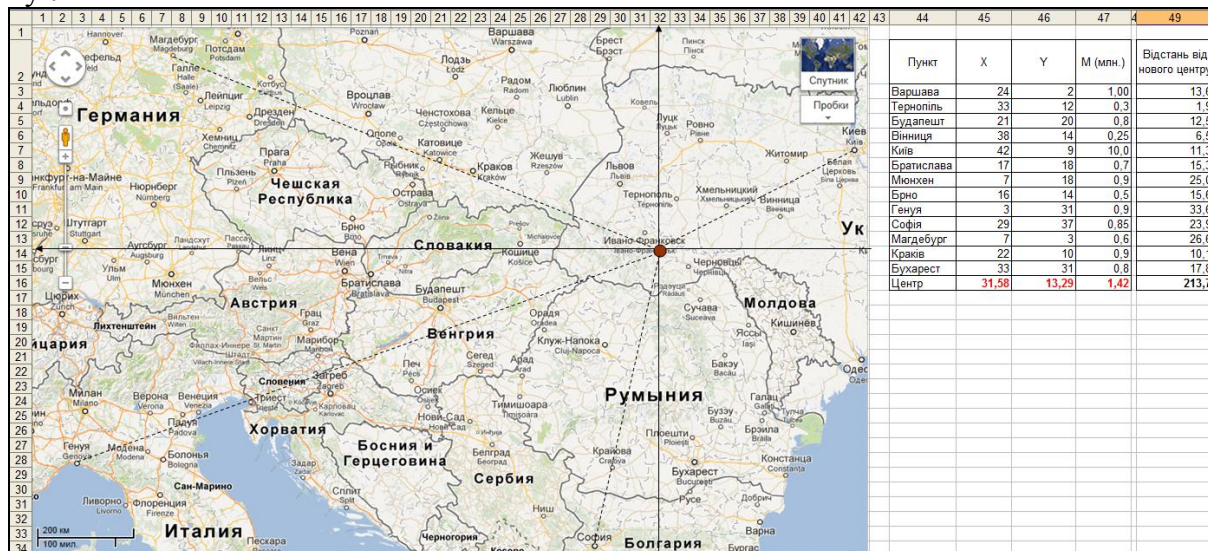


## Метод тяжіння: параметричний аналіз

Якщо якийсь пункт стане «важчим» збільшенням свого вагового коефіцієнта (наприклад, там розпочато крупне будівництво й кількість клієнтів різко зросло), тоді за формулою (\*) автоматично змінюються координати центру, бо центр тяжіє до «важчого» пункту, змінюючи свою позицію. Так, якщо у Києві буде жити 5 млн. мешканців, центр, тяжіючи до «важчого» Києва, переміститься у позицію (27,7; 14,9) й опиниться на кордоні України, тоді серед 13 зазначених міст найближче місто-претендент Тернопіль (6 од.), сума відстаней зростає до 197,5 од.:



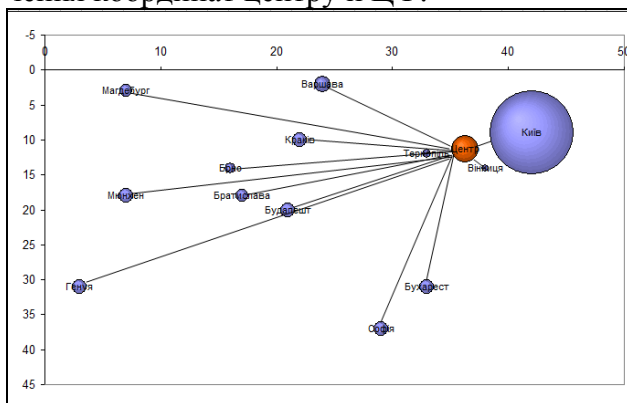
Якщо ж у Києві буде жити 10 млн. мешканців, центр, тяжіючи до ще «важчого» Києва, переміститься у позицію (31,6; 13,3) й опиниться на території України, серед 13 зазначених міст Тернопіль стане ще ближчим до нового центру (1,9 од.) сума відстаней зростає до 213,7 од., бо зростуть відстані до Тернополя від «периферійних» Магдебурга, Софії та Генуї.



Виникає запитання: як залежить ЦФ (суми відстаней) від значення параметру – вагового коефіцієнту певного пункту.

Задачу про оптимальний центр можна уявити фізичною моделлю, де пункти й центр представлені кілочками й кілочок центру зв'язаний гумовими нитками з кілочками пунктів, ці нитки натягаються все сильніше, утримуючи центр у його русі в якійсь бік, чим він дальший, тим сили натягу сильніші. Тож, здається, що ця залежність є нелінійною.

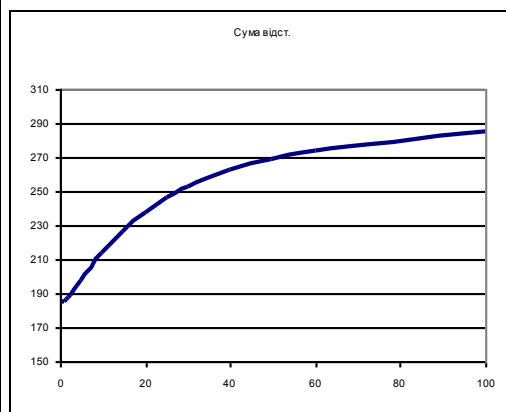
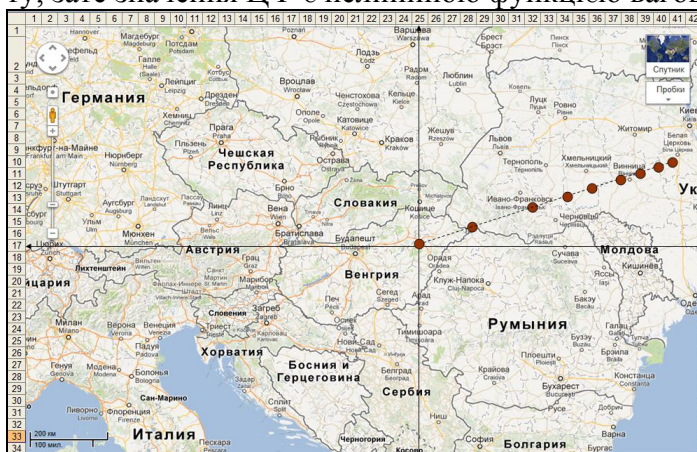
Відповідь на запитання можна отримати на основі параметричного аналізу табличної функції, де аргументом є значення параметру, що змінюються, а функціями – відповідні значення координат центру й ЦФ.



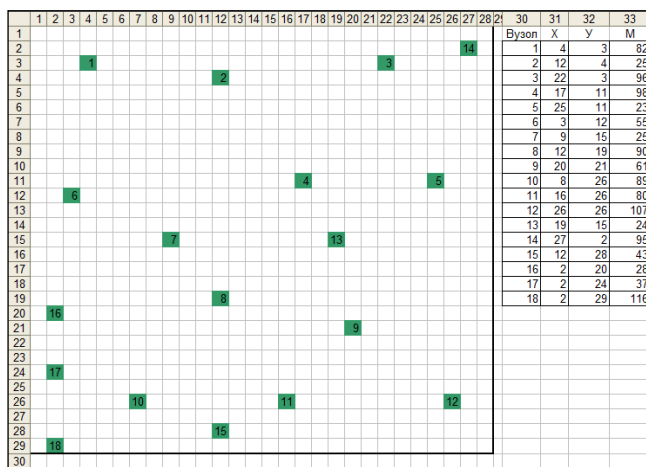
M (Київ)	X	Y	Сума відст.
0,5	20,60	17,80	185,3
1	21,70	17,40	185,2
1,5	22,70	17,00	185,9
2	23,60	16,60	187,1
2,5	24,47	16,21	188,5
5	27,71	14,88	197,5
10	31,58	13,29	213,7
15	33,79	12,38	226,5
20	35,23	11,78	237,7
25	36,24	11,37	246,2
30	36,99	11,06	252,9
40	38,02	10,64	262,5
50	38,70	10,36	269,2
60	39,18	10,16	274,0
100	40,22	9,73	284,5

### Результат

Координати послідовного руху центру зі збільшенням «ваги» Києва розміщуються вздовж уявної прямої лінії, визначаючи цим лінійну залежність координат від вагового коефіцієнту, зате значення ЦФ є нелінійною функцією вагового коефіцієнта.



### Задача 8.14. Про оптимальний центр (метод тяжіння, манхеттенська<sup>65</sup> метрика)



На площині задано координати й вагові коефіцієнти 18 об'єктів, це може бути: будинки на карті вулиць чи мікросхеми на платі електронного пристрою, система шляхів чи трубопроводного транспорту тощо, зв'язки між об'єктами утворюють лише по горизонталі чи вертикалі, відстані між ними обчислюють за прямокутною (манхеттенською) метрикою.

Треба знайти позицію центру методом тяжіння, щоб сума відстаней між центром й об'єктами була мінімальною.

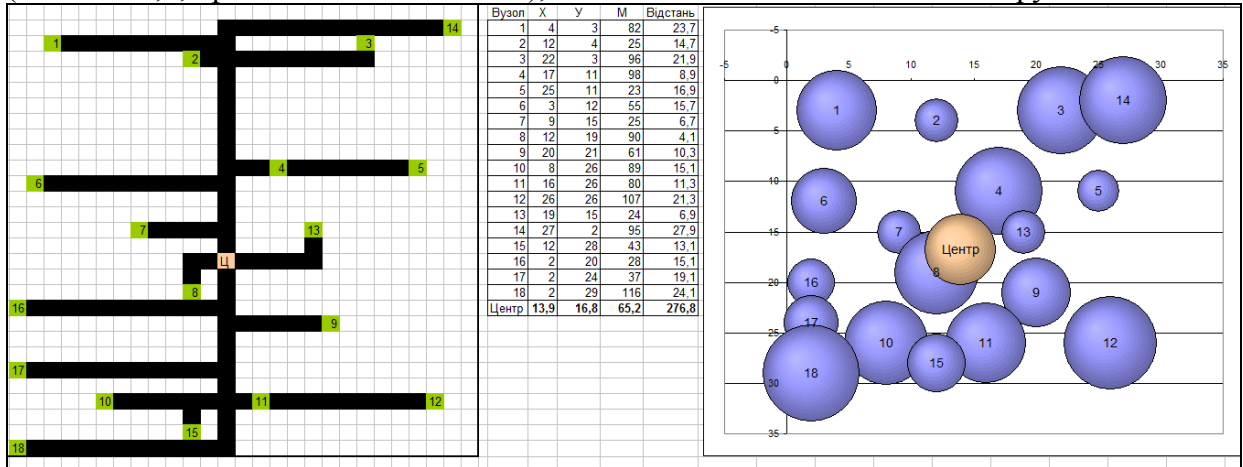
Для обчислень використовується функція

<sup>65</sup> Острів Манхеттен у Нью-Йорку забудовано квадратно-гніздовим способом: вздовж тягнуться довгі й широкі авеню, їх 12, поперек острів перетинають порівняно вузькі стріти по 2 полоси, їх 110. Ця вулична система схожа із прямокутною системою координат, звідси й назва метрики – способу вимірювання відстаней між будівлями по довжині фрагментів вулиць, ця метрика набула популярності при розводці друкованих провідників на платах електронних пристроїв

Excel  $\text{abs}(x)$  (абсолютна величина чи модуль числа).

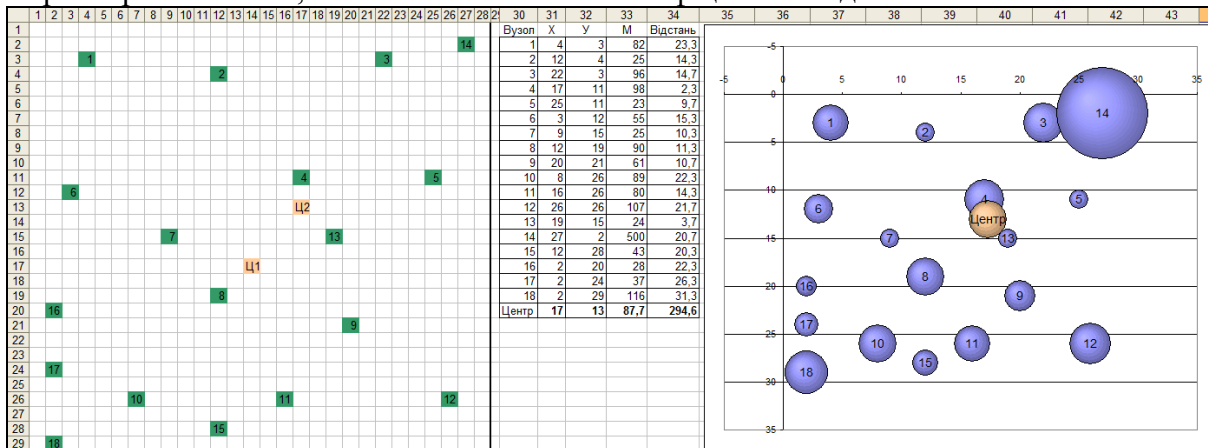
### Результат

Знайдено координати центру (13,9; 16,8), мінімальна сума відстаней від нього до усіх вузлів склала величину 276,8. Якщо розмістити центр у найближчій позиції, то буде вузол 8 (відстань 4,1, приблизно 2+2 клітинки), показано можливі шляхи від центру до об'єктів:

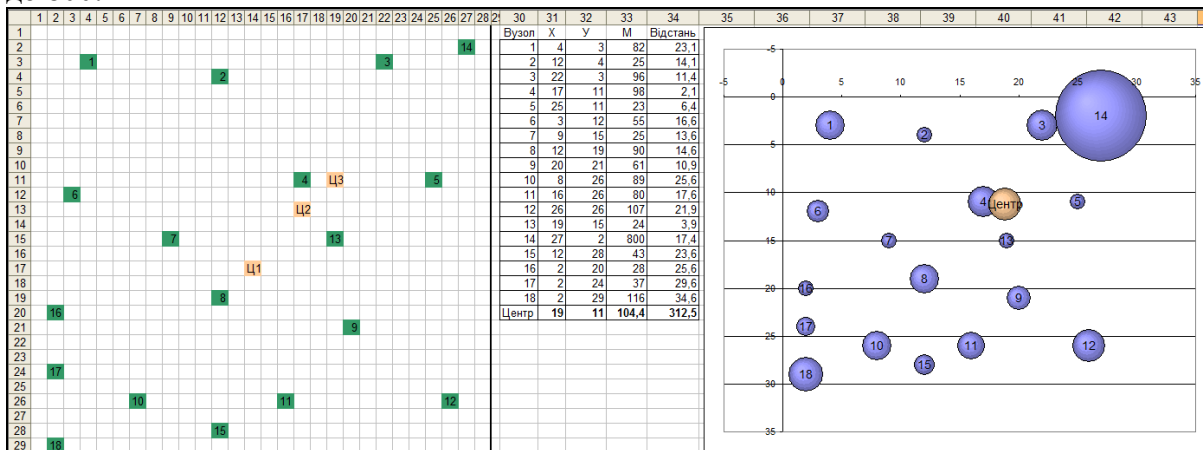


### Параметричний аналіз

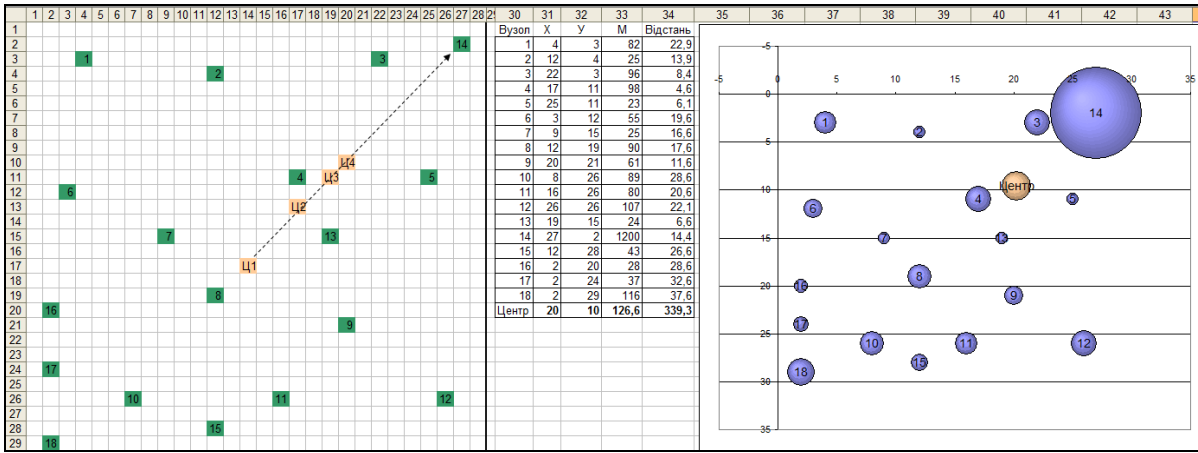
Параметр – об'єкт 14, збільшив свій ваговий коефіцієнт з 95 до 500:



до 800:



до 1200:



до 2000:

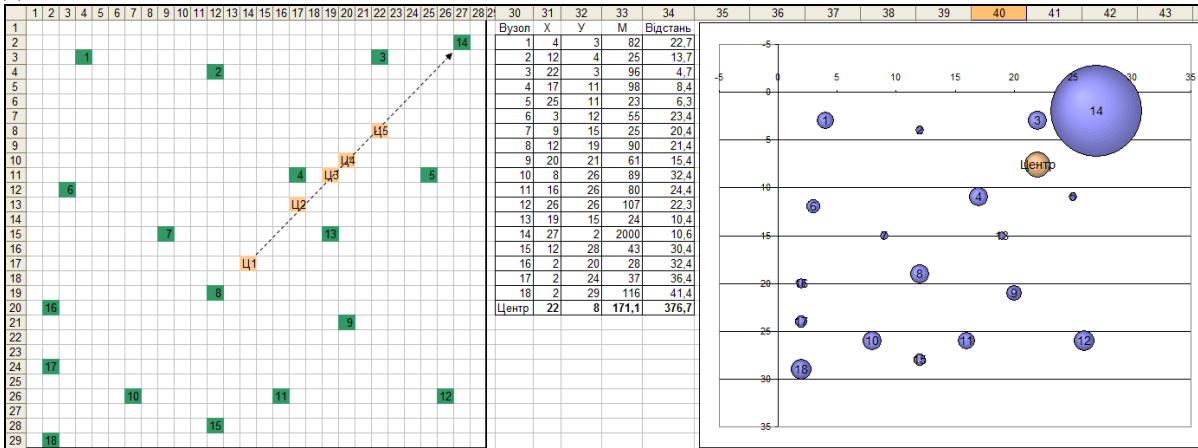
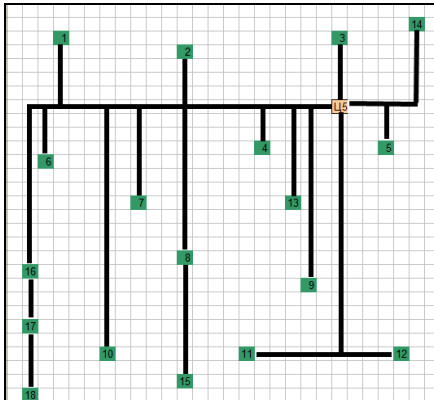


Схема зв'язків:



### Задача 8.15. Про оптимальний центр (градієнтний метод)

#### Задача на мінус

У порівнянні із методом тяжіння ця задача більш точно й, головне, з можливістю додавання обмежень на шукані невідомі, розв'язується як задача нелінійного програмування ( $m_i = 1$ ).

#### Задача оптимізації

I. Знайти координати центру  $(x_c, y_c)$  такі, щоб

$$\text{II. ЦФ } S = \sum_{i=1}^{20} \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2} \rightarrow \min$$

за граничних умов:  $x_c, y_c \geq 0$ .

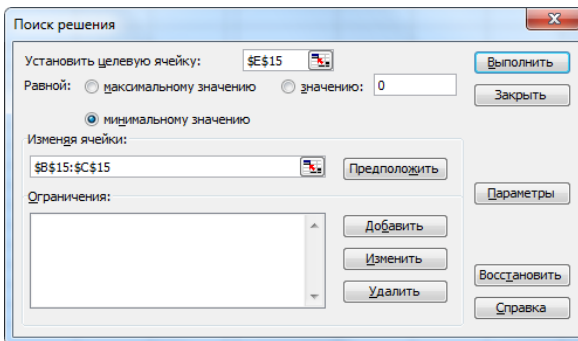
## Порядок роботи

Пункти 1) – 3) повторити

4. Додати знизу рядок «Центр» і визначити клітинки для майбутніх значень його координат
5. Обчислити відстані від знайденого центру до кожного пункту і загальну суму відстаней (будуть знайдені відстані від нульової точки)
6. Запуск програми Поиск решения, заповнити поля і знайти розв'язок задачі оптимізації.

## Результат

	A	B	C	D	E
1	Пункт	X	Y	Відстань від центру	
2	Варшава	24	2		14,6
3	Тернопіль	33	12		12,9
4	Будапешт	21	20		3,7
5	Вінниця	38	14		17,3
6	Київ	42	9		22,3
7	Братислава	17	18		4,2
8	Мюнхен	7	18		14,0
9	Брно	16	14		5,4
10	Генуя	3	31		23,2
11	Софія	29	37		22,3
12	Магдебург	7	3		19,2
13	Краків	22	10		6,4
14	Бухарест	33	31		19,1
15	Центр	20,87	16,28		184,49



Для порівняння: середні значення  $x_{\text{ср}} = 22,46$ ;  $y_{\text{ср}} = 16,85$ ;  $S = 185,52$ .  
З 13 міст найближчий до центру Будапешт.

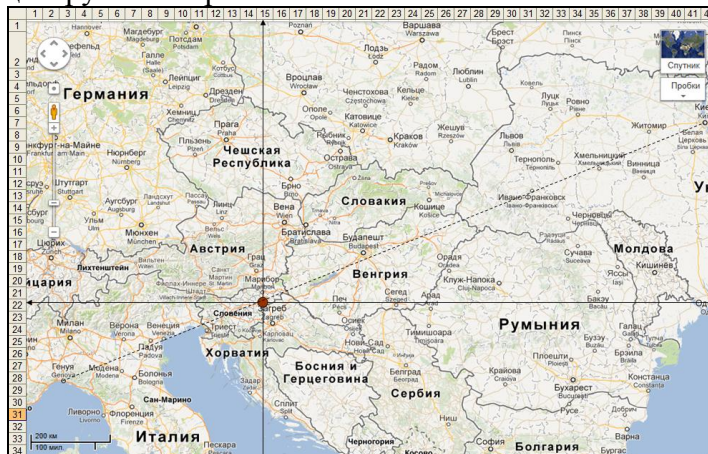
## Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов

**Умова 1.** Бажано наблизити Геную до нового центру на відстань не більше 15 од. Генуя ( $d_9 = 23,2$ ) та Київ ( $d_5 = 22,3$ ) – два міста, які наче перетягують канат, бо утворюють кінці лінії такої, що наближення до центру, скажімо, Генуї, автоматично віддаляє від центру Київ, для Генуї додається обмеження:  $\sqrt{(x_9 - x_c)^2 + (y_9 - y_c)^2} \leq 15$ .

## Результат

Найближчим з 13 міст до нового центру стала Братислава:

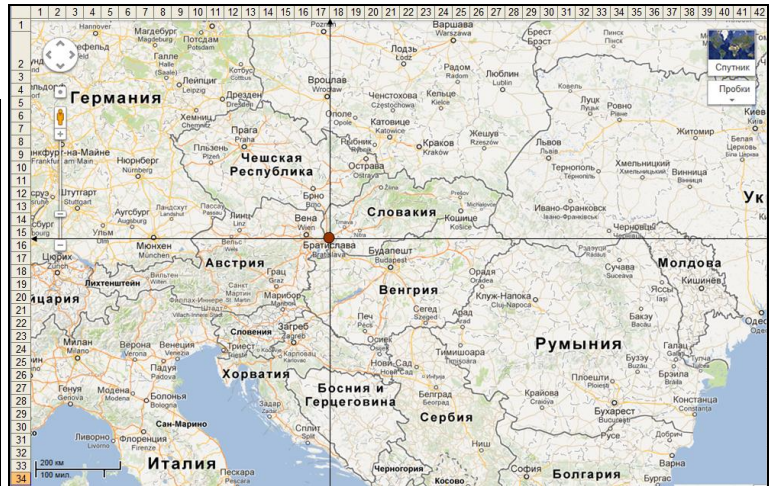
Пункт	X	Y	Відстань від центру
Варшава	24	2	21,5
Тернопіль	33	12	20,8
Будапешт	21	20	6,7
Вінниця	38	14	24,7
Київ	42	9	30,2
Братислава	17	18	4,2
Мюнхен	7	18	8,1
Брно	16	14	7,5
Генуя	3	31	15,0
Софія	29	37	21,4
Магдебург	7	3	19,7
Краків	22	10	13,6
Бухарест	33	31	21,0
Центр	14,43	21,29	214,31



**Умова 2.** Умову 1 знято, треба визначити суму відстаней від центру до усіх міст, якщо центр розмістити у Братиславі, вводиться два обмеження:  $x_c = x_6$ ,  $y_c = y_6$ .

## Результат

Пункт	X	Y	Відстань від центру
Варшава	24	2	14,8
Тернопіль	33	12	16,3
Будапешт	21	20	6,4
Вінниця	38	14	21,0
Київ	42	9	25,7
Братислава	17	15	0,0
Мюнхен	7	18	10,4
Брно	16	14	1,4
Генуя	3	31	21,3
Софія	29	37	25,1
Магдебург	7	3	15,6
Краків	22	10	7,1
Бухарест	33	31	22,6
Центр	17	15	187,67



### Задача на мінмакс

Нерівномірність відстаней від центру до населених пунктів висуває задачу оптимізації за критерієм *мінмакс* – це *мінімізація максимальної відстані*, результат: віддалені пункти будуть ближчими, а близькі – дещо віддаленими від центру.

Для цього треба визначити нову задачу нелінійної оптимізації.

### Задача оптимізації

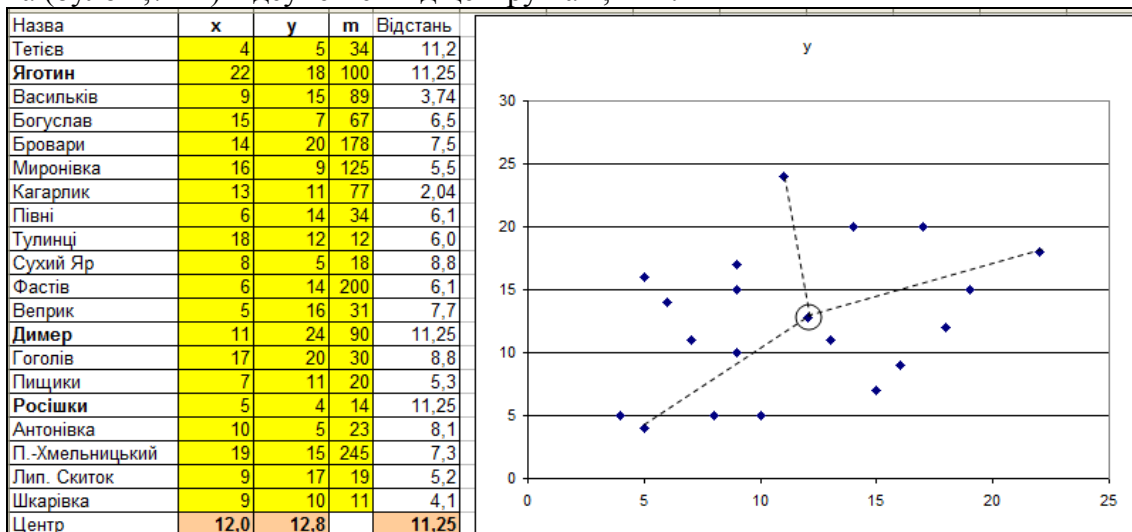
I. Знайти координати центру ( $x_c, y_c$ ) такі, щоб

$$\text{II. ЦФ } S = \max \left( \sqrt{(x_c - x_i)^2 + (y_c - y_i)^2} \right) \rightarrow \min$$

за граничних умов:  $x_c, y_c \geq 0$ .

### Результат:

Якщо центр розмістити за координатами (12; 12,8), тоді максимальна відстань до трьох найвіддаленіших пунктів (Яготин, Димер, Росішки) не перевищить 11,25 км, зате Шкарівка (було 2,7 км) відсунеться від центру на 4,1 км:



### Задача на максимін

Є такі центри, від яких хочеться бути якнайдалше: військові полігони, аеродроми, металургійні заводи, місця зберігання чи утилізації небезпечних хімічних речовин, рідких та твердих відходів, вибухівки тощо. Ця ситуація висуває задачу оптимального розміщення центру за критерієм *максимін* – максимізації мінімальної відстані від центру.

Для цього треба визначити нову задачу нелінійної оптимізації.

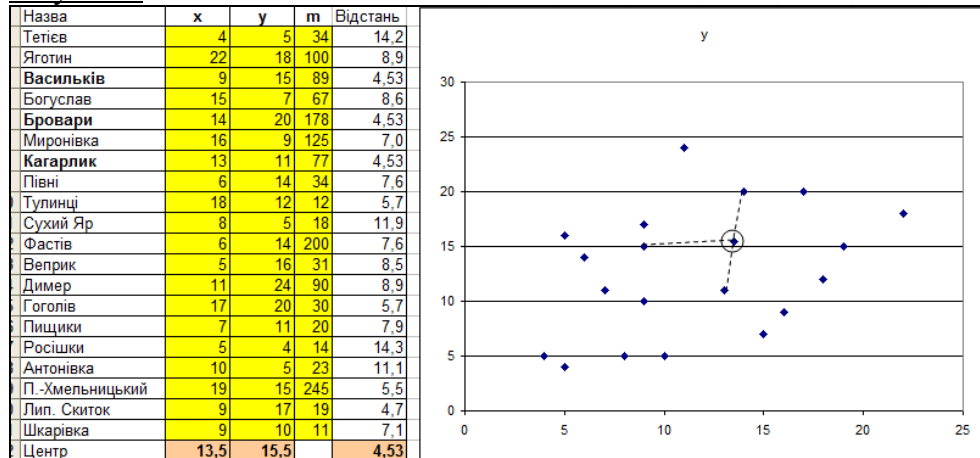
### Задача оптимізації

I. Знайти координати центру  $(x_c, y_c)$  такі, щоб

II. ЦФ  $S = \min\left(\sqrt{(x_c - x_i)^2 + (y_c - y_i)^2}\right) \rightarrow \max$

за граничних умов:  $x_c, y_c \geq 0$ .

Результат:



Якщо звалище відходів розмістити за координатами  $(13,5; 15,5)$ , тоді відстань до трьох найближчих населених пунктів (Васильків, Бровари, Кагарлик) буде не меншою за 4,53 км.

### Приклад 3

Задані адміністративні осередки (області України), що межують між собою й треба вибрати осередки, які б виконували функції регіональних центрів за умови, що зв'язки таких центрів здійснюються лише із безпосередніми сусідами. Це задача булевого програмування, де невідомі змінні приймають лише значення 0 чи 1. Моделюванням отримано оптимальний план розміщення 5 міжобласних центрів обслуговування 25 областей, це: Львів, Вінниця, Київ, Херсон та Харків.



### Приклад 4

Для обслуговування  $n$  клієнтів (у прикладі  $n = 15$ ) треба знайти місця оптимального розміщення кількох центрів за критерієм *мінсум* (p-centre problem). Це досить складна й важка задача нелінійного програмування з невідомими (0,1)-типу, існуючі програмні засоби дозволяють знайти у найкращому випадку хоча б локальний оптимум з-за нелінійного типу цільової функції з розривами. Ці засоби реалізують два характерних типи обчислювальних алгоритмів: порівняно точні, але складні градієнтного типу, за якими не завжди можна отримати розв'язок, й еволюційного програмування, які дозволяють отримати наближений оптимум шляхом досить тривалого направленої перебору варіантів за генетичним алгоритмом.

i	a	b
1	5	9
2	5	25
3	5	48
4	13	4
5	12	19
6	13	39
7	28	37
8	21	67
9	25	50
10	31	9
11	39	2
12	39	16
13	45	22
14	41	30
15	49	31
	19,4	47,0
	8,9	14,6
	40,0	17,5

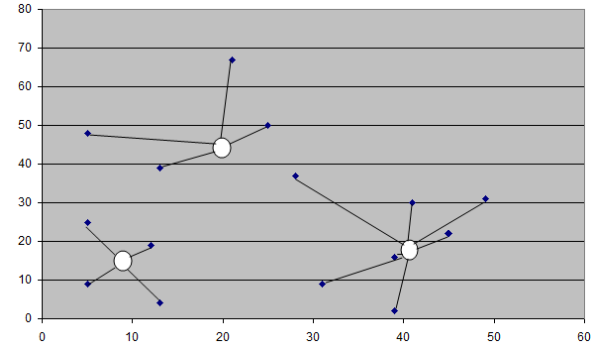
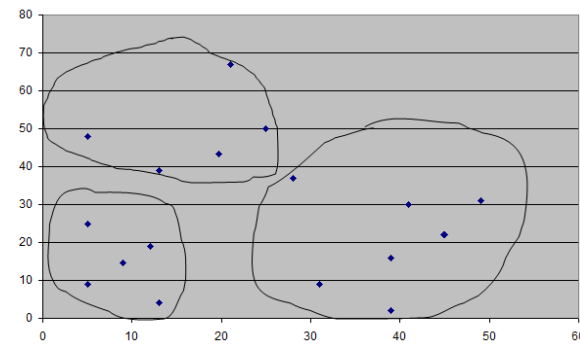
Нелінійний характер цієї задачі пов'язаний з нелінійною функцією обчислення відстані між двома точками  $a(x_a, y_a)$ ,  $b(x_b, y_b)$ :

$$d(a, b) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}.$$

Складнощі додаються умовою, щоб шукані невідомі приймали одне з двох значень, 0 чи 1, бо пункт-клієнт має обслуговуватися одним сервером.

Початкові дані і обчислювальна таблиця:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			
z1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0			
z2	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
z3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1			
сумма	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
a	5	5	5	13	12	13	28	21	25	31	39	39	45	41	49			
b	9	25	48	4	19	39	37	67	50	9	2	16	22	30	31			
s1	0	0	14	0	0	10	13	20	6,4	0	0	0	0	0	0	64,3		
s2	6,9	11	0	11	5,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	34,7	164,17	ЦФ
s3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	16	1,8	6,7	13	16	65,2		



Результат: визначено три сегменти сфери обслуговування і схему закріплення клієнтів за центрами за критерієм мінімум.

Цінність побудованих математичних моделей полягає у можливості врахування певних зовнішніх умов шляхом додавання відповідних обмежень на шукані невідомі. Відповідно, розроблено ряд модифікацій цих моделей, що слугують основою прийняття оптимальних управлінських рішень.

### Задача 8.16. Розподіл завдання між виконавцями

#### Постановка задачі

$n$  однорідних машин різного типу і продуктивності розміщено у виробничому цеху для виготовлення певного продукту. Проблема: функція експлуатаційних витрат кожної машини  $v = f(x)$  явно нелінійна, де:  $v$  – витрати (у грошовому вимірі),  $x$  – кількість продукції, тобто, виробничі витрати в залежності від об'єму продукції зростають не лінійно (пропорційно), а пришвидшено (чим більшим є завантаження, тим більше витрачається електроенергії, людської праці, зростають складнощі з організацією експлуатації обладнання). Зокрема, продукція ще не виготовляється, а машина вже діє й є витрати.

Аналітичний (формульний) вигляд цієї функції можна отримати шляхом наближення (апроксимації) табличної функції, отриманої вимірюванням в експерименті. Маючи цю функцію, розв'язують нелінійну задачу оптимального розподілу завдання.

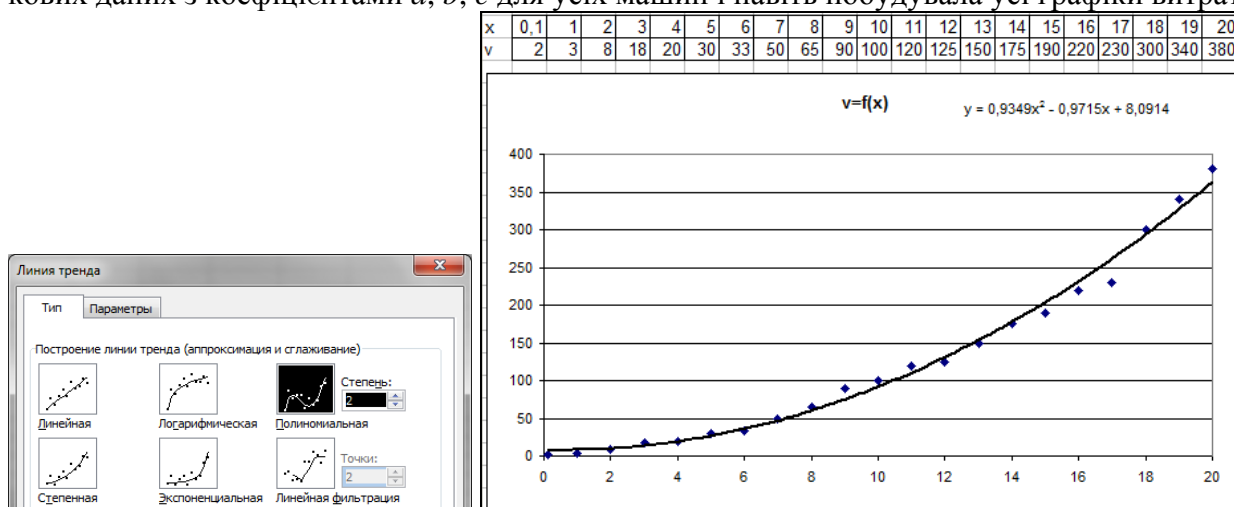


## Апроксимація табличної функції

Менеджер цеху Лариса на окремій машині провела експеримент, за яким послідовно задавала кількість виробленої продукції ( $x$ ) і фіксувала відповідні витрати ( $v$ ), отримані дані звела у таблицю, отримавши функцію  $v = f(x)$  у табличній формі. За табличними даними побудувала діаграму Точечная, на якій отримані точки нагадували параболу (квадратне рівняння або поліном 2-го степеня), тому вона й вибрала для наближення точок лінію тренду у вигляді поліному 2-го степеня. Його загальна форма рівняння:  $v(x) = ax^2 - bx + c$ , коефіцієнти  $a, b, c$  – результат розв’язання задачі наближення (апроксимації) точок за методом найменших квадратів.

Результат – рівняння (округлено):  $v(x) = 0,93x^2 - 0,97x + 8,1$ .

Повторивши такий експеримент для усіх  $n$  ( $n = 9$ ) машин, вона отримала таблицю початкових даних з коефіцієнтами  $a, b, c$  для усіх машин і навіть побудувала усі графіки витрат:



### Приклад.

Є замовлення на виготовлення  $Z$  одиниць продукту на 9 машинах цеху, функція витрат для кожної машини отримана. Треба визначити оптимальний план розподілу завдання  $Z$  між машинами з метою мінімізації загальних витрат.

### Задача оптимізації

I. Знайти вектор  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , де  $x_i$  – кількість продукту, виготовленого на  $i$ -ій машині,  $i = 1, \dots, 9$ , щоб

II. ЦФ  $V = v_1(x_1)x_1 + \dots + v_n(x_n)x_n \rightarrow \min$

III. за обмеження:  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = Z$  (виготовлено = замовлення)

та граничних умов: усі  $x_i \geq 0$ , додатково,  $x_i$  – цілого типу.

### Комп'ютерна реалізація математичної моделі

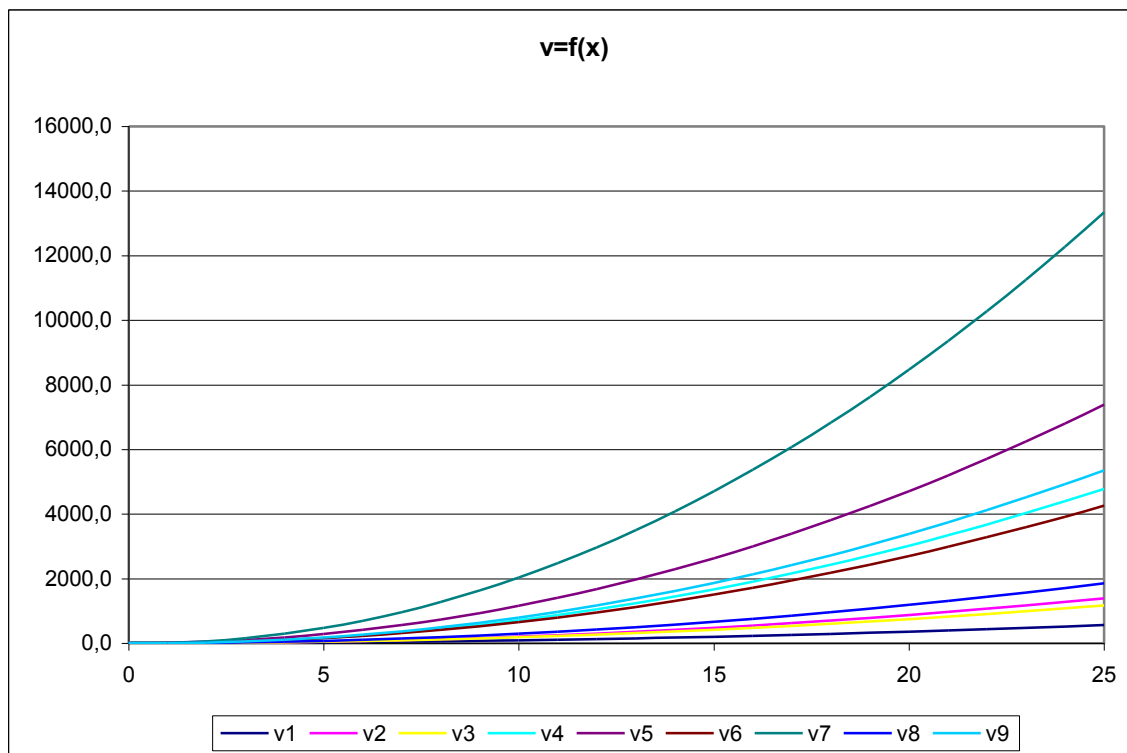
	м-1	м-2	м-3	м-4	м-5	м-6	м-7	м-8	м-9		
<b>a</b>	0,93	2,4	1,9	8	12	7	22	3	9		
<b>b</b>	-0,97	-4,8	-0,9	-9	-5	-5	-17	-0,7	-11		
<b>c</b>	8,1	12	5	4	11	6	9	2	8		
										90	Z
<b>x</b>	32,86	13,52	16,07	4,32	2,71	4,65	1,75	10,15	3,95	90	сума
<b>v</b>	980,6	385,9	481,3	114,6	85,9	134,2	46,8	303,8	105,2	2638,3	ЦФ

Аналіз отриманого результату

**Пряма задача**

Знайдено оптимальний план завантаження, за яким для виготовлення 90 од. продукту треба витратити 2638,3 гр. од.

	м-1	м-2	м-3	м-4	м-5	м-6	м-7	м-8	м-9
<b>a</b>	0,93	2,4	1,9	8	12	7	22	3	9
<b>b</b>	-0,97	-4,8	-0,9	-9	-5	-5	-17	-0,7	-11
<b>c</b>	8,1	12	5	4	11	6	9	2	8
x	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
0	8,1	12,0	5,0	4,0	11,0	6,0	9,0	2,0	8,0
1	8,1	9,6	6,0	3,0	18,0	8,0	14,0	4,3	6,0
2	9,9	12,0	10,8	18,0	49,0	24,0	63,0	12,6	22,0
3	13,6	19,2	19,4	49,0	104,0	54,0	156,0	26,9	56,0
4	19,1	31,2	31,8	96,0	183,0	98,0	293,0	47,2	108,0
5	26,5	48,0	48,0	159,0	286,0	156,0	474,0	73,5	178,0
6	35,8	69,6	68,0	238,0	413,0	228,0	699,0	105,8	266,0
7	46,9	96,0	91,8	333,0	564,0	314,0	968,0	144,1	372,0
8	59,9	127,2	119,4	444,0	739,0	414,0	1281,0	188,4	496,0
9	74,7	163,2	150,8	571,0	938,0	528,0	1638,0	238,7	638,0
10	91,4	204,0	186,0	714,0	1161,0	656,0	2039,0	295,0	798,0
11	110,0	249,6	225,0	873,0	1408,0	798,0	2484,0	357,3	976,0
12	130,4	300,0	267,8	1048,0	1679,0	954,0	2973,0	425,6	1172,0
13	152,7	355,2	314,4	1239,0	1974,0	1124,0	3506,0	499,9	1386,0
14	176,8	415,2	364,8	1446,0	2293,0	1308,0	4083,0	580,2	1618,0
15	202,8	480,0	419,0	1669,0	2636,0	1506,0	4704,0	666,5	1868,0
16	230,7	549,6	477,0	1908,0	3003,0	1718,0	5369,0	758,8	2136,0
17	260,4	624,0	538,8	2163,0	3394,0	1944,0	6078,0	857,1	2422,0
18	292,0	703,2	604,4	2434,0	3809,0	2184,0	6831,0	961,4	2726,0
19	325,4	787,2	673,8	2721,0	4248,0	2438,0	7628,0	1071,7	3048,0
20	360,7	876,0	747,0	3024,0	4711,0	2706,0	8469,0	1188,0	3388,0
21	397,9	969,6	824,0	3343,0	5198,0	2988,0	9354,0	1310,3	3746,0
22	436,9	1068,0	904,8	3678,0	5709,0	3284,0	10283,0	1438,6	4122,0
23	477,8	1171,2	989,4	4029,0	6244,0	3594,0	11256,0	1572,9	4516,0
24	520,5	1279,2	1077,8	4396,0	6803,0	3918,0	12273,0	1713,2	4928,0
25	565,1	1392,0	1170,0	4779,0	7386,0	4256,0	13334,0	1859,5	5358,0



Добре видно нерівномірний режим завантаження машин: 1-ша машина виготовляє приблизно 33 од., а 7-ма – лише 1,75.

**Двоїста задача**

Двоїста оцінка обмежуючого фактора – величини замовлення  $Z$  – в нелінійних задачах оптимізації є т. зв. множник Лагранжа, це аналог тіньової ціни в задачах лінійного програмування. Його смисл – швидкість зростання загальних витрат складає величину приблизно 60 гр. од. на кожен додаткову одиницю продукції і далі будуть зростати пришвидшено. Наприклад, при виготовленні 91 од. продукту витрати збільшаться на 60,5 гр. од.

Ограничения		Результ.	Лагранжа
Ячейка	Имя	значение	Множитель
\$K\$6	x	90	60,15472412
		90	2638,3
		91	2698,8
			60,5

**Модифікація моделі для врахування зовнішніх умов**

**Умова 1.** Продукт неподільний, відповідно, вводиться обмеження на цілочисловий тип шуканих невідомих змінних.

Результат:

**Умова 2.** Прийнято рішення, щоб усі машини завантажити рівномірно, кожен не нижче 10% замовлення. У прикладі 10% від 90 це 9 од., відповідно, вводиться обмеження:  $x_i \geq 9$ , результат:

	м-1	м-2	м-3	м-4	м-5	м-6	м-7	м-8	м-9		
a	0,93	2,4	1,9	8	12	7	22	3	9		
b	-0,97	-4,8	-0,9	-9	-5	-5	-17	-0,7	-11		
c	8,1	12	5	4	11	6	9	2	8		
										90	Z
x	18	9	9	9	9	9	9	9	9	90	сума
v	292,0	163,2	150,8	571,0	938,0	528,0	1638,0	238,7	638,0	5157,7	ЦФ

Така зрівнялівка привела до зростання витрат майже удвічі, умова знята.

**Умова 3.** Прийнято рішення – вивести із експлуатації «невигідні» машини: 7-му (2 од.) і 5-ту (3 од.), а кращу машину (першу) обмежити замовленням у 30 од., для цього уведено обмеження:  $x_1 \leq 30$ ,  $x_5 = x_7 = 0$ ,

результат:

	м-1	м-2	м-3	м-4	м-5	м-6	м-7	м-8	м-9		
a	0,93	2,4	1,9	8	12	7	22	3	9		
b	-0,97	-4,8	-0,9	-9	-5	-5	-17	-0,7	-11		
c	8,1	12	5	4	11	6	9	2	8		
										90	Z
x	30	15	19	5	0	5	0	12	4	90	сума
v	816,0	480,0	673,8	159,0	11,0	156,0	9,0	425,6	108,0	2838,4	ЦФ

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной:  максимальному значению  значению: 0

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

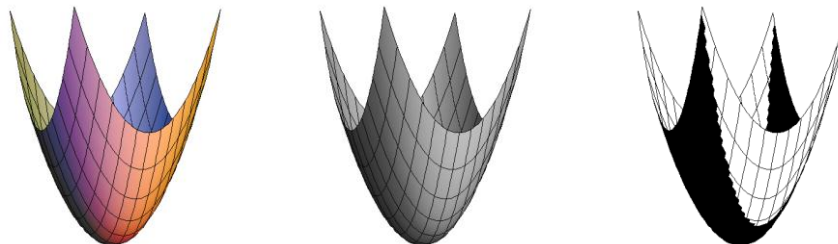
## Глава 9. Цільове, еволюційне та стохастичне програмування.

### Моделі багатокритеріальної та нелінійної оптимізації із негладкою ЦФ

#### Загальні відомості

Апарат класичного математичного програмування, розглянутий перед цим, передбачає досить однозначне трактування і оцінку кінцевого результату, що визначається одним критерієм оптимізації, який забезпечує максимальне (мінімальне) значення однієї ЦФ. Ці принципи можна порівняти з примітивною графікою з використанням крейди, олівця чи ручки, де усього два кольори – білий і чорний (один з них фон).

Але реальне життя і жива практика «багатокольорові», де існує безліч проміжних між білим і чорним кольорів. Це, як в панелі інструментів *Настройка изображения*, де у меню *Изображение* є три опції: «Авто (усі кольори)», «Оттенки серого», «Черно-белое»:



Це до того, що у багатьох практичних ситуаціях бажано чи необхідно користуватися моделями багатокритеріальної оптимізації, щоб знайти кращий розв'язок задачі одночасно за кількома критеріями ефективності (цілями), які можуть бути несумісними й навіть конфліктувати між собою<sup>66</sup>. Приміром, добре виробляти багато металу, хімічних речовин, машин чи електроенергії, але ж це, одночасно, підвищені витрати на супроводження запасів, екологічні проблеми, ризики аварій і катастроф, інші ускладнення, й навпаки, добре жити у райській місцевості без териконів й металургійних комбінатів, але тоді для комфортного життя усе – метал, харчі чи енергоносії – треба купувати, а це вже інша проблема.

Тож оптимізаційні задачі такого типу ставлять за мету відшукувати певну «золоту середину», яка б задовольнила кількох постановників задач з різними інтересами й цілями (типова ситуація – бюджетний процес, де «ковдру» доходної частини тягнуть у різні сторони різні зацікавлені відомства), але якою вона має бути ця «золота середина» – кожен учасник представляє по-своєму, тому й загальний критерій у таких задачах не однозначний, великою мірою – досить суб'єктивний, бо у кожного своя комбінація «виграш + програш».

Ці задачі найчастіше виникають в практиці адміністративного управління, коли одночасно поєднуються різні ресурси, гроші і люди, тобто, політичні, економічні і соціальні виміри і інтереси, де одночасно треба враховувати прибуткові (ресурсні) й неприбуткові (екологічні, культурні, освітні, політичні) показники. У таких умовах відшукують скоріше не оптимальні (якщо розуміти термін «оптимум» зі строгих математичних позицій), а «цілком прийнятні» рішення. Для цього відповідна модель пропонує набір зважених й об'єктивних варіантів досягнення відповідних локальних цілей, а вже суб'єкт (людина, ОПР, особа, що приймає рішення), робить остаточний вибір на користь єдиного глобального варіанту, сформованого ним самим згідно визначених пріоритетів.

Моделі оптимізації такого типу утворили кілька досить молодих за часом виникнення і близьких між собою за принципами та суттю класів моделей математичної оптимізації<sup>67</sup>.

Це моделі:

- цільового програмування та
- багатокритеріальної оптимізації,

які за стандартними ознаками виходять за межі класичних (однокритеріальних) моделей.

<sup>66</sup> реклама: У нас ви отримаєте товар максимальної якості за мінімальну ціну

<sup>67</sup> Steuer R. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Applications. New York, Wiley, 1986.

Моделі багатокритеріальної оптимізації виникають будь-де, зокрема в інженерії, військовій справі, й, безперечно, у бізнесі, де ціль завжди – багатогранна й багатофакторна, має «плюси» і «мінуси» одночасно. У цьому процесі як ніде основна роль у прийнятті рішення відводиться ОПР, бо саме ця особа визначає пріоритети у наявних «плюсах» і «мінусах» на основі результатів, отриманих на моделі, яка однозначно дає відповіді на запитання: «Що буде, якщо?».

### Цільове програмування

Класичні моделі лінійної чи нелінійної оптимізації передбачають, що обмеження, які треба задовольнити, є жорсткими (строгими, твердими), які ажніяк не можна порушувати – сказано, що витрати певного ресурсу не можуть перевищувати запас, значить, так і має бути.

Жорсткі обмеження можуть бути природними і обґрунтованими в одних ситуаціях й не дуже строгими у інших випадках, де можна піти й на певні поступки (як у відомому вислові: «знаю, що не можна, але якщо дуже хочеться, то можна»). Скажімо, купуючи певну річ, знаємо, що не можна витратити більше виділеної для неї суми коштів (ціль супроводжується твердим обмеженням: «витрати = сума коштів»), однак, буває, витрачають дещо більше з-за відсутності бажаної моделі чи за певної непередбачуваної деталі. Тоді реальна сума витрат вже робить це обмеження не таким вже жорстким й непохитним на шляху до бажаної цілі, відповідно границю витрат, яку можна трохи змінити відносно визначеної цілі, назвемо «м'яким» обмеженням («витрати = сума коштів +  $\Delta$ »).

Аналогії

Тендітний й чутливий прилад чи рідину у склянці можна упакувати твердо (й дешево) чи м'яко (дорожче, на спеціальних прокладках чи пружинних підвісках), у першому випадку струс тари прямо передається на корпус приладу, у другому – підвіски компенсують струс. Таку ж компенсуючу (зм'якшуючу) роль виконують ресори транспортного засобу (автомобіля, вагону), контури-компенсатори трубопроводів, страхові запаси продуктів харчування, сировини чи палива, різноманітні регулятори (тиску, напруги, швидкості) – порушення їх стану покою приводить за законом негативного зворотного зв'язку до виникнення сил, які повертають відповідний об'єкт у нейтральний стан.

Таким чином, наявність м'яких обмежень спрощує й навіть підвищує точність розв'язання багатьох технічних, економічних чи організаційних задач за рахунок гнучкого реагування на поведінку обмежуючих факторів. Часто задачі з такими умовами не мають однієї чітко визначеної ЦФ, яку треба максимізувати (мінімізувати) за визначеними м'якими обмеженнями, скоріше, визначається колекція цілей, що містять м'які й тверді обмеження.

Задачі такого типу є предметом цільового програмування.

### Алгоритм ЦП

1. Визначити змінні шуканого плану  $X$
2. Визначити і сформулювати тверді обмеження
3. Визначити цілі відповідно до їх цільових значень (правих частин обмежень)
4. Задати обмеження на невідомі плану з метою досягнення визначених цілей
5. Перетворити обмеження (п. 4) в цільові (м'які) обмеження шляхом введення змінних відхилень
6. Визначити, які змінні відхилень є «поганими», бо відтворюють небажані відхилення від заданих цілей
7. Сформулювати ЦФ з метою мінімізації впливу «поганих» змінних
8. Визначити відповідні вагові коефіцієнти змінних у ЦФ
9. Розв'язати задачу оптимізації
10. Проаналізувати отриманий результат, якщо розв'язок є неприйнятним, перейти до п. 8 для визначення інших пріоритетів шляхом перегляду відповідних вагових коефіцієнтів.

## Задача 9.1. Будівництво багатофункціонального об'єкту

**Приклад.** Місцева влада вирішила побудувати багатофункціональний бізнес-центр (житловий будинок), вклавши у його будівництво з бюджету не більше 1 млн. грн. Маркетингові дослідження показали, що бажано мати *приблизно*: 5 малих ( $400 \text{ м}^2$ ), 10 середніх ( $750 \text{ м}^2$ ) і 15 великих ( $1050 \text{ м}^2$ ) приміщень (квартир, кімнат). Додатково й приблизно визначена максимальна площа усіх приміщень ( $25000 \text{ м}^2$ ), за прогнозами очікується прибуток від експлуатації цих приміщень величиною: 18000 грн. (за малі), 33000 грн. (за середні) й 45150 грн. (за великі).

Специфіка задачі полягає у тому, що важко (якщо це можливо взагалі) витримати строгі (тверді) обмеження щодо оптимальної структури (кількостей кожного типу приміщень) об'єкту та об'єму його фінансування.

**План.** Треба визначити оптимальний план  $X = (x_1, x_2, x_3)$ , де  $x_1, x_2, x_3$  – шукані кількості приміщень відповідного типу.

**Цілі.** На відміну від розглянутих у попередніх розділах задач оптимізації з однією ціллю (й відповідною ЦФ) ця задача характеризується одночасно кількома цілями:

Ціль 1: Бізнес-центр має приблизно 5 малих приміщень.

Ціль 2: Бізнес-центр має приблизно 10 середніх приміщень.

Ціль 3: Бізнес-центр має приблизно 15 великих приміщень.

Ціль 4: Бізнес-центр має площу приблизно  $25000 \text{ м}^2$ .

Ціль 5: Будівництво бізнес-центру буде коштувати приблизно 1000000 грн.

Треба звернути увагу на слово «приблизно», яке є у кожній цілі, яким підкреслюється «м'якість» цих обмежуючих факторів.

Будемо розв'язувати цю задачу з використанням моделей ЛП та ЦЛП.

**Цільові обмеження** стосуються дотримання визначених цілей, вони дозволяють визначити силу зв'язку шуканого рішення з поставленими цілями, тобто, рівень «м'якості» співвідношень між лівими й правими частинами обмежень у вигляді шуканих значень відхилень.

Якщо ми хочемо, щоб ТОЧНО 5 малих, 10 середніх і 15 великих приміщень було збудовано, тоді маємо 5 строгих обмежень задачі ЦП.

Спочатку визначимо строгі обмеження на невідомі:  $x_1 = 5, x_2 = 10, x_3 = 15$ .

Якщо розв'язати задачу ЛП з такими обмеженнями, площа приміщень складе величину  $25250 \text{ м}^2$ , а сума фінансування – 1097250 грн.

### Задача оптимізації (ЛП)

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2, x_3)$ , такий, щоб

II. ЦФ Загальна вартість  $V = 18000x_1 + 33000x_2 + 45150x_3 \rightarrow \min$

III. за обмежень:  $x_1 = 5; x_2 = 10; x_3 = 15$ .

### Результат

	Приміщення					
	Мала	Середня	Велика			
Площа	400	750	1050			
Ціна (тис.)	18000	33000	45150			
Замовлення	5	10	15			
План (X)	5	10	15			
Площа	2000	7500	15750	25250	25000	Завдання
Вартість	90000	330000	677250	1097250	1000000	Фонд
				ЦФ		

Слово «приблизно» у визначених цілях означає, що буде важко задовольнити такі різні обмежуючі фактори у «твердій» формі. Тому ці три тверді обмеження послабляємо перетворенням їх у м'які таким чином:

- 1)  $x_1 + d_1^- - d_1^+ = 5$  (малі кімнати)
- 2)  $x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$  (середні кімнати)
- 3)  $x_3 + d_3^- - d_3^+ = 15$  (великі кімнати)

де:

- значення 5, 10, 15 – праві частини обмежень (цільові значення, target value), які виконують роль оцінок визначених цілей, яких має дотримуватись менеджер (ОПР),
- $d_i^-, d_i^+$  – змінні відхилень (deviational variables), визначають величину відхилення кожної цілі від цільових значень у меншу ( $d_i^-$ ) чи більшу ( $d_i^+$ ) сторону,  $d_i^-, d_i^+ \geq 0, i = 1, 2, 3$ .

Уявіть, отримано план  $X = (3, 13, 15)$ , відповідно до «твердих» цільових значень (5, 10, 15) це означає, що є ненульові і нульові змінні відхилень (м'яка складова обмежень):

$d_1^- = 5 - 3 = 2, d_1^+ = 0$  (кількість малих кімнат **не досягає** бажаних 5 на 2);

$d_2^- = 0, d_2^+ = 13 - 10 = 3$  (кількість середніх кімнат **перевищує** бажаних 10 на 3);

$d_3^- = d_3^+ = 0$  (кількість великих кімнат **точно** дорівнює бажаним 15).

Аналогічно:

4)  $400x_1 + 750x_2 + 1050x_3 + d_4^- - d_4^+ = 25000$  (метраж)

5)  $18000x_1 + 33000x_2 + 45150x_3 + d_5^- - d_5^+ = 1000000$  (вартість будівництва)

Отже, усі цільові обмеження є м'якими.

**Тверді обмеження.** Не усі обмеження у моделі ЦП повинні бути цільовими обмеженнями, ця модель може мати й тверді (директивні) обмеження, як у моделі ЛП. Таким твердим обмеженням може стати сума фінансування, якщо замовник будівництва (міська влада) не має наміру ні перевищувати, ні економити виділені з затвердженого бюджету кошти:  $18000x_1 + 33000x_2 + 45150x_3 = 1000000$ , але за таких умов задача взагалі може не мати розв'язку у цілих числах (це – т. зв. діофантове рівняння, яке далеко не завжди має розв'язок).

## Цільові функції ЦП

ЦФ має за мету визначити такий план  $X$  (рішення), за яким цільові обмеження задовольняються якнайточніше. Ознакою точності є мінімум усіх відхилень. «Ідеальним» рішенням задачі ЦП є таке рішення, за яким для цільових обмежень забезпечується тотожність  $ЛЧ = ПЧ$ , у цьому випадку усі змінні відхилень є нулями.

Але далеко не завжди це можна досягти з-за несумісності (конфліктності) обмежень, для того їх і роблять м'якими. У такому випадку треба знайти рішення, щоб сума значень змінних відхилень була б якнайменшою, тобто, якнайближчими до ідеального плану.

Варіанти ЦФ

Можлива ЦФ задачі ЦП має вигляд:



$$\sum_i (d_i^- + d_i^+) \rightarrow \min \quad (*)$$

Зауваження.

1) Оскільки кожне обмеження має певний вимір і характерну властивість (м<sup>2</sup>, кількості приміщень, тисячі грошових одиниць, можливо, кількості машин чи людей), неясно, як інтерпретувати числові значення у складі ЦФ та їх суму типу 2 кімнати + 1500 грн. + 150 м<sup>2</sup> = 1507 чого?), тож пропонується модифікувати ЦФ таким чином, щоб знаходити суму безрозмірних, зокрема, процентних (відносних) відхилень від відповідних цілей.

У такому випадку ЦФ задачі ЦП має вигляд:

$$\sum_i \frac{1}{t_i} (d_i^- + d_i^+) \rightarrow \min \quad (**)$$

де:  $t_i$  – масштабний (ваговий) коефіцієнт  $i$ -го цільового значення.

Тепер уявімо, що першою ціллю є нестача кімнати 1-го типу,  $d_1^- = 1$  ( $t_1 = 5$ ), а 5-ою ціллю є надлишок коштів,  $d_5^+ = 20000$  грн. ( $t_5 = 1000000$ ), а усі інші цілі досягаються точно (нульові змінні відхилень), тоді ЦФ задачі ЦП буде мати такі форму і значення:

$$\frac{1}{t_1} d_1^- + \frac{1}{t_5} d_5^+ = \frac{1}{5} \times 1 + \frac{1}{1000000} \times 20000 = 20\% + 2\% = 22\% ,$$

тобто, така ЦФ визначає мінімальне процентне відхилення загалом, але вона має смисл, коли усі цільові значення (ПЧ) ненульові (бо на нуль ділити не можна).

2) Згідно ЦФ (\*\*) маємо ситуацію, коли вплив різних цільових змінних різний: нестача 1 малої кімнати (20% ЦФ) у 10 разів впливовіша на кінцевий результат, ніж надлишок витрат у 20000 (2% ЦФ). Справедливість такого співвідношення має визначити лише менеджер (ОПР), для цього його треба забезпечити прозорим засобом оцінювання цілей для внесення відповідних змін в процесі моделювання процесу прийняття рішень.

3) Передбачається, що «негативність» змінних відхилень  $d_i^-$  та  $d_i^+$  однакова, хоча це буває й не так. Наприклад уявімо, що вартість будівництва склала значення:

а)  $x_5 = 900000$ , тобто,  $d_5^- = 100000$  і згідно двох попередніх ЦФ вважається, що це рішення таке ж небажане («погане»), як і

б)  $x_5 = 1100000$  і  $d_5^+ = 100000$ .

Але, мабуть, замовник будівництва (міська влада) зволіє платити скоріше 900000, ніж 1100000, відповідно, для цієї ситуації значення  $d_i^- = 100000$  переважніше й краще, ніж  $d_i^+ = 100000$ , це ж можна сказати і для інших цілей (скажімо, кількості кімнат чи метражу будівлі).

### **Вагові коефіцієнти**

Об'єктивною відповіддю на зауваження (2) і засобом оцінювання рішень (з позицій їх важливості, бажаності та прийнятності) є введення менеджером (замовником, ОПР) суб'єктивних вагових коефіцієнтів для змінних відхилень у ЦФ задачі ЦП на його власний розсуд.

Тому, найбільш корисними формами ЦФ задачі ЦП є:

$$\sum_i (w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+) \rightarrow \min \quad \text{або} \quad \sum_i \frac{1}{t_i} (w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+) \rightarrow \min .$$

У цих зважених ЦФ вагові коефіцієнти  $w_i^-$  та  $w_i^+$  представляють собою числові константи, що певним чином відповідають змінним відхилень  $d_i^-$  та  $d_i^+$  як їх оцінки у складі ЦФ. Чим «гірше» чи не бажаніша змінна відхилень, тим більшим для неї має бути ваговий коефіцієнт, а для «гарної» змінної, яка представляє нейтральне чи бажане відхилення, ваговим коефіцієнтом є нуль чи навіть від'ємне число.

Не існує універсального правила призначення вагових коефіцієнтів змінним відхилень, яке б завжди гарантувало кращий варіант, адже все суб'єктивно, бо залежить від уподо-

бань менеджера. Скоріше за все, пропонується ітеративна (та, що повторюється за єдиними правилами) процедура, коли на кожному етапі визначається набір вагових коефіцієнтів, для нього знаходять оптимальне рішення, воно аналізується, а результати аналізу використовуються для перегляду вагових коефіцієнтів – далі усе повторюється, аж поки чергове рішення не задовольнить дослідника (ОПР).

## ЦФ

Припустимо, що нас буде цікавити:

- нестача приміщень усіх 3-ох типів і не цікавити їх надлишок,
- зменшення й збільшення площі й
- перевищення витрат на фінансування будівництва.

Це означає, що з 10 можливих (по два на кожену ціль) треба задати 6 вагових коефіцієнтів:

$W_1^-, W_2^-, W_3^-, W_4^-, W_4^+$  та  $W_5^+$  для 5 шуканих «цікавих» невідомих:  $d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-$  та  $d_5^+$ , які й формують ЦФ:

$$\frac{W_1^-}{5} d_1^- + \frac{W_2^-}{10} d_2^- + \frac{W_3^-}{15} d_3^- + \frac{W_4^-}{25000} d_4^- + \frac{W_4^+}{25000} d_4^+ + \frac{W_5^+}{1000000} d_5^+ \rightarrow \min \quad (***)$$

Усі інші вагові коефіцієнти для змінних відхилень – нулі, тому у ЦФ відсутні відповідні змінні. На початок дослідження усі визначені вагові коефіцієнти мають однакову «цінність» і дорівнюють 1.

Якщо через  $p_i$  позначити праву частину  $i$ -го обмеження, загальна форма ЦФ для задачі ЦП має такий вигляд:

$$\sum_i \frac{(w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+)}{p_i} \rightarrow \min \quad (***)$$

Спочатку розглянемо лінійну модель цієї задачі, щоб отримати певні орієнтири у вигляді двоїстих оцінок обмежуючих факторів (цілей).

## Задача оптимізації (цільове ЛП)

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2, x_3)$ , вектори відхилень  $D^- = \{d_i^-\}$  та  $D^+ = \{d_i^+\}$ , де  $i$  – номер цілі,  $i = 1, \dots, 5$ , такі, щоб

II. реалізувати ЦФ (\*\*\*)

III. за обмежень:

1)  $x_1 + d_1^- - d_1^+ = 5$  (малі кімнати)

2)  $x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$  (середні кімнати)

3)  $x_3 + d_3^- - d_3^+ = 15$  (великі кімнати)

4)  $400x_1 + 750x_2 + 1050x_3 + d_4^- - d_4^+ = 25000$  (метраж)

5)  $18000x_1 + 33000x_2 + 45150x_3 + d_5^- - d_5^+ = 1000000$  (вартість будівництва)

та граничних умов: усі  $d_i \geq 0$ ,  $x_i \geq 0$ .

## Таблична модель

Вручну формуємо вектори вагових коефіцієнтів  $W^- = \{w_i^-\}$  та  $W^+ = \{w_i^+\}$ , початкові дані і результат:

	Кімнати			Площа	Фонд	
	Мала	Середня	Велика			
Площа	400	750	1050			
Ціна тис.)	18000	33000	45150			
ПЧ замовлення	5	10	15	25000	1000000	
План X	5,0	10,0	12,8	22988,4	1000000,0	
Цільові відхилення						
	Ціль 1	Ціль 2	Ціль 3	Ціль 4	Ціль 5	ОПР
$w^-$	1	1	1	1	0	
$w^+$	0	0	0	1	1	
$d^-$	0,0	0,0	2,2	2011,6	0,0	
$d^+$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
ЛЧ обмежень	5	10	15	25000	1000000	
Коеф. ЦФ						
$w^-d^-$	0	0	2	2012	0	ЦФ
$w^+d^+$	0	0	0	0	0	
коеф.	0,000	0,000	0,144	0,080	0,000	0,224
Процентні відхилення:						
	0%	0%	14%	8,0%	0,00%	
	0%	0%	0%	0%	0%	
Двоїсті оцінки						
T-ціна (ПЧ)	0,027	0,049	0,067	0,00004	-0,0000024	
N-варт ( $d^-$ )	0,173	0,051	0	0	0,0000024	
N-варт ( $d^+$ )	0,027	0,049	0,067	0,00008	0	

## Аналіз результатів

### Пряма задача

План  $X = (5; 10; 12,8)$ , ЦФ (сума відхилень) = 0,224.

Відхилення стосуються зменшення великих кімнат (на 2,2) і загальної площі (на 2011,6).

### Двоїста задача

Тіньові ціни цілей (ПЧ обмежень) показують, як буде себе вести ЦФ при збільшенні цих показників на 1. Збільшення числа кімнат і загальної площі збільшить суму витрат (ЦФ), зате збільшення фінансування піде на користь (від'ємне число) – відхилення від параметрів бізнес-центру можна мінімізувати лише збільшенням фінансів (цим підкреслюється «цінність» фінансового ресурсу, схоже, оптимальний план буде досягнуто за рахунок вимушеного збільшення фінансування).

Нормовані вартості змінних відхилень (додатні числа) вказують вплив цих відхилень на ЦФ. Скажімо, для малих кімнат краще побудувати більше (0,027), ніж менше (0,173), а для великих кімнат навпаки – краще побудувати їх менше (0), ніж більше (0,067).

Отже, можна очікувати, що наступна цілочислова модель буде намагатися знайти кращий варіант за рахунок збільшення малих і зменшення великих кімнат згідно заданих цілей.

## Задача оптимізації (ЦЛП)

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2, x_3)$ , вектори відхилень  $D^- = \{d_i^-\}$  та  $D^+ = \{d_i^+\}$ , де  $i$  – номер цілі,  $i = 1, \dots, 5$ , такі, щоб

II. реалізувати ЦФ (\*\*\*)

III. за обмежень:

- 1)  $x_1 + d_1^- - d_1^+ = 5$  (малі кімнати)
- 2)  $x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$  (середні кімнати)
- 3)  $x_3 + d_3^- - d_3^+ = 15$  (великі кімнати)

- 4)  $400x_1 + 750x_2 + 1050x_3 + d_4^- - d_4^+ = 25000$  (метраж)  
 5)  $18000x_1 + 33000x_2 + 45150x_3 + d_5^- - d_5^+ = 1000000$  (вартість будівництва)  
 та граничних умов: усі  $d_i \geq 0$ ,  $x_i \geq 0$  і цілого типу.

### Таблична модель

Початкові дані і результат:

	Кімнати			Площа	Фонд	
	Мала	Середня	Велика			
Площа	400	750	1050			
Ціна тис.)	18000	33000	45150			
ПЧ замовлення	5	10	15	25000	1000000	
План X	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>25250</b>	<b>1097250</b>	
Цільові відхилення						
	Ціль 1	Ціль 2	Ціль 3	Ціль 4	Ціль 5	ОПР
$w^+$	0	0	0	1	1	←
$w^-$	1	1	1	1	0	
$d^+$	0	0	0	250	97250	
$d^-$	0	0	0	0	0	
ЛЧ обмежень	5	10	15	25000	1000000	
Коеф. ЦФ						
$w^+d^+$	0	0	0	250	97250	
$w^-d^-$	0	0	0	0	0	ЦФ
коеф.	0,00	0,00	0,00	0,01	0,10	<b>0,107</b>
Процентні відхилення:						
	0,00%	0,00%	0,00%	1,00%	9,73%	
	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	

### Формули

3	Площа	400	750	1050
4	Ціна тис.)	18000	33000	45150
5	ПЧ замовлення	5	10	15
6	План X	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>15</b>
7	Вагові коефіцієнти:			
8		Ціль 1	Ціль 2	Ціль 3
9	$w^+$	0	0	0
10	$w^-$	1	1	1
11	Цільові відхилення			
12	$d^+$	0	0	<b>1,11022302462516E-16</b>
13	$d^-$	0	0	0
14	ЛЧ обмежень	=B6+B13-B12	=C6+C13-C12	=D6+D13-D12
15	Коеф. ЦФ			
16	$w^+d^+$	=B9*B12	=C9*C12	=D9*D12
17	$w^-d^-$	=B10*B13	=C10*C13	=D10*D13
18	коеф.	=СУММ(B16:B17)/B5	=СУММ(C16:C17)/C5	=СУММ(D16:D17)/D5
19	Процентні відхилення:			
20		=B12/B\$5	=C12/C\$5	=D12/D\$5
21		=B13/B\$5	=C13/C\$5	=D13/D\$5

	Е	Ф	Г
4	Площа	Фонд	
5	25000	1000000	
6	=E5+E12	=F5+F12	
7			
8	Ціль 4	Ціль 5	ОПР
9	1	1	
10	1	0	
11			
12	250,00000000000001	97250	
13	0	0	
14	=СУММПРОИЗВ(В3:Д3;В6:Д6)+Е13-Е12	=СУММПРОИЗВ(В4:Д4;В6:Д6)+F13-F12	
15			
16	=E9*E12	=F9*F12	
17	=E10*E13	=F10*F13	ЦФ
18	=СУММ(E16:E17)/E5	=СУММ(F16:F17)/F5	=СУММ(B18:F18)
19			
20	=E12/E\$5	=F12/F\$5	
21	=E13/E\$5	=F13/F\$5	
22			

### Аналіз результату

Отримано план  $X = (5, 10, 15)$ , що точно відповідає замовленню, мінімум ЦФ = 0,107 (або 10,7% загальних відхилень). Цільові відхилення для забезпечення замовлення пов'язані зі зменшенням очікуваної площі на 250 м<sup>2</sup> (1%) й (як і очікувалось) збільшенням фінансування на 97250 грн. (9,73%).

Останнє є неприпустимим фактом для замовника, оскільки запланований бюджет збільшено майже на 10%, що змушує менеджера переглянути схему вагових коефіцієнтів. Зокрема, треба зробити більшим коефіцієнт, який би стримував аж до заборони перевищення бюджету, а саме,  $w_5^+$ .

Правда, важко зразу порадижити, яким має бути цей коефіцієнт, тож будемо послідовно змінювати його в діапазоні від 1 до 10. При  $w_5^+ = 2$  нічого не змінилося, визначили  $w_5^+ = 3$  і отримали такий новий план:

	Кімнати			Площа	Фонд	
	Мала	Середня	Велика			
Площа	400	750	1050			
Ціна тис.)	18000	33000	45150			
ПЧ замовлення	5	10	15	25000	1000000	
План X	7	10	12	22900	997800	
Цільові відхилення						
	Ціль 1	Ціль 2	Ціль 3	Ціль 4	Ціль 5	ОПР
$w^-$	1	1	1	1	0	
$w^+$	0	0	0	1	3	
$d^-$	0	0	3	2100	2200	
$d^+$	2	0	0	0	0	
ЛЧ обмежень	5	10	15	25000	1000000	
Коеф. ЦФ						
$w^-d^-$	0	0	3	2100	0	ЦФ
$w^+d^+$	0	0	0	0	0	
коеф.	0,000	0,000	0,200	0,084	0,000	0,284
Процентні відхилення:						
	0%	0%	20%	8,4%	0,22%	
	40%	0%	0%	0%	0%	

Тепер ми «вписалися» у фінансовий бюджет (навіть з економією 2200 грн.) за рахунок зменшення загальної площі (на 2100 м<sup>2</sup>), збільшення малих (на 2) та зменшення великих (на 3) кімнат.

Якщо замовник наполягає на збільшенні великих кімнат, треба збільшити ваговий коефіцієнт  $w_3^-$ , задавши його значення, скажімо, величиною 10, тоді отримуємо такий план:

	Кімнати			Площа	Фонд	
	Мала	Середня	Велика			
Площа	400	750	1050			
Ціна тис.)	18000	33000	45150			
ПЧ замовлення	5	10	15	25000	1000000	
План X	5	7	15	23000	998250	
Цільові відхилення						
	Ціль 1	Ціль 2	Ціль 3	Ціль 4	Ціль 5	ОПР
$w^-$	1	1	10	1	0	
$w^+$	0	0	0	1	3	
$d^-$	0	3	0	2000	1750	
$d^+$	0	0	0	0	0	
ЛЧ обмежень	5	10	15	25000	1000000	
Коеф. ЦФ						
$w^-d^-$	0	3	0	2000	0	ЦФ
$w^+d^+$	0	0	0	0	0	
коеф.	0,000	0,300	0,000	0,080	0,000	0,380
Процентні відхилення:						
	0%	30%	0%	8,0%	0,17%	
	0%	0%	0%	0%	0%	

який задовольнив би нові умови за рахунок зменшення середніх кімнат (на 3).

Отже, додаткові умови, визначені відповідними ваговими коефіцієнтами, на кількість великих кімнат й на об'єм фінансування привели до збільшення значення ЦФ, де враховуються загальні відхилення від «ідеального» стану.

#### Висновки:

- будь-яке покращення за певним критерієм здійснюється і досягається, жертвуючи певними іншими критеріями (у просторіччі це називається «перетягуванням ковдри») із загальним погіршенням кінцевого результату («за все треба платити»),
- на відміну від моделей ЛП з можливістю отримання двоїстих оцінок симплекс-методом, модель ЦП не передбачає одномоментну індикацію шляхів до покращення результатів – менеджер (ОПР) у діалоговому (інтерактивному) режимі змушений методом зміни вагових коефіцієнтів знаходити кращий, на його погляд, план, здійснюючи ітеративну процедуру (рекомендується на початку процесу оптимізації реалізувати лінійну модель для отримання орієнтовних двоїстих оцінок),
- оскільки в моделі реалізуються різні цілі у різних вимірах й з різною «цінністю», роль і значення ЦФ, де змішані оцінки цих цілей, при порівнянні планів досить умовні й дещо механічні (типу «середньої температури хворих у палаті» чи «смешались в кучу кони, люди» за Лермонтовим), тому, на відміну від моделей ЛП, де значення ЦФ однозначно визначає кінцевий результат (дохід, витрати), значення ЦФ у ЦП мало корисне (парадокс – за значенням ЦФ «ідеальна» і максимально гнучка лінійна модель з невідомими дійсного типу виявилася гіршою за цілочислову модель!),
- шляхом уведення твердого обмеження можна задати фіксовану границю для значення «м'якої» змінної. Наприклад, якщо замовник будівництва з самого початку відкидає з роз-

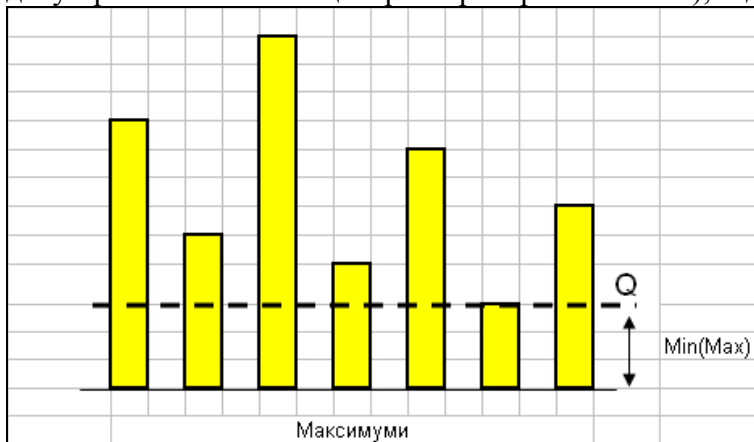
гляду варіанти з перевищенням бюджету на, скажімо, 50000 грн., з самого початку на м'яку змінну вводиться тверде обмеження:  $d_5^+ \leq 50000$ ,

- підхід з використання змінних відхилень застосовується не лише у задачах ЦП, його можна використати у класичних задачах лінійної та нелінійної оптимізації,
- інший тип ЦФ під назвою «критерій MINIMAX» іноді може бути корисним у ЦП, коли необхідно мінімізувати максимальне відхилення від заданої цілі (це чимось нагадує принцип методу найменших квадратів). Для застосування цього критерію необхідно ввести одне додаткове обмеження для кожної змінної відхилень таким чином:

$$d_1^- \leq Q; d_1^+ \leq Q; d_2^- \leq Q; d_2^+ \leq Q \dots \text{ а також ЦФ у вигляді: } Q \rightarrow \min.$$

Фактично, шукане значення  $Q$  – це така собі «гребінка», під яку «стрижуть» усі змінні відхилень так, щоб ця «гребінка» була якнайменшою (таку задачу розв'язує комбайнер, який стриже соломку, виставляючи хедер якнайнижче, але щоб він не різав землю).

Оскільки змінна  $Q$  має бути більше чи дорівнювати значенню будь-якої змінної відхилень й оскільки ми хочемо мінімізувати її значення, змінна  $Q$  завжди буде відшукувати максимум серед усіх цих змінних. В той же час, ця ЦФ відшукує такий план  $D$ , для якого максимальне значення змінної відхилень  $d_i$  (і самої змінної  $Q$ ) буде якнайменшим. Тож ця технологія дозволяє нам мінімізувати максимальне відхилення від усіх цілей (це нагадує задачу про оптимальний центр за критерієм minmax), заданих твердими обмеженнями:



## Задача 9.2. Багатоцільове лінійне програмування

Моделі ЛП та ЦЛП мають одну ЦФ, які відповідають максимізації прибутку (задача про оптимальний розподіл обмежених ресурсів) чи мінімізації витрат (задача про суміш, транспортна задача). Але можна сформулювати інші ЦФ для таких задач, коли, наприклад, виробництво зацікавлене **максимізувати** випуск корисного продукту (металу, добрив, електроенергії на ТЕС чи АЕС), але оскільки це супроводжується викидами шкідливих речовин у повітря чи воду, одночасно ставиться задача **мінімізації** цих викидів.

З постановки задачі видно, що ці дві умови конфліктують між собою, відповідно, маємо задачу 2-критеріальної оптимізації, де треба знаходити кращий варіант – «золоту середину» – не пошуком значення однієї ЦФ, а вибором серед двох різних (альтернативних) ЦФ, але кожного разу – однієї ЦФ.

Модель БЦЛП, яка буде застосована, є спеціальним типом моделі ЦП, де часткою розв'язання поставленої задачі є визначення кращих (цільових, глобальних) характеристик відносно окремих (локальних) цілей у складі узагальненої ЦФ. Зокрема, для розв'язання задачі будемо використовувати оптимізаційний підхід за критерієм minmax.

### Алгоритм БЦЛП

1. Визначити невідомі шуканого плану  $X$ .

2. Визначити цілі й відповідні цільові функції.
3. Визначити обмеження й задати їх відповідним чином (системою нерівностей з відповідним знаком « $\leq$ » чи « $\geq$ »)
4. Розв'язати кожну задачу оптимізації і визначити локальні оптимальні рішення.
5. Використати отримані локальні оптимуми як обмежуючі фактори (цілі) задачі глобальної оптимізації.
6. Для кожної цілі визначити функцію відхилення (абсолютного, процентного), яка виступає показником для пошуку глобального оптимуму.
7. Для кожної функції відхилення задати ваговий коефіцієнт і сформувати відповідне обмеження у вигляді зваженої функції відхилення для задачі глобальної оптимізації, значення якої не перевищує змінну Q за критерієм  $\min$ тах.
8. Розв'язати задачу оптимізації шляхом мінімізації значення Q.
9. Дослідити отриманий розв'язок. Якщо він неприйнятний, змінити вагові коефіцієнти (п. 7) й перейти до п. 8.

**Приклад.** Переробне підприємство (наприклад, завод з виготовлення коксу для металургійних комбінатів, один з найбільших в Європі знаходиться у м. Авдіївка Донецької обл.<sup>68</sup>) отримує сировину (вугілля) двох видів (Продукт1, Продукт 2), з якого виготовляється готова продукція у вигляді виробів 3-ох сортів. Для кожного продукту відома вартість (40; 32), вміст викидів у воду (800; 1250) й повітря (0,2; 0,5), що утворюються при переробці сировини, а також вихід готової продукції (виробів 3-ох сортів) та попит на неї (48; 28; 100).

### Математична модель

**План.** У цій задачі треба визначити кількість продуктів добувної галузі (шахт), які треба придбати і доставити для переробки, шуканий план:  $X = (x_1, x_2)$ , де  $x_1$  – кількість 1-го продукту (з шахти 1),  $x_2$  – кількість 2-го продукту (з шахти 2).

**ЦФ.** На відміну від звичайної задачі ЛП з однією ЦФ у цій задачі є три різних цілі й відповідних ЦФ для трьох показників щодо цих продуктів:

$$40x_1 + 32x_2 \rightarrow \min \text{ (вартість продукції)}$$

$$800x_1 + 1250x_2 \rightarrow \min \text{ (викиди токсичної води)}$$

$$0,2x_1 + 0,45x_2 \rightarrow \min \text{ (викиди токсичних газів)}$$

У задачі ЛП треба б було вирішити, яка з цих трьох ЦФ найважливіша й сформувати для неї відповідну задачу оптимізації. В задачі БЦЛП треба визначити, як ці три ЦФ (можливо й інші, якщо буде потрібно) поєднати в одну ЦФ, щоб проаналізувати й розв'язати цю задачу.

**Обмеження.** Обмеження формуються аналогічно звичайній задачі ЛП, де ліва частина визначає кількість виготовленої продукції (стовпець Використано), а права частина – це попит (нижня границя):

$$12x_1 + 4x_2 \geq 48 \text{ (Сорт 1)}$$

$$4x_1 + 4x_2 \geq 28 \text{ (Сорт 2)}$$

$$10x_1 + 20x_2 \geq 100 \text{ (Сорт 3)}$$

### Задача оптимізації

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2)$ , такий, щоб

II. цільові функції

$$40x_1 + 32x_2 \rightarrow \min$$

$$800x_1 + 1250x_2 \rightarrow \min$$

<sup>68</sup> Авдіївський коксохімічний завод в рейтингу 500 кращих компаній України займає 17-те місце (Всеукраїнська рейтингова програма Гвардія-500, червень 2006 р.)



$$0,2x_1 + 0,45x_2 \rightarrow \min$$

III. за обмежень:

$$12x_1 + 4x_2 \geq 48 \text{ (Сорт 1)}$$

$$4x_1 + 4x_2 \geq 28 \text{ (Сорт 2)}$$

$$10x_1 + 20x_2 \geq 100 \text{ (Сорт 3)}$$

та граничних умов:  $x_1, x_2 \geq 0$ .

### Таблична модель

Знаходимо цільові значення локальних ЦФ кожної з трьох окремих задач ЛП. Для цього послідовно (в приклад – тричі) в ролі ЦФ виступають їх значення (стовпець Значення) при незмінності обмежень. В результаті отримаємо «ідеальні» значення трьох цілей, а саме:

- Вартість продуктів ( $t_1$ ), результат пошуку  $\min$  ЦФ 1
- Кількість отруєної води ( $t_2$ ) результат пошуку  $\min$  ЦФ 2
- Кількість викидів шкідливих газів ( $t_3$ ) результат пошуку  $\min$  ЦФ 3.

Отримані результати далі будуть використані за методикою цільового програмування.

ЦФ 1:

Багатоцільове ЛП	Продукт 1	Продукт 2		
<b>План</b>	<b>2,5</b>	<b>4,5</b>		
<b>Цільові функції:</b>			Значення	
Вартість	40,0	32,0	<b>244,00</b>	
Вміст токсинів у воді	800,0	1250,0	<b>7625,00</b>	
Вміст токсинів у повітрі	0,2	0,5	<b>2,53</b>	
<b>Обмеження:</b>			Використано (ЛЧ)	Попит (ПЧ)
1 сорт	12,0	4,0	48,0	48,0
2 сорт	4,0	4,0	28,0	28,0
3 сорт	10,0	20,0	115,0	100,0

Результат:  $t_1 = 244$  (нижче не може бути).

ЦФ 2:

Багатоцільове ЛП	Продукт 1	Продукт 2		
<b>План</b>	<b>4,0</b>	<b>3,0</b>		
<b>Цільові функції:</b>			Значення	
Вартість	40,0	32,0	<b>256,00</b>	
Вміст токсинів у воді	800,0	1250,0	<b>6950,00</b>	
Вміст токсинів у повітрі	0,2	0,5	<b>2,15</b>	
<b>Обмеження:</b>			Використано (ЛЧ)	Попит (ПЧ)
1 сорт	12,0	4,0	60,0	48,0
2 сорт	4,0	4,0	28,0	28,0
3 сорт	10,0	20,0	100,0	100,0

Результат:  $t_2 = 6950$ .

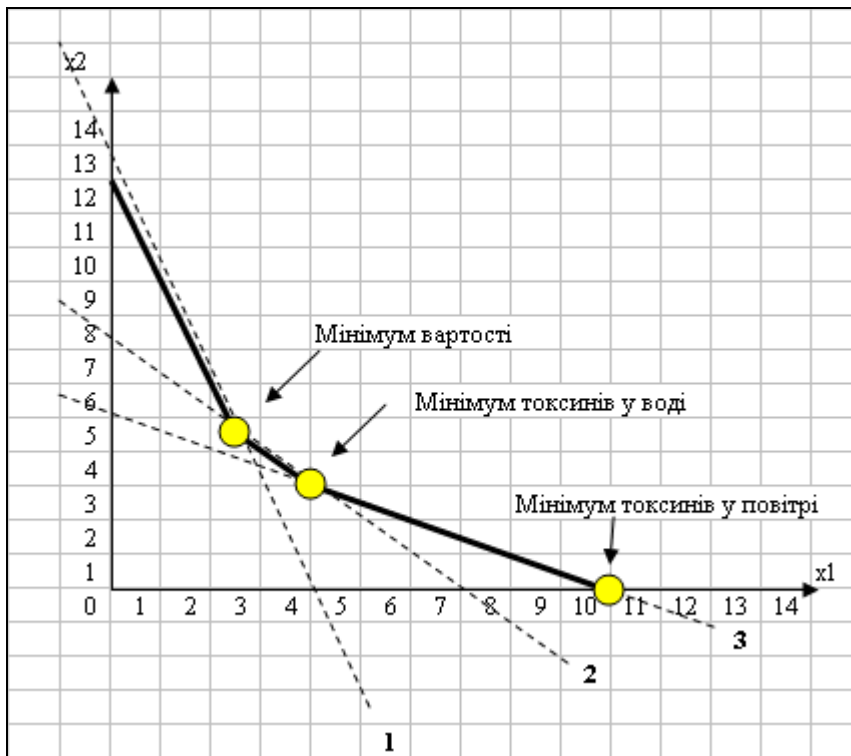
ЦФ 3:

Багатоцільове ЛП				
	Продукт 1	Продукт 2		
<b>План</b>	<b>10,0</b>	<b>0,0</b>		
<b>Цільові функції:</b>			Значення	
Вартість	40,0	32,0	<b>400,00</b>	
Вміст токсинів у воді	800,0	1250,0	<b>8000,00</b>	
Вміст токсинів у повітрі	0,2	0,5	<b>2,00</b>	
<b>Обмеження:</b>			Використано (ЛЧ)	Попит (ПЧ)
1 сорт	12,0	4,0	120,0	48,0
2 сорт	4,0	4,0	40,0	28,0
3 сорт	10,0	20,0	100,0	100,0

Результат:  $t_3 = 2$ .

### Графічний розв'язок

Цей малюнок узагальнює отримані результати. Три обмеження утворили ОДР, обмежену знизу (оскільки критерій – мінімум), на їх перетині (в кутових точках) знаходяться три мінімуми для трьох окремих ЦФ:



Видно, що усі ЦФ не узгоджуються (конфліктують) між собою. Так, рішення 1 має найнижчу вартість продуктів (244), зате найвищу кількість викидів газу (2,53). Рішення 3 має найнижчу кількість викидів газу (2,0), зате найвищі вартість (400) й кількість токсичної води (8000). Це означає, що умовно кращий варіант знаходиться десь проміж цими «ідеальними» рішеннями, адже не існує єдиної точки, яка б задовольняла усі умови – визначення пріоритету на користь будь-кому рішенням буде зроблено за рахунок погіршення інших результатів. В цьому – специфіка моделей БЦЛП.

Таким чином, мета БЦЛП – знайти кращий варіант серед визначених значень ЦФ за участю ОПР (особи, що приймає рішення), яка має визначити пріоритети на власний розсуд. Це означає, що точка глобального оптимуму буде знаходитися в середині ОДР поза кутових точок.

**Єдина (глобальна) ЦФ** представляє собою зважену ЦФ, де вагові коефіцієнти знаходять за методикою цільового програмування. ЦФ такого типу ставить за мету мінімізувати зважене процентне відхилення значень локальних ЦФ (цілей) від значення глобальної ЦФ.

Ціль 1: загальна вартість продукції приблизно дорівнює 244.

Ціль 2: загальна кількість токсичної води приблизно дорівнює 6950.

Ціль 3: загальна кількість токсичних газів приблизно дорівнює 2.

Тепер (після розв'язання трьох задач ЛП) ми знаємо, реальна вартість продукції ніколи не буде меншою за цільове значення величиною 244, відповідно, процентне відхилення від цілі 1 дорівнює:

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{\text{дійсне значення} - \text{цільове значення}}{\text{цільове значення}} = \frac{(40x_1 + 32x_2) - 244}{244}.$$

Аналогічно, реальна кількість токсичної води ніколи не буде меншою за цільове значення величиною 6950, відповідно, процентне відхилення від цілі 2 дорівнює:

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{\text{дійсне значення} - \text{цільове значення}}{\text{цільове значення}} = \frac{(800x_1 + 1250x_2) - 6950}{6950}$$

Нарешті, реальна кількість токсичних газів ніколи не буде меншою за цільове значення величиною 2, відповідно, процентне відхилення від цілі 3 дорівнює

$$f_3(x_1, x_2) = \frac{\text{дійсне значення} - \text{цільове значення}}{\text{цільове значення}} = \frac{(0,2x_1 + 0,45x_2) - 2}{2}.$$

Ці процентні відхилення є лінійними функціями невідомих  $x_1$  та  $x_2$ . Таким чином, якщо сформулювати глобальну ЦФ як зважену комбінацію цих функцій процентних відхилень, ми отримаємо лінійну ЦФ такого виду:

$$w_1 f_1(x_1, x_2) + w_2 f_2(x_1, x_2) + w_3 f_3(x_1, x_2) \rightarrow \min,$$

де:  $w_1, w_2, w_3$  – вагові коефіцієнти, які визначає особисто ОПР, фіксуючи цим пріоритети складових глобальної ЦФ.

### Цільова функція за критерієм **minmax**

Нагадаймо, що ЦФ за критерієм **minmax** ставить за мету знайти точки оптимуму, що знаходяться у просторі, визначеному лініями ОДР разом з кутовими точками.

Задача: мінімізувати максимуми зважених процентних відхилень локальних оптимумів від глобального оптимуму. Для цього використаємо ЦФ  $w_1 f_1(x_1, x_2) + w_2 f_2(x_1, x_2) + w_3 f_3(x_1, x_2)$  і введемо шукану змінну  $Q$  за критерієм **minmax**, яка одночасно виконує роль ЦФ і правої частини обмежень наступної задачі оптимізації з ЦФ:  $\text{MAX}[(w_1 f_1(x_1, x_2) + w_2 f_2(x_1, x_2) + w_3 f_3(x_1, x_2))] \rightarrow \min$ .

### Задача оптимізації

I. Знайти план  $X = (x_1, x_2)$ , такий, щоб

II. ЦФ  $Q \rightarrow \min$

III. за обмежень

а) для зважених процентних відхилень:

$$w_1 \left( \frac{(40x_1 + 32x_2) - 244}{244} \right) \leq Q$$

$$w_2 \left( \frac{(800x_1 + 1250x_2) - 6950}{6950} \right) \leq Q$$

$$w_3 \left( \frac{(0,2x_1 + 0,45x_2) - 2}{2} \right) \leq Q$$

б) для замовлень на готову продукцію:

$$12x_1 + 4x_2 \geq 48$$

$$4x_1 + 4x_2 \geq 28$$

$$10x_1 + 20x_2 \geq 100$$

та граничних умов:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$w_1, w_2, w_3$  – додатні числа (константи).

Таким чином, мінімізуючи  $Q$ , ми одночасно мінімізуємо процентні відхилення від глобального оптимуму усіх локальних цілей за умови задоволення попиту.

### Таблична модель

Усі вагові коефіцієнти менеджер на початку визначив однаковими ( $= 1$ ).

План	Продукт 1	Продукт 2	ОПР				
<b>Цільові функції:</b>			Значення	Ціль	% відхилення (t)	Ваговий коеф. (w)	Зваж. % відх.
Вартість	40,0	32,0	<b>0,00</b>	<b>244</b>	-100%	1	-100%
Вміст токсинів у воді	800,0	1250,0	<b>0,00</b>	<b>6950</b>	-100%	1	-100%
Вміст токсинів у повітрі	0,2	0,5	<b>0,00</b>	<b>2</b>	-100%	1	-100%
<b>Обмеження:</b>			Використано (ЛЧ)	Попит (ПЧ)			
1 сорт	12	4	0	48		ЦФ (Q)=	
2 сорт	4	4	0	28			
3 сорт	10	20	0	100			

### Формули

	A	B	C	D	E	F	G	H
2		Продукт 1	Продукт 2				ОПР	
3	<b>План</b>							
4	<b>Цільові функції:</b>			Значення	Ціль	% відхилення (t)	Ваговий коеф. (w)	Зваж. % відх.
5	Вартість	40	32	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$C\$3;B5:C5)	<b>244</b>	=(D5-E5)/E5	1	=F5*G5
6	Вміст токсинів у воді	800	1250	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$C\$3;B6:C6)	<b>6950</b>	=(D6-E6)/E6	1	=F6*G6
7	Вміст токсинів у повітрі	0,2	0,45	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$C\$3;B7:C7)	<b>2</b>	=(D7-E7)/E7	1	=F7*G7
8	<b>Обмеження:</b>			Використано (ЛЧ)	Попит (ПЧ)			
9	1 сорт	12	4	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$C\$3;B9:C9)	48		ЦФ (Q)=	
10	2 сорт	4	4	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$C\$3;B10:C10)	28			
11	3 сорт	10	20	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$C\$3;B11:C11)	100		MINIMAX	

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку:

Равной:  максимальному значению  значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

### Результат 1 ( $w_1 = w_2 = w_3 = 1$ ):

План	Продукт 1	Продукт 2	ОПР				
<b>Цільові функції:</b>			Значення	Ціль	% відхилення (t)	Ваговий коеф. (w)	Зваж. % відх.
Вартість	40,0	32,0	<b>261,59</b>	<b>244</b>	7%	1	7%
Вміст токсинів у воді	800,0	1250,0	<b>6990,76</b>	<b>6950</b>	1%	1	1%
Вміст токсинів у повітрі	0,2	0,5	<b>2,14</b>	<b>2</b>	7%	1	7%
<b>Обмеження:</b>			Використано (ЛЧ)	Попит (ПЧ)			
1 сорт	12	4	62	48		ЦФ (Q)=	
2 сорт	4	4	28	28		<b>0,072089</b>	
3 сорт	10	20	100	100		MINIMAX	

### Результат 2 ( $w_1 = 10, w_2 = w_3 = 1$ ):

	Продукт 1	Продукт 2				ОПР	
<b>План</b>	<b>3,08</b>	<b>3,92</b>				↓	
<b>Цільові функції:</b>			Значення	Ціль	% відхилення (t)	Ваговий коеф.(w)	Зваж. % відх.
Вартість	40,0	32,0	<b>248,64</b>	<b>244</b>	2%	10	19%
Вміст токсинів у воді	800,0	1250,0	<b>7364,16</b>	<b>6950</b>	6%	1	6%
Вміст токсинів у повітрі	0,2	0,5	<b>2,38</b>	<b>2</b>	19%	1	19%
<b>Обмеження:</b>			Використано (ЛЧ)	Попит (ПЧ)			
1 сорт	12	4	53	48		ЦФ (Q)=	
2 сорт	4	4	28	28		<b>0,190045</b>	
3 сорт	10	20	109	100		MINIMAX	

**Результат 3 ( $w_2 = 10, w_1 = w_3 = 1$ ):**

	Продукт 1	Продукт 2				ОПР	
<b>План</b>	<b>4,23</b>	<b>2,88</b>				↓	
<b>Цільові функції:</b>			Значення	Ціль	% відхилення (t)	Ваговий коеф.(w)	Зваж. % відх.
Вартість	40,0	32,0	<b>261,59</b>	<b>244</b>	7%	1	7%
Вміст токсинів у воді	800,0	1250,0	<b>6990,76</b>	<b>6950</b>	1%	10	6%
Вміст токсинів у повітрі	0,2	0,5	<b>2,14</b>	<b>2</b>	7%	1	7%
<b>Обмеження:</b>			Використано (ЛЧ)	Попит (ПЧ)			
1 сорт	12	4	62	48		ЦФ (Q)=	
2 сорт	4	4	28	28		<b>0,072089</b>	
3 сорт	10	20	100	100		MINIMAX	

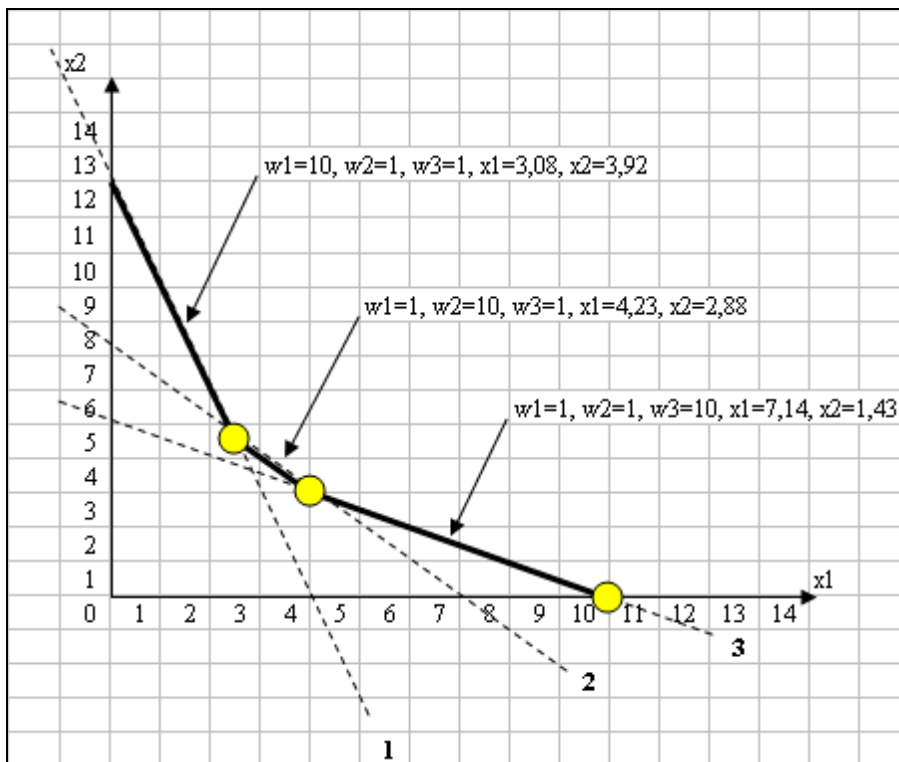
**Результат 4 ( $w_3 = 10, w_1 = w_2 = 1$ ):**

	Продукт 1	Продукт 2				ОПР	
<b>План</b>	<b>7,14</b>	<b>1,43</b>				↓	
<b>Цільові функції:</b>			Значення	Ціль	% відхилення (t)	Ваговий коеф.(w)	Зваж. % відх.
Вартість	40,0	32,0	<b>331,30</b>	<b>244</b>	36%	1	36%
Вміст токсинів у воді	800,0	1250,0	<b>7499,08</b>	<b>6950</b>	8%	1	8%
Вміст токсинів у повітрі	0,2	0,5	<b>2,07</b>	<b>2</b>	4%	10	36%
<b>Обмеження:</b>			Використано (ЛЧ)	Попит (ПЧ)			
1 сорт	12	4	91	48		ЦФ (Q)=	
2 сорт	4	4	34	28		<b>0,357798</b>	
3 сорт	10	20	100	100		MINIMAX	

### Висновки

Рисунок показує, що якщо менеджер віддає перевагу 1-му фактору (вартість сировини), тоді буде збільшено ваговий коефіцієнт  $w_1$  ( $w_1 = 10$ , усі інші = 1), відповідно, рішення (точка глобального оптимуму) з координатами (3,08; 3,92) рухається вздовж обмежуючої лінії, прагнучи до кутової оптимальної точки 1-ої цілі (її координати:  $x_1 = 2,5$ ;  $x_2 = 4,5$ ).

Аналогічно, при збільшенні вагового коефіцієнту  $w_2$  ( $w_2 = 10$ , усі інші = 1) рішення (4,23; 2,88) рухається до кутової оптимальної точки 2-ої цілі (її координати:  $x_1 = 4,0$ ;  $x_2 = 3,0$ ). Нарешті, при збільшенні вагового коефіцієнту  $w_3$  ( $w_3 = 10$ , усі інші = 1) рішення (7,14; 1,43) рухається до оптимальної точки 3-ої цілі (її координати:  $x_1 = 10,0$ ;  $x_2 = 0,0$ ):



Наприклад, суттєво збільшивши ваговий коефіцієнт  $w_3 = 200$ , ми цим самим визначили надзвичайну важливість мінімізації кількості викидів газу (бо підприємство розміщено недалеко від лісопаркової зони), тоді маємо такий результат:

	Продукт 1	Продукт 2	ОПР				
<b>План</b>	<b>9,75</b>	<b>0,12</b>					
<b>Цільові функції:</b>			Значення	Ціль	% відхилення (t)	Ваговий коеф.(w)	Зваж. % відх.
Вартість	40,0	32,0	394,09	244	62%	1	62%
Вміст токсинів у воді	800,0	1250,0	7956,94	6950	14%	1	14%
Вміст токсинів у повітрі	0,2	0,5	2,01	2	0%	200	62%
<b>Обмеження:</b>			Використано (ЛЧ)	Попит (ПЧ)			
1 сорт	12	4	118	48		ЦФ (Q)=	
2 сорт	4	4	40	28		<b>0,615142</b>	
3 сорт	10	20	100	100		MINIMAX	

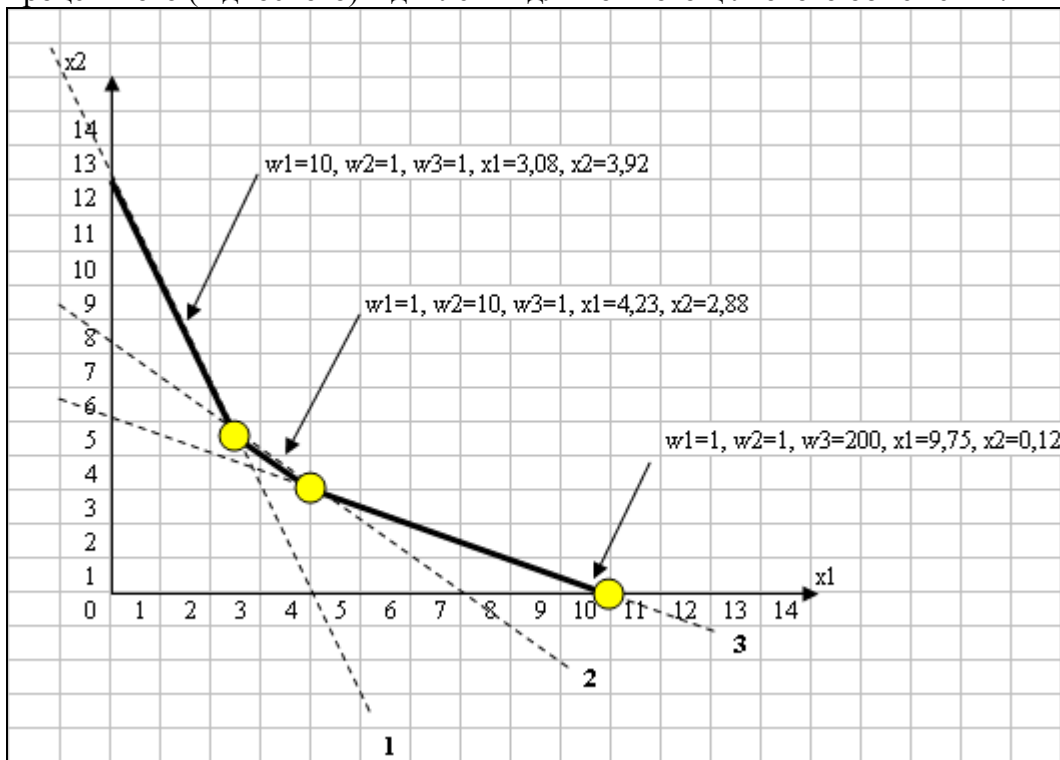
Видно, що план  $X = (9,75; 0,12)$  майже співпадає з ідеальним  $(10; 0)$ , з-за цієї «примхи» майже удвічі зростає вартість сировини (394 проти 244) й вміст токсинів у воді (7957 проти 6950) з-за необхідності виготовити більше продукції 1-го та 2-го сортів (118 проти 48 замовлених, 40 проти 28) – можемо ще раз упевнитись у мудрості вислову «за все треба платити».

Таким чином, визначаючи (вручну) вагові коефіцієнти  $w_1, w_2, w_3$ , менеджер (ОПР) визначає й привабливість (переваги) відповідного фактору, згідно цих первинних установок модель знаходить оптимальні значення невідомих.

Оптимальний план, отриманий методом оптимізації за критерієм  $\min \max$  називається збалансованим (Парето-оптимальним). Цим фактом підтверджується упевненість у тому, що будь-яке рішення, отримане за цим критерієм, не може бути покращене без погіршення як мінімум однієї іншої задачі. Подібно до змінних, що оцінюють відхилення, технологія  $\min \max$  корисна й для інших конфліктних ситуацій в сфері оптимізації.

У прикладі наведеної моделі БЦЛП усі цілі породжені за критерієм мінімізації ЦФ. Звідси ясно, що реальне значення для кожної цілі ніколи не буде меншим за визначене цільове

значення, тому й користуємось формулою  $\frac{\text{дійсне значення} - \text{цільове значення}}{\text{цільове значення}}$  для обчислення процентного (відносного) відхилення для кожного цільового обмеження.



Для цілей, визначених критерієм максимізації ЦФ, ясно, що дійсне значення для кожної цілі ніколи не буде більшим за визначене цільове значення, тому й користуємось формулою  $\frac{\text{цільове значення} - \text{дійсне значення}}{\text{цільове значення}}$ .

Якщо цільове значення є нулем, неможливо користуватися зваженими процентними відхиленнями для розв'язання задачі БЦЛП (бо не можна ділити на нуль), залишається користуватися просто зваженими відхиленнями.

### Висновки

Наведено дві окремих, але щільно зв'язаних між собою технології оптимізації за визначеними на початку кількома критеріями цільової функції, це – ЦП та БЦЛП.

ЦП пропонує аналіз потенціальних рішень у напрямку пошуку кращого рішення шляхом застосування м'яких обмежень. М'які обмеження є цілями з відповідними оцінками (значеннями цілей). Ці цілі можуть буди перетворені у звичайні обмеження шляхом застосування змінних відхилень, які вимірюють величину, на яку задане рішення відхиляється від локального рішення. Критерієм ЦФ у цільовому програмуванні є мінімізація певних зважених функцій змінних відхилень. Множина потенціальних рішень аналізується шляхом надання вагових коефіцієнтів змінним відхиленням.

БЦЛП забезпечує отримання результату аналізом задач ЛП, що містять кілька цільових функцій, несумісних між собою. Хоча модель БЦЛП дещо відрізняється від моделі ЦП, ЦФ у ній визначаються як цілі після відповідних визначень цільових значень. Оптимізація за критерієм  $\min \max$  застосовується для аналізу допустимих рішень в задачі БЦЛП.

Оптимізація методами ЦП та БЦЛП не така проста, як ЛП з однією ЦФ, бо маємо послідовність чи набір задач із відповідною ЦФ, які треба розв'язати, щоб менеджер (ОПР) міг проаналізувати кінцевий результат шляхом варіації цілей та відповідних ЦФ для різних допустимих рішень.

Таким чином, обидві технології є ітеративними (у вигляді послідовності стандартних процедур, направлених на покращення рішення) й інтерактивними (за участю людини). На їх

основі будують табличні моделі задач багатокритеріальної оптимізації, які слугують ефективним інструментом для підготовки до прийняття управлінських рішень у конфліктних ситуаціях.

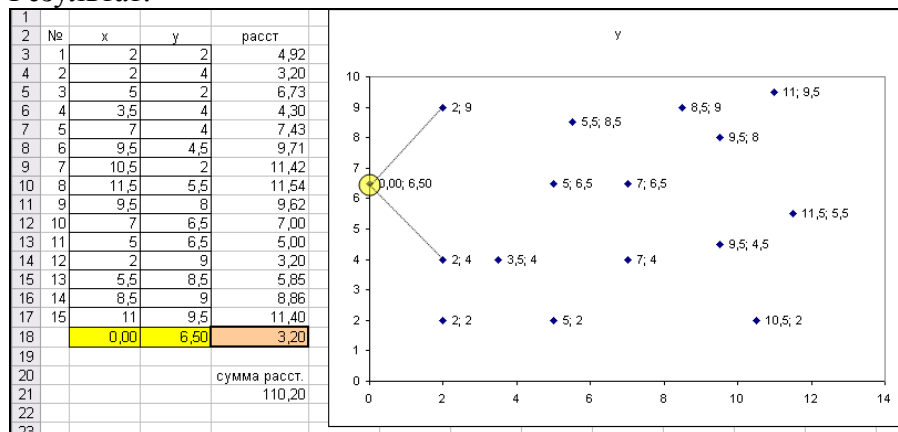
### Задача 9.3. Про оптимальний центр: генетичний алгоритм

Это алгоритм направленного перебора вариантов, аналогичен по принципу действия методу ветвей и границ, здесь результат определяется заданием граничных значений неизвестных и зависит от их начальных условий («геномы родителей»).

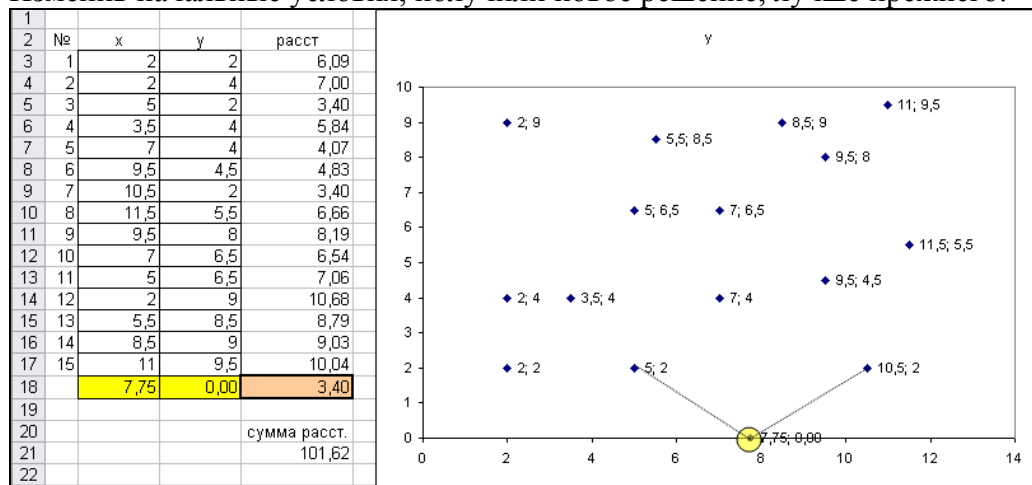
#### Критерий максимин.

На значения искомым неизвестных (x, y) наложено ограничение сверху – не более 10.

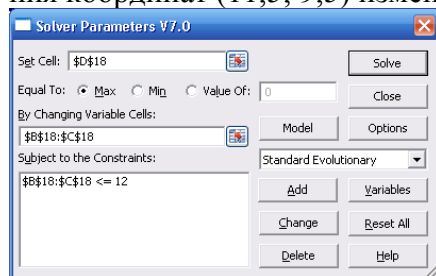
Результат:



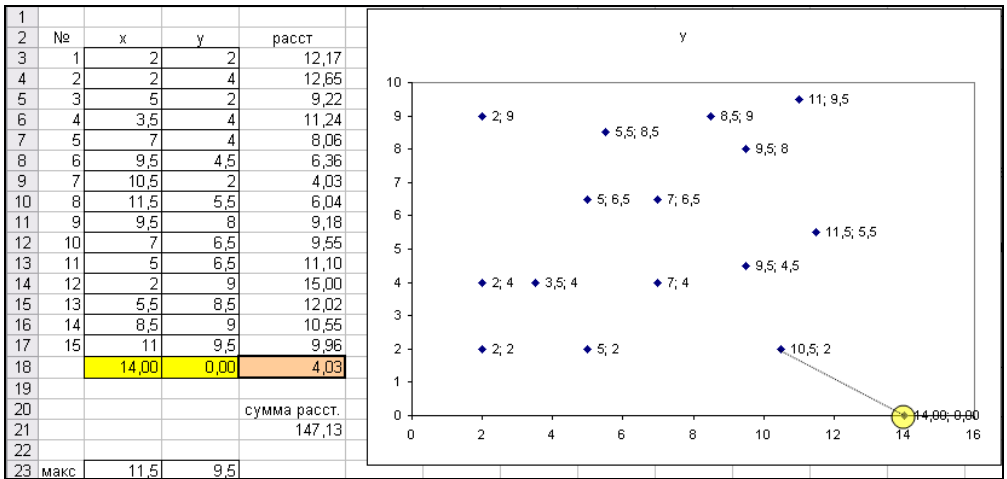
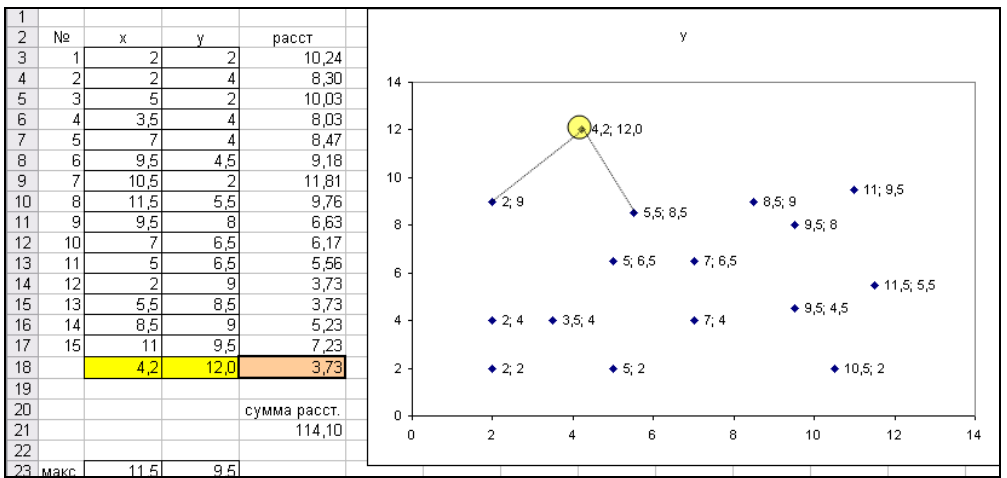
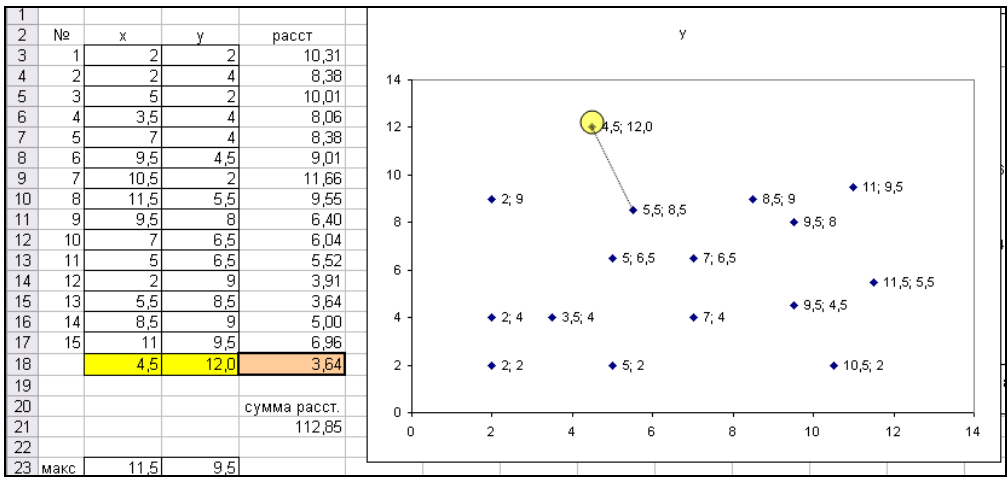
Изменив начальные условия, получили новое решение, лучше прежнего:

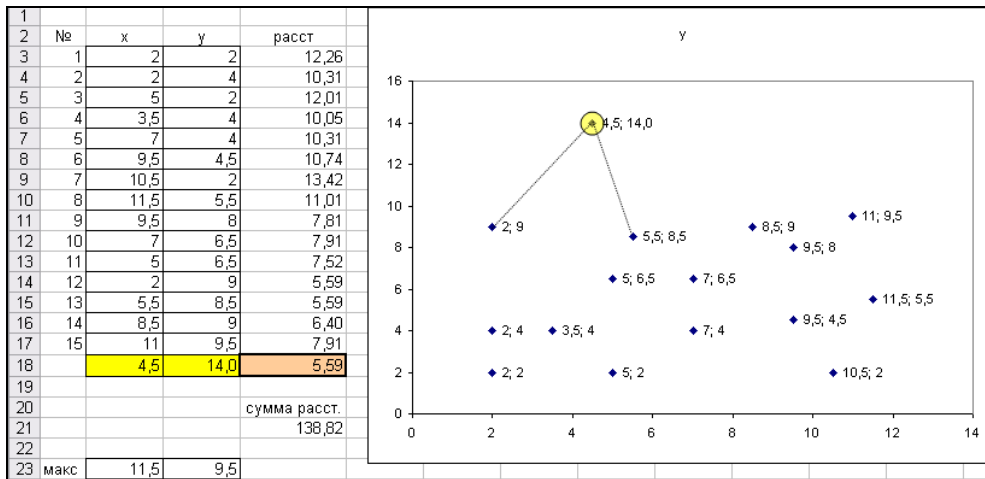


Получены новые существенно лучшие результаты за счет выхода за максимальные значения координат (11,5; 9,5) изменением верхней границы на неизвестные значениями 12 и 14:



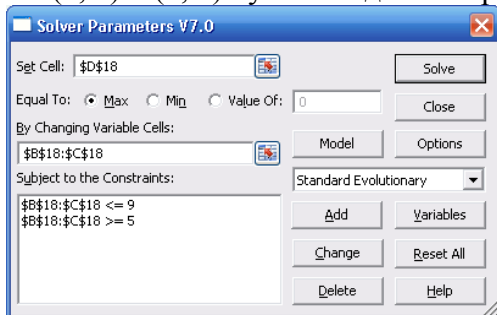




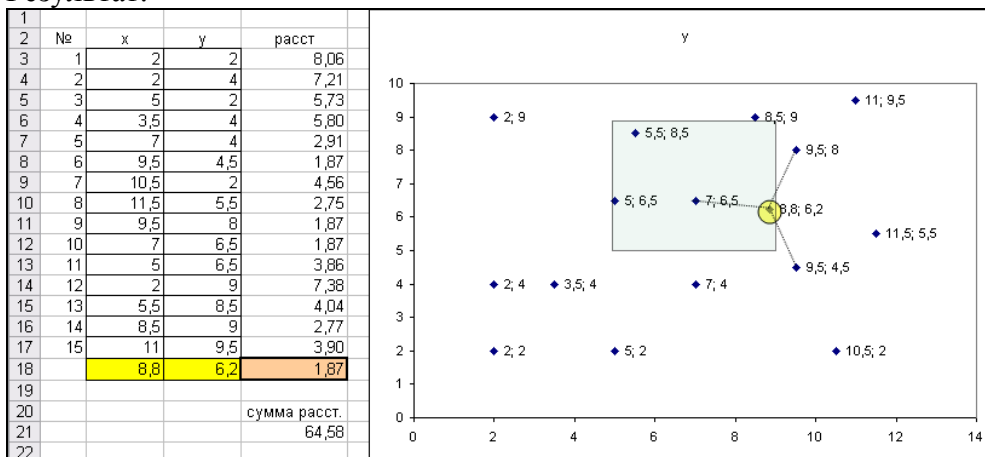


После нескольких проб результаты генетического алгоритма можно считать окончательными – их использование в качестве начальных условий для градиентного алгоритма не приводит к улучшению ЦФ, а лишь повторяет его значение.

Задание допустимой зоны размещения центра – прямоугольника с угловыми координатами (5, 5) и (9, 9) путем введения ограничений на значения неизвестных:



Результат:



#### Задача 9.4. Задача комівояжера: генетичний алгоритм з обмеженнями alldifferent

##### Постановка задачі

Комівояжер (агент роздрібної торгівлі) має обійти  $n$  клієнтів (замовників, певних об'єктів, традиційно - міст) найкоротшим шляхом (якнайшвидше, з мінімальними витратами ресурсів) й повернутися у початковий пункт, побувавши у кожного клієнта лише раз. У ролі комівояжера може бути транспортний засіб з доставки товарів у заклади роздрібної торгівлі чи у певні пункти для поповнення запасів ресурсів (харчів, питної води, палива, ліків,

джерел електроенергії) чи заміни персоналу, сміттєзбиральна техніка, кандидат в депутати, персонал контрольно-ревізійної служби, бригада обслуговування банкоматів, автобус з групою туристів тощо – усі вони мають на меті визначити оптимальний контур обходу відповідних об'єктів, щоб мінімізувати довжину, час чи інші витрати.

Аналогічну постановку має виробнича задача про переналагодження універсального обладнання для послідовного виконання на ньому  $n$  різних операцій із мінімальною загальною тривалістю усього процесу, задача про найкоротше з'єднання  $n$  електронних елементів на мікросхемі та багато інших.

Класична постановка задачі комівояжера доповнюється рядом специфічних чи узагальнених задач, коли, скажімо, комівояжер має відвідувати певні групи міст в межах певних регіонів чи коли треба визначити «вузьке місце» у контурі обходу – ці умови ще додатково ускладнюють й без цього непросту задачу у класичній постановці, але ж досягнення оптимального чи хоча б близького до нього варіанту забезпечує явну економічну чи іншу ефективність.

Ця математична задача припускає просту наочну інтерпретацію, з чого й розпочинається її постановка: на площині задано  $n$  точок із відповідними координатами, де кожна точка з'єднана із усіма іншими  $n$  точками. Це – набір даних  $(V, D, A, X, S)$ , де:

- $V = \{1, \dots, n\}$  – задана множина  $n$  вузлів (номери, назви, коди),
- $D = \{(i, j)\}$  – задана множина  $n^2$  дуг:  $(1, 1), (1, 2), \dots, (n, n)$ , кожна  $(i, j)$ -та дуга ( $i \neq j$ ) графа з'єднує певну пару вузлів  $i, j \in V$ , це – повний граф, для якого існує розв'язок; для неповного графа існування розв'язку не гарантується,
- $A = \{a_{ij}\}$  – задана множина вагових коефіцієнтів чи параметрів дуг, це: відстань, тривалість, витрати палива, коштів чи будь-яких ресурсів, для  $i = j$   $a_{ij} = \infty$ ; при  $a_{ij} = a_{ji}$  задача симетрична, інакше, у загальному випадку, несиметрична,
- $X = \{x_{ij}\}$  – шуканий результат у матричній формі, множина шуканих невідомих, де:  $x_{ij} = 1$ , якщо  $(i, j)$ -та дуга належить шуканому контуру,  $x_{ij} = 0$  в іншому випадку, або  $X = \{x_i\}$  – шуканий результат у векторній формі, множина шуканих невідомих у вигляді комбінації  $n$  номерів вузлів,
- $S$  – схема контуру на площині.

Відповідно, для постановки й розв'язання задачі про комівояжера маємо зважений граф (або неорієнтовану мережу), де треба знайти найкоротший замкнений контур, який складається точно з  $n$  дуг й проходить через кожен вузол один лише раз (це задача про мінімальний гамільтонів контур, визначена ірландським математиком Гамільтоном у 1800-ті роки, яка довгі роки сприймалася як звичайна головоломка).

### Задача оптимізації

I. Знайти план  $X = \{x_{ij}\}$  та  $U = \{u_i\}$ , такі, щоб

II. ЦФ  $K = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$

III. за обмежень:

(а)  $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$ , з кожного вузла можна вийти 1 раз

(б)  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$ , у кожен вузол можна увійти 1 раз

ці два обмеження забезпечують умову 1-разового відвідування кожного міста,

(в)  $u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, i, j = 2, 3, \dots, n, i \neq j, u_i, u_j$  – довільні значення,

при  $i = j$   $u_i - u_j + nx_{ij} = 0$ ;

це обмеження забезпечує неможливість розриву контуру на окремі підконтури

та граничних умов: усі  $x_{ij} \in \{0, 1\}$ .

n	$n^2+n-1$	$n^2+1$
4	19	17
5	29	26
6	41	37
7	55	50
8	71	65
9	89	82
10	109	101
11	131	122
12	155	145
13	181	170
14	209	197
15	239	226

Таким чином, для задачі обходу  $n$  міст треба знайти:  $n^2$  значень матриці  $X$ ,  $n-1$  значень вектора  $U$ , разом:  $n^2+n-1$  невідомих із загальним числом обмежень  $n^2+1$  (табл.). Отже, з допустимим числом невідомих (200) і обмежень (100) в Excel можна розв'язати задачу комівояжера з числом міст до 13.

### Приклад 1. Симплекс-метод лінійного програмування

#### Постановка задачі.

На площині задано координати 6 пунктів, розв'язати задачу комівояжера як закриту задачу про призначення (кількість претендентів = кількості вакансій).

#### **Задача оптимізації**

I. Знайти план  $X = \{x_{ij}\}$  такий, щоб

II. ЦФ  $K = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$

III. за обмежень:

(а)  $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$ , з кожного вузла можна вийти 1 раз

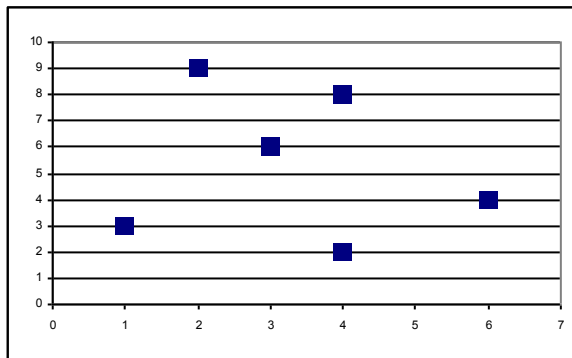
(б)  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$ , у кожен вузол можна увійти 1 раз

ці два обмеження забезпечують умову 1-разового відвідування кожного міста, та граничних умов: усі  $x_{ij} \in \{0,1\}$ .

#### Порядок роботи

- 1) Увести назви міст та їх координати
- 2) Побудувати діаграму Точечная:

М-1	3	6
М-2	4	2
М-3	6	4
М-4	2	9
М-5	4	8
М-6	1	3



- 3) Сформуванати матрицю відстаней  $A(6,6)$  обчисленнями значень  $a_{ij}$  за формулою:

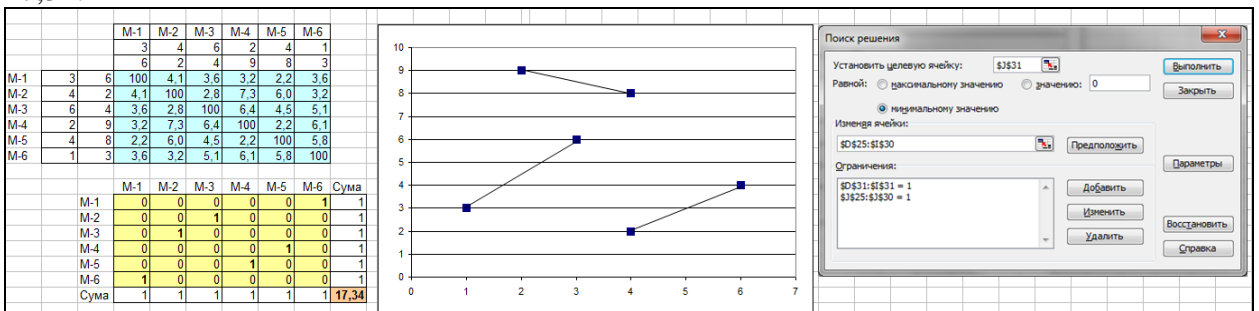
$$a_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \text{ усі діагональні елементи } (a_{ii}) = 100 \text{ (аналог } \infty)$$

			М-1	М-2	М-3	М-4	М-5	М-6
			3	4	6	2	4	1
			6	2	4	9	8	3
М-1	3	6	100	4,1	3,6	3,2	2,2	3,6
М-2	4	2	4,1	100	2,8	7,3	6,0	3,2
М-3	6	4	3,6	2,8	100	6,4	4,5	5,1
М-4	2	9	3,2	7,3	6,4	100	2,2	6,1
М-5	4	8	2,2	6,0	4,5	2,2	100	5,8
М-6	1	3	3,6	3,2	5,1	6,1	5,8	100

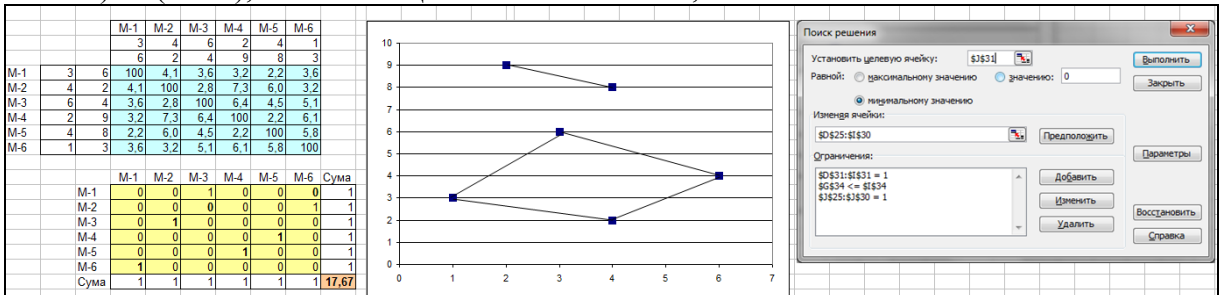
- 4) Сформуванати матрицю  $X$ , знайти суми елементів по рядках та стовпцях й обчислити значення цільової функції (ЦФ):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
14				M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	
15				3	4	6	2	4	1	
16				6	2	4	9	8	3	
17	M-1	3	6	100	4.1	3.6	3.2	2.2	3.6	
18	M-2	4	2	4.1	100	2.8	7.3	6.0	3.2	
19	M-3	6	4	3.6	2.8	100	6.4	4.5	5.1	
20	M-4	2	9	3.2	7.3	6.4	100	2.2	6.1	
21	M-5	4	8	2.2	6.0	4.5	2.2	100	5.8	
22	M-6	1	3	3.6	3.2	5.1	6.1	5.8	100	
23										
24				M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	Сума
25			M-1							0
26			M-2							0
27			M-3							0
28			M-4							0
29			M-5							0
30			M-6							0
31			Сума	0	0	0	0	0	0	0

5) Сформувати табличну модель задачі про призначення й знайти її розв'язок. Як й передбачалося, шуканий контур розпався на три підконттури: (1-6-1), (2-3-2), (4-5-4), які побудовано на діаграмі, значення плану:  $(x_{16}, x_{23}, x_{32}, x_{45}, x_{54}, x_{61}) = 1$ , інші – нулі, ЦФ = 17,34:

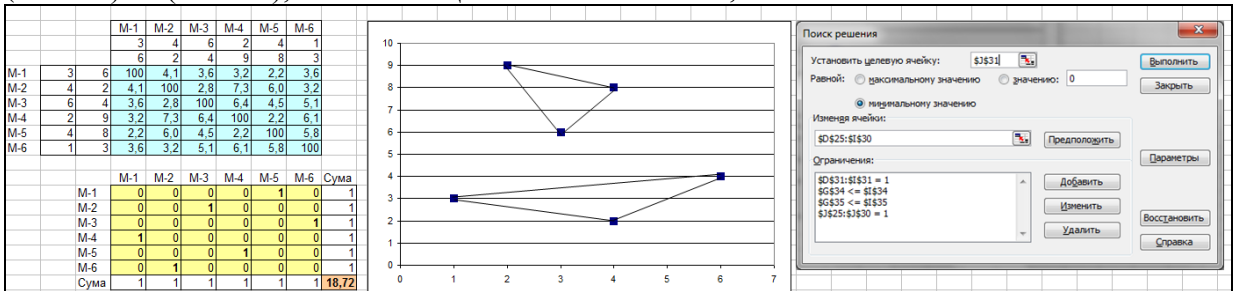


6) Вирішуємо розірвати підконтур (1-6-1), для цього формуємо додаткове обмеження:  $x_{16} + x_{61} \leq 1$  й уводимо в модель; отримано новий результат, за яким є два підконттури: (1-3-2-6-1) та (4-5-4), значення ЦФ збільшилося на 0,33:

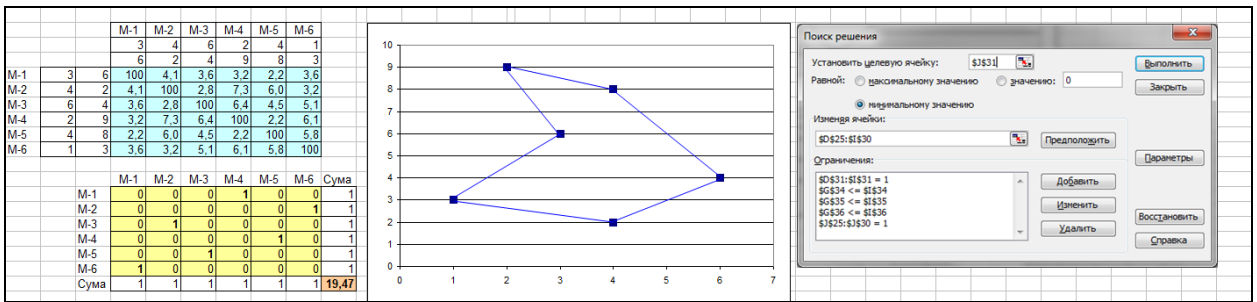


7) Вирішуємо розірвати підконтур (4-5-4), для цього формуємо друге додаткове обмеження:  $x_{45} + x_{54} \leq 1$  й уводимо в модель, отримано новий результат, за яким є два підконттури:

(1-5-4-1) та (2-3-6-2), значення ЦФ збільшилося на 1,05:



8) Вирішуємо розірвати підконтур (1-5-4-1), для цього формуємо третє додаткове обмеження:  $x_{15} + x_{51} + x_{54} + x_{45} + x_{41} + x_{14} \leq 2$  й уводимо його в модель; отримано новий результат, за яким знайдено оптимальний контур (1-4-5-3-2-6-1), його мінімальна довжина (значення ЦФ) дорівнює 19,47:



**Висновок:** модель лінійного програмування вимагає виконувати багато допоміжної роботи щодо визначення підконтурів для розірвання та уведення відповідних обмежень.

## Приклад 2. Метод «гілок і границь» булевого програмування

**Постановка задачі** (див. приклад 1).

Використовується наведена вище математична модель.

**Порядок роботи**

Виконати пункти 1÷5.

6) Сформувані допоміжну матрицю з метою реалізації обмеження (в), використавши шаблон матриці X

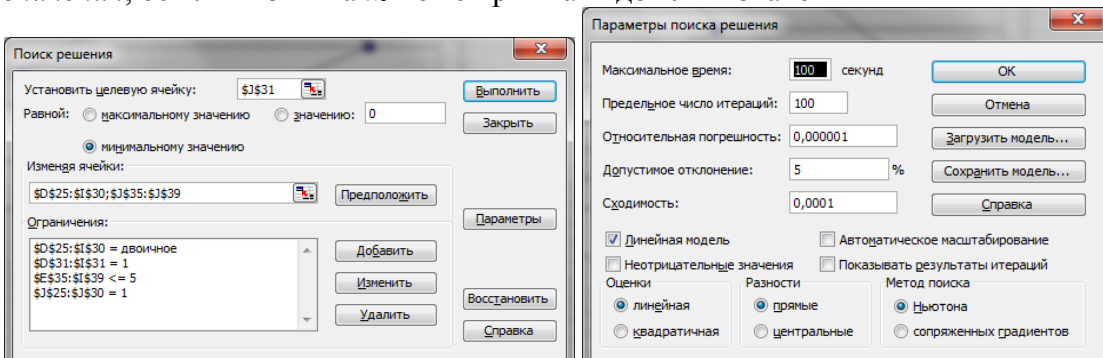
7) Визначити стовпець з 5 клітинок для елементів  $u_i$  шуканого вектора U, транспонуванням визначити рядок з 5 клітинок для елементів  $u_j$

8) Сформувані матрицю лівих частин обмежень, на її діагоналі нулі:

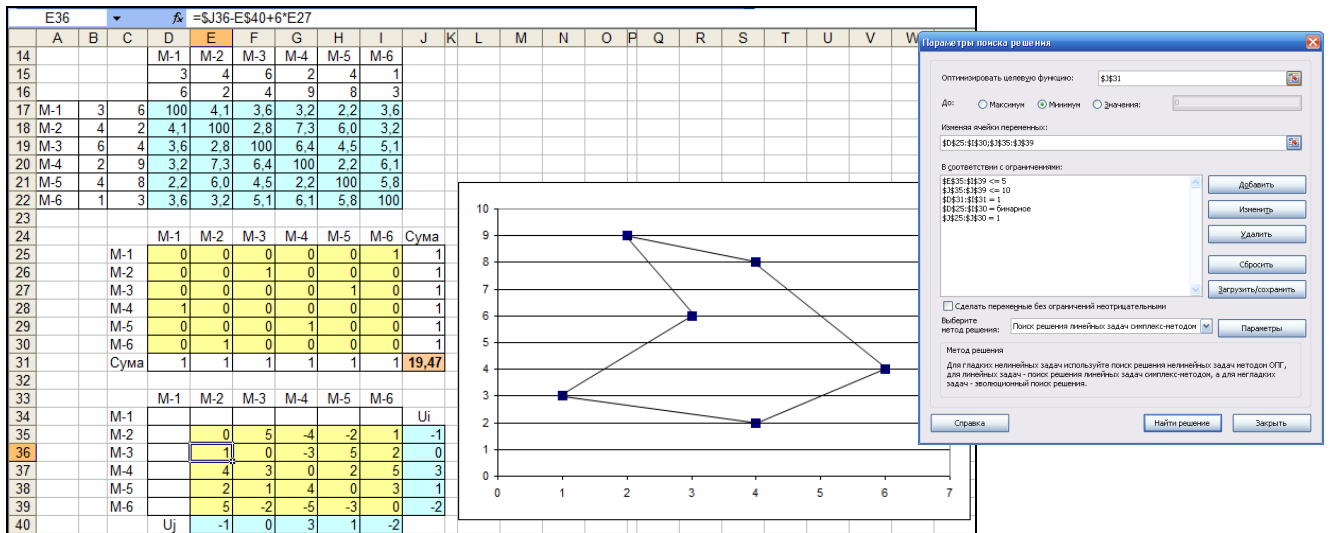
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
33				M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	
34			M-1							$U_i$
35			M-2		0	5	-4	-2	1	-1
36			M-3		1	0	-3	5	2	0
37			M-4		4	3	0	2	5	3
38			M-5		2	1	4	0	3	1
39			M-6		5	-2	-5	-3	0	-2
40				$U_j$	-1	0	3	1	-2	

9) В табличну модель увести обмеження (в), для цього у вікні *Поиск решения*:

- у поле *Изменяя ячейки* додати адреси елементів  $u_i$
- у полі *Ограничения*: додати обмеження на двійковий тип матриці X та обмеження (в)
- у вікні *Параметры поиска решения* зняти галочку з позиції *Неотрицательные значения*, оскільки змінна  $u_i$  може приймати довільні значення



Результат:



**Висновок:** цим методом можна знайти зразу шуканий контур обходу, але за цю можливість ми «розплачуємося» додатковими обмеженнями, тож область роботи цього методу суттєво обмежується граничними значеннями кількості невідомих та обмежень Excel: до 200 змінних та до 100 обмежень.

**Зауваження.** В середовищі Excel 2010 у вікно *Параметри пошука рішення* треба внести такі зміни: для шуканих змінних  $x_i$  рекомендується нести певне обмеження, наприклад, не менше 10, далі у полі *Виберіть метод рішення* вибрати *Поиск решения линейных задач симплекс-методом*.

### Приклад 3. Еволюційний метод

Цю ж задачу комівояжера для найкоротшого обходу 6 пунктів розв'яжемо за допомогою методу *Эволюционный поиск решения* в Excel 2010.

### Позначення

$i$  – поточний номер шуканої змінної (співпадає із номером міста в контурі),  $i = 1, \dots, 6$

$X = \{x_i\}$  – шуканий вектор невідомих,  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$D = \{d(i, j)\}$  – вектор відстаней між парами сусідніх вузлів у контурі обходу розміром з 6 елементів, де  $i < j$  (номер  $i$  передує номеру  $j$ ).

### Задача оптимізації

I. Знайти план обходу  $X = \{x_i\}$ , такий, щоб

II. ЦФ: довжина контуру  $K = \sum_{i,j=1}^6 d_{ij} \rightarrow \min$

III. За обмежень:  $x_i \in \{\text{все разные}\}$ .

### Порядок роботи

Повторити пункти 1÷3

4) Сформувати рядок  $X$  і заповнити його порядковими номерами, у наступній  $(n+1)$ -ій клітинці зробити посилання на 1-ий елемент цього рядка (щоб замкнути контур або цикл). Обчислити відстані між сусідніми клітинками за допомогою функції ИНДЕКС й обчислити їх суму за допомогою функції СУММ:

E54		fx =ИНДЕКС(\$D\$46:\$I\$51;D53;E53)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
43				M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6		
44				3	4	6	2	4	1		
45				6	2	4	9	8	3		
46	M-1	3	6	100	4.1	3.6	3.2	2.2	3.6		
47	M-2	4	2	4.1	100	2.8	7.3	6.0	3.2		
48	M-3	6	4	3.6	2.8	100	6.4	4.5	5.1		
49	M-4	2	9	3.2	7.3	6.4	100	2.2	6.1		
50	M-5	4	8	2.2	6.0	4.5	2.2	100	5.8		
51	M-6	1	3	3.6	3.2	5.1	6.1	5.8	100		
52											
53			X=	1	2	3	4	5	6	1	ЦФ
54			Відстань=	4.12	2.83	6.40	2.24	5.83	3.61	61	25.03

5) Командою *Данные* → *Поиск решения* викликати вікно *Параметры поиска решения* і заповнити його поля вказаним чином

6) Натиснути на *Параметры*, визначити у цьому вікні режим роботи програми, *OK* і у попередньому вікні натиснути на *Найти решение*:

Починається процес обчислень – у рядку стану внизу вікна поступово виводиться повідомлення такого вигляду:

Действующее: 19,4667376530463 Подзадача: 260 Состояние поиска решения: 0 Ячейка целевой функции: 19,4667376530463

де видно: нове значення ЦФ, номер підзадачі і попереднє значення ЦФ.

Процес припиняється, коли:

- значення ЦФ не змінюється в межах заданої точності або
  - вичерпані граничні значення заданих параметрів
- і пропонується альтернатива: *Продолжить/Остановить*.

Процес оптимізаційного моделювання завершується за командою *Остановить*.

The image shows two dialog boxes from the Excel Solver interface. The left dialog box is titled "Параметры поиска решения" (Solver Parameters). It shows the target cell as \$K\$4, the variable cells as \$D\$53:\$I\$53, and constraints as \$D\$53:\$I\$53 <= Все раннее. The right dialog box is titled "Параметры" (Solver Options). It shows the precision of the constraints as 0.000001, the maximum time as 100 seconds, and the number of iterations as 100.

## Результат

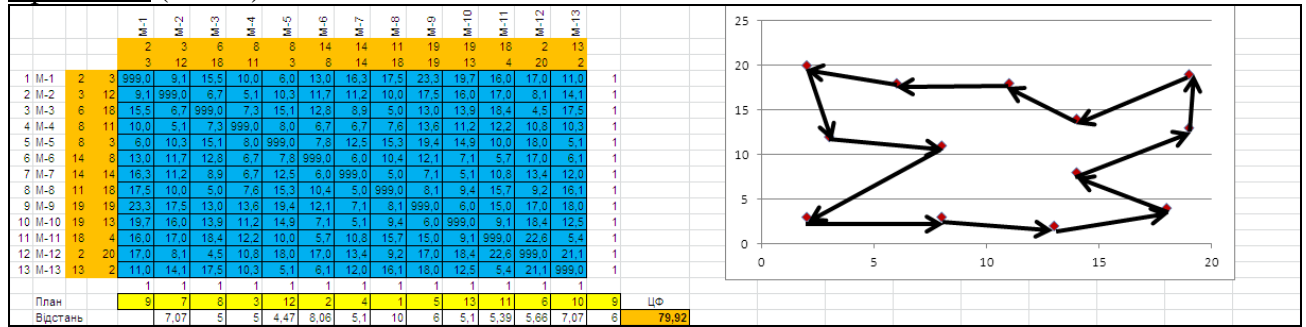
Знайдено оптимальний контур обходу  $X = \{4, 5, 3, 2, 6, 1, 4\}$  із мінімальною довжиною 19,47. Результат співпав з усіма попередніми результатами, але отримано його значно швидше з мінімальними витратами часу та розміру документа.

K54		fx =СУММ(E54:J54)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
43				M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6		
44				3	4	6	2	4	1		
45				6	2	4	9	8	3		
46	M-1	3	6	100	4.1	3.6	3.2	2.2	3.6		
47	M-2	4	2	4.1	100	2.8	7.3	6.0	3.2		
48	M-3	6	4	3.6	2.8	100	6.4	4.5	5.1		
49	M-4	2	9	3.2	7.3	6.4	100	2.2	6.1		
50	M-5	4	8	2.2	6.0	4.5	2.2	100	5.8		
51	M-6	1	3	3.6	3.2	5.1	6.1	5.8	100		
52											
53			X=	4	5	3	2	6	1	4	ЦФ
54			Відстань=	2.24	4.47	2.83	3.16	3.61	3.16	19.47	

Усі наступні приклади реалізовані за допомогою еволюційного методу, бо із урахуванням розмірів цих задач альтернативи цьому методу нема. Початковими даними є координати географічних об'єктів чи тестові дані, отримані за допомогою генератора випадкових чисел.

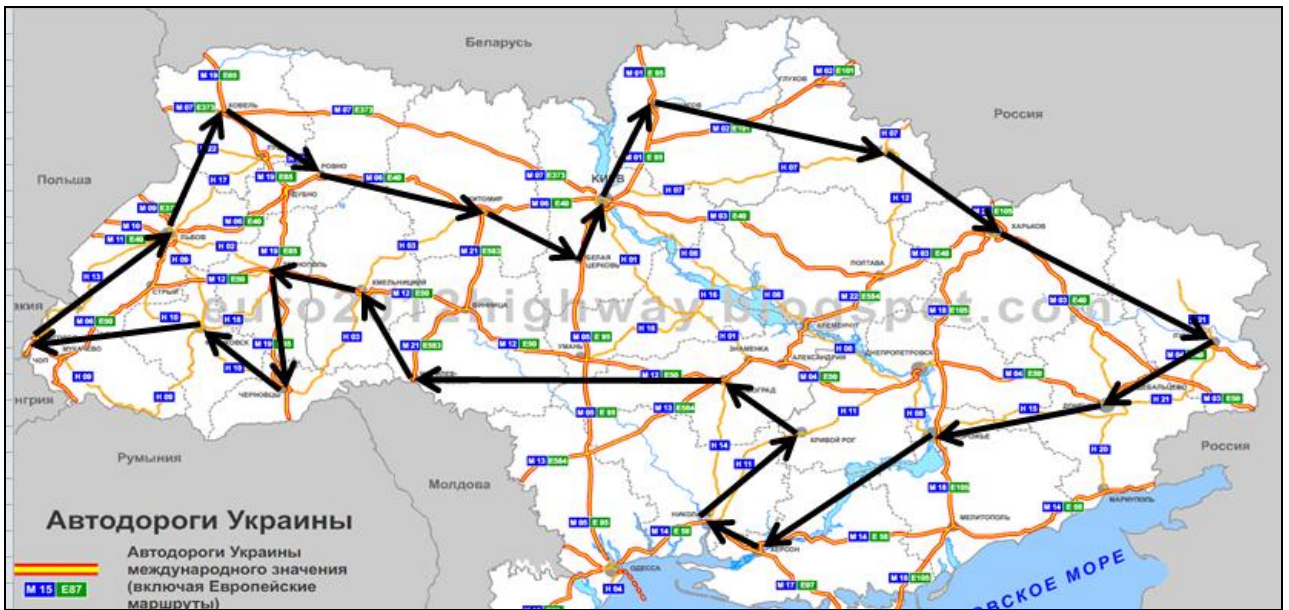


Приклад 4 (n = 13).

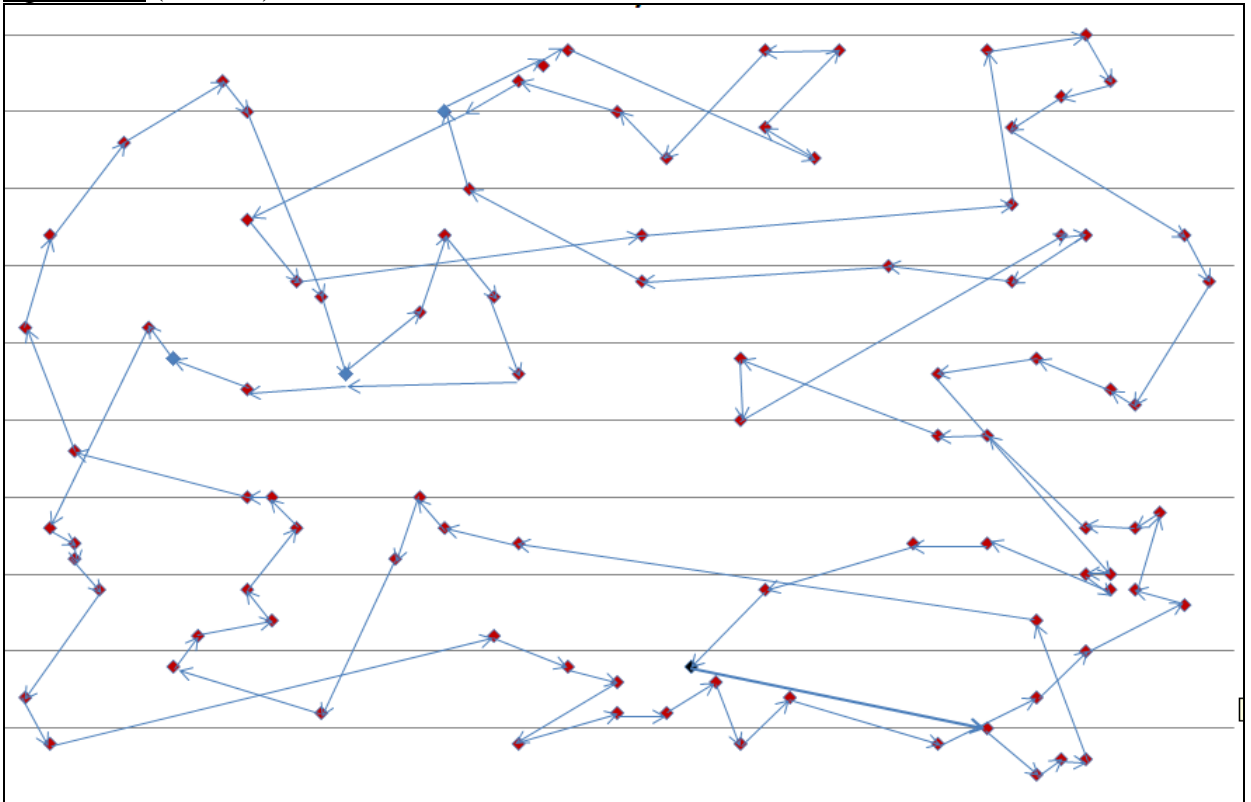


Приклад 5 (n = 22).

			Ужгород	Львів	Ів.-Фр.	Рівне	Чернівці	Ковель	Хмельницький	Мог.-Под.	Тернопіль	Житомир	Київ	Чернігів	Суми	Б.-Церква	Кіровоград	Миколаїв	Херсон	Зпоріжжя	Донецьк	Луганськ	Харків	Кр.-Ріг		
			1	5	6	9	8	6	10	12	8	14	18	18	25	17	21	20	22	27	31	34	28	23		
			11	15	11	17	9	20	13	9	13	16	16	20	17	14	9	4	2	7	8	10	15	7		
1	Ужгород	1	11	999	5,7	5,0	10,0	7,3	10,3	9,2	11,2	7,3	13,9	17,7	19,2	24,7	16,3	20,1	20,2	22,8	26,3	30,1	33,0	27,3	22,4	
2	Львів	5	15	5,7	999	4,1	4,5	6,7	5,1	5,4	9,2	3,6	9,1	13,0	13,9	20,1	12,0	17,1	18,6	21,4	23,4	26,9	29,4	23,0	19,7	
3	Ів.-Фр.	6	11	5,0	4,1	999	6,7	2,8	9,0	4,5	6,3	2,8	9,4	13,0	15,0	19,9	11,4	15,1	15,7	18,4	21,4	25,2	28,0	22,4	17,5	
4	Рівне	9	17	10,0	4,5	6,7	999	8,1	4,2	4,1	8,5	4,1	5,1	9,1	9,5	16,0	8,5	14,4	17,0	19,8	20,6	23,8	26,0	19,1	17,2	
5	Чернівці	8	9	7,3	6,7	2,8	8,1	999	11,2	4,5	4,0	9,2	12,2	14,9	18,8	10,3	13,0	13,0	15,7	19,1	23,0	26,0	20,9	15,1		
6	Ковель	6	20	10,3	5,1	9,0	4,2	11,2	999	8,1	12,5	7,3	8,9	12,6	12,0	19,2	12,5	18,6	21,3	24,1	24,7	27,7	29,7	22,6	21,4	
7	Хмельницький	10	13	9,2	5,4	4,5	4,1	4,5	8,1	999	4,5	2,0	5,0	8,5	10,8	15,5	7,1	11,7	13,5	16,3	18,0	21,8	24,2	18,1	14,3	
8	Мог.-Под.	12	9	11,2	9,2	6,3	8,5	4,0	12,5	4,5	999	5,7	7,3	9,2	12,5	15,3	7,1	9,0	9,4	12,2	15,1	19,0	22,0	17,1	11,2	
9	Тернопіль	8	13	7,3	3,6	2,8	4,1	4,0	7,3	2,0	5,7	999	6,7	10,4	12,2	17,5	9,1	13,6	15,0	17,8	19,9	23,5	26,2	20,1	16,2	
10	Житомир	14	16	13,9	9,1	9,4	5,1	9,2	8,9	5,0	7,3	6,7	999	4,0	5,7	11,0	3,6	9,9	13,4	16,1	15,8	18,8	20,9	14,0	12,7	
11	Київ	18	16	17,7	13,0	13,0	9,1	12,2	12,6	8,5	9,2	10,4	4,0	999	4,0	7,1	2,2	7,6	12,2	14,6	12,7	15,3	17,1	10,0	10,3	
12	Чернігів	18	20	19,2	13,9	15,0	9,5	14,9	12,0	10,6	12,5	12,2	5,7	4,0	999	7,6	6,1	11,4	16,1	18,4	15,8	17,7	18,9	11,2	13,9	
13	Суми	25	17	24,7	20,1	19,9	16,0	18,8	19,2	15,5	15,3	17,5	11,0	7,1	7,6	999	8,5	8,9	13,9	15,3	10,2	10,8	11,4	3,6	10,2	
14	Б.-Церква	17	14	16,3	12,0	11,4	8,5	10,3	12,5	7,1	9,1	3,6	2,2	6,1	8,5	999	6,4	10,4	13,0	12,2	15,2	17,5	11,0	9,2		
15	Кіровоград	21	9	20,1	17,1	15,1	14,4	13,0	18,6	11,7	9,0	13,6	9,9	7,6	11,4	8,9	6,4	999	5,1	7,1	6,3	10,0	13,0	9,2	2,8	
16	Миколаїв	20	4	20,2	18,6	15,7	17,0	13,0	21,3	13,5	9,4	15,0	13,4	12,2	16,1	13,9	10,4	5,1	999	2,8	7,6	11,7	15,2	13,6	4,2	
17	Херсон	22	2	22,8	21,4	18,4	19,8	15,7	24,1	16,3	12,2	17,8	16,1	14,6	18,4	15,3	13,0	7,1	2,8	999	7,1	10,8	14,4	14,3	5,1	
18	Зпоріжжя	27	7	26,3	23,4	21,4	20,6	19,1	24,7	18,0	15,1	19,9	15,8	12,7	15,8	10,2	12,2	6,3	7,6	7,1	999	4,1	7,6	8,1	4,0	
19	Донецьк	31	8	30,1	26,9	25,2	23,8	23,0	27,7	21,6	19,0	23,5	18,8	15,3	17,7	10,8	15,2	10,0	11,7	10,8	4,1	999	3,6	7,6	8,1	
20	Луганськ	34	10	33,0	29,4	28,0	26,0	26,0	29,7	24,2	22,0	26,2	20,9	17,1	18,9	11,4	17,5	13,0	15,2	14,4	7,6	3,6	999	7,8	11,4	
21	Харків	28	15	27,3	23,0	22,4	19,1	20,9	22,8	18,1	17,1	20,1	14,0	10,0	11,2	3,6	11,0	9,2	13,6	14,3	8,1	7,6	7,8	999	9,4	
22	Кр.-Ріг	23	7	22,4	19,7	17,5	17,2	15,1	21,4	14,3	11,2	16,2	12,7	10,3	13,9	10,2	9,2	2,8	4,2	5,1	4,0	8,1	11,4	9,4	999	
	План			3	1	2	6	4	10	14	11	12	13	21	20	19	18	17	16	22	15	8	7	9	5	3
	Відстань			5,0	5,7	5,1	4,2	5,1	3,6	2,2	4,0	7,6	3,6	7,8	3,6	4,1	7,1	2,8	4,2	2,8	9,0	4,5	2,0	4,0	2,8	100,97



Приклад 6 ( $n = 100$ )

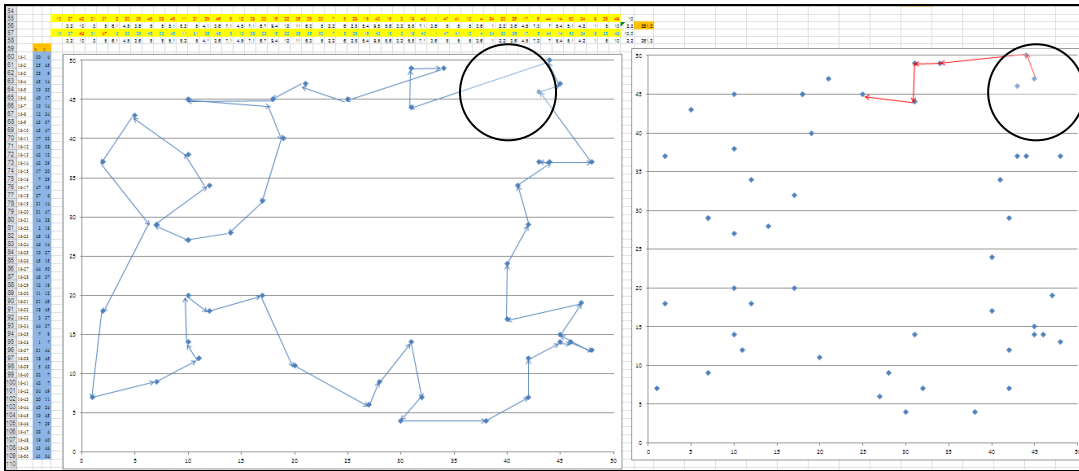


#### Корегування результату

Доведено, що найкоротший замкнений контур, що зв'язує  $n$  точок на площині, є замкненою ламаною зі сторонами, що не перетинаються. Наближений розв'язок задачі великого розміру може утворити перетини у вигляді петель, тож їх заміна ламаними – шлях до покращення шуканого результату.

#### Приклад 7.

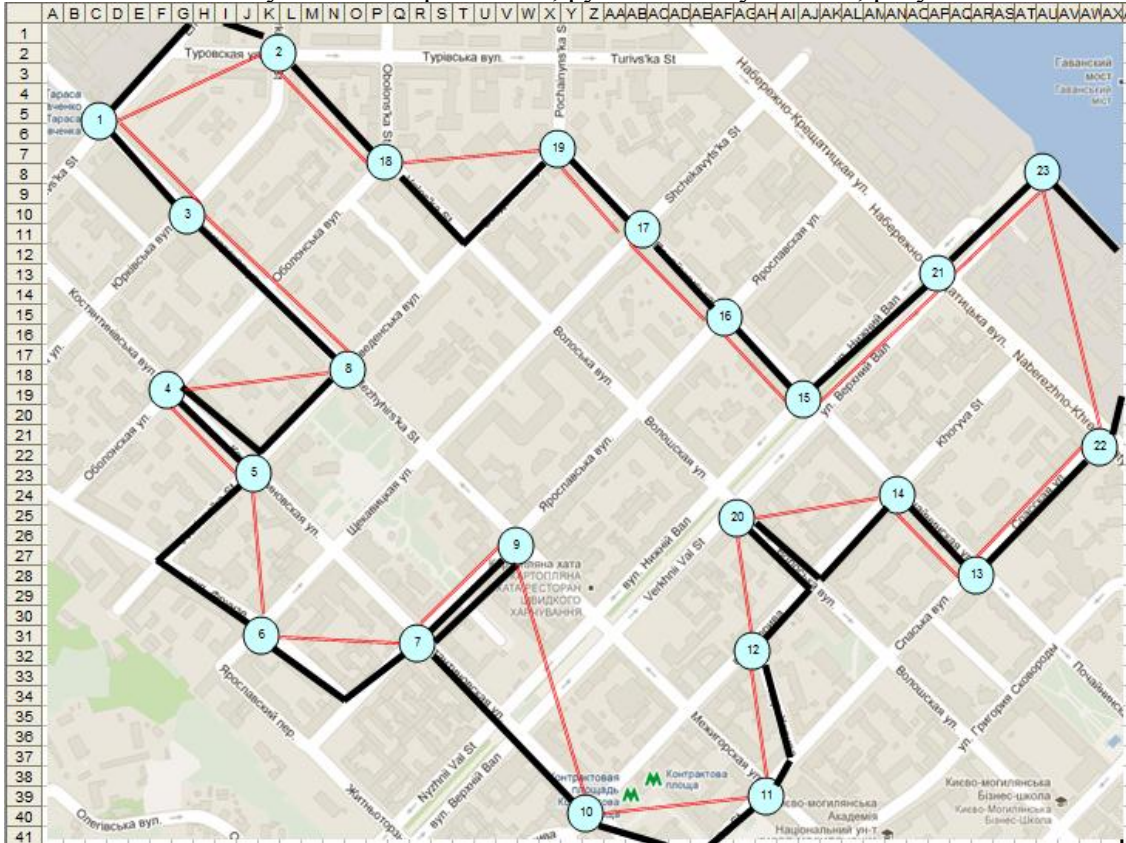
За допомогою еволюційного методу розв'язана задача комівояжера розміром  $50 \times 50$ , значення ЦФ склало величину 289,4, побудована схема контуру (зліва):



На діаграмі визначена петля, яка вручну замінено ламаною, що привело до зменшеного значення ЦФ величиною 281,3. Відповідний фрагмент оновленої комбінації номерів уведений в модель і повторний її запуск підтвердив оновлений результат. Таким чином, для задач великого розміру з'являється можливість дещо покращити отриманий наближений результат шляхом корекції певних фрагментів діаграми у вигляді перетинань.

### Приклад 8. Манхетенська метрика

Задача: обійти 23 пункти на карті Києва, рухаючись вулицями, результат:



### Стохастичне програмування в Excel: організація економічних досліджень та прийняття рішень в умовах невизначеності й ризику

Сучасна господарська практика містить суттєву частку невизначеності як в передбачуваних змінах зовнішнього середовища навколо фінансової діяльності, так і в очікуванні результатів від неї. В основі цього – складність і багатофакторність ринкового середовища, мінливість суб'єктивного сприйняття і формальних показників для ототожнення сутності

господарювання. Це створює сприятливу основу для виникнення найрізноманітніших ризиків навколо фінансових правочинів – операцій з цінними паперами, банківськими кредитами, вкладками (депозитами), іпотечними угодами тощо. На певному проміжку часу їх можна вважати детермінованими, тоді можна ставити питання щодо підбору відповідної математичної моделі та здійснити перехід до формалізованих методів управління з використанням сформованої ЕММ. Зі плином часу умови реалізації фінансового правочину змінюються й тоді детермінований підхід змушує вводити в модельне обчислення стохастичну складову. Стохастична (від грецьк. *stochastikos* – вмючий вгадувати, тобто, ймовірна) модель дозволяє врахувати ефекти випадкової змінюваності певних параметрів чи функцій.

### Задача 9.5. Про суміш (СП)

#### Постановка задачі

Фермер хоче закупити три види зернових культур, щоб готувати з них суміш для відгодівлі худоби. Відомі конкретні (детерміновані) дані щодо ціни кожного продукту та вмісту поживних речовин (в розрахунку на одиницю маси) у ньому, зате потреби худоби в цих речовинах мають випадкову природу й для них можна задати лише границі (мінімальні та максимальні) їх значень, при цьому ймовірність задовольнити індивідуальні потреби в усіх поживних речовинах має бути не менша ніж 0,9:

	Кормова маса	Протеїни	Лізин	Кальцій	Ціна
Ячмінь	0,9	0,06	0,01	0,01	45
Кукурудза	0,9	0,05	0,02	0,01	40
Горох	0,9	0,04	0,01	0,02	50
Макс. потреби	101	200	50	20	
Мін. потреби	91	100	40	10	

Ставиться оптимізаційна задача пошуку такого плану закупівлі  $(x_1, x_2, x_3)$ , який би задовольнив визначені умови щодо вмісту поживних речовин у раціоні й забезпечив мінімальні загальні витрати коштів. Якщо задати значення потреб у кожному продукті у вигляді фіксованих норм, які визначають нижню границю системи обмежень, отримуємо класичну задачу ЛП про оптимальну суміш (раціон), на основі цієї детермінованої економіко-математичної моделі рішення приймають в умовах визначеності.

#### Задача лінійної оптимізації

I) знайти план закупівлі  $X = (x_1, x_2, x_3)$ , такий, щоб

II) загальна вартість (цільова функція)  $V = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3 \rightarrow \min$

III) за обмежень (не менше мінімуму/максимуму), тобто маємо систему (1):

$$\begin{cases} 0,9x_1 + 0,9x_2 + 0,9x_3 \geq 91(101) \\ 0,06x_1 + 0,05x_2 + 0,04x_3 \geq 100(200) \\ 0,01x_1 + 0,02x_2 + 0,01x_3 \geq 40(50) \\ 0,01x_1 + 0,01x_2 + 0,02x_3 \geq 10(20) \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

#### Результат

- по мінімуму потреб:

	Кормова маса	Протеїни	Лізин	Кальцій	Ціна	План (X)	Вартість
Ячмінь	0,9	0,06	0,01	0,01	45	0	0
Кукурудза	0,9	0,05	0,02	0,01	40	2000	80000
Горох	0,9	0,04	0,01	0,02	50	0	0
Макс. потреби	101	200	50	20		Сума=	80000
Мін. потреби	91	100	40	10			
Вміст	1800	100	40	20			

- по максимуму потреб:

	Кормова маса	Протеїни	Лізин	Кальцій	Ціна	План (X)	Вартість
Ячмінь	0,9	0,06	0,01	0,01	45	2142,9	96428,57
Кукурудза	0,9	0,05	0,02	0,01	40	1428,6	57142,86
Горох	0,9	0,04	0,01	0,02	50	0	0,00
Макс. потреби	101	200	50	20		Сума=	153571,43
Мін. потреби	91	100	40	10			
Вміст	3214,3	200,0	50,0	35,7			

Необхідність балансування вмісту продуктів у раціоні – це уведення додаткових обмежень у модель що, зрозуміло, погіршить значення цільової функції, тобто, збільшать загальні витрати. Отже, діапазон «ідеальних» витрат становить 80000÷153571 гр. од. При цьому нижня границя – 80 тис. гр. од. – це дешеві корми й низька якість майбутньої м'ясної продукції; верхня – майже вдвічі вища за мінімальну границю (153,6 тис. гр. од.) – це перевитрати коштів й недотримання умов раціональної відгодівлі худоби.

Зважена й обґрунтована така собі «золота середина» визначається із врахуванням ризику щодо нераціональних значень шуканих величин закупівель згідно ймовірнісних властивостей потреб випадкової природи. Для цього здійснюється перехід від детермінованої моделі лінійного програмування й прийняття рішення в умовах визначеності до моделі стохастичного програмування й прийняття рішення в умовах невизначеності й ризику.

### Задача стохастичного лінійного програмування

Результат досягається через перетворення величин випадкової природи у складі прикладної задачі у детерміновані за допомогою методів теорії ймовірностей, щоб надалі скористатися потужними засобами оптимізаційного моделювання. У поставленій задачі про оптимальну суміш такою випадковою величиною є «ймовірність задовольнити індивідуальні потреби кожної тварини в усіх поживних речовинах не менша 0,9», критерій оптимальності буде таким же:

загальна вартість  $V = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3 \rightarrow \min$ , ймовірність 0,9 враховується лише у перетворенні системи обмежень.

Нехай шукані потреби в поживних речовинах задані узагальненим набором невідомих  $(a; b; c; d)$ . Тоді, отримуємо таку систему обмежень:

$$\begin{cases} P(0,9x_1 + 0,9x_2 + 0,9x_3 \geq a) \geq 0,9 \\ P(0,06x_1 + 0,05x_2 + 0,04x_3 \geq b) \geq 0,9 \\ P(0,01x_1 + 0,02x_2 + 0,01x_3 \geq c) \geq 0,9 \\ P(0,01x_1 + 0,01x_2 + 0,02x_3 \geq d) \geq 0,9 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Для того, щоб звільнитися від ймовірностей й надалі перейти до задачі лінійної оптимізації, представимо дану систему нерівностей в такому еквівалентному їй вигляді:

$$\begin{cases} 0,9x_1 + 0,9x_2 + 0,9x_3 \geq a_1 \\ 0,06x_1 + 0,05x_2 + 0,04x_3 \geq b_1 \\ 0,01x_1 + 0,02x_2 + 0,01x_3 \geq c_1 \\ 0,01x_1 + 0,01x_2 + 0,02x_3 \geq d_1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

де здійснюється перехід від «випадкового» набору  $(a; b; c; d)$  до такого набору  $a_1, b_1, c_1, d_1$ , який би задовольняв співвідношенням:

$$P(a \leq a_1) = 0,9, P(b \leq b_1) = 0,9, P(c \leq c_1) = 0,9, P(d \leq d_1) = 0,9.$$

Значення  $a_1, b_1, c_1, d_1$  можна обчислити, лише знаючи, за яким законом розподілена випадкова величина потреб однієї тварини в тій чи іншій поживній речовині.

З теорії ймовірностей та математичної статистики (ТЙМС) відомо, що

$$P(a \leq a_1) = \int_{a_{\min}}^{a_1} f_a(u) du, \quad (5)$$

де  $f_a(u)$  – функція щільності випадкової величини  $a \in [a_{\min}; a_{\max}]$ .

В залежності від вигляду функцій розподілу використовується відповідний інструмент до розв'язання таких рівнянь. Зокрема, потужні й ефективні інструменти такого призначення представлені в середовищі Excel у вигляді спеціалізованих програм-надбудов (*Поиск решения*).

Варіант 1 (формульний, на основі ТЙМС). За досвідом, суб'єктивно чи статистично встановлено закон рівномірного розподілу щодо потреб у кожній речовині на заданому проміжку. Оскільки розподіл рівномірний, то можемо підрахувати  $a_1$  наступним чином:

$$\int_{a_{\min}}^{a_1} f_a(u) du = \frac{1}{a_{\max} - a_{\min}} \int_{a_{\min}}^{a_1} du = 0,9, \frac{1}{a_{\max} - a_{\min}} \int_{a_{\min}}^{a_1} du = 0,9, \frac{1}{101 - 91} \int_{91}^{a_1} du = 0,9, a_1 - 91 = 9, \\ a_1 = 100.$$

Аналогічно для  $b_1, c_1, d_1$  матимемо:

$$\frac{1}{b_{\max} - b_{\min}} \int_{b_{\min}}^{b_1} du = 0,9, \frac{1}{200 - 100} \int_{100}^{b_1} du = 0,9, \frac{1}{100} (b_1 - 100) = 0,9, b_1 - 100 = 90, b_1 = 190, \\ \frac{1}{c_{\max} - c_{\min}} \int_{c_{\min}}^{c_1} du = 0,9, \frac{1}{50 - 40} \int_{40}^{c_1} du = 0,9, \frac{1}{10} (c_1 - 40) = 0,9, c_1 - 40 = 9, c_1 = 49, \\ \frac{1}{d_{\max} - d_{\min}} \int_{d_{\min}}^{d_1} du = 0,9, \frac{1}{20 - 10} \int_{10}^{d_1} du = 0,9, \frac{1}{10} (d_1 - 10) = 0,9, d_1 - 10 = 9, d_1 = 19.$$

Отже, маємо систему обмежень задачі лінійної оптимізації:

$$\begin{cases} 0,9x_1 + 0,9x_2 + 0,9x_3 \geq 100 \\ 0,06x_1 + 0,05x_2 + 0,04x_3 \geq 190 \\ 0,01x_1 + 0,02x_2 + 0,01x_3 \geq 49 \\ 0,01x_1 + 0,01x_2 + 0,02x_3 \geq 19 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Розв'язок робимо в Excel за допомогою надбудови *Поиск решения*:

	Кормова маса	Протеїни	Лізин	Кальцій	Ціна	План (X)	Вартість
Ячмінь	0,9	0,06	0,01	0,01	45	1928,6	86785,71
Кукурудза	0,9	0,05	0,02	0,01	40	1485,7	59428,57
Горох	0,9	0,04	0,01	0,02	50	0	0,00
Потреби	100	190	49	19		Сума=	146214,29

Отримано оптимальний набір для закупівлі (0; 3800; 0), загальні витрати фермера при цьому становлять 152000 грн. та задовольняють умову мінімальності.

Варіант 2 (в Excel). За досвідом, суб'єктивно чи статистично встановлено закон **нормального розподілу** щодо потреб у кожній речовині. Це означає, що можемо записати:

$$P(a \leq a_1) = \int_{a_{\min}}^{a_1} f_a(u) du = \frac{1}{\sigma_a \sqrt{2\pi}} \int_{a_{\min}}^{a_1} e^{-\frac{(u-\mu_a)^2}{2\sigma_a^2}} du = 0,9,$$

де за **правилом трьох сигм**, логічно вважати:

$$a_{\min} = \mu_a - 3\sigma_a, a_{\max} = \mu_a + 3\sigma_a,$$

звідки отримаємо значення:

$$\mu_a = \frac{a_{\min} + a_{\max}}{2} = 96, \sigma_a = \frac{\mu - a_{\min}}{3} = \frac{a_{\max} - \mu}{3} = \frac{5}{3}.$$

Аналогічно отримуємо значення:

$$\mu_b = \frac{b_{\min} + b_{\max}}{2} = 150, \sigma_b = \frac{50}{3},$$

$$\mu_c = \frac{c_{\min} + c_{\max}}{2} = 45, \sigma_c = \frac{5}{3},$$

$$\mu_d = \frac{d_{\min} + d_{\max}}{2} = 15, \sigma_d = \frac{5}{3}.$$

З допомогою Excel знаходимо величини:

$$\text{НОРМОБР}(0,9;96;5/3)=98,14,$$

$$\text{НОРМОБР}(0,9;150;50/3)=171,36,$$

$$\text{НОРМОБР}(0,9;45;5/3)=47,14,$$

$$\text{НОРМОБР}(0,9;15;5/3)=17,14$$

Після цих перетворень маємо таку систему обмежень:

$$\begin{cases} 0,9x_1 + 0,9x_2 + 0,9x_3 \geq 98,14 \\ 0,06x_1 + 0,05x_2 + 0,04x_3 \geq 171,36 \\ 0,01x_1 + 0,02x_2 + 0,01x_3 \geq 47,14 \\ 0,01x_1 + 0,01x_2 + 0,02x_3 \geq 17,14 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

що відповідає детермінованій версії задачі.

Розв'язок в Excel (*Поиск решения*):

	Кормова маса	Протеїни	Лізин	Кальцій	Ціна	План (X)	Вартість
Ячмінь	0,9	0,06	0,01	0,01	45	1528,9	68798,57
Кукурудза	0,9	0,05	0,02	0,01	40	1592,6	63702,86
Горох	0,9	0,04	0,01	0,02	50	0	0,00
Потреби	98,14	171,36	47,14	17,14		Сума=	132501,43

оптимальний набір для закупівлі: (1528,9;1592,6;0). Витрати фермера становлять у цьому випадку 132501,43 гр. од. та задовольняють умову оптимальності.

## ДОДАТКИ

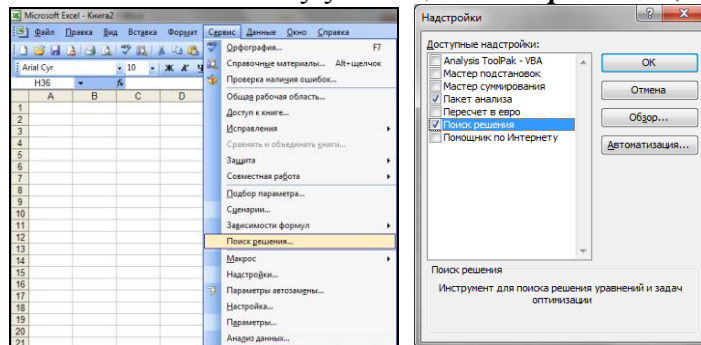
### Д1. Встановлення й виклик стандартної версії надбудови *Поиск решения (Solver Add-in)* в Excel 2003/2010

#### Встановлення

##### Excel 2003 (Поиск решения)

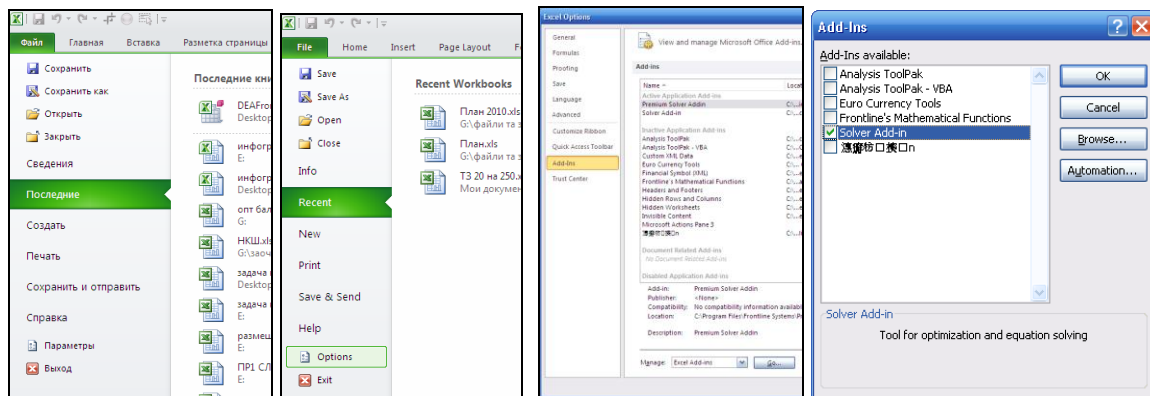
Встановлення:

1. Виконати команду: **Сервис** → **Надстройки**
2. У вікні **Надстройки** поставити галочку у позиції **Поиск решения**, **OK**

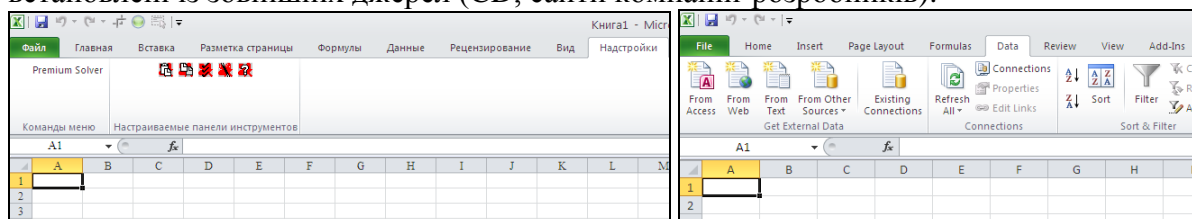


##### Excel 2010 (Поиск решения, Solver Add-in)

1. У меню **Файл (File)** вибрати пункт **Параметры (Options)**
2. У вікні **Параметры Excel (Excel Options)** вибрати пункт **Надстройки (Add-Ins)**
3. У закладці **Управление надстройками Microsoft Office (View and manage Microsoft Office Add-ins)** вікна **Параметры Excel** вибрати пункт **Перейти (Go...)**
4. У вікні **Надстройки (Add-Ins)** поставити галочку у позиції **Поиск решения (Solver Add-in)**, **OK**



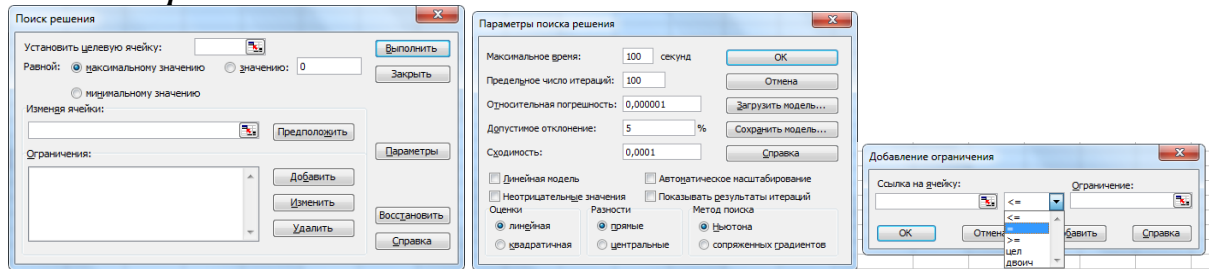
Пункт меню **Надстройки (Add-Ins)** містить ліцензовані чи пробні версії надбудов, встановлені із зовнішніх джерел (CD, сайти компаній-розробників):





## Виклик

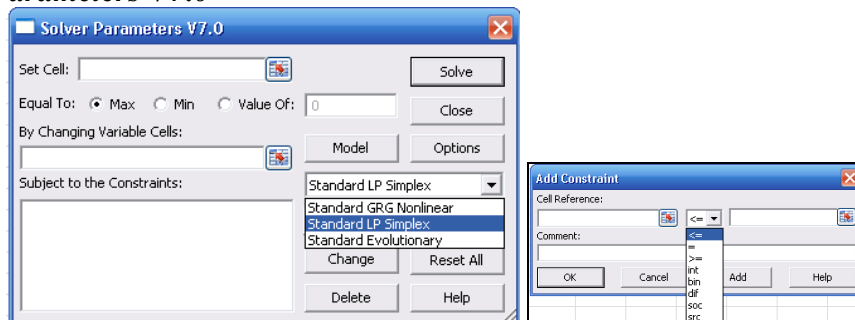
**Excel 2003:** Команда *Сервис* → *Поиск решения*  
Вікно *Поиск решения*



Вибір оптимізаційної моделі:

- лінійного програмування: увімкнути параметри *Линейная модель* та *Неотрицательные значения*
- цілочислового/булева програмувань: обмеження (тип шуканих невідомих) *цел/двоич* (целый/двоичный)
- нелінійного програмування: вимкнути параметр *Линейная модель*, додатково вибрати режими параметрів: *Оценки, Разности, Метод поиска*.

**Excel 2007:** Команда *Надстройки* → *Premium Solver*  
Вікно *Solver Parameters V7.0*

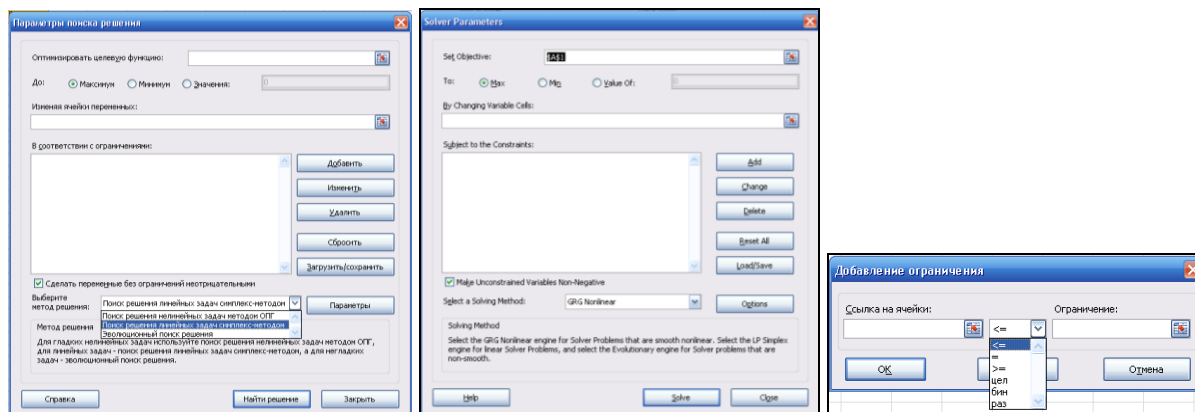


Вибір оптимізаційної моделі:

- лінійного програмування: *Standard LP Simplex*
- цілочислового/булева програмувань: обмеження (тип шуканих невідомих) *int/ bin* (целый/бинарный); з різними значеннями невідомих: тип обмеження *dif* (alldifferent, усі різні)
- узагальненого лінійного та квадратичного (конусного) програмування (second order cone programming, SOCR<sup>69</sup>): тип обмеження *soc* або *src* (rotated second order cone)
- нелінійного програмування (для гладких задач): *Standard GRG Nonlinear*
- нелінійного програмування (для негладких задач): *Standard Evolutionary*.

**Excel 2010:** Команда *Данные (Data)* → *Поиск решения (Solver Add-in)*  
Вікно *Параметры поиска решения*

<sup>69</sup> приклад обмеження  $A1 \geq \text{КОРЕНЬ}(\text{СУММКВ}(A2:A5))$  для шуканих змінних конусного програмування, використовується розв'язувач SOCR Barrier Solver



Вибір оптимізаційної моделі:

- лінійного програмування: **Метод решения** → **Поиск решения линейных задач симплекс-методом**
- цілочислового/булева програмувань: обмеження (тип шуканих невідомих) **цел/бин** (целый/бинарный); з різними значеннями невідомих: тип обмеження **раз** (разные)
- нелінійного програмування (для гладких задач): **Метод решения** → **Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ** (*Обобщенного приведенного градиента, Generalized Reduced Gradient, GRG Nonlinear*)
- нелінійного програмування (для негладких задач): **Метод решения** → **Эволюционный поиск решения.**

Поля й режими вікна **Поиск решения** (порівняльна таблиця)

Excel 2003	Excel 2010	Excel Solver
Установить целевую ячейку ...	Оптимизировать целевую функцию...	Set Cell ...
Изменяя ячейки ...	Изменяя ячейки переменных...	By Changing Variable Cells ...
Ограничения ...	В соответствии с ограничениями ...	Subject to the Constraints:
Сделать переменные без ограничений неотрицательными <input checked="" type="checkbox"/>	Параметры → Неотрицательные значения <input checked="" type="checkbox"/>	Options → Assume Non-negative <input checked="" type="checkbox"/>
Ссылка на ячейку:	Ссылка на ячейки:	Cell Reference:
Выполнить	Найти решение	Solve

## Д2. Система координат на географічній карті, вставленій в документ Excel

Для визначення координат пунктів (вузлів транспортної мережі) на карті формується прямокутна система координат, де горизонтальну вісь  $X$  визначають номери стовпців, а вертикальну вісь  $Y$  – номери рядків. Маючи координати пунктів (в клітинках), обчислюються відстані між певними парами вузлів за правилами теореми Піфагора (по прямій, що їх з'єднує) й знаючи розміри карти й екрану монітора ПК (в см) та масштаб карти (км/см), можна у цій системі координат наближено обчислювати відстані між парами пунктів в км.

### Порядок роботи

- 1) Створити й зберегти (у файлі чи у буфері обміну) рисунок карти регіону.
- 2) Завантажити MS Excel, рядки (вісь  $Y$ ) за стандартом вже мають числове позначення, тож треба задати лише числовий стиль (R1C1, Row-Column) позначення стовпців (це вісь  $X$ , що проходить зверху) командою:

Excel 2003	Excel 2010
Сервис → Параметры → Общие → Стиль ссылок R1C1	Файл → Параметры → Формулы → Стиль ссылок R1C1

- 3) Виділити 40-45 стовпців, а щоб клітинка мала квадратну форму (як зошит «в арифметику»), задати ширину 2 (символи), якщо використовується шрифт висотою 10 пунктів.
- 4) Вставити рисунок карти, починаючи з клітинки (1, 1), й відформатувати рисунок: обрізати зайве, пропорційно розтягнути у визначеній області таблиці.
- 5) Накреслити горизонтальну (направлену вліво) й вертикальну (направлену вверх) стрілки-показчики, щоб їх пересуванням точніше визначити координати вибраних пунктів.
- 6) Визначені координати внести в таблицю з 3-ох стовпців: Вузол, X, Y, яка надалі застосовується для розрахунку відстаней.
- 7) Для подальших дій вимкнути стиль R1C1.

Зразок:

Вузол	X	Y
Варшава	24	2
Тернополь	33	12
Будапешт	21	20
Вінниця	38	14
Київ	42	9
Братислава	17	18

Масштаб карти	200 км = 3 см
Довжина карти на моніторі ПК (см)	27
Довжина карти на моніторі (км)	200 км * 27/3 = 1800 км
Довжина карти в Excel (клітинки)	42
1 клітинка (прибл.) =	1800/42 = 42 км

Правило: відстань обчислюється в клітинках і домножується на 42.

Приклад:

Вінниця	Київ	$\sqrt{(38-42)^2 + (14-9)^2} \approx 6,4$ клітинок
офіційно	258 км (записниця)	

### Д3. Формування таблиці відстаней за даними географічної карти, вставленої в Excel

Задана (див. Додаток 2) таблиця, що містить назви населених пунктів (вузлів транспортної мережі) та їх координати (в клітинках електронної таблиці). Далі формується схема мережі, де визначаються пари вузлів, що з'єднуються між собою дугами, за цією схемою обчислюються відстані між певними парами вузлів за правилами теореми Піфагора у клітинках та км.

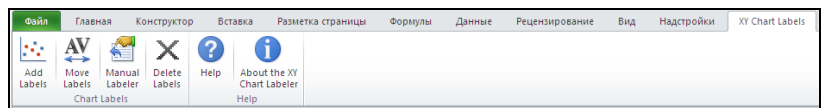
Формування вузлів мережі:

- вручну, кресленням кружечків з номерами на карті
- побудовою діаграми *Пузырьковая* із надписами<sup>70</sup> (зі зміною пунктів діаграма автоматично оновлюється).

Команда *XY Chart Labels*



Excel 2003



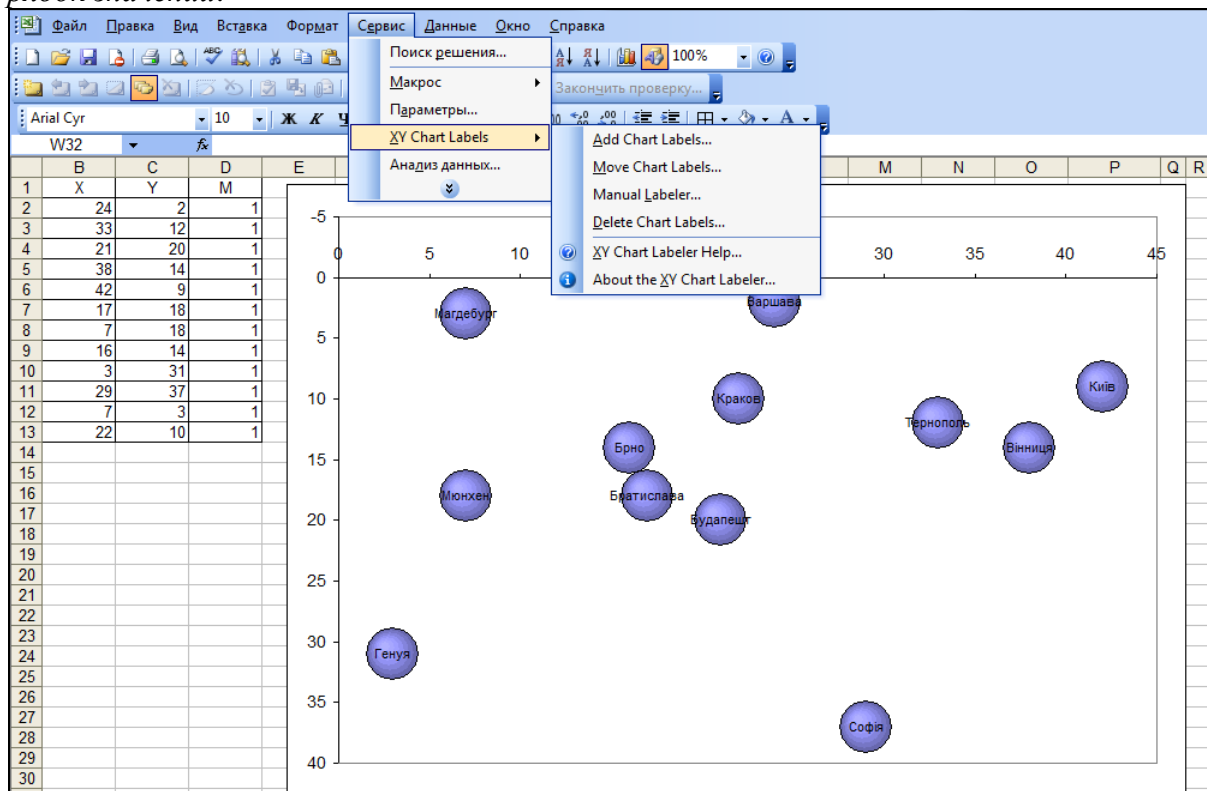
Excel 2010

Дуги, що з'єднують пари вузлів, зображуються стрілками вручну згідно завдання, щоб збудовану схему мережі повторно використовувати, варто її згрупувати й копіювати необхідну кількість разів для подальшого внесення змін.

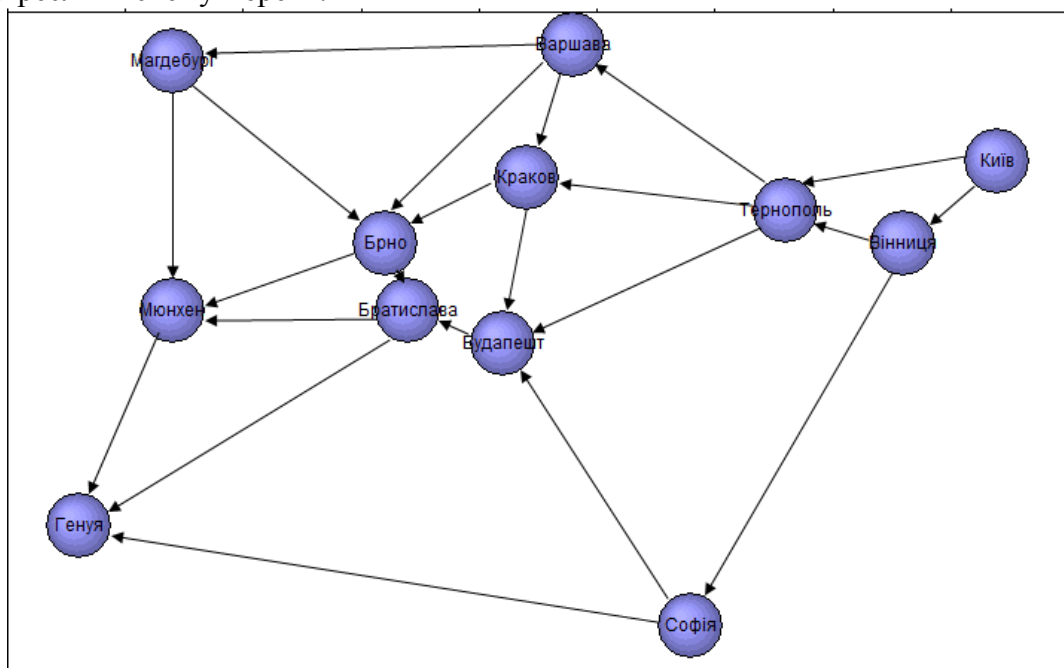
<sup>70</sup> щоб на діаграмах *Точечная* (XYChart) чи *Пузырьковая* показувати назви (мітки, labels) об'єктів (точок, бульбашок) за їх координатами, треба завчасно скачати спеціальну утиліту – програмну надбудову «лейблер» XYChartLabeler (автор R. Bovey) за адресою <http://appspro.com>. В Excel 2003 це команда *XY Chart Labels* меню Сервис, в Excel 2007/2010 – додатковий пункт меню

### Порядок роботи

- 1) Скопіювати таблицю вузлів та їх координат на окремий аркуш робочої книги, додати один стовпець M (маса) зі значеннями розмірів бульбашок (нехай, 1).
- 2) За трьома стовпцями (X, Y, M) таблиці побудувати й відформатувати діаграму Пузырьковая (задати 50% розмір бульбашки).
- 3) Командою Сервис → XY Chart Labels → Add Chart Labels... додати й відформатувати (розмістити по центру, шрифт 8) надписи бульбашкам-містам. Оскільки вісь Y визначена зверху, на діаграмі вертикальну вісь треба зобразити у зворотному напрямку, «зверху-донизу», для цього: ПКМ виділити вісь, команда Формат осей → Шкала → обратный порядок значений:



- 4) Накреслити схему мережі:



й перейти до обчислення таблиці відстаней.

### Задача пошуку найкоротшого шляху (НКШ)

Використовується лише задана таблиця, дані таблиці відстаней формуються за допомогою операції зв'язування:

									M=	42
Вузол	X	Y	Початок	X	Y	Кінець	X	Y	Відстань	Відстань (км)
Варшава	24	2	Київ	42	9	Вінниця	38	14	6,4	268,9
Тернопіль	33	12	Київ	42	9	Тернопіль	33	12	9,5	398,4
Будапешт	21	20	Вінниця	38	14	Тернопіль	33	12	5,4	226,2
Вінниця	38	14	Вінниця	38	14	Софія	29	37	24,7	1037,3
Київ	42	9	Тернопіль	33	12	Варшава	24	2	13,5	565,1
Братислава	17	18	Тернопіль	33	12	Краків	22	10	11,2	469,6
Мюнхен	7	18	Тернопіль	33	12	Будапешт	21	20	14,4	605,7
Брно	16	14	Варшава	24	2	Магдебург	7	3	17,0	715,2
Генуя	3	31	Варшава	24	2	Краків	22	10	8,2	346,3
Софія	29	37	Варшава	24	2	Брно	16	14	14,4	605,7
Магдебург	7	3	Краків	22	10	Будапешт	21	20	10,0	422,1
Краків	22	10	Краків	22	10	Брно	16	14	7,2	302,9
			Софія	29	37	Будапешт	21	20	18,8	789,1
			Софія	29	37	Генуя	3	31	26,7	1120,7
			Будапешт	21	20	Братислава	17	18	4,5	187,8
			Брно	16	14	Братислава	17	18	4,1	173,2
			Брно	16	14	Мюнхен	7	18	9,8	413,7
			Братислава	17	18	Мюнхен	7	18	10,0	420,0
			Братислава	17	18	Генуя	3	31	19,1	802,4
			Магдебург	7	3	Мюнхен	7	18	15,0	630,0
			Магдебург	7	3	Брно	16	14	14,2	596,9
			Мюнхен	7	18	Генуя	3	31	13,6	571,3

Формули:

	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA
35	Вузол	X	Y		Початок	=P35	=Q35		Кінець	=T35	=U35	Відстань	Відстань (км)
36	Варшава	24	2		=O40	=P40	=Q40		=O39	=P39	=Q39	=КОРЕНЬ((T36-X36) <sup>2</sup> +(U36-Y36) <sup>2</sup> )	=Z36*AA\$33
37	Тернополь	33	12		=S36	=T36	=U36		=O37	=P37	=Q37	=КОРЕНЬ((T37-X37) <sup>2</sup> +(U37-Y37) <sup>2</sup> )	=Z37*AA\$33
38	Будапешт	21	20		=O39	=P39	=Q39		=W37	=X37	=Y37	=КОРЕНЬ((T38-X38) <sup>2</sup> +(U38-Y38) <sup>2</sup> )	=Z38*AA\$33
39	Вінниця	38	14		=S38	=T38	=U38		=O45	=P45	=Q45	=КОРЕНЬ((T39-X39) <sup>2</sup> +(U39-Y39) <sup>2</sup> )	=Z39*AA\$33
40	Київ	42	9		=O37	=P37	=Q37		=O36	=P36	=Q36	=КОРЕНЬ((T40-X40) <sup>2</sup> +(U40-Y40) <sup>2</sup> )	=Z40*AA\$33
41	Братислава	17	18		=S40	=T40	=U40		=O47	=P47	=Q47	=КОРЕНЬ((T41-X41) <sup>2</sup> +(U41-Y41) <sup>2</sup> )	=Z41*AA\$33
42	Мюнхен	7	18		=O37	=P37	=Q37		=O38	=P38	=Q38	=КОРЕНЬ((T42-X42) <sup>2</sup> +(U42-Y42) <sup>2</sup> )	=Z42*AA\$33
43	Брно	16	14		=O36	=P36	=Q36		=O46	=P46	=Q46	=КОРЕНЬ((T43-X43) <sup>2</sup> +(U43-Y43) <sup>2</sup> )	=Z43*AA\$33
44	Генуя	3	31		=S43	=T43	=U43		=O47	=P47	=Q47	=КОРЕНЬ((T44-X44) <sup>2</sup> +(U44-Y44) <sup>2</sup> )	=Z44*AA\$33
45	Софія	29	37		=S44	=T44	=U44		=O43	=P43	=Q43	=КОРЕНЬ((T45-X45) <sup>2</sup> +(U45-Y45) <sup>2</sup> )	=Z45*AA\$33
46	Магдебург	7	3		=O47	=P47	=Q47		=O38	=P38	=Q38	=КОРЕНЬ((T46-X46) <sup>2</sup> +(U46-Y46) <sup>2</sup> )	=Z46*AA\$33
47	Краков	22	10		=S46	=T46	=U46		=O43	=P43	=Q43	=КОРЕНЬ((T47-X47) <sup>2</sup> +(U47-Y47) <sup>2</sup> )	=Z47*AA\$33
48					=O45	=P45	=Q45		=O38	=P38	=Q38	=КОРЕНЬ((T48-X48) <sup>2</sup> +(U48-Y48) <sup>2</sup> )	=Z48*AA\$33
49					=S48	=T48	=U48		=O44	=P44	=Q44	=КОРЕНЬ((T49-X49) <sup>2</sup> +(U49-Y49) <sup>2</sup> )	=Z49*AA\$33
50					=O38	=P38	=Q38		=O41	=P41	=Q41	=КОРЕНЬ((T50-X50) <sup>2</sup> +(U50-Y50) <sup>2</sup> )	=Z50*AA\$33
51					=O43	=P43	=Q43		=O41	=P41	=Q41	=КОРЕНЬ((T51-X51) <sup>2</sup> +(U51-Y51) <sup>2</sup> )	=Z51*AA\$33
52					=S51	=T51	=U51		=O42	=P42	=Q42	=КОРЕНЬ((T52-X52) <sup>2</sup> +(U52-Y52) <sup>2</sup> )	=Z52*AA\$33
53					=O41	=P41	=Q41		=O42	=P42	=Q42	=КОРЕНЬ((T53-X53) <sup>2</sup> +(U53-Y53) <sup>2</sup> )	=Z53*AA\$33
54					=O41	=P41	=Q41		=O44	=P44	=Q44	=КОРЕНЬ((T54-X54) <sup>2</sup> +(U54-Y54) <sup>2</sup> )	=Z54*AA\$33
55					=O46	=P46	=Q46		=O42	=P42	=Q42	=КОРЕНЬ((T55-X55) <sup>2</sup> +(U55-Y55) <sup>2</sup> )	=Z55*AA\$33
56					=S55	=T55	=U55		=O43	=P43	=Q43	=КОРЕНЬ((T56-X56) <sup>2</sup> +(U56-Y56) <sup>2</sup> )	=Z56*AA\$33
57					=O42	=P42	=Q42		=O44	=P44	=Q44	=КОРЕНЬ((T57-X57) <sup>2</sup> +(U57-Y57) <sup>2</sup> )	=Z57*AA\$33

### Транспортна задача лінійного програмування

Постачальники (5): Брно, Братислава, Тернополь, Мюнхен, Варшава.

Споживачі (7): Магдебург, Краків, Будапешт, Київ, Вінниця, Софія, Генуя.

Обчислити матрицю відстаней розміром 5×7.

## Порядок роботи

- 1) Із заданої таблиці для вузлів сформувані дві таблиці для постачальників і споживачів.
- 2) Транспонуванням таблицю для споживачів розмістити по рядках майбутньої матриці.
- 3) Значення матриці відстаней обчислити за формулою Піфагора, користуючись змішаною адресацією.

## Результат

Вузол	X	Y				Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя
Варшава	24	2				7	22	21	42	38	29	3
Тернопіль	33	12	Постачальники			3	10	20	9	14	37	31
Будапешт	21	20	Брно	16	14	14,2	7,2	7,8	26,5	22,0	26,4	21,4
Вінниця	38	14	Братислава	17	18	18,0	9,4	4,5	26,6	21,4	22,5	19,1
Київ	42	9	Тернопіль	33	12	27,5	11,2	14,4	9,5	5,4	25,3	35,5
Братислава	17	18	Мюнхен	7	18	15,0	17,0	14,1	36,1	31,3	29,1	13,6
Мюнхен	7	18	Варшава	24	2	17,0	8,2	18,2	19,3	18,4	35,4	35,8
Брно	16	14										
Генуя	3	31	Споживачі									
Софія	29	37	Магдебург	7	3							
Магдебург	7	3	Краків	22	10							
Краків	22	10	Будапешт	21	20							
			Київ	42	9							
			Вінниця	38	14							
			Софія	29	37							
			Генуя	3	31							

## Формули

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Вузол	X	Y					=ТРАНСП(E11:G17)	=ТРАНС	=ТРАНС	=ТРАНС	=ТРАНС	=ТРАНС	=ТРАНС
2	Варшава	24	2					=ТРАНСП(E11:G17)	=ТРАНС	=ТРАНС	=ТРАНС	=ТРАНС	=ТРАНС	=ТРАНС
3	Тернопіль	33	12	Постачальники				=ТРАНСП(E11:G17)	=ТРАНС	=ТРАНС	=ТРАНС	=ТРАНС	=ТРАНС	=ТРАНС
4	Будапешт	21	20	=A9	=B9	=C9		=КОРЕНЬ((\$F4-H\$2)^2+(\$G4-H\$3)^2)	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ
5	Вінниця	38	14	=A7	=B7	=C7		=КОРЕНЬ((\$F5-H\$2)^2+(\$G5-H\$3)^2)	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ
6	Київ	42	9	=A3	=B3	=C3		=КОРЕНЬ((\$F6-H\$2)^2+(\$G6-H\$3)^2)	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ
7	Братислава	17	18	=A8	=B8	=C8		=КОРЕНЬ((\$F7-H\$2)^2+(\$G7-H\$3)^2)	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ
8	Мюнхен	7	18	=A2	=B2	=C2		=КОРЕНЬ((\$F8-H\$2)^2+(\$G8-H\$3)^2)	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ	=КОРЕ
9	Брно	16	14											
10	Генуя	3	31	Споживачі										
11	Софія	29	37	=A12	=B12	=C12								
12	Магдебург	7	3	=A13	=B13	=C13								
13	Краків	22	10	=A4	=B4	=C4								
14				=A6	=B6	=C6								
15				=A5	=B5	=C5								
16				=A11	=B11	=C11								
17				=A10	=B10	=C10								

Матриця питомих транспортних витрат (завдяки посиланням при зміні назв пунктів постачання/споживання та їх координат значення елементів матриці автоматично змінюються):

	Магдебург	Краків	Будапешт	Київ	Вінниця	Софія	Генуя
Брно	14,2	7,2	7,8	26,5	22,0	26,4	21,4
Братислава	18,0	9,4	4,5	26,6	21,4	22,5	19,1
Тернопіль	27,5	11,2	14,4	9,5	5,4	25,3	35,5
Мюнхен	15,0	17,0	14,1	36,1	31,3	29,1	13,6
Варшава	17,0	8,2	18,2	19,3	18,4	35,4	35,8

## Глосарій

**Адитивність** (*additivity*) – умова лінійності моделі, значення величини, яка відповідає цілому об'єкту, дорівнює алгебраїчній сумі значень величин, що відповідають його частинам

**Алгебраїчна модель** (*algebraic model*) – логічні відносини між вхідними й вихідними величинами в алгебраїчній формі

**Алгоритм узагальненого приведенного градієнту** (*generalized reduced gradient algorithm*) – один із ефективних алгоритмів нелінійної оптимізації, запрограмований для використання у складі розв'язувача *Поиск решения*

**Аналіз «Що-якщо?»** (*What-if Analysis*) – техніка аналізу результатів обчислень, вбудова в електронні таблиці: при уведенні значень у клітинки-дані (ЯКЦО) у клітинках-результатах автоматично за відповідною формулою формуються відповіді (ЩО)

**Аналіз чутливості** (*Sensitivity Analysis*) – етап розв'язання двоїстої задачі математичного програмування, де оцінюється вплив зміни значень початкових даних на значення шуканого плану та цільової функції (див. *Двоїсті оцінки*)

**Багатокритеріальне лінійне програмування** (*multiple objective linear programming*) – спеціальний тип цільового програмування, де додатково визначаються кілька цільових функцій, на кожному кроці одна з них залишається, інші представляють обмеженнями

**Безумовна оптимізація** (*unbounded, unconstrained*) – процедура розв'язання задач нелінійного програмування без обмежень на шукані невідомі, де гарантується пошук локального оптимуму з використанням градієнтних методів

**Витрати на зберігання запасу** (*Holding Costs*) – витрати, пов'язані зі зберіганням одиниці запасу й тому залежать від розміру замовлення, це: страхування, охорона, створення спеціальних умов зберігання тощо; визначаються в процентах від вартості одиниці запасу

**Витрати на оформлення замовлення для утворення запасу** (*Ordering Costs*) – витрати, пов'язані із оформленням договірної документації, отриманням, доставкою й розміщенням замовлення; не залежать від розміру замовлення

**Генетичний алгоритм** (*genetic algorithm*) – наближений алгоритм перебору варіантів направленим випадковим пошуком, заснований на біологічних законах й імітує процес еволюційного природного відбору. Є ефективною альтернативою градієнтним методам, особливо для негладкої нелінійної оптимізації, бо не зупиняється у першій-ліпшій точці локального оптимуму, а здійснює перебір у заданій області пошуку, тому й став можливим для практичної реалізації за наявності сучасних обчислювальних потужностей

**Графічні методи** (*graphical methods*) використовують геометричні побудови (наприклад, графіки функцій) для утворення наочних розв'язків як ілюстрації методів оптимізації

**Допустимий план** (*Feasible Solution*) – набір значень шуканого плану, які задовольняють усім заданим обмеженням

**Задача з фіксованими витратами** (*Fixed-Cost Problem*) – клас нелінійних задач оптимізації, де разом зі змінними витратами, заданими коефіцієнтами ЦФ, враховуються постійні витрати, що не залежать від значень шуканого плану, уведенням змінних булева типу

**Задача оптимізації** (*optimization problem*) – математична задача з конкретними складовими: множина шуканих невідомих, цільова функція та критерій оцінювання, спеціальні вимоги щодо невідомих у вигляді обмежень й граничних умов

**Інтервал стійкості структури оптимального плану** (*Range of Optimality*) – інтервал зміни початкових даних, за яким структура оптимального плану не змінюється, визначається значеннями допустимого збільшення/зменшення коефіцієнтів ЦФ та значень обмежуючих чинників

**Комп'ютерна модель** (*computer model*) – сукупність даних, математичних співвідношень й логічних припущень (умов), що зреалізована в комп'ютері як специфічне представлення конкретної задачі прийняття рішення чи певного явища



**Ліва частина обмежень** (ЛЧ, *left-hand-side, LHS*) – складова системи обмежень задачі оптимізації – математичні вирази, які поєднують шукані невідомі

**Лінійні моделі** (*linear models*) – математичні моделі задач, шукані невідомі яких задовольняють умовам: пропорційності, адитивності й подільності

**Лінійні оптимізаційні моделі** (*linear optimization models*) – математичні моделі задач оптимізації, шукані невідомі яких задовольняють умовам: пропорційності, адитивності, подільності й невід’ємності

**Математичні моделі** (*mathematical models*) – клас моделей реальних об’єктів чи процесів, для опису й представлення співвідношень між складовими використовується математичний апарат: позначення, вирази, відношення, правила тощо

**Мережеві або сіткові моделі** (*network models*) – складова апарату потокового програмування для розв’язання задач про потоки у мережах

**Метод PERT** (*program evaluation and review technique*) – в управлінні проектами цим методом враховують параметри робіт в умовах невизначеності

**Метод гілок і границь** (*branch and bound method*) – універсальний й досить ефективний алгоритм прискореного перебору варіантів, використовується для реалізації моделей дискретної, зокрема, цілочислової, оптимізації. Ідея: множина усіх допустимих рішень розбивається на підмножини менших розмірів, що не перетинаються, для кожної з яких визначаються граничні значення невідомих, що дозволяє виключити з аналізу крупні блоки явно неперспективних значень, в Excel реалізується після введення обмеження «цел» або «двоич» на шукані невідомі

**Метод критичного шляху** (*critical path method*) – в управлінні проектами цим методом враховують параметри робіт в умовах визначеності

**Метод найменших квадратів** (Least-Square Method) – математико-статистичний метод оптимального наближення функції, заданої у табличній формі, до заданої функції

**Метод найшвидшого підйому** (*steepest ascent method*) – градієнтний метод нелінійної оптимізації ітераційного типу

**Множник Лагранжа** (Lagrange multiplier) – аналог тіньової ціни в нелінійному програмуванні, визначає швидкість, з якою буде змінюватися значення ЦФ зі зміною значення обмежуючого параметра (фактично, це похідна ЦФ)

**Моделі логічного (двійкового) вибору** (*binary choice models*) – апарат булева (двійкового, бінарного) програмування, де шукані змінні мають тип «двійковий» (двоич, бин) типу: брати/не брати, призначати/не призначати тощо

**Моделі змішування** (*blending models*) використовують різні складові для утворення єдиного продукту – суміші із заданими специфічними властивостями, сформовані відповідними обмеженнями на шукані невідомі

**Моделі лінійного програмування** (ЛП, *linear programming models*) – обширний клас однородних моделей лінійної оптимізації у складі математичного програмування, для яких існують універсальні методи отримання глобального оптимуму

**Моделі нелінійного програмування** (НЛП, *nonlinear programming models*) – обширний клас специфічних моделей нелінійної оптимізації у складі математичного програмування, для яких нема універсальних методів отримання глобального оптимуму

**Моделі оптимального призначення** (*optimal assignment models*) – різновид транспортних моделей, де пропозиції й попит (значення обмежень) дорівнюють 1

**Моделі покриття** (*covering models*) поєднують різні ресурси у певну й єдину комбінацію (суміш), специфічна властивість обмежень на невідомі – знак обмеження «не менше ніж» ( $\geq$ )

**Моделі розміщення об’єктів** (*facility location model*) визначають найкращі місця розташування «позитивних» чи «негативних» об’єктів-джерел (із обмеженими/необмеженими пропозиціями) поміж об’єктів-стоків (із обмеженим/необмеженим попитом)

**Моделі розподілу обмежених ресурсів** (*resource allocation models*) ставлять за мету розділити ціле на частки, а саме, наявні запаси ресурсів (кадри, фінанси, час, землю, потужнос-

ті) розподілити найкращим чином в економічному, соціальному чи будь-якому іншому сенсі, це невід’ємна складова управлінської діяльності чи менеджменту: ресурсного, проектного, операційного тощо

**Моделі розташування та розподілу ресурсів** (*resource location-allocation models*) ставлять за мету визначити місця найкращого розташування ресурсних пропозицій (центрів обслуговування) із врахуванням їх розподілу для задоволення попиту

**Моделі цілочислового програмування** (*integer programming models*) – складова математичного програмування, де щодо шуканих змінних порушується властивість подільності, їх значення – цілі й невід’ємні числа, у тому числі, булева типу (0/1)

**Невід’ємність** (*nonnegativity*) – умова моделі лінійного програмування, за якою шукані невідомі мають лише невід’ємні значення

**Нормова (приведена) вартість** (*Reduced Cost*) – двоїста оцінка заданого коефіцієнта ЦФ, якому відповідає нульове значення шуканої невідомої в оптимальному плані, в залежності від знака (+, –) вказує на: а) мінімальну зміну значення цього коефіцієнта, щоб відповідна змінна стала ненульовою («вигідною») без зміни отриманого значення ЦФ; б) величину погіршення значення ЦФ при вимушеному присвоєнні цій змінній значення 1

**Обмеження** (*Constraints*) – чинники та їх значення, які обмежують значення шуканого плану виробництва чи реалізації продукції, наприклад, пропускна здатність, запаси, пропозиції чи попит

**Обмеження «Усі різні»** (*alldifferent constraint*) – у комбінаторному програмуванні невідомі мають форму номерів, серед яких нема однакових

**Оптимальне використання обмежених ресурсів** (*Optimal Use of Limited Resources*) – ціль більшості оптимізаційних задач, що досягається розв’язанням таких задач із використанням відповідних оптимізаційних моделей й методів

**Оптимальний (економічний) розмір замовлення** (*Economic Order Quantity, EOQ*) – розмір замовлення, що забезпечує мінімальні витрати на їх утворення й зберігання

**Оптимальний план** (*Decision*) –

**Оптимізаційна модель** (*optimization model*) – спеціальний вид математичної моделі, мета якої – пошук кращих значень величин у конкретному вимірі

**Оптимізація** (*optimization*) – 1) в математиці – процес пошуку кращих значень величин за відповідним екстремальним критерієм, 2) в програмуванні – алгоритмічна процедура, що реалізується обчислювальним методом, 3) у широкому розумінні – пошук кращої, раціональної чи досконалої організації чи здійснення будь-чого

**План виробництва** (*Products Mix*) – комбінація визначених видів продукції та їх значень

**План, програма, рішення** (*Decision Variables*) – значення величин, які

**Подільність** (*divisibility*) – умова лінійності моделі, за якою шукані невідомі можуть мати дійсний тип (дробове значення)

**Поиск решения** (*Excel Solver*) – розв’язувач оптимізаційних лінійних та нелінійних задач й систем рівнянь, виконаний у вигляді програми-надбудови в середовищі MS Excel. Його стандартна версія, що розповсюджується у складі пакету MS Office, розрахована на задачі з числом шуканих невідомих до 200, для кожної з яких можна додати по 2 граничних обмеження (знизу й зверху), а де також можна задати до 100 обмежень на шукані невідомі у формі рівнянь, нерівностей чи певного специфічного типу шуканих невідомих: цілий, двійковий, різний, який явно впливає на вибір оптимізаційної моделі й відповідного методу. Розв’язувач представляє собою програмно-сумісну композицію спеціалізованих модулів (*solvers, engines*), кожен з яких реалізує певний клас оптимізаційних моделей відповідними методами (алгоритмами); склад цієї композиції дещо розрізняється для Excel 2003 та Excel 2010, а саме, розв’язувач в Excel 2010 доповнено модулем еволюційного програмування (*Evolutionary Solver*) для реалізації негладких нелінійних задач оптимізації. Нестандартні версії (пробні чи промислового призначення) розв’язувача (типу *Premium Solver*) із значно розширеними можливостями розповсюджуються на замовлення компанією-розробником Frontline Inc.

**Права частина обмежень** (ПЧ, *right-hand-side, RHS*) – складова системи обмежень задачі оптимізації – числові значення обмежувальних чинників

**Правила збереження потоку** (*balance-of-flow rules*) – основний тип обмеження для вузлів в моделях потокового програмування, де у кожному вузлі є вхідний (*Bx, inflow*), вихідний (*Bux, outflow*) потоки та їх різниця (*Bx-Bux, inflow- outflow*), пропозиція (*supply, S*) чи попит (*demand, D*), тож, діє обмеження:  $Bx-Bux \leq S \text{ or } D$

**Пропорційність** (*proportionality*) – умова лінійності моделі у формі сталого відношення двох змінних величин: при збільшенні (зменшенні) однієї величини в декілька разів у стільки ж разів збільшується (зменшується) друга величина

**Резерв, залишок** (*Slack*) – ненульове значення величини, за яким визначають некритичність обмежувального чинника (запасу ресурсу, тривалості роботи)

**Робити чи купувати** (*Make or Buy*) – рішення, де визначаються два плани: ЩО РОБИТИ, використовуючи власні ресурси, та ЩО КУПУВАТИ у зовнішніх постачальників для задоволення заданого замовлення

**Симплекс-метод** (*Simplex method*) – основний й ефективний оптимізаційний алгоритм для реалізації моделей лінійної оптимізації, побудований на принципах лінійної алгебри, зокрема, на техніці розв’язання недовизначених СЛАР. Ідея алгоритма ілюструється розв’язанням задачі ЛП графічним методом, в Excel симплекс-метод реалізується після уведення в табличну модель параметрів «Линейная модель» та «Неотрицательные значения»

**Стохастичне програмування** (*stochastic programming*) – специфіка моделей математичного програмування, де прийняті рішення здійснюються в умовах невизначеності, заданих в ймовірнісній формі

**Структура плану** (*decision structure*) – співвідношення між ненульовими/нульовими («вигідними»/«невигідними») змінними оптимального плану

**Таблична (електронно-таблична) оптимізація** (*spreadsheet-based optimization*) – здійснення процесу математичної оптимізації в інформаційному середовищі електронних таблиць

**Табличні (електронно-табличні) моделі** (*spreadsheet models*) – формування й реалізація слабо формалізованих алгебраїчних моделей в інформаційному середовищі електронних таблиць, де діють конкретні правила й технології

**Тіньова ціна** (*Shadow Price*) – двоїста оцінка заданого (у будь-якому вимірі) значення обмежувального чинника у вартісній формі, її знак (+, –) вказує на збільшення максимуму чи зменшення мінімуму ЦФ при збільшенні цього значення на 1

**Транспортні моделі** (*transportation models*) – клас моделей розділення й розподілу ресурсів матричного типу, де відшукуються оптимальні потоки від джерел до стоків

**Транспортні моделі з проміжними пунктами** (*transshipment models*) – складова транспортних моделей, де враховуються умови перевантаження й зміни специфіки потоків

**Три типи моделей оптимізації:** розділення й розподілу цілого на частки (*allocation*), поєднання різних складових для утворення цілого (*covering*), комбінування різних складових у єдиний продукт у відповідних пропорціях (*blending*)

**Узагальнені мережеві моделі** (*general-network models*) – складові апарату потокового програмування із розширеним набором властивостей шуканих потоків й обмежень для них

**Умовна оптимізація** (*bounded, constrained*) – процедура розв’язання задач, у першу чергу, лінійного програмування, де неодмінною складовою є обмеження на шукані невідомі

**Цільова функція, ЦФ** (*Objective Function*) – поставлена менеджером ціль (мета), виражена у формі математичної функції із відповідними коефіцієнтами, де її аргументами є шукані невідомі (план, програма), критерій – максимум чи мінімум ЦФ в залежності від цілі

**Цільове програмування** (*goal programming*) – новітня складова математичного програмування, де поставлена менеджером ціль супроводжується «м’якими» обмеженнями щодо невідомих замість традиційних «твердих» обмежень

## Використані джерела

1. Ahuja R., Magnanti T. Network flows. Theory, algorithms, and applications. – Prentice-Hall, 1993. – 846 p.
2. Baker K. Optimization Modeling with Spreadsheets. – Thomson High. Ed., 2006. – 353 p.
3. Barlow J. Excel Models for Business and Operations Management, 2<sup>ed</sup> – John Wiley, 2005. – 415 p.
4. Cooper W. Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software: 2ed. – Springer, 2007. – 490 p.
5. Dantzig G., Thapa M. Linear Programming: v.1: Introduction, v.2: Theory and Extension. – Springer, 1997. – 435+448 p.
6. Day A. Mastering Financial Mathematics in Microsoft Excel. A Practical Guide for Business Calculations. – Pearson Ed., 2005. – 351 p.
7. Fletcher R. Practical Methods of Optimization, 2<sup>nd</sup> ed. – Waley, 2000. – 437 p.
8. Flouras C., Pardalos P. (eds.). Encyclopedia of Optimization, 2<sup>nd</sup> ed., Springer, 2009. – 4626 p.
9. Frontline Solvers v.11.5. User Guide. – Frontline Systems Corp., 2011. – 278 p.
10. Fylstra D. and oth. Design and Use of the Microsoft Excel Solver. *INFORMS Interfaces*, 1998, pp. 29-55.
11. Hillier F., Lieberman G. Introduction to Operations Research: 8<sup>ed</sup> – McGraw-Hill, 2004. – 1215 p.
12. Kuzmychov A. Operations Research: Optimization models for Decision-making. – К.: АМУ, 2007. – 272 с.
13. Levie R. Advanced Excel for Scientific Data Analysis. – Oxford Univ. Press, 2004. – 615 p.
14. Liengme B. A Guide to Microsoft Excel 2007 for Scientists and Engineers, 4<sup>ed</sup> – Elsevier, 2009. – 330 p.
15. Murty K. Optimization Models for Decision Making: vol. 1. – Univ. of Michigan, 2003. – 600 p.
16. Powell S., Baker K. The Art of Modeling with Spreadsheets: Management Science, Spreadsheet Engineering, and Modeling Craft. – Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, Inc., 2004. – 399 p.
17. Proctor S. Building Financial Models with Excel. – Wiley, 2002. – 356 p.
18. Ragsdale C. Spreadsheet Modeling and Decision Analysis: A Practical Introduction to Management Science. – 5<sup>ed</sup> – Thomson Higher Ed., 2008. – 742 p.
19. Zhu J. Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking: Data Envelopment Analysis with Spreadsheets: 2<sup>ed</sup> – Springer, 2009. – 268 p.
20. Абдулазар Л. Лучшие методики применения Excel в бизнесе: Пер. с англ. – М.: Вильямс, 2006 – 464 с.
21. Агеев С.Е., Кузьмичов А.И. Пошук та аналіз оптимальних управлінських рішень в Excel.–Вінниця, ВДТУ, 1998.
22. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Уч. пос. для эк. сп. вузов — М.: Высшая школа, 1986.
23. Афанасьев М.Ю. и др. Прикладные задачи исследования операций: Учеб. пособие. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 350 с.
24. Афоничкин А.И. Разработка бизнес-приложений в экономике на базе MS Excel. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ – 2003. – 416 с.
25. Бенинга Ш. Финансовое моделирование с использованием Excel, 2-е изд.: Пер. с англ. – М.: Вильямс, 2007. – 592 с.
26. Блаттнер П. Использование Microsoft Office Excel 2003.: Пер. с англ. – М.: ИД «Вильямс», 2005. – 864 с.
27. Бугір М. К. Математика для економістів. – К.: Академія, 2003. – 520 с.
28. Бурков В.Н. и др. Математические основы управления проектами. – М.: Высш. шк., 2005. – 423 с.
29. Вагнер Г. Основы исследования операций: в 3-х т.: Пер. с англ.– М.: Мир, 1972-1973, Т 1. 335 с., Т 2. 487 с., Т 3. 501 с.
30. Васильев В. В., Додонов А.Г. Гибридные модели задач оптимизации. – К.: Наук. думка, 1974–216 с.
31. Васильев А.Н. Финансовое моделирование и оптимизация средствами Excel. – СПб.: Питер, 2009. 320 с.
32. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология: Уч. пос. для вузов. – 3-е изд. – М.: Дрофа, 2004. – 208 с.
33. Винстон У. Microsoft Office Excel 2007. Анализ данных и бизнес-моделирование: пер. с англ. – М.: Русская Редакция, 2008. – 608 с.
34. Вітлінський В. В. та ін. Математичне програмування. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.
35. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навч. пос. – 2-е вид. – К.: КНЕУ, 2007. – 408 с.
36. Вітлінський В. В. та ін. Економіко-математичне моделювання. – К.: КНЕУ, 2008. – 536 с.
37. Гельман В. Я. Решение математических задач средствами Excel: Практикум. – СПб.: Питер, 2003. 240 с.
38. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация: Пер. с англ. — М.: Мир, 1985.
39. Глухов В. В. и др. Математические методы и модели для менеджмента. – СПб.: Лань, 2005. 528 с.
40. Голов С. Ф. Управлінський облік. Підручник. – 2-ге вид. – К.: Лібра, 2004. – 704 с.
41. Грачева М. В. Моделирование экономических процессов: Учебник. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 351 с.
42. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения: пер. с англ. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
43. Додж М., Стинсон К. Эффективная работа: Microsoft Office Excel 2003: Пер. с англ. – СПб.: Питер, 2005. – 1088 с.
44. Дубина А. Г. и др. Excel для экономистов и менеджеров. – СПб.: Питер, 2004. – 295 с.

45. Ермаков В. И. Справочник по математике для экономистов, 3-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2009. – 464 с.
46. Зайцев М. Г. Методы оптимизации управления для менеджеров: Компьютерно-ориентированный подход. – М.: Дело, 2002. – 116 с.
47. Зайцев М. Г., Варюхин С. Е. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы. – М.: Дело, АНХ, 2008. – 664 с.
48. Зайченко О. Ю., Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. Збірник задач. – К.: ВД «Слово», 2007. – 472 с.
49. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. Підручник, 7-е вид. – К.: ВД «Слово», 2006. – 816 с.
50. Зайченко Ю. П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сб. задач. – К.: Вища шк., 1984. – 224 с.
51. Йенсен П., Барнес Д. Потокное программирование: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1984
52. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию – М.: Высш. шк., 1974 – 270 с.
53. Канторович Л. В., Горстко А.Б. Оптимальные решения в экономике. – М.: Наука, 1972. – 230 с.
54. Каплан А. В. Решение экономических задач на компьютере. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 600 с.
55. Кораблин М. А. Информатика поиска управленческих решений. – М.: Солон-Пресс, 2012. – 192 с.
56. Костевич Л. С. Математическое программирование: Информационные технологии оптимальных решений: уч. пос. – Мн.: Новое знание, 2003. – 424 с.
57. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике. – М.: ЮНИТИ, 2003. – 403 с.
58. Кузьмичов А.І., Медведєв М.Г. Математичне програмування в Excel. – К.: СУ, 2005. – 312 с.
59. Кузьмичов А.І. та ін. Лінійні задачі математичного програмування в MS Excel. – К.: АМУ, 2006. – 187 с.
60. Кузьмичов А.І. та ін. Нелінійні задачі математичного програмування в MS Excel. – К.: АМУ, 2007. 178 с.
61. Кузьмичов А.І., Медведєв М. Г. Економетрія. Моделювання засобами MS Excel. – К.: Вид-во «Ліра-К», 2011. –214 с.
62. Кузьмичов А.І. Економіко-математичне моделювання в управлінні в Excel.– К.: АМУ, 2011. – 129 с.
63. Кузьмичов А.І. та ін. Ймовірнісне та статистичне моделювання в Excel для прийняття рішень. – К.: АМУ, 2011. – 200 с.
64. Курицкий Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0.–СПб.:ВНУ,1997. – 255 с.
65. Лавренов С. М. Excel: Сборник примеров и задач. – М.: ФиС, 2003. – 336 с.
66. Леснікова І.Ю. Дослідження операцій у середовищі електронних таблиць Excel. – К.: ЦУЛ, 2007. 186 с.
67. Леоненков А. Решение задач оптимизации в MS Excel. – СПб.: ВХВ-Петербург, 2005. – 704 с.
68. Мельников П. П. Компьютерные технологии в экономике: уч. пос. – М.: КНОРУС, 2012. –224 с.
69. Мескон М. и др. Основы менеджмента: Пер. с англ. – М.: Дело, 2004. – 720 с.
70. Морз Ф., Кимбелл Дж. Методы исследования операций (Статистические методы оценки эффективности боевых действий и определение количественных основ для принятия наиболее выгодного решения руководителем операции): Пер. с англ. – М.: Сов. радио, 1956 (оригинал, 1951 р.). – 307 с.
71. Моудер Дж., Элмаграби С. (ред). Исследование операций: в 2-х томах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. Т. 1. Методологические основы и математические методы, 712 с. Т 2. Модели и применение, 677 с.
72. Мур Дж. и др. Экономическое моделирование в Microsoft Excel: Пер. с англ. – 6-е изд. – М.: Вильямс, 2004. – 1119 с. (ориг. Decision modeling with Microsoft Excel)
73. Орвис В. Excel для ученых, инженеров и студентов.: Пер. с англ. – К.: Юниор, 1999. – 528 с.
74. Орлова И. В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде Excel. – М.: Финстатинформ, 2000. – 136 с.
75. Орлова И. В. Экономико-математические методы и модели: Компьютерное моделирование: Уч. пос. – М.: Вузовский учебник, 2007. – 365 с.
76. Плакунов М. К. Планирование на малых и средних предприятиях средствами Excel. – СПб.: Питер, 2009. – 158 с.
77. Пикуза В., Геращенко А. Экономические и финансовые расчеты в Excel: Самоучитель. – СПб.: Питер, 2002. – 300 с.
78. Разу М. Л. и др. Управление проектом. Основы проектного управления: учебник. – М.: КНОРУС, 2007. – 768 с.
79. Савиных В. Н. Математическое моделирование производственного и финансового менеджмента: уч. пос. – М.: КНОРУС, 2012, 192 с.
80. Сдвижков О. А. Математика в Excel 2003. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 192 с.
81. Таха Х. Введение в исследование операций: Пер. с англ. – 7-е изд. – М.: Вильямс, 2005. –901 с.
82. Уокенбах Дж. Excel 2003. Библия пользователя: Пер. с англ. – М.: Диалектика, 2004. – 768 с.
83. Урубков А. Р. Курс MBA по оптимизации управленческих решений. Практическое руководство по использованию моделей линейного программирования. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2006. – 176 с.
84. Форд Л., Фалкерсон Д. Поток в сетях: Пер. с англ. – М.: Мир, 1966. – 275 с.
85. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование: Пер. с англ. – М.: Мир, 1975
86. Хелдман К. Excel 2007. Руководство менеджера проекта: Пер. с англ. – М.: Эксмо, 2008. – 448 с.
87. Цисарь И. Ф., Нейман В.Г. Компьютерное моделирование экономики.–М.: Диалог-МИФИ, 2002. – 304 с.
88. Шапиро Дж. Моделирование цепи поставок: Пер. с англ. – СПб.: Питер, 2006. – 578 с.
89. Шарапов О. Д. та ін. Економічна кібернетика: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2004. — 231 с.
90. Широков Б. М. Введение в оптимальный бизнес: Уч. пос.–М.: ЮНИТИ, 2002. – 330 с.

Навчальне видання

Анатолій Іванович Кузьмичов

**Оптимізаційні методи та моделі: Практикум в Excel**

Навчальний посібник

---

Друк: ВИДАВНИЧО-ПОЛІГРАФІЧНИЙ ЦЕНТР  
Академії муніципального управління

01601 МСП, м. Київ, вул. Чигоріна, 8; факс: (044) 529-04-09