

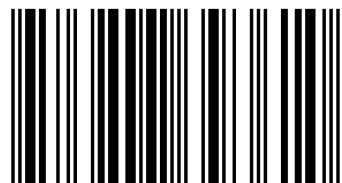
Время как квантовая наблюдаемая, канонически сопряжённая энергии.

Книга содержит главу фундаментальной квантовой механики и квантовой теории поля - о времени как квантовой наблюдаемой, канонически сопряжённой энергии, для систем с непрерывными и дискретными спектрами энергии. Эта глава в законченном виде до сих пор никем не могла быть написана из-за ряда математических проблем. Решение этих проблем в области теории операторов в гильбертовых пространствах для систем с непрерывным спектром энергий уже давно знали некоторые математики, но их решение было неизвестно физикам, кроме автора и его друзей. Преодоление этих и других математических проблем позволило, наконец, развить и применить методы временного анализа квантовых процессов и написать эту книгу. Кроме того, в ней изложен ряд применений по временному анализу квантовых процессов и парадоксов туннелирования и столкновений (ядерных реакций), разработанных на протяжении ряда лет автором, частично совместно с сотрудниками его лаборатории и с его коллегами из разных стран. Предназначена для научных сотрудников и профессоров по квантовой механике и квантовой теории столкновений, аспирантов, студентов и всех интересующихся квантовой механикой, квантовой теорией поля и ядерной физикой.



Владислав Ольховский

Ольховский Владислав Сергеевич, род. 5 февраля 1938г. Доктор физико-математических наук (с 1989г.), профессор (с 1992г.), зав. лабораторией временного анализа ядерных процессов Института ядерных исследований Нац. Академии наук Украины, Киев (с 1994г.). Опубликовал около 300 научных работ, около 70 философских и богословских работ.



978-3-8473-9361-0

Время как квантовая наблюдаемая

Владислав Ольховский



Владислав Ольховский

Время как квантовая наблюдаемая, канонически сопряжённая энергии.

Временной анализ квантовых процессов
туннелирования и столкновений (ядерных
реакций).


Palmarium
academic publishing

**Время как квантовая наблюдаемая, канонически сопряжённая энергии.
Временной анализ квантовых процессов туннелирования и столкновений (ядерных реакций).**

В.С.Ольховский

Благодарности. Автор выражает свою признательность и благодарность за сотрудничество, ценные советы и полезные дискуссии, полученные в течение многих лет от Э.Реками, Н.В.Ерёмина, Я.А.Сморозинского, В.Л.Любошица, Б.Н.Захарьева, А.С.Холево, В.Петрилло, Р.Миньяни, Дж.Джардина, Дж.Фацио и Г.А.Прокопца, он благодарит также А.И.Кальченко за любезную помощь в разыскании примеров сечений нейтрон-ядерного рассеяния и практически всех своих сотрудников лаборатории временного анализа ядерных процессов ИЯД НАНУ (С.П.Майданюка, М.Э.Долинской, А.К.Зайченко, С.А.Омельченко, М.В.Романюк, С.В.Бельчикова, В.В.Давидовского, И.Е.Кашубы, Н.Л.Дорошко) и моего соискателя Я.Яцека из Кракова за помощь при написании публикаций, вошедших в книгу, а также дочери Ольховской Юлиане за сотрудничество и техническую помощь в работе.

О г л а в л е н и е

| | |
|--|---------------|
| Общее введение | стр.5 |
| Часть I. Время как наблюдаемая, канонически сопряжённая энергии, в квантовой механике и в квантовой теории поля..... | стр.6 |
| 1. Введение..... | стр.6 |
| 2. Время как наблюдаемая в нерелятивистской квантовой механике и общее определение средних времён и средних длительностей одномерных квантовых процессов..... | стр.7 |
| 3. Соотношение неопределённости энергии и времени для систем с непрерывным спектром энергий..... | стр.11 |
| 4. Об импульсном представлении для оператора времени..... | стр.12 |
| 5. О второй мере усреднения по времени (в случаях обитания частиц в пространственных областях)..... | стр.13 |
| 6. Введение аналога "гамильтониана" для оператора времени: новый гамильтонов подход для оператора времени..... | стр.14 |
| 7. Время как наблюдаемая для квантово-механических систем с дискретными спектрами энергий..... | стр.15 |
| 8. Соотношение неопределённости энергии и времени для систем с дискретным спектром энергий..... | стр.16 |
| 9. Время и энергия как канонически сопряжённые наблюдаемые в квантовой электродинамике..... | стр.17 |
| 10. Времена туннелирования в оптических экспериментах, основанных на слегка нарушенном полном внутреннем отражении света..... | стр.20 |
| 11. Обобщение времени как квантовой наблюдаемой для уравнения Клейна-Гордона и уравнения Дирака..... | стр.21 |
| 12. Выводы и перспективы..... | стр.25 |
| 13. Приложение I. Приближённые собственные значения и приближённые ортонормированные собственные функции оператора времени..... | стр.26 |
| 14. Приложение II. О билинейном операторе времени..... | стр.27 |
| 15. Приложение III. Вывод выражений для весовых функций $W_{\pm}(x,t)$ | стр.28 |
| 16. Список литературы..... | стр.29 |
| Часть II. Временной анализ квантовых процессов туннелирования..... | стр.32 |
| 1. Введение..... | стр.32 |
| 2. Метод Ольховского-Реками по определению времени туннелирования..... | стр.32 |
| 3. Эффект Хартмана в туннелировании через потенциальный барьер. Его обобщения и расширения..... | стр.37 |
| 4. О туннелировании электромагнитных волн и фотонов..... | стр.45 |
| 5. Метод многократных внутренних отражений в одномерных (1-D), двумерных (2-D) и трёхмерных (3-D) задачах туннелирования частиц и фотонов..... | стр.49 |
| 6. Заключение: выводы и перспективы..... | стр.66 |
| 7. Приложение I. К процедуре расчёта времени туннелирования для волнового пакета (9)..... | стр.67 |
| 8. Приложение II. Интерпретация волнового пакета, составленного из затухающих волн, с помощью метода разложения в интеграл Фурье по виртуальным импульсам и в подходе инстантонов..... | стр.69 |
| 9. Список литературы..... | стр.71 |
| Часть III. Временной анализ процессов столкновений (ядерных реакций)..... | стр.76 |
| 1. Введение..... | стр.76 |
| 2. Общие выражения для длительностей столкновений (ядерных реакций)..... | стр.76 |
| 3. Длительность одноканального рассеяния..... | стр.78 |
| 4. Изолированный резонанс в сечении и экспоненциальный распад соответствующего | |

| | |
|--|---------|
| метастабильного состояния составного ядра..... | стр.80 |
| 5. О сечениях рассеяния и длительностях нуклон-ядерного рассеяния вблизи изолированного компаунд-резонанса, искажённого нерезонансным фоном, в системе центра масс и в лабораторной системе..... | стр.83 |
| 6.Отсутствие временного опережения вблизи любого изолированного резонанса составного ядра в L -системе..... | стр.86 |
| 7.Расчёты энергетической зависимости сечения нуклон-ядерного упругого рассеяния вблизи искажённого резонанса с помощью реалистического описания экспериментальных данных на основе формул (47)– (51)..... | стр.87 |
| 8. Длительность резонансных процессов многоканального рассеяния..... | стр.92 |
| 9. Явление <i>временных резонансов (взрывов)</i> | стр.94 |
| 10.Общие выводы и перспективы..... | стр.106 |
| 11.Приложение I. Вывод связи перехода сечений двухчастичных реакций из C -системы в L -систему для изолированных резонансов, искажённых нерезонансным фоном..... | стр.107 |
| 12.Приложение II.О пространственно-временном анализе интерференционных явлений с тремя частицами в конечном канале..... | стр.111 |
| 13.Приложение III. Вывод правила сумм, связывающего среднее время задержки составного ядра, дисперсию распределений времён задержки составного ядра с характеристиками составного ядра - средними резонансной плотностью и шириной ρ_j и Γ_j | стр.115 |
| 14.Приложение IV. Длительность рассеяния в пороговой области..... | стр.122 |
| 15.Приложение V. К измерению длительностей рассеяния медленных нейтронов ядрами на основе экспериментальных данных по сечениям с учётом оптической теоремы и знака длины рассеяния или условия причинности..... | стр.122 |
| 16.Список литературы..... | стр.125 |

Общее введение

Книга содержит новую главу фундаментальной квантовой механики и квантовой теории поля о времени как квантовой наблюдаемой, канонически сопряжённой энергии, для систем с непрерывными и дискретными спектрами энергии. Эта глава в нынешнем или схожем законченном виде до сих пор не содержится ни в одной научной монографии и ни в одном вузовском учебнике по квантовой механике на каком-либо языке, поскольку она просто не могла быть ранее написана из-за ряда математических проблем. Решение этих проблем в области теории операторов в гильбертовых пространствах для систем с непрерывным спектром энергий уже давно знали некоторые математиков, исходя из [1-3], но их решение было практически полностью неизвестно никому из физиков, кроме автора и его друга коллеги Э.Реками. Преодоление этих и других математических проблем (в частности, для систем с дискретным спектром энергий), реализованное по частям главным образом в авторских статьях [4-7] и полностью в [8-12], позволило, наконец, написать главу о времени как квантовой наблюдаемой, канонически сопряжённой энергии, для систем с непрерывными и дискретными спектрами энергий в нынешнем виде как часть I.

Кроме того, на основе новой главы квантовой механики в ней изложены временной анализ квантовых процессов и парадоксов туннелирования, а также ряд применений по временному анализу квантовых столкновений и ядерных процессов, разработанных на протяжении ряда лет автором, частично совместно с сотрудниками его лаборатории и с его коллегами из разных стран (в основном из Италии, России, немного из Польши), но в первую очередь с Э.Реками.

Книга содержит и ряд перспектив дальнейших возможных применений временного анализа квантовых процессов, парадоксов и проблем.

Список литературы:

1. Наймарк М.А. *Изв.АН СССР, сер.матем.* **4** 277 (1940).
2. Carleman T. *Sur les e'quations i'ntegrales a' noyau re'el et syme'trique*, Uppsala, 1923).
3. Holevo A.S. *Rep. Math. Phys.* **13** 379(1978); Холево А.С. *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории* (М.: Наука, 1980).
4. Olkhovsky V.S. and Recami E. *Nuovo Cim.* **A53** 610(1968); **A63** 814(1969); *Lett. Nuovo Cim*, **4** 1165(1970).
5. Ольховский В.С. *Укр. физ. журнал* **18** 1910 (1973); Olkhovsky V.S., Recami E. and Gerasimchuk A., *Nuovo Cim.* **A22** 263(1974).
6. Ольховский В.С. *Физ.элемент. частиц и ат.ядра*, **15** 290(1984).
7. Olkhovsky V.S. and Recami E. *Phys. Reports*, **214** 339(1992).
8. Olkhovsky and Recami E. *Phys. Reports*, **214** 339(1992).
9. Olkhovsky V.S., Recami E. *Int.J.Mod.Phys.* **A22** 5063 (2007); *Int.J.Mod.Phys.* **B22** 1877(2008).
10. Olkhovsky V.S. *Advances in Mathem.Phys.*, **2009** (2009), article ID 859710, 83 pages, doi:10.1155/2009/859710.
11. Ольховский В.С., *Успехи физич. наук*, **181**:8 (2011)859.
12. Ольховский В.С., *О времени как квантовой наблюдаемой, канонически сопряжённой энергии*, *Materiały VIII Międzynarodowej Naukowi-Praktycznej Konferencji, Strategiczne Pytania Światowej Nauki –2012, 07-15 lutego 2012 roku, volume 28, Fizyka, str.10-15.*

Часть I.

1. Введение.

Уже долгое время (около 90 лет, начиная с работы Паули [1]) известно, что время не может быть представлено самосопряжённым линейным оператором, за исключением, как выяснилось позднее, особых абстрактных систем. Такая ситуация явно не укладывалась в рамки обычных ожиданий того, что время, как и пространство, в одних случаях играет роль простого параметра, а в других *является* физической наблюдаемой, которую *следовало бы* представить ператором. Это же породило бесконечную серию дискуссий о выводе и интерпретации соотношения неопределённости энергия-время, начиная с дискуссии [2,3].

Список работ, посвящённых удачным и неудачным попыткам решения проблемы времени в квантовой механике, довольно обширен (см., напр., [4-44], и приведенные там списки ссылок). То, что время не может быть представлено самосопряжённым оператором, именно следует из полуограниченности непрерывных спектров энергий (обычно они снизу ограничены нулём). Только для электрически заряженной частицы в бесконечном однородном электрическом поле и для некоторых особых систем непрерывный спектр энергий не ограничен и расположен на всей оси энергий от $-\infty$ до ∞ . И для них время может быть представлено самосопряжённым оператором. Время может быть представлено самосопряжённым оператором и для других особых абстрактных систем с непрерывным спектром энергий, ограниченным как снизу, так и сверху.

Та же ситуация имеет место и в квантовой электродинамике, а также и в релятивистской квантовой теории поля (см., напр., [11,42-44]).

Первая серия известных и цитируемых работ по времени в квантовой механике и квантовой теории поля (после [1-3]) – это [4-18]. Вторая серия работ по времени как квантовой наблюдаемой [19-44] публиковалась с конца восьмидесятых, но главным образом в девяностых годах в поисках в основном самосогласованного определения длительности квантовых столкновений и времени туннелирования и позднее. Однако в ряде работ этой второй серии была проигнорирована математическая теорема Наймарка из [45], которая ранее явилась важнейшим основанием результатов [12-15,19,20,25,26,38,42-44]. В этой теореме Наймарка говорится [45], что неортогональное спектральное разложение $E(\lambda)$ эрмитового оператора H принадлежит к типу Карлемана (и оно *единственно* для *максимального эрмитового оператора*), т.е. оно *может быть аппроксимировано* последовательностью самосопряжённых операторов, спектральные разложения которых слабо сходятся к спектральному разложению $E(\lambda)$ оператора H . В этом доказательстве Наймарк сослался на книгу Карлемана [46], в которой доказывается аппроксимация (максимального и не только максимального) эрмитового оператора H такой последовательностью ограниченных самосопряжённых операторов, ортогональные спектральные разложения единицы которых слабо сходятся к спектральному разложению единицы $E(\lambda)$ оператора H .

Именно с помощью этой теоремы Наймарка было показано в [12-15,19,20,25,26,38,42-44], что время может быть введено как квантовомеханическая наблюдаемая, канонически сопряжённая энергии, для физических систем с непрерывными спектрами энергий. При этом было показано, что оператор времени для таких систем обычно является максимальным эрмитовым оператором. А в [19 (вторая ссылка), 26] (см. также [42-44]) было выяснено, что для систем с дискретными спектрами энергий время также является квантово-механической наблюдаемой, канонически сопряжённой энергии, а оператор времени является квази-самосопряжённым оператором (точнее, в случае систем с более чем одним связанным состоянием оператор времени с любой степенью точности может быть выбран практически самосопряжённым).

В литературе также используется восходящий к ранним версиям квантовой теории измерений подход меры значений положительного оператора, или подход POVM (the

positive-operator-value-measure approach), нередко используемый даже поныне (см., в частности, [21-24,27-37,39-41]). Этот подход, в общем, известен в квантовой теории измерений примерно с 60-х годов и был использован в простейшей форме в иллюстративных целях для описания свободного движения ещё в [47]. Именно в [21-24,27-37,39-41] (зачастую с определёнными упрощениями и сокращениями) утверждалось, что обобщённое разложение единицы (или POV мера) воспроизводится из любого самосопряжённого расширения оператора времени в расширенное Гильбертово пространство (с отрицательными значениями энергии E на левой полуоси) с цитированием теоремы расширения Наймарка [48]. Однако фактически это было реализовано только в простейших случаях, например, для свободного движения частицы. Итоговая работа этого направления [41], вообще говоря, относится во многом к явно не законченной теории квантовых измерений, а не к фундаментальной квантовой механике.

Наш же подход основывается на *другой* теореме Наймарка (см. ссылку [45] выше), причём *без* какого-либо расширения физического пространства Гильберта обычных волновых функций (волновых пакетов) с последующей обратной проекцией на предыдущее пространство волновых функций; и, более того, он был опубликован в [12,13,15] (и независимо в [14]) ранее, чем работы [21-24,27-37,39-41]. Основанный на теореме Наймарка [45], опубликованной ранее, он *намного более прямой, простой и общий, и в то же время математически не менее строгий*, чем POVM подход, и относится к фундаментальной квантовой механике.

2. Время как наблюдаемая в нерелятивистской квантовой механике и общее определение средних времён и средних длительностей одномерных квантовых процессов.

Следуя [12-15,19,20,25,26,38,42-44], для систем с непрерывными спектрами энергий для времени может быть введён следующий простой оператор \hat{t} , канонически сопряжённый энергии:

$$\hat{t} = t \quad \text{во временном представлении,} \quad (1a)$$

$$\hat{t} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial E} \quad \text{в энергетическом (E-) представлении.} \quad (1б)$$

Он является не самосопряжённым, но *эрмитовым* и действует на квадратично интегрируемые пространственно-временные волновые пакеты в представлении (1a), и на их Фурье-преобразования в представлении (1б) при исключении точки $E=0$ (т.е., если используются только движущиеся волновые пакеты, когда исключены *неподвижные* задние хвосты), а также случая нулевого потока. И при этом исключение точки $E=0$ не ограничивает физической общности, поскольку состояния “покоя” с нулевой скоростью, волновые пакеты с *неподвижными* задними хвостами ненаблюдаемы. Этого условия, кстати, вполне достаточно, чтобы оператор (1a,б) был *эрмитовым оператором* [12-15,19,20,25,26,38,42-44], в соответствии с терминологией [49].

Оператор (1б) определяется как действующий на пространство P непрерывных дифференцируемых квадратично интегрируемых функций $f(E)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^{\infty} |f(E)|^2 dE < \infty; \quad \int_0^{\infty} |\partial f(E) / \partial E|^2 dE < \infty; \quad \int_0^{\infty} |f(E)|^2 E^2 dE < \infty \quad (2)$$

и

$$f(0)=0. \quad (3)$$

Пространство P *плотно* в Гильбертовом пространстве квадратично-интегрируемых функций L^2 , определённых (только) на полуоси $0 \leq E < \infty$. Вполне очевидно, что оператор (1a,b) эрмитов, т.е. соотношение $(f_1, \hat{t} f_2) = ((\hat{t} f_1), f_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда все

квадратично интегрируемые функции $f(E)$, в пространстве которых он определён, исчезают в точке $E=0$.

Строго говоря, оператор времени (1б) не является самосопряжённым оператором с равными между собой индексами дефекта, а максимальным эрмитовым (или симметрическим) оператором с неравными индексами дефекта (0,1) и обладает *единственной* обобщённой (не-ортогональной) функцией спектральной функцией (обобщённым разложением единицы). Из последнего свойства следует однозначность результатов вычисления интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^*(x,t) t \varphi(x,t) dt = \int_0^{\infty} g_1^*(x,E) (-i\hbar \frac{\partial}{\partial E}) g_2(x,E) dE \equiv (g_1, \hat{t} g_2),$$

где $\varphi_{1,2}(x,t) = \int_0^{\infty} g_{1,2}(x,E) \exp(-iEt/\hbar) dE$ - квадратично-интегрируемые волновые пакеты.

Оператор \hat{t} не имеет эрмитовых расширений, ибо в противном случае можно было бы найти хотя бы одну функцию $f_0(E)$, удовлетворяющую условию $f_0(0) \neq 0$, но это несовместимо со свойством эрмитовости. Поэтому, в соответствии с [15,49], \hat{t} является *максимальным эрмитовым* оператором.

Именно в силу этих причин Паули ранее отверг использование оператора времени (см., напр., [1]) и это более чем на 50 лет практически остановило изучение времени как квантовой наблюдаемой (потому что математическая работа Наймарка [45], равно как и более давняя работа Карлемана 1923 г [46], были долго неизвестны исследователям проблемы времени в квантовой механике). Но тем не менее, фон Нойман ещё в [50] утверждал, что использование только самосопряжённых операторов в квантовой механике может быть слишком большим ограничением. Для пояснения такой своей мысли он сам выдвинул такой пример [50]: Рассмотрим частицу, свободно движущуюся в пространстве с полуосью x ($0 \leq x < \infty$), которое ограничено жёсткой стенкой вдоль плоскости $x=0$. Оператор x -компоненты импульса для такой частицы

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x},$$

определён действующим в пространстве непрерывных дифференцируемых квадратично интегрируемых функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям $\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$;

$$\int_0^{\infty} |\partial f(x) / \partial x|^2 dx < \infty; \quad \int_0^{\infty} |f(x)|^2 x^2 dx < \infty \text{ и } f(0) = 0.$$

Это пространство функций \mathcal{Q} *плотно* в Гильбертовом пространстве L^2 функций, определённых (только) на пространственной полуоси $0 \leq x < \infty$. Поэтому оператор $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ имеет те же математические свойства, что и оператор \hat{t} (1а,б), и, следовательно, является не самосопряжённым оператором, но максимальным эрмитовым оператором. Тем не менее, он продолжает оставаться наблюдаемой с очевидным физическим смыслом.

Удивительно, что фон Нойман [50] подчеркнул, что операторы, подобные оператору \hat{t} , могут представлять физические наблюдаемые, даже если они не самосопряжённые. Он именно рассмотрел оператор $-i\hbar (\partial/\partial x)$, связанный с частицей, движущейся в правой полу-плоскости, ограниченной жёсткой стенкой, которая расположена в $x=0$; этот оператор не самосопряжённый в применении к волновым пакетам, движущимся только на положительной x -оси), но тем не менее он очевидно является x -компонентой наблюдаемого импульса этой частицы. Такими же свойствами обладает и оператор радиального импульса

$$\hat{p}_r = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \quad (0 < r < \infty).$$

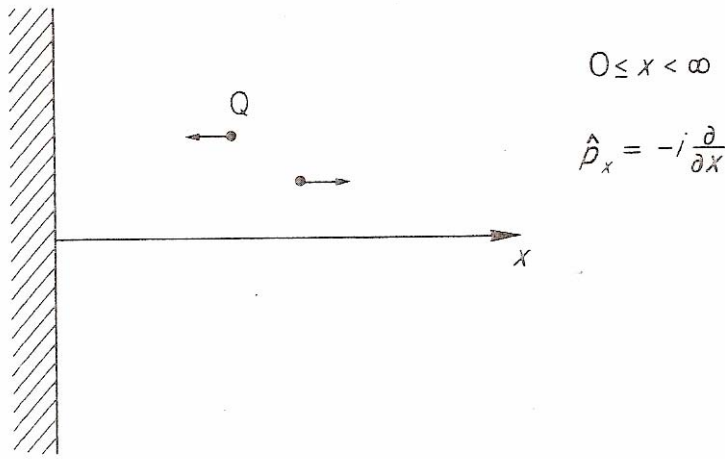


Рис.1 – Для частицы Q , движущейся в полупространстве, ограниченной жёсткой стенкой, оператор $-i\hbar\partial/\partial x$ (на рис.1 для упрощения использована система ед. с $\hbar=1$) имеет ясный физический смысл x -компоненты импульса частицы, даже если он *не* самосопряжённый (ср. с фон Нойманом [50]).

Любопытно, что давно также было замечено (см., напр., [5]), что в случае гипотетических квантовомеханических систем с непрерывными спектрами энергий, *ограниченных снизу и сверху* ($E_{min} < E < E_{max}$) оператор времени (1а,б) будет *реальным самосопряжённым оператором* и обладать дискретным спектром времён, с “квантом времени” $\tau = \hbar/d$, где $d = |E_{max} - E_{min}|$.

Для завершения изучения времени как наблюдаемой в квантовой механике остаётся решить вопрос с определением наблюдаемых средних моментов времени и средних длительностей движений и столкновений частиц. А для этого, в свою очередь, необходимо решить вопрос о мере (или весовой функции) усреднения по времени в согласовании с процедурами усреднения и известными принципами квантовой механики. В случае одномерного и однонаправленного движения частицы такая *мера* (или весовая функция) может быть получена с помощью простой величины

$$W(x,t)dt = \frac{j(x,t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} j(x,t)dt}, \quad (4)$$

где вероятностная интерпретация of $j(x,t)$ (именно во *времени*) соответствует плотности потока вероятности прохождения частицей через точку x в момент t (более точно, прохождения частицей через точку x в течение единичного интервала времени с центром в момент t), при движении частицы в положительном x -направлении. Эта мера не постулируется, а просто-напросто является прямым следствием известной вероятностной (*пространственной*) интерпретации плотности вероятности $\rho(x,t)$ и уравнения непрерывности

$$\partial\rho(x,t)/\partial t + \text{div } j(x,t) = 0 \quad (5)$$

при движении частицы в поле любого гамильтониана, описываемого одномерным уравнением Шредингера. Вспомним, что здесь $\rho(x,t)$ есть вероятность нахождения движущейся частицы в единичном пространственном интервале с центром в точке x в момент времени t . Плотность вероятности $\rho(x,t)$ и плотность потока вероятности $j(x,t)$ связаны с волновой функцией $\Psi(x,t)$ частицы обычными соотношениями $\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$ и $j(x,t) = \text{Re}[\Psi^*(x,t)(\hbar/i\mu)\partial\Psi(x,t)/\partial x]$. Мера (4) впервые была введена и исследована в [15,19,20,25,26].

Если плотность потока $j(x,t)$ меняет свой знак, то величина $W(x,t)dt$ уже не является положительно определённой величиной и приобретает физическое значение плотности вероятности *только* в течение тех ограниченных интервалов времени, в которых плотность потока $j(x,t)$ сохраняет свой знак. В этом случае естественно ввести две меры, разделяя положительные и отрицательные значения потоков вероятности по знаку:

$$W_{\pm}(x,t)dt = \frac{j_{\pm}(x,t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} j_{\pm}(x,t)dt} \quad (4a)$$

с $j_{\pm}(x,t) = j(x,t)\Theta(\pm j)$, где $\Theta(z)$ – ступенчатая функция Хэвисайда, равная нулю при $z < 0$ и единице при $z > 0$ (см. Приложение III).

Среднее значение $\langle t(x) \rangle$ в момент времени t , в который частица проходит через точку x (проходя её в одном только направлении x), и среднее значение $\langle t_{\pm}(x) \rangle$ в момент времени t , в который частица проходит через точку x , проходя её в положительном или отрицательном направлении оси x , можно определить как

$$\langle t(x) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} tj(x,t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} j(x,t)dt} = \frac{\int_0^{\infty} dE \frac{1}{2} [G^*(x,E)\hat{t}vG(x,E) + vG^*(x,E)\hat{t}G(x,E)]}{\int_0^{\infty} dEv |G(x,E)|^2}, \quad (6a)$$

где $G(x,E)$ – Фурье-преобразование движущегося одномерного (1D) волнового пакета

$$\Psi(x,t) = \int_0^{\infty} G(x,E)\exp(-iEt/\hbar)dE = \int_0^{\infty} g(E)\varphi(x,E)\exp(-iEt/\hbar)dE \quad (7)$$

при переходе от временного представления к энергетическому представлению, и

$$\langle t_{\pm}(x) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} tj_{\pm}(x,t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} j_{\pm}(x,t)dt}, \quad (6b)$$

соответственно, а также и средние длительности 1D *прохождения* частицы от точки x_i к точке $x_f > x_i$ и 1D *отражения* частицы от области (x_i, ∞) в область $x_f \leq x_i$:

$$\langle \tau_T(x_i, x_f) \rangle = \langle t_+(x_f) \rangle - \langle t_+(x_i) \rangle \quad \text{и} \quad \langle \tau_R(x_i, x_f) \rangle = \langle t_-(x_f) \rangle - \langle t_+(x_i) \rangle, \quad (6b)$$

соответственно.

Дисперсию распределения времён прохождения частицы через точку x , проходя её в положительном или отрицательном направлении оси x , можно определить как

$$Dt_{\pm}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 W_{\pm}(x,t)dt - [\langle t_{\pm}(x) \rangle]^2. \quad (7)$$

Единственность неортогональной спектральной функции оператора времени позволяет обосновать однозначность вычисления не только средних длительностей и дисперсий распределения длительностей любых квантовых процессов в любом возможном представлении (временном, энергетическом и, как позднее увидим, импульсном), но и

средних значений любой аналитической функции времени при разложении последней в сходящийся ряд типа $\sum_n c_n t^n$.

3. Соотношение неопределённости энергии и времени для систем с непрерывным спектром энергий.

Нетрудно видеть, что два канонически сопряжённых оператора, оператор времени (1) и оператор энергии

$$\hat{E} = \begin{cases} E & \text{в энергетическом (E-) представлении,} \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} & \text{во временном (t-) представлении,} \end{cases} \quad (8)$$

удовлетворяют типичному коммутативному соотношению:

$$[\hat{E}, \hat{t}] = i\hbar. \quad (9)$$

Отметим, что в соответствии с теоремой Стоуна и фон Неймана [51] соотношение (9) интерпретируется как имеющее место *только* для пары самосопряжённых канонически сопряжённых друг другу операторов в обоих представлениях и оно до сих пор не было *прямо* обобщено для *максимальных эрмитовых операторов*. Тем не менее, трудность прямого обобщения практически преодолена косвенно (обойдена) введением \hat{t} с помощью *однозначного* преобразования Фурье (Лапласа) от t -оси ($-\infty < t < \infty$) к E -полуоси ($0 < E < \infty$) и использованием особых математических свойств максимальных симметрических операторов (как в [15,19,25,42,43]), детально описанных, напр., в [49].

Из соотношения (9) может быть прямо выведено соотношение неопределённостей

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2 \quad (10)$$

(где неопределённости определены как среднеквадратичные отклонения $\Delta a = \sqrt{Da}$, $Da = \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2$ - дисперсии распределения величины a , $a = E, t$, при обозначении через $\langle \dots \rangle$ усреднений по t с использованием мер $W(x,t)dt$ или $W_{\pm}(x,t)dt$ в t -представлении или усреднений по E при учёте однозначности правых частей (6а, б), (7) и (8) в E -представлении) с помощью простого обобщения преобразований, стандартных для самосопряжённых канонически сопряжённых величин (см. [15,19,26,42-44]). Более того, соотношение (10) удовлетворяет *принципу соответствия Дирака*, поскольку классические скобки Пуассона $\{q_0, p_0\}$ с $q_0 = t$ и $p_0 = -E$ равны единице [52]. В [15] (см. также [19]) было также показано, что *разности* средних времён прохождения волновых пакетов через последовательную *пару* точек удовлетворяют *принципу соответствия Эренфеста*. Иначе говоря, этим самым фактически обобщена теорема Эренфеста.

Таким образом, для квантовомеханических систем с непрерывными спектрами энергий математические свойства максимальных эрмитовых операторов (описанные, в частности, в [41,42]), в том числе и оператора \hat{t} в соотношениях (1), вполне *достаточны* для того, чтобы полагать их квантовыми наблюдаемыми: Именно, *единственность* разложения единицы (называемой также спектральной функцией) для операторов \hat{t} и, кстати, \hat{t}^n ($n > 1$) гарантирует (несмотря на неортогональность такого разложения) *эквивалентность* средних значений любых аналитических функций времени, вычисленных как в t - , так и в E -представлениях. Другими словами, существование такого разложения эквивалентно *соотношению полноты* для (формальных) собственных функций \hat{t}^n ($n \geq 1$), соответствующих с любой степенью точности *вещественным собственным значениям* в области непрерывного спектра; такие собственные функции принадлежат пространству квадратично-интегрируемых функций энергии E с граничными условиями типа (2)-(3).

С этой точки зрения, *нет никакого практического (физического) различия между самосопряжёнными и максимальными эрмитовыми операторами* для систем с непрерывными спектрами энергий. Поэтому подчеркнём, что **математических свойств \hat{t}^n ($n \geq 1$) вполне достаточно для того, чтобы считать время квантовомеханической наблюдаемой (подобно энергии, импульсу, пространственным координатам,...) **без введения новых физических постулатов.****

4. Об импульсном представлении для оператора времени.

В [14] было продемонстрировано, что в случае непрерывного спектра вместо энергетического (E -) представления с $0 < E < \infty$, в (6а) и (7) можно также использовать и импульсное (k -) представление, с тем преимуществом, что значения импульсов k занимают всю бесконечную ось от $-\infty$ до ∞ :

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk g(E) \varphi(x,E) \exp(-iEt/\hbar), \quad (11)$$

где $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$, $k \neq 0$. В таком случае оператор времени (1а,б) при действии на собственную функцию импульса e^{ikx} на оси $-\infty < k < \infty$ уже *формально самосопряжённый* при учёте граничных условий

$$\left[\frac{d^n g(k)}{dk^n} \right]_{k=-\infty} = \left[\frac{d^n g(k)}{dk^n} \right]_{k=\infty} = 0, \quad n=0,1,2,\dots, \quad (12)$$

за исключением того, что исключена одна точка $k=0$, исключение которой имеет физический смысл ненаблюдаемости покоя (отсутствия движения), что математически уже несущественно. И действительно, это ещё один аргумент в пользу того, что время наблюдаемая в том же смысле, что и любая другая величина, которой соответствует самосопряжённый оператор.

Сравним теперь выбор (11) с (7) и конкретно перепишем (11) в виде:

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) = & \int_0^{\infty} dE (E)^{-1/2} g\left(\frac{(2\mu E)^{1/2}}{\hbar}\right) \varphi\left(x, \frac{(2\mu E)^{1/2}}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) + \\ & + \int_0^{\infty} dE (E)^{-1/2} g\left(-\frac{(2\mu E)^{1/2}}{\hbar}\right) \varphi\left(x, -\frac{(2\mu E)^{1/2}}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Если теперь введём весовую функцию

$$\tilde{g}(E) = \left(\frac{\mu}{2E\hbar^2}\right)^{1/4} \begin{bmatrix} g\left(\frac{(2\mu E)^{1/2}}{\hbar}\right) \\ g\left(-\frac{(2\mu E)^{1/2}}{\hbar}\right) \end{bmatrix} \quad (14)$$

в качестве "двухмерного" вектора, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = \int_0^{\infty} |\tilde{g}(E)|^2 dE < \infty, \quad (15)$$

где эвклидова норма двухмерного вектора $|\tilde{g}(E)|^2 = \tilde{g}^*(E) \cdot \tilde{g}(E) > 0$.

Если волновой пакет (11) *однонаправленный* и $g(k) \equiv g(k)\Theta(k)$, то интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} dk$ перейдет в интеграл $\int_0^{\infty} dk$, а двумерный вектор перейдет в скаляр. В этом случае граничные условия (2) и (3) можно заменить условиями той же формы при замене $E \rightarrow k$.

5. О второй мере усреднения по времени (в случаях обитания частиц в пространственных областях).

Нетрудно видеть, что весовую функцию

$$dP(x,t) \equiv Z(x,t)dx = \frac{|\Psi(x,t)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx} \quad (16)$$

можно рассматривать как вероятность локализации (или *sojourning* или *dwelling*) частицы в пространственной области $(x, x+dx)$ в момент времени t , в процессе движения. И вследствие этого, величина

$$P(x_i, x_f, t) = \frac{\int_{x_i}^{x_f} |\Psi(x,t)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx} \quad (17)$$

будет иметь смысл вероятности локализации частицы в пространственном интервале (x_i, x_f) в момент t . Учитывая равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} j_{in}(x,t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx, \quad (18)$$

которое очевидно следует из одномерного уравнения непрерывности (5), среднее время локализации (the mean dwell time) нетрудно представить в такой форме:

$$\langle \tau_{dw}(x_i, x_f) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{x_i}^{x_f} |\Psi(x,t)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} j_{in}(x_i, t)dt}, \quad (19a)$$

где обозначена плотностью потока вероятности j_{in} плотность потока вероятности заполнения области (x_i, x_f) при *свободном начальном потоке движения* через точку x_i . Выражение (19a) может быть переписано в следующей эквивалентной форме

$$\langle \tau_{dw}(x_i, x_f) \rangle = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} tj(x_f, t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} tj(x_i, t)dt \right]}{\int_{-\infty}^{\infty} j_{in}(x_i, t)dt}, \quad (19б)$$

учитывая уравнение непрерывности (5) для *полной* плотности потока вероятности $j(x,t)$ в области (x_i, x_f) в момент времени t (детали подробного вывода можно, в частности, видеть в [18,38]).

Таким образом, в соответствии с двумя мерами усреднения по времени (4)–(4a) и (19a,б) мы получаем два вида распределений по времени с разными физическими смыслами (относящиеся к движению, прохождению, передвижению частиц в случае мер (4)–(4a) и к заполнению или локализации (или *dwelling* или *sojourning*) частиц в случае мер (19a,б), соответственно). Неясно, однако, как определить *явно* дисперсии распределений времён

заполнения или локализации (а о неявном определении дисперсий распределений времён заполнения будет сказано в части II, разделе 2 на стр.36).

6. Введение аналога "гамильтониана" для оператора времени: новый гамильтонов подход для оператора времени.

В квантовой теории хорошо известно, что есть соответствие между энергией E и двумя операторами – оператором $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ в t -представлении и гамильтоновым оператором $\hat{H}(\hat{p}_x, \hat{x}, \dots)$. Дуальность этих операторов можно усмотреть из уравнения Шредингера $\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi$. Аналогичная дуальность должна иметь место и для времени в квантовой теории: кроме общей формы (1а, б), которая имеет место для любой физической системы (в области непрерывного спектра энергий), можно выразить оператор времени в терминах операторов координат и импульсов, используя коммутационное соотношение между гамильтоновым оператором и оператором времени. И таким образом, если сделать подстановку

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{E} \rightarrow \hat{H}(\hat{p}_x, \hat{x}, \dots) , \\ \hat{t} \rightarrow \hat{T}(\hat{p}_x, \hat{x}, \dots) , \end{array} \right. \quad (20)$$

то можно получить

$$[\hat{H}, \hat{T}] = i\hbar , \quad (21)$$

что подобно (3). Коммутационное соотношение (21) можно использовать, чтобы найти $\hat{T}(\hat{p}_x, \hat{x}, \dots)$ для любой конкретной физической системы с известным гамильтонианом $\hat{H}(\hat{p}_x, \hat{x}, \dots)$ (см., например, [10,17,18]). Однако следует отметить одну любопытную деталь, которая в некоторых случаях спровоцировала путаницу со знаком в (1б) и в правой части (21). Выбирая *координатное или импульсное* представление для $\hat{H}(\hat{p}_x, \hat{x}, \dots)$ и $\hat{T}(\hat{p}_x, \hat{x}, \dots)$, мы *не меняем* формальное выражение для гамильтониана $\hat{H}(\hat{p}_x, \hat{x}, \dots)$, но можем *менять знак* в формальном выражении для оператора времени $\hat{T}(\hat{p}_x, \hat{x}, \dots)$. Это легко увидеть для свободной частицы:

$$\hat{H} = \left\{ \begin{array}{l} \hat{p}_x^2 / 2\mu, \hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \text{ в координатном представлении,} \quad (22a) \\ p_x^2 / 2\mu \text{ в импульсном представлении} \quad (22b) \end{array} \right.$$

и

$$\hat{T} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu}{2}[\hat{p}_x^{-1}x + x\hat{p}_x^{-1}], \hat{p}_x^{-1} = \frac{i}{\hbar} \int dx \dots \text{ в координатном представлении} \quad (23a) \\ \frac{-\mu}{2}[p_x^{-1}\hat{x} + \hat{x}p_x^{-1}], \hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x} \text{ в импульсном представлении} \quad (23b) \end{array} \right.$$

(в симметризованной форме). Между прочим, формула (23б) эквивалентна $-i\hbar \frac{\partial}{\partial E}$, так как $E = p_x^2/2\mu$. Для состояния плоской волны $\exp(ikx)$, в обоих представлениях, (23а) и (23б), мы получим один и тот же результат:

$$\hat{T} \exp(ikx) = \frac{x}{v} \exp(ikx), \quad (24)$$

где $\frac{x}{v}$ = это время свободного движения со скоростью v вдоль расстояния x .

7. Время как наблюдаемая для квантово-механических систем с дискретными спектрами энергий.

Для систем с дискретными спектрами энергии естественно (следуя [19,42-44]) ввести волновые пакеты вида

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \varphi_n(x) \exp[-i(\varepsilon_n - \varepsilon_0)t/\hbar], \quad (25)$$

где $\varphi_n(x)$ – ортонормированные волновые функции связанных состояний системы, которые удовлетворяют уравнению $\hat{H} \varphi_n(x) = \varepsilon_n \varphi_n(x)$ с гамильтонианом системы \hat{H} , $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n|^2 = 1$ и мы опустили несущественный фазовый множитель $\exp(-i\varepsilon_0 t/\hbar)$ в силу его одинаковости для всех членов суммы $\sum_{n=0}^{\infty}$) для описания эволюции систем в области чисто дискретного спектра. Без ограничения общности выберем момент времени $t=0$ как начальный момент.

Вначале рассмотрим такие системы, для которых энергетические уровни отстоят друг от друга на расстояниях, для которых *фактически существует* максимальный общий делитель. Такими идеализированными системами являются *гармонический осциллятор, частица в жёстком ящике и сферический ротатор*. Для этих систем волновой пакет (25) является периодической функцией времени с периодом (*временем цикла Пуанкаре*) $T = 2\pi\hbar/D$, где D – максимальный общий делитель расстояний между энергетическими уровнями системы.

В t -представлении оператор энергии и гамильтониан системы являются самосопряжёнными операторами, действующими в пространстве *периодических* функций времени, в то время как функция $t\psi(t)$ не принадлежит к тому же пространству. Но в пространстве периодических функций времени оператор времени \hat{t} даже в своём собственном представлении должен быть также периодической функцией времени. Эта ситуация вполне аналогична случаю азимутального угла φ , канонически сопряжённого угловому моменту \hat{L}_z (см., напр., [53,54]). Используя тогда пример и результат, приведенный в [55], выберем вместо t *периодическую* функцию

$$\hat{t} = t - T \sum_{n=0}^{\infty} \Theta(t - [2n+1]T/2) + T \sum_{n=0}^{\infty} \Theta(-t - [2n+1]T/2), \quad (26)$$

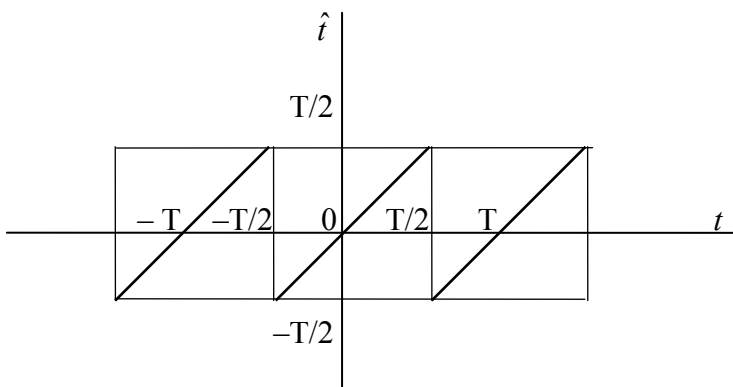


Рис.2. Периодическая пилообразная функция для оператора времени (26).

представляющую собой пилообразную функцию t (см. рис.2).

Такой выбор вполне обоснован физически, поскольку периодическая функция оператора времени (26) является линейной функцией внутри каждого интервала Пуанкаре, т.е. время сохраняет свой ход и свой обычный смысл упорядочивающего параметра эволюции системы.

8. Соотношение неопределённости энергии и времени для систем с дискретным спектром энергий.

Соотношение коммутации самосопряжённых операторов энергии и времени в этом случае (дискретные энергии и периодические функции времени) имеет вид:

$$[\hat{E}, \hat{t}] = i\hbar \left\{ 1 - T \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - [2n+1]T) \right\}. \quad (27)$$

Теперь вспомним (см., напр., [55]) обобщённый вид соотношения неопределённостей:

$$(\Delta A)^2 \cdot (\Delta B)^2 \geq \hbar^2 [\langle N \rangle]^2 \quad (28)$$

для двух самосопряжённых операторов \hat{A} и \hat{B} , канонически сопряжённых друг другу через коммутатор

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \hat{N}, \quad (29)$$

где \hat{N} – третий самосопряжённый оператор. И тогда нетрудно получить:

$$(\Delta E)^2 \cdot (\Delta t)^2 \geq \hbar^2 \left[1 - \frac{T |\psi(T/2 + \gamma)|^2}{\int_{-T/2}^{+T/2} |\psi(t)|^2 dt} \right], \quad (30)$$

где параметр γ (с произвольным значением между $-T/2$ и $+T/2$) введен для однозначности вычисления интеграла по dt в пределах от $-T/2$ до $+T/2$, по аналогии с процедурой, использованной в [53] (см. также [55]) в правой части соотношения (30).

Из (30) следует, что когда $\Delta E \rightarrow 0$ (т.е. когда $|g_n| \rightarrow \delta_{nn}$), правая часть (30) стремится к нулю, поскольку $|\psi(t)|^2$ стремится к константе. В этом случае распределение моментов времени прохождения волнового пакета через точку x в пределах одного цикла Пуанкаре становится однородным. Когда $\Delta E \gg D$ и $T |\psi(T+\gamma)|^2 \ll \int_{-T/2}^{T/2} |\psi(t)|^2 dt$, условие

периодичности для $\Delta t \ll T$ становится несущественным, т.е. (30) *переходит в соотношение неопределённостей* (10), типичное для систем с непрерывными спектрами энергий.

В принципе можно получить выражение для оператора времени (26) и в энергетическом представлении, хотя оно станет довольно громоздким. Но имеет смысл его записать хотя бы из чисто теоретических причин. Если оценить среднее выражение $\langle t(x) \rangle$ для момента времени прохождения волнового пакета через точку x , то после долгих алгебраических вычислений получим выражение ¹⁾

$$\hat{t} = \frac{i\hbar}{2} \sum_{n' > n} (-1)^{N_n - N_{n'}} \frac{\bar{\Delta}_{n'}}{\Delta_{n'} \varepsilon_n}, \quad (31)$$

где $N_n = (E_n - E_0)/D$ и появляются билинейные операторы. В частности, оператор $\bar{\Delta}_n$ имеет смысл

$$A_n^* \bar{\Delta}_n A_n \equiv A_n^* \Delta_n A_n - A_n \Delta_n A_n^*, \quad \Delta_n A_n \equiv A_n - A_n.$$

¹⁾ Естественно, следовало бы усреднять по плотности потока вероятностей, но простоты ради можно усреднять и по $|\Psi(x,t)|^2$.

И в результате получаем

$$\langle t(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^* \varphi_n^*(x) \hat{t} g_n \varphi_n(x) / \sum_{n=0}^{\infty} |g_n \varphi_n(x)|^2.$$

Оператор (31), в простейшем случае двух уровней ($n=0,1$), приобретает форму,

$$\hat{t} = \frac{-i\hbar}{2} \frac{\vec{\Delta}}{\Delta \varepsilon}; \quad (31a)$$

она при $D \equiv E_1 - E_0 \rightarrow 0$ переходит в дифференциальную форму

$$\hat{t} = \frac{-i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial \varepsilon}, \quad (31b)$$

которая подобна (16) (см. также приложение II о билинейном эрмитовым операторе времени) для непрерывного спектра энергий.

В общих случаях возбуждённых состояний ядер, атомов и молекул *расстояния между их энергетическими уровнями в дискретных спектрах не имеют строго определённого максимального общего делителя и, следовательно, не имеют строго определённого времени цикла Пуанкаре*. И также они не имеют чётко определённого перехода дискретной части спектра в непрерывную область спектра. Тем не менее, даже для этих систем можно ввести приближённое описание квазипериодической эволюции с квазициклами Пуанкаре (причём с любой степенью точности в пределах выбранного максимального предела ширины уровней, скажем, γ_{lim}). И для достаточно больших интервалов времени движения внутри таких систем (скажем, больших, чем \hbar/γ_{lim} , и при пренебрежении распадами состояний, отвечающих отдельным уровням) их можно рассматривать как *периодическое движение с любой степенью точности*. Для таких систем можно выбрать (определить) время цикла Пуанкаре с любой желаемой точностью, включая в один цикл столько много квазициклов, сколько необходимо для требуемой точности. И тогда с той же точностью можно ввести *квазисамосопряжённый оператор времени* (20) и затем определить все временные характеристики.

В вырожденном случае, когда в состоянии (25) сумма $\sum_{n=0}^{\infty}$ содержит только один член ($g_n \rightarrow \delta_{nn}$), эволюция во времени отсутствует.

Если система имеет обе области энергетического спектра (дискретную и непрерывную части), то естественно использовать форму (10) для непрерывной части спектра и форму (30) для дискретной части спектра.

9. Время и энергия как канонически сопряжённые наблюдаемые в квантовой электродинамике.

Формальная математическая аналогия между зависящими от времени квантовыми уравнениями движения для нерелятивистских частиц и зависящими от времени уравнениями для распространения электромагнитных волн изучалась в [56,57]. Здесь мы будем иметь дело с зависящим от времени уравнением Шредингера для нерелятивистских частиц и с зависящим от времени уравнением Гельмгольца для электромагнитных волн, учитывая не только формальную математическую аналогию между ними, но и такое подобие вероятностной интерпретации волновой функции частицы и классическим электромагнитным волновым пакетом (являющимся в соответствии с [58] “волновой функцией единичного фотона”), которое достаточно для одинакового определения средних моментов времени и длительностей (а также распределений длительностей) процессов распространения, столкновений и туннелирования для частиц и фотонов. Единственное

математическое различие в такой аналогии, обусловленное линейной зависимостью энергии и импульса для фотонов и квадратичной зависимостью энергии и импульса для нерелятивистских частиц с массой покоя, вызывает физическое различие в расплывании волновых пакетов частиц и фотонов.

Конкретно рассмотрим полый суженный прямоугольный волновод типа изображённого на рис.3 (с поперечным сечением $a \times b$ в суженной части, $a < b$), который использовался для экспериментов с микроволнами [56].

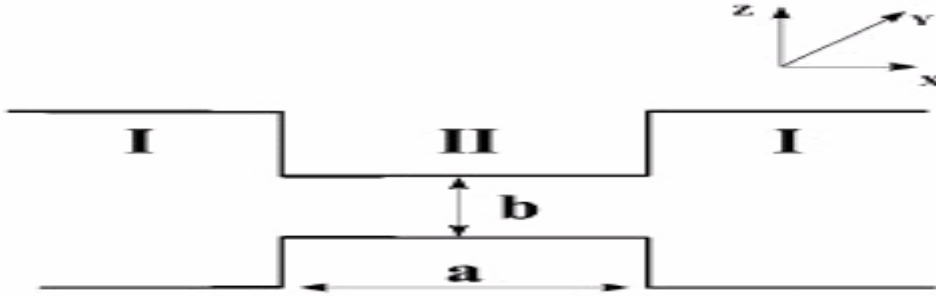


Рис.3. Когда радиоволны в микроволновом диапазоне распространяются вдоль волновода, суженный сегмент (с поперечной шириной, меньшей длины волны отсечки) проявляется как фотонный барьер.

Внутри него, зависящее от времени волновое уравнение для любого из векторов \vec{A} , \vec{E} , \vec{H} (\vec{A} - векторный потенциал с дополнительным условием калибровки $\text{div } \vec{A} = 0$, $\vec{E} = -(1/c) \partial \vec{A} / \partial t$ - напряжённость электрического поля, $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ - напряжённость магнитного поля) имеет вид

$$\Delta \vec{A} - (1/c^2) \partial^2 \vec{A} / \partial t^2 = 0. \quad (32)$$

Как известно (см., например, [58,59]), для граничных условий

$$E_y = 0 \quad \text{for } z = 0 \quad \text{and } z = a, \quad (33)$$

$$E_z = 0 \quad \text{for } y = 0 \quad \text{and } y = b,$$

мономатическое решение (26) может быть представлено в виде суперпозиции следующих волн:

$$E_x = 0,$$

$$E_y^\pm = E_0 \sin(k_z z) \cos(k_y y) \exp[i(\omega t \pm \gamma x)], \quad (34)$$

$$E_z^\pm = -E_0 (k_y / k_z) \cos(k_z z) \sin(k_y y) \exp[i(\omega t \pm \gamma x)]$$

(для определённости мы выбрали ТЕ-волны) с $k_z^2 + k_y^2 + \gamma^2 = \omega^2 / c^2 = (2\pi / \lambda)^2$, $k_z = m\pi / a$, $k_y = n\pi / b$, m и n - целые числа. Таким образом,

$$\gamma = 2\pi [(1/\lambda)^2 - (1/\lambda_c)^2]^{1/2}, \quad (1/\lambda_c)^2 = (m/2a)^2 + (n/2b)^2, \quad (35)$$

где γ - вещественно ($\gamma = \text{Re } \gamma$), если $\lambda < \lambda_c$ и γ - мнимое ($\gamma = i\chi_{em}$), если $\lambda > \lambda_c$. Подобные выражения для γ были получены для ТН-волн [58,59].

Вообще говоря, решение уравнения (32) может быть записано в виде волнового пакета, построенного из мономатических решений (34), подобно решению зависящего от времени уравнения Шредингера для нерелятивистских частиц в форме волнового пакета, построенного из мономатических волн. Более того, в представлении первичного

квантования вероятностная однофотонная волновая функция обычно описывается волновым пакетом для \vec{A} [60,61], например,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_{k_0 > 0} \frac{d^3 k}{k_0} \vec{k}(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{r} - ik_0 t) \quad (36)$$

в случае плоских волн, где $\vec{r} = \{x, y, z\}$, $\vec{k}(\vec{k}) = \sum_{i=1}^2 \kappa_i(\vec{k}) \vec{e}_i(\vec{k})$, $\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij}$, $\vec{e}_i(\vec{k}) \vec{k} = 0$, $i, j = 1, 2$ (или y, z , если $\vec{k}\vec{r} = k_x x$), $k_0 = \omega/c = \varepsilon/\hbar c$, $k = |\vec{k}| = k_0$, $\kappa_i(\vec{k})$ - амплитуда вероятности обладания фотоном импульса \vec{k} и поляризации i - и тогда величина $|\kappa_i(\vec{k})|^2 d\vec{k}$ пропорциональна вероятности того, что фотон обладает импульсом в интервале \vec{k} и $\vec{k} + d\vec{k}$ в состоянии поляризации \vec{e}_i . И хотя невозможно локализовать фотон в направлении его поляризации, тем не менее, в определённом смысле для одномерного движения возможно пользоваться пространственно-временной вероятностной интерпретацией (36) вдоль оси x (направления движения) [61]. Это можно понять из следующих соображений. Обычно пользуются не плотностью вероятности и плотностью по тока вероятности на основе соответствующего уравнения непрерывности *прямо*, но *плотностью энергии* s_0 и *плотностью потока энергии* s_x (хотя в общем они представляют компоненты не 4-мерного вектора, но тензора энергии-импульса) на основе соответствующего уравнения непрерывности [61], которое мы записываем в двухмерной (*пространственно одномерной*) форме:

$$s_0 / \partial t + \partial s_x / \partial x = 0, \quad (37)$$

где

$$s_0 = (\vec{E} * \vec{E} + \vec{H} * \vec{H}) / 8\pi, \quad s_x = c \operatorname{Re} [\vec{E} * \vec{H}]_x / 2\pi \quad (38)$$

и ось x направлена вдоль оси движения (среднего импульса) волнового пакета (36). Подчеркнём, что пространственно одномерное движение тензора энергии-импульса электромагнитного поля сводится к двухкомпонентной величине – скалярному члену s_0 и одномерному вектору s_x , для которого уравнение непрерывности (37) *лоренц-инвариантно*. Тогда, в качестве условия нормировки мы выбираем равенство пространственных интегралов s_0 и s_x средней энергии фотона и среднего импульса фотона соответственно или просто единичной плотности потока энергии s_x . При этом обходя проблему невозможности прямой пространственной вероятностной интерпретации (36), можем определить *условно* плотность вероятности

$$\rho_{em} dx = S_0 dx / \int S_0 dx, \quad S_0 = \int s_0 dydz \quad (39)$$

фотона найти его (локализовать) в пространственном интервале $(x, x+dx)$ вдоль оси x в момент времени t , и плотность потока вероятности

$$J_{em,x} dt = S_x dt / \int S_x dt, \quad S_x = \int s_x dydz \quad (40)$$

фотона пройти через точку (плоскость) x в интервал времени $(t, t+dt)$, вполне аналогично вероятностным свойствам для нерелятивистских частиц. Оправдание и условность таких определений поддерживаются также совпадением групповой скорости волнового пакета и скорость транспорта энергии, которая принята для электромагнитных волн (по крайней мере, для обычных плоских волн) в [62-64]. Следовательно, (1) в определённом смысле, при временном анализе вдоль направления движения волновой пакет (36) полностью аналогичен волновому пакету для нерелятивистских частиц и (2) аналогично стандартной квантовой механике можно определить среднее время прохождения фотона (электромагнитного волнового пакета) через точку x [25,38]:

$$\langle t(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t J_{em,x} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t S_x(x,t) dt / \int_{-\infty}^{\infty} S_x(x,t) dt, \quad (41)$$

где для естественных граничных условий $\kappa_i(0)=\kappa_i(\infty)=0$ в энергетическом представлении ($\varepsilon=\hbar c k_0$) можно использовать ту же форму оператора времени, что и для частиц в нерелятивистской квантовой механике – и поэтому показать эквивалентность расчётов $\langle t(x) \rangle$, $Dt(x)$ и т.д. в обоих временном и энергетическом представлениях. Тогда для волновых пакетов типа на рис.3 при граничных условиях (33) при туннелировании образуются затухающие и возрастающие волны с $k_x=\gamma = \pm i \chi_{em}$.

В случае потоков, меняющих свои знаки, следуя [20,38], введём величины $J_{em,x,\pm} = J_{em,x} \cdot \Theta(\pm J_{em,x})$ с тем же физическим смыслом, что и для частиц. И тогда, выражения для средних значений и дисперсий времён распределений движения, туннелирования, прохождения и отражения можно получить точно так же, как и для нерелятивистских частиц в квантовой механике (с заменой J на J_{em}).

В частном случае квазимонохроматических волновых пакетов, используя метод стационарной фазы [65], получим аналогичное выражение для *фазового времени туннелирования*²⁾

$$\tau_{tun,em}^{Ph} = 2/c \chi_{em} \quad \text{for} \quad \chi_{em} L \gg 1. \quad (42)$$

Из (42) видно, что если $\chi_{em} L > 2$, эффективная скорость туннелирования

$$v_{tun}^{eff} = L / \tau_{tun,em}^{Ph} \quad (43)$$

превосходит c , т.е. сверхсветовая. Этот результат согласуется с результатами измерений микроволнового туннелирования, представленным в [58] (и [56], где, более того, эффективная скорость туннелирования отождествлена с групповой скоростью конечного волнового пакета, отвечающего одиночному фотону).

10. Времена туннелирования в оптических экспериментах, основанных на слегка нарушенном полном внутреннем отражении света.

Результаты оптических экспериментов с туннелирующими фотонами, тоже согласующиеся с (32)-(41), описаны, в частности, в [66]. Схема этих экспериментов представлена на рис.4. Световой пучок проходит из диэлектрика в воздушный слой ширины a . Для углов падения i , бóльших, чем критический угол i_c полного внутреннего отражения, бóльшая часть пучка

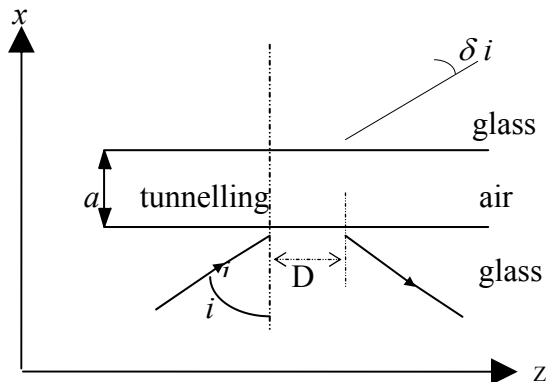


Рис.4. Принцип измерения времён туннелирования в экспериментах по оптическому туннелированию, основанных на слегка нарушенном полном внутреннем отражении света.

²⁾ Определение фазовых времён туннелирования дано в части II (разделе 2).

отражается, а меньшая часть пучка туннелирует через воздушный слой. Исходя из соображений, приведенных в предыдущем разделе, можно убедиться в полной аналогии туннелирования частиц и оптических фотонов. Здесь туннелирование происходит в направлении оси z . Выходящий пик, возникающий от второй поверхности, подвергается временному сдвигу, который равен среднему фазовому времени туннелирования $\langle \tau_{\text{tun}}^{\text{Ph}} \rangle$, и пространственному сдвигу D вдоль оси z . Поскольку естественно предположить, что скорость распространения v_z вдоль оси z неизменна во время туннелирования, то

$$D = v_z \langle \tau_{\text{tun}}^{\text{Ph}} \rangle, \quad (44)$$

так что среднее фазовое время можно легко оценить через измерение D .

Поскольку туннелирование также изменяет среднюю энергию (или волновой вектор) и в то же время компоненты плоской волны с меньшими углами падения лучше проходят, чем компоненты с большими углами падения, то возникающий пучок подвергается угловому отклонению $\delta \mathbf{i}$, что можно интерпретировать как вращение направления среднего пучка. В [66,67] было показано, что угловое отклонение $\delta \mathbf{i}$ связано с «потерей времени» $\tau_{\text{tun}}^{\text{loss}}$, которое имеет смысл среднеквадратичной флуктуации времени туннелирования, формулой

$$\delta \mathbf{i} = \Omega \tau_{\text{tun}}^{\text{loss}}, \quad (45)$$

где Ω - скорость вращения, вычисленная в [66] и определяется \mathbf{i} , коэффициентом преломления стекла и длиной Релея для пучка. Эти величины характеризуют внутренние свойства эволюции туннелирования в определённых условиях, наложенных на волновые пакеты. Поэтому заключение авторов [66] о неадекватном значении, основанном на $\langle \tau_{\text{tun}}^{\text{Ph}} \rangle$, основанное на неадекватном описании зависимости от волновой функции через $\exp(-\chi x)$ вместо $\alpha \exp(-\chi x) + \beta \exp(\chi x)$, неверно. При такой поправке можно видеть, что полученные очень малые значения $\langle \tau_{\text{tun}}^{\text{Ph}} \rangle$ около 40 фемтосек при $a=20$ миллимикрон отвечают *сверхсветовой пиковой скорости* туннелирующего фотона около $5 \cdot 10^{10}$ см/сек.

11. Обобщение времени как квантовой наблюдаемой для уравнения Клейна-Гордона и уравнения Дирака.

В случае уравнения Клейна-Гордона [60] уравнение непрерывности будет типа (5), где после перехода в импульсное пространство для частиц $\rho = |\Psi(x,t)|^2 = \int_+ \frac{d^3 k}{k_0} |\Phi(k)|^2$, $\frac{d^3 k}{k_0}$ - элемент лоренц-инвариантной меры на гиперboloиде $k^2 = \mu_0^2$, $\Phi(k)$ и $\Psi(x,t)$ связаны друг с другом соотношением $\Psi(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_+ \frac{d^3 k}{\sqrt{2k_0}} \Phi(k) e^{ikx - ik_0 ct}$, а плотность потока вероятности

будет, аналогично нерелятивистской квантовой механике, равна $j_n = (2m)^{-1} \hbar (\Psi^* k_n \Psi - \Psi k_n \Psi^*)$. Тогда мера усреднения по времени одномерно (1D) движущейся частицы (или античастицы) будет типа (4) или (4а), аналогично нерелятивистскому случаю.

Теперь рассмотрим 3- и 4-векторы положения для уравнения Клейна-Гордона. Обычные операторы положения, будучи эрмитовыми и, более того, самосопряжёнными, обладают вещественными собственными значениями, т.е. они дают *точно-подобную* локализацию. В релятивистском же случае ситуация такова, что рождение пар запрещает локализацию с точностью, лучшей комптоновская длина волны. И собственные значения реалистического оператора позиции \hat{x} по-видимому должны представлять скорее пространственные *области*, чем точки. Следуя идеям [67], мы рассмотрим, что средние значения *эрмитовой (самосопряжённой)* части \hat{x} отвечают средней (точной) позиции [68], в то время как средние значения *антиэрмитовой (антисамосопряжённой)* части \hat{x} отвечают размерам области локализации. Ограничимся рассмотрением релятивистских частиц со спином 0 в

естественных величинах ($\hbar=c=1$) и с метрикой $(+ - - -)$. Оператор положения $\hat{x} = i\nabla_p$ можно расщепить (split) [68] на его эрмитовую и антиэрмитовую части. Рассмотрим, далее, векторное пространство V комплексных дифференцируемых функций в трёхмерном фазовом пространстве, оснащённом внутренним произведением, определяемым как

$$(\Psi, \Phi) = \int \frac{d^3 p}{p_0} \Psi^*(p) \Phi(p), \quad (46)$$

где $p_0 = [p^2 + m_0^2]^{1/2}$. Пусть функции в V , далее, удовлетворяют условию

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \frac{dS}{p_0} \Psi^*(p) \Psi(p) = 0, \quad (47)$$

где интеграл берётся по поверхности сферы радиуса R . Если \mathcal{U} - дифференциальный оператор первой степени ($V \rightarrow V$), условие (46) позволяет определить транспонированный оператор \mathcal{U}^T равенством

$$(\mathcal{U}^T \Psi, \Phi) = (\Psi, \mathcal{U} \Phi) \quad \text{для всех } \Phi, \Psi \in V, \quad (48)$$

где \mathcal{U} переходит в \mathcal{U}^T с помощью интегрирования по частям. Это позволяет далее ввести *дуальное представление* $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ оператора $\mathcal{U}_1^T + \mathcal{U}_2$ с помощью соотношения

$$(\mathcal{U}_1 \Psi, \Phi) + (\Psi, \mathcal{U}_2 \Phi) = (\Psi, (\mathcal{U}_1^T + \mathcal{U}_2) \Phi). \quad (49)$$

При таком *дуальном* представлении легко расщепить любой оператор на его эрмитовую и антиэрмитовую части

$$(\Psi, \mathcal{U} \Phi) = (1/2) [(\Psi, \mathcal{U} \Phi) + (\mathcal{U}^* \Psi, \Phi)] + (1/2) [(\Psi, \mathcal{U} \Phi) - (\mathcal{U}^* \Psi, \Phi)]. \quad (50)$$

Здесь пара

$$(1/2) (\mathcal{U}^*, \mathcal{U}) \equiv \vec{U}_h, \quad (51a)$$

отвечающая $(1/2)(\mathcal{U} + \mathcal{U}^{*T})$, представляет эрмитовую часть, а пара

$$(1/2) (-\mathcal{U}^*, \mathcal{U}) \equiv \vec{U}_a \quad (51b)$$

представляет антиэрмитовую часть.

Пусть теперь \mathcal{U} представляет Клейн-Гордоновский оператор положения $\hat{x} = i\nabla_p$. Если

$$\mathcal{U} = i \frac{\partial}{\partial p_j}, \quad (52)$$

то получим

$$(1/2) (\mathcal{U}^*, \mathcal{U}) = (1/2) \left(-i \frac{\partial}{\partial p_j}, i \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \equiv (i/2) \frac{\vec{\partial}}{\partial p_j}, \quad (53a)$$

$$(1/2) (-\mathcal{U}^*, \mathcal{U}) = (1/2) \left(i \frac{\partial}{\partial p_j}, i \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \equiv (i/2) \frac{\vec{\partial}_{(+)}}{\partial p_j}. \quad (53b)$$

И из них получим операторы

$$(1/2)(\mathcal{U} + \mathcal{U}^* \tau) = i \frac{\partial}{\partial p_j} - (i/2) \frac{p_j}{p^2 + m_0^2} \quad (54a)$$

и

$$(1/2)(\mathcal{U} - \mathcal{U}^* \tau) = (i/2) \frac{p_j}{p^2 + m_0^2} . \quad (54b)$$

При этом, [68] оператор (54a) – не что иное, как обычный оператор Ньютона-Вигнера, а оператор (54b) можно интерпретировать [68-71] как дающий размеры области локализации (эллипсоида) с помощью определения его средних значений по заданному волновому пакету.

Подчеркнём, что эта выкладка реализуется с математической точки зрения формализм, использованный в [68-71]: В [68] оператор \hat{x} расщепляется в две билинейные части (билинейные операторы определены в приложении II) так:

$$\hat{x} = i\nabla_p \equiv (i/2) \vec{\nabla}_p + (i/2) \vec{\nabla}_p^{(+)} , \quad (55)$$

где $\Psi^* \vec{\nabla}_p \Phi \equiv \Psi^* \nabla_p \Phi - \Phi \nabla_p \Psi^*$ и $\Psi^* \vec{\nabla}_p^{(+)} \Phi \equiv \Psi^* \nabla_p \Phi + \Phi \nabla_p \Psi^*$ и используются волновые пакеты. Его эрмитова часть [68-71]

$$\hat{x}_h \equiv (i/2) \vec{\nabla}_p , \quad (56)$$

которая приводит к обычной точечной локализации, была выведена с помощью точного написания

$$(\Psi, \hat{x} \Phi) = i \int \frac{d^3 p}{p_0} \Psi^*(p) \nabla_p \Phi(p)$$

и накладывания эрмитовости, т.е. вещественности диагональных элементов. Расчёт показал, что

$$\text{Re} (\Phi, \hat{x} \Phi) = i \int \frac{d^3 p}{p_0} \Phi^*(p) \vec{\nabla}_p \Phi(p) ,$$

в предположении лоренцевской инвариантности величины (55) от билинейного эрмитового оператора. Далее, интегрируя по частям (с учётом исчезновения поверхностного интеграла), мы также покажем, что (55) эквивалентно обычному оператору Ньютона-Вигнера:

$$\hat{x}_h \equiv (i/2) \vec{\nabla}_p \equiv i\nabla_p - (i/2) \frac{\vec{p}}{p^2 + m_0^2} . \quad (56a)$$

И теперь остаётся билинейная антиэрмитова часть

$$\hat{x}_a \equiv (i/2) \vec{\nabla}_p^{(+)} , \quad (56b)$$

чьи *средние значения* в рассмотренном состоянии (волнового пакета) рассматриваются как производящие [70,71] размеры эллипсоидальной области локализации.

После этого отступления с равенствами (55)-(56), вернёмся к настоящему формализму (представленному равенствами (46)-(55)).

В общем, оператор \hat{x} расширенного типа даёт

$$\langle \Psi | \hat{x} | \Psi \rangle = (\vec{\alpha} + \Delta \vec{\alpha}) + i(\vec{\beta} + \Delta \vec{\beta}) , \quad (57)$$

где $\Delta \vec{\alpha}$ и $\Delta \vec{\beta}$ - средние ошибки при измерении точечной позиции и размеров области локализации, соответственно. Вычислим коммутаторы ($i, j = 1, 2, 3$):

$$\left[(i/2) \frac{\bar{\partial}}{\partial p_i}, (i/2) \frac{\bar{\partial}_{(+)}}{\partial p_j} \right] = (i/2 p_0^2) (\delta_{ij} - 2p_i p_j / p_0^2), \quad (58)$$

откуда следуют известные “корреляции неопределённости”:

$$\Delta \alpha_i \cdot \Delta \beta_j \geq (1/4) | \langle (\delta_{ij} - 2p_i p_j / p_0^2) / p_0^2 \rangle_\psi |. \quad (59)$$

Естественно ввести 4-оператор 4-координаты. Можно предложить 4-оператор как величину $\hat{x}^\mu = \hat{x}_h^\mu + i \hat{x}_a^\mu$, чья эрмитовая (лоренц-инвариантная) часть может быть записана:

$$\hat{x}_h^\mu \equiv - (i/2) \frac{\bar{\partial}}{\partial p_\mu}, \quad (60)$$

будучи связанной с соответствующим “оператором” в пространстве 4-импульса:

$$\hat{p}_h^\mu \equiv + (i/2) \frac{\bar{\partial}}{\partial x_\mu}. \quad (61)$$

Вначале вспомним пропорциональность между оператором 4-импульса и оператором 4-плотности потока в пространственно-временном анализе

$$m_0 \hat{\rho} \equiv \hat{p}_0 = (i/2) \frac{\bar{\partial}}{\partial t}; \quad (62a)$$

$$m_0 \hat{j} \equiv \hat{p} = - (i/2) \frac{\bar{\partial}}{\partial \vec{r}}. \quad (62b)$$

Затем вспомним каноническое соответствие (в пространствах 4-положений и 4-импульсов, соответственно) и введём в пространстве 4-импульсов операторы 4-положений:

$$\hat{t} = - (i/2) \frac{\bar{\partial}}{\partial p_0}; \quad (63a)$$

$$\hat{\vec{x}} = (i/2) \frac{\bar{\partial}}{\partial \vec{p}}. \quad (63b)$$

Теперь, вспоминая свойства оператора времени в нерелятивистском случае, рассмотренные в разделе 2, мы легко убедимся в том, что релятивистский оператор времени для случая Клейна-Гордона *должен быть также билинейным эрмитовым оператором для непрерывного спектра энергий и максимальным эрмитовым линейным оператором вследствие ограниченности нулём снизу для кинетической энергии (или m_0 снизу для полной энергии) для свободных частиц.*

Наконец, сравнивая (62a,б) и (63a,б), можно заключить, что “оператор” 4-положений (62a,б) возможно рассматривать как оператор 4-плотности потока в пространстве энергии-импульса [11].

И, разумеется, подобные выводы можно сделать также и для антиэрмитовых частей [11].

В случае уравнения Дирака [60] уравнение непрерывности тоже будет типа (5), где $\rho = |\Psi(x,t)|^2$,

$$j_n = c \Psi^*(x,t) \alpha_n \Psi(x,t), \quad \alpha_n = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_n \\ \sigma_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где матрицы α_n эрмитовы, а мера усреднения по времени одномерно движущейся частицы

(или античастицы) будет также типа (4) или (4а).

И все аналогичные рассуждения, проведенные для уравнения Клейна-Гордона, можно также (хотя и не всегда так же просто) провести и для случая уравнения Дирака.

Что касается соотношения неопределённостей энергии и времени, то их вывод для релятивистских квантовых уравнений Клейна-Гордона и Дирака практически совпадает с соотношением неопределённостей в нерелятивистской квантовой механике.

Далее, ситуация с дискретным спектром энергий для оператора времени в релятивистской квантовой механике тоже практически совпадает с дискретным спектром энергий для нерелятивистской квантовой механики.

12. Выводы и перспективы.

1. Оператор времени (1) является общим для любого квантового столкновения и процесса движения в непрерывном спектре энергий в нерелятивистской квантовой механике и одномерной квантовой электродинамике. Разумеется, он не может быть определён для случаев с нулевыми потоками, а также с покоящимися частицами, для которых *априори* нет процессов движения вообще. Единственность максимального эрмитового оператора времени (1) прямо следует из однозначности Фурье-преобразований от временного представления к энергетическому. А что касается систем с дискретными спектрами энергии, форма (26) для оператора времени отвечает конкретному классу волновых функций связанных состояний в точности подобно ситуации с оператором азимутального угла. Этот оператор общий для процессов в дискретном спектре энергий (если система имеет чисто дискретный спектр либо имеет дискретный спектр как часть своего полного энергетического спектра). Оператор времени не может быть определён в случае *одного* связанного состояния с *нулевым* потоком и для *покоящейся* частицы, поскольку в этом случае нет никакой эволюции во времени.

Ещё раз подчеркнём, что в пределе бесконечно близких уровней формула (31а) переходит в формулу (16) для систем с непрерывными спектрами (точнее в эквивалентную ей формулу (II,1) для бивалентного эрмитова оператора времени).

Все коммутационные соотношения, проанализированные здесь, (9) и (27), а также соотношения неопределённости (10) и (30) стоят рядом с другими парами канонически сопряжённых наблюдаемых (например, для координаты \hat{x} и импульса \hat{p}_x в случае (7), и для азимутального угла φ и углового момента \hat{L}_z в случае (30)). Наши соотношения не заменяют, но существенно расширяют смысл соотношений неопределённости времени и энергии, данных в [72]. И они также совместимы с выводами дискуссии в [2,3], где, в частности, говорилось об отсутствии возражений против тех ограничений на измерения времени и энергии, которые могут быть выведены из математического формализма, связанного с введением адекватных операторов энергии и времени и соответствующими статистическими флуктуациями. И, несомненно, эти соотношения, которые выведены из применения свойств оператора времени прекратят бесконечные дебаты о статусе соотношения неопределённости времени и энергии.

2. И наконец, мы утверждаем, что *не только оператор времени, но и любые другие величины, которым соответствуют максимальные эрмитовы операторы* (например, импульс в полупространстве с жёсткой стенкой и радиальный импульс оба определены на полуограниченной полуоси от $\mathbf{0}$ до ∞) могут рассматриваться как квантовые наблюдаемые в такой же степени, как и величины, которым отвечают самосопряжённые операторы, *без введения новых физических постулатов*. Тот же вывод имеет место и для квази-самосопряжённых операторов типа (26) и (31).

3. Довольно интересным, а также однозначным и эквивалентным подходу с максимальным эрмитовым оператором времени является подход с билинейным оператором времени, а также подход с самосопряжённым импульсным представлением оператора времени и в нерелятивистской квантовой механике, и в релятивистской квантовой механике.

4. Фактически после решения вопроса о том, что время является квантовой переменной, канонически сопряжённой энергии, и после окончательного вывода соотношения неопределённости энергия-время можно считать уже принципиально завершённой фундаментальную квантовую механику. Однако совокупная квантовая механика, включая теорию квантовых измерений, всё ещё далека от завершения и эта проблема остаётся актуальной (см., напр., [73,74]), особенно с учётом проблемы редукции волновой функции в квантовой теории измерений в копенгагенской интерпретации. Это подтверждается, в частности, и явной внутренней незавершённой большой коллективной монографии, содержащей проблемы измерения времён в квантовой механике [41].

5. Любопытна и ждёт своего будущего применения дуальность оператора времени, такая же, как и дуальность оператора энергии ($i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ в t -представлении и гамильтониан $\hat{H}(\hat{p}_x, \hat{x}, \dots)$).

Например, представляется перспективной задача временного анализа туннелирования зарождающейся Вселенной сквозь барьер, определяемый кривой квантовой гравитации в квазилинейном приближении во время начального периода инфляции, с использованием гамильтонова подхода к оператору времени, описанному в п.6 на основе операторного уравнения (15) и дуальных уравнений $H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ и $T\Phi = -i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial E}$, где Φ - фурье-компонента

волновой функции $\Psi = \int_0^\infty dE \exp(-iEt/\hbar) \Phi(E)$.

И вообще изучение эволюции столкновений и туннелирования с помощью уравнения $T\Psi = t\Psi$ может оказаться полезным, в частности, для исследования влияния формы барьера на время туннелирования [19].

6. В части I для уравнения Клейна-Гордона показано, что средние значения эрмитовой (самосопряжённой) части трёх-позиционного оператора \hat{x} приводят к среднему (точечному) положению, а средние значения анти-эрмитовой (антисамосопряжённой) части \hat{x} приводят к размерам области локализации. Далее, был введен 4-оператор в 4-импульсном пространстве, в котором действуют билинейный эрмитов оператор времени для непрерывных спектров энергий и/или максимальный эрмитов линейный оператор времени (вследствие ограниченности нулём снизу для кинетической энергии или m_0 снизу для полной энергии) в случае свободных частиц.

7. Довольно перспективным (хотя и не всегда простым) является развитие анализа 3- и 4-операторов для других релятивистских операторов (уравнение Дирака, 2- и 3-мерной квантовой электродинамики, ...).

8. Интересна перспектива распространения анализа, проведенного в части I, на совместное рассмотрение частиц и античастиц, а также для обоих направлений времени (положительного и отрицательного).

9. Представляет интерес временной анализ осциллирующих волновых пакетов (как наборов связанных состояний) вместе с фотонной флуоресценцией возбуждённых состояний внутри любой системы (например, кристалла или ядра) с квазидискретным спектром, энергетические уровни которого разделены интервалами, кратными "максимальному общему делителю" D , и возможных мигрирующих лазероподобных явлений (внутри кристаллов или возбуждённых ядер).

Приложение I.

Приближённые собственные значения и приближённые ортонормированные собственные функции оператора времени.

Следуя [5] (и см. также [15]), можно записать такие приближённые собственные значения t собственные функции оператора \hat{t} в равенстве (1) и одновременно оператора \hat{t}^2 :

$$\hat{t} \varphi_t^{\delta,\eta}(E) \approx t \varphi_t^{\delta,\eta}(E), \quad (I,1)$$

$$\hat{t}^2 \varphi_t^{\delta,\eta}(E) \approx t^2 \varphi_t^{\delta,\eta}(E), \quad (I,2)$$

где

$$\varphi_t^{\delta,\eta}(E) = C \exp(iEt/\hbar) f_\delta(E) g_\eta(E), \quad (I,3)$$

C – произвольная константа, t – непрерывное вещественное собственное значение оператора \hat{t} ,

$$f_\delta(E) = 2 \frac{\sin \delta E / \hbar}{E / \hbar},$$

$$g_\eta(E) = \begin{cases} 3(E/\eta)^2 - 2(E/\eta)^3 & \text{для } 0 \leq E \leq \eta, \\ 1 & \text{для } \eta \leq E, \end{cases}$$

δ – положительный параметр, описывающий ширину волнового пакета, построенного из функций $\exp(iEt/\hbar)$; последовательность функций (E) имеет предел при $\eta \rightarrow 0$, который равен обобщённой функции $\Theta(E)$; $\Theta(E)$ равна 1 при $E > 0$ и 0 при $E \leq 0$. Как нетрудно видеть из прямого анализа левых частей уравнений (I.1) и (I.2), функции $\varphi_t^{\delta,\eta}(E)$ аппроксимируют собственные функции операторов \hat{t} и \hat{t}^2 тем более точно и тем более ортогональны друг другу при разных t , чем лучше выполняются

$$\delta/t \ll (\delta\eta/\hbar)^{1/2} \ll 1 \quad (I,4)$$

и

$$(\delta/t)^2 \ll (\delta\eta/\hbar)^{3/2} \quad (I,5)$$

при $\delta \rightarrow 0$ and $\eta \rightarrow 0$, а при выполнении условия (I,4), дисперсия

$$Dt = \langle \varphi_t^{\delta,\eta}(E) | \hat{t}^2 | \varphi_t^{\delta,\eta}(E) \rangle - |\langle \varphi_t^{\delta,\eta}(E) | \hat{t} | \varphi_t^{\delta,\eta}(E) \rangle|^2$$

в состоянии $\varphi_t^{\delta,\eta}(E)$ стремится 0. Константу C можно выбрать так, чтобы норма $\|\varphi_t^{\delta,\eta}(E)\|$ равнялась 1.

Любопытно, что функция (I,3) отличается от простых волновых пакетов вида

$$\varphi_t^\delta(E) = C \exp(iEt/\hbar) f_\delta(E),$$

типичных для “собственных дифференциалов” в непрерывном спектре линейного самосопряжённого оператора [55] только отсутствием множителя $g_\eta(E) \rightarrow \Theta(E)$.

Приложение II.

О билинейном эрмитовом операторе времени.

Можно переписать линейный оператор (16) в форме *билинейного* оператора

$$\tilde{t} = (-i\hbar/2) \frac{\tilde{\partial}}{\partial E}, \quad (\text{II},1)$$

где

$$(\varphi, (-i\hbar/2) \frac{\tilde{\partial}}{\partial E} f) \equiv (\varphi, (-i\hbar/2) \frac{\partial}{\partial E} f) + ((i\hbar/2) \frac{\partial}{\partial E} \varphi, f), \quad (\text{II},2)$$

причём по сути не изменяя формы (1а). Такая билинейная форма оператора времени была впервые введена в [11]. При этом точка $E=0$ автоматически исключается из обеих форм $(f, \hat{t} f)$ и из интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} t j(x,t) dt$ по времени в интеграле по энергии. Кстати, при этом результат от алгебраической суммы от двух слагаемых в правой части автоматически становится равным 0 при $E=0$. Такое “исключение” точки $E=0$ [11] оказывается не только проще, но и также более физическим по сравнению с другими вариантами исключения в работах, подобных [21-24, 27-37, 39, 40], полученными намного позже.

Эрмитов оператор \tilde{t} обладает собственным значением t и парой собственных функций $(\varphi_t^{\delta, \eta^*}(E), \varphi_t^{\delta, \eta}(E))$.

Приложение III.

Вывод выражений для весовых функций $W_{\pm}(x,t)$.

Формулы (4а) и (6б) были введены впервые в [20,38], где было приведено и их обоснование, начиная с переписывания уравнения непрерывности (5) для тех интервалов времени, для которых $j=j_+$ или $j=j_-$, в форме:

$$\frac{\partial \rho_{>}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_+(x,t)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \rho_{<}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_-(x,t)}{\partial x}, \quad (\text{III},1)$$

соответственно (там же соотношения (I,1) рассматриваются и как формальные определения $\partial \rho_{>} / \partial t$ и $\partial \rho_{<} / \partial t$). Проинтегрируем их по времени от $-\infty$ до ∞ и получим:

$$\rho_{>}(x,t) = -\int_{-\infty}^t \frac{\partial j_+(x,t')}{\partial x} dt', \quad \rho_{<}(x,t) = -\int_{-\infty}^t \frac{\partial j_-(x,t')}{\partial x} dt' \quad (\text{III},2)$$

при начальных условиях $\rho_{>}(x, -\infty) = \rho_{<}(x, -\infty) = 0$. Затем введём величины

$$N_{>}(x, \infty; t) \equiv \int_x^{\infty} \rho_{>}(x', t) dx' = \int_{-\infty}^t j_+(x, t') dt' > 0 \quad (\text{III},3)$$

$$N_{<}(-\infty, x; t) \equiv \int_{-\infty}^x \rho_{<}(x', t) dx' = -\int_{-\infty}^t j_-(x, t') dt' > 0, \quad (\text{III},4)$$

которые имеют смысл вероятностей локализации частицы в момент времени t полу-оси (x, ∞) или $(-\infty, x)$, соответственно, как функции плотностей потока $j_+(x,t)$ или $j_-(x,t)$ при условии, что выполнено условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t) dx = 1$. Части последней пары уравнений получены при интегрировании правых частей выражений для $\rho_{>}(x,t)$ и $\rho_{<}(x,t)$ при принятии граничных условий $j_+(-\infty, t) = j_-(-\infty, t) = 0$. Дифференцируя $N_{>}(x, \infty; t)$ и $N_{<}(-\infty, x; t)$ по t , получим

$$\frac{\partial N_{>}(x, \infty; t)}{\partial t} = j_+(x, t) > 0, \quad (\text{III},5)$$

$$\frac{\partial N_{<}(x, -\infty; t)}{\partial t} = -j_{<}(x, t) > 0 \quad (III,6)$$

И, наконец, из последних четырёх уравнений можно заключить, что

$$W_{+}(x, t) dt = \frac{\partial N_{>}(x, \infty; t) / \partial t}{N_{>}(x, \infty; \infty)} \quad (III,7)$$

$$W_{<}(x, t) dt = \frac{\partial N_{<}(x, -\infty; t) / \partial t}{N_{<}(-\infty, x; \infty)}, \quad (III,8)$$

которые *оправдывают* вышеупомянутые в основном тексте интерпретации $W_{\pm}(x, t)$. Попутно отметим, что такой вывод *не* содержит никакого нового ad hoc физического постулата.

Список литературы.

1. Паули В. *Общие принципы волновой механики* (М.-Л.: ОГИЗ, 1947) (см. стр.102-103). Pauli W., in: *Handbuch der Physik*, vol.5/1, ed. by S.Fluegge, Berlin, 1926 (p.60); see also: Pauli W. *General Principles of Quantum Theory* (Springer; Berlin, 1980).
2. Крылов Н.С., Фок В.А. *ЖЭТФ* **17** 93 (1947); Фок В.А. *ЖЭТФ* **42** 1136 (1962); Krylov N.S. and Fock V.A. *Sov. J. Zhetf*, **17** 93 (1947); Fock V.A. *Sov. J. Zhetf*, **42** 1135 (1962).
- 3.. Aharonov Y. and Bohm D. *Phys. Rev.* **122** 1649 (1961); **B134** 1417 (1964).
- 4 Paul V.N. *Ann.Phys.* **9** 252 (1962).
5. Engelmann F. and Fick E. *Z.Phys.* **175** 271(1963); **178** 551(1964).
6. Lippmann B.A. *Phys.Rev.* **151** 1023(1966).
7. Razavy M. *Nuovo Cim.* **B63** 271(1969).
8. Gien T.T. *Can. J.Phys.* **47** 278(1969); **48** 639(1970).
9. Allcock G.R. *Ann.Phys.(N.Y.)* **53** 253(1969).
10. Rosenbaum D.M. *J.Math. Phys.* **10** 1127(1969).
11. Olkhovsky V.S. and Recami E. *Nuovo Cim.* **A53** 610(1968); **A63** 814(1969); *Lett. Nuovo Cim*, **4** 1165(1970).
12. Ольховский В.С. *Укр. физ. журнал* **18** 1910(1973); Olkhovsky V.S., Recami E. and Gerasimchuk A., *Nuovo Cim.* **A22** 263(1974).
13. Recami E. in *The Uncertainty Principle and Foundation of Quantum Mechanics* (J.Wiley; London, 1977) pp.21-28; in *Proc. of the XIII Winter School in Theor. Phys.*, vol.2 (Wroclaw; 1976) pp.251-256.
14. Holevo A.S. *Rep. Math. Phys.* **13** 379(1978); Холево А.С. *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории* (М.: Наука, 1980).
15. Ольховский В.С. *ФЭЧАЯ*, **15** 290(1984).
16. Fujiwara I., *Progr.Theor.Phys.*, **62** 1179(1979); **64** 18 (1980).
17. Goto T. *et al* , *Progr.Theor.Phys.*, **64** 1(1980); Goto T. *et al* , *Progr.Theor.Phys.*, **66** 1525,1915(1981).
18. Jaworski W., Wardlaw D.M. *Phys.Rev.* **A37** 2843(1988).
19. Olkhovsky V.S. *Nukleonika* **35** 99(1990); *Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti, Sci. Mat. Nat*, **70** 135(1992).
20. Olkhovsky and Recami E. *Phys. Reports*, **214** 339(1992); Olkhovsky V.S., Recami E., Raciti F. and Zaichenko A.K. *J. de Phys.(France) I*, **5** 1351(1995).
21. Busch P. Grabowski M. and Lahti P.J. *Phys. Lett*, **A191** 357(1994).
22. Kobe D.H. and Aguilera-Navarro V.C. *Phys. Rev.* **A50** 933(1994).
23. Blanchard P. and Jadczyk A. *Helv. Phys. Acta* **69** 613(1996).
24. Grot N. Rovelli C. and Tate R.S. *Phys. Rev* **A54** 4676(1996).

25. Olkhovsky V.S. and Agresti A. in *Proc. of the Adriatico Research. Conf. on Tunnelling and its Implications* (World Sci.; Singapore, 1997), pp.327-355.
26. Olkhovsky V.S. *Phys. of the Alive* **5** 19(1997); **6** 17(1998);
Olkhovsky V.S. in *Atti dell'Accademia di Pericolanti, classe di scienze fis. mat. e natur.*, v.LXXVI-LXXVII (Universita' di Messina, 1998-1999), pp.193-209.
27. Leo'n J. *J.Phys.* **A30** 4791(1997).
28. Giannitrapani R. *Int.J.Theor.Phys.* **36** 1575(1997).
29. Aharonov Y. et al *Phys. Rev.* **A57** 4130(1998).
30. Atmanspacher H. and Amann A. *Int. J. Theor. Phys.* **37** 629(1998).
31. Toller M. *Phys.Rev.* **A59** 960(1999).
32. Kijowski J. *Phys.Rev.* **A59** 897(1999).
33. Delgado V. *Phys. Rev.* **A59** 1010(1999).
34. Muga J., Papao J. and Leavens C. *Phys. Lett.* **A253** 21(1999).
35. Kochański P. and Wódkiewicz K. *Phys. Rev.* **A60** 2689(1999).
36. Kobe D.H. et al *Phys.Rev.* **A64** 022104 (2001).
37. Muga J. et al *Phys.Rev.* **A66** 042115 (2002).
38. Olkhovsky V.S. et al *Phys.Rep.* **398** 133 (2004).
39. Gózdź A., Dębicki M. *Phys.At.Nuclei*, **70** 529 (2007).
40. Wang Zhi-Yong, Xiong Cai-Dong *Annals of Physics* **322** 2304 (2007).
41. *Time in Quantum Mechanics - Lecture Notes in Physics*, v.1, 2007, v.2, 2009, by eds. J.G.Muga, R.S. Mayato, I.L.Egusquiza, Springer.
42. Olkhovsky V.S., Recami E. *I.J.Mod.Phys.* **A22** 5063 (2007); *I.J.Mod.Phys.* **B22** 1877 (2008);
Olkhovsky V.S. *Advances in Mathem.Phys.*, **2009** (2009), article ID 859710, 83 pages, Doi:10.1155/2009/859710.
43. Ольховский В.С., *О времени как квантовой наблюдаемой, канонически сопряжённой энергии, УФН*, **181**:8 (2011)859.
44. Ольховский В.С., *О времени как квантовой наблюдаемой, канонически сопряжённой энергии, Materiały VIII Międzynarodowej Naukowi-Praktycznej Konferencji, Strategiczne Pytania Światowej Nauki –2012, 07-15 lutego 2012 roku, volume 28, Fizyka, str.10-15.*
45. Наймарк М.А. *Изв.АН СССР, сер.матем.* **4** 277 (1940).
46. Carleman T. *Sur les e'quations i'ntegrales a' noyau re'el et syme'trique*, Uppsala,1923.
47. Aharonov Y. and Bohm D. *Phys. Rev.*, **122** 1649 (1961).
48. Наймарк М.А. *Изв АН СССР, сер.матем.*, **7** 237 (1943).
49. Ахиезер Н.Н., Глазман И.М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве* (М.: Наука, 1966).
50. фон Нейман И. *Математические основы квантовой механики* (М.: Наука, 1964) ;
von Neuman J. *Mathematischen Grundlagen del Quantum Mechanik* (Hizzel, Leipzig, 1932).
51. Stone M.H. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **16** 172(1930).
52. тер Хаар Д. *Основы гамильтоновой механики* (М.: Наука, 1974);
ter Haar D. *Elements of Hamiltonian Mechanics* (Oxford,1971).
53. Judge D. and Levis J.L. *Phys. Lett.* **5** 190 (1963).
54. Carruthers P. and Nieto M.M. *Rev. Mod. Phys.* **40** 411 (1968).
55. Давыдов А.С. *Квантовая Механика* (М.: Наука, 1974).
56. Chiao R.Y., Kwiat P.G. and Steinberg A.M. *Physica*, **B175** 257 (1991).
57. Martin Th. and Landauer R. *Phys.Rev.* **A45** 2611 (1992).
58. Enders A. and Nimtz G. *J.Phys.-I (France)* **2** 1693(1992), **3** 1089(1993); *Phys.Rev.*,**B47** 19605 (1993);
E48 632 (1993); Nimtz G.,H.Spieker and M.Brodowski, *J.Phys.-I (France)* **4** 1379(1994);
Nimtz G. in *Tunneling and its Applications* (World Sci.,Singapore, 1997) pp. 223-237.
59. Morse P.M.,Feshbach H.,*Methods of Theoretical Physics*,McGraw-Hill,NewYork,1953,Part II (Chapter 13); Морс Ф.М., Фешбах Г.,*Методы теоретической физики*, Москва:Физматлит,1958, т.2,глава 13.

60. Швeбep C.C., *Введение в релятивистскую квантовую теорию поля*, ИЛ, М., 1963;
S. S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, chapter 5.3, Row, Peterson, Evanston, Ill, USA, 1961.
61. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., *Квантовая электродинамика*, ГИФМЛ, М., 1959;
A. I. Akhiezer and V. B. Berestetzky, *Quantum Electrodynamics*, Fizmatgiz, Moscow, Russia, 1959.
62. Jackson J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 2nd edition, 1975.
63. Brillouin L., *Wave Propagation and Group Velocity*, vol. 8 of *Pure and Applied Physics*, Academic Press, New York, NY, USA, 1960.
64. Felsen L.B. and Marcuvitz N., *Radiation and Scattering of Waves*, chapter 1.5, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1973.
65. Wigner E. *Phys.Rev.*, **98**(1955)145.
66. Balcou Ph. and Dutriaux L., *Phys.Rev.Lett.*, **78** 851 (1997).
67. Jakiel J., Olkhovsky V.S., Recami E., *Phys.Lett A*, **248** 156(1998).
68. Ka'lnay A.J., *Boletin del IMAF (Co'rdoba)*, **2** 11(1966); Ka'lnay A.J. and Toledo B.P., *Nuovo Cim.*, **A48** 997(1967); Gallardo J.A., Ka'lnay A.J., Stec B.A. and Toledo B.P., *Nuovo Cim.*, **A48** 1008(1967); **A49** 393(1967); Gallardo J.A., Ka'lnay A.J. and Risenberg S.H., *Phys.Rev.*, **158** 1484(1967).
69. Recami E., *Atti Accad. Naz. Lincei (Roma)*, **49** 77(1970); Baldo M. and Recami E., *Lett.Nuovo Cim.*, **2** 613(1969).
70. Recami E., Olkhovsky V.S., Maydanyuk S.P., *Internat.J.Mod.Phys.*, **A 25**:9(2010)1785.
71. Ольховский В.С., Реками Э., Майданюк С.П., *ФЭЧАЯ*, **41**:4 (2010)951.
72. Мандельштам Л.И., Тамм И.Е., *Изв.АН СССР, сер. физ.*, **9** 122 (1945).
73. Гинзбург В.Л., *Успехи физич. наук*, **169**, 419-441(1999); **172**, 213-219(2002).
74. Olkhovsky V.S., *Natural Science*, **2**:N3 (2010)228.

Часть II.

1. Введение.

Открытие эффекта туннелирования частиц и волновых пакетов через высокие потенциальные барьеры было одним из самых ярких успехов квантовой механики в третьей декаде 20-го ст. И до сих пор квантовое туннелирование остаётся одной из самых горячих тем в науке, с многочисленными применениями от молекулярных спектров, эмиссии электронов из металлов и альфа-распада до ряда астрофизических ядерных реакций, звёздного нуклеосинтеза, а возможно, и генезиса ранней вселенной [1].

Кратко история первых работ по туннелированию частиц такова: Ф.Хунд в мае 1927г. указал на следствия проникновения (в дальнейшем получившего название туннелирования) волновых функций атомных ядер и дал первые оценки времён проникновения [2]. В конце 1927г. Л.И.Мандельштам доложил на семинаре, им же руководимом, ещё не опубликованную работу, в которой изложил основы теории прохождения волновых пакетов и связанных с ними частиц через потенциальный барьер (она была опубликована им позднее в соавторстве с М.А.Леонтовичем в [3]). На этом семинаре присутствовал Г.А.Гамов, который в 1928г. опубликовал теорию альфа-распада на основе туннелирования альфа-частицы через кулоновский барьер материнского ядра практически одновременно с Дж.Генри и Е.Кондоном (об использовании этих работ будет говориться в конце раздела 4). Чуть ранее Дж. Оппенгеймер [4] в августе 1927г. впервые рассчитал прохождение частиц через барьер между двумя потенциальными ямами и применил свои результаты к атому водовода во внешнем электрическом поле. А в конце 1927г. Л.Нордгейм описал термическую эмиссию электронов через барьер, идеализированно изображающий поверхностный слой металла [5]; затем в марте 1928г. роль проникновения при электронной эмиссии в сильном электрическом поле была рассмотрена Л.Нордгеймом и А.Фаулером [6]. История теоретических работ и экспериментов по туннелированию классических электромагнитных волн и фотонов кратко описана ниже (в примечании на стр.43 с указанием соответствующей ссылки [64]).

Часть II посвящена теоретическому временному анализу процессов туннелирования нерелятивистских частиц и фотонов с кратким описанием соответствующих экспериментов или изложением возможных экспериментальных перспектив. В разделе 2 рассмотрен наш метод, получивший в международной литературе название как метод Ольховского-Реками (the Olkhovsky-Recami approach), и показано, что все известные времена туннелирования являются частными случаями времени, определяемого методом Ольховского-Реками. В разделах 3-5 рассмотрены общие свойства и специфика различий процессов туннелирования и сопутствующих многократных внутренних отражений для одномерных, двумерных и трёхмерных барьеров, причём обзор работ по анализу этих процессов в случае одномерных барьеров проведен либо впервые, либо более детально, чем в [7,8], с целью прояснения генезиса многократных внутренних отражений внутри барьера, а в случае последних двух типов барьеров проведен вообще впервые. Заключительный раздел 6 посвящён основным выводам из проведенного анализа проблем, успехов и парадоксов, а также дальнейшим перспективам временного анализа квантовых процессов в изучении задач в разных областях физики и естествознания.

2. Метод Ольховского-Реками по определению времени туннелирования.

Ограничимся обычным случаем частиц, движущихся вдоль направления оси x , и рассмотрим не зависящий от времени барьер $V(x)$ в интервале $(0, a)$, который заключён в более широкий интервал (x_i, x_f) , содержащий область самого барьера.

Хорошо известно, что в случае прямоугольного барьера высоты V_0 , стационарная волновая функция для частицы с массой m и энергией $E < V_0$ имеет обычную форму:

$$\psi(k, x) = \begin{cases} \exp(ikx) + A_R \exp(-ikx), & x \leq 0 \quad (\text{region I}), \\ \alpha \exp(-\chi x) + \beta \exp(\chi x), & 0 \leq x \leq a \quad (\text{region II}), \\ A_T \exp(ikx), & x \geq a \quad (\text{region II}). \end{cases} \quad (1)$$

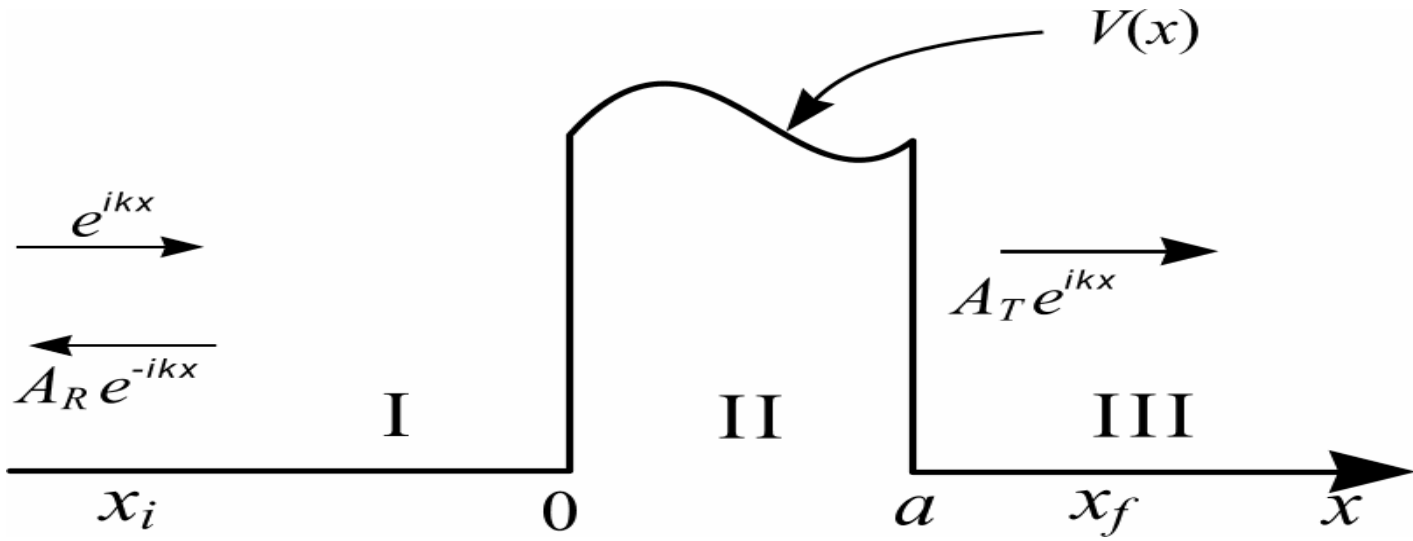


Рис.1. Схема туннелирования и отражения частицы сквозь потенциальный барьер.

где $k = (2mE)^{1/2} / \hbar$, $\chi = [2m(V_0 - E)]^{1/2} / \hbar$, A_R , α , β и A_T амплитуды отражённой, затухающей, возрастающей волн, соответственно.

Внутри барьера мы не имеем обычных движущихся волн, а суперпозицию затухающих (evanescent) и возрастающих (анти-затухающих или anti-evanescent) волн с мнимым волновым числом $i\chi$. Именно поэтому для туннелирования *частиц* (с подбарьерной энергией) через барьер в реальности нет прямого классического предела. Однако есть прямой классический предел для волн (строго, говоря, для зависящих от времени туннелирующих волновых пакетов). Мы позднее (в выводе 1 раздела 6) вернёмся к этому пределу.

Следуя определению длительностей столкновений в [7-11] и изложенной в части I (разделе 2), определим среднее значение времени, в которое частица проходит через точку x , двигаясь в положительном или отрицательном направлении оси x , и дисперсию распределения этих времён, соответственно, как

$$\langle t_{\pm}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t j_{\pm}(x, t) dt / \int_{-\infty}^{\infty} j_{\pm}(x, t) dt \quad (2a)$$

и

$$Dt_{\pm}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 j_{\pm}(x, t) dt \quad (2b)$$

где $j_{\pm}(x, t)$ – положительные или отрицательные значения, соответственно, плотности потока вероятности $j(x, t) = \text{Re}[(i\hbar/m) \Psi(x, t) \partial \Psi^*(x, t) / \partial x]$ для движущегося нормализованного *волнового пакета* $\Psi(x, t)$. Здесь мы напомним об *эквивалентности канонически сопряжённых временного и энергетического представлений*, с соответствующими мерами усреднения, в следующем смысле: $\langle \dots \rangle_t = \langle \dots \rangle_E$ (индекс t опустим во всех выражениях для $\langle \dots \rangle_t$ для простоты). Эта эквивалентность является следствием существования однозначного оператора времени.

Для перехода из области I в область III имеем

$$\langle \tau_T(x_i, x_f) \rangle = \langle t_+(x_f) \rangle - \langle t_+(x_i) \rangle \quad (3)$$

и

$$D\tau_T(x_i, x_f) = Dt_+(x_f) + Dt_+(x_i) \quad (4)$$

при $-\infty < x_i \leq 0$ и $a \leq x_f < \infty$. Для процесса просто туннелирования имеем

$$\langle \tau_{tun}(0, a) \rangle = \langle t_+(a) \rangle - \langle t_+(0) \rangle \quad (5)$$

и

$$D\tau_{tun}(0, a) = Dt_+(a) + Dt_+(0). \quad (6)$$

Аналогичные выражения получаем для временных величин $\langle \tau_{pen}(x_i, x_f) \rangle$ и $D\tau_{pen}(x_i, x_f)$, описывающих проникновение в область II при $-\infty < x_i \leq 0$ и $0 < x_f < a$. Для отражений в любую точку $x_f \leq a$ имеем

$$\langle \tau_R(x_i, x_f) \rangle = \langle t_-(x_f) \rangle - \langle t_+(x_i) \rangle \quad (7)$$

и

$$D\tau_R(x_i, x_f) = Dt_-(x_f) + Dt_+(x_i). \quad (8)$$

В асимптотических случаях, когда $|x_i| \gg a$,

$$\langle \tau_T^{as}(x_i, x_f) \rangle = \langle t(x_f) \rangle_T - \langle t(x_i) \rangle_{in} \quad (3a)$$

и

$$\langle \tau_T^{as}(x_i, x_f) \rangle = \langle \tau_T(x_i, x_f) \rangle + \langle t_+(x_i) \rangle - \langle t(x_i) \rangle_{in}, \quad (9)$$

где $\langle \dots \rangle_T$ и $\langle \dots \rangle_{in}$ обозначают усреднения по потокам, отвечающим $\psi_T = A_T \exp(ikx)$ и $\psi_{in} = \exp(ikx)$, соответственно.

Для начальных волновых пакетов

$$\Psi_{in}(x, t) = \int_0^{\infty} g(k - \bar{k}) \exp(ikx - iEt/\hbar) dk$$

(где $E = \hbar^2 k^2 / 2m$, $\int_0^{\infty} |g(k - \bar{k})|^2 dE = 1$, $g(0) = g(\infty) = 0$, $k > 0$) с достаточно малыми разбросами энергий (импульсов), когда

$$\int_0^{\infty} v^n |g A_T|^2 dE \cong \int_0^{\infty} v^n |g|^2 dE, \quad n=0,1, \quad v = \hbar k/m,$$

получаем:

$$\langle \tau_T^{as}(x_i, x_f) \rangle \cong \langle \tau_T^{Ph}(x_i, x_f) \rangle_E, \quad (10)$$

где

$$\langle \dots \rangle_E = \int_0^{\infty} dE v |g(k - \bar{k})|^2 \dots / \int_0^{\infty} dE v |g(k - \bar{k})|^2,$$

и

$$\tau_T^{Ph}(x_i, x_f) = (1/v)(x_f - x_i) + \hbar d(\arg A_T) / dE \quad (11)$$

называется *фазовым временем* перехода, полученным методом аппроксимации стационарной фазы. В том же приближении и при малом вкладе $Dt_+(x_i)$ в дисперсию $D\tau_T(x_i, x_f)$ (что может быть реализовано при достаточно больших разбросах энергий, т.е. для коротких волновых пакетах) получим:

$$D\tau_T(x_i, x_f) = \hbar^2 \langle (d|A_T|/dE)^2 \rangle_E / \langle |A_T|^2 \rangle_E. \quad (12)$$

Для противоположного случая очень малых разбросов энергий (квазимонохроматические частицы) следует, что вместо выражения (12), действует общее выражение (4).

В квазимонохроматическом пределе $|g|^2 \rightarrow \delta(E-E)$, где $E = \hbar^2 \bar{k}^2 / 2m$, получаем в точности обычное фазовое время без усреднения:

$$\langle \tau_T^{as}(x_i, x_f) \rangle \cong \tau_T^{ph}(x_i, x_f). \quad (10a)$$

Для прямоугольного барьера высоты V_0 при $\chi a \gg 1$ (где $\chi = [2m(V_0 - E)]^{1/2} / \hbar$), выражения (10a) and (12) для $x_i = 0, x_f = a$ и $am / \hbar \bar{k} \gg Dt_+(x_i)$, переходят в известные выражения

$$\tau_{un}^{Ph} = 2/v\chi \quad (11a)$$

(что совпадает с известным выражением для фазового времени туннелирования – см., в частности, [7,12]) и

$$(D\tau_{un}^{Ph})^{1/2} = ak/v\chi. \quad (12a)$$

Переходя теперь к формуле (19б) из части I для времени заполнения (локализации) $\langle \tau_{dw}(x_i, x_f) \rangle$ и учитывая, что $j(x_i, t) = j_{in}(x_i, t) + j_R(x_i, t) + j_{int}(x_i, t)$, а $j(x_f, t) = j_T(x_f, t)$, где $j_{in}(x_i, t)$, $j_R(x_i, t)$, $j_{int}(x_i, t)$ и $j_T(x_f, t)$ отвечают волновым пакетам Ψ_{in} , Ψ_R и Ψ_T , построенным из стационарных волновых функций ψ_{in} , $\psi_R = A_R \exp(-ikx)$ и ψ_T , соответственно, а вклад в общий поток j_{int} , возникающий из интерференции между Ψ_{in} и Ψ_R , равен

$$j_{int}(x_i, t) = \text{Re}(i\hbar/m) [\Psi_{in}(x_i, t) \partial \Psi_R^*(x, t) / \partial x + \Psi_R(x, t) \partial \Psi_{in}^*(x, t) / \partial x] \quad (13)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} j_{in}(x_{in}, t) dt = 0, \quad (14)$$

получим соотношение

$$\langle \tau_{dw}(x_i, x_f) \rangle = \langle T \rangle_E \langle \tau_T(x_i, x_f) \rangle + \langle R(x_i) \rangle \langle \tau_R(x_i, x_f) \rangle, \quad (15)$$

где $\langle T \rangle_E = \langle |A_T| v \rangle_E / \langle v \rangle_E$, $\langle R(x_i) \rangle_E = \langle R \rangle_E + \langle r(x_i) \rangle$, $\langle R \rangle_E = \langle |A_R| v \rangle_E / \langle v \rangle_E$, $\langle T \rangle_E + \langle R \rangle_E = 1$ и

$$\langle r(x) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [j_+(x, t) - j_{in}(x, t)] dt}{\int_{-\infty}^{\infty} j_{in}(x_{in}, t) dt}.$$

Величина $\langle r(x) \rangle$ является отрицательной и стремится к 0 при условии, что x стремится к $-\infty$.

Если $\Psi_{in}(x_i, t)$ и $\Psi_R(x_i, t)$ хорошо разделены во времени и, следовательно, $\langle r(x) \rangle = 0$, то получаем простое хорошо известное (см., например, [13]) правило *взвешенного среднего*:

$$\langle \tau_{dw}(x_i, x_f) \rangle = \langle T \rangle_E \langle \tau_T(x_i, x_f) \rangle + \langle R \rangle_E \tau_R(x_i, x_f), \quad (16)$$

Для прямоугольного барьера при $\chi a \gg 1$ и для квазимонохроматических частиц, отношения (15) и (16) с $x_i = 0$ и $x_f = a$ переходят в известные (см., в частности, [7,8]) выражения

$$\langle \tau_{dw}(0, a; k) \rangle = \langle \hbar k / \chi V_0 \rangle_E \quad (15a)$$

(где учтён интерференционный член $\langle r(x) \rangle$) и

$$\tau_{dw}(0, a; k) = (2/v\chi)_E \quad (15б)$$

(где интерференционный член $\langle r(x) \rangle$ уже равен 0). Ранее (в части I, разделе 5, стр.13) говорилось, что неясно, как определить явно дисперсии определения времени заполнения (локализации). Но их возможно определить *неявно*, например, с помощью соотношения (16), пользуясь стандартными среднеквадратичными отклонениями $\sigma(\tau_T)$ и $\sigma(\tau_R)$ распределений времён перехода и отражения.

В [14,15] был предложен мысленный эксперимент для измерения длительности рассеяния в виде отношения θ/ω , где θ - угол, на который поворачивается магнитный момент μ (или электрический дипольный момент) рассматриваемой частицы в малом однородном магнитном поле $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ направленном вдоль оси z (или соответственно в малом однородном электрическом поле), предположительно присутствующем в области рассеяния, а частота $\omega \equiv 2\mu B_0 / \hbar$ - частота ларморовской магнитной (или соответственно электрической) прецессии (см. рис.2). Для магнитного поля в интервале (x_i, x_f) и для начальной частицы (движущейся вдоль оси x) со спином $1/2$,

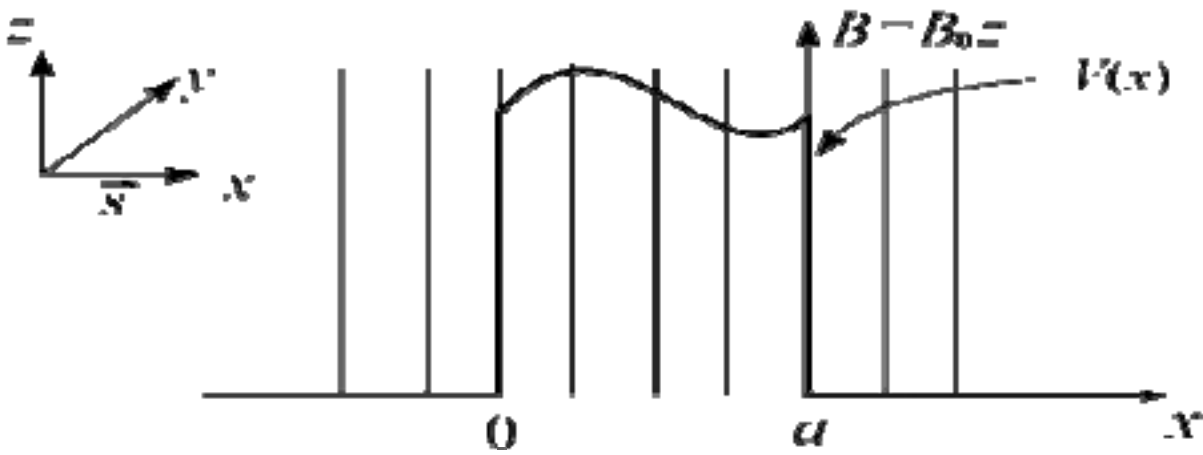


Рис.2. Ориентации спина и магнитного поля для случая “ларморовских часов”.

поляризованном вдоль оси x угол θ оказывается пропорциональным средней компоненте спина $\langle s_y \rangle$, а именно $\theta = -2\langle s_y \rangle_T / \hbar$, или $\theta = -2\langle s_y \rangle_R / \hbar$ для прошедшей или отражённой волны, соответственно. В этом случае ларморовские времена $\tau_{yT}^{La}(x_i, x_f; k)$ и $\tau_{yR}^{La}(x_i, x_f; k)$ становятся равными фазовым временам *плюс*, однако, члены, осциллирующие с изменением kx_i и kx_f [16]. В частном случае прямоугольного барьера получим:

$$\tau_{yT}^{La}(0, a; k) = \tau_{yR}^{La}(0, a; k) = \tau_{dw}(0, a; k) = \hbar k / \chi V_0 \quad (17)$$

В [17,18] (см. также [7,8]) описывается также не только прецессия вдоль оси z , но и эффект *прыжка* спин-флип по оси z (или к спин-вверх или к спин-вниз) в магнитном поле вместе с зеемановским расщеплением уровней и соответствующий результат:

$$\tau_{z,turn}^{La}(0, a; k) = ma / \hbar k \quad (18)$$

В измерении времени туннелирования методом “часов Буттикера-Ландауэра” [18-20] время связывается с осцилляцией барьера (и поглощением или испусканием квантов “модуляции”) во время туннелирования. И в этом случае время Буттикера-Ландауэра совпадает с (18).

Наконец, для изучения и расчёта среднего времени туннелирования, усреднённого по всем возможным путям с одними и теми же началом и концом, использовался фейнмановский подход к квантовой механике [21-24] с комплексным весовым множителем $\exp[iS(x(t))/\hbar]$, где S – действие, связанное с путём $x(t)$. Именно такое взвешивание времён туннелирования обуславливает их распределение с вещественной и мнимой компонентами (причём мнимое время связывается со стандартной средне-квадратичной флуктуацией в распределении

вре́мён). В [21] вещественная и мнимая части полученного комплексного времени были получены равными $\langle \tau_{y,tun}^{La} \rangle$ и $-\langle \tau_{z,tun}^{La} \rangle$, соответственно. Полноты ради упомянем, что имеется также определение вре́мён туннелирования, связанных с распределением по вигнеровским путям [25].

Введение такого большого количества вре́мён для простого столкновения (т.е. только процессов прохождения и отражения) физически не оправдано. Любопытно, что все частные случаи вре́мён, полученные разными авторами (см., например, (11а), (17), (18)), являются частными случаями одного подхода Ольховского-Реками для различных упрощений или предельных переходов [7,8,11]. При этом, оказывается, что все случаи, когда выражение для времени не зависит от ширины барьера, оказываются средними временами, а в тех случаях, когда зависят от ширины барьера, они оказываются не средними временами, а средне-квадратичными флуктуациями (корнем из дисперсии) .

3. Эффект Хартмана в туннелировании через потенциальный барьер. Его обобщения и расширения.

Рассмотрим его вначале в обычной упрощённой картине формально плоских бегущих, затухающих или анти-затухающих волн

$$\begin{aligned} \psi_I(k, x) &= \psi_{in} + \psi_R \equiv \exp(ikx) + A_R \exp(-ikx), & -\infty < x < 0, \\ \psi_{II}(k, x) &= \psi_{evan} + \psi_{antiev} \equiv \alpha \exp(-\chi x) + \beta \exp(-\chi x), & 0 < x < a, \\ \psi_{III}(k, x) &= \psi_T \equiv A_T \exp(ikx), & a < x < \infty, \end{aligned} \quad (19)$$

подразумевая при этом сразу же, что фактически стационарная картина столкновений – это скрытая временная картина с выбором квазимонохроматических бегущих, затухающих или анти-затухающих волн типа

$$\begin{aligned} \Psi_{in} &\rightarrow \int_0^\infty dk g(k) \exp[ikx - iEt/\hbar], & -\infty < x < 0, \\ \Psi_R &\rightarrow \int_0^\infty dk g(k) A_R \exp[-ikx - iEt/\hbar], & 0 < x < a, \\ \Psi_{evan} &\rightarrow \int_0^\infty dk g(k) \alpha \exp[-\chi x - iEt/\hbar], & 0 < x < a, \\ \Psi_{antiev} &\rightarrow \int_0^\infty dk g(k) \beta \exp[\chi x - iEt/\hbar], & 0 < x < a, \\ \Psi_T &\rightarrow \int_0^\infty dk g(k) A_T \exp[ikx - iEt/\hbar], & a < x < \infty \end{aligned} \quad (20)$$

(где $\int_0^\infty |g(k)|^2 dk = 1$ и при условии квазимонохроматичности $|g|^2 \rightarrow \delta(E-E)$). В (19) и (20) полагаем $E = \hbar^2 k^2/2m$ и $\chi = [2m(V_0 - E)]^{1/2}/\hbar$ (m – масса частицы). Индексы *I*, *II* и *III* в (1) соответствуют областям **I**, **II** и **III** на рис.1 (в случае прямоугольной формы одномерного потенциального барьера $V(x) \equiv V_0$ при $0 \leq x \leq a$).

При этом также обычно используется метод стационарной фазы, согласно которому групповая скорость движения частицы автоматически равна $\bar{v} \equiv v = \hbar k/m$. Но в случае необходимости более строгого анализа, например, при учёте разбросов импульсов (энергий) в волновых пакетах, следует вводить в рассмотрение явное движение реальных волновых пакетов с использованием Фурье-преобразований между пространственно-временными и

импульсно-энергетическими представлениями, а также усреднениями с соответствующими мерами и интегралами [7-11].

Впервые эффект насыщения Хартмана был обнаружен и изучен в [12] для 1-D движения квазимонохроматического нерелятивистских частиц, туннелирующих сквозь потенциальные барьеры в рамках метода стационарной фазы. Он состоит в независимости от ширины a достаточно широкого барьера т.н. *фазового времени туннелирования*

$$\tau_{\text{tun}}^{\text{Ph}} = \hbar d(\arg A_T + ka) / dE \quad (21)$$

(т.е. *среднего времени туннелирования* $\langle \tau_{\text{tun}} \rangle$, определённого в приближении стационарной фазы при условии, когда можно пренебречь интерференцией между падающей и отражённой от барьера волной [6,9]). В частности, для прямоугольного барьера

$$\tau_{\text{tun}}^{\text{Ph}} \rightarrow 2/(\nu\chi) \text{ при } \chi a \gg 1. \quad (21a)$$

После опубликования обзора [7] в научной литературе завязалась определённая дискуссия по поводу вычислений зависимости среднего времени туннелирования от ширины барьера в разных подходах, связанных вначале со стандартной (копенгагенской) и бомовской интерпретациями квантовой механики ([26-28]), которая чуть позднее была расширена с включением и других исследований [29-31]), связанных с разными версиями тех же интерпретаций. При встрече авторов [26] и [27] (на международной конференции 30июля-2августа 1996г. в Триесте) дискуссия между ними частично разрешилась. Позднее вся эта дискуссия закончилась с публикацией работы [32], в которой было показано, что подход Ольховского–Реками (развитый в [7] и [27,31]) является наиболее последовательным в копенгагенской интерпретации квантовой механики, а бомовский подход тем не менее приводит практически к тем же результатам.

Нетрудно установить наличие эффекта Хартмана и для многих других известных теоретических выражений для средних времён туннелирования. Так, для среднего времени проживания $\langle \tau_{\text{tun}}^{\text{Dw}} \rangle$, среднего ларморовского времени $\langle \tau_{y,\text{tun}}^{\text{L}} \rangle$ и для вещественной части комплексного времени туннелирования, полученного при усреднении по фейнмановским траекториям $\text{Re } \tau_{\text{tun}}^{\text{F}}$, которые равны $\hbar k / (\kappa V_0)$ для квазимонохроматических частиц и широких прямоугольных барьеров, как показано в [8] (см. также [33,34]), отсутствует зависимость от ширины барьера и, следовательно, имеет место эффект Хартмана (в другой форме).

Наличие эффекта Хартмана для *среднего времени туннелирования* в рамках подхода Ольховского–Реками (О-Р), можно увидеть из вычисления выражения

$$\langle \tau_{\text{tun}}(0,a) \rangle = \langle t_+(a) \rangle - \langle t_+(0) \rangle = \langle \tau_{\text{tun}}^{\text{Ph}} \rangle_E - \langle t_+(0) \rangle \quad (22)$$

(где $\langle \dots \rangle_E$ означает усреднение по разбросу энергий в пакете падающих частиц и

$$\langle t_{\pm}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t j_{\pm}(x,t) dt / \int_{-\infty}^{\infty} j_{\pm}(x,t) dt \text{ with } j_{\pm}(x,t) = \Theta(\pm j) j(x,t); \quad (23)$$

здесь $j(x,t)$ – плотность потока вероятности для волнового пакета, движущегося вдоль оси x сквозь барьер, локализованный в интервале $(0,a)$. Это было подтверждено, в частности, многочисленными результатами расчётов в [8,27,31,34] для электронных гауссовских волновых пакетов с узкими разбросами импульсов.

Эффект Хартмана имеет место и для среднего времени туннелирования $\langle \tau_{\text{tun}}(0,a) \rangle$. На рис.3 представлены зависимости средних значений $\langle \tau_{\text{tun}}(0,a) \rangle$, определённых методом Ольховского–Реками (О-Р), т.е. по формулам (4)-(5)), от a для электронных гауссовских волновых пакетов и прямоугольных барьеров при тех же параметрах, что и в [9] ($V_0 = 10$ эВ;

при средних энергиях электронов $E=2.5, 5, 7.5$ эВ с разбросами импульсов $\Delta k = 0.02 \text{ \AA}^{-1}$ (кривые 1а, 2а, 3а, соответственно) и при средней энергии $E=5$ эВ с разбросами $\Delta k=0.04 \text{ \AA}^{-1}$ и 0.06 \AA^{-1} (кривые 4а, 5а, соответственно). Кривые $\langle \tau_{tun}^{Ph} \rangle$, усреднённые по волновым пакетам и отвечающие разным энергиям и разбросам Δk , сливаются практически в одну кривую б. Поскольку зависимость $\langle \tau_{tun}^{Ph} \rangle$ от a очень слабая и отсутствует при больших ширинах a , зависимость $\langle \tau_{tun}(0,a) \rangle$ от a определяется в основном зависимостью $\langle t_+(0) \rangle$ от a (кривые 1б-5б, отвечающие 1а-5а, соответственно).

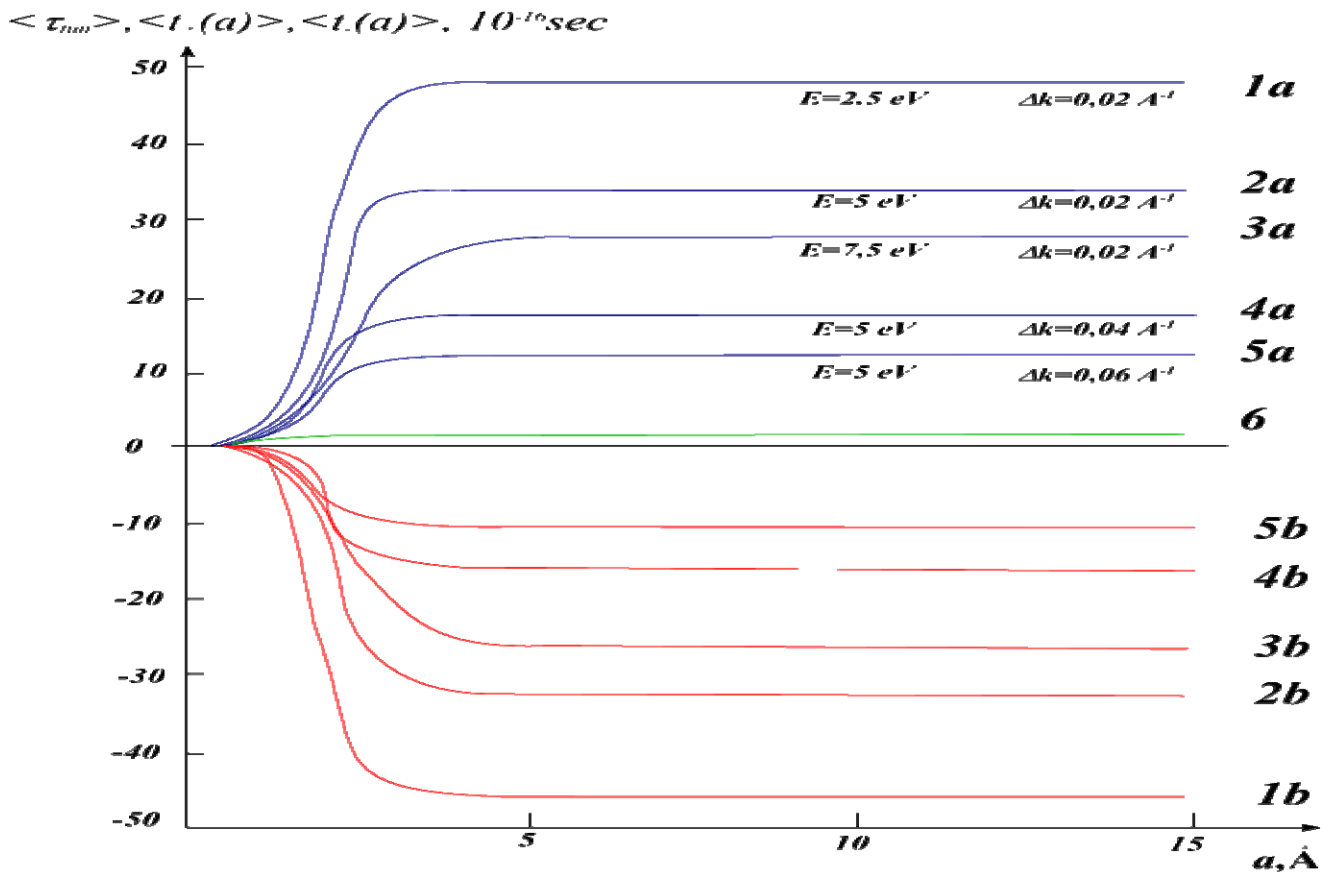


Рис.3. Зависимости $\langle \tau_{tun}(0,a) \rangle$, $\langle \tau_{tun}^{Ph} \rangle$ и $\langle t_+(0) \rangle$ от a .

Расчёты показали отрицательные значения величины $\langle t_+(0) \rangle$. Такое “акаузальное” опережение можно интерпретировать как результат наложения и интерференции падающей и отражённой волн: пакет отражённых волн гасит заднюю часть пакета падающих волн, и чем больше ширина барьера, тем бóльшая задняя часть пакета падающих волн гасится накладывающимся пакетом отражённых волн – вплоть до насыщения, когда вклад пакета отражённых волн станет практически постоянным и не зависящим от a . Поскольку все значения $\langle t_+(0) \rangle$ отрицательные, значения $\langle \tau_{tun}(0,a) \rangle$ будут положительными и, более того, бóльшими, чем $\langle \tau_{tun}^{Ph} \rangle$.

Эти результаты получены для прозрачных сред (без поглощения и диссипации). Как было теоретически показано в [35], в рамках нерелятивистской квантовой механики эффект Хартмана исчезает для барьеров при наличии поглощения. Как следует из [35], при описании поглощения при помощи добавления мнимого члена $-iV_1$ ($V_1 > 0$) к V_0 в случае малых поглощений, когда $V_1 \ll V_0$ и $V_1 m^{1/2} v \chi a / [2(V_0 - E)]^{3/2} \ll 2$, эффект Хартмана не исчезает и остаётся практически в силе. Это было подтверждено экспериментально для электромагнитного (микроволнового) туннелирования в [36].

В соответствии с результатами [7,8,34], второе ларморовское время туннелирования

$$\tau_{z,tun}^L = \hbar [\langle (d|A_T|/dE)^2 \rangle / \langle |A_T|^2 \rangle]^{1/2}, \quad (24)$$

а также время туннелирования Буттикера и Ландауера τ_{tun}^{B-L} [19,37] и мнимая часть комплексного времени туннелирования $\text{Im } \tau_{tun}^F$ [21], полученная в рамках фейнмановского подхода, равны $am/\hbar\chi$ (см. часть II, раздел 2), т.е. пропорциональны ширине барьера a для прямоугольного широкого барьера. Эти времена не являются средними временами, а *средне-квадратичными флуктуациями* в распределении времён туннелирования, поскольку они равны $[D_{dyn} \tau_{tun}]^{1/2}$, где $D_{dyn} \tau_{tun} = D \tau_{tun} - Dt_+(0)$ и $D \tau_{tun} = \langle \tau_{tun}^2 \rangle - \langle \tau_{tun} \rangle^2$, $\langle \tau_{tun}^2 \rangle = \langle [t_+(a) - \langle t_+(0) \rangle]^2 \rangle + Dt_+(0)$ (как было показано в [7,9,34]). Таким образом, они не связаны с пиковыми (или групповыми) скоростями туннелирующих частиц, но с распределением времён туннелирования и, следовательно, скоростей туннелирования в барьерной области.

Перейдём теперь к падающим волновым пакетам с широким разбросом импульсов и с начальным условием движения центра волнового пакета из удалённой точки $x = x_0$ (при $|x_0| \gg a$) в момент времени $t = 0$ с тем, чтобы изучить влияние довольно быстрого времени уширения падающего волнового пакета перед входом в барьер [38]. Волновые пакеты $\Psi(x, t)$ конструируются из стационарных волновых функций (1) так:

$$\Psi(x, t) = \int_0^\infty g_0(k) \psi(k, x) \exp(-iEt/\hbar) dk \quad (25)$$

с весовой амплитудой

$$g(k) = g_0(k) \exp[-i(k - k_0)x_0] = C \exp\{-(k - k_0)/2\Delta k\}^2 - i(k - k_0)x_0\}, \quad (26)$$

где $C = [(2\pi)^{3/2} \Delta k]^{-1/2}$ – нормировочный коэффициент. Поскольку в расчётах учитывались только подбарьерные энергии в Фурье-разложениях волновых пакетов, интегрирование по k в (25) производилось только в пределах от 0 до $(2mV_0)^{1/2}/\hbar$ [38].

Пакет из падающих волновых функций при этом принимает форму

$$\Psi_{in}(x, t) \cong C_0 s_{in}^{-1/2} \exp\left\{-\frac{[x - (x_0 + \nu t)]^2}{2s_{in}} + ik_0 x - iE_0 t/\hbar\right\}, \quad (27)$$

и его центр смещается из точки $x = x_0$ в момент $t = 0$, движется вдоль оси x слева направо со скоростью ν , пересекая в отсутствие барьера точку $x = 0$ в момент $t_0 = -x_0/\nu$.

Плотность потока $j(x, t) = \text{Re}[(i\hbar/2m)\Psi(x, t)\partial\Psi^*(x, t)/\partial x]$, как обычно в подходе О-Р, рассматривается как функция времён прибытия в точку x , поэтому среднее время прохождения частицы через точку $x = a$ (среднее время выхода частицы из барьера) определялось как

$$\langle t(a) \rangle = \int_0^\infty t j(a, t) dt / \int_0^\infty j(a, t) dt, \quad (28)$$

а среднее время прохождения частицы через точку $x = 0$ (среднее время входа частицы в барьер) определялось соотношением

$$\langle t_+(0) \rangle = \int_0^\infty t j_+(0, t) dt / \int_0^\infty j_+(0, t) dt, \quad (29)$$

где $j_+(0, t)$ описывает положительные значения плотности потока $j(0, t)$, соответствуя таким образом направлению движения частицы слева направо (входа в барьер), а интегрирование

ограничивалось только положительными временами вследствие начального условия (27).
 Время туннелирования τ определим как

$$\tau \equiv \langle \tau^{lum} \rangle = \langle t(a) \rangle - \langle t_+(0) \rangle. \quad (30)$$

Процедура расчёта времени туннелирования (30) для волнового пакета (27) описана в Приложении I.

Рис.4 представляет результаты расчётов времени туннелирования τ как функции ширины a барьера для электронов с энергией $E_0 = 5$ эВ сквозь прямоугольный потенциальный барьер с высотой 10 эВ и $x_0 = -6/\Delta k$. Из него видим проявление эффекта Хартмана для $\Delta k = 0.01 \text{ \AA}^{-1}$ (кривая (a)) при асимптотическом приближении времени туннелирования к постоянному значению с ростом a . Кривые (b) и (c) показывают, напротив, сильное уменьшение времён туннелирования, когда волновые пакеты характеризуются бóльшим разбросом импульсов $\Delta k = 0.05 \text{ \AA}^{-1}$ и $\Delta k = 0.1 \text{ \AA}^{-1}$, а при $\Delta k = 0.1 \text{ \AA}^{-1}$ время туннелирования становится даже отрицательным. И явно видно нарушение эффекта Хартмана.

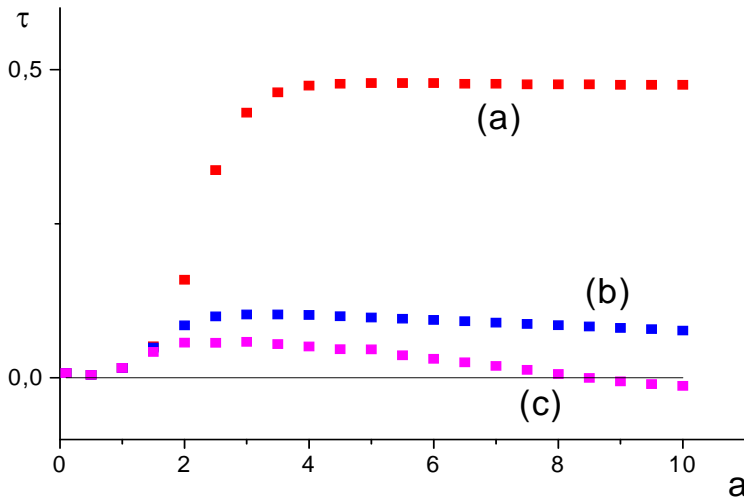


Рис.4. Время туннелирования τ как функция ширины барьера a при разных значениях Δk :

$$(a) \Delta k = 0.01 \text{ \AA}^{-1}, \quad (b) \Delta k = 0.05 \text{ \AA}^{-1}, \quad (c) \Delta k = 0.1 \text{ \AA}^{-1}.$$

Такое нарушение эффекта Хартмана можно объяснить таким образом [38]: время расплывания гауссовского волнового пакета (9) описывается соотношением

$$\Delta t \cong \Delta_0 t \{1 + [(\Delta v)^2 m / 2\hbar]^2 t^2\}^{1/2}, \quad (31)$$

где $\Delta_0 t \sim \hbar/\Delta E$, $\Delta v = \hbar\Delta k/m$. Величина Δt сильно возрастает со временем t для больших разбросов скоростей Δv и поэтому с приближением центра падающего волнового пакета протуннелировавший волновой пакет появится даже ранее вследствие заметно бóльшего возрастания времени расплывания Δt со временем t (пропорционального Δk при больших t), чем уменьшение $|x_0|$, пропорциональное $1/\Delta k$. Для центра выходящего волнового пакета в точке $x=a$ такая задержка будет значительно меньше, поскольку значение τ меньше, чем ограниченное значение $\langle \tau_{lum}^{ph} \rangle_E$, вследствие опережения, обусловленного различием между

$j_+(0,t)$ и $j_{in}(0,t)$, где $j_{in} = \text{Re}[\frac{i\hbar}{2m} \Psi_{in} \frac{\partial \Psi_{in}^*}{\partial x}]$. Поэтому можно ожидать, что время перехода центра

волнового пакета между входом в барьер и выходом из него должно быть меньше, чем в случае обычного действия эффекта Хартмана, и при достаточно больших разбросах скоростей Δv может стать даже отрицательным.

Рис.5 показывает качественно поведение временного сдвига выходящего волнового пакета по отношению к падающему волновому пакету при разных разбросах импульсов Δk . Значения t_0, t_0', t_0'' представляют моменты времени прохождения пика волнового пакета через начальную точку $x=0$ барьера, а значения t_f, t_f', t_f'' моменты прохождения через конечную точку $x=a$ барьера, соответственно.

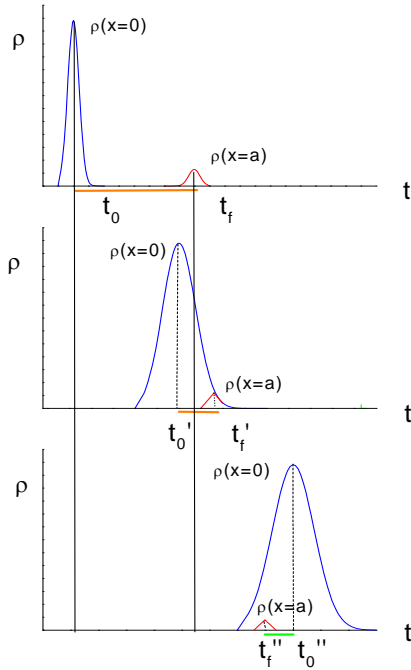


Рис.5. Качественное описание временного смещения между пиками волнового пакета t_f, t_f', t_f'' и t_0, t_0', t_0'' для плотности вероятности $\rho(x=a,t)$ и $\rho(x=0,t)$ волнового пакета.

Туннелирование через двойной барьер и фазовое время нерезонансного туннелирования через оба широких барьера. Рассмотрим формально стационарную картину 1D туннелирования частицы с массой m и кинетической энергией $E = \hbar^2 k^2 / 2m = mv^2 / 2$ через потенциал $V(x)$, состоящий из двух одинаковых прямоугольных барьеров высоты V_0 ($V_0 > E$) и ширины a , расстоянием l между ними (см. рис.6).

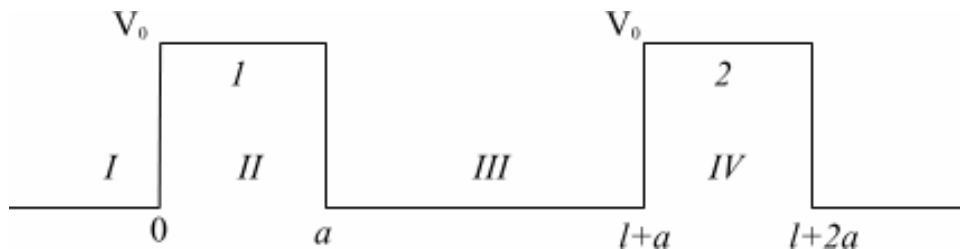


Рис.6. Туннелирование сквозь два последовательных потенциальных барьера.

В областях **I** ($x \leq 0$), **II** ($0 \leq x \leq a$), **III** ($a \leq x \leq l+a$), **IV** ($l+a \leq x \leq l+2a$) и **V** ($x \geq l+2a$) стационарные волновые функции имеют вид:

$$\psi_I = e^{ikx} + A_{1R} e^{-ikx}, \quad (32a)$$

$$\psi_{II} = \alpha_1 e^{-\chi x} + \beta_1 e^{\chi x}, \quad (32b)$$

$$\psi_{III} = A_{1T} [e^{ikx} + A_{2R} e^{-ikx}], \quad (32c)$$

$$\psi_{IV} = A_{1T} [\alpha_2 e^{-\chi(x-l-a)} + \beta_2 e^{\chi(x-l-a)}], \quad (32d)$$

$$\psi_V = A_T e^{ikx}, \quad A_T \equiv A_{1T} A_{2T}, \quad (32e)$$

где $\chi = [2m(V_0 - E)]^{1/2} / \hbar$, амплитуды $A_{1R}, A_{2R}, A_{1T}, A_{2T}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ и β_2 – амплитуды отражения, проникновения и коэффициенты затухающих и анти-затухающих (возрастающих) волн в барьерах 1 и 2, соответственно. Эти 8 величин могут быть легко определены через условия сшивки функций $\psi_{I,II,III,IV,V}$ и их производных $d\psi_{I,II,III,IV,V}/dx$ в точках $x = 0, a, l+a, l+2a$. Их выражения для широких барьеров, когда $\chi a \rightarrow \infty$, таковы:

$$\begin{aligned} A_{1R} &\rightarrow \frac{ik + \chi}{ik - \chi}, \quad A_{1T} \rightarrow e^{-\chi a} e^{-ik(l+a)} A, \quad \alpha_1 \rightarrow \frac{2ik}{ik - \chi}, \quad \beta_1 \rightarrow e^{-2\chi a} (k - i\chi) \frac{\sin kl}{\chi} A, \\ A_{2R} &\rightarrow e^{2ik(l+a)} \frac{ik + \chi}{ik - \chi}, \quad A_{2T} \rightarrow e^{2ik(l+a)} \frac{-4ik\chi}{(ik - \chi)^2}, \quad \alpha_2 \rightarrow e^{ik(l+a)} \frac{2ik}{ik - \chi}, \\ \beta_2 &\rightarrow e^{ik(l+a) - 2\chi a} \frac{-2ik(ik + \chi)}{(ik - \chi)^2}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $A = \frac{2k\chi}{2k\chi \cos kl + (\chi^2 - k^2) \sin kl}$.

Из (33) можно получить такое выражение для фазового времени туннелирования:

$$\tau_{tun}^{Ph} = \hbar \frac{\partial \arg[A_T e^{ik(l+2a)}]}{\partial E} \rightarrow \frac{2}{v\chi}, \quad (34)$$

точно такое же, что и для *одного* барьера и *не зависящее* не только от ширины барьера a , но и от расстояния l между ними. Такой результат является поразительным обобщением эффекта Хартмана, впервые полученным в [39]. Однако следует сразу же отметить, что этот результат верен лишь для нерезонансного туннелирования, т.е. при энергиях, весьма удалённых от резонансов.

В [40] этот результат был обобщён для нерезонансного туннелирования сквозь произвольное число одинаковых конечных прямоугольных широких барьеров и было показано, что общее фазовое время туннелирования не зависит ни от ширины барьера, ни от расстояния между ними.

В [41,42] изучалось резонансное туннелирование через два произвольных (не обязательно широких) барьера в области резонанса и в [52] была получена любопытная формула для фазового времени

$$\tau_{tun}^{Ph} \cong \frac{m}{\hbar k} l + \hbar \frac{\beta}{(E - E_r)^2 + \beta^2}, \quad (35)$$

справедливая для любого резонансного туннелирования через два барьера. Первый член отвечает времени свободного пролёта частицы вдоль расстояния l между двумя барьерами, а второй член отвечает резонансному времени задержки (E_r и β – резонансная энергия и полуширина резонанса, определяемые формой двух-барьерного потенциала с нулевым потенциалом между обоими барьерами). В [43] изучалось туннелирование через один, два,

три и четыре одинаковых барьера в «пределе частиц» (когда волновые пакеты по своим размерам намного меньше расстояний между барьерами) и в «пределе волн» (когда рассматривалось квазимонохроматическое движение плоских волн). При этом для 2, 3 и 4 барьеров изучалось резонансное туннелирование (наряду с нерезонансным).

Время проникновения частиц в барьер с заслонкой (или заглушкой или стопором). В реалистическом случае конечного барьера имеет место суперпозиция затухающих и возрастающих волн, для которых полный поток внутри барьера (даже стационарный) – всегда ненулевой. Но для бесконечно широкого прямоугольного барьера, а также для конечного, с открытым входом с одной стороны и заслонкой (или заглушкой или стопором) с другой стороны, имеются только волны с нулевым стационарным потоком (см. ниже). Поэтому вместо туннелирования сквозь такой барьер имеет место *заполнение* барьера волнами. Для изучения времени заполнения такого барьера вначале опишем соответствующие стационарные решения для такого барьера (см. рис.7) :

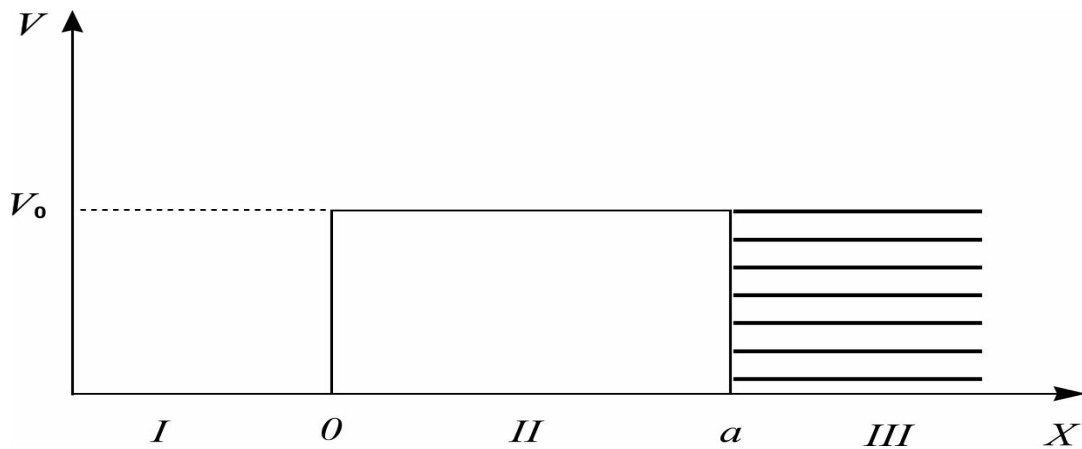


Рис.7. Потенциальный барьер с заслонкой (или заглушкой или стопором).

$$\begin{aligned} \psi_I(k, x) &= \psi_{in} + \psi_R \equiv \exp(ikx) + A_R \exp(-ikx), & x < 0, \\ \psi_{II}(k, x) &= \psi_{evan} + \psi_{antiev} \equiv \alpha \exp(-\chi x) + \beta \exp(-\chi x), & 0 < x < a, \\ \psi_{III}(k, x) &= 0, & x \geq a. \end{aligned} \quad (36)$$

Из условий сшивания волновых функций и её производной в точках $x = 0$ и $x = a$ легко получить явные аналитические выражения для A_R , α и β , причём $\beta = -\alpha e^{-2\chi a}$ и $\psi_{II}(k, x) = \alpha \exp(-\chi x) + \beta \exp(-\chi x) = \alpha (e^{-\chi x} - e^{-2\chi a} e^{+\chi x})$ с явно вещественной функцией в круглых скобках и, следовательно, нулевым стационарным потоком внутри барьера, как и в случае только затухающих волн. При $\chi a \gg 1$ в области II $\psi_{II}(k, x) \rightarrow \alpha e^{-\chi x}$. В дальнейшем ограничимся только этим приближением.

Теперь найдём время заполнения барьера, изображённого на рис.7, квазимонохроматическим волновым пакетом, описываемым в приближении $\chi a \gg 1$ третьей строкой равенств (2) и выразим функцию $\psi_{evan}(k, x)$ в форме интеграла Фурье в импульсном пространстве, вводя множитель $\exp(iqx)$ с интегрированием по q от $-\infty$ до $+\infty$ (см. приложение II, где цитируются новые ссылки [44-50], а также инстантонный метод). Для квазимонохроматических волновых пакетов (т.е. в приближении стационарной фазы), следуя [8] и приложению II, можно определить время заполнения $\tau_{fill-up}$ как среднее время заполнения $\tau_{fill-up}(q)$ для каждого импульса q в разложении Фурье функции $\psi_{II}(k, x)$, проинтегрированной по q с мерой $|C_{\eta-}(k, q)|^2$:

$$\tau_{\text{fill-up}} = \frac{\int_0^\infty |C_{\eta,-}(k, q)|^2 \tau_{\text{fill-up}}(q) dq}{\int_0^\infty |C_{\eta,-}(k, q)|^2 dq}, \quad \tau_{\text{fill-up}}(q) = t(\chi, -|q|, x=0) - t(\chi, +|q|, x=0), \quad (37)$$

где $t(\chi, \pm|q|, x=0) \equiv \pm x/v_q + \tau_-(\chi, \pm|q|)$, $v_q = \hbar q/m$ и $\tau_-(\chi, q)$ – время задержки или опережения для *входящих* бегущих волн ($q>0$) или *отражённых* бегущих волн ($q<0$), соответственно. После соответствующих выкладок с учётом функций $C(k, q)$ (см. приложение II и ссылки [44-47]) получим:

$$\tau_{\text{fill-up}} \xrightarrow{\chi a \rightarrow \infty} 1/\nu\chi, \quad (38)$$

где $\nu = \hbar k/m$ для квазимонохроматических частиц (и $\nu = c$ для квазимонохроматических фотонов [44]).

Проблема резонансов для таких барьеров (а следовательно, и возрастаний $\tau_{\text{fill-up}}$) была рассмотрена в [44] (и кратко в [8]). Такие резонансы реально наблюдались в экспериментах, описанных в [51].

4. О туннелировании электромагнитных волн и фотонов.

Теоретическое расширение временного анализа процессов с частицами на процессы с электромагнитными волнами и фотонами представлено в разделах 9 и 10 части I, из которой нетрудно усмотреть, что при наличии «фотонных барьеров» электромагнитные волны или фотоны через них туннелировать через них подобно туннелированию частиц через потенциальные барьеры³⁾. Такие барьеры были сконструированы для изучения движения электромагнитных волн в микроволновом диапазоне через волноводы (см. рис.8), в оптическом диапазоне в устройствах с нарушенным полным отражением (см. рис.9) и т.п. Основой многих парадоксов при туннелировании фотонов является эффект Хартмана, неизбежно приводящий к сверхсветовым временам туннелирования фотонов через достаточно широкие барьеры, а иногда даже к опережению выходного пика по отношению к входному. Так, из формул (28) и (29) части I легко видеть, что при $a\chi_{em} > 2$ эффективная скорость туннелирования будет превышать скорость света. Этот результат согласуется с известными экспериментальными данными, полученными для туннелирования микроволн. (см., напр., [57] из части I и [56,57] этой части II) и рис.8, где представлена схема результатов этих работ).

³⁾ Туннелирование *классических затухающих* электромагнитных волн впервые было экспериментально изучено ещё в [64] (см. ниже) с использованием двухпризмовой схемы типа изображённой на рис.8б.

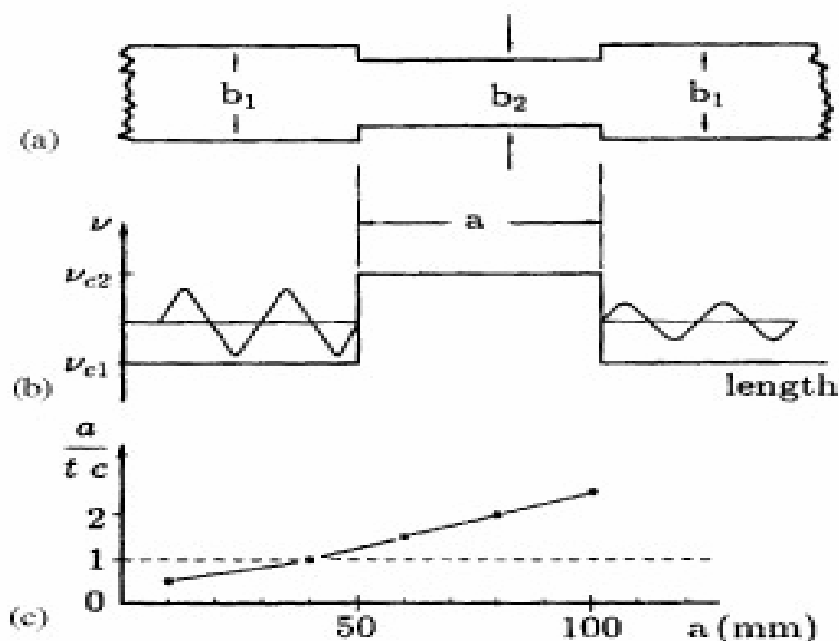


Рис.8. На этой схеме представлен один из экспериментальных результатов Нимца из [57] из части I и [56,57] этой части II, согласно которым средняя скорость пересечения пучком узкого сегмента зависит от его длины и превышает скорость света c для достаточно длинных «фотонных барьеров». Такой результат явился одним из первых подтверждений эффекта Хартмана.

Далее, из [58-63] известны результаты оптических экспериментов с туннелированием фотонов (см., напр., схему из [61], представленную на рис.8а). Рисунок 8а отдельно был представлен и рассмотрен в разделе 10 части I.

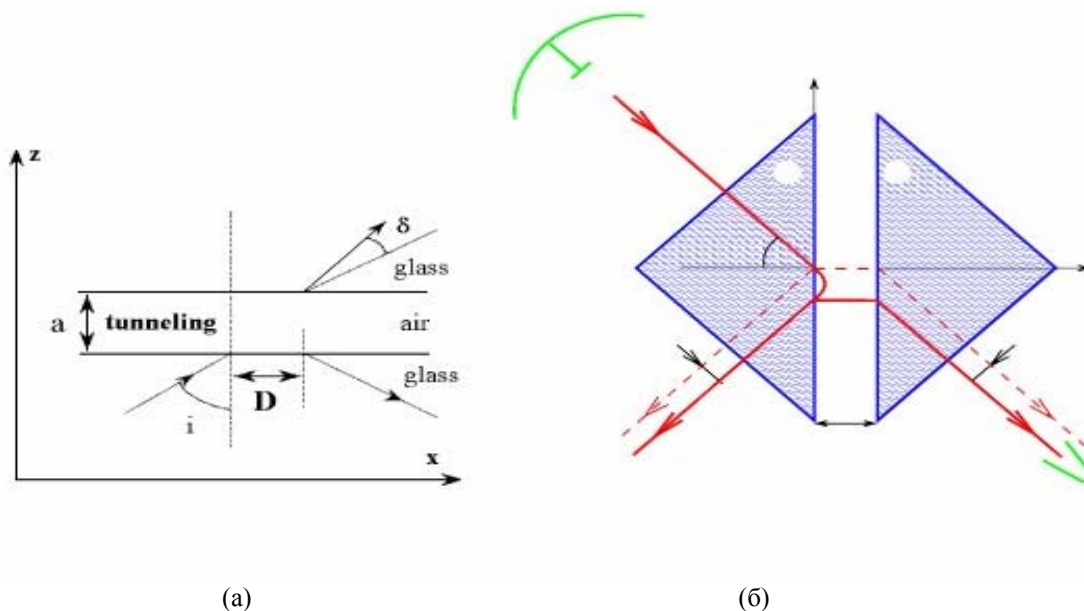


Рис.9. (а) Нарушенное полное внутреннее отражение и туннелирование затухающих волн. (б) Более поздняя схема из [63], учитывающая эффект Гуса-Хэнчена.

На рис.9б, где представлено устройство с двумя призмами, ещё было предсказано Ньютоном и предварительно подтверждено Ф.Гусом и Х.Хэнченом пространственное смещение отражённого и прошедшего пучков по отношению к тому, что ожидается от геометрической оптики. Этот эксперимент не так давно был опубликован в [63], где

обращалось внимание на сильную зависимость такого сдвига от ширины пучка и особенно от угла падения.

Наконец, появились и экспериментальные работы по изучению обобщённого эффекта Хартмана для двух барьеров, теоретически изложенного в предпоследней части предыдущего раздела (и в [39,42]). Они были выполнены для движения (нерезонансного) как электромагнитных волн в микроволновом диапазоне через волноводы [65] (см. рис.9), так и для оптических фотонов в волоконной оптике [66] (см. рис.10 и 11). Поскольку туннелирование в обоих случаях было в области частот, далёкой от резонансов, общее фазовое время туннелирования оказалось не зависящим не только от ширин барьеров, но и от *расстояния между барьерами*. На рис.11 конкретно

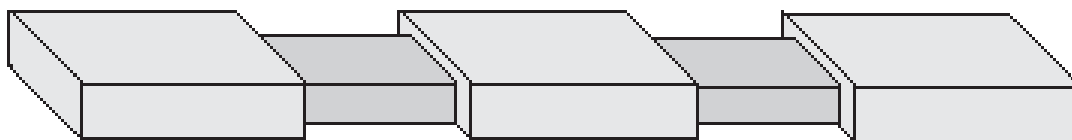


Рис.9. Туннелирование электромагнитных волн микроволнового диапазона через два узких сегмента.

показаны в виде сплошной кривой теоретические расчёты времени туннелирования $\langle \tau_{\text{tun}}^{ph} \rangle$, а отдельными экспериментальными точками – представлены временные измерения $\langle \tau_{\text{tun}}^{ph} \rangle$, время же прохождения светового импульса, настроенного далеко от запретной зоны волоконных решёток,

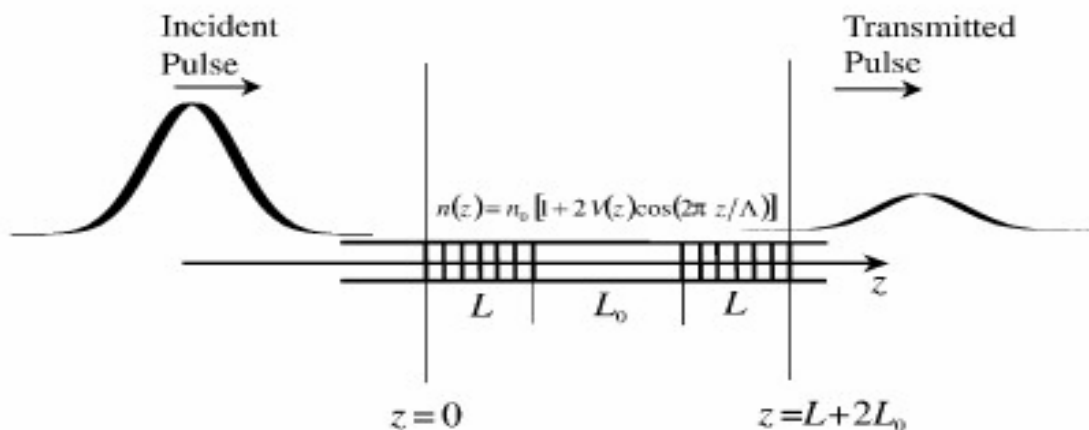


Рис.10.Реализация двумя решётками в оптическом волокне двух фотонных барьеров в [66].

представлено штриховой кривой (на вертикали представлены значения времён туннелирования в пикосекундах, на горизонтали – расстояние между барьерами в мм).

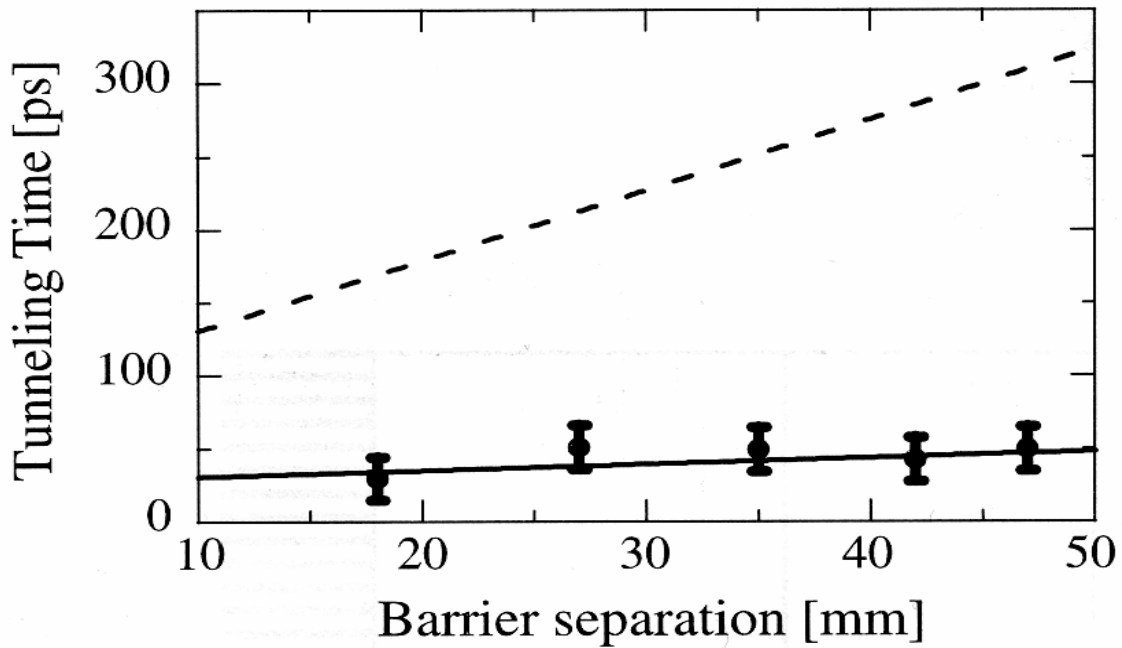


Рис.11. Зависимость внерезонансного времени туннелирования от расстояния между барьерами для прямоугольной двухбарьерной волоконно-оптической структуры, изображённой на рис.10.

Проблема физической интерпретации сверхсветовых скоростей туннелирования фотонов. Явления сверхсветовых скоростей, наблюдаемых в экспериментах с туннелированием фотонов и затухающих электромагнитных волн [56-63,65,66] и в ряде последующих работ, породили серию дискуссий по релятивистской причинности, начиная с разделов 9 и 10 части I, а также в [8,34,56-63, 65-101] и ряде других. До сих пор не достигнут консенсус в результате этих дискуссий, они в принципе продолжают, как продолжают также и эксперименты (см., напр., [102-107]). Обычно обсуждаются такие интерпретации сверхсветовых скоростей туннелирования фотонов:

1) Интерпретация *сверхсветовых групповых скоростей туннелирования фотонов без* нарушений причинности или специальной теории относительности предлагалась в [58,59,68,69,75,78-81], исходя из *переформирования (или реконструкции) в процессе ослабления импульса*, обсуждавшейся в классическом пределе ранее в [108-110]: поздние части входящего импульса ослабляются сильнее, так что в результате выходящий импульс сдвигается к передним частям, эффективно усиливая их (и тем самым эффективно увеличивая групповую скорость) *строго каузальным образом*. Такая схема вполне совместима с обычной идеей причинности (см., напр., [8,67-69]): Если полное ослабление импульса очень велико и во время туннелирования ведущий край импульса ослабляется меньше, чем хвостовая часть, то временная огибающая выходящего малого потока может полностью располагаться под исходной временной огибающей входящего импульса (см. также обсуждение в [89]). И если A_T зависит от энергии намного слабее, чем весовая амплитуда исходного волнового пакета, тогда спектральное разложение, а следовательно, и *геометрическая форма* вышедшего волнового пакета будет практически такой же, что и у входящего волнового пакета (т.е. будет иметь место *переформирование*, или восстановление исходной формы). Если же, напротив, зависимость A_T от энергии не будет слабой, то форма и ширина импульса могут сильно измениться (т.е. будет иметь место «*реконструкция*» формы).

2) Такое интересное явление, как независимость времени внерезонансного туннелирования через два барьера от расстояния между ними можно качественно объяснить, исходя из *интерференции между волнами*, выходящими из первого барьера и

распространяющимися в области между барьерами, *и волнами*, отражёнными от второго барьера обратно в область между двумя барьерами. Эта интерференция вполне может привести в результате к «опережению» (т.е. к эффективному ускорению пролёта) бегущих волн, что полностью аналогично рассмотренному выше *опережению* в результате интерференции между волнами, налетающими на первый барьер, и волнами, отражёнными от первого же барьера назад (см. обсуждение кривых на рис.2 в связи с отрицательными значениями величины $\langle t_+(0) \rangle$, а также обсуждение в [89]). Явление опережения фотонов обсуждалось также в [99].

3) Заслуживает отдельного внимания любопытная идея «сверх-осцилляций», выдвинутая в [111]. Её целесообразно рассмотреть подробно в специальной статье.

4) В принципе наличие сверхсветовых явлений при туннелировании частиц и фотонов можно, по крайней мере частично, интерпретировать и нелокальностью барьеров, связанной с одновременным изменением самой пространственно-временной метрики в целом внутри всей области барьера в области, где энергии налетающих волновых пакетов не превышают высоты барьера (подробнее см. в [44-47,95] и в соответствующих ссылках, приведенных там). Поскольку Эйнштейновская причинность автоматически проявляется только для локальных теорий, именно нелокальность той или иной формы может привести к её нарушению. В этом отношении эффект Хартмана является, подобно эффекту Эйнштейна, Подольского Розена, свидетельством проявления нелокальности квантовой физики.

5. Метод многократных внутренних отражений в одномерных (1-D), двумерных (2-D) и трёхмерных (3-D) задачах туннелирования частиц и фотонов.

Одномерное туннелирование. Анализ многократных внутренних отражений в области 1-D потенциалов (включая потенциальные барьеры) проводится уже достаточно давно (см., напр., [112-115,47]). Эта задача довольно тривиальна для потенциалов притяжения и для надбарьерных энергий внутри барьеров. Но ситуация резко меняется для подбарьерных энергий, т.е. при туннелировании. В этом случае затухающие и возрастающие волны *в отдельности* обладают нулевыми потоками (как стационарными, так и нестационарными, усреднёнными по времени). Ненулевым потокам отвечают только линейные суперпозиции затухающих и возрастающих волн вместе. Поэтому затухающие и возрастающие волны сами по себе не могут рассматриваться в качестве физических бегущих волн.

Для корректного анализа многократных последовательных отражений от внутренних стенок барьера при туннелировании через него воспользуемся формализмом временного анализа процессов туннелирования, разработанным в [7-11], при этом учитывая результаты [112-115,47]. Ограничимся простейшим случаем прямоугольного барьера высоты V_0 в интервале $(0, a)$ (см. рис.1), а эволюцию туннелирования опишем нестационарным описанием актуально движущимися волновыми пакетами типа (2), составленными из стационарных решений (1) и избавившись от надбарьерных энергий с помощью дополнительного преобразования $g(k) \rightarrow g(k) \Theta(E-V_0)$ (где $\Theta(E-V_0)$ – ступенчатая функция Хевисайда). Вместо обычного сшивания стационарных волновых функций (1) в точках $x = 0$ и $x = a$ при нахождении аналитических выражений для A_R , A_T , α и β , перейдём к анализу прохождения начального волнового пакета через первую стенку потенциального барьера,

(1) без учёта влияния второй (конечной) стенки потенциального барьера, поскольку волновой пакет ещё не достиг её вследствие конечной скорости движения,

(2) без нарушения требования конечности волнового пакета в случае бесконечно широких барьеров (поскольку возрастающие стационарные волны не вводятся пока в рассмотрение),

(3) конструируя волновые пакеты на последующих этапах многократных внутренних отражений *таким образом, чтобы они были аналитическими продолжениями соответствующих выражений, отвечающих бегущим волнам для надбарьерных энергий.*

И таким образом рассмотрим три последовательных этапа в эволюции процесса туннелирования:

Первый этап: Частица начинает процесс туннелирования сквозь барьер с пересечения первой стенки барьера при $x = 0$. На этом начальном этапе в области I имеем падающий волновой пакет

$$\Psi_{in}(x, t) = \int dE g(E) \psi_{in}(x, k) \exp(-iEt/\hbar), \quad x < 0, \quad (39)$$

плюс внешне отражённый от первой стенки барьера волновой пакет

$$\Psi_R^0(x, t) = \int dE g(E) \psi_R^0(x, k) \exp(-iEt/\hbar), \quad x < 0. \quad (40)$$

Сумма волновых пакетов (39) и (40) непрерывно переходит при прохождении через начальную стенку барьера в волновой пакет внутри барьера (II). В предположении прямоугольной формы и в случае гипотезы, что туннелирующий пакет ещё не чувствует конечной стенки барьера, проникший под барьер волновой пакет вначале содержит только затухающие волны:

$$\Psi_{pen}^1(x, t) = \int dE g(E) \alpha_0 \exp(-\chi x) \exp(-iEt/\hbar), \quad 0 < x < a \quad (41)$$

[через α_0 обозначен коэффициент начального проникновения]. Далее, из условий сшивания стационарных волновых функций в точке $x = 0$ получим два линейных неоднородных уравнения для неизвестных A_R^0 и α_0 . Подчеркнём, что стационарный поток для $\alpha_0 \exp(-\chi x)$ и полный поток для $\Psi_{pen}^1(x, t)$, проинтегрированный по времени, оба равны 0.

Второй этап: Частица проходит вторую стенку барьера в точке $x = a$. При прохождении второй стенки барьера после проникновения внутрь барьерной области II волновой пакет трансформируется в два пакета – (а) протуннелированный и распространяющийся в области III и (б) отражённый от второй стенки барьера и проникающий назад в область II. Из сшивания стационарных волновых функций в точке $x = a$ во втором этапе аналогично первому этапу получим 2 линейных неоднородных уравнения для неизвестных A_T^0 (амплитуду стационарной волны, прошедшей через вторую стенку в область III) и β_0 (амплитуду возрастающей волны, отражённой от второй стенки в область II).

*Третий этап: Частица, отражённая назад от второй стенки, проходит снова через первую стенку, пересекая её, двигаясь в направлении отрицательной полуоси x . Волновой пакет, отражённый от второй стенки, налетает внутри барьера на первую стенку. И далее он трансформируется в 2 пакета – (а) прошедший через эту стенку (в дополнение к пакету, отражённому на первом этапе назад в область I) и (б) отражённый от той первой стенки вперёд внутри области II. Из сшивания волновых функций в точке $x = 0$, как и в случае первых двух этапов, получим снова два линейных неоднородных уравнения для неизвестных A_R^1 (амплитуду стационарной волны, прошедшей через первую стенку назад в область I) и α_1 (амплитуду стационарной затухающей волны, отражённой от первой стенки назад в область II). Этот третий этап отвечает естественно первому внутреннему отражению. И процесс второго и третьего этапов можно итерировать с учётом последовательных процессов внутренних отражений постепенно ослабевающего (по мере увеличения номера предыдущих внутренних ударов частицы о стенки) волнового пакета от стенок барьера (с частичными выходами через стенки наружу). Такое описание процесса туннелирования неизбежно включает в себя *подход многократных внутренних отражений* [112-115,47]. Нетрудно видеть, что любой из последующих этапов может быть сведён к одному из первых трёх рассмотренных выше этапов. Более того, получим из требований непрерывности волновых функций следующие рекуррентные соотношения*

$$\alpha_0 = \frac{2k}{k+i\chi}, \beta_n = \alpha_n \frac{i\chi-k}{i\chi+k} \exp(-2\chi a), \alpha_{n+1} = \beta_n \frac{i\chi-k}{i\chi+k}, \quad (42)$$

$$A_R^0 = \frac{k-i\chi}{k+i\chi}, A_T^n = \alpha_n \frac{2i\chi}{k+i\chi} \exp(-\chi a - ika), A_R^{n+1} = \beta_n \frac{2i\chi}{k+i\chi}$$

для неизвестных коэффициентов α_n , β_n , A_T^n и A_R^{n+1} ($n=0,1,\dots$) последовательных этапов эволюции туннелирования волнового пакета. Число n нумерует последовательный этап эволюции волнового пакета внутри барьера, начиная с $n=0$ (начиная с проникновения волнового пакета внутрь барьера). При $n \neq 0$ номер соответствующего этапа эволюции связан с внутренним отражением от любой стенки барьера до прибытия к другой стенке.

Нечётные значения $n = 2\mu + 1$ отвечают отражениям от первой стенки барьера с амплитудами α_μ , в то время как чётные значения $n = 2(\nu + 1)$ отвечают отражениям от второй стенки с амплитудами α_ν .

Общая эволюция падающего волнового пакета, туннелирующего сквозь барьер, описывается с помощью суммирования всех возможных этапов. И нетрудно видеть, что

$$A_T = \sum_{n=0}^{\infty} A_T^n = 4i\chi k \exp(-\chi a - ika) / F, \quad A_R = \sum_{n=0}^{\infty} A_R^n = k_0^2 D_- / F, \quad (43)$$

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 2k(k+i\chi) / F, \quad \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = 2k(i\chi - k) \exp(-2\chi a) / F,$$

где $F = (k^2 - \chi^2)D_- + 2ik\chi D_+$, $D_{\pm} = 1 \pm \exp(-2\chi a)$, $k_0^2 = k^2 + \chi^2 = 2mV_0 / \hbar^2$.

Все эти результаты для α , β , A_T и A_R совпадают с результатами, полученными при стандартном сшивании стационарной волновой функции, удовлетворяющей решению уравнений (1) и также входящими в нестационарный волновой пакет, удовлетворяющий уравнениям (2) (см., напр., [47]). Более того, при замене $i\chi \rightarrow k_1$, где $k_1 = [2m(E - V_0)]^{1/2} / \hbar$ – волновое число при надбарьерных энергиях ($E > V_0$), все выражения (43) для α , β , A_T и A_R переходят в те выражения тех же величин, которые получены при изучении движения обычных частиц над барьером в терминах многократных внутренних отражений (см., напр., [47]).

Промежуточные и полные времена туннелирования и отражения. С учётом многократных внутренних отражений изучим фазовые времена для квазимонохроматических волновых пакетов (39)-(40), следуя [47], и в результате получим: $t_{in} = \hbar \partial(\arg g) / \partial E$ для падающего волнового пакета в начале барьера ($x=0$) – выберем его за начальное (нулевое) время;

время; $\tau_{refl}^1 = t_{refl}^1 - t_{in} = \hbar \frac{\partial(\arg A_R^0)}{\partial E} = \frac{2}{v\chi}$ (где $v = \hbar k/m$ – групповая начальная скорость) является фазовым временем внешнего отражения в первом этапе; и

$\tau_{tun}^1 = t_{tun}^1 - t_{in} = \frac{a}{v} + \hbar \frac{\partial(\arg A_T^0)}{\partial E} = \frac{2}{v\chi}$ – фазовое время туннелирования на первом этапе ($x=a$).

Аналогично получим такие выражения для времён отражения и туннелирования для n -го этапа [47]: $\tau_{refl}^n = \frac{4(\nu+1)}{v\chi}$, $n = \nu+1$, $\nu=0,1,\dots$, $\tau_{tun}^n = \frac{2(2\mu+1)}{v\chi}$, $n = 2\mu+1$, $\mu=0,1,\dots$. И наконец,

фазовые времена полного туннелирования и отражения определяются [47]: $\tau_{tun} = \frac{a}{v} + \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial(\arg A_T^n)}{\partial E} \xrightarrow{\chi a \rightarrow \infty} \tau_{tun}^1 = \frac{2}{v\chi}$, $\tau_{refl} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial(\arg A_R^n)}{\partial E} = \tau_{tun} \xrightarrow{\chi a \rightarrow \infty} \tau_{refl}^1 = \frac{2}{v\chi}$. Очевидно, не

только τ_{tun} , но и все τ_{tun}^n ($n=1,2,\dots$) выявляют эффект Хартмана.

Двумерное туннелирование: Введение. Одномерное (1-D) проникновение и туннелирование нерелятивистских частиц и фотонов сквозь потенциальный барьер изучалось в стационарном и нестационарном подходах в ряде работ (см., например, [7,8,44-47,112-115] и соответствующие ссылки в них). Здесь будет описано, следуя [116], в квазимонохроматическом приближении движение нерелятивистских частиц, описываемое стационарным двумерным (2-D) стационарным уравнением Шредингера

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (2m/\hbar^2)(E + V(x, y)) \right\} \Psi(x, y) = 0 \quad (44)$$

где $\Psi(x, y)$ - стационарная волновая функция, m - масса частицы, $V(x, y)$ - потенциал (барьер) и E полная энергия. Области I и II определены как области с нулевыми потенциалами $V(x) = V(y) = 0$ (I для $-\infty < x \leq 0$, $-\infty < y < \infty$ и II для $a \leq x < \infty$, $-\infty < y < \infty$). Область III содержит барьер $V(x) = V_0 > 0$, и $V(y) = 0$ ($0 \leq x < \infty$, $-\infty < y < \infty$). Все три области бесконечны вдоль оси y (параллельно поверхностям раздела между I и II, а также между II и III), и имеет место трансляционная симметрия вдоль оси y во всех трёх областях (поскольку $V(y)=0$ везде). Из-за бесконечности всех трех областей вдоль оси y граничными эффектами пренебрежём.

Далее, используя аналогию движения частиц и фотонов, рассмотренную в [8,52-56], изучим движение фотонов, распространяющихся в изотропной стеклянной среде I и III, проникающих или туннелирующих через изотропный слой воздуха II.

Изучение 2-D проникновения и туннелирования квазимонохроматических нерелятивистских частиц через потенциальный барьер. В стационарной схеме (см. рис.11) начальная 2-D плоская волна $\exp(i\vec{k}\vec{r})$ с $\vec{k} = \{k_x, k_y\}$, $\vec{r} = \{x, y\}$, $|\vec{k}| \equiv k = k_x^2 + k_y^2$, $\hbar^2 k_x^2 / 2m = E_x^2$, $\hbar^2 k_y^2 / 2m = E_y^2$ и с полной энергией (и в тоже время кинетической энергией в I и III) $E = E_x^2 + E_y^2$ описывает в I свободную частицу, движущуюся по направлению к точке ($x=y=0$). Проанализируем надбарьерное проникновение с $E_x > V_0$. В точке ($x=y=0$) возникает первая внешне отражённая плоская волна $A_R^{ex,1} \exp(i\vec{k}_R^{ex}\vec{r})$, где $A_R^{ex,1}$ - амплитуда первого отражения от левой границы раздела в I, $\vec{k}_R^{ex} = \{-k_x^{ex}, k_y\}$, и первая прошедшая (в II) волна $\psi_{II}^1 = A_{pen}^1 \exp(i\vec{k}_{pen}^1\vec{r})$, где A_{pen}^1 - амплитуда первого проникновения (в II), $\vec{k}_{pen}^1 = \{k_x^{pen}, k_y\}$, $k_x^{pen} = \sqrt{2m(E_x - V_0)} / \hbar$, $E_x > V_0$. Далее, в первой точке выхода ($x=a$, $y = \Delta y$), Δy - первый сдвиг вверх в II (из-за движения с k_y вдоль оси y), возникают первая пройденная плоская волна $\psi_{III}^1 = A_T^1 \exp(i\vec{k}\vec{r})$, где A_T^1 - амплитуда первой пройденной (в II) волны, и первая отраженная (внутри II) волна $A_R^{in,1} \exp(i\vec{k}_R^{in,1}\vec{r})$, где $A_R^{in,1}$ - амплитуда первой отраженной (внутри II) волны, $\vec{k}_R^{in} = \{-k_x^{pen}, k_y\}$. Сдвиг Δy , очевидно, может быть определён как

$$\Delta y = a \tan \theta', \quad \tan \theta' = k_y / k_x^{pen}, \quad (45a)$$

или

$$\Delta y = (\hbar k_y / m) \tau_x^{Ph,pen} = a \tan \theta', \quad (45b)$$

где $\tau_x^{Ph,pen} = am / \hbar k_x^{pen}$ - фазовое время движения частицы вдоль расстояния a со скоростью $\hbar k_x / m$ (т.е. время прохождения квазимонохроматической частицы вдоль оси x в II от точки $x=0$ до точки $x=a$, определяемое в приближении стационарной фазы).

Далее, в точке ($x=0$, $y=2\Delta y$) возникают вторая прошедшая (в II) волна, или вторая внутри отраженная (от левой границы раздела II) волна $A_{pen}^2 \exp(i\vec{k}_{pen}^2\vec{r})$, где $A_{pen}^2 \equiv A_R^{in,2}$ - амплитуда второй прошедшей (в II) волны, или, что тоже самое, второй внутренне отраженной (от левой границы раздела II) волны, и вторая внешне отраженная (в I)

волна $A_R^{ex,1} \exp(i\vec{k}_R \vec{r})$, где $A_R^{ex,1}$ - амплитуда второй внешне отраженной (в I) волны). И так далее... (это можно продолжить до произвольной n -й внешне отраженной (в I) волны $A_R^{ex,1} \exp(i\vec{k}_R \vec{r})$, $n \geq 2$).

Из условий сшивки для волн и их первых производных $\frac{\partial}{\partial x}$ в точках $(x=y=0)$, $(x=a, y=\Delta y)$, $(x=0, y=2\Delta y)$, $(x=a, y=3\Delta y)$, ..., получим (пренебрегая вследствие трансляционной симметрии в обеих границах раздела плоской волной $\exp(ik_y y)$):

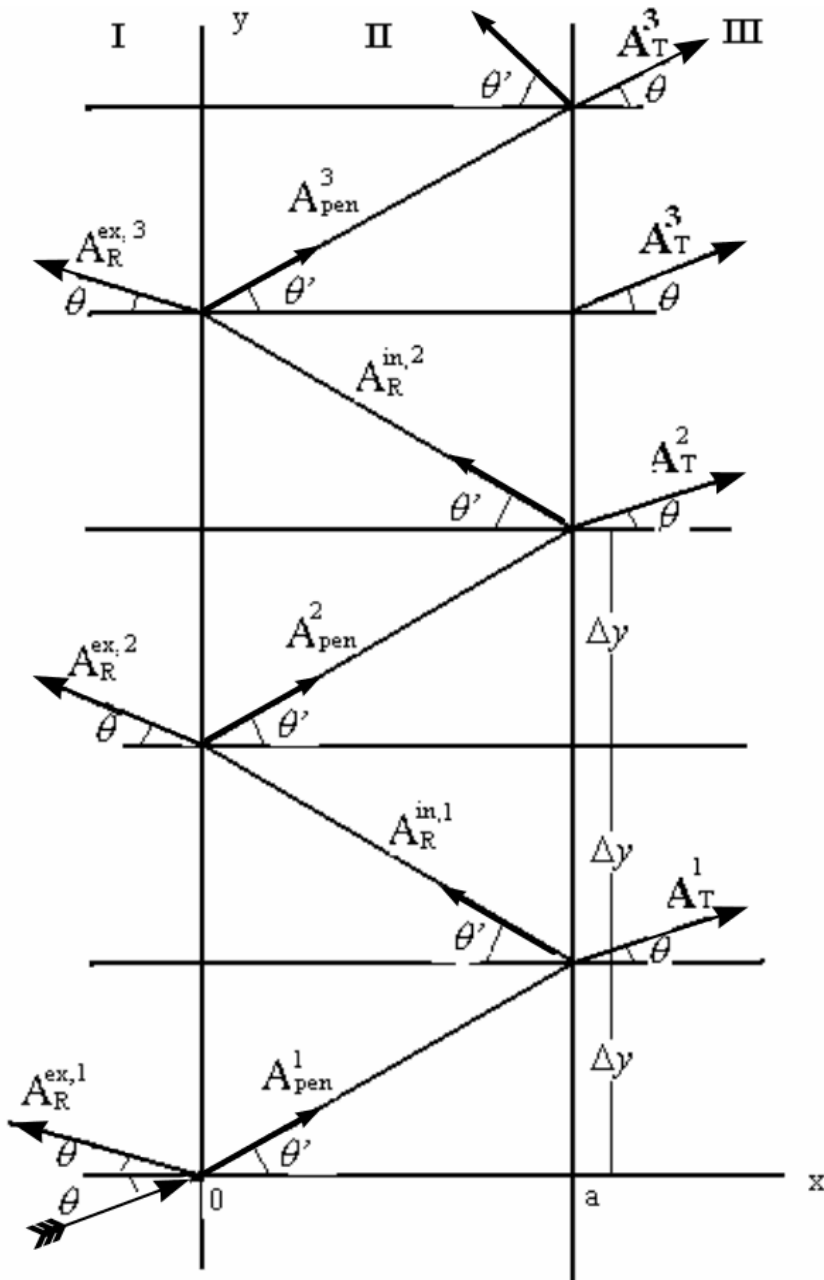


Рис.12. Схематическое изображение многократных 2D отражений, надбарьерных проникновений и прохождений нерелятивистской частицы.

$$A_R^{ex,1} = \frac{k_x - k_x^{pen}}{k_x + k_x^{pen}}, A_R^{ex,2} = \exp(2ik_x^{pen} a) \frac{4k_x k_x^{pen} (k_x^{pen} - k_x)}{(k_x + k_x^{pen})^3},$$

$$A_R^{ex,3} = \exp(4ik_x^{pen} a) \frac{4k_x k_x^{pen} (k_x^{pen} - k_x)^2}{(k_x + k_x^{pen})^4}, \dots, A_R^{ex,n+1} = A_R^{in,n} \frac{2k_x^{pen}}{k_x + k_x^{pen}} \quad (n=1,2,\dots), \quad (46)$$

$$A_{pen}^1 = \frac{2k_x}{k_x + k_x^{pen}}, A_{pen}^2 = \exp(2ik_x^{pen} a) \frac{2k_x (k_x^{pen} - k_x)}{(k_x + k_x^{pen})^2}, A_{pen}^3 = \exp(4ik_x^{pen} a) \frac{2k_x (k_x^{pen} - k_x)^3}{(k_x + k_x^{pen})^4}, \dots, A_{pen}^{n+1} =$$

$$A_R^{in,n} \frac{k_x^{pen} - k_x}{k_x^{pen} + k_x} \quad (n=1,2,\dots), \quad (47)$$

$$A_R^{in,1} = \exp(2ik_x^{pen} a) \frac{2k_x (k_x^{pen} - k_x)}{(k_x + k_x^{pen})^2}, A_R^{in,2} = \exp(4ik_x^{pen} a) \frac{2k_x (k_x^{pen} - k_x)^2}{(k_x + k_x^{pen})^3}, A_R^{in,3} =$$

$$\exp[(5ik_x^{pen} a)] \frac{2k_x (k_x^{pen} - k_x)^3}{(k_x + k_x^{pen})^4}, \dots, A_R^{in,n} = \exp(2ik_x^{pen} a) A_{pen}^n \frac{k_x^{pen} - k_x}{k_x^{pen} + k_x} \quad (n=1,2,\dots), \quad (48)$$

$$A_R^{ex,1} = \frac{k_x - k_x^{pen}}{k_x + k_x^{pen}}, A_R^{ex,2} = \exp(2ik_x^{pen} a) \frac{4k_x k_x^{pen} (k_x^{pen} - k_x)}{(k_x + k_x^{pen})^3}, A_R^{ex,3} =$$

$$\exp(4ik_x^{pen} a) \frac{4k_x k_x^{pen} (k_x^{pen} - k_x)^2}{(k_x + k_x^{pen})^4}, \dots, A_R^{ex,n+1} = A_R^{in,n} \frac{2k_x^{pen}}{k_x + k_x^{pen}} \quad (n=1,2,\dots), \quad (49)$$

$$A_T^1 = \exp[i(k_x^{pen} - k_x)a] \frac{4k_x^{pen} k_x}{(k_x + k_x^{pen})^2}, A_T^2 = \exp[(3ik_x^{pen} - ik_x)a] \frac{4k_x k_x^{pen} (k_x^{pen} - k_x)}{(k_x + k_x^{pen})^3}, A_T^3 =$$

$$\exp[(5ik_x^{pen} - ik_x)a] \frac{4k_x k_x^{pen} (k_x^{pen} - k_x)^3}{(k_x + k_x^{pen})^5}, \dots,$$

$$A_T^n = \exp[i(k_x^{pen} - k_x)a] A_R^{in,n} \frac{2k_x^{pen}}{k_x + k_x^{pen}} \quad (n=1,2,\dots). \quad (50)$$

В случае $k=k_x$, когда $\theta=0$ (см. рис.12), т.е. начальная плоская волна перпендикулярна к первой границе раздела и $\Delta y=0$, нетрудно видеть, что $\frac{k_x^{pen}}{k_x} |A_{pen}^1|^2 + |A_R^{es,1}|^2 = 1$ и

$k_x^{pen} |A_{pen}^1|^2 = k_x^{pen} |A_R^{in,1}|^2 + k_x |A_T^1|^2$, вследствие сохранения потока в первом прохождении через точки $(x=y=0)$ и $(x=0, y=a)$. В случае 1-D проникновения (при $\theta=0$, когда начальная плоская волна перпендикулярна к первой границе раздела и $\Delta y=0$) все выражения, включая последние выражения $n=1,2,\dots$, в (46)-(50) совпадают с соответствующими 1-D выражениями в [47], представленными с помощью прямого временного анализа к одномерному туннелированию в предыдущем подразделе (*одномерное туннелирование*). Здесь проведено очевидное обобщение для 2-D случая многократных 1-D внутренних отражений из [47].

Теперь проанализируем подбарьерное туннелирование при $E_x < V_0$. Если угол θ достаточно велик $(\frac{\pi}{2} > \theta > \theta_{crit} = \tan \frac{k_y}{k_x^{crit}})$, где k_x^{crit} определяется равенством $\hbar^2 (k_x^{crit})^2 / 2m = V_0$, то $E_x < V_0$ и значения k_x^{pen} - мнимые, т.е. $k_x^{pen} = i\chi$ с $\chi > 0$ и имеет место подбарьерное туннелирование, $k_y^2 = k^2 + \chi^2$. В этом случае, вместо надбарьерного

проникновения, описываемого формулами (30)-(34), для описания под-барьерного туннелирования следует ввести χ вместо k_x^{pen} при помощи подстановки $k_x^{pen} = i\chi$. И вместо распространения в II волн $\exp(\pm ik_x^{pen} x)$, появятся затухающая и возрастающая волны $\exp(\mp \chi x)$, а вместо амплитуд A_{pen}^n и $A_R^{in,n}$ волн $\exp(\pm ik_x^{pen} x)$ введём, как обычно, коэффициенты α_n и β_n , соответственно. Соответствующая картина представлена на рис.13.

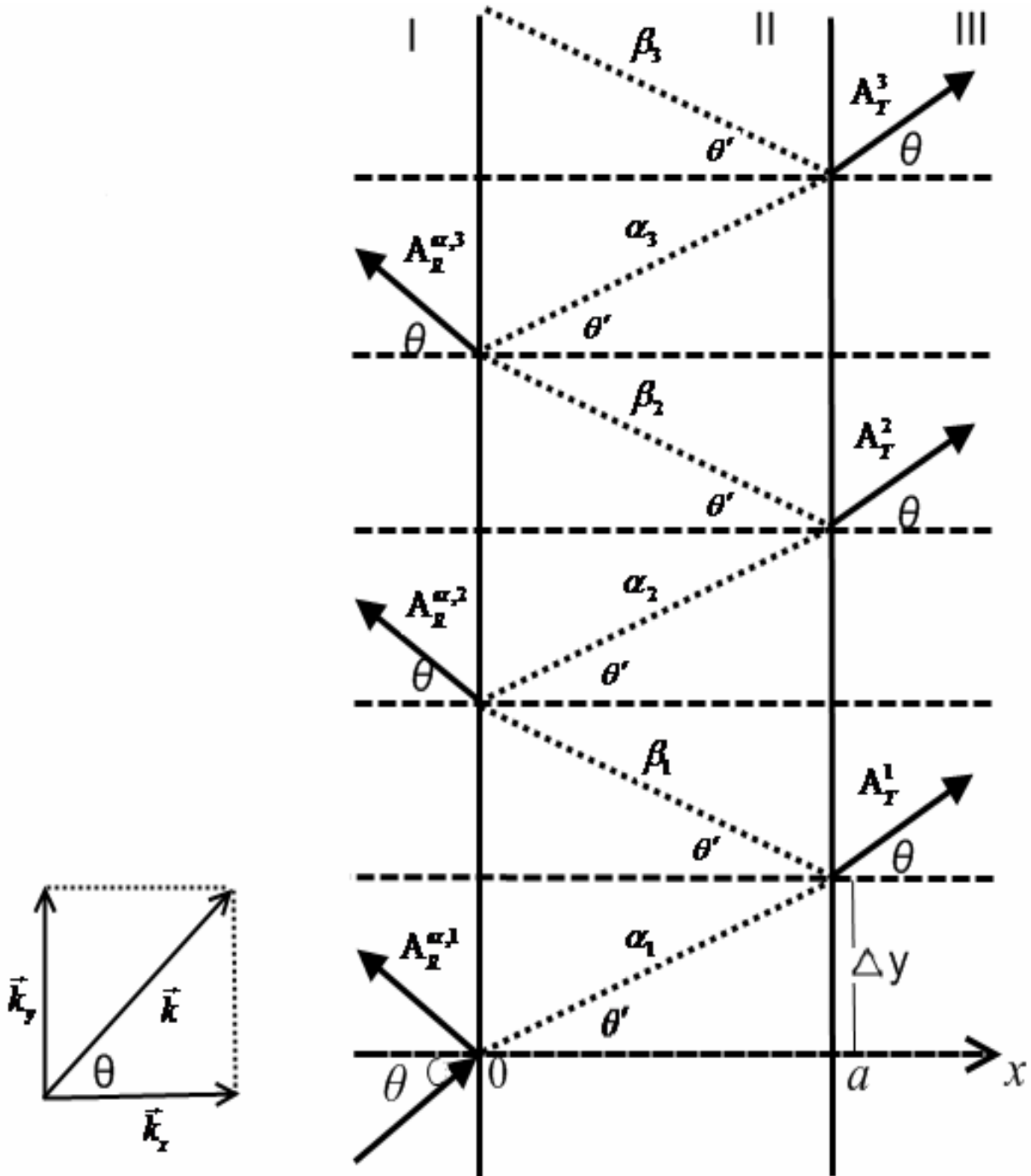


Fig. 13. Схематическое изображение многократных нерелятивистских 2-D отражений, подбарьерных проникновений и прохождений нерелятивистской частицы

В этом случае фактически используется аналитическое продолжение из области действительных (надбарьерных) волновых чисел в область мнимых (подбарьерных) волновых чисел аналогично тому, как это было сделано [47]. Полученные результаты, схожие с (46)-(50) при заменах $k_x^{pen} \rightarrow i\chi$, $A_{pen}^n \rightarrow \alpha_n$, $A_R^{in,n} \rightarrow \beta_n$, совпадают с соответствующими 1-D результатами в [47]. И те же самые результаты получаются при использовании разложения Фурье по пространству виртуальных импульсов и в инстантонном подходе (оба эти метода также представлены в [47] и в приложении II).

Вместо сдвига Δy вдоль оси y , определяемого для надбарьерного прохождения уравнениями (45a) и (45b) и изображённого на рис.12, следует использовать близкие к (45b) выражения

$$\Delta_n y = (\hbar k_y / m) \tau_{T(R), x=a(0)}^{Ph(ex), n} \quad (45c)$$

где

$$\tau_{T, x=a}^{Ph, n} = \frac{a}{v_x} + \hbar \frac{\partial}{\partial E} \arg A_T^n \quad (n=1, 2, \dots), \quad (51)$$

и

$$\tau_{R, x=0}^{Ph, ex, n} = \hbar \frac{\partial}{\partial E} \arg A_R^{ex, n} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (52)$$

Величины $\tau_{T, x=a}^{Ph, n}$ и $\tau_{R, x=0}^{Ph, ex, n}$ представляют фазовые времена движения (т.е. времена движения квазимонохроматической частицы в приближении стационарной фазы) для n -го шага при подбарьерном туннелировании через точку $x=a$ и n -го шага при внешнем отражении от первого барьера в точке $x=0$, соответственно (см., например, [7,8]). Конечно, сдвиги $\Delta_n y$ с различными значениями $n=1, 2, 3, \dots$ - различны (вследствие небольшого численного возрастания $\hbar \frac{\partial}{\partial E} \arg A_T^n$ и $\hbar \frac{\partial}{\partial E} \arg A_R^{ex, n}$ для возрастающих чисел n , но всегда пропорциональны $2/v\chi$ в пределе $\chi a \rightarrow \infty$). Протуннелированные и внешне отраженные волны возрастающего порядка, благодаря множителю $\exp(-\chi a)$ в выражениях для A_T^n и $A_R^{ex, n}$, с возрастанием номера n быстро затухают и, в конце концов, исчезают.

В [117] без строгого теоретического обоснования и в пренебрежении многократными внутренними отражениями и прохождениями (вместо аналитического продолжения, использованного в [47, 112-115]) была использована для k_x - компоненты внутри области II *только одна обычная* линейная комбинация волн $\alpha \exp(-\chi x) + \beta \exp(\chi x)$ и для k_y - компоненты внутри области II *только одна* волна $\exp(ik_y y)$ и было получено следующее выражение для *только одного сдвига* вдоль оси y во второй границе раздела (между II и III)

$$\Delta y = (\hbar k_y / m) \tau_{T, x=a}^{Ph} \quad (45d)$$

который представлен на рис.14, где

$$\begin{aligned} \tau_{T, x=a}^{Ph} &= \tau_{tun} = a/v + \hbar \partial \arg A_T / \partial E = \\ &= (v\chi)^{-1} [k_{0,x}^2 \operatorname{sh}(2\chi a) + 2\chi a k_x^2 (\chi^2 - k_x^2)] / [4k_x^2 \chi^2 + k_{0,x}^2 \operatorname{sh}^2(\chi a)] \end{aligned} \quad (53)$$

и $A_T = \sum_{n=1}^{\infty} A_T^n = 4ik_x \chi \exp(-\chi a - ik_x a) / F_x$, $F_x = (k_x^2 - \chi^2)D_- + 2ik_x \chi D_+$, $D_{\pm} = 1 \pm 4 \exp(-2\chi a)$, $k_{0,x}^2 = k_x^2 + \chi^2 = 2mV_0 / \hbar^2$ и в результате была получена *только одна прошедшая* (в III область) 2-D волна $A_T \exp(ik_x y) \exp(ik_y y)$, которая движется в параллельном направлении к падающей волне.

Итак, представлены два приближения (подхода) для 2-D подбарьерного туннелирования нерелятивистской частицы. Первый представлен рис.13 с бесконечной серией внутренних отражений и пройденных волн, с помощью формул (46)-(50), с заменами $k_x^{pen} \rightarrow i\chi$, $A_{pen}^n \rightarrow \alpha_n$, $A_R^{in,n} \rightarrow \beta_n$, а также с помощью сдвигов (29c,d). Вторым представлен на рис.14 с *только одним* сдвигом при туннелировании и *только одной* прошедшей волной, которая движется параллельно падающей волне, в полном пренебрежении многократными внутренними отражениями и прошедшими волнами.

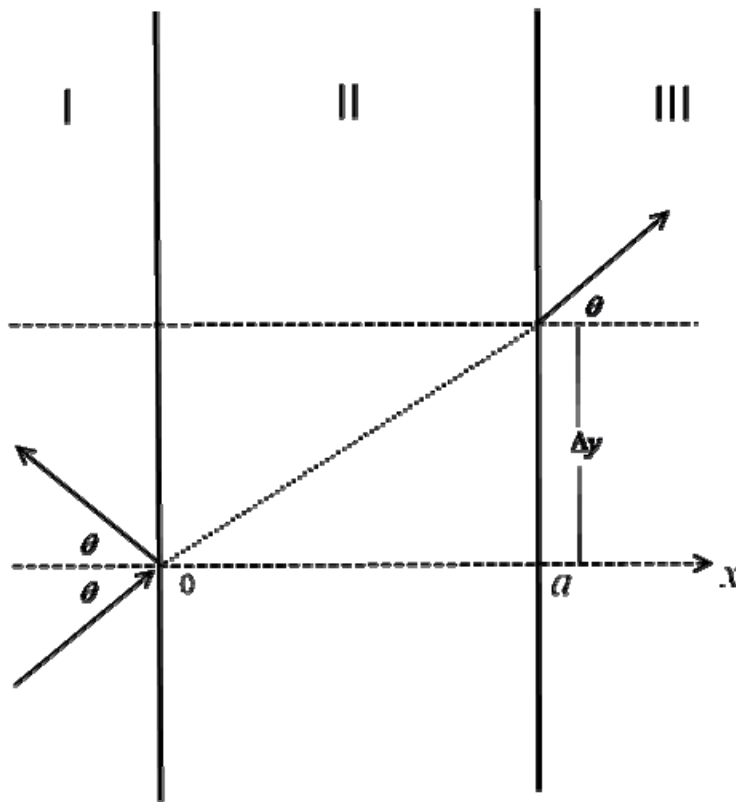


Рис.14. Схема 2-D туннелирования с одной отражённой и одной прошедшей волной, движущейся параллельно падающей волне.

Оба подхода указывают на нелокальное поведение подбарьерного туннелирования, которое приводит к эффекту Хартмана для фазового времени туннелирования в пределе $\chi a \rightarrow \infty$. Этот эффект состоит в независимости фазового времени туннелирования от ширины барьера (см., например, [7,8]): точно это время равно $2/v\chi$ для любого фазового времени (39) и (40), $n=1,2,3,\dots$, точно так же, как и для основного времени туннелирования (21a) в

обоих случаях. И остаётся только окончательное тщательное подтверждение того, *какой из подходов реально* описывает подбарьерное туннелирование. Пока только наш подход (рис.13) подтверждён несколькими методами, описанными в [47], и предварительно подтверждён давними (однако без реальной обработки данных) экспериментальными наблюдениями, опубликованными в [118-119].

2-D проникновение и туннелирование фотона через барьер. С учётом аналогии движения фотона и частицы, рассмотренной в [8,52-56], распространим полученные результаты на 2-D проникновения и туннелирования фотона. Рис.12-14 могут также быть использованы для фотонов, распространяющихся в изотропной стеклянной среде I и III, проникающих или туннелирующих через изотропный воздушный слой. В этом случае величина

$$\frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = n \quad (54)$$

представляет собой коэффициент преломления света в стекле (если положить коэффициент преломления света в воздухе равным 1), и на рис.12 описано проникновение фотонов через слой II для углов меньше критического угла $\theta_{crit} = \tan^{-1} \frac{k_y}{k_x}$, т.е. угла полного внутреннего

отражения для падающих фотонов, поляризованных перпендикулярно к плоскости x -у падения света.

Рис.13 и 14 описывают нарушенное полное внутреннее отражение поляризованного света, туннелирующего через слой II, для углов падения $\theta > \theta_{crit}$ (нарушенное в смысле частичного прохождения через слой II в стеклянную среду III) в обоих приближениях, или применяя 2-D туннелирование частицы с многократными внутренними отражениями, представленными здесь (и также ранее в иной форме для света в [118-119]) (рис.12), или используя описание 2-D туннелирования нерелятивистской частицы и фотона, представленное в [117] (рис.13). Мы надеемся, что соответствующим образом уточнённые окончательные оптические эксперименты смогут дать ясную демонстрацию многократных внутренних отражений и многократных пройденных волн, как это было ранее предварительно проанализировано в [118-119].

Трёхмерное туннелирование: Введение. К такой задаче проще всего было бы приступить, естественным образом расширяя двумерную задачу туннелирования (в осях x и y) на трёхмерную (в осях x , y и z) и полагая поверхности раздела двумерными (параллельными плоскости осей y и z) с прежним направлением туннелирования вдоль оси x . Оставляя решение такой задачи на усмотрение читателей, перейдём далее к сферически симметричной задаче туннелирования, где основная роль возлагается на радиальную координату, что типично для простейших задач ядерной и атомной физики. Подобная задача обычно до сих пор излагается не только во многих монографиях по квантовой механике и по теории ядра, но и даже в ряде современных статей по ядерной физике в рамках ВКБ-приближения либо в сильно упрощённом стационарном подходе, либо с использованием элементарного временного подхода в конкретных задачах альфа-распада (см., напр., [120-123]).

Туннелирование и рассеяние частиц в трёхмерной потенциальной яме с внутренней жёсткой сердцевиной и внешним кулоновским барьером. Здесь ограничимся рассмотрением туннелирования и рассеяния нерелятивистских частиц в сферической трёхмерной прямоугольной потенциальной яме с внутренней жёсткой сердцевиной и с внешним кулоновским барьером, не используя приближение ВКБ и следуя статье [134]. Для простоты рассмотрим нулевое орбитальное квантовое число ($l=0$) и формально стационарные волновые функции (подразумевая фактически пользование квазимонохроматическим приближением реальных волновых пакетов).

Опишем столкновение частиц как последовательность таких двух процессов: на первом этапе входящий волновой пакет туннелирует сквозь барьер внутрь потенциальной ямы, порождая отражённые волны во внешнюю область; на втором этапе расходящиеся из потенциальной ямы волны (которые появляются после вхождения падающего туннелирующего волнового пакета) туннелирует обратно сквозь барьер наружу и отражённые волны во внутреннюю область. Затем опишем подбарьерное низко-энергетическое рассеяние в целом и получим соотношение между S -матрицей и всеми амплитудами вероятностей (обоих туннелирований и всех отражений). В заключение покажем наличие многократных внутренних отражений от внутренней стенки кулоновского барьера (и от жёсткой сердцевины).

Столкновение снаружи. Схема столкновения снаружи представлена на рис.15. Область I с $r > R_2$ описывает внешнюю область с медленно стремящимся к нулю кулоновским потенциалом; область II, ограниченная R_1 и R_2 , описывает подбарьерную область; область III с $R_0 < r < R_1$ описывает потенциальную яму; в области IV с $r < R_0$ находится бесконечно жёсткая сердцевина с нулевой волновой функцией. Вертикаль $r = R_2$ отделяет внешнюю надбарьерную область (где кинетическая энергия частицы E превышает барьер кулоновского отталкивания) от внутренней подбарьерной области II (где E ниже кривой барьера кулоновского отталкивания); вертикаль $r = R_1$ отделяет яму III от максимальной высоты барьера кулоновского отталкивания.

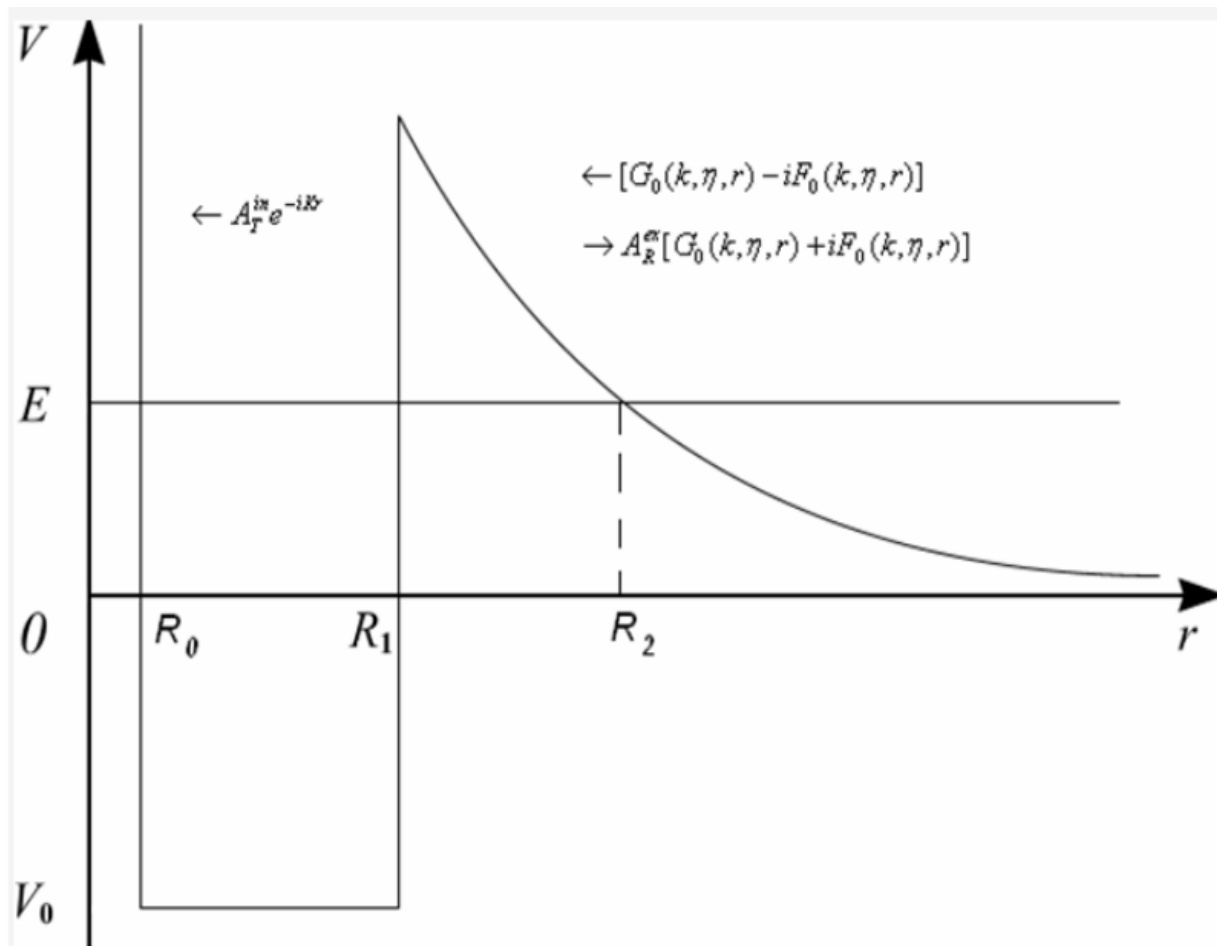


Рис.15. Схематическое описание столкновения сходящейся волны с барьером кулоновского отталкивания снаружи.

Стационарная радиальная волновая функция для картины рис.15, которая удовлетворяет радиальному уравнению Шредингера, имеет вид:

$$\Phi_I^{(ex)} = [G_0(k_1, \eta, r) - iF_0(k_1, \eta, r)] + A_R^{ex} [G_0(k_1, \eta, r) + iF_0(k_1, \eta, r)], \quad R_2 \leq r < \infty,$$

$$\Phi_{II}^{(ex)} \text{ формально такова же, что и } \Phi_I^{(ex)}, \quad R_1 \leq r < R_2, \quad (55)$$

$$\Phi_{III}^{(ex)} = A_T^{in} e^{-ik_2 \rho}, \quad \rho = r - R_0, \quad R_0 < r < R_1.$$

Здесь k_1 и $E = \hbar^2 k_1^2 / 2m$ есть волновое число и кинетическая энергия частицы, $k_2 = [2m(V_0 + E)]^{(1/2)} / \hbar$. Для барьера кулоновского отталкивания

$$V_c = \frac{z_1 z_2 e^2}{r}, \quad R_1 \leq r < \infty, \quad (56)$$

где $z_1 e$ и $z_2 e$ – заряды взаимодействующих частиц (ядер). Кулоновские функции $G_0(k_1, \eta, r)$ и $F_0(k_1, \eta, r)$ имеют асимптотику

$$G_0(k_1, \eta, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \cos(k_1 r - \eta \ln 2k_1 r + \sigma), \quad (57)$$

$$F_0(k_1, \eta, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sin(k_1 r - \eta \ln 2k_1 r + \sigma),$$

$\eta = \frac{z_1 z_2 e^2 m}{\hbar^2 k_1}$ – параметр Зоммерфельда, $\sigma = \arg \Gamma(1 + i\eta)$.

Амплитуды $A_R^{(ex)}$ и $A_T^{(in)}$ – амплитуды внешнего отражения и проникновения внутрь потенциала при первом туннелировании, соответственно. Аналитические выражения для $A_R^{(ex)}$ и $A_T^{(in)}$ могут быть найдены из условий непрерывности для обеих волновых функций и их первых производных в точках $r=R_2$ и $r=R_1$:

$$A_R^{ex} = - \frac{[G_0(k, \eta, R_1) - iF_0(k, \eta, R_1)]ik_2 + [G'_0(k, \eta, R_1) - iF'_0(k, \eta, R_1)]k_1}{[G_0(k, \eta, R_1) + iF_0(k, \eta, R_1)]ik_2 + [G'_0(k, \eta, R_1) + iF'_0(k, \eta, R_1)]k_1} \quad (58)$$

и

$$A_T^{in} = \frac{2ik_1 \exp(ik_2(R_1 - R_0))}{[G_0(k, \eta, R_1) + iF_0(k, \eta, R_1)]ik_2 + [G'_0(k, \eta, R_1) + iF'_0(k, \eta, R_1)]k_1} \quad (59)$$

Нетрудно показать, что

$$\left| A_R^{ex} \right|^2 + \frac{k_2}{k_1} \left| A_T^{in} \right|^2 = 1, \quad (60)$$

если учесть известное соотношение для вронскиана $F_0 G'_0 - G_0 F'_0 = 1$ (здесь G'_0 и F'_0 – производные G_0 и F_0 по $k_1 R_1$, соответственно). Равенство (60) является следствием закона сохранения плотности потоков вероятностей.

Для очень малых k_1 , когда $k_1 \rightarrow 0$ (более точно, когда $2\eta \gg k_1 R_1$)

$$G_0 \rightarrow 2 \left(\frac{k_1 R_1}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} I_0 \left(2(2\pi k_1 R_1)^{\frac{1}{2}} \right) \exp(\pi\eta) \quad \text{при} \quad I_0 \left(2(2\pi k_1 R_1)^{\frac{1}{2}} \right) \rightarrow 1,$$

$$G'_0 \rightarrow -2 \left(\frac{2\eta}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} K_0 \left(2(2\pi k_1 R_1)^{\frac{1}{2}} \right) \exp(\pi\eta) \quad \text{при} \quad K_0 \left(2(2\pi k_1 R_1)^{\frac{1}{2}} \right) \rightarrow \ln \left(1 / \gamma (2\pi k_1 R_1)^{\frac{1}{2}} \right),$$

$$F_0 \rightarrow (\pi k_1 R_1)^{\frac{1}{2}} I_1 \left(2(2\pi k_1 R_1)^{\frac{1}{2}} \right) \exp(-\pi\eta) \quad \text{при} \quad I_1 \left(2(2\pi k_1 R_1)^{\frac{1}{2}} \right) \rightarrow (2\pi k_1 R_1)^{\frac{1}{2}},$$

$$F'_0 \rightarrow (2\pi k_1 R_1)^{\frac{1}{2}} I_0 \left(2(2\pi k_1 R_1)^{\frac{1}{2}} \right) \exp(-\pi\eta), \quad \text{при} \quad I_0 \left(2(2\pi k_1 R_1)^{\frac{1}{2}} \right) \rightarrow 1,$$

$\gamma=1.781\dots$ – постоянная Эйлера. Если $(2k_1^2 / k_2^2 \eta / k_1 R_1) [\ln \gamma^{-1} (2\pi k_1 R_1)^{-1/2}] \ll 1$, то вероятность проникновения снаружи через кулоновский барьер внутрь прямоугольной потенциальной ямы $|A_T^{in}|^2$ принимает вид

$$|A_T^{in}|^2 \rightarrow \frac{\pi k_1}{k_2^2 R_1} \exp(-2\pi\eta). \quad (61a)$$

Итак, в отличие от 1-D ВКБ-приближения, часто используемого при анализе низкоэнергетических ядерных столкновений в ядерной астрофизике, в 3-D случае даже при очень малых k_1 необходимо учитывать не только экспоненциальный множитель $\exp(-2\pi\eta)$, но и предэкспоненциальный множитель $\frac{\pi k_1}{k_2^2 R_1}$.

Эмиссия наружу от барьера. Схема эмиссии наружу от барьера показано на рис.16.

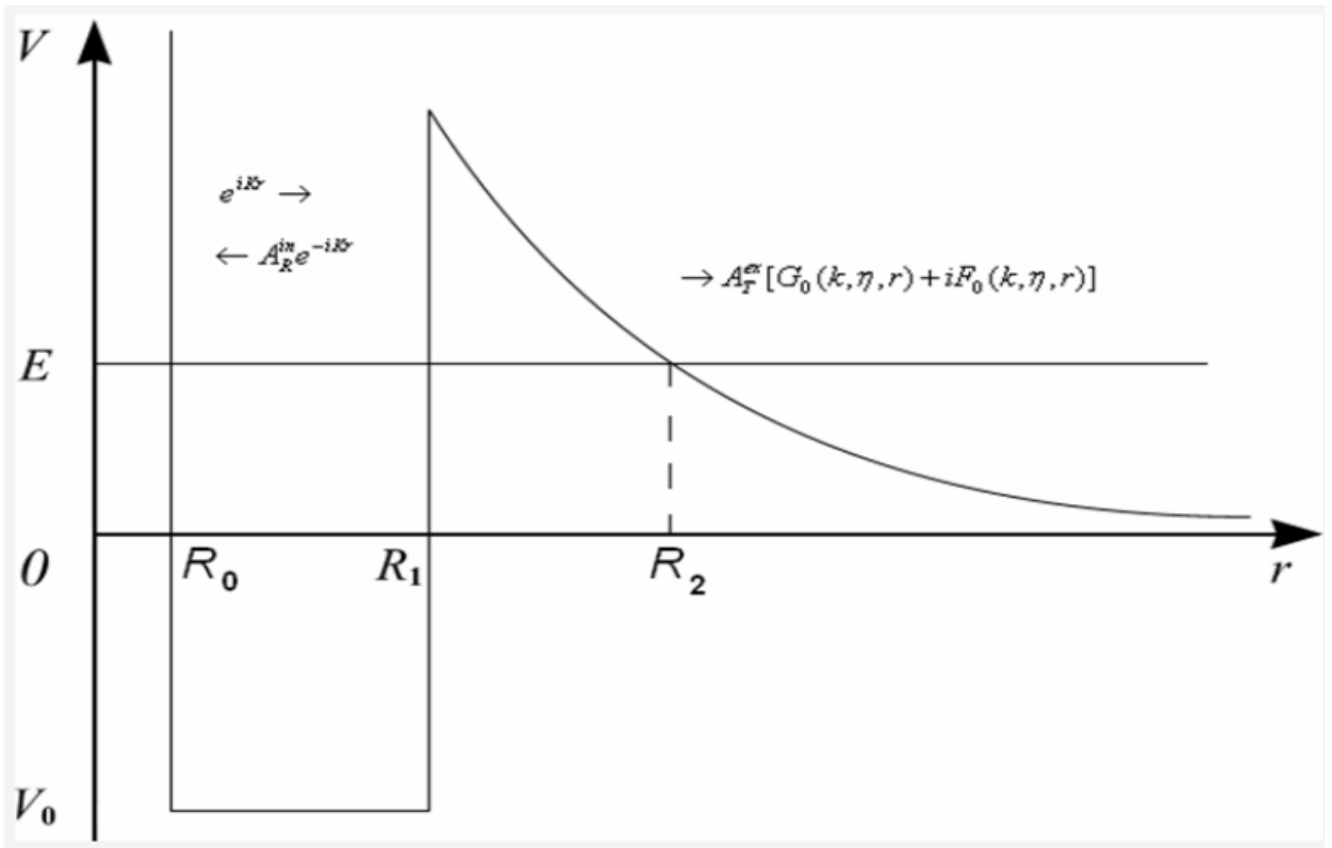


Рис.16. Схематическое описание эмиссии внутренней расходящейся волны через барьер кулоновского отталкивания.

Стационарная радиальная волновая функция в этой задаче имеет вид:

$$\Phi_{III}^{(in)} = e^{ik_2 \rho} + A_R^{in} e^{-ik_2 \rho}, \quad R_0 < r < R_1,$$

$$\begin{aligned} \Phi_{II}^{(ex)} & \text{ формально та же, что и } \Phi_I^{(in)}, & R_1 \leq r < R_2 \\ \Phi_I^{(ex)} & = A_T^{ex} [G_0(k, \eta, r) + iF_0(k, \eta, r)], & \rho = r - R_0, \quad R_1 \leq r < \infty. \end{aligned} \quad (62)$$

Из условий непрерывности стационарных волновых функций и их производных в точках $r=R_2$ и $r=R_1$ нетрудно найти аналитические выражения для амплитуд A_R^{in} и A_T^{ex} :

$$A_R^{in} = e^{2ik_2(R_1-R_0)} \frac{[G_0(k_1, \eta, R_1) + iF_0(k_1, \eta, R_1)]ik_2 - [G_0'(k_1, \eta, R_1) + iF_0'(k_1, \eta, R_1)]k_1}{[G_0(k_1, \eta, R_1) + iF_0(k_1, \eta, R_1)]ik_2 + [G_0'(k_1, \eta, R_1) + iF_0'(k_1, \eta, R_1)]k_1} \quad (63)$$

и

$$A_T^{ex} = \frac{2ik_2 \exp(ik_2(R_1 - R_0))}{[G_0(k_1, \eta, R_1) + iF_0(k_1, \eta, R_1)]ik_2 + [G_0'(k_1, \eta, R_1) + iF_0'(k_1, \eta, R_1)]k_1}. \quad (64)$$

Как следствие закона сохранения потоков вероятностей, имеет место равенство

$$|A_R^{in}|^2 + \frac{k_1}{k_2} |A_T^{ex}|^2 = 1. \quad (65)$$

Повторяя для (65) те же рассуждения, которые были сделаны для очень малых k_1 , когда $k_1 \rightarrow 0$, при получении (61a) из (60), получим:

$$|A_T^{ex}|^2 \rightarrow \frac{\pi}{k_2 R_1} \exp(-2\pi\eta). \quad (61б)$$

Как и в случае (61a), в отличие от 1-D ВКБ-приближения, типичного для низкоэнергетических ядерных столкновений, в 3-D случае при очень малых k_1 следует учитывать не только экспоненциальный множитель $\exp(-2\pi\eta)$, но и предэкспоненциальный множитель $\frac{\pi}{k_2 R_1}$.

В простейшем случае прямоугольного барьера (вместо кулоновского) при $R_1 \leq r < R_2$ и нулевого потенциала при $R_2 < r < \infty$ вместо кулоновского барьера, простая проверка фазовых времён внутреннего отражения внутрь ямы от внутренней стенки барьера и туннелирования сквозь барьер подтверждает наличие эффекта Хартмана, – иначе говоря, даёт его элементарное обобщение с 1-D туннелирования на 3-D туннелирование (см.. [124]).

S-матрица. Теперь объединим вышеописанные два этапа столкновения в одно событие рассеяния, вводя *S*-матрицу и учитывая многократные внутренние отражения внутрь потенциальной ямы. Для этой цели опишем рассеяние схемой, изображённой на рис.17, и стационарную радиальную волновую функцию представим как

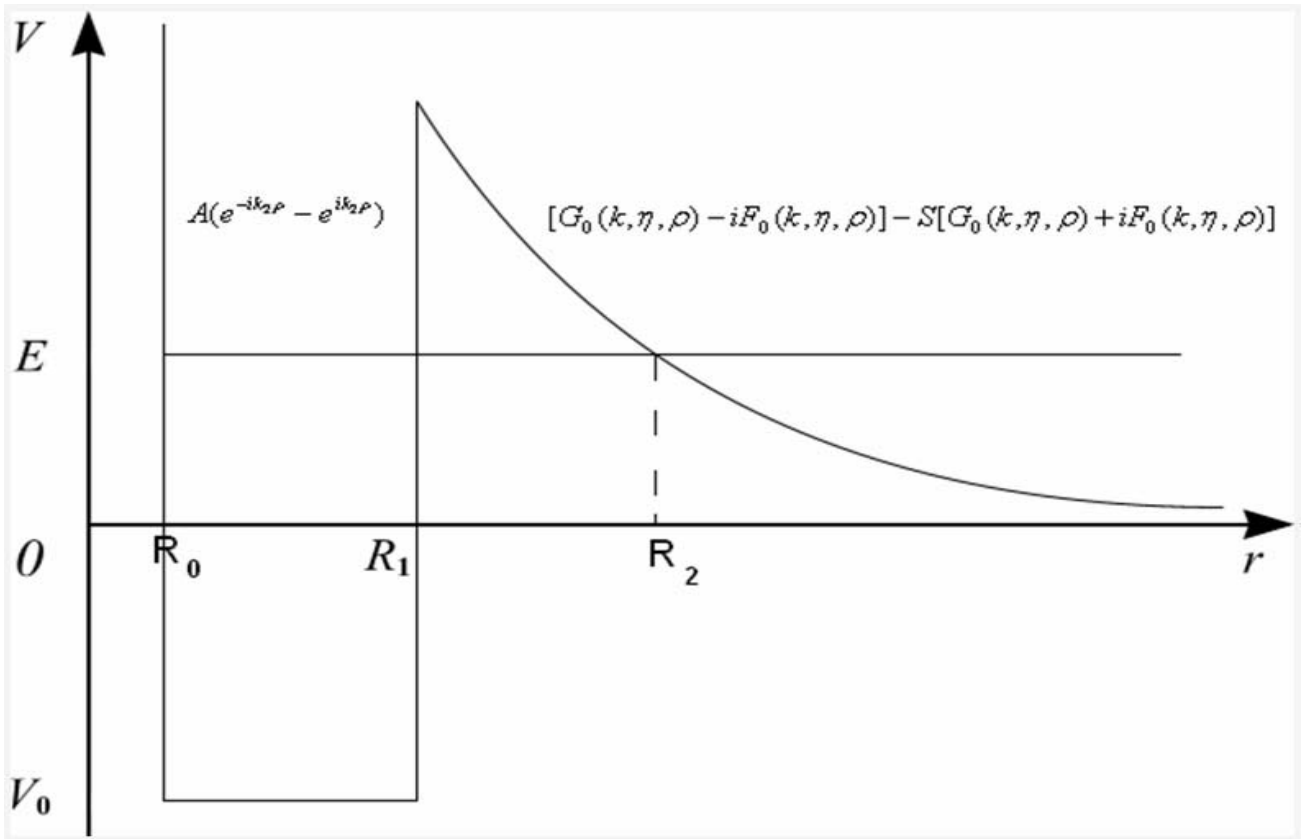


Рис.17. Схема описания рассеяния в целом.

$$\begin{aligned}
 \Psi_I &= [G_0(k_1, \eta, r) - iF_0(k_1, \eta, r)] - S[G_0(k_1, \eta, r) + iF_0(k_1, \eta, r)], & r \geq R_2, \\
 \Psi_{II} &\text{ такая же, как } \Psi_I, & \text{ для } R_1 \leq r < R_2, \\
 \Psi_{III} &= A(e^{-ik_2 r} - e^{ik_2 r}), & R_0 < r < R_1, \\
 \Psi_{IV} &\equiv 0, & r \leq R_0.
 \end{aligned} \tag{66}$$

Из условий непрерывности для стационарных волновых функций и их производных в точках $r=R_2$ и $r=R_1$, найдём аналитические выражения для S -матрицы и амплитуды A :

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{[G_0(k_1, \eta, R_1) - iF_0(k_1, \eta, R_1)]k_2 \cos k_2(R_1 - R_0) - [G_0'(k_1, \eta, R_1) - iF_0'(k_1, \eta, R_1)]k_1 \sin k_2(R_1 - R_0)}{[G_0(k_1, \eta, R_1) + iF_0(k_1, \eta, R_1)]k_2 \cos k_2(R_1 - R_0) - [G_0'(k_1, \eta, R_1) + iF_0'(k_1, \eta, R_1)]k_1 \sin k_2(R_1 - R_0)}, \\
 A &= \frac{[2ie^{ik_2(R_2 - R_0)} k_1]}{[G_0'(k_1, \eta, R_1) + iF_0'(k_1, \eta, R_1)]k_1(1 - e^{2ik_2(R_1 - R_0)}) + [G_0(k_1, \eta, R_1) + iF_0(k_1, \eta, R_1)]ik_2(1 + e^{2ik_2(R_1 - R_0)})}. \tag{67}
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $|S| = 1$; а из прямого сравнения A и S с A_R^{ex} , A_T^{ex} , A_R^{in} и A_T^{in} можно найти:

$$A = \frac{A_T^{in}}{1 + A_R^{in}} \tag{68}$$

и

$$S = -A_R^{ex} + AA_T^{ex} = -A_R^{ex} + \frac{A_T^{ex} A_T^{in}}{1 + A_R^{in}}. \tag{69}$$

Физический смысл члена $\frac{1}{1 + A_R^{in}}$ обусловлен наличием бесконечной последовательности

когерентных многократных внутренних отражений, описываемых стационарными волновыми функциями:

$$A_T^{(in)} (1 - A_R^{(in)} + (A_R^{(in)})^2 - (A_R^{(in)})^3 + \dots) e^{-ikr} = \frac{A_T^{(in)}}{1 + A_R^{(in)}} e^{-ikr}, \quad (70)$$

$$A_T^{(in)} (1 - A_R^{(in)} + (A_R^{(in)})^2 - (A_R^{(in)})^3 + \dots) e^{ikr} = \frac{A_T^{(in)}}{1 + A_R^{(in)}} e^{ikr} \quad (71)$$

для сходящихся и расходящихся волн, соответственно, поскольку имеются многократные внутренние отражения между жёсткой сердцевиной и диаметрально противоположными точками внутренней 3-D стенки сферически симметричного кулоновского барьера. Разумеется, их временную последовательность физически естественно исследовать в прямом временном подходе, просто обобщая подход, изложенный в подразделе *одномерное туннелирование* раздела 4. В случае сферически симметричных ядер при этом следует учитывать, что пакет расходящихся волн внутри ядра (равномерно сферически размазанный внутри ядра), двигаясь радиально по направлению к внутренней сферической стенке кулоновского барьера, отражается от неё внутрь и затем движется уже радиально внутрь как пакет сходящихся волн к сферической стенке жёсткой сердцевины и далее отражается от неё внутрь потенциальной области, где снова движется как пакет расходящихся волн к внутренней стенке кулоновского барьера и всё повторяется многократно вплоть до постепенного полного выхода волнового пакета наружу.

Такие когерентные многократные внутренние отражения обычно имеют место для элементарных заряженных налетающих частиц (протонов, позитронов, π^- -мезонов и т.п.). И они имеют место как для нерезонансного, так и резонансного рассеяния.

Но если бомбардирующая заряженная частица является кластером, как например альфа-частица, и имеет место резонансное рассеяния с образованием альфа-радиоактивного составного ядра, то тогда может иметь место более сложный *некогерентный* процесс: альфа-частица исчезает («растворяется») внутри составного (материнского) ядра и спустя определённое виртуальное и реальное время проживания τ_{soj} (включая движение под поверхностью перед исчезновением и после нового формирования), альфа-частица снова появляется вблизи ядерной поверхности и проникает сквозь кулоновский барьер наружу (см., напр., ссылки [135-138]).

Полагая, что после каждой выходящей «порции» вероятностного волнового пакета α -частицы в последовательности соударений и туннелирований наружу в бесконечной серии многократных внутренних отражений вероятность каждого последующего удара на внутреннюю стенку барьера кулоновского отталкивания уменьшается на множитель $|A_R^{in}|^2$ по сравнению с предшествующим ударом, можно представить полную вероятность α -распада (очевидно, равную 1) в виде бесконечной суммы уменьшающейся геометрической прогрессии:

$$(k_1/k_2) |A_T^{ex}|^2 [1 + |A_R^{in}|^2 + |A_R^{in}|^2 |A_R^{in}|^2 + \dots] = (k_1/k_2) |A_T^{ex}|^2 / [1 - |A_R^{in}|^2] = 1. \quad (72)$$

При этом также полагаем, что все многократные последовательные внутренние отражения внутри материнского ядра после формирования α -частицы вблизи ядерной поверхности до её последующего исчезновения внутри материнского ядра *не когерентны* друг относительно друга вследствие независимости последовательных процессов исчезновения и, следовательно, должны суммироваться не амплитуды вероятностей, но вероятности в цепочке многократных внутренних отражений. И далее естественно полагать, что на каждом этапе некогерентных

многократных внутренних отражений α -частицы полная средняя длительность τ_{soj} виртуального и реального нахождения α -частицы внутри материнского ядра между двумя последовательными внутренними отражениями равны сумме среднего времени исчезновения и последующего формирования α -частицы, среднего времени её отражения внутри ядра и среднего времени её кинематического движения после отражения внутрь и потом к поверхности после её формирования. И величина τ_{soj} одинакова для каждой пары последовательные ударов α -частицы о ядерную поверхность.

Эффективное или среднее значение *виртуального и реального времени проживания альфа-частицы внутри материнского альфа-радиоактивного ядра между двумя последовательными некогерентными многократными внутренними отражениями* в течение долгого альфа-распада может быть оценена феноменологическим путём на простой основе экспериментального экспоненциального закона α -распада со средним временем жизни τ [124,128]:

$$L(t) = \exp(-t/\tau). \quad (73)$$

Если $\tau_{soj} \ll \tau$, то в течение τ_{soj} вероятность распада уменьшается на величину

$$\Delta L = 1 - |A_R^{in}|^2 = \tau_{soj}/\tau. \quad (74)$$

И таким образом, с учётом (64), получим:

$$\tau_{soj}/\tau = (k_1/k_2) |A_T^{ex}|^2 \quad \text{и} \quad \tau_{soj} = (k_1/k_2) |A_T^{in}|^2 \tau = P \tau, \quad (75)$$

где $P = (k_1/k_2) |A_T|^2$.

Формула (75), переписанная при замене $\nu = 1/\tau_{soj}$ и $\tau = 1/\lambda$ в виде известной формулы (см., напр., [120,121])

$$\lambda = \nu P, \quad (75a)$$

фактически описывает новый феноменологический подход к физическому смыслу предэкспоненциального множителя.

Вычислим τ_{soj} , например, для ^{210}Po (при значениях $E = 5.407$ МэВ, $V_0 = 16.7$ МэВ, $R_1 = 8.76$ фм и $R_1 = 8.975$ фм [124,126]) с $\tau = 138.376$ дней = 11955686.4 сек. Тогда получим $\tau_{soj} = 2.434 \cdot 10^{-20}$ сек и $\tau_{soj} = 5.740 \cdot 10^{-20}$ сек, и следовательно теперь $\nu = 1/\tau_{soj} = 4.108 \cdot 10^{19}$ сек $^{-1}$ и $1.742 \cdot 10^{19}$ сек $^{-1}$, соответственно. Полученные здесь значения $\nu = 1/\tau_{soj}$ отличны от Гамовского предэкспоненциального множителя $\nu_0/2R_1 \equiv [2(E+V_0)/m]^{1/2}/2R_1$, оцененного как простое классическое число чисто кинетических ударов о ядерную поверхность за ед. времени, а также и от оценки Ландау [129] предэкспоненциального множителя в виде $D/2\pi\hbar$ (D – среднее расстояние между энергетическими уровнями в рассматриваемом интервале энергий).

Численно наше значение сильно разнится с Гамовской оценкой: для выбранных в [136,138] $E = 5.407$ МэВ, $V_0 = 16.7$ МэВ, $R_1 = 8.76$ фм и $R_1 = 8.975$ фм, $\nu_0/2R_1 = 1.881 \cdot 10^{21}$ сек $^{-1}$ и $1.836 \cdot 10^{21}$ сек $^{-1}$, соответственно. Такое различие можно объяснить физически весьма малым временем движения внутри потенциальной ямы по сравнению с длительностью процессов исчезновения и формирования альфа-частицы внутри ядра. И можно также видеть, что значение R_0 не влияет существенно на значения A_R , A_T и τ_{soj} .

Для $D = 100$ кэВ значение $D/2\pi\hbar = 2.418 \cdot 10^{19}$ сек $^{-1}$ и наши результаты уже не так сильно отличаются от оценки Ландау, приведенной в [129], возможно, потому, что обе величины связаны с фундаментальными внутренними свойствами внутри материнского ядра (тем более

что величина D качественно близка к циклу Пуанкаре для оператора времени квантово-механической системы в области квазидискретного спектра),

6. Заключение: выводы и перспективы.

1) Хотя и нет прямого предельного перехода к классической механике для туннелирующих под барьером частиц, для подбарьерного движения волновых пакетов затухающих и антитухающих волн существует явно прямой классический предел: вспомним аналогичное движение во времени волновых пакетов, описываемых *суперпозициями затухающих и антитухающих волн в классической оптике и в классической акустике* [137,138].

2) В [7,8] установлено, что практически все ранее известные частные определения и рецепты определения времён туннелирования оказались в рамках общего подхода Ольховского-Реками простыми частными случаями или среднего времени туннелирования, или средне-квадратичной флуктуацией в распределении времён туннелирования (или переходящими в них при особых идеализированных граничных условиях). В некоторых статьях (как, например, [32]) подход Ольховского-Реками был признан наиболее самосогласованным подходом в рамках стандартной квантовой механики (в копенгагенской интерпретации).

В части II также представлены:

3) результаты теоретического и экспериментального изучения разных форм эффекта Хартмана не только для фазовых времён, но и известных видов средних времён туннелирования, а также его обобщения и усиления (до опережения) для случаев разных распределений импульсов падающих волновых пакетов и нескольких разделённых барьеров (как для частиц, так и для фотонов);

4) теоретические результаты об отсутствии эффекта Хартмана при наличии поглощения, а также для среднеквадратичных распределений времён туннелирования ;

5) результат о времени заполнения барьера с заглушкой (для частиц и фотонов);

6) результаты изучения *многократных внутренних отражений* при 1-D, 2-D и 3-D случаях туннелирования (частиц и фотонов), включая внутренние отражения затухающих и возрастающих волн внутри барьеров;

7) дальнейшее развитие (углубление) физической и математической интерпретации формулы Гамова для альфа-распада;

8) вывод об учёте многократных 3-D внутренних отражений при самосогласованном квантовом (причём *без* ВКБ-приближения) в квантовых и ядерных столкновениях и распадах с заряженными системами (ядрами) в начальных и конечных каналах.

А полученные при рассмотрении 3-D туннелирования результаты могут быть использованы как начальный этап во временном подходе к ядерным реакциям и распадам для любого значения l и для несферических случаев, а также и к подбарьерным астрофизическим реакциям ядерного синтеза. В последнем случае важно принимать во внимание не только

множитель проникновения (61a), но и множитель $\frac{1}{1 + A_R^{in}}$, который возникает вследствие

многократных внутренних отражений между жёсткой сердцевиной и диаметрально противоположными точками внутренней стенки сферического 3-D кулоновского барьера. Оба эти множителя отсутствуют в 1-D приближении, обычно используемом в статьях по ядерной астрофизике (см., напр., [130-134] и соответствующие ссылки в них).

В части II к тому же рассмотрены и проанализированы:

8) **парадокс** сверхсветовых скоростей фотонного туннелирования, иногда объясняемый смещением максимума волнового пакета вперёд вследствие физического *перестроения* или *реконструкции* импульса во время туннелирования либо интерференцией падающей и отражённых волн при движении к первому барьеру или между барьерами, а иногда нелокальностью пространственно-временной метрики внутри барьера;

9) **проблема** отрицательных скоростей или времён опережения (выход раньше входа) при туннелировании (см. рис.2,3 и 4 с обсуждением отрицательных значений $\langle t_+(0) \rangle$ и сильного расплывания падающих и туннелирующих волновых пакетов при больших разбросах импульсов (см. также [9,стр.170]). В принципе проявление времён опережения возможно не только при интерференции падающих и отражённых волн, но и при переформировании или реконструкции туннелирующего импульса.

Дальнейшие перспективы:

- 1) изучение туннелирования и временного анализа туннелирования *тождественных* частиц и ядер друг через друга;
- 2) изучение эффекта Хартмана при наличии квантовой микродиссипации под барьером;
- 3) в продолжение и уточнение оптических экспериментов [118,119] целесообразно провести новый эксперимент по решающему сравнению двух теоретических подходов для двумерного туннелирования оптических фотонов, изложенных в разделе 4 (в подразделе *2-D проникновение и туннелирование фотона через барьер*), с возможным измерением времён прохождения и отражения;
- 4) целесообразно провести сравнительный временной анализ парадоксов сверхсветовых скоростей в эффекте Эйнштейна, Подольского, Розена и в эффекте Хартмана для туннелирования как частиц, так и фотонов (и их объяснений);
- 5) изучение и обзор всех проблем *парадокса Клейна*, включая проблемы временного анализа туннелирования релятивистских частиц со спином 0 или 1/2 или 1 (см., в частности, [135,136]);
- 6) изучение проблем, возникающих при начинающихся экспериментах по изучению туннелирования *солитоноподобных электромагнитных волновых пакетов*;
- 7) временной анализ более сложных процессов, таких как образование и распады метастабильных состояний (рассмотренных в части III) и *временных корреляций флуктуаций различных величин* в многочастичных процессах с участием процессов туннелирования, должен проводиться на основе адекватных формализмов описания таких процессов, которые ещё не разработаны и только намечены в [19] (списка литературы части I) для простейших приближений.
- 8) неожиданные перспективы применения временного анализа процессов туннелирования могут обнаружиться при изучении кинетики ряда процессов в квантовой биофизике (биохимии), молекулярной биологии и в генетических структурах клеток и организмов.

Приложение I.

К процедуре расчёта времени туннелирования для волнового пакета (27).

В этом приложении рассматривается процедура расчёта времени туннелирования (30) для волнового пакета (27).

Плотность потока $j(a,t)$, нужного для расчёта $\langle t(a) \rangle$ по формуле (28), содержит волновую функцию

$$\Psi(a,t) = \int_0^{\infty} g(k) \psi_T(k,a) \exp(-iEt/\hbar) dk, \quad (I.1)$$

где $\psi_T(k,a)$ – значение стационарной волновой функции (1) в точке $x = a$. Используя обычное аналитическое выражение для A_T при прямоугольном барьере, перепишем $\psi_T(k,a)$ в виде

$$\psi_T(k,a) = \begin{cases} 2ik\chi / D_<, & E < V_0, \\ 2iikq / D_>, & E > V_0, \end{cases} \quad (I.2)$$

где $q = [2m(E - V_0)]^{1/2} / \hbar$,

$$\begin{aligned} D_{<} &= (k^2 - \chi^2) \sinh(\chi a) + 2ik\chi \cosh(\chi a), \\ D_{>} &= (k^2 + q^2) \sin(qa) + 2ikq \cos(qa). \end{aligned} \quad (I.3)$$

Нормировочный интеграл в (28)

$$N_a = \int_0^{\infty} j(a, t) dt \quad (I.4)$$

можно вычислить, подставляя (I.2)-(I.4), после чего получим :

$$N_a = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} dk g(k) \psi_T(k, a) \int_0^{\infty} dk' k' g(k') \psi_T(k', a) \int_0^{\infty} \exp \left[-i \frac{\hbar}{2m} (k^2 - k'^2) t \right] dt \right\}. \quad (I.5)$$

Если точка x_0 выбрана достаточно далеко слева от барьера, то вклад $j(a, t)$ в интеграл (I.4) от значений $t \leq 0$ будет пренебрежимо малым. В этом случае нижний предел интегрирования по t в (I.5) можно выбрать равным $-\infty$. Тогда интегрирование по времени даст $2\pi(m / \hbar k) \delta(k - k')$ и интеграл (I.5) примет форму

$$N_a = 2\pi \int_0^{\infty} g_0^2(k) |\psi_T(k, a)|^2 dk, \quad (I.6)$$

где

$$|\psi_T(k, a)|^2 = \begin{cases} 4k^2 \chi^2 / (4k^2 \chi^2 + V_0^2 \sinh^2(\chi a)), & E < V_0, \\ 4k^2 q^2 / (4k^2 q^2 + V_0^2 \sin^2(qa)), & E > V_0. \end{cases} \quad (I.7)$$

Оценим теперь интеграл

$$I_a = \int_0^{\infty} t j(a, t) dt. \quad (I.8)$$

Используя (I.5) и (I.6), можем записать

$$I_a = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} dk g(k) \psi_T(k, a) \int_0^{\infty} dk' g(k') \psi_T(k', a) \int_0^{\infty} k' t \exp \left[-i \frac{\hbar}{2m} (k^2 - k'^2) t \right] dt \right\}, \quad (I.9)$$

что в свою очередь может быть переписано как

$$I_a = 2\pi \frac{m}{\hbar} \int_0^{\infty} g_0^2(k) \frac{1}{k} \left\{ \psi_1(k, a) \psi_2'(k, a) - \psi_2(k, a) \psi_1'(k, a) - x_0 |\psi(k, a)|^2 \right\} dk, \quad (I.10)$$

где $\psi_1(k, a) \equiv \operatorname{Re} \psi_T(k, a)$, $\psi_2(k, a) \equiv \operatorname{Im} \psi_T(k, a)$. После дифференцирования (I.10) по k , получаем:

$$\psi_1 \psi_2' - \psi_1' \psi_2 = \begin{cases} -8k^2 \chi \left[k^2 (k^2 - \chi^2) \chi a - V_0^2 \cosh(\chi a) \sinh(\chi a) \right] / \left[4k^2 \chi^2 + V_0^2 \sinh^2(\chi a) \right]^2, & E < V_0, \\ 8k^2 q \left[k^2 (k^2 + q^2) qa - V_0^2 \cos(qa) \sin(qa) \right] / \left[4k^2 q^2 + V_0^2 \sin^2(qa) \right]^2, & E > V_0. \end{cases} \quad (I.11)$$

Из (I.6) и (I.11) следует, что, при надлежащем выборе x_0 , среднее время $\langle t(a) \rangle$ может быть определено простым соотношением

$$\langle t(a) \rangle = \frac{m}{\hbar} \int_0^{\infty} g_0^2 \frac{1}{k} [\psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1' - x_0 |\psi_T|^2] dk / \int_0^{\infty} g_0^2 |\psi_T|^2 dk .$$

Что касается вычисления $\bar{\tau}_0$, волновая функция, входящая в плотность потока $j(0, t)$, имеет вид:

$$\psi(0, t) = \int_0^{\infty} g(k) [1 + A_R(k)] \exp(-iEt / \hbar) dk ,$$

где

$$A_R(k) = \begin{cases} V_0 \sinh(\chi a) / D_<, & E < V_0, \\ V_0 \sin(qa) / D_>, & E > V_0. \end{cases}$$

Для вычисления $\langle t_+(0) \rangle$ по формуле (29) следует брать только положительные значения $j(0, t)$ и интегралы

$$I_+ = \int_{-\infty}^{\infty} t_{j_+}(0, t) dt \text{ и } N_+ = \int_{-\infty}^{\infty} j_+(0, t) dt \text{ в (I.10) можно вычислить только численным путём.}$$

Приложение II.

Интерпретация волнового пакета, составленного из затухающих волн, с помощью метода разложения в интеграл Фурье по виртуальным импульсам и в подходе инстантонов.

Здесь будет рассмотрена интерпретация волнового пакета (41), составленного из затухающих волн, с помощью метода разложения в интеграл Фурье по виртуальным импульсам и в подходе инстантонов.

Разложение в интеграл Фурье. Разложим волновой пакет (36) или просто $\exp(-\chi x)$ в интеграл Фурье по виртуальным импульсам ($-\infty < q < \infty$):

$$\exp(-\chi x) = \int_{-\infty}^{\infty} C_-(\chi, q) \exp(iqx) dq \quad (\text{II.1})$$

with

$$C_-(\chi, q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\chi x} e^{-iqx} dx . \quad (\text{II.1a})$$

Для прямоугольного барьера в $(0, a)$ на рис.7 затухающие волні не проходят вне барьера, так что (II.1a) приобретает вид

$$C_-(\chi, q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a e^{-\chi x} e^{-iqx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-\chi - iq} [e^{(-\chi - iq)a} - 1] \quad (\text{II.1б})$$

Однако, чтобы провести временной анализ (II.1) – (II.1б), следует быть уверенным о применимости оператора времени внутри барьера. Это возможно только для ненулевых потоков. Такое условие достигается простым исключением точки $q = 0$ в интеграле (II.1) с помощью бесконечно малого интервала $(-\eta, \eta)$ ($\eta > 0, \eta \rightarrow 0^+$) введением в (II.1) такой почти ступенчатой функции:

$$g_{\eta}(q) = \begin{cases} (n+1) \left(\frac{|q|}{\eta}\right)^n - n \left(\frac{|q|}{\eta}\right)^{n+1}, & n \geq 2, & 0 \leq |q| \leq \eta, \\ 1, & \eta \leq |q|, \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

при $\eta \rightarrow 0^+$ и целым n . Итак, (II.1) становится

$$\exp(-\chi x) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\eta, -}(\chi, q) \exp(iqx) dq \quad (\text{II.3})$$

с

$$C_{\eta, -}(\chi, q) = g_{\eta}(q) C_{-}(\chi, q). \quad (\text{II.4})$$

Теперь оценим вклад ступенчатой функции $g_{\eta}(q)$ в интеграл (II.3):

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{1}{-\eta - \chi - iq} [e^{(-\chi - iq)a} - 1] g_{\eta}(q) e^{iqx} dq = \\ & = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{2}{(n+2)} [1 + (-1)^n (n+1)] \eta \left(\frac{e^{-\chi a} - 1}{-\chi} \right) \right\} + O(\eta^2), \end{aligned} \quad (\text{II.3a})$$

где $O(\eta^2)$ – член порядка η^2 . И тогда для чётных n , с точностью до членов второго порядка η^2 в интервале $0 \leq |q| \leq \eta$, отношения (II.1) и (II.3a) совпадают.

Разложим волновой пакет (41) в интеграл Фурье по виртуальным импульсам ($-\infty < q < \infty$):

$$\begin{aligned} \Psi_{pen}^1(x, t) &= \int g(E) dE \alpha_0 \exp(-\chi x) \exp(-iEt/\hbar) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\eta}(q) dq \exp(-iqx) \int g(E) dE \alpha_0 \exp(-iEt/\hbar) \frac{\exp(-\chi a - iqa) - 1}{-\chi - iq}, \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

где бесконечно узкая ступенчатая функция $g_{\eta}(q)$ вводится, следуя [54-57], для исключения точки $q = 0$. Вводя переменную $\varepsilon = E - E_q$ (с $E_q = \hbar^2 q^2 / 2m$), перепишем (II.1) в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{pen}^1(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq g_{\eta}(q) e^{(iqx - iE_q t/\hbar)}. \\ &\cdot \int g(E) dE \alpha_0 \exp(-i\epsilon t/\hbar) \frac{\exp(-\chi a - iqa) - 1}{-\chi - iq}. \end{aligned} \quad (\text{II.5a})$$

В (II.1a) бегущие волны $\exp(iqx - iE_q t/\hbar)$ и осциллирующий множитель $\exp(-i\epsilon t/\hbar)$ угасают со временем. И главный вклад в (II.1a) дают бегущие волны, удовлетворяющие условию

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_q \cong E, \quad (\text{II.6})$$

для которых гашения практически нет даже для больших t , а более точно когда

$$\varepsilon t / \hbar \leq 1, \quad (\text{II.6a})$$

а также для q внутри интервала

$$-\chi \leq q \leq \chi. \quad (\text{II.7})$$

Подход инстантонов. Проанализируем распространение волнового пакета (41), используя известный метод преобразования пространственно-временной метрики внутри барьера при помощи перехода к мнимой временной оси $t \rightarrow i\tau$, типичного для подхода

инстантонов (см., напр., [57-60] и соответствующие ссылки там). В таком случае χ становится величиной χ' , которая является мнимой величиной $\chi' = -i\chi$ (где уже $\chi > 0$), и следовательно, приходим к ненулевому потоку вдоль оси τ для (41):

$$\Psi_{pen}^1 = \int dE g(E) \alpha_0 \exp(i\chi x + E\tau/\hbar). \quad (\text{II.8})$$

Вводя Фурье-преобразование к виртуальным энергиям ($-\infty < \tilde{E} < \infty$)

$$\exp(E\tau/\hbar) = \frac{1}{\hbar\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} D(-E, \tilde{E}) \exp(i\tilde{E}\tau/\hbar) d\tilde{E} \quad (\text{II.9})$$

с

$$D(-E, \tilde{E}) = \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp(E\tau/\hbar) \exp(-i\tilde{E}\tau/\hbar) d\tau = \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi}(-E + i\tilde{E})}, \quad (\text{II.10})$$

выражение (II.8) можем переписать в виде

$$\Psi_{pen}^1 = \frac{1}{2\pi} \int dE g(E) \alpha_0 e^{(i\chi x - iE\chi\tau/\hbar)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{E} \frac{e^{i(E\chi + \tilde{E})\tau/\hbar}}{-E + i\tilde{E}}, \quad (\text{II.8a})$$

где $E_\chi = \hbar^2 \chi^2 / 2m$. И таким образом вдоль оси τ внутри барьера функции (II.8a) описывают движение волновых пакетов со скоростями $\pm dE_\chi / d\chi = \hbar |\chi| / m$, сопровождаемые осцилляциями, описываемыми множителем $\exp[i(E_\chi + \tilde{E})\tau/\hbar]$, затухающим при $\tau \rightarrow \infty$.

Кстати, в ряде работ [44,46,57] даже определяют среднее время туннелирования как полуклассическое мнимое время, получаемое как время прохождения через перевернутый потенциальный барьер.

В (II.8a) можно видеть бегущие волны $\exp(i\chi x - iE_\chi\tau/\hbar)$ и осциллирующий множитель $\exp[i(E_\chi + \tilde{E})\tau/\hbar]$, затухающий со временем. А главный вклад в (II.8a) формируется бегущими волнами, удовлетворяющими условию

$$|E_\chi + \tilde{E}| \tau / \hbar \ll 1, \quad (\text{II.11})$$

когда затухание практически отсутствует, а также при нахождении \tilde{E} в области

$$-E \leq \tilde{E} \leq E. \quad (\text{II.12})$$

Как условия (II.11) и (II.12), так и условия (II.6) и (II.7) удовлетворяются при нахождении энергий E и E_χ внутри интервала ΔE (при нахождении k и χ внутри интервала $\Delta k = \sqrt{2mE/\hbar}$), определяемого весовой амплитудой $g(E)$.

Список литературы

1. Merzbacher E., *Physics Today*, **55**:8(2002)44.
2. Hund F. *Z.Phys.* **43**(1927)805.
3. Leontovich M.A., Mandelstam L.I., *Z. Physik.* **47**:N1-2(1928)131.
4. Oppenheimer J.R., *Phys.Rev.*, **31**(1928)66.
5. Norgheim L. *Z.Phys.*, **46**(1928)833.
6. Fowler R.H., Nordheim L. *Proc.Roy.Soc.*, **119**(1928)173.
7. Olkhovsky V.S. and Recami E., *Phys.Rep.*, **219**(1992)339.

8. Olkhovsky V.S., Recami E. and Jakiel J. *Phys.Rep.*, **398**(2004)133.
9. Olkhovsky V.S. and Recami E. *Internat. J. Mod.Phys.*, **A22** (2007)5063; *Internat. J. Mod. Phys.*, **B22** (2008)1877.
10. Olkhovsky V.S. *Advances in Mathem.Phys.*, **2009** (2009), article ID 859710, doi: 10.1155/2009/859710 (83 pages).
11. Ольховский В.С. *УФН*, **181**:8(2011)859.
12. Hartman T.E., *J.Appl.Phys.*, **33** (1962)3427.
13. Blanchard P., Jadczyk A., *Helv.Phys.Acta*, **69** (1996) 613.
14. Baz' A.I., *Sov.J.Nucl.Phys.*, **4** (1967) 182; **5** (1967) 161.
15. Rybachenko V.F., *Sov.J.Nucl.Phys.*, **5**(1967) 484.
16. Hauge E.H. and Storneng J.A., *Rev.Mod.Phys.*, **61** (1989) 917.
17. Büttiker M., *Phys.Rev.*, **B 27** (1983) 6178.
18. Landauer R., Martin Th., *Rev.Mod.Phys.*, **66** (1994) 217.
19. Büttiker M., Landauer R., *Phys.Rev.Lett.*, **49** (1982) 1739; *Phys.Scr.*, **32** (1985) 429.
20. Pimpale A., Holloway S., Smith R., *J.Phys.*, **A 24** (1991) 3533.
21. Sokolovski D., Baskin L.M., *Phys.Rev.A* **36** (1987) 4604.
22. Pollak E., Miller W.H., *Phys.Rev.Lett.*, **53** (1984) 115; Pollak E., *J.Phys.Chem.*, **83** (1985) 1111.
23. Sokolovski D., Connor J.N.L., *Phys.Rev.*, **A 44** (1990) 1500; **A 47** (1993) 4877.
24. Martin Th., *Int.J. Mod.Phys.*, **B 10** (1996) 3747.
25. Muga J.G., Brouard S., Sala R., *Phys.Lett.*, **A 167** (1992) 24; Brouard S., Sala R., Muga J.G., *Phys.Rev.*, **A 49** (1994) 4312; Egusquiza I.L., Muga J.G., *Phys.Rev.*, **A 61** (2000) 012104.
26. Leavens C.L., *Solid State Commun.*, **85**(1993)115.
27. Olkhovsky V.S., Recami E. and A.K.Zaichenko, *Solid State Commun.*, **89**(1994)31.
28. Leavens C.L., *Solid State Commun.*, **89**(1994)37.
29. Delgado V., Brouard S. and Muga J.G., *Solid State Commun.*, **94**(1995)979; [см. также: Brouard S., Sala S. and Muga J.G., *Phys.Rev.*, **A49** (1994)4312].
30. Leavens C.L., *Phys.Lett.*, **A197**(1995)88.
31. Olkhovsky V.S., E.Recamì, F.Raciti and A.K.Zaichenko, *J. de Phys. (France)* **I 5** (1995) 1351.
32. Abolhasani M. and Golshani M., *Phys.Rev.*, **A62**(2000) 012106(pp.1-7).
33. Jakiel J., Olkhovsky V.S., Recami E., in *Proc.of Mysteries, Puzzles, and Paradoxes in Quantum Mechanics*, August-September 1998 (AIP Conf.Proc.461), pp.299-302.
34. Olkhovsky V.S. and Agresti A., in *Proc. of the Adriatico Research. Conf. on Tunnelling and its Implications*, Trieste, Italy, 30 July-02 August 1996 (World Sci.; Singapore, 1997), pp.327-355.
35. Racity F., and Salesi G., *J.Phys.I (France)*, **4** (1994)1783.
36. Nimtz G., Spieker H., and Brodowsky M., *J.Phys.I (France)*, **4** (1994)1379.
37. Büttiker M. and Landauer R., *IBM J.Res.Dev.*, **30**(1986)451.
38. Olkhovsky V.S., Petrillo V., Zaichenko A.K., *Phys.Rev.*, **A70** (2004)034103.
39. Olkhovsky V.S., Recami E., Salesi G., *Europhys. Lett.*, **57**(2002)879.
40. Esposito S., *Phys. Rev.*, **E 67**(2003)016609.
41. Hauge E.H., Falck J.P. and Fjeldly T.A., *Phys. Rev.* **B36** (1987)4203.
42. Olkhovsky V.S., Recami E., Zaichenko A.K., *Europhys. Lett.*, **70**(2005)712.
43. De Leo S. and Rotelli P., *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**(2011)435305 (15pp).
44. Cardone F., Mignani R., Olkhovsky V.S., *Phys.Lett.*, **A289**(2001)279-286.
45. Cardone F., Mignani R., Olkhovsky V.S., *Mod.Phys.Lett.*, **14**(2000)109.
46. Cardone F., Mignani R., Olkhovsky V.S., *J.Phys.I (Paris)*, **7**(1997)1211.
47. Cardone F., Maidanyuk S.P., Mignani R., Olkhovsky V.S., *Found.Phys.Lett.*, **19**:5(2006)441.
48. Leggett A.J., *Progr.Theor.Phys.Suppl.*, **69** (1980)80.
49. Mugnai D. and Ranfagni A., *Europhys.Lett.*, **6** (1988)1.
50. Schulman L.S., in *The Wave-Particle Dualism*, Diner S. et al, eds. (Reidel, Dordrecht, 1984).
51. Ranfagni A., Rugeri R., Susini C., Agresti A., Sandri P., *Phys.Rev.*, **E63**(2001)025102 (R).

52. R.Y.Chiao, P.G.Kwiat and A.M.Steinberg, *Physica B*,**175**(1991)257.
53. A.Ranfagni,D.Mugnai,P.Fabeni,and G.P.Pazzi, *Appl.Phys.Lett.*,**58**(1991)774.
54. Th.Martin and R.Landauer, *Phys.Rev.A*,**45** (1992)2611.
55. Olkhovsky V.S., *Atti dell'Accademia di Pericolanti, classe di scienze fis. mat. e natur.*,
Universita' di Messina, **76-77**(1998-1999)193; V.S.Olkhovsky, *Phys. of the Alive* (in
Russian), **5**(1997)19; **6**(1998)17.
- 56.Nimtz G., in: Proc. of the *Adriatico Research. Conf. on Tunnelling and its Implications*,
Trieste, Italy, 30 July-02 August 1996 (World Sci.; Singapore, 1997), pp.223-237.
57. Haibel A., Nimtz G., *Ann.Phys.(Leipzig)*, **10** (2001)702.
58. Steinberg A.M., Kwiat P.G., Chiao R.Y., *Phys.Rev.Lett.*, **71**(1993)708.
59. Chiao R.Y., Kwiat P.G., Steinberg A.M., *Scient. Am.*,**269**:2(1993)38.
60. Spielman Ch., Szipoecs R.,Stingl A.,Krausz F., *Phys.Rev.Lett.*, **73**(1994)2308.
61. Balcou Ph.,Dutriaux L., *Phys.Rev.Lett.*, **78**(1997)851.
62. Laude V.,Tournois P., *J.Opt.Soc.Am.*, **B16** (1999)194.
63. Haibel A.,Nimtz G.,Stahlhofen A.A., *Phys.Rev.*, **E63** (2001) 047601.
64. Bose J.Ch., *Bose Institute Transactions*, 42(1927).
65. Nimtz G.,Enders A.,Spieker H., *J.Phys.I (Paris)*, **4**(1994)565.
66. Longhi S.,Laporta P.,Delmonte M.,Recami E.,*Phys.Rev.*, **E65** (2002)046610.
67. Deutch J.M.,Low F.E., *Ann.Phys.(NY)*,**228** (1993)184.
68. Nimtz G., Enders ., Spieker H., in: van der Merwe A., Garuccio A., *Wave and Particle in
Light and Matter*, Plenum, New York, 1993.
69. Nimtz G., *IEEE J.Select.Top.Quantum Electron.*, **9**:1(1993)163-171.
70. Steinberg A.,*J.Phys.I(France)*, **4** (1994)1813.
71. Nimtz G., *J.Phys.I(France)*, **4** (1994)1817.
72. Azbel' M.Ya.,*Solid State Communic.*,**91** (1994)439.
73. Khalfine L.,*Uspekhi Phis.Nauk*,**166**:6 (1996)688.
74. Ranfagni A.and Mugnai D., in: Proc. of the *Adriatico Research. Conf. on Tunnelling and its
Implications*, Trieste, Italy, 30 July-02 August 1996 (World Sci.; Singapore, 1997), pp.18-33.
75. Iannacone G., in: Proc. of the *Adriatico Research. Conf. on Tunnelling and its Implications*,
Trieste, Italy, 30 July-02 August 1996 (World Sci.; Singapore, 1997), pp.292-309.
76. Segev B., in: Proc. of the *Adriatico Research. Conf. on Tunnelling and its Implications*,
Trieste, Italy, 30 July-02 August 1996 (World Sci.; Singapore, 1997), pp.371-387.
77. Chiao R.Y., Steinberg A.,in: Wolf E. (ed.), *Progress in Optics*, vol.**37**,Elsevier Science,
Amsterdam, 1997, pp.346-405.
78. Nimtz G., Heitman W., *Progr. Quant.Electr.*,**21**:2 (1997) 81-108.
79. Chiao R.Y., in: Bonifaccio (ed.), *Mysteries, Puzzles and Paradoxes in Quantum Mechanics*,
AIP, Woodbury, NY, 1999, pp.3-13.
80. Nimtz G., in: Bonifaccio (ed.), *Mysteries, Puzzles and Paradoxes in Quantum Mechanics*,
AIP, Woodbury, NY, 1999, pp.14-31.
81. Recami E., in: Bonifaccio (ed.), *Mysteries, Puzzles and Paradoxes in Quantum Mechanics*,
AIP, Woodbury, NY, 1999, pp.22-35.
82. Steinberg A. et al, in: Bonifaccio (ed.), *Mysteries, Puzzles and Paradoxes in Quantum
Mechanics*, AIP, Woodbury, NY, 1999, pp.36-46.
83. Recami E., in: Mugnai D.,Ranfagni A.,Schulman L.S. (eds.), *Time's Arrows, Quantum
Measurement and Superluminal Behavior*, Napoli, Italy, October 3-5, 2000 (Consiglio
Nazionale delle Ricerche, Roma), pp.17-36.
84. Nimtz G., Haibel A.,and Vetter R.-M., in: Mugnai D.,Ranfagni A.,Schulman L.S. (eds.),
Time's Arrows, Quantum Measurement and Superluminal Behavior, Napoli, Italy, October 3-
5, 2000 (Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma), pp.125-138.
85. Olkhovsky V.S., in: Mugnai D.,Ranfagni A.,Schulman L.S. (eds.), *Time's Arrows, Quantum
Measurement and Superluminal Behavior*, Napoli, Italy, October 3-5, 2000 (Consiglio
Nazionale delle Ricerche, Roma), pp.173-178.

96. Nimtz G., Haibel A.,Stahlhofen A.A.,and Vetter R.-M., in: Horzela A.and Kapuscik E.(eds.), workshop on *Extensions of Quantum Physics* held in Kraków,Poland, October 12-15, 2000 (C.Roy Keys Inc. 2002), pp.1-10.
97. Hegerfeldt G.C., in: Horzela A. and Kapuscik E.(eds.) , workshop on *Extensions of Quantum Physics* held in Kraków, Poland, October 12-15, 2000 (C.Roy Keys Inc. 2002), pp.11-18.
98. Olkhovsky V.S., Recami E., Salesi G., in: Horzela A. and Kapuscik E.(eds.), workshop on *Extensions of Quantum Physics* held in Kraków,Poland, October 12-15, 2000 (C.Roy Keys I Inc. 2002), pp.63-76.
99. Nimtz G., *Progress in Quantum Electronics*, **27** (2003)417–450.
100. Winful H.G., *Phys.Rep.*, **436** (2006)1.
101. Shvartsburg A.B., Marklund M., Brodin G. and Stenflo L., *Physica.*, **E78** (2008) 016601-1-016601-6.
102. Recami E., *J. Phys.: Conference Series*, **196**:1 (2009) pp. 012020.
103. Nimtz G.,*Found.Phys.*,**39**:12 (2009)1346-1355.
104. Cialdi S., Boscolo I., Castelli F., Petrillo V., *New J. Phys.*, **11** (2009) 023036, doi:10.1088/1367-2630/11/2/023036.
105. Perel'man M.E., *Phys.Lett.*,**A373**:6 (2009)648-652.
106. Shvartsburg A.B., Petite G., and Zuev M., *J. Opt. Soc. Am.*, **B28** (2011)2271-2276
107. Sokolovski D., Akhmatskaya, *Phys.Rev.*,**A84** (2011)02104 (pp.1-6).
108. Garrett C.G.B. and McCumber D.E., *Phys.Rev.*, **A1**(1970)305.
109. Crisp M.D., *Phys.Rev.*, **A4**(1971)2104.
110. Chu S. and Wong S., *Phys.Rev.Lett.*,**48**(1982)738.
111. Aharonov A., Erez N.,Reznik M.,*Phys.Rev.* **A65**(2002) 052124.
112. Fermor J.H.,*Am.J.Phys.*,**34**(1966)1168.
113. McVoy K.W.,Heller L.,and Bolsterli M.,*Rev.Mod.Phys.*,**39**(1967)245.
114. Anderson A., *Am.J.Phys.*,**57**(1989)230.
115. Maidanyuk S.P.,Olkhovsky V.S., and Zaichenko A.K.,*J.Phys.Studies (Ukraine)*,**6**(2002)24.
- 116.Olkhovsky V.S., Romaniuk M.V., *J.Mod.Phys*, **2**:10(2011)1166-1171. doi:110.4236/jmp.2011.210145.
117. A.M.Steinberg and R.Y.Chiao, *Phys.Rev.*, **A 49**, 3283 (1994).
118. C.K.Carniglia and L.Mandel, *J. Optical Soc.of America*, **61**, 1035 (1971).
119. S.Zhu, A.W.Yu, D.Hawley and R.Roy, *Am.J. Phys.*, **54**, 601 (1986).
120. Gamow G., *Zs. für Phys.*,**51**(1928)204.
121. Condon E. and Gurney J.G., *Nature*, **122**(1928)439-445.
122. Buck B., Merchant A.C., Perez S.M., *Phys. Rev. Lett.*,**165**(1990)2975-2977.
123. Sobiczewski A., *Phys. Part. Nucl.*,**25**(1994) 295-336.
124. Ольховский В.С.,Романюк М.В.,*Ядерна фізика та енергетика(Україна)*,**10**:3(2009)273-281.
125. Winslow G.H., *Phys.Rev.*,**6**(1954) 1032-1044.
126. Preston M.A., *Physics of the Nucleus* (Addison-Wesley Publish.Company), 1962; Престон М., *Физика ядра*, Москва, Мир, 1964.
127. Кадменский С.Г.,Фурман В.И., *Альфа-распад и родственные ядерные реакции* (М., Энергоатомиздат),1985.
128. Давидовский В.В., Зайченко А.К., Ольховский В.С., *Збірник наук. праць Інституту яд. досліджень*, **№ 1 (14)** (2005),стр.28-37.
129. Ландау Л.Д. и Смородинский Я.А., *Лекции по теории атомного ядра*, М.:Гостехиздат,1955.
130. Bonetti R. , Brogginì C., Campajola L. et al, *Phys.Rev.Lett.*,**82**(1999)5205-5208.
131. Spitaleri C. , Aliotto M. , Lattuada M. et al., *Phys.Rev.*,**C63**(2001)55801-55808.
132. Junghans A.R., Mohrmann E.C., Snoyer K.A. et al, *Phys.Rev.Lett.*,**88**(2002) 041101-041105.
133. Imbriani G., Constantini H., Formicola A.. et al, *Eur.Phys.J.*,**A25**(2005)455-466.
134. Lemut A., Bemmerer D., Bonetti R. et al, *Phys.Lett.*,**B634**(2006)483-487.

135. Dombey N. and Calogeracos A., *Physics Reports*, **315**:1–3 (1999)41–58.
136. del Barco O. and Gasparian V., *J.Phys.A:Math. Theor.* **44** (2011) 015303 (12pp),
doi:10.1088/1751-8113/44/1/01530
137. Chew H., Wang D-S., Kerker M., *Appl.Opt.*, **18** 2679 (1979).
138. Chandiramani K.L., *Acoust.Soc.Am.* **55** 19 (1974).

Часть III.

1. Введение.

Прямые измерения длительностей ядерных известны в ядерной физике. Прежде всего, простейшие эксперименты, которые установили экспоненциальную форму закона распада, и измерения времён жизни радиоактивных и возбуждённых ядер, которые живут достаточно долго (от 10^{-9} сек до 10^{14} лет, а в некоторых случаях до 10^{18} - 10^{20} лет и более) уже давно известны с самого рождения ядерной физики. Возбуждённые состояния ядер с энергиями ниже порога испускания нуклонов распадаются через электромагнитные переходы с характерными временами 10^{-15} - 10^{-9} сек. Для временных измерений в этой области были развиты различные экспериментальные методы на основе кулоновского возбуждения, эффекта Доплера, задержанных совпадений, резонансного γ -рассеяния и др. (см., например, [1] и более поздние материалы по временам жизни возбуждённых ядер). Что касается времён жизни ядер в возбуждённых состояниях с энергиями, превышающими энергии диссоциации (т.е. составных ядер), то их характерные времена заполняют интервал от примерно 10^{-22} сек до, по крайней мере, 10^{-15} сек. Экспериментальные методы измерений таких длительностей, такие, как метод изучения эриксоновских флуктуаций сечений, метод использования эффекта теней (блокировки), метод и использования эффекта интерференции тормозного излучения, метод окрестностного рассеяния и др., начали развиваться примерно от 60-х гг. 20-го ст. (см., в частности, [1] и [2-5], а также последнее приложение настоящей части (V), в котором был развит и применён метод определения длительностей рассеяния медленных нейтронов ядрами на основе экспериментальных данных по сечениям с учётом оптической теоремы и знака длины рассеяния или условия причинности), но и в настоящее время они довольно ограничены и не слишком точные. Однако теоретическое изучение кинетики ядерных реакций неизбежно включает в себя анализ их длительностей и эволюции. И с 80-х гг. прошлого ст. известна серия ядерных процессов, промежуточных между прямыми процессами (которые характеризуются временами порядка времени свободного пролёта бомбардирующих частиц через область ядра с диаметром порядка 10^{-13} - 10^{-12} см) и процессами, идущими через стадию образования составного ядра. Это предкомпаудные процессы и многоступенчатые процессы образования составного ядра (см., например, [6-8]). В последующих разделах 2-9 на основе временного анализа ядерных реакций, разработанного на основе применений времени как квантовой наблюдаемой, канонически сопряжённой энергии (изложенных главным образом в [1] и самих разделах 2-9 с соответствующими ссылками в них), мы проанализируем некоторые общие выражения для ядерных (и атомных) столкновений, затем проанализируем различные члены в длительностях одноканального рассеяния, некоторые нетривиальные особенности в интерференционных явлениях между искажёнными одним-двумя резонансами и нерезонансным фоном, несколько интересных правил сумм в области неразрешённых сильно перекрывающихся резонансов и, наконец, новое явление временных резонансов (взрывов) в высокоэнергетических ядерных реакциях. В разделе 10 будут изложены выводы и некоторые перспективы.

2. Общие выражения для длительностей столкновений (ядерных реакций).

Ограничиваясь двухчастичными каналами $i \rightarrow f$ и пренебрегая простоты ради спинами частиц, окружая область квантового столкновения $i \rightarrow f$, в системе центра масс (C- системе), сферой радиуса R при $R \geq a_{if}$ (a_{if} - радиус короткодействующего ядерного взаимодействия или экранированного кулоновского взаимодействия, которое практически полностью исчезает вне a_{if}), можно так определить длительность трёхмерного столкновения $i \rightarrow f$, используя соответствующие результаты из [1]:

$$\langle \tau_{fi} \rangle = \langle t_f \rangle_f - \langle t_i \rangle_i \equiv \int_{-\infty}^{\infty} t_{f,r_f}(\vec{r}_f, t) dt / \int_{-\infty}^{\infty} j_{f,r_f}(\vec{r}_f, t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} t_{i,z_i}(z_i, t) dt / \int_{-\infty}^{\infty} j_{i,z_i}(z_i, t) dt \equiv$$

$$\equiv \langle |T_{fi}(E, \Omega_f)|^2 [\hbar \partial \arg G_f T_{fi} / \partial \varepsilon_f + z_f / v_f] \rangle - \langle [\hbar \partial \arg G_i / \partial \varepsilon_i + z_i / v_i] \rangle, \quad (1)$$

где $j_\nu(z_\nu, t) = \text{Re} (\psi_\nu (-i\hbar/2\mu_\nu \partial/\partial z_\nu) \psi_\nu)_\nu$ - z_ν -я компонента плотности потока вероятности; $\nu = i, f$; скобки $(\dots)_\nu$ обозначают интегрирование по всем координатам, входящим в волновые функции φ_ν кроме z_ν ; z_ν -ось, направленная вдоль средней скорости $\langle \vec{v} \rangle_\nu$ относительного движения пары частиц с приведенной массой μ_ν , радиусом-вектором относительного движения, и их волновой функцией внутреннего движения $|\nu\rangle$ с энергией e_ν : $\vec{v}_\nu = \hbar \vec{k}_\nu / \mu_\nu$, $\varepsilon_\nu = \hbar^2 k_\nu^2 / 2\mu_\nu \equiv E - e_\nu$; скобки $\langle \dots \rangle_\nu$ обозначают усреднение вида

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\nu &= \int |G_\nu|^2 A dE d\omega_\nu / \int |G_\nu|^2 dE d\omega_\nu, \quad \nu = i, f; \\ \psi_i &= |i\rangle (2\pi)^{-3/2} \int G_i(E, \omega_i) \exp(i \vec{k}_i \vec{r}_i - iEt/\hbar) dE d\omega_i; \\ \psi_f &= |f\rangle (2\pi)^{-3/2} \int G_f(E, \omega_f) T_{fi}(E, \Omega_f) \exp(i \vec{k}_f \vec{r}_f - iEt/\hbar) dE d\omega_f; \end{aligned}$$

$G_f = A_f(\varepsilon_f, \omega_f) G_i(E, \omega_i)$, где $G_i(E, \omega_i)$ - весовая функция начального волнового пакета сталкивающихся частиц; функция $A_f(\varepsilon_f, \omega_f)$, которая без потери общности может быть выбранной вещественной, описывает разрешающие свойства детекторов конечных частиц; ω_ν - угловые переменные, описывающие разбросы направлений скоростей v_ν вокруг средних значений $\langle \vec{v}_\nu \rangle$; $T_{fi}(E, \Omega_f)$ - элемент T -матрицы, E - полная энергия системы, Ω_f - набор угловых координат, описывающих направления эмиссии продуктов реакции $i \rightarrow f$ (в системе центра масс), и $z_f \geq R$, $z_i \leq -R$. Для центральных взаимодействий и бесспиновых частиц $T_{fi}(E, \Omega_f)$ сводится к выражению

$$\begin{aligned} T_{fi}(E, \theta_f) &= -(\hbar^2/4\pi\mu_f) F(E, \theta_f) = \sum_J T_{fi}^{(J)}(E) \sqrt{4\pi(2J+1)} Y_{J0}(\theta_f) \equiv \\ &\equiv -\hbar^2 (8\pi i \mu_f)^{-1} (k_f k_i)^{-1/2} \sum_J [S_{fi}^{(J)} - 1] \sqrt{4\pi(2J+1)} Y_{J0}(\theta_f), \quad (2) \end{aligned}$$

$F(E, \theta_f)$ - амплитуда реакции; $\theta_f = \arccos \vec{k}_f \vec{k}_i / k_f k_i$ - набор угловых координат, описывающих направления эмиссии продуктов реакции $i \rightarrow f$ (в системе центра масс). Предположим, что разброс энергий ΔE в волновых пакетах сталкивающихся и конечных частиц удовлетворяет условию $\Delta E = \Delta \varepsilon_\nu \ll \varepsilon_\nu$, а угловые разбросы $\Delta \omega_i$ and $\Delta \omega_f$ настолько малы, что переменными ω_i and ω_f в функциях G_i и G_f , а также интегрированиями по $d\omega_i$ and $d\omega_f$ можно пренебречь. Тогда индекс ν in $\langle \dots \rangle_\nu$ можно также опустить. Когда далее искажение формы сталкивающихся волновых пакетов можно проигнорировать и таким образом

$$|\langle \partial \arg G_i / \partial \varepsilon_i \rangle| \ll |\langle \partial \arg T_{fi} / \partial \varepsilon_f \rangle|,$$

$$|\langle |T_{fi}(E, \theta_f)|^2 \partial \arg G_i / \partial \varepsilon_i \rangle - \langle \partial \arg G_i / \partial \varepsilon_i \rangle| \ll |\langle \partial \arg G_i / \partial \varepsilon_i \rangle|,$$

то

$$\langle \tau_{fi} \rangle = z_f / v_f + |z_i| / v_i + \langle \Delta \tau_{fi}(E, \theta_f) \rangle, \quad (1a)$$

где

$$\langle \Delta \tau_{fi}(E, \theta_f) \rangle = \hbar \langle |T_{fi}(E, \theta_f)|^2 \partial \arg T_{fi} / \partial \varepsilon_i \rangle / \langle |T_{fi}(E, \theta_f)|^2 \rangle \quad (3)$$

- среднее парциальное время задержки. При обычных упрощениях центральных взаимодействий и бесспиновых частиц можно пользоваться парциальными временами задержки $\langle \Delta \tau_{fi}^{(J)}(E) \rangle$, определёнными как

$$\langle \Delta \tau_{fi}^{(J)}(E) \rangle = \hbar \langle |T_{fi}^{(J)}(E)|^2 \partial \arg T_{fi}^{(J)}(E) / \partial \varepsilon_i \rangle / \langle |T_{fi}^{(J)}(E)|^2 \rangle. \quad (4)$$

Величина

$$\langle \Delta \tau_{ji}^{\text{int}}(E) \rangle = \hbar \frac{\int |G_i T_{ji}(E, \vartheta_j)|^2 (\partial \arg T_{ji}(E, \vartheta_j) / \partial \varepsilon_j) dE d\Omega_j}{\int |G_i T_{ji}(E, \vartheta_j)|^2 dE d\Omega_j} = \hbar \frac{\sum_J \langle \sigma_{ji}^J(E) d \arg T_{ji}^{(J)} / dE \rangle}{\sum_J \langle \sigma_{ji}^J(E) \rangle} \quad (4a)$$

Наконец, определяя дисперсию распределений длительностей как

$$D \tau_{fi} = \langle (t_f - \langle t_i \rangle)^2 \rangle - (\langle t_f \rangle - \langle t_i \rangle)^2 = \langle t_f^2 \rangle - \langle t_f \rangle^2 \quad (5)$$

и применяя технику оператора времени (1b) из части I, получим выражение

$$\langle t_f^2 \rangle = \langle [(\hbar \partial \arg G_f T_{fi} / \partial \varepsilon_f + z_f / v_f)^2 + \hbar^2 (\partial |G_f T_{fi}| / \partial E)^2] \rangle / \langle |T_{fi}|^2 \rangle.$$

Для достаточно больших длительностей столкновений, когда $|\partial \arg G_f / \partial \varepsilon_f| \ll |\partial \arg T_{fi} / \partial \varepsilon_f|$, $z_f / v_f \ll \hbar \partial \arg T_{fi} / \partial \varepsilon_f$ и $|\partial |G_f| / \partial \varepsilon_f| \ll |\partial \arg T_{fi} / \partial \varepsilon_f|$, дисперсия распределения длительностей принимает вид

$$D \tau_{fi} \approx \hbar^2 \{ \langle [|T_{fi}|^2 (\partial \arg T_{fi} / \partial \varepsilon_f)^2 + (\partial |T_{fi}| / \partial E)^2] / \langle |T_{fi}|^2 \rangle - [\langle |T_{fi}|^2 \partial \arg T_{fi} / \partial \varepsilon_f \rangle / \langle |T_{fi}|^2 \rangle]^2 \}. \quad (6)$$

3. Длительность одноканального рассеяния.

В наиболее простом случае центральных взаимодействий и бесспиновых частиц одного J -парциального рассеяния можно вывести из (2) такое выражение для одномерной и одноканальной T -матрицы

$$\begin{aligned} T_{ii}(E, \theta_i) &= \sum_J T_{ii}^{(J)}(E) \sqrt{4\pi(2J+1)} Y_{J0}(\theta_i) \equiv \\ &\equiv -\hbar^2 [8\pi i \mu_i k_i]^{-1/2} \sum_J [S_{ii}^{(J)} - 1] \sqrt{4\pi(2J+1)} Y_{J0}(\theta_i), \end{aligned} \quad (7)$$

и отсюда можно получить хорошо известное для так называемой *фазовой*¹⁾ парциальной временной задержки для одноканального рассеяния в квазимонохроматическом приближении ($|G_f(\varepsilon, a_f)|^2 \rightarrow \delta(\varepsilon - E)$)

$$\Delta \tau_{ii}^{(J)}(E) = \hbar d \delta_J(E) / dE, \quad (8)$$

где δ_J - вещественный фазовый сдвиг, определяемый соотношением $S_{ii}^{(J)}(E) \equiv S_J(k) = \exp(2i\delta_J)$ (где $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$). Для широкого класса взаимодействий, которые либо полностью исчезают, либо убывают достаточно быстро вне конечной области $r < R$, $S_J(k)$ может быть представлена в следующей общей форме [9]

$$S_J(k) = e^{-2i\alpha k} \prod_{\lambda} \frac{1+k/k_{\lambda J}}{1-k/k_{\lambda J}} \prod_{\mu} \frac{1+k/k_{\mu J}}{1-k/k_{\mu J}} \prod_{\nu} \frac{(1+k/k_{\nu J})(1+k/k_{\nu J})}{(1-k/k_{\nu J})(1-k/k_{\nu J})}, \quad (9)$$

где $\alpha \leq R$; $k_{\lambda J} = i\chi_{\lambda J}$ ($\chi_{\lambda J} > 0$); $k_{\mu J} = i\chi_{\mu J}$ ($\chi_{\mu J} < 0$); $k_{\nu J} = i\chi_{\nu J}$ ($\text{Re}\chi_{\nu J} > 0$, $\text{Im}\chi_{\nu J} < 0$) – полюса, отвечающие связанным, виртуальным а и резонансным состояниям, соответственно, или в случае достаточной удалённости от точки $E=0$, в следующей упрощённой форме:

$$S_J(k) \approx \tilde{S}_J(k) \prod_{\nu} \frac{E - E_{\nu}^{(J)} - i\Gamma_{\nu}^{(J)} / 2}{E - E_{\nu}^{(J)} + i\Gamma_{\nu}^{(J)} / 2}, \quad (10)$$

¹⁾ т.у. определённым методом стационарной фазы для групповой скорости волнового пакета в квазимонохроматическом приближении.

где $\tilde{S}_J(k) = \exp(2i\delta_J)$ - “фоновая” (нерезонансная) S -матрица; $E_v^{(J)} = \hbar^2 |k_{vJ}|^2 / 2\mu$; $\Gamma_v^{(J)} = 2k \text{Im} k_{vJ} / \hbar^2 / 2\mu$ (for $J=0$). Используя представление (9), можно переписать выражение (8) в такой форме:

$$\Delta \tau_{ii}^{(J)}(E) = \left[-\alpha - \sum_{\lambda} \frac{\chi_{\lambda J}}{k^2 + \chi_{\lambda J}^2} - \sum_{\lambda} \frac{\chi_{\lambda J}}{k^2 + \chi_{\lambda J}^2} - \sum_v \frac{2 \text{Im} k_{vJ} (k^2 + |k_{vJ}|^2)}{(k^2 - |k_{vJ}|^2)^2 + 4k^2 (\text{Im} k_{vJ})^2} \right] / v, \quad (11)$$

$v = \hbar k / \mu$. Исходя из (11), учитывая результаты [9], можно видеть, что для значений r , превосходящих некоторое минимальное значение $\tilde{R} \geq R/2 + \chi_{\lambda_0 J} / 4$, где $\chi_{\lambda_0 J}$ отвечает связанному состоянию системы, состоящей из рассеивателя и бомбардирующей частицы с энергией связи минимального абсолютного значения, а условие причинности выполняется в форме:

$$\Delta \tau_{ii}^{(J)}(E) + 2r/v \geq 0. \quad (12)$$

Далее, из (11) для только одного связанного или одного виртуального состояния прямо следует, что в пределе $E \rightarrow 0$

$$\Delta \tau_{ii}^{(J)}(E) \xrightarrow{E \rightarrow 0} -a / v [1 + k^2 a^2], \quad (13)$$

где a , длина рассеяния, равна $(\chi_{\lambda J})^{-1} > 0$ или $(\chi_{\lambda J})^{-1} < 0$.

В области одного изолированного резонанса среднее время задержки $\langle \Delta \tau_{ii}^{(J)}(E) \rangle$ определяется выражением

$$\langle \Delta \tau_{ii}^{(J)}(E) \rangle = \begin{cases} \hbar / \Gamma, & \text{for } \Gamma \ll \Delta E, \\ \hbar \Gamma / 2 [(E - E_r)^2 + \Gamma^2 / 4], & \text{for } \Delta E \ll \Gamma. \end{cases} \quad (14)$$

Одновременно расчёт в соответствии с равенством (8) показывает, что при $\Gamma \ll \Delta E$ дисперсия

$$D \tau_{ii}^{(J)} \approx (\Delta \tau_{ii}^{(J)})^2 = (\hbar / \Gamma)^2. \quad (15)$$

Оба соотношения (14) и (15) при $\Gamma \ll \Delta E$ типичны для экспоненциального закона распада.

Если интервал ΔE содержит набор резонансов с

$$\Delta E \gg \Gamma_J \gg D_J, \quad (16)$$

где Γ_J и D_J - средняя ширина и среднее расстояние между J - резонансами, тогда расчёт $\Delta \tau_{ii}^{(J)}(E)$ на основе (4) с использованием (10) даёт

$$\langle \Delta \tau_{ii}^{(J)}(E) \rangle = \hbar \sum_v \frac{\Gamma_v^{(J)} / 2}{(E - E_v^{(J)})^2 + (\Gamma_v^{(J)} / 2)^2} \approx \pi \hbar \rho_J, \quad (17)$$

где $\rho_J = D_J^{-1}$. Таким образом, среднее время задержки в области (14) определяется плотностью резонансов, а не их шириной. Заметим, что выражение (15) получено в приближении континуума: $(\sum_v \rightarrow \int dE_v^{(J)} \rho_J)$. Когда интервал ΔE содержит семейство хорошо

разделённых резонансов, т.е. $\Delta E \gg D_J \gg \Gamma_J$, то нетрудно видеть, что если ширины всех уровней практически равны между собой ($\Gamma_v^{(J)} = \Gamma_J$), то

$$\langle \Delta \tau_{ii}^{(J)}(E) \rangle \cong \hbar / \Gamma_J, \quad (18)$$

как в случае изолированного резонанса той же ширины. В случае очень сильного перекрытия резонансов, когда

$$D_J \ll \Delta E < \Gamma_J, \quad (19)$$

$$\langle \Delta \tau_{ii}^{(j)}(E) \rangle \sim \hbar \int_{E_{\min}}^{\infty} dE' \rho(E') \frac{\Gamma_J(E')/2}{(E - E')^2 + [\Gamma_J(E')/2]^2}, \quad (20)$$

где нижний предел должен удовлетворять очевидным условиям $E_{\min} < E - \Gamma_J$ и $\rho_J(E_{\min}) < (\rho_J)_{\min}$. Очевидно, что при эквидистантном распределении резонансов ($\rho_J(E) = \text{const}$) и не зависящих от энергии ширин ($\Gamma_J = \text{const}$) для всех возможных значений энергии $\langle \Delta \tau_{ii}^{(j)}(E) \rangle \sim \pi \hbar \rho_J$, мы снова получим равенство (17).

Длительность рассеяния в пороговой области будет рассмотрена в Приложении IV.

4. Изолированный резонанс в сечении и экспоненциальный распад соответствующего метастабильного состояния составного ядра.

Попытаемся вначале объяснить, как типичный лоренцевский (Брейт-Вигнеровский) резонанс в сечении квантового столкновения или ядерной реакции $\alpha \rightarrow \beta$, связан с экспоненциальным законом распада функции соответствующего радиоактивного или составного ядра (в определённом смысле обобщая подобные выкладки из [10] и следуя [11]). Амплитуда реакции $f_{\alpha\beta}(E)$ представляется как

$$f_{\alpha\beta}(E) = \frac{C_{\alpha\beta}}{E - E_r + i\Gamma/2}, \quad (21)$$

где $C_{\alpha\beta}$ - константа или плавная функция кинетической энергии E конечной частицы в области $(E_r - \Gamma/2, E_r + \Gamma/2)$, E_r и Γ - энергия и ширина резонанса, соответственно.

Волновой пакет конечной частицы в одномерном радиальном асимптотическом пределе описывается как

$$\Psi_{\beta}(r_{\beta}, t) = r_{\beta}^{-1} \int_0^{\infty} dE g(E) f_{\alpha\beta}(E) \exp[ikr_{\beta} - iEt/\hbar] \quad (22)$$

где $g(E)$ - плавная весовая амплитуда с энергетическим разбросом ΔE (обычно $\Delta E \ll E_r$), m_{β} и r_{β} - масса и радиальная координата конечной частицы соответственно, $k = \sqrt{2m_{\beta}E}/\hbar$. Для короткодействующих взаимодействий (включая также экранированные кулоновские потенциалы), он может быть переписан как

$$\Psi_{\beta}(z_{\beta}, t) = \int_0^{\infty} dE g(E) T_{\alpha\beta}(E) \exp[ikz_{\beta} - iEt/\hbar], \quad (23)$$

при $T_{\alpha\beta}(E) = N_{\beta}(E) f_{\alpha\beta}(E)$, $T_{\alpha\beta}(E)$ - элементы T -матрицы, связанные с S -матрицей известным соотношением $T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}(E)$ - несущественная плавная функция E , z_{β} - ось вдоль направления эмиссии конечной частицы, обусловленная геометрией регистрации, $z_{\beta} \geq R_{\beta}$, R_{β} - радиус взаимодействия в конечном канале. В простейшем случае можно фиксировать $z_{\beta} = R_{\beta}$ в

$$\Psi_{\beta}(z_{\beta}, t) = \int_0^{\infty} dE g(E) \tilde{T}_{\alpha\beta}(E) \exp[-iEt/\hbar], \quad (24)$$

где $\tilde{T}_{\alpha\beta}(E) = T_{\alpha\beta} \exp(ikR_\beta)$ – плавная функция E : в соответствии с аналитической теорией S -матрицы, $T_{\alpha\beta}(E)$ содержит фактор $\exp(-ikR_\beta)$ и, следовательно, этот фактор аннулируется множителем $\exp(ikR_\beta)$ в $\tilde{T}_{\alpha\beta}(E)$. При условии

$$\Gamma \ll \Delta E \ll E_r \quad (25)$$

Можно переписать (24) в следующей упрощённой форме

$$\Psi_\beta(R_\beta, t) = A \int_0^\infty dE \frac{\exp[-iEt/\hbar]}{E - E_r + i\Gamma/2}, \quad (26)$$

где A - константа. В приближении (25) и $\Gamma = \text{constant}$ получим

$$\Psi_\beta(R_\beta, t) = \begin{cases} B \exp[-iE_r t/\hbar - (\Gamma/2\hbar)t], & \text{для } t > 0 \\ 0, & \text{для } t < 0 \end{cases} \quad (27)$$

(сдвигая нижний предел интегрирования в (26) от 0 до $-\infty$ и используя теорему о вычетах). Здесь B – константа и более точно здесь должно быть $t - t_{in}$ (с $t_{in} = \hbar \frac{\partial \arg g}{\partial E}$) вместо t . Форма (27) сохраняет свой вид даже в случаях, когда $\Gamma \sim E^{1/2}$ или Γ - линейная функция E (см., например, [11, вторая ссылка]).

Эволюция составной системы, отвечающей метастабильному состоянию с комплексной энергией $E_r + i\Gamma/2$, при прохождении конечной частицы β через точку z_β в течение интервала единичного времени с центром в точке t , описывается плотностью потока вероятности

$$j_\beta(z_\beta, t) = \text{Re} [\Psi_\beta(z_\beta, t) (i\hbar/2m) \partial \Psi_\beta^*(z_\beta, t) / \partial z_\beta]$$

с адекватной нормализацией $\int_{-\infty}^\infty j_\beta(z_\beta, t) dt = 1$. Вероятность излучения (за единицу времени) в окрестности составного ядра (около $z_\beta = R_\beta$)

$$I(t) = \frac{j_\beta(R_\beta, t)}{\int_{-\infty}^\infty dt j_\beta(R_\beta, t)} \quad (28)$$

равна

$$I(t) = (\Gamma / \hbar) \exp(-\Gamma t / \hbar). \quad (29)$$

Функцию $I(t)$, вообще говоря, определяемую (28) и конкретно (29), иногда называют *функцией распада* (см., например, [1,11]). Более детальное изучение (см., например, [10-14]) показывает, что даже для изолированного резонанса экспоненциальная форма закона распада приближённо выполняется в интервале времён, ограниченном снизу $t_1 \sim t_0 \Gamma/E_r$ и сверху $t_2 \sim t_0 \ln(\Gamma/E_r)$, где $t_0 \sim \hbar/\Gamma$, а точность описания экспоненциальной функцией тем лучше, чем меньше отношение Γ/E_r . Во времена, большие, чем t_2 , заметные отклонения от экспоненциального закона могут иметь место. В конечном счёте, они происходят, во-первых, вследствие того, что энергетический континуум ограничен снизу нулём, во-вторых, вследствие наличия полюсов S -матрицы, отвечающих другим резонансам и иным сингулярностям S -матрицы и, в-третьих, вследствие зависимости Γ от E , отличной от $E^{1/2}$ или от линейной функции E [11, вторая ссылка]).

Эволюцию выживания составного ядра (за время t жизни составной системы и распада после его образования) можно очевидно описать следующей функцией [11]:

$$L^c(t) = 1 - \int_{(0)}^t dt I(t), \quad (30)$$

которая при тех же условиях, что и (28), равна

$$L^c(t) = \exp(-\Gamma t / \hbar). \quad (30a)$$

Функция $W(t) = 1 - L^c(t)$, очевидно описывает *вероятность распада метастабильной системы*. Она равна 0 при $t = 0$ и стремится к 1 в пределе $t \rightarrow \infty$.

При получении (29), и следовательно, и (30a), мы приняли во внимание, что

$$\lim_{z_\beta \rightarrow R_\beta} (-i\hbar / m_\beta) T_{\alpha\beta} \partial [\exp(ikz_\beta)] \partial z_\beta = v \tilde{T}_{\alpha\beta} \quad (31)$$

($v = \hbar k / m_\beta$).

Если $\Psi_\beta(R_\beta, t)$ имеет форму (27), то Фурье-трансформа Ψ_β равна

$$\int_0^\infty dt \Psi_\beta(R_\beta, t) \exp(-iEt / \hbar) = B \int_0^\infty dt \exp[-i(E - E_r)t / \hbar - \Gamma t / 2\hbar] = \frac{iB}{E - E_r + i\Gamma / 2}; \quad (32)$$

она пропорциональна амплитуде (21).

При $z_\beta > R_\beta$ можно переписать (23) таким образом:

$$\Psi_\beta(z_\beta, t) = \int_0^\infty dk \frac{G(k)D(k)}{(k - k_0)(k + k_0)} \exp(ikz_\beta - iEt / \hbar), \quad (33)$$

где

$$G(k) = g(\hbar^2 k^2 / 2m_\beta)(dE/dk), \quad D(k) = (2m_\beta / \hbar^2) N_\beta(E) C_{\alpha\beta},$$

$$k_0 = (1/\sqrt{2}) (\sqrt{\sqrt{k_r^4 + \gamma^2} + k_r^2} - i\sqrt{\sqrt{k_r^4 + \gamma^2} - k_r^2}), \quad k_r = \sqrt{2m_\beta E_r} / \hbar, \quad \gamma = \Gamma m_\beta / \hbar^2.$$

Поскольку $G(k)$ и $D(k)$ – плавные функции k ,

$$\Psi_\beta(z_\beta, t) \cong \int_{-\infty}^\infty dk \frac{G(k)D(k)}{(k - k_0)(k + k_0)} \exp(ikz_\beta - iEt / \hbar) \quad (34)$$

и при условии (25), вводя новую переменную

$$y = \sqrt{\frac{i\hbar t}{2m_\beta}} \left(k - \frac{m_\beta z_\beta}{\hbar t} \right) \quad (35)$$

после выполнения преобразований, подобных тем, которые использовались в [1,10], получим:

$$\Psi_\beta(R_\beta, t) = \begin{cases} 0, & \text{for } z_\beta > v_r t; \\ \text{const} \cdot \exp[ik_r z_\beta - iE_r t / \hbar - (\Gamma / 2\hbar)(t - z_\beta / v_r)] & \text{for } z_\beta \leq v_r t, \end{cases} \quad (36)$$

где $v_r = \hbar k / m_\beta$. Волновая функция (36) может быть использована для макроскопических расстояний z_β , вблизи детектора, регистрирующего частицы β .

Вспомним теперь, что экспоненциальный закон (29) и асимптотика (36) применимы только при условии (25), т.е. когда все энергии (или состояния континуума) вокруг E_r полностью заселены в большой области ширины $\Delta E \gg \Gamma$. Если же, наоборот,

$$\Delta E \ll \Gamma, \quad (37)$$

то вероятность излучения неэкспоненциальна и существенно зависит от ΔE и от формы $g(E)$. Если предположить лоренцевскую форму также для $g(E)$, т.е.

$$g(E') = \frac{g_0}{E' - E + i\Gamma/2} \quad (38)$$

с $g_0 = \text{const}$ или плавной внутри ΔE при условиях (25) и (37), вместо (27) получим выражение

$$\Psi_\beta(R_\beta, t) = \begin{cases} 0, & \text{for } z_\beta > v_r(t - t_{in}^0); \\ \frac{\text{const}}{E - E_r + i\Gamma/2} \cdot \exp[ik_r z_\beta - iE_r t / \hbar - (\Delta E / 2\hbar)(t - z_\beta / v_r - t_{in}^0)], & \text{for } z_\beta \leq v_r(t - t_{in}^0) \end{cases} \quad (39)$$

(с $v = \hbar k / m_\beta$ и $t_{in}^0 = \hbar \frac{\partial \arg g_0}{\partial E}$). В этом случае сечение

$$\sigma_{\alpha\beta} \sim \int_{t_{min}}^{\infty} dt j_\beta(z_\beta, t), \quad (40)$$

где знак \sim обозначает “пропорционален”, $t_{min} = z_\beta / v + t_{in}^0$ и (t_{min}, ∞) представляет оперативную регистрацию для времени работы детектора, после интегрирования в (40) приобретает форму Брейта-Вигнера

$$\sigma_{\alpha\beta} = |f_{\alpha\beta}|^2 = \frac{\text{const}}{(E - E_r)^2 + \Gamma^2 / 4}. \quad (41)$$

5. О сечениях рассеяния и длительностях нуклон-ядерного рассеяния вблизи изолированного компаунд-резонанса, искажённого нерезонансным фоном, в системе центра масс и в лабораторной системе.

В [15-21] было обнаружено и изучалось явление временного опережения вместо ожидаемого времени задержки вблизи резонансов составного ядра, искажённых нерезонансным фоном, в системе центра масс (в $\mathbf{Ц}$ -системе). Это явление обычно сопровождается минимумом сечения в той же области энергий. Естественно, возникает вопрос: имеет ли место это явление и в лабораторной системе (в $\mathbf{Л}$ -системе)?

В [15-24] было обнаружено, что стандартные формулы преобразования сечений из $\mathbf{Л}$ -системы в $\mathbf{Ц}$ -систему и обратно неприменимы в случаях двух (и более) механизмов столкновения. В $\mathbf{Ц}$ -системе отсутствует движение самой $\mathbf{Ц}$ -системы, а в $\mathbf{Л}$ -системе имеется движение долгоживущего медленно распадающегося составного ядра и это движение составного ядра совпадает с движением центра масс в $\mathbf{Л}$ -системе. Известные стандартные чисто кинематические преобразования из $\mathbf{Л}$ -системы в $\mathbf{Ц}$ -систему и обратно имеют место только для одного прямого (быстрого) механизма столкновения.

А теперь напомним о явлении задержки-опережения в упругом рассеянии нуклонов ядрами вблизи резонанса, искажённого нерезонансным фоном, в $\mathbf{Ц}$ -системе, которое было обнаружено в [15-21]. Обычно (см., например, [15-17]) амплитуда $F^C(E, \theta)$ упругого рассеяния нуклонов сферическими ядрами вблизи изолированного резонанса в $\mathbf{Ц}$ -системе может быть записана в виде

$$F^C(E, \theta) = f(E, \theta) + f_{l, res}(E, \theta), \quad (42)$$

где $f(E, \theta) = f_{Coul}(E, \theta) + (2ik)^{-1} \sum_{\lambda \neq l} (2\lambda + 1) P_\lambda(\cos \theta) \exp(2i\eta_\lambda) [\exp(2i\delta_\lambda^b) - 1]$,

$$f_{l,res}(E, \theta) = (2ik)^{-1}(2l+1)P_l(\cos\theta) \exp(2i\eta_l) \left[\exp(2i\delta_l^b) \frac{E^* - E_{res}^* - i\Gamma/2}{E^* - E_{res}^* + i\Gamma/2} - 1 \right]$$

$F_{Coul}(E, \theta)$ – амплитуда кулоновского рассеяния, k – волновое число, θ – угол рассеяния в Π -системе, δ_l^b и η_l – фаза фонового ядерного l -рассеяния и фаза кулоновского l -рассеяния, соответственно. Здесь E^* , E_{res}^* и Γ – энергия возбуждения, энергия и ширина резонанса составного ядра, соответственно, и мы пренебрегаем спин-орбитальным взаимодействием и предполагаем рассеиваемое ядро достаточно тяжёлым. Переписывая (42) в виде

$$F^C(E, \theta) = [A(E^* - E_{res}^*) + iB\Gamma/2] (E^* - E_{res}^* + i\Gamma/2)^{-1}, \quad (42a)$$

где

$$A = f(E, \theta) + (k)^{-1}(2l+1)P_l(\cos\theta) \exp(2i\eta_l + i\delta_l^b) \sin \delta_l^b,$$

$$B = f(E, \theta) + (ik)^{-1}(2l+1)P_l(\cos\theta) \exp(2i\eta_l + i\delta_l^b) \cos \delta_l^b,$$

можем получить, следуя [15] на основе [1], такое выражение для полной *длительности* рассеяния $\tau^C(E, \theta)$:

$$\tau^C(E, \theta) = 2R/v + \hbar \partial \arg F / \partial E \equiv 2R/v + \Delta\tau^C(E, \theta) \quad (43)$$

в квазимонохроматическом приближении при очень малых разбросах энергий $\Delta E \ll \Gamma$, когда можно пользоваться *методом стационарной фазы* для аппроксимации групповой скорости волновых пакетов. В формуле (43), $v = \hbar k / \mu$ – скорость налетающей, R – эффективный радиус взаимодействия, а $\Delta\tau^C$ – время задержки (или опережения)

$$\tau^C(E, \theta) = -(\hbar \text{Re} \alpha / 2) [(E^* - E_{res}^* - \text{Im} \alpha / 2)^2 + (\text{Re} \alpha)^2 / 4]^{-1} + \Delta\tau_{res}, \quad (44)$$

где $\Delta\tau_{res} = (\hbar \Gamma / 2) [(E^* - E_{res}^*)^2 + \Gamma^2 / 4]^{-1}$, $\alpha = \Gamma B / A$. Подчеркнём, что полная длительность рассеяния определяется как длительность *микроскопического* рассеяния областью нуклон-ядерного взаимодействия эффективного радиуса R (ср. с [15-17]).

Как видно из (44), если $0 < \text{Re} \alpha < \Gamma$, величина $\Delta\tau(E, \theta)$ оказывается *отрицательной* в интервале энергий $\sim \text{Re} \alpha$ вокруг центра с энергией $E_{res}^* + \text{Im} \alpha / 2$. Когда $0 < \text{Re} \alpha / \Gamma \ll 1$, минимальное время задержки может достигать значения $-2\hbar / \text{Re} \alpha < 0$. Таким образом, когда $\text{Re} \alpha \rightarrow 0^+$, интерференция резонансного и фонового рассеяния может привести к *довольно значительному опережению* вместо задержки! Такая ситуация математически описывается нулём $E_{res}^* + i\alpha / 2$, наряду с полюсом $E_{res}^* - i\Gamma/2$, амплитуды $F^C(E, \theta)$ (или соответствующей T -матрицы) в нижней нефизической полуплоскости комплексных значений энергии E . Отметим, что очень большое время опережения может привести к проблеме нарушения причинности (см., например, примечание в [16]). *Явление задержки-опережения* в Π -системе было изучено в [15-17] для нуклон-ядерного упругого рассеяния, а в других случаях в [18-21]).

Диаграмма столкновения с двумя механизмами (прямым процессом и с промежуточным образованием поставного ядра). Следуя общему подходу из [22-24], опишем выходной канал в столкновении

$$\begin{array}{ccc} x + X & \rightarrow & y + Y \\ \text{(начальный канал)} & & \text{(конечный канал)} \end{array} \quad (45)$$

движением двух выходящих волновых пакетов (см. рис.1a,b), каждый из которых имеет форму вида $c_n \exp[i(\mathbf{k}_n \mathbf{r}_n - \varepsilon_n t / \hbar)] G(\mathbf{r}_n - \mathbf{v}_n t)$, где $\varepsilon_n = \hbar^2 k_n^2 / 2\mu_n$, $\mathbf{v}_n = \hbar \mathbf{k}_n / \mu_n$, c_n – нормировочные константы, $n=1,2$. Эти волновые пакеты практически являются плоскими волнами в пределах функций $G(\mathbf{r}_n - \mathbf{v}_n t)$ пространственной (радиальной) ширины $\gg 1/k_n$ (для квази-

монохроматических частиц), движущихся с постоянными групповыми скоростями v_n . [25]. Эти групповые скорости практически совпадают с кинематическими скоростями. По крайней мере, одна из частиц (обычно y) проходит макроскопическое расстояние до детектора r_1 , регистрирующего её, т.е. $r_1 \cong v_1 \cdot t$.

На рис.1а, б представлены диаграммные схемы обоих процессов столкновения в L -системе, описывающие быстрый (прямой) и более медленный механизм с образованием промежуточного составного ядра, соответственно. Оба механизма практически неразличимы *макроскопически* в кинематическом отношении, будучи при этом *микроскопически* разными процессами:

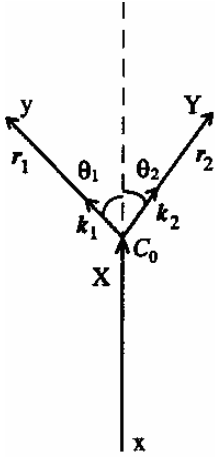


Рис.1,а. Диаграмма прямого процесса.

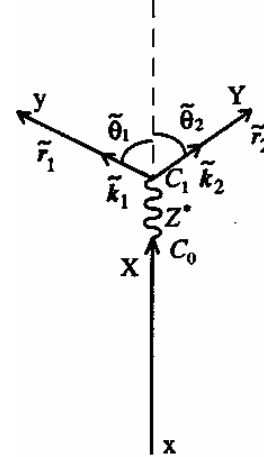


Рис.1,б. Диаграмма процесса с образованием составного ядра.

Рис.1,а описывает прямой процесс быстрого испускания продуктов реакции из точки столкновения C_0 малой длительности τ_{dir} . Рис.1,б описывает движение составного ядра Z^* из точки C_0 в точку C_1 , где оно распадается с испусканием конечных частиц $y + Y$ после прохождения расстояния между точками C_0 и C_1 , равного $\sim V_C \Delta \tau_{res}$ перед своим распадом (V_C - скорость движения составного ядра, равная скорости движения центра масс в лабораторной системе отсчёта, а $\Delta \tau_{res} = (\hbar \Gamma / 2) / [(E_Z - E_{res,Z})^2 + \Gamma^2 / 4]$ - приближённое усреднённое (по разбросу энергий ΔE) время движения ядра Z^* перед его распадом (14), если положить разброс энергий ΔE падающих частиц x очень малым по сравнению с резонансной шириной Γ , $E_Z = E^*$, $E_{res,Z} = E^*_{res}$). Для ясности различения обоих процессов во времени наложим очевидное практическое условие

$$\tau_{dir} \ll \Delta \tau_{res}(E_Z) \text{ в области } (E_Z - E_{res,Z})^2 \approx \Gamma^2 / 4. \quad (46)$$

В случае больших макроскопических расстояний r_1 (около детектора конечной частицы y) и малых угловом и энергетическом разрешениях ($\Delta \theta_1 \ll \theta_1$ и $\Delta k_1 \ll k_1$), углы θ_1 и $\tilde{\theta}_1$, а также импульсы k_1 и \tilde{k}_1 , можно полагать практически совпадающими, поскольку $\theta_1 - \tilde{\theta}_1 \sim \Delta r_1 / r_1$ и $k_1 - \tilde{k}_1 \sim \Delta r_1 / r_1$, где $|\Delta r_1| = |r_1 - \tilde{r}_1|$. Используя *обычное макроскопическое определение сечения* (см., например, [22-24]) и здесь в приложении I, после серии преобразований для асимптотических волновых пакетов конечных частиц канала $y + Y$, было получено следующее выражение для сечения σ реакции (45) в L -системе:

$$\sigma = \sigma_0^{(incoh)} + \sigma_1^{(interf)}, \quad (47)$$

где

$$\sigma_0^{(incoh)} \cong \left| f_{dir}^{(L)} \right|^2 + \frac{J_{C \rightarrow L} \left| \gamma_{Z^*}^{(C)} \right|^2}{(E_Z - E_{res,Z})^2 + \Gamma^2 / 4}, \quad (48)$$

$$f_{dir}^{(L)} = \sqrt{J_{C \rightarrow L}} f_{dir}^{(C)}(E_1^C, \vartheta_1^C), f_{dir}^{(C)} = f_C(E_1^C, \vartheta_1^C) + \frac{1}{2ik_1^C} \sum_{l' \neq l} (2l' + 1) P_{l'}(\cos \vartheta_1^C) e^{2i\eta_{l'}} (e^{2i\delta_{l'}} - 1), \quad (49)$$

$$\sigma_1^{(int\ erf)} = 2 \left| f_{dir}^{(L)} \cdot \frac{J_{C \rightarrow L}^{1/2} \gamma_{Z^*}^{(C)}}{E_Z - E_{res,Z} + i\Gamma/2} \right| \cos \Phi, \quad (50)$$

$$\frac{\gamma_{Z^*}^{(L)}(E_1, E_2)}{E_Z - E_{res,Z} + i\Gamma/2} = f_{l,res}(E_1^C, \vartheta_1^C) = \frac{1}{2ik_1^C} (2l + 1) P_l(\cos \vartheta_1^C) e^{2i\eta_l} \left\{ e^{2i\delta_l} \frac{E^C - E_{res}^C - i\Gamma/2}{E^C - E_{res}^C + i\Gamma/2} - 1 \right\},$$

$$\Phi = \chi + \beta + \varphi, \chi = \arg(J_{C \rightarrow L}^{1/2} \gamma_{Z^*}^{(L)}) - \arg(f_{dir}^{(L)}), \beta = \arg(E_Z - E_{res,Z} + i\Gamma/2)^{-1}, \quad (51)$$

$$\varphi = k_1 \Delta r_1 + k_2 \Delta r_2, \Delta r_{1,2} = V_{\perp(1,2)} \Delta \tau_{res},$$

$V_{\perp(1,2)}$ - проекция скорости Z^* -ядра на направление $\vec{k}_{1,2}$, f_C - амплитуда кулоновского рассеяния, η_l - l -парциальная фаза кулоновского рассеяния, δ_l - l -парциальная фаза фонового ядерного (потенциального) рассеяния. Формулы (47)-(51) были получены для квазимонохроматического пучка бомбардирующих частиц x ($\Delta E \ll E$) и малых угловых и энергетических разрешений ($\Delta \theta_1 \ll \theta_1$, $\Delta E \ll \Gamma$) детектора конечных частиц. Для простоты мы пренебрегли спин-орбитальной связью и положили абсолютные значения всех разностей $r_n / v_n - r_p / v_p$ ($n \neq p = 1, 2$) намного меньшими временного разрешения. Здесь $J_{C \rightarrow L}$ - стандартный Якобиан чисто кинематических преобразований из $\mathbf{Ц}$ -системы в $\mathbf{Л}$ -систему. Формулы (47)-(51) просто совпадают с формулами (I,9)-(I,12), выведенными в приложении I.

6. Отсутствие временного опережения вблизи любого изолированного резонанса составного ядра в $\mathbf{Л}$ -системе.

Подчеркнём, что формулы (47)-(51) для сечения σ , полученные здесь, следуя [22-24], определены обычным *макроскопическим* образом и при этом учитывают реальное *микроскопическое* движение составного ядра, что их сильно отличает от стандартного кинематического преобразования $\sigma^C(E, \theta) = |F^C(E, \theta)|^2$ из $\mathbf{Ц}$ -системы в $\mathbf{Л}$ -систему именно интерференцией амплитуд $f_{dir}^{(L)}$ и $\frac{J_{C \rightarrow L}^{1/2} \gamma_{Z^*}^{(C)}}{E_Z - E_{res,Z} + i\Gamma/2} \cdot \exp(i\varphi)$, $\varphi = k_1 \Delta r_1 + k_2 \Delta r_2$ (где $\Delta r_{1,2} = V_{proj1,2} \Delta \tau_{res}$). Параметр φ отражает влияние движения составного ядра.

В более ранних работах (например, в [1,15]) обычно анализ амплитуд, сечений и длительностей упругого рассеяния проводился на основе формул (1) \rightarrow (1a) в $\mathbf{Ц}$ -системе, в которой движение составного ядра в $\mathbf{Л}$ -системе во внимание не принималось. Но при учёте движения распадающегося составного ядра в $\mathbf{Л}$ -системе выражения для амплитуды процесса идущего с образованием возбуждённого составного ядра в области резонанса в $\mathbf{Ц}$ - и $\mathbf{Л}$ -системах отличаются не только стандартными кинематическими преобразованиями $\{E^C, \theta^C\} \leftrightarrow \{E^L, \theta^L\}$, но и учётом движения распадающегося составного ядра вдоль расстояния $V_C \Delta \tau_{res}$, как показано на рис.1а,б. В [1,15] формулы (1) и (1a) записывались в $\mathbf{Ц}$ -системе и описывали когерентную сумму интерферирующих членов как для сечения $\sigma^C(E, \theta) = |F^C(E, \theta)|^2$, так и для времени задержки $\Delta \tau^C(E, \theta)$ без учёта микроскопического движения распадающегося составного ядра от точки C_0 к точке C_1 . Можно оценить общую длительность столкновения в $\mathbf{Л}$ -системе, взяв суперпозицию волновых пакетов прямого рассеяния и рассеяния, идущего с образованием промежуточного составного ядра (в соответствии с диаграммами 1а и 1б,

соответственно), которая была получена в [22], и в асимптотической области (при $r \rightarrow \infty$) после всех упрощений с учётом сохранения энергии-импульса принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi_{r_1 \rightarrow \infty} \approx & \text{const} \cdot \exp(-i E_f^0 t / \hbar) \cdot \exp(i \mathbf{k}_1^0 \mathbf{r}_1 + i \mathbf{k}_2^0 \mathbf{r}_2) \times \\ & \times \{ f_{dir}^{(L)} \cdot \exp[-\Delta E [(t-t_i - \frac{r_1}{V_1^0}) + (t-t_i - \frac{r_2}{V_2^0})] / \hbar] + \frac{J_{C \rightarrow L}^{1/2}}{E_Z^* - E_{res,Z} + i \Gamma_Z / 2} \times \\ & \times \exp[-\Delta E [(t-t_i - \Delta \tau_{res} - \frac{\tilde{r}_1}{V_1^0}) + (t-t_i - \Delta \tau_{res} - \frac{\tilde{r}_2}{V_2^0})] / \hbar] \times \\ & \times \exp[i \mathbf{k}_1^0 \Delta \mathbf{r}_1 + i \mathbf{k}_2^0 \Delta \mathbf{r}_2] \} \text{ for } \begin{cases} t > t_i + r_1 / V_1^0 \\ t > t_i + \Delta \tau_{res} + \tilde{r}_1 / V_1^0 \end{cases} \end{aligned}$$

где $V_{1,2}^0 = \hbar k_{1,2}^0 / m_{1,2}$, $\Delta r_{1,2} = V_{\perp (1,2)} \Delta \tau_{res}$, $V_{\perp (1,2)}$ - проекция скорости движения ядра Z^* на направление $\mathbf{k}_{1,2}$, t_i - начальный момент времени, определяемый фазой амплитуды начального весового множителя g_i , выбранного простоты ради в лоренцевской форме $[\text{const}/(E_l - E_l^0 + i \Delta E)]$ с очень малым разбросом энергий $\Delta E \ll \Gamma$; $E_l = \hbar^2 k_l^2 / 2m_l$ - кинетическая энергия l -й частицы с массой m_l ($l=1,2$), отвечающей частицам u и Y , соответственно. Тогда, применяя общий подход из [1] для средней длительности столкновения

$$\langle \tau_{general} \rangle = \frac{\int_{t_{min}}^{\infty} t \Psi_{r_1 \rightarrow \infty}^* \hat{j}_1 \Psi_{r_1 \rightarrow \infty} dt}{\int_{t_{min}}^{\infty} \Psi_{r_1 \rightarrow \infty}^* \hat{j}_1 \Psi_{r_1 \rightarrow \infty} dt} - \langle t_{initial} \rangle \approx \hbar / 2 \Delta E$$

(с $\langle t_{initial} \rangle \approx t_i$ для квазимонохроматических частиц), получим после всех упрощений, упомянутых в [22] и использованных здесь, результат, заключающийся в том, что общее время задержки вполне соответствует соотношению неопределённости энергии-времени $\langle \tau_{general} \rangle \Delta E \sim \hbar$ для квазимонохроматических частиц (для которых $\Delta E \ll \Gamma$ и $\Delta \tau_{res} \Delta E \ll 1$).

Таким образом, получим тривиальное среднее время задержки в приближении $\Delta E \ll \Gamma$ и $\Delta \tau_{res} \cdot \Delta E \ll 1$ для \mathcal{L} -системы без какого-либо опережения, обусловленного “виртуально неподвижным” составным ядром в \mathcal{C} -системе. Формулы (47)-(51) являются результатом самосогласованного подхода к реалистическому анализу экспериментальных данных сечений нуклон-ядерного рассеяния в \mathcal{L} -системе. А любая попытка описать экспериментальные данные сечений нуклон-ядерного рассеяния вблизи изолированного резонанса, искажённого нерезонансным фоном, в \mathcal{L} -системе на простой основе формулы (42) в \mathcal{C} -системе с последующим использованием стандартных кинематических соотношений $\{E^C, \theta^C\} \leftrightarrow \{E^L, \theta^L\}$ в \mathcal{L} -системе не имеет никакого практического физического смысла. И причина этого состоит в том, что в этом случае мы пренебрегаем реальным движением составного ядра.

7. Расчёты энергетической зависимости сечения нуклон-ядерного упругого рассеяния вблизи искажённого резонанса с помощью реалистического описания экспериментальных данных на основе формул (47)–(51).

Если в [22] были представлены только простейшие иллюстрации чисто абстрактных расчётов, то здесь мы приводим результаты конкретных расчётов сечений нуклон-ядерного рассеяния, исходя из сравнения с экспериментальными данными. Для упругого рассеяния протонов ядрами ^{12}C и ^{16}O были выполнены расчёты функций возбуждения $\sigma(E)$ в \mathcal{L} -системе

вблизи искажённых резонансов для тех же значений параметров амплитуд прямого и резонансного рассеяния и при тех же упрощениях (пренебрежение спин-орбитальной связи и приближение тяжёлых ядер), что и в [17] ($\theta_1^L = 75.4^\circ$, $\delta_0 = 1.0$, $\delta_1 = 1.2$, $\delta_2 = 0.22$) и в [16] ($\theta_1^L = 150^\circ$, $\delta_0 = \pi/8$, $\delta_1 = -\pi/2$), соответственно, и для стандартного известного Якобиана $J_{C \rightarrow L}$. Для $p + {}^{12}\text{C}$ и $p + {}^{16}\text{O}$ были выбраны резонансные параметры $E_{\text{res}} = 1,734 \text{ MeV}$, $\Gamma = 47 \text{ keV}$ ($l=2$) и $E_{\text{res}} = 2,67 \text{ MeV}$, $\Gamma = 14,5 \text{ keV}$ ($l=1$), соответственно. Подгоночный параметр χ был выбран равным 0.01π и π для $p + {}^{12}\text{C}$ и $p + {}^{16}\text{O}$, соответственно.

Результаты расчётов, выполненных по формулам (47)-(51) в сравнении с экспериментальными данными, взятыми из [16-17] для $p + {}^{12}\text{C}$ и $p + {}^{16}\text{O}$, представлены на рис. 2 и 3, соответственно. А результаты расчётов по стандартным кинематическим формулам преобразований из \mathcal{C} - в \mathcal{L} -систему вычисляются по тем же формулам (47)-(51), но с $\varphi \equiv 0$ (т.е. без учёта диаграммы, изображённой на рис.1б), и которые, как правило, не удаётся согласовать так же хорошо, как и кривые 2 и 3.

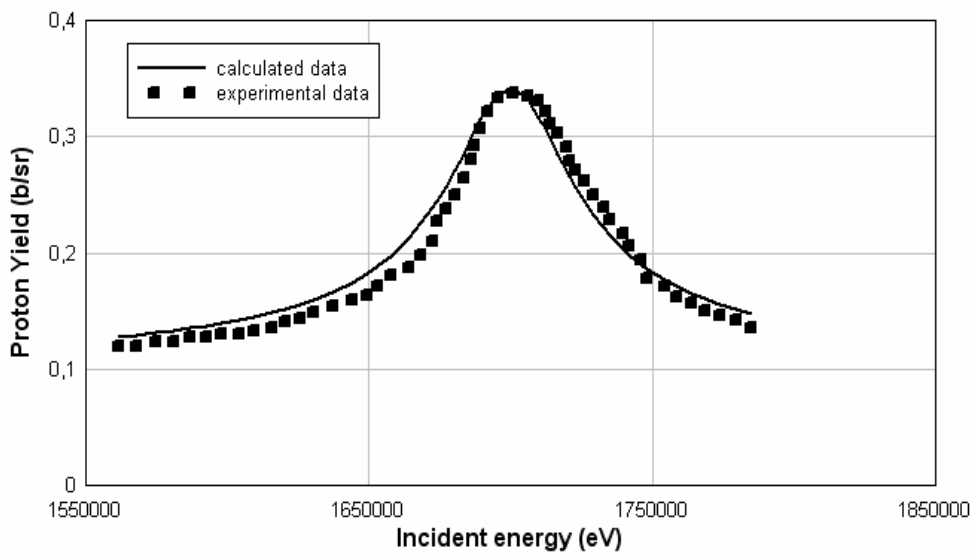


Fig. 2. Функция возбуждения для ${}^{12}\text{C}(p, p)$.

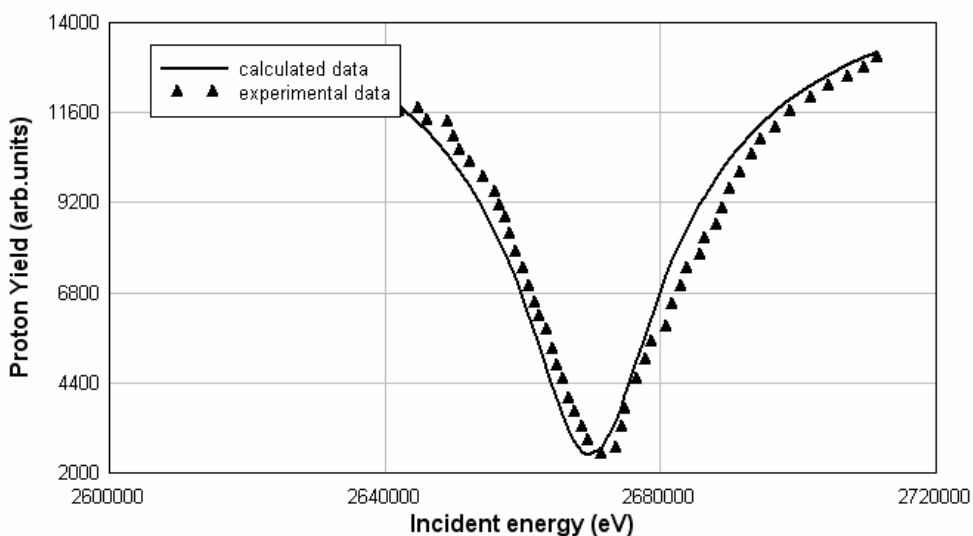


Рис.3. Функция возбуждения для ${}^{16}\text{O}(p, p)$.

Также были выполнены расчёты функций возбуждения $\sigma(E)$ низко-энергетического упругого рассеяния нейтронов ядрами ^{28}Si , ^{52}Cr , ^{56}Fe и ^{64}Ni в области искажённых изолированных резонансов $E_{res}=55.67$ кэВ и $\Gamma=0.48$ кэВ, $E_{res}=50,5444$ кэВ и $\Gamma=1,81$ кэВ, $E_{res}=27.9179$ кэВ и $\Gamma=0.71$ кэВ, $E_{res}=24.7402$ кэВ и $\Gamma=0.695$ кэВ, соответственно. Значения параметров амплитуд прямого и резонансного рассеяния в *отдельности* в \mathbf{C} -системе при $l=0$ (и, естественно, без кулоновских фаз) в формулах (47)-(51) были подобраны с помощью стандартной процедуры. Подгоночный параметр χ был выбран равным 0.68π или 0.948π или 0.956π или π , соответственно.

Результаты расчётов, выполненных по формулам (47)-(51) без кулоновского рассеяния в сравнении с экспериментальными данными, взятыми из [26] для $n + ^{28}\text{Si}$, $n + ^{52}\text{Cr}$, $n + ^{56}\text{Fe}$, $n + ^{64}\text{Ni}$, представлены на рис. 4-7, соответственно. Результаты расчётов, выполненных по формулам (47)-(51) без кулоновского рассеяния в сравнении с экспериментальными данными, взятыми из [13] для $n + ^{28}\text{Si}$, $n + ^{52}\text{Cr}$, $n + ^{56}\text{Fe}$, $n + ^{64}\text{Ni}$, представлены на рис. 4-7, соответственно. А результаты расчётов, выполненных по стандартным кинематическим формулам преобразований из \mathbf{C} - в \mathbf{L} -систему, по формулам (47)-(51) без кулоновского потенциала (отсутствующего для нейтронов) и с $\varphi \equiv 0$ (т.е. без учёта диаграммы, изображённой на рис.1б), представлены на рис. 4а-7а. При этом видно, что при $\varphi \equiv 0$ минимумы явно не заполняются полностью.

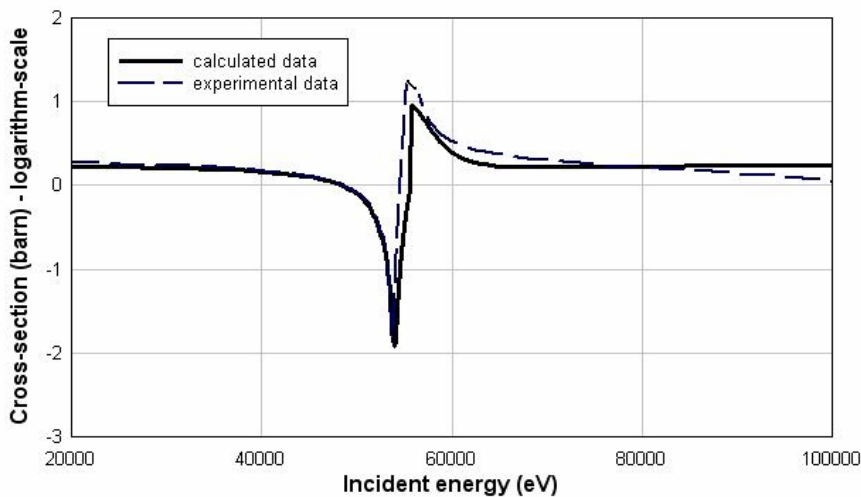


Рис.4. Функция возбуждения для $^{28}\text{Si}(n, n)$.

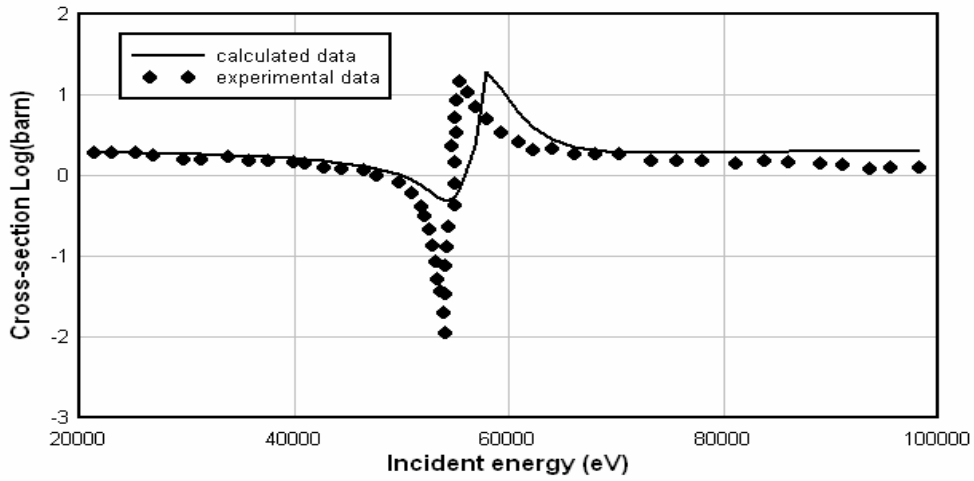


Рис.4а. Функция возбуждения для $^{28}\text{Si}(n,n)$ при $\varphi \equiv 0$.

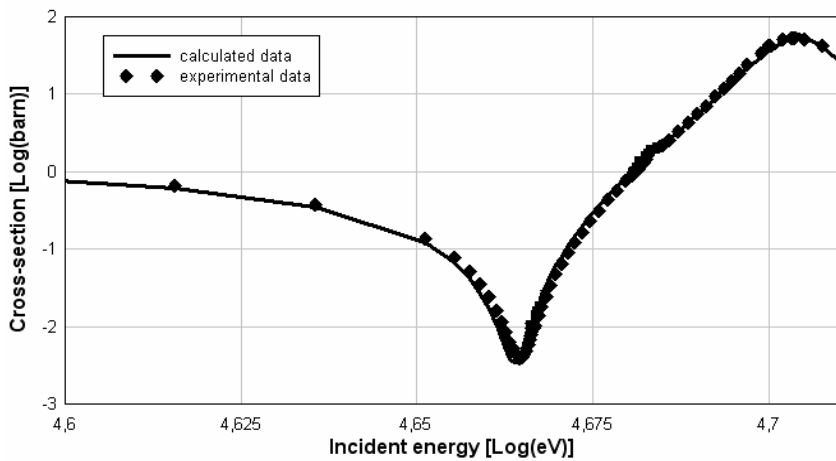


Рис.5. Функция возбуждения для $^{52}\text{Cr}(n,n)$.

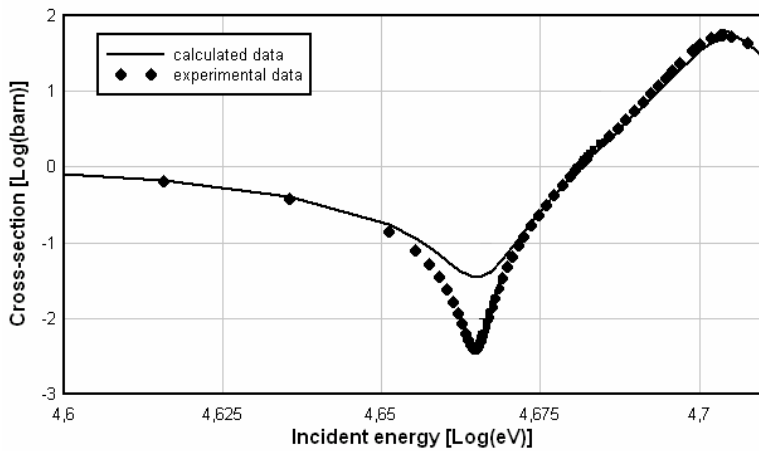


Рис.5а. Функция возбуждения для $^{52}\text{Cr}(n,n)$ при $\varphi \equiv 0$.

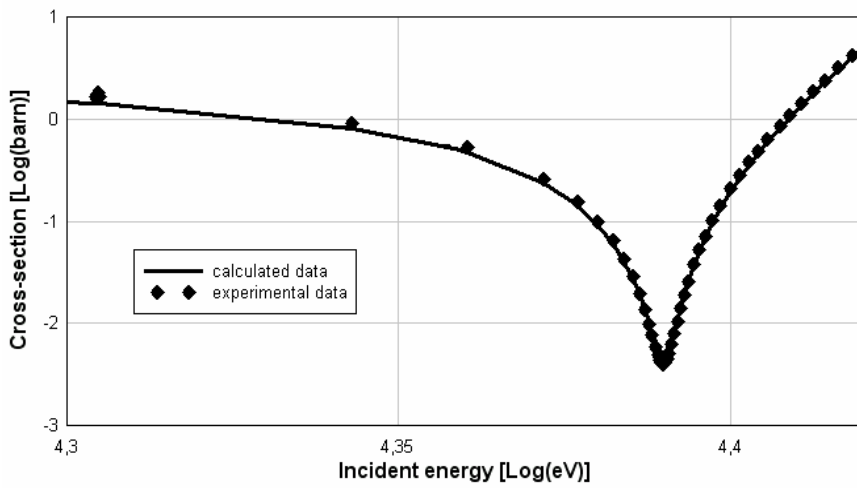


Рис.6. Функция возбуждения для $^{56}\text{Fe}(n,n)$.

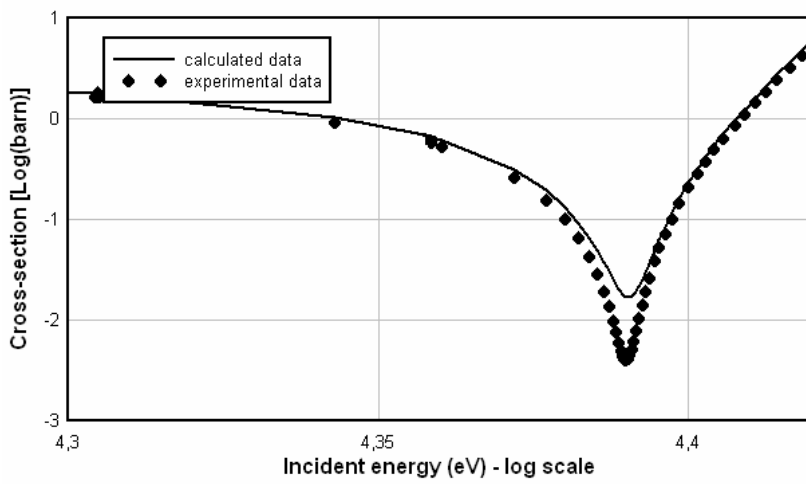


Рис.6а. Функция возбуждения для $^{56}\text{Fe}(n,n)$ при $\varphi = 0$.

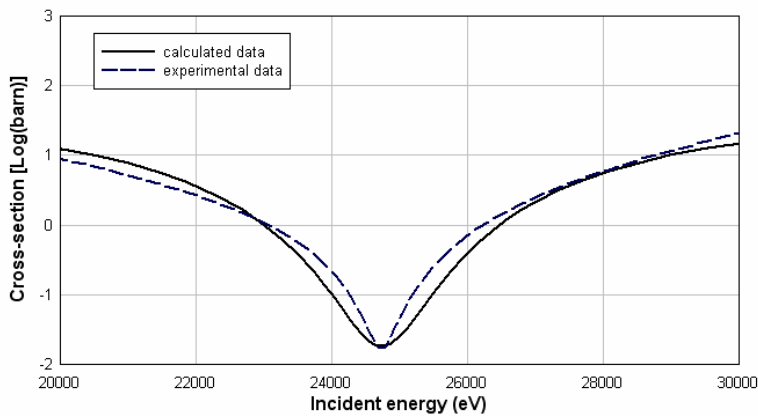


Рис.7. Функция возбуждения для $^{64}\text{Ni}(n,n)$.

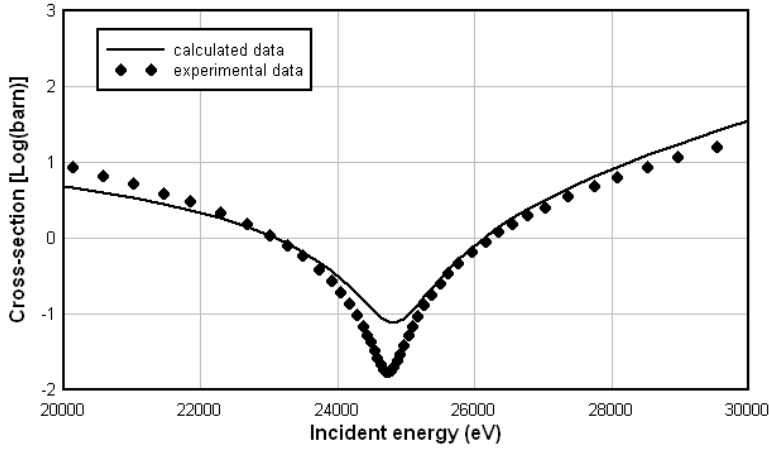


Рис.7а . Функция возбуждения для $^{64}\text{Ni}(n,n)$ при $\varphi=0$.

В приложении II выведены формулы для переходов сечений из \mathcal{C} -системы в \mathcal{L} -систему для реакций с выходными трёхчастичными каналами.

8. Длительность резонансных процессов многоканального рассеяния.

При исключении малых пороговых областей со своей спецификой можно воспользоваться представлением Симониуса [29] многоканальной S -матрицы:

$$\hat{S}^{(J)}(E) = \hat{U}^{(J)} \prod_{v=1}^N \left(1 - \frac{i\Gamma_v^{(J)}}{E - E_v^{(J)} + i\Gamma_v^{(J)}/2} \right) \hat{U}^{(J)T}, \quad (52)$$

где унитарная матрица $\hat{U}^{(J)}$ и матрицы проектирования $\hat{P}_v^{(J)}$ ($\hat{P}_v^{(J)} = \hat{P}_v^{(J)*} = P_v^{(J)2}$, $\text{Tr} \hat{P}_v^{(J)} = 1$) практически не зависят от энергии, $(\hat{U}^{(J)T})_{ij} = U_{ij}^{(J)}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), n – число открытых каналов, причём $\tilde{S}^{(J)} = \hat{U}^{(J)} \hat{U}^{(J)T}$ – симметричная фоновая (нерезонансная) S -матрица, причём $\tilde{S}_{ij}^{(J)} = \tilde{S}_{ji}^{(J)T}$, $\sum_{k=1}^n \tilde{S}_{ik}^{(J)} \tilde{S}_{jk}^{(J)*} = \delta_{ij}$. Представление (52) пригодно, строго говоря, только для двухчастичных (бинарных) реакций. Оно обладает тем преимуществом, что в нём, в отличие от представлений с аддитивными наборами резонансных членов явно учтено свойство унитарности

$$\sum_{k=1}^n S_{ik}^{(J)} S_{jk}^{(J)*} = \delta_{ij}, \quad (53)$$

а в отличие от представлений вида $\hat{S}^{(J)} = (1 + i\hat{K}^{(J)})(1 - i\hat{K}^{(J)})^{-1}$ нет обратных матриц, операции с которыми сильно затрудняют анализ.

Используя эрмитову матрицу

$$\hat{Q}^{(J)}(E) = i\hbar \hat{S}^{(J)}(E) \frac{d\hat{S}^{(J)*}(E)}{dE},$$

введенную в [30], нетрудно показать с учётом (52) справедливость следующего соотношения:

$$\text{Tr } Q^{(J)}(E) = \sum_{v=1}^N \frac{\Gamma_v^{(J)}}{(E - E_v^{(J)})^2 + (\Gamma_v^{(J)})^2/4}, \quad (54)$$

которое не зависит от матриц $\hat{U}^{(J)}$ и $\hat{P}_v^{(J)}$, т.е. от плавного (практически постоянного) фона, связанного с потенциальным рассеянием и прямыми реакциями [31]. Усредняя равенство (54)

внутри области, в которой расположены резонансы, в соответствии с процедурой $\langle \rangle$ и в предположении условий (16) получаем:

$$\text{Tr} \langle \hat{Q}^{(J)}(E) \rangle = \mathcal{T}_J, \quad (55)$$

где $\mathcal{T}_J = 2\pi\hbar / D_J$ - время цикла Пуанкаре (точнее говоря, время цикла Пуанкаре для такой системы с эквидистантным расположением чисто дискретных уровней, для которой $|E_{\nu+1}^{(J)} - E_{\nu}^{(J)}| = D_J$ и $\Gamma_J = 0$). Используя преобразования

$$i\hbar \langle S_{ij}^{(J)} dS_{ij}^{(J)*} / dE \rangle = \hbar \langle |S_{ij}^{(J)}|^2 \rangle \langle \Delta\tau_{ij}^{(J)} \rangle + i\hbar \langle d|S_{ij}^{(J)}|^2 / dE \rangle / 2, \quad i \neq j,$$

$$\begin{aligned} i\hbar \langle S_{ii}^{(J)} (dS_{ii}^{(J)*} / dE) \rangle &= \hbar \langle |1 - S_{ii}^{(J)}|^2 \rangle \langle \Delta\tau_{ii}^{(J)} \rangle + \\ &+ \hbar \text{Im} \langle dS_{ii}^{(J)} / dE \rangle + i\hbar \langle d|S_{ii}^{(J)}|^2 / dE \rangle / 2, \end{aligned}$$

где величиной $\text{Im} \langle dS_{ii}^{(J)} / dE \rangle$ при достаточно больших ΔE в приближении случайных фаз можно пренебречь, и равенство $\langle d|S_{ij}^{(J)}|^2 / dE \rangle = 0$ прямо следует из условия унитарности (53), получаем из (55) следующие два правила сумм для $\langle \Delta\tau_{ij}^{(J)} \rangle$ и $\langle \Delta\tau_i^{(J)} \rangle$:

$$\sum_{i,j} \langle \Delta\tau_{ij}^{(J)} \rangle \langle |S_{ij}^{(J)} - \delta_{ij}|^2 \rangle = \mathcal{T}_J, \quad (56a)$$

$$\sum_i \langle \Delta\tau_i^{(J)} \rangle [1 - \text{Re} \langle S_{ii}^{(J)} \rangle] = \mathcal{T}_J / 2, \quad (56b)$$

впервые найденные в [31]. С учётом определений (4) и (4a) правила сумм (56a) можно переписать в виде

$$\sum_{i,j} \int d\Omega_j \langle \Delta\tau_{ji}(E, \mathcal{G}_j) \rangle k_j k_i \langle \sigma_{ji}(E, \mathcal{G}_j) \rangle = \sum_J \pi(2J+1) \mathcal{T}_J.$$

Если предположить одинаковые длительности во всех каналах, т.е. $\langle \Delta\tau_i^{(J)} \rangle = \langle \Delta\tau_{ji}^{(J)} \rangle = \langle \Delta\tau^{(J)} \rangle$ ($i, j=1, 2, \dots, n$), то в приближении $\langle S_{ii}^{(J)} \rangle \approx 0$ (что, как будет видно ниже, может иметь место при $\Gamma_J \gg nD_J / 2\pi$ в так называемом приближении эквивалентных входных каналов [31], то получим:

$$\langle \Delta\tau^{(J)} \rangle \cong \mathcal{T}_J / 2n. \quad (57)$$

Если же $\sum_i \text{Re} \langle S_{ii}^{(J)} \rangle = n-1$, что возможно в так называемом ньютоновском случае полной корреляции между амплитудами распада всех резонансов в приближении одинаковых матриц проектирования $\hat{P}_{\nu}^{(J)} = \hat{P}_J$ ($\nu=1, 2, \dots, N$) и $\hat{U}^{(J)} = 1$, когда унитарная S-матрица имеет вид $\hat{S}^{(J)} = \hat{1} + [\exp(2i\delta_J) - 1]\hat{P}_J$, то

$$\langle \Delta\tau^{(J)} \rangle = \mathcal{T}_J / 2. \quad (58)$$

Результат (58) был получен в [32].

Если $\text{Re} \langle S_{ii}^{(J)} \rangle = 1 - \pi \Gamma_J / n D_J$, что, как будет видно ниже, может иметь место при $\Gamma_J \ll n D_J / 2\pi$, то $\langle \Delta \tau^{(J)} \rangle = \hbar / \Gamma_J$, как и в случае одного изолированного резонанса с полной шириной $\Gamma_J \ll \Delta E$.

Если исходить из прямого определения (4) для $\langle \Delta \tau_{ij}^{(J)} \rangle$, то в приближении $\hat{P}_\nu^{(J)} = \hat{P}_J$ ($\nu = 1, 2, \dots, N$), нетрудно показать, что при условии (16)

$$\hat{S}^{(J)} = \tilde{S}^{(J)} - \hat{\alpha}^{(J)} + \hat{\alpha}^{(J)} \prod_\nu \frac{E - E_\nu^{(J)} - i\Gamma_\nu^{(J)}}{E - E_\nu^{(J)} + i\Gamma_\nu^{(J)}}$$

и

$$\langle \Delta \tau_{ij}^{(J)} \rangle = |\alpha_{ij}^{(J)}|^2 \mathcal{T}_J / [|\tilde{S}_{ij}^{(J)} - \alpha_{ij}^{(J)}|^2], \quad i \neq j; \quad (59a)$$

$$\langle \Delta \tau_{ii}^{(J)} \rangle = |\alpha_{ii}^{(J)}|^2 \mathcal{T}_J / [1 - |\tilde{S}_{ii}^{(J)} + \alpha_{ii}^{(J)}|^2], \quad (59b)$$

где $\alpha_{ij}^{(J)} = (\hat{U}^{(J)} \hat{P}_J \hat{U}^{(J)T})_{ij}$, причём $\sum_{i,j} |\alpha_{ij}^{(J)}|^2 = 1$. Это прямо следует из унитарности $\hat{U}^{(J)}$ и свойства $\text{Tr} \hat{P}_J = 1$. Поскольку $|\alpha_{ij}^{(J)}| = \frac{1}{n}$ в приближении одинаковых $|\alpha_{ij}^{(J)}|$, а $|\tilde{S}_{ij}^{(J)}| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ в приближении одинаковых $|\tilde{S}_{ij}^{(J)}|$, то

$$\langle \Delta \tau_{ij}^{(J)} \rangle \approx \mathcal{T}_J / n, \quad i \neq j \quad (60a)$$

$$\langle \Delta \tau_{ii}^{(J)} \rangle \approx \mathcal{T}_J / n^2. \quad (60b)$$

Результат (60a,б) был впервые получен в [1].

В приложении III выведено третье правило сумм, связывающее среднее время задержки составного ядра, дисперсию распределений времён задержки составного ядра с характеристиками составного ядра - средними резонансной плотностью и шириной ρ_J и Γ_J , впервые выведенное в [33].

9. Явление временных резонансов (взрывов).

Введение. В широкой области энергий бомбардирующих частиц свыше 1-10 ГэВ/нуклон (например, [34-40]) и для большого их числа (от p до ^{20}Ne), числа мишеней и регистрируемых конечных фрагментов наблюдаются бесструктурные, экспоненциально убывающие инклюзивные, а также и не всегда инклюзивные спектры энергий. Для более тяжёлых бомбардирующих частиц эти же явления наблюдаются и для меньших энергий (см., например, [41]). При анализе реакций с тяжёлыми ионами с энергиями до 1 ГэВ/нуклон в какой-то мере модель файербола может быть использована, а также модель внутриядерного каскада [42] и модель ядерной жидкости [43] работают при более высоких энергиях в предположении образования высокоплотных комплексов столкновений. Среди трудностей моделей файербола есть вопрос, почему даже при высоких возбуждениях (свыше 100 МэВ/нуклон) образуется статистическое равновесие. В [44] была предложена иная модель "временного составного ядра" для альтернативного объяснения высокоэнергетических ядерных реакций. Эта модель использовала предварительные результаты собственных состояний специфического оператора времени в гамильтоновом подходе [45]. Она основывалась на введении формальной аналогии между метастабильными состояниями с собственными комплексными энергиями в качестве собственных состояний уравнения Шредингера и соответствующими Фурье-трансформатами с комплексными собственными значениями для уравнения с оператором времени, канонически сопряжённым гамильтониану.

Эта модель была только начальным шагом к подходу, зависящему от времени и не была до конца обоснована.

Нами предложена новая версия подхода временной эволюции, начиная не только с принципиальных идей [44], но и из известного соответствия между экспоненциальным уменьшением поведения любой величины и в любом (временном или энергетическом) представлении и лоренцевским поведением её Фурье-трансформаты в канонически сопряжённом (т.е. энергетическим или временном) представлении и затем используя результаты, полученные в [1,31,46] для свойств составных ядер в области неразрешённых сильно перекрывающихся энергетических резонансов. Здесь вводится конкретно явление временного резонанса и объясняется сходство между энергетическими резонансами и временными резонансами. А также анализируются энергетические и временные свойства составных ядер, которые связаны с взрывами временных резонансов в эволюции распада конечных частиц.

Теоретическое происхождение временных резонансов (взрывов). Наш теоретический подход основывается на [47-49]. Начнём пока с продолжения раздела 4 и выберем амплитуду реакции $f_{\alpha\beta}(E)$ и T -matrix $\tilde{T}_{\alpha\beta}(E)$ в таких формах

$$f_{\alpha\beta}(E) = C_{\alpha\beta}^n \exp(-E\tau_n/2\hbar + iEt_n/\hbar) \quad (61)$$

и

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{T}_{\alpha\beta}^n \exp(-E\tau_n/2\hbar + iEt_n/\hbar), \quad (61a)$$

Соответственно, в определённой области энергий $E_{min} < E < \infty$, где τ_n и t_n - константы (с размерностью времени), τ_n и t_n определяют экспоненциальную зависимость от энергии для соответствующего сечения и линейную зависимость от энергии для фазы амплитуды, соответственно. $\tilde{T}_{\alpha\beta}^n$ - константа или очень плавная функция (внутри ΔE) от энергии E конечной частицы. Резонансную структуру $\tilde{T}_{\alpha\beta}^n$ пока не принимаем явно во внимание, предполагая её полностью усреднённой в пределах разброса энергий (или разрешения) ΔE , полагая таким образом $\Delta E \ll 2\hbar/\tau_n$.

В этом случае можно записать вместо (22) и (23,24) следующее уравнение

$$\Psi_{\beta}(R_{\beta}, t) \cong \int_{E_{min}}^{\infty} dE' A' \exp[-E'\tau_n/2\hbar + iE'(t_n - t)/\hbar], \quad (62)$$

где $A' = \tilde{T}_{\alpha\beta}^n g(E')$. Используя простейшую прямоугольную форму $g(E')$,

$$g(E') = \begin{cases} (\Delta E)^{-1/2} \exp(i \arg g), & \text{for } E_{min} \leq E - \Delta E/2 < E' < E + \Delta E/2 \\ 0, & \text{for } E' < E - \Delta E/2 \text{ and } E' > E + \Delta E/2 \end{cases} \quad (63)$$

где $\arg g$ – плавная функция E внутри ΔE , получим

$$\Psi_{\beta}(R_{\beta}, t) = \frac{\text{const}}{t - t_n + i\tau_n/2} \exp[E(-\tau_n/2 + i(t_n - t))/\hbar] \cdot [\exp[\Delta E(-\tau_n/2 + i(t_n - t))/2\hbar] - \exp[-\Delta E(-\tau_n/2 + i(t_n - t))/2\hbar]]. \quad (64)$$

Если все энергии в большом интервале, начиная с E_{min} , полностью заполнены, т.е.

$$\begin{cases} (E + \Delta E / 2)\tau_n / 2 \rightarrow \infty \text{ and} \\ E - \Delta E / 2 \rightarrow E_{\min}, \end{cases} \quad (65)$$

то приходим к

$$\Psi_{\beta}(R_{\beta}, t) = \frac{\text{const}}{t - t_n + i\tau_n / 2} \exp[E_{\min}(-\tau_n / 2 + i(t_n - t)) / \hbar]. \quad (66)$$

Естественно называть такое поведение $\Psi_{\beta}(R_{\beta}, t)$ *временным резонансом* из-за Лоренцевской формы фактора $\frac{1}{t - t_n + i\tau_n / 2}$ в (66), или *взрывом* (при малых значениях τ_n). И обратно, если $\Psi_{\beta}(R_{\beta}, t)$ имеет форму (66), фурье-трансформата $\Psi_{\beta}(R_{\beta}, t)$ будет равной

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \Psi_{\beta}(R_{\beta}, t) \exp(iEt / \hbar) = \text{const} \cdot \exp[-E\tau_n / 2\hbar + iEt_n / \hbar + E_{\min}\tau_n / 2\hbar]. \quad (67)$$

Она пропорциональна амплитуде (61).

При $z_{\beta} > R_{\beta}$ можно переписать (62) следующим образом:

$$\Psi_{\beta}(z_{\beta}, t) = \int_{E_{\min}}^{\infty} dE' f_{\alpha\beta}^n N_{\beta} \exp(ikz_{\beta}) g(E') \exp[-E'\tau_n / 2\hbar + iE'(t_n - t) / \hbar]. \quad (68)$$

Для малого разброса энергий ($\Delta E \ll E$), используя функцию (63) для $g(E')$ и вводя новую переменную

$$y' = \sqrt{\frac{i\hbar(t - t_n - i\tau_n / 2)}{2m_{\beta}}} \left[k - \frac{m_{\beta}z_{\beta}}{\hbar(t - t_n - i\tau_n / 2)} \right] \quad (69)$$

вместо (35), окончательно получим:

$$\Psi_{\beta}(R_{\beta}, t) = \begin{cases} 0, & \text{for } z_{\beta} > v(t - t_n - t_{in}^0); \\ \text{const} \cdot \exp \left[ikr - \frac{iE(t - t_n - t_n^0 - i\tau_n / 2)}{\hbar} - \Delta EA(t) \right], & \text{for } z_{\beta} \leq v(t - t_n - t_{in}^0) \end{cases} \quad (70)$$

где

$$A(t) = [t - t_n - t_n^0 - z_{\beta}/v - i\tau_n/2] / 2\hbar.$$

Сечение, определённое ранее формулой (41) для макроскопических расстояний, теперь имеет следующую экспоненциальную форму:

$$\sigma_{\alpha\beta} = |f_{\alpha\beta}|^2 = \text{const} \cdot \exp(-E\tau_n / \hbar). \quad (71)$$

Когда $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ или $f_{\alpha\beta}$ имеет общую форму типа

$$f_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{\nu} f^{n\alpha\beta} \exp[-E\tau_n / 2\hbar + iEt_n / \hbar] \quad (72)$$

с несколькими членами ($\nu=2,3,\dots$), сечение $\sigma_{\alpha\beta} = |f_{\alpha\beta}|^2$ содержит не только экспоненциально спадающие члены, но и осциллирующие члены с множителями $\cos[E(t_n - t_n') / \hbar]$ или $\sin[E(t_n - t_n') / \hbar]$. В случае 2 членов ($\nu=2$) в (62), формула (72) переходит в такую

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} = & |f^1_{\alpha\beta}|^2 \exp(-E\tau_1/\hbar) + |f^2_{\alpha\beta}|^2 \exp(-E\tau_2/\hbar) + \\ & + 2\text{Re} \{ f^1_{\alpha\beta} f^2_{\alpha\beta} \exp[iE(t_1 - t_2)/\hbar - E(\tau_1 + \tau_2)/2\hbar] \} \end{aligned} \quad (73)$$

(где пренебрегаются члены с ΔE , если предположить, что $\Delta E t_n \ll E\tau_n$ и $\Delta E\tau_n \ll E t_n$).

Эволюция выживания составного ядра (в момент времени t после его образования) описывается следующей функцией:

$$L^c(t) = 1 - \int_{t_0}^t dt I(t) \quad (74)$$

где $I(t)$ определяется формулой (28). Начальный момент t_0 времени, текущего естественно выбрать в момент t_{in}^0 и предположить $t_{in}^0 = 0$. Однако нужно учитывать неопределённость $\delta t = \hbar/\Delta E$ длительности начального волнового пакета перед столкновением. Поэтому

$$t_0 \cong t_n^0 - \delta t = -\delta t = -\hbar/\Delta E.$$

В область временного резонанса (70) функция $L^c(t)$ существенно неэкспоненциальна даже при аппроксимации $t_0 = 0$. Качественная форма $L^c(t)$ может быть проиллюстрирована с помощью сильно упрощённых примеров, используя (68) для весьма узкого интервала вблизи $t = t_n$, и также для всех значений t , когда

$$j_\beta(R_\beta, t) = \text{Re}[\Psi_\beta(R_\beta, t) \cdot (i\hbar/m_\beta) \cdot \lim_{z_\beta \rightarrow R_\beta} \partial \Psi_\beta^* / \partial (z_\beta, t) / \partial (z_\beta) \cong \bar{v} |\Psi_\beta(R_\beta, t)|^2], \quad (75)$$

где \bar{v} определяется интегральной теоремой о среднем значении, а именно выражением

$$\int_{E_{\min}}^{\infty} dE \nu A \exp(-E\tau_n/2\hbar) = \bar{v} \int_{E_{\min}}^{\infty} dE A \exp(-E\tau_n/2\hbar) \quad (76)$$

(ν появляется здесь после применения (31) или (75)). Тогда

$$I(t) = \frac{j_\beta(R_\beta, t)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dt j_\beta(R_\beta, t)} \cong \frac{[(t-t_n)^2 + \tau_n^2/4]^{-1}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dt [(t-t_n)^2 + \tau_n^2/4]^{-1}} = (\tau_n/2\pi) \frac{1}{(t-t_n)^2 + \tau_n^2/4}. \quad (77)$$

и

$$L^c(t) = 1 - (1/\pi) [\arctan(y)]_{y=2t_0/\tau_n}^{y=2(t-t_n-t_0)/\tau_n}. \quad (78)$$

Поскольку кривая $\arctan(y)$ имеет форму, изображённую на рис.8, в случае $2t_0/\tau_n \rightarrow -\infty$ (величина τ_n мала) функция $L^c(t)$ имеет форму, изображённую на рис.9 (кривая 1).

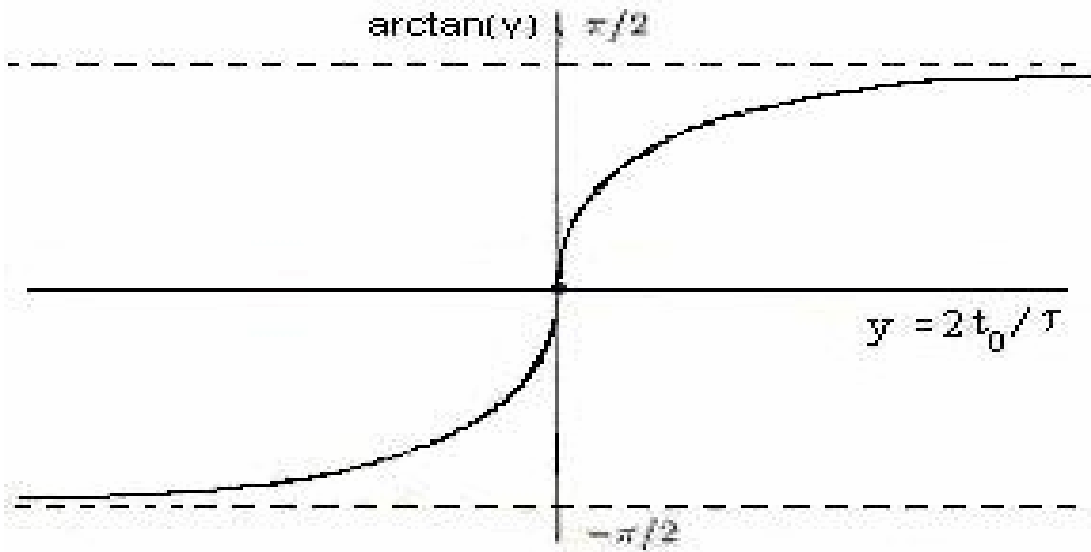


Рис.8. Функция $\arctan(y)$ для $2t_0/\tau_n \rightarrow -\infty$.

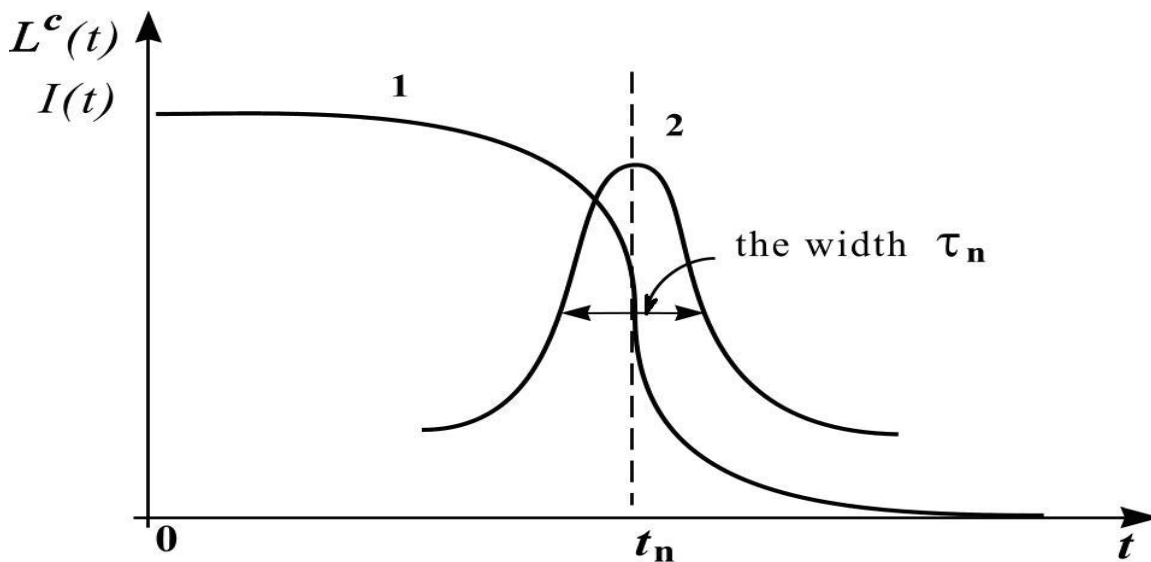


Рис.9. $L^c(t)$ (кривая 1) и $I(t)$ (кривая 2)

В этом случае

$$L^c(t) = 1 - \pi^{-1} [\arctan(2(t - t_n - t_0)/\tau_n) + \pi/2] \quad (79a)$$

и

$$L^c(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда } 0 \leq t < t_n = 0 \text{ (с } -2t_0/\tau_n \rightarrow \infty \text{) и} \\ 0, & \text{когда } t \rightarrow \infty \end{cases} \quad (79b)$$

Из простой формы рис.9, нетрудно видеть, что t_n можно интерпретировать как период Пуанкаре внутреннего движения составного ядра (после его образования и перед его распадом), когда $t_n \gg \tau_n$. Такое поведение $L^c(t)$ исследовалось в [48,49].

Если точно учесть компаунд-резонансную структуру $T_{\alpha\beta}$, то будет иметь место сильно неэкспоненциальная форма $L^c(t)$ и $I(t)$, как изображено на рис.9, при сильно перекрытии энергетических резонансов, когда

$$\Gamma_{JSP} \ll N_{JSP} / 2\pi \rho_{JSP} \quad (80)$$

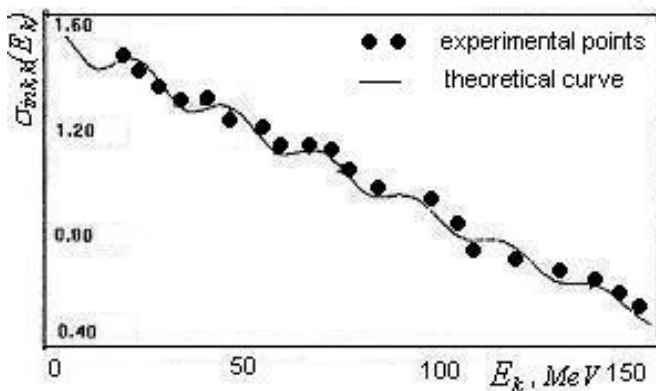
(Γ_{JSP} и ρ_{JSP} – средние резонансные ширина и плотность уровней, N_{JSP} – число открытых каналов, JSP – значения полного момента количества движения, спина и чётности, соответственно). Малую вероятность распада составного ядра для $t < t_n$ (внутри цикла Пуанкаре) можно объяснить как следствие многократных внутренних переходов между сильно неортогональными волновыми функциями метастабильных состояний в области сильно перекрывающихся энергетических резонансов. В случае нескольких временных резонансов это может означать суперпозицию нескольких сильно перекрывающихся групп энергетических резонансов с разными значениями JSP того же самого составного ядра или образование нескольких составных ядер с разными количествами участвующих нуклонов.

В частности, для инклюзивных энергетических спектров k -го конечного фрагмента можно пользоваться следующим выражением:

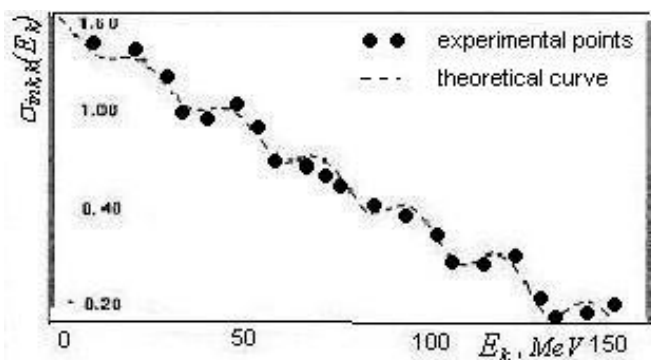
$$\sigma_{inc,k}(E_k) = \sum_{n=1}^2 C_n \exp[(it_n - \tau_n/2)E_k / \hbar]^2 = \sum_{n=1}^2 |C_n|^2 \exp(-E_k \tau_n / \hbar) + 2 \operatorname{Re} C_1^* C_2 \exp\{[i(t_2 - t_1) - (\tau_1 + \tau_2)/2]E_k / \hbar\}. \quad (81)$$

Сравнение с экспериментальными данными. Для анализа наблюдаемых экспериментальных спектров одиночного конечного фрагмента нужно просуммировать (или усреднить) выражения типа (73) или (81) по подсемействам конечных состояний (с разными квантовыми числами JSP , где J, L, S и Π – квантовое число полного момента количества движения, орбитального момента, спина и чётности, соответственно) и каналам, иногда когерентно и иногда некогерентно. И для инклюзивного энергетического спектра k -го конечного фрагмента будем пользоваться выражением (81).

На рис.10-13 представлены несколько вычисленных инклюзивных энергетических спектров $\sigma_{inc,k}(E_k)$ в полулогарифмической шкале в сравнении с экспериментальными данными из [41,43,44].



a)

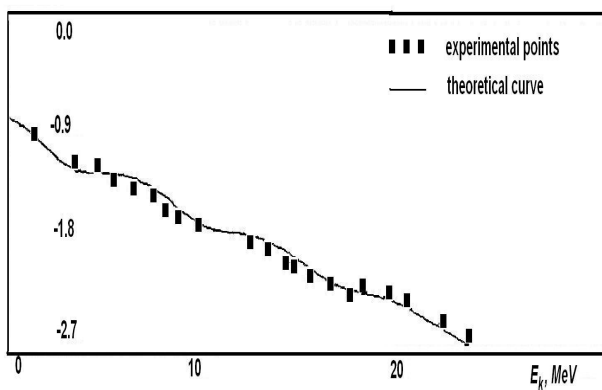


б)

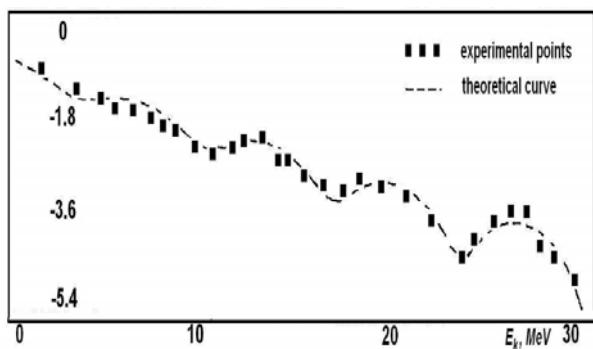
Рис.10. Инклюзивный процесс $p + C \rightarrow {}^7\text{Be} + X$ (протоны 2.1 ГэВ), экспериментальные данные взяты из [43].

а) $C_1 = 0.04, C_2 = 0.36$ ($\theta = 90^\circ$);

б) $C_1 = 0.35, C_2 = 0.05$ ($\theta = 160^\circ$).



а)

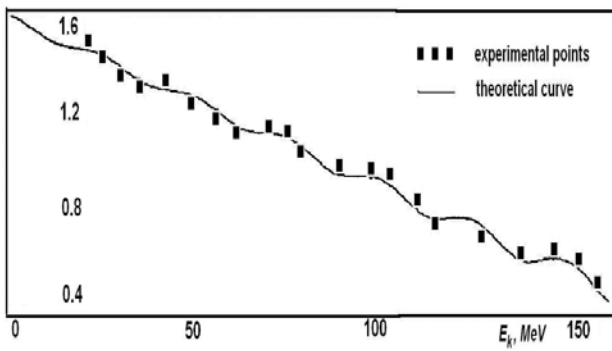


б)

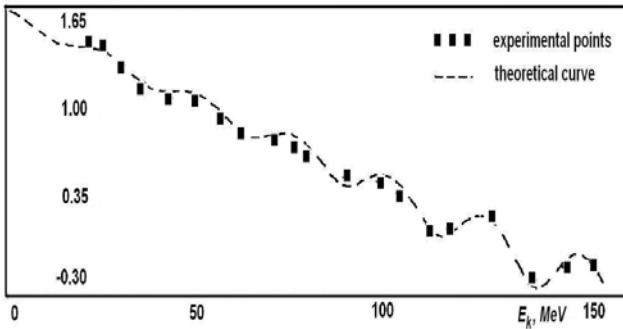
Рис.11. Инклюзивный процесс ${}^4\text{He} + \text{Ta} \rightarrow t + X$ (720 МэВ/нуклон), экспериментальные данные взяты из [44].

а) $C_1 = 0.18, C_2 = 1.02$ ($\theta = 60^\circ$);

б) $C_1 = 1.13, C_2 = 0.07$ ($\theta = 90^\circ$);



a)

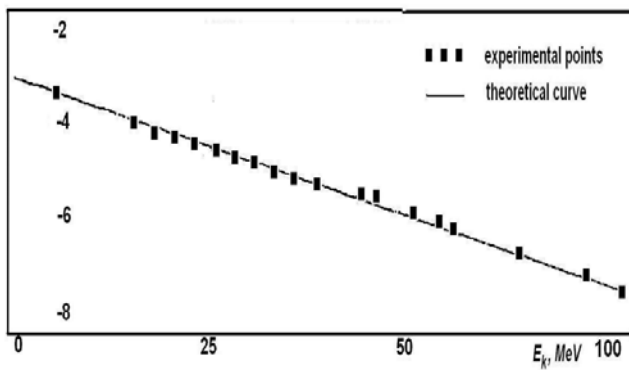


б)

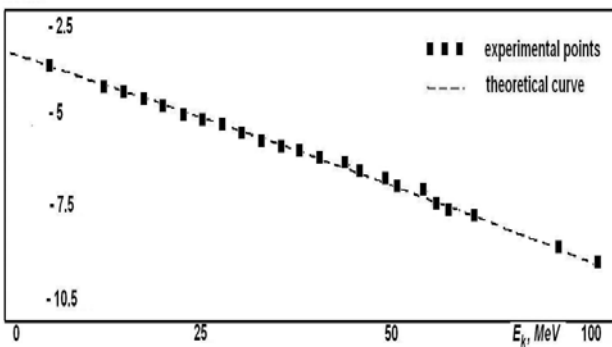
Рис.12. Инклюзивный процесс $^{20}\text{Ne} + \text{U} \rightarrow p + X$ (1045 МэВ/нуклон), экспериментальные данные взяты из [44].

a) $C_1=0.35, C_2=5.65$ ($\theta=90^\circ$);

б) $C_1=5.65, C_2=0.35$ ($\theta=150^\circ$);



a)



б)

Рис.13. Инклюзивный процесс $^{40}\text{Ar} + ^{51}\text{V} \rightarrow p + X$ (41 МэВ/нуклон); экспериментальные данные взяты из [41].

- а) $C_1=0.002, C_2=0.03$ ($\theta=97^\circ$);
 б) $C_1=0.03, C_2=0.022$ ($\theta=129^\circ$).

На рис.10-13, θ - детектируемый угол k -го фрагмента эмиссии. Значения τ_1, τ_2 и $t_2 - t_1$, которые были найдены в [48] из подгонки теоретических кривых к экспериментальным данным, приведены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры временных резонансов для некоторых инклюзивных спектров

| Реакция | Энергия бомб. частицы, ГэВ/нукл | $\tau_1, 10^{-23}$ сек | $\tau_2, 10^{-23}$ сек | $t_2 - t_1, 10^{-22}$ сек |
|---|---------------------------------|------------------------|------------------------|---------------------------|
| $P + C \rightarrow {}^7\text{Be} + X$ | 2.1 | 10.45 | 17.0 | 5.95 |
| ${}^{20}\text{Ne} + \text{Al} \rightarrow p + X$ | 0.393 | 0.1 | 0.99 | 1.7 |
| ${}^4\text{He} + \text{Ta} \rightarrow t + X$ | 0.72 | 1.72 | 3.15 | 1.22 |
| ${}^{20}\text{Ne} + \text{U} \rightarrow p + X$ | 1.045 | 0.92 | 1.7 | 1.72 |
| ${}^{20}\text{Ar} + \text{V} \rightarrow p + X$ | 0.041 | 7.5 | 9.0 | 0.20 |
| ${}^{132}\text{Xe} + \text{Au} \rightarrow p + X$ | 0.044 | 6.0 | 7.0 | 1.0 |
| ${}^{20}\text{Ne} + \text{U} \rightarrow p + X$ | 0.4 | 1.7 | 2.2 | 0.10 |
| ${}^{20}\text{Ne} + \text{U} \rightarrow d + X$ | 0.25 | 4.2 | 7.2 | 0.10 |

Поскольку наклон энергетических спектров существенно возрастает с возрастанием угла, это означает, что возрастающий вклад состояний составного ядра с большими значениями t_n и τ_n связан с образованием более тяжёлых составных ядер при меньшей скорости (в лабораторной системе). Это согласуется с наблюдаемыми в [42,44,48] явлениями более чётких осцилляций для промежуточных углов эмиссии.

Возможно, для самой лёгкой составной системы ($p+C$), представленной здесь, имеет место суперпозиция прямого процесса (т.е. $n = 0$ вместо $n = 1$) и временного резонанса ($n = 2$), поскольку разность $t_2 - t_{1(0)}$ заметно больше, чем обычно.

Несколько позднее были проведены новые расчёты и их сравнение с экспериментальными данными из [50,51]. Они представлены на рис.14-15.

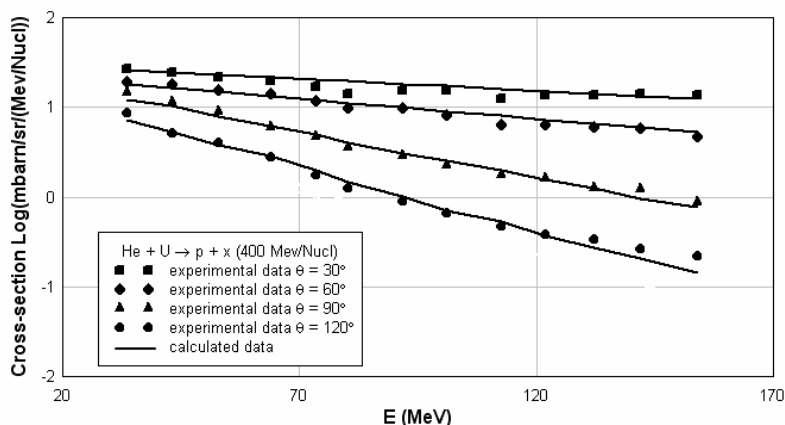


Рис.14. Инклюзивный энергетический спектр ${}^4\text{He} + \text{U} \rightarrow p + X$, of 400 МэВ/нуклон, экспериментальные данные взяты из[50].

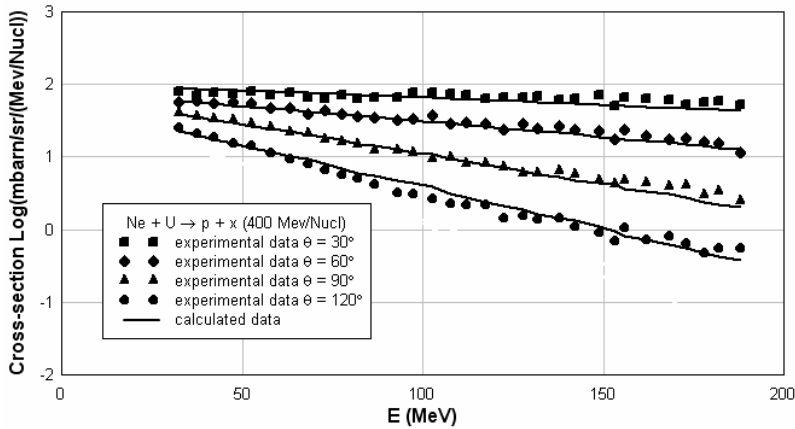


Рис.15. Инклюзивный энергетический спектр $^{20}\text{Ne} + U \rightarrow p + X$, of 400 МэВ/нуклон, экспериментальные данные взяты из[51].

Значения τ_1 , τ_2 и $t_2 - t_1$ в сек., которые были найдены в [49] из согласования теоретических кривых с экспериментальными данными, представлены в табл.2 и 3 для рис.14 и 15, соответственно.

Таблица 2

| θ | τ_1 (10^{-23}c) | τ_2 (10^{-23}c) | t_2-t_1 (10^{-23}c) | C_1 | C_2 |
|----------|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|-------|-------|
| 30^0 | 0.38 | 0.38 | 0.25 | 2.8 | 2.8 |
| 60^0 | 0.64 | 0.64 | 0.25 | 2.6 | 2.6 |
| 90^0 | 1.5 | 1.5 | 0.25 | 2.5 | 2.5 |
| 120^0 | 2.1 | 2.1 | 0.25 | 2.3 | 2.3 |

Таблица 3

| θ | τ_1 (10^{-23}c) | τ_2 (10^{-23}c) | t_2-t_1 (10^{-23}c) | C_1 | C_2 |
|----------|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|-------|-------|
| 30^0 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 5 | 5 |
| 60^0 | 0.6 | 0.6 | 0.25 | 4.5 | 4.5 |
| 90^0 | 1.2 | 1.2 | 0.25 | 4.2 | 4.2 |
| 120^0 | 1.7 | 1.7 | 0.25 | 3.6 | 3.6 |

Объяснение структуры временных резонансов в сечениях высокоэнергетических ядерных реакций в области плотно расположенных сильно перекрывающихся резонансов. Как можно объяснить манипуляции со сравнительно плавным энергетическим поведением выражений (71) and (73) для сечений или выражений (61) и (72) для $T_{\alpha\beta}$ или $f_{\alpha\beta}$, которые отвечают временным резонансам и одновременно экспериментальным данным по сечениям, хотя реально амплитуды должны сильно флуктуировать с энергией в области сильно перекрывающихся резонансов при экстремально высоких энергиях? На первый взгляд, в области высоких энергий структура энергетических резонансов должна исчезать не только из-за “сглаживания” энергетическими разбросами (поскольку $\Delta E > \Gamma_{\text{JSP}}, \rho_{\text{JSP}}^{-1}$), но и также de facto из-за сильного уменьшения вероятности формирования промежуточных долгоживущих многонуклонных состояний. Плотность компаунд-резонансов быстро растёт с энергией, начиная с низкоэнергетических хорошо разрешённых энергетических резонансов, где довольно успешно работают различные версии модели ферми-газа с оболочечными поправками и поправками коллективных моделей. Только вблизи 30-40 МэВ/нуклон в составной системе можно ожидать эффектов насыщения и дальнейшего сильного уменьшения плотностей. Однако именно для этих энергий могут появиться резонансы другой структуры. Эти резонансы связаны с локальными возбуждениями долгоживущих промежуточных многокварковых-глюонных состояний барионных подсистем (см. [52]).

Рассмотрим возможность вышеупомянутого объяснения структуры временных резонансов амплитуд более внимательно, ограничиваясь только парциальными JSP-амплитудами $T_{\alpha\beta}^{\text{JSP}} = \delta_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}^{\text{JSP}}$, где $S_{\alpha\beta}^{\text{JSP}}$ - элемент S-матрицы.

Как говорилось выше, при достаточно высоких энергиях, если пренебречь связанными и виртуальными состояниями и пороговыми особенностями, S-матрица может быть описана аналитическим выражением (28), где теперь индексы JSP (и ранее даже индекс J) были

опущены простоты ради, унитарная фоновая (нерезонансная) матрица \hat{U} и матрица проекции резонансов \hat{P}_n ($\hat{P}_n = \hat{P}_n^+ = \hat{P}_n^2$, Trace $\hat{P}_n = 1$), медленно меняющиеся с полной энергией ε или почти не зависели от ε , \hat{U}^T - матрица, транспонированная \hat{U} . При простейших условиях Базя-Ньютона (см. [32]), когда флуктуациями \hat{P}_n можно пренебречь ($\hat{P}_n = \langle \hat{P} \rangle$), S-матрица (52) приобретает такую форму:

$$\hat{S} = \hat{S}_b - \hat{a} \left(1 - \prod_n \frac{\varepsilon - \varepsilon_n - i\Gamma_n / 2}{\varepsilon - \varepsilon_n + i\Gamma_n / 2} \right) \quad (82a)$$

где $\hat{S}_b = \hat{U}\hat{U}^T$ и $\hat{a} = \hat{U} \langle \hat{P} \rangle \hat{U}^T$. Усреднённая по энергии S-матрица $\langle \hat{S} \rangle_{\Delta\varepsilon}$ в этом случае в соответствии с [32]:

$$\langle \hat{S} \rangle_{\Delta\varepsilon} = \hat{S}_b - \hat{a} [1 - \exp(-\pi\Gamma/\rho)]$$

для неразрешённых резонансов ($\Delta E \gg \rho, \Gamma$) и флуктуирующая S-матрица \hat{S}^c (или S-матрица составного ядра) равна

$$\hat{S}^c = S - \langle S \rangle_{\Delta\varepsilon} = \hat{a} \left[\prod_n \frac{\varepsilon - \varepsilon_n - i\Gamma_n / 2}{\varepsilon - \varepsilon_n + i\Gamma_n / 2} - \exp(-\pi\Gamma/\rho) \right] \quad (83)$$

Повторим, что \hat{S}_b и \hat{a} почти не зависят от энергии (медленно меняются с энергией). Для сильно перекрытых резонансов, когда $\pi\Gamma\rho \gg 1$

$$\hat{S}^c \rightarrow \hat{a} \prod_n \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_n - i\Gamma_n / 2}{\varepsilon - \varepsilon_n + i\Gamma_n / 2} \right) \quad (83a)$$

и усреднённое по энергии сечение, идущее через стадию образования составного ядра $\langle \sigma^c_{\alpha\beta} \rangle_{\Delta\varepsilon}$, очевидно, пропорционально $|a_{\alpha\beta}|^2$:

$$\langle \sigma^c_{\alpha\beta} \rangle \sim \langle |S^c_{\alpha\beta}|^2 \rangle_{\Delta\varepsilon} = |a_{\alpha\beta}|^2 \quad (84)$$

(здесь и ниже продолжим опускать индексы JSИ). Если начальная энергия бомбардирующихся частиц фиксирована и поэтому общая энергия ε также фиксирована (с точностью $\Delta\varepsilon$), сечение (84) может быть переписано в форме

$$\langle \sigma^c_{\alpha\beta} \rangle_{\Delta E} \sim \langle |S^c_{\alpha\beta}|^2 \rangle_{\Delta\varepsilon} = \langle |a_{\alpha\beta}|^2 \rangle_{\Delta\varepsilon} \equiv |a_{\alpha\beta}|^2, \quad (84a)$$

где ΔE определено $\Delta\varepsilon$ и энергетическим разрешением детектора конечных фрагментов.

Можно видеть из разделов 3,8 (см., также [7,17]), что усреднённое по энергии время задержки составного ядра и вариация распределений времён задержки составного ядра определяется такими общими соотношениями

$$\langle \tau^c_{\alpha\beta} \rangle = \langle |S^c_{\alpha\beta}|^2 \hbar \partial \arg S^c_{\alpha\beta} / \partial E \rangle / \langle |S^c_{\alpha\beta}|^2 \rangle \quad (85)$$

и

$$D\tau^c_{\alpha\beta} = \frac{\hbar^2 \langle (\partial |S^c_{\alpha\beta}| / \partial E)^2 \rangle_{\Delta E}}{\langle |S^c_{\alpha\beta}|^2 \rangle_{\Delta E}} + \frac{\hbar^2 \langle |S^c_{\alpha\beta}|^2 (\partial \arg S^c_{\alpha\beta} / \partial E)^2 \rangle_{\Delta E}}{\langle |S^c_{\alpha\beta}|^2 \rangle_{\Delta E}} - \langle \tau^c_{\alpha\beta} \rangle^2, \quad (86)$$

соответственно (энергия E – кинетическая энергия конечного фрагмента). Из (83а) и (85) следует (см. также [1,48]), что среднее время задержки, усреднённое по всем каналам, равно

$$\langle \tau^c \rangle = \left\langle \sum_n \frac{\hbar \Gamma_n}{(\varepsilon - \varepsilon_n)^2 + \Gamma_n^2 / 4} \right\rangle_{\Delta E} = 2 \pi \hbar \rho \quad (87)$$

в приближении континуума ($\sum_n \rightarrow \int \rho d\varepsilon$ для усреднённых по энергии величин). И $D\tau^c_{\alpha\beta}$ в том же приближении континуума равно:

$$D\tau^c = \frac{\hbar^2 \langle (\partial |a_{\alpha\beta}| / \partial E)^2 \rangle_{\Delta E}}{\langle |a_{\alpha\beta}|^2 \rangle_{\Delta E}}, \quad (88)$$

если

$$\langle \tau^c \rangle^2, \exp(-\pi \rho \Gamma) \ll \frac{\hbar^2 \langle (\partial |a_{\alpha\beta}| / \partial E)^2 \rangle_{\Delta E}}{\langle |a_{\alpha\beta}|^2 \rangle_{\Delta E}}. \quad (89)$$

Теперь можно видеть математическое подобие (даже совпадение) между сечением составного ядра (88) при выше упомянутых условиях (условия Базя-Ньютона при $\hat{P}_n = \langle \hat{P} \rangle$ и сильном перекрытии резонансов, когда $\pi \Gamma \rho \gg 1$) и сечением временного резонанса (75) для короткого временного резонанса. Поэтому, возвращаясь к выражению $T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}$ с $S_{\alpha\beta} \rightarrow S^c_{\alpha\beta}$, определяемому (83а) для сильно перекрытых резонансов (с $\pi \Gamma \rho \gg 1$), можно переписать (88) приближённо в такой форме:

$$\sigma^{c(n)}_{\alpha\beta} \sim |a^{(n)}_{\alpha\beta}|^2 \sim \exp(-E \tau_n / \hbar) \quad (90)$$

(если $\hbar / \tau_n \gg \Delta E$ при малых ΔE). И при тех же условиях, что и в (92)-(93)

$$D\tau^c \cong \tau_n^2 / 4 \quad (91)$$

(здесь и далее мы пишем $D\tau^c$ без индексов $\alpha\beta$).

Если $\tau_n \ll 2\pi \hbar \rho$ (это возможно, когда $\Delta E \gg \rho^{-1}$), то $D\tau^c \cong \tau_n^2 / 4 \ll (\langle \tau^c \rangle)^2$ и мы имеем узкий временной резонанс (взрыв) составного ядра.

Когда имеется несколько независимых не-флуктуирующих проекторов $\hat{P}_\nu = \langle \hat{P}^{(\nu)} \rangle$, $\nu = 1, 2, \dots, \eta$ (η намного меньше числа резонансов), можно получить при тех же соображениях результат, подобный (81) для $\sigma_{\alpha\beta}$ с осциллирующими членами.

При более реалистических условиях Любошица статистически эквивалентных каналов распадов составного ядра [31] (см. также [1,48]), когда флуктуации \hat{P}_n одинаковы во всех открытых каналах, можно показать, что

$$\langle \tau^c \rangle = 2\pi \hbar \rho / NT \quad (92)$$

где $T = 1 - \exp(-2\pi \rho \Gamma / N)$ и суммой последних двух членов в правой части соотношения (86) для $D\tau^c$ можно пренебречь в приближении континуума. Из (92) ясно, что для сильно перекрытых каналах, когда $\pi \rho \Gamma / N \gg 1$ и $T \rightarrow 1$, имеем:

$$\langle \tau^c \rangle = 2\pi \hbar \rho / N \quad (92a)$$

В[1,48] было показано, что при тех же условиях и когда S_b может рассматриваться как независимая от энергии ε (и E), $D\tau^c \ll \langle \tau^c \rangle^2$. Если, далее, расширить простейшую версию формулы Хаузера-Фешбаха для сечений компаунд-ядерных реакций $\langle \sigma^c_{\alpha\beta} \rangle$ в область процессов высоких энергий, то при тех условиях можно легко убедиться в таком поведении $\langle \sigma^c_{\alpha\beta} \rangle \cong N^{-1} \cong \exp(-E \tau_n / \hbar)$. При условиях Любошица для области сильно перекрывающихся резонансов, $D\tau^c \cong \tau_n^2 / 4 \ll \langle \tau^c \rangle^2$ – и экспоненциальное уменьшение энергетических

спектров конечных фрагментов отвечает узкому *временному резонансу (взрыву)* составного ядра. Могут быть также и определённые ситуации в области сильно перекрывающихся резонансов, когда могут наблюдаться и один или несколько *временных резонансов (взрывов)* в сечениях.

Для слабо перекрывающихся энергетических резонансов (когда $\pi\rho\Gamma/N \ll 1$ при условиях Любошица) или для хорошо разделённых резонансов (когда $\pi\rho\Gamma \ll 1$ при условиях Базя-Ньютона) уже нет *никакого временного резонанса (никакого взрыва)* даже несмотря на экспоненциальное поведение энергетических спектров ($\sigma_{\alpha\beta}(E)$).

Но реальные временные резонансы (взрывы) составных ядер могут иметь место только для высокоплотных ($\Delta E \gg \rho^{-1}$) и сильно перекрывающихся резонансов ($\pi\Gamma\rho \gg 1$ или даже $\pi\Gamma\rho/N \gg 1$).

10. Общие выводы и перспективы.

Представленный здесь временной анализ экспериментальных данных по ядерным процессам позволяет сделать следующие выводы и перспективы:

1. Простое применение временного анализа квазимонохроматического рассеяния нуклонов ядрами в области изолированных резонансов ядрами, искажённых нерезонансным фоном в системе центра масс (в \mathcal{C} -системе) приводит к парадоксальному явлению задержки-опережения вблизи резонанса в любом двухчастичном канале. Этот эффект перехода временной задержки во временное опережение обычно связывается с минимумом в сечении рассеяния, или нулём в аналитической плоскости амплитуды рассеяния (кроме резонансного полюса амплитуды рассеяния) около положительной полуоси кинетических энергий в нижней нефизической полуплоскости римановой поверхности. Здесь такой парадокс *устраняется* тщательным пространственно-временным анализом в *лабораторной (\mathcal{L} -) системе*.

2. Более того, также найдено то, что *стандартные формулы перехода от лабораторной системы к системе центра масс непригодны в присутствии двух механизмов столкновения – быстрого (прямого или потенциального) процесса, когда центр масс практически не сдвигается в процессе столкновения, и задержанного процесса, когда долгоживущее составное ядро движется в \mathcal{L} -системе*. И обнаруженное нами в 1994 году дополнительное изменение фазы амплитуды в $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}$ преобразованиях теперь согласуется устранением парадокса перехода времени задержки во время опережения и времена задержки для потенциального рассеяния и для изолированного компаунд-резонанса должны рассчитываться отдельно друг от друга, так же, как и расстояние, на которое смещается распадающееся составное ядро от точки столкновения до конечного распада в \mathcal{L} -системе. Полученные аналитические преобразования сечения из \mathcal{C} -системы в \mathcal{L} -систему иллюстрируются расчётами энергетической зависимости сечений на нескольких примерах упругого рассеяния нуклонов ядрами ^{12}C , ^{16}O , ^{28}Si , ^{52}Cr , ^{56}Fe и ^{64}Ni в области искажённых резонансов в \mathcal{L} -системе.

3. Приведенные здесь результаты временного анализа квазимонохроматического рассеяния нуклонов ядрами в области изолированных резонансов ядрами, искажённых нерезонансным фоном, можно легко обобщить на случай рассеяния нуклонов ядрами в области двух-трёх близких перекрывающихся резонансов.

4. Разумеется, новые формулы (47)-(51) могут также быть использованы для улучшения существующих общих методов анализа ядерных данных для двухчастичных каналов в нуклонядерных столкновениях в \mathcal{L} -системе и, более того, могут быть обобщены для более сложных столкновений, включая те, которые изучались в [18-21].

5. Применяя временной анализ упругого нуклон-ядерного рассеяния с двумя-тремя компаунд-резонансами, которые расположены близко друг к другу и перекрываются, можно также получить парадоксальное явление перехода задержки в опережение в \mathcal{C} -системе. Но поведение амплитуд и длительностей в \mathcal{L} -системе может быть определён более сложным, чем для изолированного резонанса. Поэтому изучение таких случаев может быть более

усложнённым, чем для изолированного резонанса, и оно должно быть довольно интересным и перспективным.

6. Временной анализ ядерных реакций в области неразрешённых и сильно перекрывающихся состояний позволил вывести по меньшей мере три правила сумм, связывающие времена задержки, а в одном случае и дисперсии распределения времён задержки, со средними плотностями резонансных уровней и ширин.

7. Временной анализ высокоэнергетических ядерных реакций (в области и выше 0.1-ГэВ на нуклон) при формировании конечных компаунд-фрагментов в области высоко плотных и сильно перекрывающихся резонансов результировал открытием явления *временных резонансов (или взрывов)* в таких формированиях. При сравнении с экспериментальными данными достигнуто неплохое согласие теоретической модели с экспериментами.

8. Довольно перспективно изучать влияние окружения на ядерный распад в смысле изменения эволюции и среднего времени жизни распадающихся ядер внутри звёзд и планет с целью определения их возрастов. Предварительные исследования при учёте возбуждённых ядер (в процессах радиационного захвата нейтронов - для звёзд и космического излучения – для планет (их верхних слоёв) представлены в [53-55]. Там, в частности, изучалось влияние распадов возбуждённых состояний α -радиоактивных ядер с эмиссией γ -квантов и их дальнейшего прохождения в огромных звёздных массах и конечным поглощением их другими ядрами с учётом отдачи и эффекта Доплера при отдаче в поглощении и последующем излучении в звёздах. А в планетах учитывалось влияние космического излучения на возбуждение α -радиоактивных ядер в поверхностных слоях, также как и влияние планетной предыстории – в моделях конденсации космической пыли и в моделях формирования планет из охлаждённых звёздных фрагментов, выброшенных во время пертурбаций из ближайших звёзд. Простейшие оценки показывают, что эти влияния вполне могут уменьшить возраст звёзд и планет на несколько порядков (без учёта нуклеосинтеза). Ещё более сильное влияние на возраст звёзд могут оказать явления окружения на β -распад β -радиоактивных ядер вследствие его сильного уменьшения (вплоть до 10^{-9} раз) из-за разрушения атомных оболочек внутри звёздной плазмы (см. выводы в [56]). Изучение этих проблем, может быть, наконец, продолжено при учёте достаточного количества возбуждённых состояний α - и β - радиоактивных ядер внутри звёзд и учёте главных звеньев цепочек распадов, и более того, при учёте *нуклеосинтеза* внутри звёзд в течение их эволюции.

9. Нарастает актуальность новых работ по временному анализу в ядерных реакциях, в ядерной хронометрии, а в дальнейшем и в квантовой космологии.

Приложение I.

Вывод связи перехода сечений двухчастичных реакций из Ц-системы в Л-систему для изолированных резонансов, искажённых нерезонансным фоном.

Для весьма больших макроскопических расстояний углы θ_1 и $\tilde{\theta}_1$, как и импульсы k_1 и \tilde{k}_1 можно считать практически совпадающими. Действительно, $\theta_1 - \tilde{\theta}_1 \rightarrow \Delta r_1 / r_1$ и $k_1 - \tilde{k}_1 \rightarrow \Delta r_1 / r_1$, где $|\Delta r_1| = |r_1 - \tilde{r}_1|$. Для асимптотического волнового пакета вблизи детектора можно записать выражение

$$\Psi \rightarrow \text{const} \int_{r_1 \rightarrow \infty} dk_x g_i(k_x) \int dk_1 g_y(k_1) \int dk_2 \delta(E_i - E_f) \delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) \times$$

$$\times [f_{dir}^{(L)}(E_1, E_2, \theta_1, \theta_2) \exp(ik_1 r_1 + ik_2 r_2) + \frac{J_{C \rightarrow L}^{1/2} \gamma_{Z^*}^{(C)}(E_1, E_2)}{E_{Z^*} - E_{res, Z} + i\Gamma_Z / 2} \exp(ik_1 \tilde{r}_1 + ik_2 \tilde{r}_2)] \exp\left(\frac{-iE_f t}{\hbar}\right) \quad (I,1)$$

используя общий формализм в [27,28]. Здесь $g_i(k_x)$ и $g_y(\mathbf{k}_1)$ – весовые функции, описывающие разброс импульсов бомбардирующих частиц x и ограничения на разброс импульсов конечных частиц y , соответственно, а

$$f_{dir}^{(L)} = \sqrt{f_{C \rightarrow L}} f_{dir}^{(C)} \quad (I,2)$$

- амплитуда реакции прямого процесса, $\gamma_{Z^*}^{(C)}$ - числитель резонансной амплитуды для процесса распада, E_{Z^*} - энергия возбуждения ядра Z^* , $E_{res, Z}$ и Γ_Z - энергия и полная ширина резонансного состояния ядра Z^* , $J_{C \rightarrow L}$ – якобиан кинематических преобразований от системы центра масс в лабораторную систему, r_k и \tilde{r}_k ($k=1,2$) – расстояния, отсчитываемые от точек C_0 и C_1 , соответственно, $\{E_i, \mathbf{k}_i\}$ и $\{E_f, \mathbf{k}_f\}$ – полная энергия и импульс в начальном и конечном каналах, соответственно, $E_l = \hbar^2 k_l^2 / 2m_l$ - кинетическая энергия l -й частицы с массой m_l ($l=1, 2$ отвечают частицам y и Y , соответственно), $\{E_1, \theta_1\}$ - волновой вектор и угол (измеренный относительно движения бомбардирующей частицы) направления излучения l -й частицы, соответственно; $\delta(E_i - E_f)$ и $\delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)$ описывают законы сохранения энергии и импульса. Учтём, что $E_1 + E_2 = E_f$, и перейдём от переменных $k_{1,2} \equiv k_{y,Y}$ к переменным

$$y_{1,2} = \sqrt{\frac{i\hbar t}{m_{1,2}}} \left(k_{1,2}^0 - \frac{m_{1,2} r_{1,2}}{\hbar t} \right)$$

и учтём только проекции $k_{1,2}^0$ на средние скорости $k_{1,2}^0 \equiv \langle k_{1,2} \rangle$ соответственно, оставляя другие компоненты $\mathbf{k}_{1,2}$ в выражении (I, 2). И теперь запишем g_y простоты ради в лоренцевской форме

$$g_y \approx \frac{1}{E_1 - E_1^0 + i\Delta E} \quad (I,3)$$

и выберем очень малые ΔE ($\Delta E \ll \Gamma$), равно как и разброс энергий падающих частиц и разброс энергий ядра Y . Затем, используя результаты аналогичных расчётов из [16,17] и используя упрощения, обусловленные $\delta(E_i - E_f) \cdot \delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)$, получим:

$$\Psi \rightarrow \cong 0 \quad \text{для } \left\{ \begin{array}{l} t < t_i + \frac{r_1}{V_1^0} \\ t < t_i + \tau + \frac{\tilde{r}_1}{V_1^0} \end{array} \right. , \quad (I,4)$$

$$\Psi \approx \text{const} \cdot \exp(-iE_f t / \hbar) \cdot \exp(ik_1^0 r_1 + ik_2^0 r_2) \cdot \{ f_{dir}^{(L)} \cdot [-\Delta E [(t-t_i - \frac{r_1}{V_1^0}) + (t-t_i - \frac{r_2}{V_2^0})] / \hbar] + \frac{J_{C \rightarrow L}^{1/2} \gamma_{Z^*}^{(C)}}{E_{Z^*} - E_{res, Z} + i\Gamma_{Z/2}} \exp[-\Delta E [(t-t_i - \tau - \frac{\tilde{r}_1}{V_1^0}) + (t-t_i - \tau - \frac{\tilde{r}_2}{V_2^0})] / \hbar] \times$$

$$\times \exp[ik_1^0 \Delta r_1 + ik_2^0 \Delta r_2] \} \quad \text{для } \left\{ \begin{array}{l} t > t_i + r_1 / V_1^0 \\ t > t_i + \tau + \tilde{r}_1 / V_1^0, \end{array} \right. \quad (I,5)$$

где $V_{1,2}^0 = \hbar k_{1,2}^0 / m_{1,2}$, $\Delta r_{1,2} = V_{\perp(1,2)} \tau$, $V_{\perp(1,2)}$ - проекция скорости составного ядра на направления $\kappa_{1,2}$, а t_i - начальный момент времени, определяемый фазой начальной весовой амплитуды g_i . Средняя длительность τ движения ядра Z^* определяется известным выражением

$$\tau = \frac{\hbar \Gamma_Z / 2}{(E_Z^* - E_{res,Z})^2 + \Gamma_Z^2 / 4} \quad (I,6)$$

Сечение рассеяния σ определяется временным интегрированием $\Psi_{r_1 \rightarrow \infty}^* \hat{j}_1 \Psi_{r_1 \rightarrow \infty}$ (\hat{j}_1 - оператор плотности потока вероятностей для частицы y) вдоль разрешения по времени (которое намного больше, чем временная протяжённость обычного волнового пакета) с одновременным пространственным интегрированием вдоль волнового пакета второй частицы (Y), т.е.

$$\sigma(\theta) \approx \int_{t_{min}}^{\infty} dt \int_{r_{2,min}}^{r_{2,max}} dr_2 \Psi_{r_1 \rightarrow \infty}^* \hat{j}_1 \Psi_{r_1 \rightarrow \infty} \approx \int_{t_{min}}^{\infty} dt \int_0^{V_2^0(t-t_i - \frac{r_2}{V_2^0})} dr_2 |\Psi_{r_1 \rightarrow \infty}|^2, \quad (I,7)$$

где t_{min} - минимальное значение между $t_i + r_1 / V_1^0$ и $t_i + \tilde{r}_1 / V_1^0$, $r_{2,max}$ - максимальное значение между $V_2^0(t - t_i - \frac{r_2}{V_2^0})$ и $V_2^0(t - t_i - \tau - \frac{\tilde{r}_2}{V_2^0})$, а $r_{2,min} \rightarrow 0$ для обычных малых (по сравнению с $r_{2,max}$) волновыми пакетами.

Легко убедиться, что в стандартных экспериментальных условиях (для квази-монохроматического пучка и для изолированного резонанса составного ядра (когда $\Delta E \ll \Gamma$, $0 < \tau \leq 2\hbar / \Gamma$, и если $\Gamma \leq 2\hbar / \tau$), когда

$$\Delta E \cdot \tau / \hbar \ll 2 \quad (I,8a)$$

и абсолютные значения всех разностей

$$\frac{r_l}{V_l^0} - \frac{r_m}{V_m^0} \quad (l \neq m = 1, 2) \quad (I,8b)$$

будут значительно меньше, чем временное разрешение, получим:

$$\sigma = \sigma_{0(incoherent)} + \sigma_{1(interf)}, \quad (I,9)$$

где

$$\sigma_0 \cong |f_{dir}^{(L)}| + \frac{J_{C \rightarrow L} |\gamma_{Z^*}^{(C)}|^2}{(E_Z^* - E_{res,Z} + \Gamma^2 / 4)} \quad (I,10)$$

и

$$\sigma_1 = 2 \left| f_{dir}^{(C)} \frac{J_{C \rightarrow L}^{1/2} \chi_{Z^*}^{(C)}}{E_Z^* - E_{res,Z} + i\Gamma_Z / 2} \right| \cos \Phi, \quad (I,11)$$

где общая фаза Φ равна

$$\Phi = \delta + \beta + \varphi \quad (I,12)$$

с

$$\delta = \arg (J_{C \rightarrow L}^{1/2} \chi_{Z^*}^{(C)}) - \arg f_{dir}^{(C)}, \quad (I,12a)$$

$$\beta = \arg \{ (E_Z^* - E_{res,Z} + i\Gamma_Z / 2)^{-1} \}, \quad (I,12b)$$

$$\varphi = k_1^0 \Delta r_1 + k_2^0 \Delta r_2, \quad (I,12c)$$

при этом другие члены определяются равенствами

$$f_{dir}^{(L)} = \sqrt{J_{C \rightarrow L}} \cdot f_{dir}^{(C)} = \sqrt{J_{C \rightarrow L}} f_b(E_1^C, \theta_1^C), \quad (I,13)$$

$$\frac{\gamma_{Z^*}^{(C)}(E_1, E_2)}{E_Z^* - E_{res,Z} + i\Gamma_Z / 2} = f_{l,res}(E_1^C, \theta_1^C). \quad (I,14)$$

В выражениях (I,13) и (I,14) $f_b(E_1^C, \theta_1^C)$ и $f_{l,res}(E_1^C, \theta_1^C)$ представляют собой

$$f_b(E_1^C, \theta_1^C) = f_c(E_1^C, \theta_1^C) + (2ik)^{-1} \sum_{l' \neq l} (2l' + 1) P_{l'}(\cos \theta_1^C) e^{2i\eta_{l'}} (e^{2i\delta_{l'}^b} - 1) \quad (I,15)$$

и

$$f_{l,res}(E_1^C, \theta_1^C) = (2ik)^{-1} (2l + 1) P_l(\cos \theta_1) e^{2i\eta_l} \left\{ e^{2i\delta_l^b} \frac{E_1^C - E_{l,res}^C - i\Gamma / 2}{E_1^C - E_{l,res}^C + i\Gamma / 2} - 1 \right\}, \quad (I,16)$$

где $f_c(E_1^C, \theta_1^C)$ - амплитуда кулоновского рассеяния, $\eta_{l'}$ - l' -парциальная кулоновская фаза, k - волновое число относительного движения, $\delta_{l'}^b$ - l' -парциальная фаза фонового рассеяния. Мы основывались на определении сечения рассеяния через асимптотические волновые функции. В $\mathbf{Ц}$ -системе источник расходящихся волн для обоих процессов (быстрых и задержанных) один и тот же и неподвижный, так что интерференционная картина определяется обычной суперпозицией амплитуд обоих процессов. В $\mathbf{Л}$ -системе движение распадающегося составного ядра, которое совпадает с движением составного ядра, вызывает сдвиг источника расходящихся волн для задержанного резонансного процесса по отношению к быстрому процессу, и результирующая интерференция будет более сложной.

Приложение II.

О пространственно-временном анализе интерференционных явлений с тремя частицами в конечном канале.

Введение. Это приложение написано на основе [57]. Здесь изучаются интерференционные явления, когда 2 частицы детектируются одновременно (в том смысле, который будет высказан позднее) в ядерных реакциях с 3 частицами (ядрами) в конечном канале.

Пространственно-временное описание интерференции между различными механизмами с 3 частицами в конечном канале. Оригинальная идея была представлена Подгорецким и Копыловым [83] для 2-частичной эмиссии (испарения) из тяжёлых ядер. Здесь мы рассмотрим интерференцию между быстрыми прямыми и задержанными резонансными процессами в реакции типа



На рис. 1a,b представлены два возможных механизма для реакции (II,1).

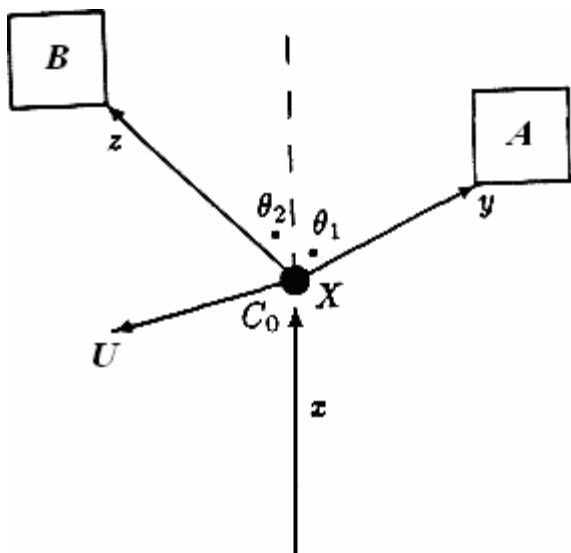


Рис. II,1a. Прямой процесс канала реакции.

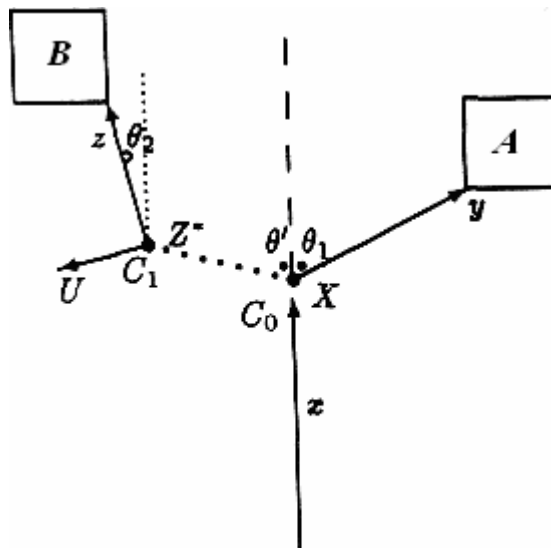


Рис. II,1б. Последовательный процесс канала реакции.

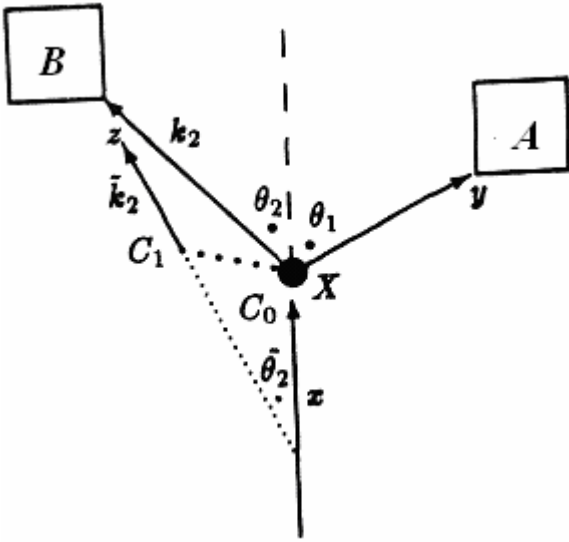


Рис.П.2. Одновременное представление прямого и последовательного процессов.

Символы A и B , заключённые в квадраты, изображают детекторы, расположенные на макроскопических расстояниях r_1 и r_2 от точки столкновения C_0 . На рис.1а изображён прямой (или т.н. одно- и двух-ступенчатый прямой) процесс и одновременный быстрый вылет в точке C_0 всех 3 конечных частиц. Рис.1б представляет задержанный последовательный процесс распада с эмиссией частицы y и формированием промежуточного возбуждённого ядра Z^* , которое затем распадается на z и U в точке C_1 , соответственно реакции



(задержанный последовательный процесс распада с излучением частицы z)

На рис.2 суперпозиция прямого и последовательного излучения одной из финальных частиц рассмотрена на одном и том же рис. Для макроскопических расстояний и при условии, записанном ниже, углы θ_2 и $\tilde{\theta}_2$, так же, как и импульсы k и k_2 можно рассматривать как практически совпадающие.

Асимптотический волновой пакет вблизи детекторов A и B может быть описан таким выражением:

$$\begin{aligned} \Psi_{ab}(r_1, r_2 \rightarrow \infty) \rightarrow & C \int dk_x g_i(k_x) \int dk_2 g_{f,2}(k_2) \int dk_1 f_{f,1}(k_1) \times \\ & \times \int dk_3 \delta(E_i - E_f) \delta(K_i - K_f) \left[f_{dir}^{(L)}(E_1, E_2, E_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3) e^{\left(\sum_{j=1}^{j=3} ik_j r_{jC_0} \right)} + \right. \\ & \left. \frac{f_{Z^*}^{(L)}(E_1, E_2, E_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\varepsilon_Z^* - \varepsilon_{res,Z} + i\Gamma_Z / 2} e^{\left(ik_1 r_{C_0} + \sum_{j=2}^{j=3} ik_j r_{jC_1} \right)} \right] e^{-iE_j / \hbar}. \end{aligned} \quad (\text{II},3)$$

В этом выражении C – константа нормировки, $g_i, g_{f,1}, g_{f,2}$ – амплитуды весовых функций, описывающие разброс импульсов начальной частицы x и конечных частиц y и z вследствие детекторного разрешения,

$$f_{dir}^{(L)} = \sqrt{J_{C \rightarrow L}} f_{dir}^{(C)} \quad (\text{II},4)$$

и

$$f_{Z^*}^{(C)} = \sqrt{J_{R \rightarrow C} J_{C \rightarrow L}} f_{xy}^{(C)} \Gamma_Z^{(C)} \quad (\text{II,5})$$

-амплитуды прямого и задержанного последовательного процесса (индексы L и C относятся к лабораторной системе и системе центра масс, соответственно), $f_{xy}^{(C)}$ и $\Gamma_Z^{(C)}$ - амплитуда первого этапа прямого процесса $x + X \rightarrow y + Z^*$ и ширина резонансного процесса распада $Z^* \rightarrow z + U$, соответственно, ε_Z^* , $\varepsilon_{res,Z}$ и Γ_Z - энергия возбуждения, энергия и полная ширина резонансного состояния ядра Z^* ; $J_{R \rightarrow C}$ и $J_{C \rightarrow L}$ - якобианы координатных преобразований от системы отдачи к системе центра масс (С.М.) и от С.М. системы к лабораторной, соответственно; r_{km} - расстояния от точек m ($m = C_0, C_1$) к частицам k (где $k = 1, 2, 3$ соответствуют y, z, U); E_i, \mathbf{k}_i и E_f, \mathbf{k}_f - полные энергии и импульсы в начальном и конечном каналах, соответственно; $E_j = \hbar^2 k_j^2 / 2m_j$ - кинетическая энергия j -й частицы, θ_j и \mathbf{k}_j - угол движения (относительно пучка падающей частицы x , направление) и волновой вектор частицы j , соответственно. В выражении (II,3) $\delta(E_i - E_f)$ и $\delta(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f)$ выражают законы сохранения энергии и импульса. Выражение (II,3) написано на основе общего формализма, описанного в [33] с применением к асимптотическим стационарным функциям, введенным в [27,28] и принимая во внимание частицу U явно. Простоты ради множитель $r_{1C_0}^{-1} r_{2C_0}^{-1} r_{3C_0}^{-1}$ опущен, как и внутренние координаты и спин.

Множитель $e^{-iE_f t / \hbar}$ может быть переписан как

$$e^{-i(E_1 + E_2 + E_3) \frac{t}{\hbar}} e^{-iE_f \frac{t}{\hbar}}, \quad (\text{II,6})$$

а первые три множителя выражения (II,3), скомбинированные с множителем (II,6), можно формально вложить в интегралы уравнения (II,3) как:

$$\int d\mathbf{k}_1 g_{f,1} e^{ik_1 r_{1m} - iE_1 \frac{t}{\hbar}} \dots$$

$$\int d\mathbf{k}_2 g_{f,2} e^{ik_2 r_{2m} - iE_2 \frac{t}{\hbar}} \dots$$

$$\int d\mathbf{k}_3 g_{f,3} e^{ik_3 r_{3m} - iE_3 \frac{t}{\hbar}} \dots$$

Чтобы преобразовать предыдущие интегралы, полезно провести замену переменных $k_{1,2,3}$ к переменным

$$\mathbf{y}_{1,2,3} = \left(\frac{i\hbar t}{m_{1,2,3}} \right)^{1/2} \left(\mathbf{k}_{1,2,3}^0 - \frac{m_{1,2,3} \Gamma_{1,2,3}}{\hbar t} \right). \quad (\text{II, 7})$$

Здесь взяты только проекции $\mathbf{k}_{1,2,3}$ на средние векторы $\mathbf{k}_{1,2,3}^0 \equiv \langle \mathbf{k}_{1,2,3} \rangle$, а другие компоненты $\mathbf{k}_{1,2,3}$ остаются в других частях (II,3). Множитель $g_{f,2}$ можно предположить имеющим форму

$$g_{f1,2} \approx \frac{c_{1,2}}{E_1 - E_{1,2}^0 - i\Delta E}, \quad (\text{II,8})$$

а величину ΔE очень малой ($\Delta E \ll \Gamma_Z$), так же как и разброс энергий начальной частицы x . Используя известный результат для подобного вычисления (см., например, [16,20]), волновая функция приобретает вид

$$\Psi_{ab} \approx 0 \quad (\text{II,9})$$

для

$$t < t_i + \frac{r_{1C_0}}{v_1^0}, \quad t < t_i + \frac{r_{2C_0}}{v_2^0}, \quad t < t_i + \frac{r_{3C_0}}{v_3^0},$$

$$t < t_i + \tau + \frac{r_{2C_1}}{v_2^0}, \quad t < t_i + \tau + \frac{r_{3C_1}}{v_3^0} \quad (\text{II,10})$$

и

$$\begin{aligned} \Psi \propto C \times e^{-iE_j^0 t / \hbar} \times \\ \times e^{i \sum_j k_j^0 r_{C_0}} \times \left[f_{dir}^L e^{-\Delta E [(t-t_i) \frac{r_{1C_0}}{v_1^0} + (t-t_i) \frac{r_{2C_0}}{v_2^0} + (t-t_i) \frac{r_{3C_0}}{v_3^0}]} / \hbar} + \right. \\ \left. + \frac{f_{Z^*}^L}{\varepsilon_Z^* - \varepsilon_{res,Z} + i\Gamma_Z / 2} e^{-\Delta E [(t-t_i) \frac{r_{1C_0}}{v_1^0} + (t-t_i) \frac{r_{2C_1}}{v_2^0} + (t-t_i) \frac{r_{3C_1}}{v_3^0}]} / \hbar \right] e^{ik_2^0 \Delta r_2 + ik_3^0 \Delta r_3} \end{aligned} \quad (\text{II,11})$$

для

$$t > t_i + \frac{r_{1C_0}}{v_1^0}, \quad t > t_i + \frac{r_{2C_0}}{v_2^0}, \quad t > t_i + \frac{r_{3C_0}}{v_3^0},$$

$$t > t_i + \tau + \frac{r_{2C_1}}{v_2^0}, \quad t > t_i + \tau + \frac{r_{3C_1}}{v_3^0}. \quad (\text{II,12})$$

Здесь $v_{1,2,3}^0 = \hbar k_{1,2,3}^0 / m_{1,2,3}$, начальный момент времени t_i определён фазой амплитудного весового множителя g_i ; среднее время τ ядра Z^* перед его распадом даётся известным выражением:

$$\tau = \frac{\hbar \Gamma_Z / 2}{(\varepsilon_Z^* - \varepsilon_{res,Z})^2 + \Gamma_Z^2 / 4} \quad (\text{II,13})$$

и

$$\Delta r_{2,3} = V_{\perp(2,3)} \tau, \quad (\text{II,14})$$

$V_{\perp(2,3)}$ - проекция скорости движения ядра Z^* на направление $k_{2,3}$. Разброс энергий для частицы U – порядка ΔE , в соответствии с сохранением энергии-импульса.

Интерференционные явления могут иметь место только в случае одновременного прибытия (в пределах временного разрешения детекторов) частиц y и z в A и B . Интенсивность скорости совпадений определяется временным интегралом

$$\Psi_{ab}^* \hat{j}_1 \hat{j}_2 \Psi_{ab}$$

($\hat{j}_{1,2}$ - плотность потока вероятности для частиц y и z) по интервалу времени ΔT , который велик по сравнению с временной протяжённостью волновых пакетов, и пространственным интегрирование по координатам частицы U , т.е.:

$$P \approx \int_{t_{\min}}^{\infty} dt \int_{r_{3\min}}^{r_{3\max}} dr_3 \Psi_{ab}^* \hat{j}_1 \hat{j}_2 \Psi_{ab} \propto \int_{t_{\min}}^{\infty} dt \int_0^{v_3^0(t-t_i - \frac{r_{3C_0}}{v_3^0})} dr_3 |\Psi_{ab}|^2, \quad (\text{II},15)$$

где t_{\min} – наименьшее значение среди

$$t_i + \frac{r_{1C_0}}{v_1^0}, \quad t_i + \frac{r_{2C_0}}{v_2^0}, \quad t_i + \frac{r_{3C_0}}{v_3^0},$$

$$t_i + \tau + \frac{r_{2C_1}}{v_2^0}, \quad t_i + \tau + \frac{r_{3C_1}}{v_3^0},$$

$r_{3\max}$ - максимальное значение между $v_3^0(t-t_i - \frac{r_{3C_1}}{v_3^0})$ и $v_3^0(t-t_i - \tau - \frac{r_{3C_1}}{v_3^0})$, $r_{3\min} \rightarrow 0$ для обычных малых волновых пакетов.

В стандартных экспериментальных условиях, т.е. когда

$$\Delta E \tau / \hbar \ll 1 \quad (\text{II},16)$$

и

$$\delta t = \frac{r_l}{v_l^0} - \frac{r_m}{v_m^0} \ll \Delta T, (l, m = 1, 2, 3, l \neq m) \quad (\text{II},17)$$

(ΔT - время разрешения схемы совпадений), можно записать

$$P = P_0 + P_1, \quad (\text{II},18)$$

$$P_0 = |f_{dir}^L|^2 + \frac{|f_{Z^*}^L|^2}{(\varepsilon_Z^* - \varepsilon_{res,Z})^2 + \Gamma_Z^2/4} \quad (\text{II},19)$$

и

$$P_1 = 2 \left| f_{dir}^L \frac{f_{Z^*}^L}{\varepsilon_Z^* - \varepsilon_{res,Z} + i\Gamma_Z/2} \right| \cos \Phi \quad (\text{II},20)$$

(в произвольных единицах), где

$$\Phi = \delta + \beta + \varphi,$$

$$\delta = \arg(f_{Z^*}^L) - \arg(f_{dir}^L),$$

$$\beta = \arg(\varepsilon_z^* - \varepsilon_{res,z} + i\Gamma/2)^{-1},$$

$$\varphi = k_2^0 \Delta r_2 + k_3^0 \Delta r_3,$$

$\Delta r_{2,3}$ определяется (II,14).

Полученные результаты (II,18)-(II,20), с некогерентной суммой P_0 , интерференционным членом P_1 и фазой Φ , очевидно, обобщают результаты, полученные ранее нами в [22-24] для столкновений с 2-частичными каналами. Сравнивая эти результаты с полученными в стационарной модели [27,28], можно видеть, что последние подтверждаются настоящим самосогласованным пространственно-временным подходом в пределе $\Delta E \ll \Gamma_Z$ и последние переходят при $\Delta E/\Gamma_Z \rightarrow 0$ в стационарную модель типа [27,28].

Такой же вывод действителен и для случаев, в которых формируются два промежуточных возбуждённых состояния, т.е.

$$x + X \rightarrow \begin{cases} y + Z^* \rightarrow y + z + U \\ z + Y^* \rightarrow z + y + U \end{cases},$$

при условиях $\Delta E \ll \Gamma_y$ и $\Delta E \ll \Gamma_z$.

Приложение III.

Вывод правила сумм, связывающего среднее время задержки составного ядра, дисперсию распределений времён задержки поставного ядра с характеристиками составного ядра - средними резонансной плотностью и шириной ρ_j и Γ_j .

Следуя [30] и вводя, вместо эрмитовой матрицы

$$\hat{Q} = i\hbar \hat{S} \frac{d\hat{S}^*}{dE},$$

которая была использована в разделе 9, новую матрицу

$$\hat{R} = -\hbar^2 \hat{S} \frac{d^2 \hat{S}^*}{dE^2}, \quad (\text{III,1})$$

исследуем её $\text{Tr} \hat{R}$. Для простоты здесь и далее опустим индексы J .

После серии преобразований \hat{R} с использованием соотношения

$$\frac{d}{dE} \sum_k S_{ik} S_{jk}^* = 0, \quad (\text{III,2})$$

прямо следующим из дифференцирования соотношения унитарности (53) для S -матрицы, получим такое соотношение

$$\begin{aligned} \text{Trace } \hat{R} = \hbar^2 \left\{ \sum_{ik} \left[\left(\frac{dT_{ik}}{dE} \right)^2 + |T_{ik}|^2 \left(\frac{d \arg T_{ik}}{dE} \right)^2 \right] + i \sum_{ik} \left[\frac{d \arg T_{ik}}{dE} \frac{d|T_{ik}|^2}{dE} + |T_{ik}|^2 \frac{d^2 \arg T_{ik}}{dE^2} \right] + \right. \\ \left. + i \sum_i \frac{d^2 \text{Im} S_{ii}}{dE^2} \right\}, \quad (\text{III,3}) \end{aligned}$$

где $T_{ik} = \delta_{ik} - S_{ik}$ - теперь элемент парциальной T -матрицы.

Усреднением соотношения (III,3) по энергетическому разбросу волновых пакетов в начальном канале можно записать

$$\langle \text{Trace } \hat{R} \rangle = \frac{\int |g(E)|^2 \text{Trace } \hat{R} dE}{\int |g(E)|^2 dE}, \quad (\text{III},4)$$

где весовая функция $|g(E)|^2$ нормирована условием $\int |g(E)|^2 dE = 1$.

Интегрируя член с $\frac{d^2 \arg T_{ik}}{dE^2}$ по частям в (III,4), можно легко убедиться, что вторая сумма \sum_{ik} в (III,4) для плавных весовых функций $|g(E)|^2$ исчезает и может быть проигнорирована. Более того, суммой \sum_i в (III,4) можно также пренебречь, поскольку её величина порядка, по крайней мере, $(\Delta E)^{-1}$, как можно легко видеть после интегрирования (особенно для прямоугольной формы $|g(E)|^2$). Таким образом, в этом приближении можно записать

$$\langle \text{Trace } \hat{R} \rangle = \text{Re } \langle \text{Trace } \hat{R} \rangle = \hbar^2 \sum_{ik} \left[\left\langle \left(\frac{dT_{ik}}{dE} \right)^2 \right\rangle + \left\langle |T_{ik}|^2 \left(\frac{d \arg T_{ik}}{dE} \right)^2 \right\rangle \right]. \quad (\text{III},5)$$

Как можно видеть из выражений (5)-(6) для дисперсии длительностей столкновений $D\tau_{ik}$ (здесь в дисперсии для парциальных столкновений мы опустили индекс J) для достаточно больших длительностей столкновений, можно переписать соотношение (III,5) в виде

$$\text{Re } \langle \text{Trace } \hat{R} \rangle = \sum_{ik} [D\tau_{ik} + \langle \tau_{ik} \rangle^2] / \langle |T_{ik}|^2 \rangle. \quad (\text{III},6)$$

Теперь изучим \hat{R} и $\langle \text{Trace } \hat{R} \rangle$, используя представление Симониуса (82) для S -матрицы (как обычно опуская индексы J). Поскольку, очевидно, $\text{Trace } \hat{R} = \text{Trace } \hat{R}_{res}$ с

$$\hat{R}_{res} = -\hbar^2 \hat{S}_{res} (d^2 \hat{S}_{res} / dE^2) \text{ и } \hat{S}_{res} = \prod_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{i\Gamma_{\nu} \hat{P}_{\nu}}{E - E_{\nu} + i\Gamma_{\nu} / 2} \right), \text{ достаточно изучить } \hat{R}_{res}.$$

Принципиально простые, но довольно громоздкие вычисления дают

$$\begin{aligned} \text{Trace } \hat{R}_{res} = & -2i\hbar^2 \sum_m \frac{\Gamma_m \cdot \text{Trace } \tilde{P}_m}{[(E - E_m)^2 + \Gamma_m^2 / 4](E - E_m - i\Gamma_m / 2)} + \\ & + 2\hbar^2 \sum_{m' < m} \frac{\Gamma_m \Gamma_{m'} \cdot \text{Trace } \tilde{P}_m \cdot \tilde{P}_{m'}}{[(E - E_m)^2 + \Gamma_m^2 / 4][(E - E_{m'})^2 + \Gamma_{m'}^2 / 4]}, \end{aligned} \quad (\text{III},7)$$

где $\tilde{P}_m = \hat{s}_m \hat{P}_m \hat{s}_m^*$, $\hat{s}_m = \prod_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{i\Gamma_k \hat{P}_k}{E - E_k + i\Gamma_k / 2} \right)$ с $\hat{s}_m \hat{s}_m^* = 1$, (\tilde{P}_m - тоже проектор, поскольку он является унитарной трансформой проектора \hat{P}_m) и мы использовали соотношения

$$\text{Trace } \tilde{P}_m \cdot \tilde{P}_{m'} = \text{Trace } \tilde{P}_{m'} \cdot \tilde{P}_m, \quad \text{Trace } \tilde{P}_m \cdot \tilde{P}_{m'} \cdot \tilde{P}_m = \text{Trace } \tilde{P}_{m'} \cdot \tilde{P}_m,$$

которые являются очевидным следствием цикличности операции trace и свойств проекторов. Чтобы проанализировать $\text{Trace } \tilde{P}_m \cdot \tilde{P}_{m'}$, используем представление, введенное в [33,58],

$$(\hat{P}_m)_{\nu\nu'} = x_{m,\nu} \cdot x_{m,\nu'}^*, \quad (\text{III},8)$$

с $\sum_{\nu=1}^n |x_{m,\nu}|^2 = 1$. Тогда

$$(\tilde{P}_m)_{\nu\nu'} = (\hat{y}_m)_\nu \cdot (\hat{y}_m^*)_{\nu'} , \quad (\text{III,9})$$

где $(y_m)_\nu = \sum_{\nu'} s_{m,\nu\nu'} \cdot x_{m,\nu'}$ и $\sum_{\nu=1}^n |(y_m)_\nu|^2 = 1$. Поэтому $\text{Trace } \tilde{P}_m = 1$ и $\text{Trace } \tilde{P}_m \tilde{P}_{m'}$ становится $\text{Trace } \tilde{P}_m \cdot \tilde{P}_{m'} = \left| \sum_{\nu} A_{mm',\nu} \right|^2$, где $A_{mm',\nu} = (\hat{y}_m)_\nu \cdot (\hat{y}_{m'}^*)_\nu$. Следовательно,

$$0 < \text{Trace } \tilde{P}_m \cdot \tilde{P}_{m'} = \left| \sum_{\nu} A_{mm',\nu} \right|^2 \leq 1 . \quad (\text{III,10})$$

Переписывая (III,7) в усреднённом (по энергетическому разбросу волновых пакетов в начальном канале) виде

$$\begin{aligned} \langle \text{Trace } \hat{R}_{res} \rangle = \text{Re } \langle \text{Trace } \hat{R}_{res} \rangle = \langle \{ - 2i\hbar^2 \sum_m \frac{\Gamma_m}{[(E - E_m)^2 + \Gamma_m^2 / 4](E - E_m - i\Gamma_m/2)} + \\ + 2\hbar^2 \sum_{m' < m} \frac{\Gamma_m \Gamma_{m'} \cdot \text{Trace } \tilde{P}_m \cdot \tilde{P}_{m'}}{[(E - E_m)^2 + \Gamma_m^2 / 4][(E - E_{m'})^2 + \Gamma_{m'}^2 / 4]} \} \rangle , \end{aligned} \quad (\text{III,11})$$

получим

$$\begin{aligned} & \langle \sum_m \frac{(-2i\hbar^2)\Gamma_m}{[(E - E_m)^2 + \Gamma_m^2 / 4](E - E_m - i\Gamma_m/2)} \rangle \approx \\ & \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{D} \frac{(-2i\hbar^2)\bar{\Gamma}}{[\varepsilon^2 + \bar{\Gamma}^2 / 4](\varepsilon - i\bar{\Gamma}/2)} = \frac{4\pi\hbar^2}{D\bar{\Gamma}} , \quad (\text{III,12}) \\ & \langle 2\hbar^2 \sum_{m' < m} \frac{\Gamma_m \Gamma_{m'} \cdot \text{Trace } \tilde{P}_m(E) \cdot \tilde{P}_{m'}(E)}{[(E - E_m)^2 + \Gamma_m^2 / 4][(E - E_{m'})^2 + \Gamma_{m'}^2 / 4]} \rangle \approx \\ & \approx 2\hbar^2 \frac{\bar{\Gamma}^2}{D^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \int_{-\infty}^{\varepsilon} d\varepsilon' \frac{(\text{Trace } (\tilde{P}(\varepsilon, E) \tilde{P}(\varepsilon', E)))}{[\varepsilon^2 + \bar{\Gamma}^2 / 4][\varepsilon'^2 + \bar{\Gamma}^2 / 4]} = \\ & = 2i\hbar^2 \frac{\bar{\Gamma}}{D^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{[\ln \frac{\varepsilon + i\bar{\Gamma}/2}{\varepsilon - i\bar{\Gamma}/2}](\text{Trace } (\tilde{P}(\varepsilon, E) \tilde{P}(\varepsilon', E)))}{[\varepsilon^2 + \bar{\Gamma}^2 / 4]} = \\ & = \frac{2i\hbar^2}{D^2} \langle (\text{Trace } (\tilde{P}(\varepsilon_c, E) \tilde{P}(\varepsilon'_c, E))) \rangle \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{[\ln \frac{\varepsilon + i\bar{\Gamma}/2}{\varepsilon - i\bar{\Gamma}/2}]}{[\varepsilon^2 + \bar{\Gamma}^2 / 4]} = \\ & = \frac{4\pi^2\hbar^2 (\text{Trace } (\tilde{P}(\varepsilon_c, E_0) \tilde{P}(\varepsilon'_c, E_0)))}{D^2} , \quad (\text{III,13}) \end{aligned}$$

где $\tilde{P}(\varepsilon_c, E), \tilde{P}(\varepsilon'_c, E), \tilde{P}(\varepsilon_c, E_0)$ и $\tilde{P}(\varepsilon'_c, E_0)$ - значения \tilde{P}_m и $\tilde{P}_{m'}$ в точках $\varepsilon_c, \varepsilon'_c$ and E_0 , определённых интегральной теоремой вокруг средних значениях, а именно уравнениями

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon} d\varepsilon' \frac{\tilde{P}(\varepsilon', E)}{\varepsilon'^2 + \bar{\Gamma}/4} = \tilde{P}(\varepsilon'_c, E) \int_{-\infty}^{\varepsilon} d\varepsilon' \frac{1}{\varepsilon'^2 + \bar{\Gamma}/4}, \quad (\text{III,14})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{\langle \text{Trace} \tilde{P}(\varepsilon, E) \tilde{P}(\varepsilon'_c, E) \rangle}{[\varepsilon^2 + \bar{\Gamma}/4]} \ln \frac{\varepsilon + i\bar{\Gamma}/2}{\varepsilon - i\bar{\Gamma}/2} = \\ = \langle \text{Trace} \tilde{P}(\varepsilon, E) \tilde{P}(\varepsilon'_c, E) \rangle \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{\ln \frac{\varepsilon + i\bar{\Gamma}/2}{\varepsilon - i\bar{\Gamma}/2}}{\varepsilon^2 + \bar{\Gamma}/4} \end{aligned} \quad (\text{III,15})$$

и

$$\begin{aligned} \langle \text{Trace} \tilde{P}(\varepsilon, E) \tilde{P}(\varepsilon'_c, E) \rangle &= \frac{\int |g(E)|^2 \text{Trace} \tilde{P}(\varepsilon, E) \tilde{P}(\varepsilon'_c, E) dE}{\int |g(E)|^2 dE} = \\ &= \text{Trace} \tilde{P}(\varepsilon, E_0) \tilde{P}(\varepsilon'_c, E_0), \end{aligned} \quad (\text{III,16})$$

соответственно.

Чтобы получить соотношения (III,12) и (III,13), мы также использовали мы также использовали вычеты по теореме Коши для интегралов

$$\oint_{C_0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon - i\bar{\Gamma}/2} \quad \text{и} \quad \oint_{C_{\pm}} \frac{f(\varepsilon) \ln(\varepsilon \mp i\bar{\Gamma}/2)}{\varepsilon \pm i\bar{\Gamma}/2} d\varepsilon,$$

где $f(\varepsilon)$ – аналитическая функция в верхней или нижней полу-плоскости комплексных значений ε , которая исчезает на полуокружностях Γ_{\pm} бесконечно большого радиуса; контуры C_0, C_- и C_+ на рис. III,1 (где контуры γ_- и γ_+ на краях разрезов около точек ветвления $\ln(\varepsilon \pm i\bar{\Gamma}/2)$ снаружи контуров интегрирования). Если использовать аналитические функции $D(E_m)$ в приближении континуума вместо среднего расстояния между уровнями \bar{D} , результаты не изменятся при использовании аппроксимации $D(E_m \pm i\bar{\Gamma}_m/2) = \bar{D}$.

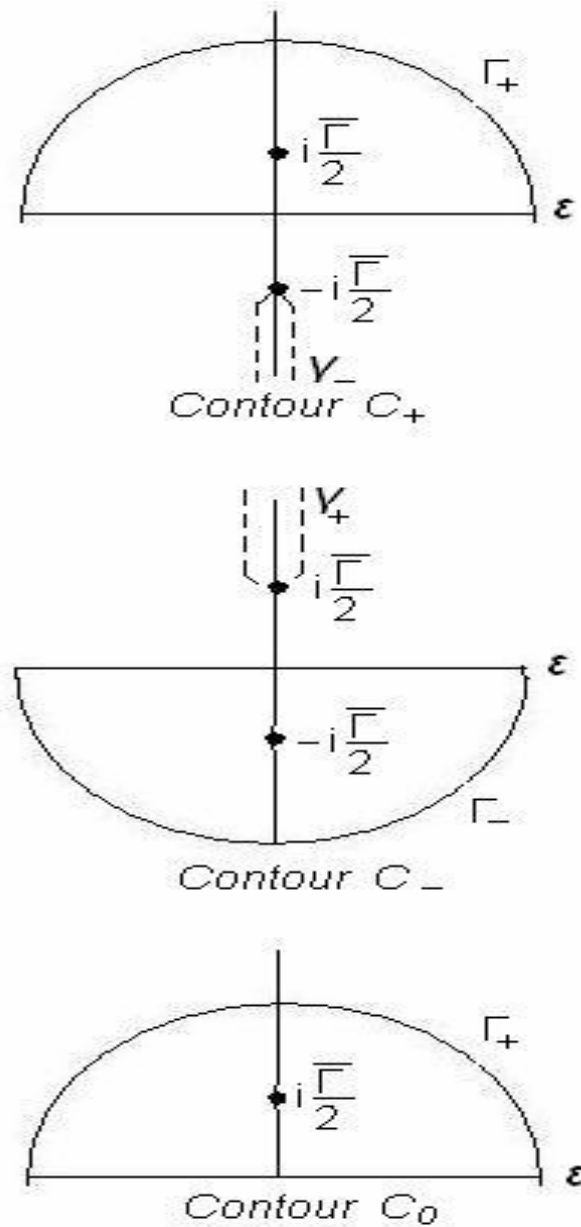


Рис. III,1. Контура C_0 , C_- и C_+ , контура γ_- и γ_+ на краях разрезов вблизи точек ветвления $\ln(\varepsilon \pm \pm i\bar{\Gamma}/2)$.

Конечно, приближение континуума оправдано только для усреднения по $\Delta E \gg \rho^{-1}$.

Для статистически эквивалентных каналов с $N \gg 1$ ($N \rightarrow \infty$) в аппроксимации случайных фаз (для $A_{mm',\nu}$) проведём следующую приближённую оценку

$$\text{Trace } \tilde{P}_m \cdot \tilde{P}_{m'} \rightarrow \text{Trace } \tilde{P}(\varepsilon, E_0) \tilde{P}(\varepsilon', E_0) \approx \sum_{\nu} \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}. \quad (\text{III},17)$$

Подставляя выражения (III,12) и (III,13) в (III,11), окончательно получим

$$\text{Re } \langle \text{Trace } \hat{R}_{res} \rangle \cong \frac{4\pi\hbar^2 \bar{\rho}}{\bar{\Gamma}} + 4\pi^2 \hbar^2 \bar{\rho}^2 \frac{M}{N}, \quad (\text{III},18)$$

где

$$\frac{M}{N} \equiv \text{Trace } \tilde{P}(\varepsilon, E_0) \tilde{P}(\varepsilon', E_0),$$

что равно $1/N$ в приближении случайных фаз для статистически эквивалентных каналов при $N \gg 1$ ($N \rightarrow \infty$).

Затем, используя снова индексы JSΠ, получим такую форму соотношения (III,18):

$$\text{Re} \langle \text{Trace} \hat{R}_{res}^{(JS\Pi)} \rangle = 4\pi\hbar^2 \rho^{(JS\Pi)} / \Gamma^{(JS\Pi)} + 4\pi^2 \hbar^2 (\rho^{(JS\Pi)})^2 M^{(JS\Pi)} / N^{(JS\Pi)}. \quad (\text{III},19)$$

Наконец, сравнивая (III,6) с (III,19), запишем следующее правило сумм

$$\begin{aligned} \sum_{ik} [D\tau_{ik}^{(JS\Pi)}(E) + \langle \tau_{ik}^{(JS\Pi)}(E) \rangle^2] / \langle |T_{ik}^{(JS\Pi)}(E)|^2 \rangle = 4\pi\hbar^2 \rho^{(JS\Pi)} / \Gamma^{(JS\Pi)} + \\ + 4\pi^2 \hbar^2 (\rho^{(JS\Pi)})^2 M^{(JS\Pi)} / N^{(JS\Pi)}. \end{aligned} \quad (\text{III},20)$$

В общем, величина $M^{(JS\Pi)} / N^{(JS\Pi)}$ флуктуирует между 0 и 1 (см. соотношение (III,10)) и её можно использовать как эмпирический параметр, описывающий канал-каналовые корреляции между резонансами (более точно, между проекторами резонансов \hat{P}_m).

Теперь, для изучения компаунд-ядерных процессов будем использовать соотношения (снова опуская индексы JSΠ)

$$\frac{d|T_{ik}|}{dE} = \frac{|T_{ik}^c|}{|T_{ik}|} \frac{d|T_{ik}^c|}{dE} + \frac{2}{|T_{ik}|} [\text{Re} \langle T_{ik} \rangle \frac{d \text{Re} T_{ik}^c}{dE} + \text{Im} \langle T_{ik} \rangle \frac{d \text{Im} T_{ik}^c}{dE}] \quad (\text{III},21)$$

и

$$\frac{d \arg T_{ik}}{dE} = \frac{|T_{ik}^c|^2}{|T_{ik}|^2} \frac{d \arg T_{ik}^c}{dE} + \frac{\frac{d \text{Im} T_{ik}^c}{dE} \text{Re} \langle T_{ik} \rangle - \frac{d \text{Re} T_{ik}^c}{dE} \text{Im} \langle T_{ik} \rangle}{|T_{ik}|^2}. \quad (\text{III},22)$$

Из соотношений (III,21) и (III,22) следует:

$$\left(\frac{d|T_{ik}|}{dE} \right)^2 + |T_{ik}|^2 \left(\frac{d \arg T_{ik}}{dE} \right)^2 = \left[\left(\frac{d|T_{ik}^c|}{dE} \right)^2 + |T_{ik}^c|^2 \left(\frac{d \arg T_{ik}^c}{dE} \right)^2 \right]. \quad (\text{III},23)$$

Таким образом, можно легко трансформировать правило сумм (III,20), используя (30), (31), (90), (III,21), (III,22) и (III,23), в такой вид

$$\begin{aligned} \sum_{ik} [D\tau_{ik}^{c(JS\Pi)}(E) + \langle \tau_{ik}^{c(JS\Pi)}(E) \rangle^2] / \langle |T_{ik}^{c(JS\Pi)}(E)|^2 \rangle = 4\pi\hbar^2 \rho^{(JS\Pi)} / \Gamma^{(JS\Pi)} + \\ + 4\pi^2 \hbar^2 (\rho^{(JS\Pi)})^2 M^{(JS\Pi)} / N^{(JS\Pi)}. \end{aligned} \quad (\text{III},24)$$

В приближении статистически эквивалентных каналов выражение

$$\sum_k \langle |T_{ik}^{c(JS\Pi)}(E)|^2 \rangle \cong 1 - \exp(-2\pi\rho^{(JS\Pi)} \Gamma^{(JS\Pi)} / N^{(JS\Pi)}) \quad (\text{III},25)$$

имеет силу и все $\langle \tau_{ik}^{c(JS\Pi)}(E) \rangle$ равны

$$\langle \tau_{ik}^{c(JS\Pi)}(E) \rangle = \frac{2\pi\hbar\rho^{(JS\Pi)}}{N^{(JS\Pi)} [1 - \exp(-2\pi\rho^{(JS\Pi)} \Gamma^{(JS\Pi)} / N^{(JS\Pi)})]}, \quad (\text{III},26)$$

все $(\langle \tau_{ik}^{c(JS\Pi)}(E) \rangle)^2$ также равны друг другу.

Для случая слабо перекрывающихся резонансов, когда $\Gamma^{(JS\Pi)} \ll N^{(JS\Pi)} / 2\pi\rho^{(JS\Pi)}$,

$$\langle \tau^{c(J\text{СП})} \rangle = \hbar / \Gamma^{(J\text{СП})} \quad \text{и} \quad D\tau^{c(J\text{СП})} = (\hbar / \Gamma^{(J\text{СП})})^2 = (\langle \tau^{c(J\text{СП})} \rangle)^2,$$

т.е. в полном соответствии с [1,31,33] закон распада составного ядра в среднем экспоненциальный.

Для случая сильно перекрывающихся резонансов, когда $\Gamma^{(J\text{СП})} \gg N^{(J\text{СП})} / 2\pi\rho^{(J\text{СП})}$,

$$\langle \tau^{c(J\text{СП})} \rangle = 2\pi\hbar\rho^{(J\text{СП})} / N^{(J\text{СП})} \quad \text{и} \quad D\tau^{c(J\text{СП})} \approx (2\pi\hbar\rho^{(J\text{СП})} / N^{(J\text{СП})})^2 \ll (\langle \tau^{c(J\text{СП})} \rangle)^2. \quad (\text{III},27)$$

Следовательно, в соответствии с [1,31,33] закон распада составного ядра сильно не-экспоненциальный, т.е. имеет временной резонанс (взрыв).

Полученное правило сумм (III,24) расширяет возможности изучения главных свойств составных ядер (плотность уровней $\rho^{(J\text{СП})}$ и среднюю полную резонансную ширину $\Gamma^{(J\text{СП})}$) и законы распада составного ядра в области неразрешённых резонансов.

Приложение IV.

Длительность рассеяния в пороговой области.

В идеализированном случае строго определённых уровней возбуждённых состояний ядра-мишени вблизи порога неупругого рассеяния (в области $k_l \approx 0$) нейтронов [10]

$$S_{ii}^{(J)}(k_0, k_1) = \tilde{S}_J(k_0)[1 + 2\alpha(k_0)k_1^{2J+1}],$$

где k_0 и k_1 связаны соотношениями $E = e_0 + \hbar^2 k_0^2 / 2\mu = e_1 + \hbar^2 k_1^2 / 2\mu$, e_0 и e_1 - уровни основного и первого возбуждённого состояния ядра-мишени, $\tilde{S}_J(k_0)$ имеет те же аналитические свойства, что и одноканальная функция в (10), $\alpha(k_0)$ - функция k_0 , вещественная на вещественной оси и вещественная для вещественных потенциалов. И

$$\Delta\tau_{00}^{(J)}(E) \rightarrow \begin{cases} \Delta\tilde{\tau}_{ii}^{(J)} - \hbar(-1)^J \alpha |k_1|^{2J+1} / dE & \text{для} \quad k_0^2 < 2\mu(e_1 - e_0) / \hbar^2, \\ \Delta\tilde{\tau}_{ii}^{(J)} & \text{для} \quad k_0^2 > 2\mu(e_1 - e_0) / \hbar^2, \end{cases} \quad (\text{IV},1)$$

$k_1 \rightarrow 0$

где $\Delta\tilde{\tau}_{ii}^{(J)} = (\hbar/2)d \arg \tilde{S}_J / dE$. В случае плавной зависимости $\arg \tilde{S}_J$, т.е. малых значений $\Delta\tilde{\tau}_{ii}^{(J)}$, для $J=0$ величина $\Delta\tau_{00}^{(0)}(E) \sim -\alpha\mu / \hbar|k_1|$, т.е. для $\alpha \neq 0$ в точке $k_1=0$ время жизни такого "порогового состояния" возрастает неограниченно при приближении к пороговой точке снизу (α не может быть положительной по условию причинности).

В действительности, однако, возбуждённые состояния ядра метастабильны. И если уровни таких состояний представлены в форме комплексных величин $\tilde{e}_n = e_n - i\gamma_n/2$, где $\gamma_n > 0$ - ширина, отвечающая распаду состояния (обычно это радиационная ширина), тогда вместо пороговой точки мы вынуждены вводить понятия пороговой области ширины $\sim \gamma_n$ и, следуя [59], заменять e_n в (1) на \tilde{e}_n . И, как следствие, в пороговой области время задержки $\Delta\tau_{ii}^{(J)}(E)$ остаётся конечным и непрерывным.

Приложение V.

К измерению длительностей рассеяния медленных нейтронов ядрами на основе экспериментальных данных по сечениям с учётом оптической теоремы и знака длины рассеяния или условия причинности.

Будем исходить, следуя [60] и(1)-(1а), из длительности упругого рассеяния нейтронов ядрами в квазимонохроматическом приближении

$$\tau_{00} = \hbar \frac{\partial \arg f_{00}}{\partial E} + \frac{2R}{v_0}, \quad (\text{V},1)$$

где R – радиус взаимодействия.

При рассеянии вперёд имеет место оптическая теорема

$$\text{Im } f_{00}(k_0^2, \vec{n}\vec{n}) = k_0 \sigma_{\text{int}}(k_0^2) / 4\pi, \quad (\text{V},2)$$

где

$$\sigma_{\text{int}}(k_0^2) = \int_{[4\pi]} d\Omega |f_{00}(k_0^2, \vec{n}'\vec{n})|^2. \quad (\text{V},3)$$

Величина

$$\partial \arg f_{00} / \partial E = [\partial \text{Im } f_{00} / \partial E] / \text{Re } f_{00} - \text{Im } f_{00} [\partial |f_{00}|] / |f_{00}| \text{Re } f_{00}$$

определяет $\Delta \tau_{00}$ с точностью до знака $\text{Re } f_{00}$. Простой расчёт с учётом (V,2) и (V,3) даёт

$$\begin{aligned} |\Delta \tau_{00}(k_0^2, \vec{n}\vec{n})| = \hbar & \left| \frac{\partial k_0 \sigma_{\text{int}}}{\partial E} - k_0 \sigma_{\text{int}} \frac{\partial \sigma_{00}(\vec{n}\vec{n})}{\partial E} / 2\sigma_{00}(\vec{n}\vec{n}) \right| / 4\pi \times \\ & \times \left[\frac{\partial \sigma_{00}(\vec{n}\vec{n})}{\partial \Omega} - \frac{k_0^2 (\sigma_{\text{int}})^2}{16\pi^2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{V},4)$$

Для определения знака $\Delta \tau_{00}$ можно при $k_0 \rightarrow 0$ воспользоваться соотношениями

$$f_{00} \xrightarrow{k_0 \rightarrow 0} [-a + ik_0 a^2] / [1 + k_0 a^2], \quad \Delta \tau_{00} \xrightarrow{k_0 \rightarrow 0} -a / v_0, \quad (\text{V},5)$$

а в отдельных случаях – условием причинности

$$\Delta \tau_{00}(k_0^2, \vec{n}'\vec{n}) + 2R / v_0, \quad (\text{V},6)$$

Учитывая, что в тех случаях, когда $|\Delta \tau_{00}| + 2R / v_0$, условие (V,6) может выполняться только при $\Delta \tau_{00} > 0$.

Для иллюстрации метода были рассчитаны времена задержки при упругом рассеянии нейтронов ядрами ^{12}C в области энергий $E=1-500$ кэВ (рис.V,1) и ядрами ^{27}Al с энергией 34,59 кэВ (рис.V,2).

В качестве исходных были использованы результаты экспериментов в \mathcal{L} -системе по измерению энергетической зависимости полных сечений [61,62], которые обычно определены значительно лучше, чем данные о парциальных сечениях. Вкладом радиационного захвата для рассмотренных энергий нейтронов можно пренебречь. Угловое распределение рассеянных нейтронов в случае ядер ^{12}C вплоть до $E \cong 700$ кэВ проявляет весьма слабую

анизотропию, демонстрируя доминирующий вклад s -волны. Аналогичное положение имеет место для упругого рассеяния нейтронов на ядрах ^{27}Al , где наличие интерференционного минимума свидетельствует об s -резонансе.

Энергетическая зависимость сечения реакции $^{12}\text{C}(n,n)$ аппроксимировалась полиномом четвёртой степени

$$\sigma_{[\text{барн}]} = \sum_{k=0}^4 B_k E_{[\text{МэВ}]}^k$$

с $B_0=4,73$, $B_1 = -3,734$, $B_2 = 2,388$, $B_3 = -1,001$, $B_4 = 0,179$. Указанные коэффициенты наилучшим образом соответствуют совокупности экспериментальных данных в смысле метода наименьших квадратов. На рис.V,1 приведен график для $|\Delta\tau(k^2)|$ (в сек) для $^{12}\text{C}(n,n)$. Плавная зависимость сечения от энергии и малая величина $\Delta\tau$ согласуются с отсутствием образования долгоживущей и промежуточной системы в этом случае.

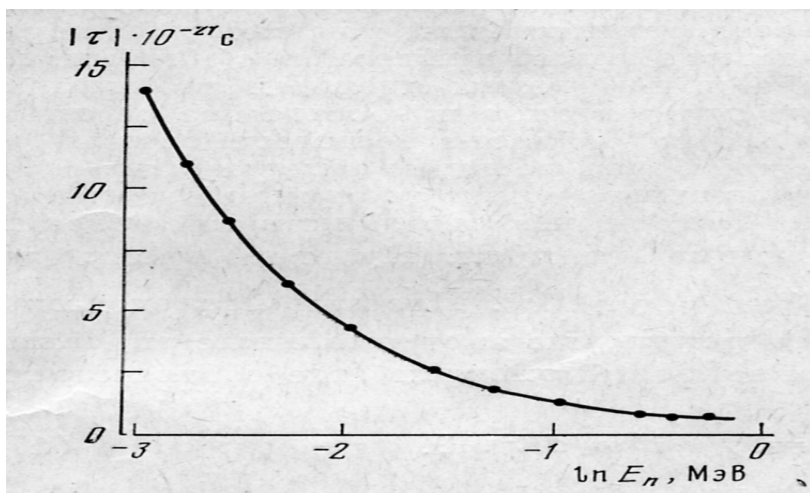


Рис.V,1. Время задержки в рассеянии нейтронов ядрами ^{12}C .

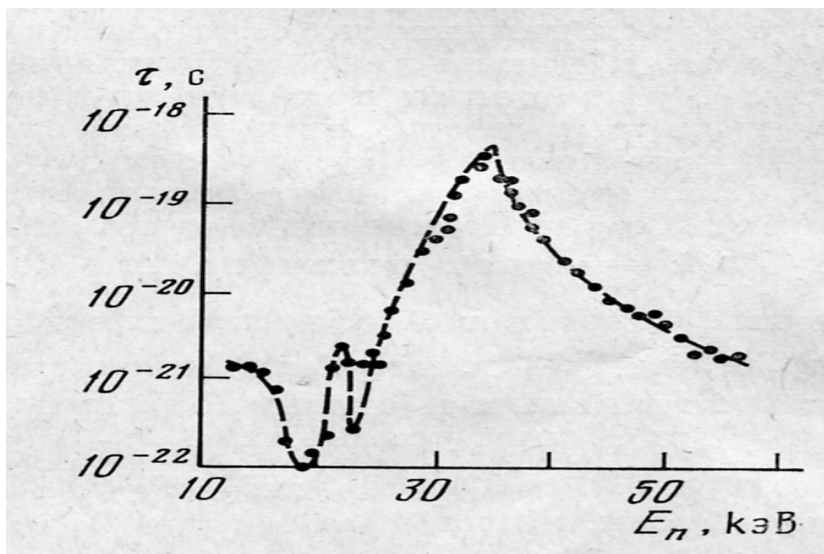


Рис.V,2. Время задержки в рассеянии нейтронов ядрами ^{27}Al .

На рис.V,2 приведены значения $|\Delta\tau_{00}(k^2)|$ для $^{27}\text{Al}(n,n)$. В этом случае вычисления производных по энергии проводились в приближении конечных разностей, определяемом энергетическом разрешением эксперимента. Сильная асимметрия резонансной кривой для $^{27}\text{Al}(n,n)$ указывает на интерференцию прямых процессов с процессом с образованием составного ядра. Следует иметь в виду, что определяемые здесь временные задержки характеризуют процесс в целом и не разделяют его на два этапа.

В [63, 64] проведено дальнейшее развитие этого метода, включая также в [64] три частицы в конечном канале с учётом эффекта окрестностного рассеяния.

Список литературы

1. Olkhovsky V.S., *ФЭЧАЯ, Sov. J. Part. Nucl.*, **151**(1984)30-148; *Nukleonika* **35** (1990) 99-144; *Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti, Sci. Mat. Nat.* **70** (1992)21-40.
2. Эрикссон Т., Майер-Куккук Т., *УФН*, **92** (1967) 271; Agassi D., Weidenmuller H.A., Mantzouranis G., *Phys.Rep. C* **22** (1975) 145; Richert J., Simbel M.M., Weidenmuller H.A., *Z.Phys., A* **273** (1975) 195; Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И., *Яд.Физика*, **24** (1976) 214.
3. Тулинов А.Ф., *Докл.АН СССР*, **162** (1965) 546; Gemmell D.S., Holland R.E., *Phys.Rev.Lett.*, **14** (1965)945; Карамян С.А., Меликов Ю.В., Тулинов А.Ф., *ФЭЧАЯ*, **4** (1973) 476; Yoshida S., *Ann.Rev. Nucl.Sci.*, **24** (1974) 1.
4. Eisberg R.M. et al, *Nucl.Phys.*, **18** (1960)338; Feshbach H., Yennie D., *Nucl.Phys.*, **37** (1962) 150; Uguzzoni A., Vannini G., *Lett.Nuovo Cim.*, **25** (1979) 389; Ерёмин Н.В., Меликов Ю.В., Туликов Ф.А., *Яд.Физика*, **29** (1979) 897; Lesser P.M., Trail C.C. et al, *Phys.Rev.Lett.*, **45** (1982) 308.
5. Fox R., *Phys.Rev.*, **125** (1962) 311; Lang J. et al, *Nucl.Phys.*, **88** (1966) 576.
6. Feshbach H., Kerman A., Koonin S., *Ann.Phys. (N.Y.)*, **125**:2(1980)429.
7. Nishioka H., Weidenmueller H.A., Yoshida S., *Ann.Phys.(N.Y.)*, **183**:1(1988)166.
8. Han Y., *Annals of Nuclear Energy*, **35**:2(2008)187.
9. Olkhovsky V.S., *Central Eur. J. Phys.*, **9** :1(2011)13;
see also: R.Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, McGRAW-HILL Book Company, New York, 1968.
10. Baz' A.I., Perelomov A.M., Zel'dovich Ya.B., *Scattering, reactions and decays in non-relativistic quantum mechanics*, Jerusalem:Israel Program for Scientific Translations, 1969.
11. Olkhovsky V.S., Dolinska M.E., Omelchenko S.A., *Central Europ. J. Phys.*, **4**(2006)1; Davydovsky V.V., Olkhovsky V.S., *Ukrain.Phys.Journal*, **42**:9(1997)1146.
12. Rosenfeld L., *Time evolution of the scattering process*, *Nucl. Phys.*, **70** (1965)1.
13. Arthur M.D., Brysk H., S.L.Paveri-Fontana S.L. and Zweifel, *Nuovo Cimento*, **B63**(1981)565.
14. Gopych P.M., Zalyubovsky I.I., *Sov.J.Part.Nucl.*, **19**(1988)785.
15. Olkhovsky V.S., Doroshko N.L., *Europhys.Lett.*, **18** (1992)483.
16. D'Arrigo A., Doroshko N.L., Eremin N.V., Olkhovsky V.S. et al, *Nucl.Phys.*, **A,549** (1992)375.
17. D'Arrigo A., Doroshko N.L., Eremin N.V., Olkhovsky V.S. et al, *Nucl.Phys.*, **A,564**(1993)217.
18. Bosanac S., *Phys. Rev.*, **A,24**(1981)777.
19. Kelkar N.G., *J.Phys.G: Nucl.Par.Phys.*, **29** (2003)L1-L8.
20. Kelkar N.G., Nowakowski M. and Khemchandani K.P., *Nucl.Phys.*, **A724**(2003)357;
Kelkar N.G., Nowakowski M. and Khemchandani K.P. and Jain B.K., *Nucl.Phys.*, **A730**(2004)121.
21. Kelkar N.G., Khemchandani K.P. and Jain B.K., *J.Phys.G: Nucl. Part. Phys.*, **32**:3(2006) L19.
22. Eremin N.V., Giardina G., Olkhovsky V.S., Omelchenko S.A., *Mod.Phys.Lett.*, **A,9**(1994)2849.
23. Olkhovsky V.S., Dolinska M.E., Omelchenko S.A. and Romanyuk M.V., *Internat.J.Mod.Phys. E*, **19**: 5-6 doi No: 10.1142/S0218301310015692, pp. 1212-1219.
24. Olkhovsky V.S., Dolinska M.E., Omelchenko S.A., arXiv.1101.5541v1 [nucl-th], Jan.2011; *Appl.Phys.Let.*, **99**(2011)244103(1-3), doi:10.1063/1.3656705.
25. Goldberger M.L. and Watson K.M., *Collision Theory*, J.Wiley and sons, inc., N.Y., London,

- Sydney, 1964, chapter 3, §§1-3.
26. The JEFF – 3.1.1. *Nuclear Data Library*, OECD NEA/NEA2009; EXFOR 13759.002, Harvey J.A., Larson D.C., ORNL, 1974.
 27. Olkhovsky V.S. and Zaichenko A.K., *Phys.Lett.*, **B272**, 183 (1991).
 28. D'Arrigo A. *et al*, *Progr. Theor. Phys.*, **87**, 1359 (1992).
 29. Simonius M., *Nucl. Phys.*, **A, 218**(1974)53-60
 30. Smith F.T., *Phys. Rev.*, **118** (1960) 349; *Phys. Rev.*, **119** (1960) 2098.
 31. Lyuboshitz V.L., *Phys. Lett.*, **B, 72N1**(1977)41;
Lyuboshitz V.L., *Sov. J. Nucl. Phys.*, **27**(1978)502;
Lyuboshitz V.L., *JETP Lett.*, **28:1**(1978)32;
 32. Baz' A.I., *JETP Lett.*, **27:2**(1978)132-135}.
 33. D'Arrigo A., Giardina G, Hassani G., Olkhovsky V.S. *et al*, *Intern. J. Mod. Phys.*, **E, 2:4**(1993)809.
 34. Gosset J, Gutbrod H., Meyer W. *et al*, *Phys. Rev.*, **C16**(1977)629.
 35. Westfall G., Sexstro R., Poskanzer A. *et al*, *Phys. Rev.*, **C17** (1978)1368.
 36. Cumming J., Haustein P., Ruth T. *et al*, *Phys. Rev.*, **C17**(1978)1632.
 37. Kaufman S., Steinberg E., *Phys. Rev.*, **C17**(1980)167.
 38. Fortney D., Porile N., *Phys. Rev.*, **C21**(1980)2511.
 39. Sandoval A., Gutbrod H., Meyer W. *et al*, *Phys. Rev.*, **C21**(1980)1321.
 40. Danielewicz P., Pan O., *Phys. Rev.*, **C46**(1992)2002.
 41. Alba R., Coniglione R., Del Zoppo A. *et al*, *Phys. Lett.*, **B322**(1994)38.
 42. Chen K., Fraenkel Z., Friedlander G., *et al*, *Phys. Rev.*, **166**(1968)949.
 43. Amsden Antony A., Goldhaber Alfred S., Harlow Francis H., and Rayford Nix J., *Phys. Rev.*, **C17** (1978)2080-2096.
 44. Izumo Ko, Araseki H., *Progr. Theor. Phys.*, **69**(1983)158-170.
 45. Goto T., Yamaguchi K. and Sudo N., *Progr. Theor. Phys.*, **64**(1980)1-17.
 46. Olkhovsky V.S., *Nuclear Physics*, **A, 425** (1984)445-457.
 47. Olkhovsky V.S., Omelchenko S.A., in: *Proc. of the Internat. Conf. Large-Scale Collective Motion of Atomic Nuclei* (Brolo, Messina, Italy, 15-19 Oct. 1996), ed. by G. Giardina, G. Fazio, M. Lattuada, World Scientific, 1997, pp.421-424
 48. Olkhovsky V.S., Dolinska M.E., Omelchenko S.A., *Central Europ. J. Phys.*, **4**(2006)223;
Olkhovsky V.S., Omelchenko S.A., in: *Proc. of the Internat. Conf. Large-Scale Collective Motion of Atomic Nuclei* (Brolo, Messina, Italy, 15-19 October 1996), ed. by G. Giardina, G. Fazio, M. Lattuada, World Scientific, 1997, pp.421-424.
 49. Olkhovsky V.S., Dolinska M.E., Omelchenko S.A., [arXiv:0902.2665](https://arxiv.org/abs/0902.2665) [nucl-th], Feb 2009, 15pp.; Olkhovsky V.S., Dolinska M.E., Omelchenko S.A., *Central Europ. J. Phys.*, **9** 4(2011)1131.
 50. Westfall G.D., Gosset J., Johansen J. *et al*, *Phys. Rev. Lett.*, **18:37**(1976)1202.
 51. Gosset J., Kapusta J.I., Westfall G.D., *Phys. Rev.*, **C18**(1978)844.
 52. Prilepsky Yu., Shmonin V., *Acta Phys. Polon.* **B 18**(1987)729.
 53. Olkhovsky V.S., *Influence of excited radioactive nuclei for results in large-scale nuclear chronometry*, in: **Nuclear Physics at Border Lines**, Lipari (Messina), Italy, 21-24 May 2001, World Scientific, 2002, pp.244-247.
 54. Olkhovsky V.S. and Dolinska M.E., *Central Eur. J. Phys.*, **8** N1(2010)95-100.
 55. Olkhovsky V.S. and Dolinska M.E., in: *Visnyk of Kyiv University, serie fizyko-matematychni nauki*, 2010, N3(Proc. of *International Conference of Humboldt-Kolleg Series in Kiev, Ukraine, "Humboldt Cosmos: Science and Society"* ($H_c S^2$ – Kiev 2009)), pp.82-87.
 56. Wefers E., Bosch F., Faestermann T. *et al*, *Nucl. Phys.*, **A 626**(1997)215.
 57. Olkhovsky V.S., Omelchenko S.A., *Open Nuclear & Particle Physics Journal*, **4**(2011)35.
 58. Simonius M., *Phys. Lett.*, **B 52:3**(1974)279.
 59. Kamal A.N. and H.J. Kreuzer, *Can. J. Phys.*, **52** (1974)608.
 60. Ольховский В.С., Прокопец Г.А., *Яд. Физ.*, **30:1(7)**(1979)95.
 61. Singh V.N. *et al*, *Phys. Rev.*, **C 11** (1975)1117.

62. Rae E., *Proc.Sympos. held at Argonne National Laboratory*, Argonne, Illinois, Oct.21-23 1970, p.102.
63. Ольховский В.С., Прокопец Г.А., *Изв. АН СССР, сер. физ.*, **14**(1980)1510.
64. Ольховский В.С., Прокопец Г.А., *Изв. АН СССР, сер. физ.*, **14**(1980)11063.