МІНІСТЕРСТВО ОБОРОНИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ПОВІТРЯНИХ СИЛ
імені ІВАНА КОЖЕДУБА

В. М. БІЛЬЧУК

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

П і д р у ч н и к

Харків
2009

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17 я73
Б61

Рекомендовано та надано гриф “Схвалено Міністерством оборони України для використання в навчально-виховному процесі” Департаментом військової освіти та науки Міністерства оборони України № 263/2/1524 від 26.05.2009 р.

Р е ц е н з е н т и:
О. А. Машков – доктор технічних наук професор;
Л. С. Сорока – доктор технічних наук професор;
В. А. Краснобаєв – доктор технічних наук професор;
С. І. Мірошниченко – доктор технічних наук професор.

Більчук В.М.
Б61 Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика: підручник. – Х.: ХУПС, 2009. – 436 с.

ISBN 978-966-468-048-3

У підручнику викладено основні означення та положення теорії ймовірностей, випадкових процесів та математичної статистики, які відповідають сучасним поглядам підготовки фахівців будь-якого напряму технічної спрямованості, та їх використання при описі функціонування військово-технічних систем та операцій.

Підручник розрахований на слухачів, курсантів, студентів ВВНЗ, а також ад’юнктів, здобувачів наукових ступенів та науковців, яких цікавлять дослідження процесів функціонування технічних систем військового призначення з урахуванням стохастичної невизначеності.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17 я73

ISBN 978-966-468-048-3

З М І С Т

П Е Р Е Д М О В А

Зміст підручника визначився необхідністю опису теоретичних положень і практичних застосувань теорії ймовірностей, випадкових процесів і математичної статистики, викладання яких передбачається у відповідних дисциплінах навчальних планів підготовки фахівців з напрямів "Військове управління", "Системна інженерія", "Обслуговування повітряних суден", "Авіоніка", "Радіотехніка", "Електротехніка та електротехнології", "Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології". Послідовність викладання глав підручника не в повній мірі збігається з послідовністю викладання в багатьох відомих вітчизняних та закордонних виданнях за останні тридцять – сорок років. Зміст підручника та його логічна побудова, на думку автора, відповідає сучасним поглядам на теорію ймовірностей, випадкові процеси та математичну статистику.

Глави 5, 6, 10, 11 значно розширені за змістом, що відповідає забезпеченню зацікавленості тих, хто має намір використовувати сучасні досягнення теорії ймовірностей, випадкових процесів та математичної статистики при проведенні наукових досліджень, а також забезпеченню викладання окремих тем дисципліни "Вступ в теорію систем", яка викладається для фахівців напряму "Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології", та дисципліни "Методологічні основи наукових досліджень", яка на протязі багатьох останніх років викладається автором для ад'юнктів та здобувачів Харківського університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба.

Підручник містить значний перелік додатків, які, на думку автора, будуть допомагати в розгляді питань щодо практичного застосування положень теорії ймовірностей та математичної статистики. Підручник містить також по кожній главі перелік запитань та завдань для самостійної перевірки знань тих, хто навчається та проявляє зацікавленість до викладених питань.

Кожна глава містить "Запитання та завдання для самостійної перевірки знань". У математичній підготовці фахівця теорії ймовірностей, випадкових процесів та математичної статистики посідають особливе місце, оскільки вони формують засади світогляду, який впливає на прийняття рішень особою, яка приймає рішення (ОПР), з урахуванням впливу випадкових явищ природи. Тому оволодіння цими теоріями пов'язано *з глибоким розумінням значних за обсягом означень.* Виходячи з цього "Запитання та завдання для самостійної перевірки знань" містять питання, які пов'язані з основними означеннями. Оскільки відповіді на ці питання виділені в тексті відповідної глави, то вони не включені в дод. 13. На інші питання та завдання в дод. 13 подані вірні відповіді, де вони зазначені для кожної глави за відповідним порядковим номером, який відповідає номеру питання чи завдання в главі.

Для самооцінювання отриманих знань рекомендовано виходити з такого: якщо вірні відповіді складають менше 80 % від загальної кількості питань за відповідною главою, то слід вважати освоєння навчального матеріалу таким, що не відповідає вимогам. Рекомендується звернути увагу на вірні відповіді з тих питань, які викликали сумнів при самоконтролі, а також повторно розглянути відповідний матеріал.

Автор висловлює щиру подяку рецензентам: начальнику відділу природничих наук ВАК України заслуженому діячу науки і техніки України доктору технічних наук професору Машкову О. А., декану факультету комп'ютерних наук Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна заслуженому винахіднику України доктору технічних наук професору Сороці Л. С., професору кафедри автоматизації та комп'ютерних технологій Харківського національного технічного університету сільського господарства заслуженому винахіднику України доктору технічних наук професору Краснобаєву В. А., генеральному директору "НВО Телеоптик" доктору технічних наук професору Мірошниченку С. І. за проявлену увагу та цінні рекомендації.

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ

Частина 1. Теорія ймовірностей

A, B, C, …	– випадкова подія
U	– достовірна подія
V	– неможлива подія
$\{A_i\}, i=\overline{1,n}$	– сукупність випадкових подій
$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$; $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	– переріз та об’єднання випадкових подій
$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots$	– протилежна випадкова подія
$P^*(A)$	– частота випадкової події *A*
$P(A)$	– ймовірність випадкової події *A*
$P(A/B)$	– ймовірність випадкової події *A* за умови, що подія *B* сталася
$H_i, i=\overline{1,n}$	– гіпотеза
X, Y, Z, …	– випадкова величина
$(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n)$	– можливі значення випадкової величини *X*
$F(x)$	– функція розподілу випадкової величини *X*
$f(x)$	– щільність ймовірностей
$M[X]; m_x$	– математичне сподівання випадкової величини *X*
$D[X]; D_x$	– дисперсія випадкової величини *X*
σ_x	– середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*
M_{o_x} ; M_{e_x}	– мода та медіана випадкової величини *X*
x_α	– квантиль випадкової величини *X*, який відповідає $\alpha = F(x_\alpha)$
α_k	– початковий момент випадкової величини *k*-го порядку
μ_k	– центральний момент випадкової величини *k*-го порядку
$\varphi(z)$	– твірна функція як форма подання закону розподілу випадкової величини
$\Gamma(z)$	– гамма-функція Ейлера
$\Phi(z)$	– функція Лапласа
$\{X, Y\}$	– двовимірна випадкова величина

$\{X, Y, Z\}$ – тривимірна випадкова величина

$\{X_i\}, i = \overline{1, n}$ – n-вимірна випадкова величина

$F(x, y)$ – функція розподілу двовимірної випадкової величини

$F(x, y, z)$ – функція розподілу тривимірної випадкової величини

$F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ – функція розподілу n-вимірної випадкової величини

$f(x, y)$ – щільність ймовірностей двовимірної випадкової величини

$F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ – щільність ймовірностей n-вимірної випадкової величини

$f_X(x)$ – безумовна щільність ймовірностей випадкової компоненти X випадкового вектора

$f(x/y)$ – умовна щільність ймовірностей випадкової компоненти X випадкового вектора

$F_X(x)$ – безумовна функція розподілу випадкової компоненти X випадкового вектора

$F(x/y)$ – умовна функція розподілу випадкової компоненти X випадкового вектора

$\alpha_{r,s}$ – початковий момент порядку r, s двовимірної випадкової величини

$\mu_{r,s}$ – центральний момент порядку r, s двовимірної випадкової величини

$R_{X,Y}$ – кореляційний момент двовимірної випадкової величини

r_{xy} – коефіцієнт кореляції двовимірної випадкової величини

$M_y[X]; M_x[Y]$ – умовні математичні сподівання випадкових компонент X, Y двовимірного випадкового вектора

$D_y[X]; D_x[Y]$ – умовні дисперсії випадкових компонент X, Y двовимірного випадкового вектора

$\alpha_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$ – початковий момент порядку $\sum_{i=1}^{n} S_i$ n-вимірного випадкового вектора

$\mu_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$ – центральний момент порядку $\sum_{i=1}^{n} S_i$ n-вимірного випадкового вектора

$M[X_i]$; $D[X_i]$ – математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X_i n-вимірного випадкового вектора

$R_{X_\nu X_\xi}$ – кореляційний момент випадкових величин X_ν, X_ξ n-вимірного випадкового вектора

$r_{x_\nu x_\xi}$ – коефіцієнт кореляції випадкових величин X_ν, X_ξ n-вимірного випадкового вектора

$Y = \varphi(X)$ – функція випадкового аргументу X (випадкової величини X)

$q(y)$ – щільність ймовірностей функції випадкової величини

$Y = \varphi(X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n)$ – функція n випадкових величин

e^{itX} – комплексна випадкова величина

$q_X(t)$ – характеристична функція випадкової величини X

$q(t_1, t_2)$ – характеристична функція двовимірної випадкової величини $\{X, Y\}$

$q(t_1, t_2, ..., t_n)$ – характеристична функція n-вимірної випадкової величини

Частина 2. Випадкові процеси

$X(t)$ – випадкова функція

$X(t_k),\ k = \overline{1, n}$ – переріз випадкової функції – випадкова величина

$F(x_1, x_2; t_1, t_2)$ – функція розподілу двох перетинів випадкової функції

$f(x_1, x_2; t_1, t_2)$ – щільність ймовірностей двох перетинів випадкової функції

$M[X(t)]$ – математичне сподівання випадкової функції $X(t)$

$D[X(t)]$ – дисперсія випадкової функції $X(t)$

$R_X(t_1, t_2)$ – кореляційна функція стаціонарної випадкової функції $X(t)$

λ – інтенсивність потоку заявок

μ – інтенсивність потоку обслуговування

Частина 3. Математична статистика

$F^*(x)$ – статистична функція розподілу

$L(x_1, x_2, ..., x_n; a_1, a_2, ..., a_L)$ – функція найбільшої правдоподібності

$$\left.\begin{aligned}\tilde{m}_x^* &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \tilde{\sigma}_x^{*2} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \tilde{m}_x^*\right)^2\end{aligned}\right\}$$ – випадкові вибірки з генеральної сукупності (статистики)

$\tilde{m}_x^*$, $\tilde{\sigma}_x^*$ – статистична оцінка математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення

$\tilde{R}^*{}_{XY}$ – статистична оцінка кореляційного моменту

S_x – стандарт

$i_n(\Theta)$ – функція інформації Фішера

$P(|\alpha * - \alpha| < \varepsilon) = \beta$ – довірча ймовірність параметра α закону розподілу

$\tilde{m}_x^*(t_j)$; $\tilde{D}_x^*(t_j)$ – статистичні оцінки математичного сподівання та дисперсії випадкової функції

$\tilde{R}_X^*(t_j, t_k)$ – статистична оцінка кореляційної функції випадкової функції

$\tilde{m}_x^*(t)$; $\tilde{D}_x^*(t)$; $\tilde{R}_X^*(\tau)$ – статистичні оцінки характеристик стаціонарної випадкової функції

$D_n(X)$ – статистика критерія О. М. Колмогорова

$K(t)$ – закон розподілу О. М. Колмогорова

χ_r^2 – функція розподілу випадкової величини “хі-квадрат” з r степенями свободи

χ^2 – критерій згоди “хі-квадрат”

$D_{n,m}$ – статистика критерію згоди Смирнова

$\chi_n^2(P)$ – статистика критерію незалежності “хі-квадрат”

$T_n^*(X)$ – статистика критерію перевірки гіпотези випадковості

$F_{1-\alpha;\nu_1,\nu_2}$ – квантиль розподілу Фішера при рівні значущості α та степенях свободи ν_1 та ν_2

Ч а с т и н а 1
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Г л а в а 1
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. Випадкові події

Основні поняття теорії ймовірностей випливають із призначення теорії ймовірностей як науки. Теорія ймовірностей займається виявленням закономірностей в масових випадкових явищах природи. Які ж явища природи слід віднести до випадкових і масових?

Людина в своєму житті повсякчас повинна приймати ті чи інші рішення, які є суб'єктивним узагальненням її спостережень явищ природи. Спостереження – це результат досліду, а взаємодію людини з природою можна розглядати як проведення сукупності дослідів.

Дослід (експеримент) – це практичне чи уявне відтворення деякої сукупності умов S, які характеризуються параметрами $\alpha_i, i=\overline{1,n}$ *та за яких спостерігається те чи інше явище природи і фіксується той чи інший результат.*

Відзначимо, що дослід не обов'язково повинен плануватись і ставитись особою, яка приймає рішення, за результатами обробки дослідних даних, він може протікати в природі незалежно від дій особи, яка приймає рішення, а особа лише веде спостереження, тобто фіксує ті результати досліду, які її цікавлять. Так, наприклад, якщо особі, яка приймає рішення, необхідно зробити прогноз щодо значення середньодобової температури на 1 січня 2020 року в точці геометричного центру міста *K*, то їй достатньо мати результати спостережень цього параметра в зазначеному місті *K* за декілька попередніх років. Особа лише визначає, що вона буде спостерігати та за яким підходом буде прогнозувати цей параметр, а дослід протікає в природі незалежно від неї.

Усякий результат досліду (кількісний чи якісний) прийнято називати наслідком.

Якщо результат досліду змінюється при його повторенні, то будемо говорити, що *розглядається дослід з випадковим наслідком.* Явища природи, які особа, що приймає рішення, спостерігає як випадковий наслідок досліду, є випадковими.

Розглянемо деякі досліди та звернемо увагу, змінюються результати цих дослідів чи ні при їх повторенні. Як визначено вище, дослід – це практичне чи мислиме відтворення сукупності умов. Розглянемо таку сукупність умов: місто *K*; підприємство *Z* у цьому місті *K*; цех *M* підприємства *Z* у місті *K*;

автоматизована лінія N виготовлення деталі Q в цеху M підприємства Z у місті K; значення параметрів, які характеризують температуру, вологість та інше в приміщенні (цеху); момент часу проведення досліду; особа, яка проводить дослід. Визначимо мету проведення досліду: виявлення кількості станків в автоматизованій лінії N виготовлення деталі Q. Визначимо другу мету проведення досліду: виявлення кількості працездатних станків в автоматизованій лінії N виготовлення деталі Q. Якщо дослідник повторює дослід як реалізацію зазначених вище умов та має на увазі першу мету, то, що очевидно, результат досліду не буде змінюватись. Це означає, що наслідок цього досліду не є випадковим. А якщо дослідник повторює дослід як реалізацію зазначених вище умов та має на увазі другу мету, то результат досліду буде змінюватись. Це означає, що наслідок досліду є випадковим.

Розглянутий приклад дає право висловити такі дві думки. Перша думка така: якщо ми бажаємо визначити дослід, то спочатку необхідно висловити мету, для досягнення якої буде розглядатись дослід. Друга думка така: визначення мети проведення досліду визначає перелік умов, відтворення яких як сукупність визначає сам дослід. На прикладі видно, що якщо дослідник реалізує першу мету в досліді, то такі умови, як значення параметрів, що характеризують температуру, вологість та інші умови зовнішнього середовища відносно автоматизованої лінії, не впливають на результат досліду та їх можна взагалі не враховувати при описанні досліду.

Теорія ймовірностей як наука займається, як це відзначено вище, виявленням закономірностей масових випадкових явищ. Розглянуті вище досліди є масовими, оскільки принципово вони можуть бути повторені багато разів. Розглянутий вище дослід, що ставиться з першою метою, має наслідок, який не є випадковим. Тому наслідки, які мають місце при повторені досліду, який ставиться з першою метою, не можуть бути предметом розглядання, тому що при повторюванні такого досліду їх результатами є стала величина – кількість верстатів, які складають автоматизовану лінію. Говорити про виявлення закономірності при повторенні такого досліду немає сенсу.

Усякий наслідок, який може визначитись в досліді називають подією.

Випадкова подія – це всякий факт (наслідок), який в досліді може статися чи ні та який наперед неможливо передбачити.

Події в теорії ймовірностей прийнято позначати великими літерами з початку латинського алфавіту.

Достовірна подія – це всякий факт, який в досліді обов'язково відбудеться.

Достовірну подію позначимо буквою U.

Неможлива подія – це всякий факт, який в досліді не відбудеться.

Неможливу подію позначимо буквою V.

Розглянемо приклади дослідів як відтворення деякої сукупності умов та події, які при цьому можна розглядати. Сукупність умов: симетрична монета; нескінченна гладка поверхня; зазначення параметрів навколишнього середовища; наявність особи, яка буде ставити дослід; монета підкидається навмання. Мета досліду: виявлення положення монети при падінні. Можна розглядати події: *A* – випадкова подія, яка полягає в тому, що монета випадає орлом; *B* – випадкова подія, яка полягає в тому, що монета випадає решкою; *C* – неможлива подія, яка полягає в тому, що монета стане на ребро; *Д* – достовірна подія, яка полягає в тому, що монета впаде на нескінченну гладку поверхню.

Відзначимо, що якщо одну із зазначених вище умов змінити, наприклад, замість нескінченної гладкої поверхні до переліку умов включити поверхню, яка рівно засипана піском, то відтворення такої сукупності умов визначає другий дослід, за якого подія, яка полягає в тому, що монета стане на ребро, є випадковою.

Наступна сукупність умов: розглядається тир в закритому приміщені за відповідних значень параметрів навколишнього середовища; особа, яка буде здійснювати два постріли з власної зброї при відстані тридцяти метрів до мішені. Дослід, який буде відповідати відтворенню такої сукупності умов, проводиться з метою виявлення кількості влучень у мішень. Події, які можуть статися чи не статися при такому досліді: *A* – подія, яка полягає в тому, що буде нуль влучень; *B* – подія, яка полягає в тому, що буде одне влучення; *C* – подія, яка полягає в тому, що буде два влучення. Події *A, B, C* є випадковими. Подія *V*, яка полягає в тому, що буде три влучення, є неможливою. Подія *U*, яка полягає в тому, що буде нуль влучень, або одне влучення, або два влучення, є достовірна подія.

Ще одна сукупність умов полягає в такому: радіоканал зв'язку; інформація, яка передається з пункту *M* до пункту *N* та складається із *n* сигналів; значення параметрів зовнішнього середовища між пунктами *M* і *N*; особа, яка ставить дослід. Мета досліду: установлення достовірності отриманої інформації в пункті *N*. Подія *A*, яка полягає в тому, що буде отримана достовірна (неспотворена) інформація в пункті *N*, є випадковою. Відзначена подія *A* відбудеться тоді, коли кількість спотворених сигналів з *n* дорівнює нулю. Якщо ввести до розгляду випадкову подію B_i, яка полягає в тому, що *i*-й сигнал не буде спотвореним, то подія *A* може бути визначена через події $B_i, i=\overline{1,n}$.

Подія, яка може бути виражена через інші події, є складною, а подія, яка не виражається через інші, є елементарною (простою).

У розглянутому вище досліді події $B_i, i=\overline{1,n}$, які полягають в тому, що *i*-й сигнал не буде спотворений, є елементарними. Подія *A*, яка полягає в тому, що інформація, яка передається від пункту M до пункту N, буде неспотворена, є складною.

Розглянемо таку сукупність умов S: гральний кубик; гладка нескінченна поверхня; значення параметрів зовнішнього середовища приміщення; особа, яка підкидає кубик навмання. Ставиться дослід з метою виявлення однієї з граней грального кубика. Події $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, які полягають в тому, що буде висвітлена грань грального кубика з кількістю очків відповідно 1, 2, 3, 4, 5, 6, є випадковими та елементарними.

Сукупність елементарних випадкових подій, одна з яких в досліді обов'язково відбудеться, складає простір (множину) елементарних випадкових подій R_S.

Множина R_S може бути скінченною та нескінченною, але кількість елементарних подій можна перерахувати.

Розглянемо дослід, який ставиться з метою виявлення оцінки при складанні іспиту з будь якої дисципліни. Реалізується комплекс умов: екзаменаційні білети, їх n; екзаменаційні білети викладаються навмання в ряд; наявність екзаменатора та студента, який складає іспит; значення всіх параметрів середовища аудиторії, в якій проводиться іспит. Студент може отримати за національної шкалою оцінку: “відмінно”, “добре”, “задовільно”, “незадовільно”. Відповідні події B_1, B_2, B_3, B_4 є випадковими й елементарними, а оскільки одна з них обов'язково може статися в досліді, то вони складають скінченну множину (скінченний простір) елементарних подій.

Подія, яка полягає в тому, що студент отримає оцінку на екзамені, є достовірною (подія U); подія, яка полягає в тому, що студент не отримає оцінку на екзамені, є неможливою (подія V).

Усяка підмножина елементарних випадкових подій є подія складна.

Так подія A, яка буде полягати в тому, що іспит складено з цієї дисципліни, що відповідає отриманню студентом оцінки “відмінно”, або “добре”, або “задовільно”, є складною випадковою подією.

Подія, яка включає в себе всі елементарні випадкові події, є достовірною.

Розглянемо геометричне тлумачення поняття “випадкова подія”. Нехай проводиться дослід з метою визначення точки навмання в квадраті зі стороною a. Кожна точка, яка може бути нанесена в квадраті, відповідає елементарній випадковій події. А оскільки складна випадкова подія подається підмножиною елементарних подій, то вона геометрично може бути відображена деякою областю в цьому квадраті. На рис. 1.1–1.3 подані геометричні тлумачення складної випадкової події A, достовірної події U і неможливої події V відповідно. Достовірна подія U відповідає появі точки в

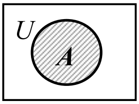

Рис. 1.1. Складна випадкова подія

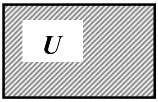

Рис. 1.2. Достовірна подія

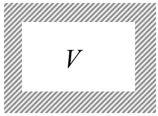

Рис. 1.3. Неможлива подія

квадраті (закреслена область), неможлива подія V відповідає неможливій появі точки в квадраті (область квадрата не закреслена).

1.2. Алгебра подій

Розгляд випадкових подій в теорії ймовірностей пов'язаний з необхідністю визначення їх числових мір. З цією метою складні випадкові події подаються через елементарні, використовуючи алгебру подій.

Під алгеброю подій (алгеброю Буля) розуміють множину подій $\{A_i\}$, $i=\overline{1,n}$, *для яких визначені операції "суми", "добутку", визначена операція "риса" та введені до розгляду події "достовірна" та "неможлива".*

Розглянемо основні поняття та позначення алгебри подій.

Події A та B називаються тотожними (рівними), якщо вони складаються з однакових елементарних подій. Тотожність позначається $A = B$. Геометричне тлумачення тотожності подій A і B подано на рис. 1.4.

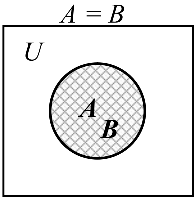

Рис. 1.4. Геометричне тлумачення тотожності подій A і B

Подія A є частиною події B (подія A включена в подію B), якщо всі її елементарні події належать події B. Таке співвідношення між подіями позначають $A \subset B$. Так, подія B, яка полягає в тому, що студент отримав на іспиті оцінку "добре", є частиною події A, яка полягає в тому, що студент склав іспит.

Співвідношення $A \subset B$ подано на рис. 1.5.

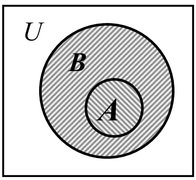

Рис. 1.5. Геометричне тлумачення співвідношення $A \subset B$

Сумою (об'єднанням) двох подій A і B є така подія C, яка полягає в тому, що відбудеться хоча б одна з подій A і B, тобто подія C відбудеться тоді, коли відбудеться чи подія A, чи подія B, чи подія A і B одночасно. Прийнято позначення $C = A + B$, або $C = A \bigcup B$. Сума будь-якої кількості подій позначається аналогічно, а саме: $C=\sum_{i=1}^{n} A_i$ або $C=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Геометричне тлумачення суми двох подій подано на рис. 1.6, де закреслена область відповідає події *C*.

Добутком (пересіченням) випадкових подій A і B є така подія C, яка полягає в тому, що події A і B одночасно можуть статися в одному досліді.

Добуток двох подій позначають $C = AB$ або $C = A \bigcap B$. Загальний випадок:

$$C=\prod_{i=1}^{n} A_i \text{ або } C=\bigcap_{i=1}^{n} A_i .$$

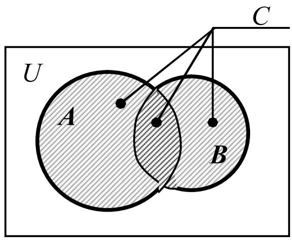

Рис. 1.6. Геометричне тлумачення суми двох подій

Геометричне тлумачення добутку двох подій подано на рис. 1.7.

Події A і B називаються сумісними, якщо в досліді вони можуть статися одночасно; події A і B називаються несумісними, якщо в досліді вони не можуть статися одночасно.

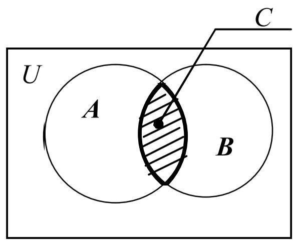

Рис. 1.7. Геометричне тлумачення добутку двох подій

Як це випливає з позначення сумісних подій, на рис. 1.6 та на рис. 1.7 подані геометричні тлумачення відповідно суми та добутку сумісних подій. Сумою та добутком двох несумісних подій є $C = A + B$ та $V = AB$, а геометричне тлумачення суми та добутку подані на рис. 1.8 та на рис. 1.9, де видно, що добутком двох несумісних подій є подія неможлива.

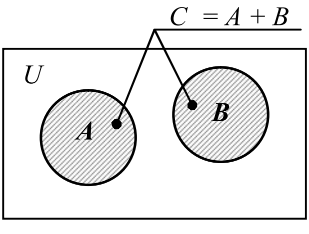

Рис. 1.8. Геометричне тлумачення суми двох несумісних подій

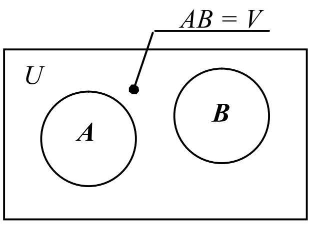

Рис. 1.9. Геометричне тлумачення добутку двох несумісних подій

З метою розуміння змісту суми та добутку сумісних та несумісних подій розглянемо таку задачу.

Задача 1.1. Передбачається дослід, який має за мету визначення працездатності або відмови виробу військового призначення, який складається з двох елементів нерезервного з'єднання, структурна схема якого подана на рис. 1.10. Визначити випадкову подію відмови виробу через елементарні події.

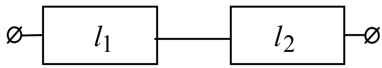

Рис. 1.10. Структурна схема виробу

Розв'язання. Змістом цього досліду є відтворення такої сукупності умов: використання вимірювального інструменту (наприклад омметра); значення параметрів зовнішнього середовища, в умовах якого проводиться дослід; особа, яка проводить визначення працездатності чи відмови цього виробу.

Елементарні події мають такий зміст:

A – подія, яка полягає в тому, що елемент l_1 відмов;

B – подія, яка полягає в тому, що елемент l_2 відмов.

Визначимо:

C – подія, яка полягає в тому, що виріб відмовив.

Аналіз працездатності виробу, структурна схема якого має вигляд, який поданий на рис. 1.10, дозволяє встановити таке судження. Подія *C* може статися тоді, коли елемент l_1 відмовить, а елемент l_2 є працездатним або тоді, коли елемент l_1 є працездатним, а елемент l_2 відмовить, або тоді, коли елемент l_1 і елемент l_2 одночасно відмовлять. Тобто подія *C* може статися тоді, коли відбудеться хоча б одна з подій *A* чи *B*. Визначене вище позначення суми двох подій збігається з позначенням змісту події *C* в цій задачі. Тому $C = A + B$.

Відзначимо також, що проведений вище аналіз працездатності виробу дозволяє стверджувати, що події *A* та *B* є сумісними, оскільки відмова одночасно двох елементів l_1 і l_2 може статися.

Сукупність випадкових подій $\{A_i\}, i = \overline{1,n}$ *визначає повну групу подій, якщо ці події несумісні та в досліді одна з них станеться, тобто*

$$A_i A_j = V,\ i \neq j;\ i, j = \overline{1,n};\ \sum_{i=1}^{n} A_i = U.$$

Нехай розглядається дослід, мета якого – виявлення влучень в мішень при двох пострілах. Можуть бути наслідки: A_1 – подія, яка полягає в тому, що буде нуль влучень; A_2 – подія, яка полягає в тому, що буде одне влучення; A_3 – подія, яка полягає в тому, що буде два влучення. Події A_1, A_2, A_3 складають повну групу подій, оскільки $A_1 A_2 = A_1 A_3 = A_2 A_3 = V$ та $A_1 + A_2 + A_3 = U$.

Дві події, які складають повну групу подій, називаються протилежними.

Якщо визначена подія *A*, то рискою над цим символом події позначають протилежну подію, а саме $\overline{A}$ – подія протилежна. Для протилежних подій маємо $A+\overline{A}=U$; $A\overline{A}=V$.

Зауваження 1. Достовірна подія *U* і неможлива подія *V* є протилежними: $\overline{U}=V; \overline{V}=U$.

Зауваження 2. Під різницею двох подій *A* і *B* розуміють таку подію *C*, яка полягає в тому, що подія *A* відбувається й одночасно з нею подія *B* не відбувається. Позначення цієї дії є $C = A - B$ або $C = A \setminus B$, а геометричне тлумачення подано на рис. 1.11, де закреслена область є подія $C = A - B$.

З рис. 1.11 видно, що $C = A - B = A\overline{B}$, тобто різницю подій *A* та *B* можна подати як добуток події *A* та $\overline{B}$.

Для звичайної алгебри справедливі закони комутативний, асоціативний та дистрибутивний. Закони алгебри подій та їх запис для суми та добутку подані в табл. 1.1.

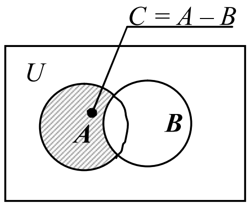

Рис. 1.11. Геометричне тлумачення різниці подій *A* і *B*

Таблиця 1.1

Закони алгебри подій

№ з/п	Закон	Сума	Добуток
1	2	3	4
1	Комутативний (переміщувальний)	$A+B=B+A$	$A\cdot B=B\cdot A$
2	Асоціативний (поєднувальний)	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(AB)C=A(BC)$
3	Дистрибутивний (розподільний)	$(A+B)\cdot C=AC+BC$	
4	Другий дистрибутивний	$AB+C=(A+C)(B+C)$	

Закінчення табл. 1.1

1	2	3	4
5	Ідемпотентний	$A + A = A$	$A \cdot A = A$
6	Поглинання	$A + AB = A$	$A \cdot (A + B) = A$
7	Правило де Моргана	$\overline{A + B} = \overline{A}\;\overline{B}$	$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$
8	Принцип двоїстості	$A + V = A$ $A + U = U$	$A \cdot V = V$ $A \cdot U = A$

Примітка. Усі закони, які подані в табл. 1.1, справедливі при їх застосуванні до будь-якої кількості випадкових подій. Так правило де Моргана для загального випадку має такий запис:

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}; \quad \overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

Відзначимо таке. За наявності умови будь-якої задачі, розв’язання якої потребує знань щодо теорії ймовірностей, перш за все формулюється (визначається) та випадкова дія, яка відповідає вимогам задачі. Така подія завжди буде складною. А розв’язання задачі на рівні логічного її подання (алгебро-логічне розв’язання) пов’язане із записом виразу складної події через елементарні. Перетворення такого виразу складної події з метою його спрощення для подальшого числового розрахунку пов’язане з використанням законів алгебри подій. Розглянемо такі задачі.

Задача 1.2. Довести, що рівність $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = AB$ є тотожність та надати її геометричне тлумачення.

Розв’язання. Маємо $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = AB$. У лівій частині під спільною рискою за правилом де Моргана маємо, що $\overline{\overline{AB}} = AB$, а заперечення, що маємо в лівій частині, є істина; тоді рівність доведена, бо $AB \equiv AB$.

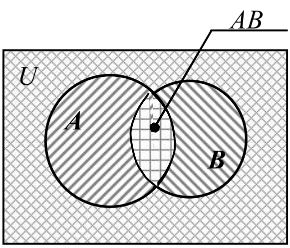

Рис. 1.12. Геометричне тлумачення тотожності $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = AB$

Геометричне тлумачення подане на рис. 1.12. На рис. 1.12 $\overline{A}$ та $\overline{B}$ закреслені в різні сторони.

Задача 1.3. Спростити вираз $\overline{A \cdot \overline{B} + AB} + \overline{\overline{A} + B} + \overline{\overline{A} + \overline{B}}$ і надати геометричну інтерпретацію порядку дій.

Розв'язання.

$$\overline{A\cdot\overline{B}+AB}+\overline{\overline{A}+B}+\overline{\overline{A}+\overline{B}}=\overline{\left(A\overline{B}+AB\right)\left(\overline{A}+B\right)\left(\overline{A}+\overline{B}\right)}=$$

(за правилом де Моргана)

$$=\overline{\left(A\overline{B}+AB\right)\left(B\overline{B}+\overline{A}\right)}=\overline{\left(A\overline{B}+AB\right)\left(V+\overline{A}\right)}=\overline{\left(A\overline{B}+AB\right)\overline{A}}=$$

(за другим дистрибутивним законом) (за принципом двоїстості)

$$=\overline{A\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{A}\,B}= \quad \overline{V\,\overline{B}+VB}= \quad \overline{V+V}=\overline{V}=U.$$

(за дистрибутивним законом) (за принципом двоїстості) (ідемпотентний закон)

Геометричне тлумачення подане на рис 1.13.

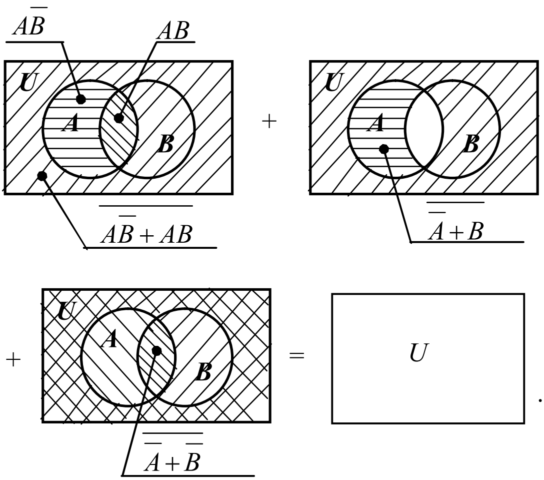

Рис. 1.13. Геометричне тлумачення спрощення виразу

$$\overline{A\cdot\overline{B}+AB}+\overline{\overline{A}+B}+\overline{\overline{A}+\overline{B}}=U$$

Вище зазначено, що подання складної події через елементарні можна тлумачити як алгебро-логічне розв'язання задач. Покажемо, що подання складної події через елементарні, виходячи із аналізу змісту задачі, може мати різний запис.

Задача 1.4. Виразити складну подію *A*, яка полягає в тому, що виріб, принципова структурна схема якого подана на рис. 1.14, є працездатним.

Розв'язання. Як видно з рис. 1.14, виріб складається з трьох елементів резервного з'єднання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що виріб працездатний.

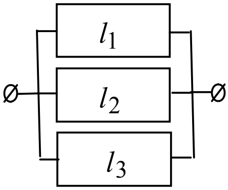

Рис. 1.14. Структурна схема виробу

Елементарні події є такі: B_i – подія, яка полягає в тому, що i-й елемент працездатний, $i = \overline{1,3}$.

Виходячи із змісту резервного з'єднання, маємо, що виріб буде працездатним тоді, коли хоча б один елемент буде працездатним. Такому змісту логіки будуть відповідати такі подання складної події A через елементарні B_i, $i = \overline{1,3}$:

$$A = B_1 + B_2 + B_3;$$

$$A = B_1\overline{B}_2\overline{B}_3 + \overline{B}_1 B_2\overline{B}_3 + \overline{B}_1\overline{B}_2 B_3 + B_1 B_2\overline{B}_3 + B_1\overline{B}_2 B_3 + \overline{B}_1 B_2 B_3 + B_1 B_2 B_3;$$

$$A = U - \overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3.$$

У першому виразі елементарні події B_i, $i = \overline{1,3}$, які виступають як додатки, є сумісними як попарно, так і всі відразу. У другому виразі події справа як додатки є несумісними, тому що не може одноразово відбутися подія $\overline{B}_2$ і B_2, як це, наприклад, зазначено в першому та другому додатку суми виразу справа події A. У третьому виразі записано, що подією, протилежною A, є подія $\overline{A} = \overline{B}_1\,\overline{B}_2\,\overline{B}_3$, яка полягає в тому, що елемент l_1 відмовив, і елемент l_2 відмовив, і елемент l_3 відмовив, що відповідає відмові виробу.

Відмітимо, більш доцільним буде той алгебро-логічний запис події A, який забезпечує простіше обчислення ймовірності випадкової події A, що буде показано при подальшому розгляді викладання.

1.3. Частота і ймовірність випадкової події

Випадкова подія як деякий факт, який може статися чи не статися при спотворенні певної сукупності умов, тільки тоді може стати предметом опису з точки зору прогнозування її об'єктивної можливості появи, коли з нею буде пов'язана чисельна міра. Розглянемо статистичний підхід визначення чисельної міри випадкової події. Нехай розглядається дослід, в якому може статися випадкова подія A. Дослід повторюється n раз, а випадкова подія при цьому відтворюється в m дослідах із n, де $m < n$. Тоді відношення

$P^*(A) = \frac{m}{n}$ – частота появи події A. Якщо число n мале, то результат кожного досліду суттєво впливає на величину частоти, якщо n зростає, то вплив окремо кожного результату досліду на зміну частоти зменшується. У табл. 1.2 наведені зміни частоти випадкової події в залежності від збільшення чи зменшення на одиницю кількості m сприятливих наслідків (значення наслідків, в яких подія A відбувається) при зростанні кількості випробувань n.

Таблиця 1.2

Зміна частоти при зміні на одиницю сприятливих наслідків

n	10	100	1 000	10 000
m_1 / m_2	6/7	48/47	504/505	4 991/4 990
$P_1^*(A)/P_2^*(A)$	$\frac{6}{10} \Big/ \frac{7}{10}$	$\frac{48}{100} \Big/ \frac{47}{100}$	$\frac{504}{1\,000} \Big/ \frac{505}{1\,000}$	$\frac{4\,991}{10\,000} \Big/ \frac{4\,990}{10\,000}$

З табл. 1.2 видно, що частота випадкової події має статистичну стійкість. Границю, до якої прямує частота випадкової події, називають ймовірністю випадкової події, що схематично за результатами табл. 1.2 зображено на рис. 1.15.

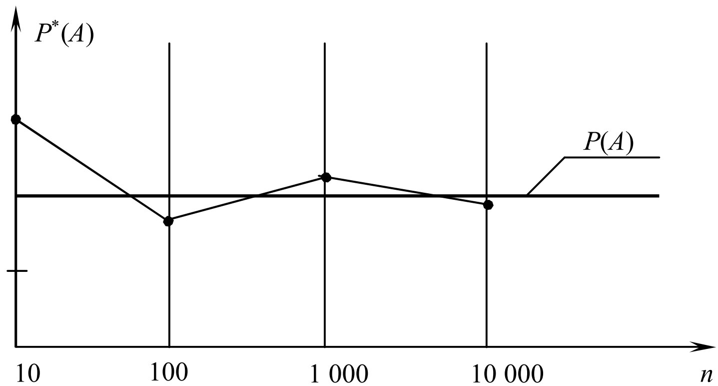

Рис. 1.15. Зміна частоти випадкової події

У поняття статистичної стійкості частоти випадкової події слід вкладати таке: при багатократному повторенні серії дослідів (в кожній серії n достатньо велике) значення частоти випадкової події мало змінюється. Тобто, якщо при деякому великому n маємо, що $P^*(A) = 0{,}5$, то в будь-якій іншій серії, в якій $\widetilde{n}$ також є достатньо велике, частота $\frac{\widetilde{m}}{\widetilde{n}}$ буде близька до числа 0,5. Наявність статистичної стійкості частоти випадкової події підтверджується результатами досліджень французького природознавця Бюффона (1707 – 1788) та Пірсона. У табл. 1.3 наведені результати визначення частоти випадкової події *A*, яка полягає в тому, що при підкиданні монети випаде орел при різній, достатньо великій, кількості підкидань.

Таблиця 1.3

Визначення статистичної стійкості частоти випадкової події

Дослідник	Кількість незалежних випробувань	Кількість сприятливих наслідків	Частота події $P^*(A)$
Бюффон	4 040	2 048	0,506 9
Пірсон	12 000	6 019	0,501 6

Таким чином, як видно із табл. 1.3, частота випадкової події групується навколо деякого сталого числа, яке, звичайно, є своїм для кожної випадкової події, яка розглядається. Це число виражає чисельну міру об'єктивної можливості випадкової події.

Під ймовірністю випадкової події слід розуміти чисельну міру її об'єктивної можливості.

Таку чисельну міру позначають $P(A)$.

Зауваження. Статистична стійкість частоти випадкової події, яка відзначена в табл. 1.2 та на рис. 1.15, а також дослідні дані, які наведені в табл. 1.3, узагальнені граничною теоремою Бернуллі, яка полягає в тому, що

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|P^*(A) - P(A)\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

де розглядається границя за ймовірністю, а $\varepsilon > 0$.

1.4. Властивості частот випадкових подій

З метою виявлення властивостей частот випадкових подій розглянемо дослід, за якого можуть статися випадкові події *A* та *B*. Цей дослід повторюється *n* раз, та нехай:

- *k* є кількість дослідів, за яких сталася подія AB;
- *l* є кількість дослідів, за яких сталася подія $A\overline{B}$;
- *r* є кількість дослідів, за яких сталася подія $\overline{A}B$.

Геометричне подання цих наслідків наведене на рис. 1.16.

З рис. 1.16 видно, що при повторенні досліду n раз подія A може статися $\left(l+k\right)$ раз, подія B – $\left(k+r\right)$ раз, подія AB – k раз, подія $\left(A+B\right)$ – $\left(l+k+r\right)$ раз. Виходячи із поняття частоти випадкової події маємо

$$\left.\begin{aligned} &P^*(A)=\frac{l+k}{n};\ P^*(B)=\frac{k+r}{n};\\ &P^*(AB)=\frac{k}{n};\ P^*(A+B)=\frac{l+k+r}{n}. \end{aligned}\right| \quad (1.1)$$

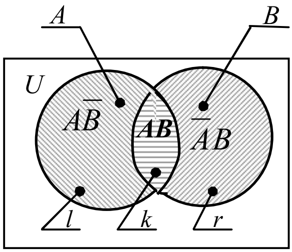

Рис. 1.16. Геометричне тлумачення наслідків при повторенні досліду

Оскільки $0\le(l+k)\le n;$ $0\le(k+r)\le n;$ $0\le k\le n;$ $0\le(l+k+r)\le n$, то перша властивість частоти події полягає в тому, що

$$0\le P^*\left(C\right)\le 1, \tag{1.2}$$

де C – деяка випадкова подія.

Розглянемо $P^*\left(A+B\right)=\dfrac{l+k+r}{n}$ та маємо

$$P^*\left(A+B\right)=\frac{l+k+r}{n}=\frac{l+k}{n}+\frac{k+r}{n}-\frac{k}{n}. \tag{1.3}$$

Тоді з (1.1) та (1.3) випливає правило обчислення частоти суми двох сумісних випадкових подій, а саме

$$P^*\left(A+B\right)=P^*\left(A\right)+P^*\left(B\right)-P^*\left(AB\right). \tag{1.4}$$

Якщо події A і B є несумісними, то $AB=V$, тоді

$$P^*\left(A+B\right)=P^*\left(A\right)+P^*\left(B\right). \tag{1.5}$$

Відзначимо, що частота події A $P^*\left(A\right)=\dfrac{l+k}{n}$ зміниться, якщо враховувати тільки ті досліди, за яких сталася подія B. Частота події A, яка визначена за умови, що подія B сталася, називається *умовною частотою* та позначається $P^*\left(A/B\right)$.

Визначимо умовні частоти. З рис. 1.16 видно, що

$$P^*\left(A/B\right)=\frac{k}{k+r};\quad P^*\left(B/A\right)=\frac{k}{l+k}. \tag{1.6}$$

Маємо

$$\frac{k}{n}=\frac{l+k}{n}\cdot\frac{k}{l+k}; \quad \frac{k}{n}=\frac{k+r}{n}\cdot\frac{k}{k+r},$$

тоді з урахуванням (1.1) та (1.6) правило визначення частоти добутку двох випадкових подій має вигляд

$$P^*(AB)=P^*(A)P^*\left(B/A\right)=P^*(B)P^*\left(A/B\right), \tag{1.7}$$

а частота умовних подій відповідно визначається як

$$P^*\left(A/B\right)=\frac{P^*(AB)}{P^*(B)}; P^*\left(B/A\right)=\frac{P^*(AB)}{P^*(A)}. \tag{1.8}$$

У відповідності до (1.6) ухвалимо таке означення.

Події A та B називаються залежними, якщо частота однієї із них A(B) залежить від того, сталася чи ні друга подія B(A).

Якщо частота події *A(B)* не залежить від того, сталася чи ні друга подія *B*(*A*), то події *A* та *B* є незалежними. У разі, коли події *A* та *B* є незалежними, маємо

$$\left.\begin{aligned} &P^*(A)=P^*\left(A/B\right);\\ &P^*(B)=P^*\left(B/A\right);\\ &P^*(AB)=P^*(A)P^*(B). \end{aligned}\right| \tag{1.9}$$

Означення та правила (1.4) – (1.9) відображають відповідні властивості частот випадкових подій, які в подальшому використовуються в означенні аксіом теорії ймовірностей та визначення правил розрахунку ймовірностей суми та добутку випадкових подій.

1.5. Аксіоми теорії ймовірностей. Правила розрахунку ймовірностей суми та добутку випадкових подій

Розглянемо простір випадкових подій R_S, який визначається так: якщо випадкові події *A* і *B* належать R_S, то R_S належать і події *AB* та *A+B*. Простору R_S належать події $\overline{A}$ і $\overline{B}$, а оскільки $R_S=U$, то і $V\subset R_S$. Кожній випадковій події $A\subset R_S$ ставиться у відповідність число $P(A)$, яке називається ймовірністю випадкової події *A* та задовольняє таким аксіомам [11].

Аксіома 1. *Ймовірність випадкової події є невід'ємна та менше одиниці, тобто*

$$0<P(A)<1. \tag{1.10}$$

Аксіома 2.

$$P(U)=1; \quad P(V)=0. \tag{1.11}$$

Аксіома 3. *Ймовірність суми попарно несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей, тобто*

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.12}$$

Визначені аксіоми були запропоновані О. М. Колмогоровим. Вони в сукупності складають аксіоматику теорії ймовірностей, з якої випливає таке.

Якщо події $\{A_i\}, i=\overline{1,n}$ складають повну групу подій, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1. \tag{1.13}$$

Якщо повна група подій складається з двох подій, то

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \tag{1.14}$$

Якщо $A \subset B$, то

$$P(A) \le P(B). \tag{1.15}$$

Розглянемо дві сумісні події *A* і *B*.

З рис. 1.17 видно, що

$$\left.\begin{aligned} A+B&=A+B\overline{A}; \\ B&=AB+B\overline{A}. \end{aligned}\right| \tag{1.16}$$

У (1.16) праворуч визначені, якщо розглядати доданки, несумісні події, тому за третьою аксіомою маємо

$$P(A+B)=P(A+B\overline{A})=P(A)+P(B\overline{A});$$

$$P(B)=P(AB+B\overline{A})=P(AB)+P(B\overline{A}).$$

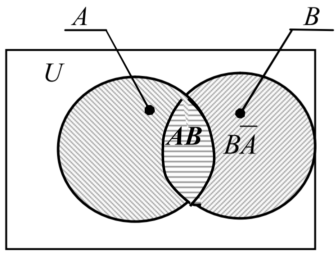

Рис. 1.17. Геометричне тлумачення визначення події (*A* + *B*) та *B*

Для цих рівнянь виконаємо дію почленного віднімання. Тоді

$$P(A+B)-P(B)=P(A)+P(B\overline{A})-P(AB)-P(B\overline{A})$$

або

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (1.17)$$

Аналогічно можна визначити, що

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-$$
$$-P(AC)-P(BC)+P(ABC). \qquad (1.18)$$

У загальному випадку, коли розглядається *n* сумісних подій, співвідношення для розрахунку ймовірностей їх суми має вигляд

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i,j} P(A_i A_j)+\sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_k)-\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1} P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right). \qquad (1.19)$$

Як було вище визначено, на основі поняття умовної частоти випадкової події вводиться поняття *умовної ймовірності випадкової події як ймовірності однієї події за умови, що друга подія сталася*, а саме:

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)};\ P\left(B/A\right)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (1.20)$$

Поняття залежності випадкових подій має таке тлумачення: *випадкові події A і B є залежними, якщо ймовірність однієї з подій залежить від того, сталася чи не сталося інша подія.*

З (1.20) для двох залежних випадкових подій маємо

$$P(AB)=P(A)P\left(B/A\right)=P(B)P\left(A/B\right), \qquad (1.21)$$

для трьох залежних випадкових подій маємо

$$P(ABC)=P(A)P\left(B/A\right)P\left(C/AB\right). \qquad (1.22)$$

У запису (1.22) $P(A)$ – є безумовна ймовірність випадкової події *A*; $P\left(B/A\right)$ – умовна ймовірність випадкової події *B* за умови, що подія *A* сталася; $P\left(C/AB\right)$ – умовна ймовірність події *C* за умови, що випадкові події *A* та *B* сталися одночасно.

Якщо розглядається *n* випадкових подій, то

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)=P(A_i)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)P(A_4/A_1A_2A_3)\ldots\times$$

$$\times P\left(A_n \Big/ \prod_{i=1}^{n-1} A_i\right). \qquad (1.23)$$

З поняття залежності випадкових подій випливає, що якщо події є незалежними, то

$$\left.\begin{aligned} &P\left(A/B\right)=P(A);\\ &P\left(B/A\right)=P(B);\\ &P(AB)=P(A)P(B);\\ &P\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i). \end{aligned}\right| \qquad (1.24)$$

Розглянемо постановку та розв’язання задач з метою ілюстрації застосування визначених вище співвідношень для розрахунку ймовірностей сум сумісних та несумісних випадкових подій та ймовірностей добутку залежних та незалежних випадкових подій.

Задача 1.5. Технічний виріб військового призначення за своїм функціонуванням відповідає структурній схемі послідовного з’єднання двох елементів. Ймовірність відмови першого елемента дорівнює 0,2, другого – 0,3. Визначити ймовірність відмови виробу.

Розв’язання. Виходячи з сукупності умов, які визначають дослід, що може ставитися дослідником з метою виявлення відмови та безвідмовної роботи технічного виробу, вводимо до розгляду випадкову подію *C*, яка полягає в тому, що технічний виріб відмовив. Подія *C* є складною, вона може бути виражена через такі елементарні події:

– *A* – подія, яка полягає в тому, що елемент перший (l_1) відмовив;

– *B* – подія, яка полягає в тому, що елемент другий (l_2) відмовив.

За своїм змістом події *A* і *B* є сумісними, тому що в досліді вони можуть статися одночасно. На рис. 1.18 зазначені всі випадкові події, яким відповідає наслідок – відмова виробу.

Як видно з рис. 1.18, алгебро-логічне розв’язання задачі, що відповідає поданню події C через елементарні події A та B, може мати різний вигляд, а саме:

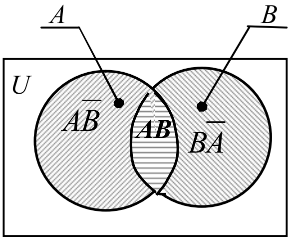

Рис. 1.18. Геометричне тлумачення подій, яким відповідає відмова виробу

$$C = A + B,$$

що випливає з поняття суми випадкових подій;

$$C = A\,\overline{B} + \overline{A}B + AB,$$

оскільки відмова виробу може статися тоді, коли відмовив елемент l_1, а елемент l_2 працює безвідмовно, або тоді, коли елемент l_1 працює безвідмовно, а елемент l_2 відмовив, або тоді, коли одночасно відмовили елементи l_1 і l_2;

$$C = U - \overline{C} = U - \overline{A}\,\overline{B},$$

де $\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B}$ – подія, яка полягає в тому, що виріб є працездатним.

З умови задачі випливає, що події A і B є незалежними, тому що ймовірність відмови елемента l_1 не залежить від того, відмовив елемент l_2 чи ні.

За співвідношеннями для підрахування ймовірності суми та добутку випадкових величин у разі, коли події сумісні чи несумісні, а також коли події залежні чи незалежні, як це визначено вище, маємо

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) =$$
$$= 0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}44;$$

$$P(C) = P\left(A\,\overline{B} + \overline{A}B + AB\right) = P\left(A\,\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}B\right) + P(AB) = P(A)P\left(\overline{B}\right) +$$
$$+ P\left(\overline{A}\right)P(B) + P(A)P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}44,$$

де за (1.14) $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7;$

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8;$$

$$P(C) = P\left(U - \overline{C}\right) = P\left(U - \overline{A}\,\overline{B}\right) = P(U) - P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right) =$$
$$= P(U) - P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 1 - 0{,}56 = 0{,}44.$$

Як уже зазначалося, ймовірність безвідмовної роботи виробу є

$$P\left(\overline{C}\right)=P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)-P\left(\overline{B}\right)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56.$$

Розв'язання цієї задачі свідчить про те, що алгебро-логічне подання події C через протилежну подію $\overline{C}$ слід вважати найбільш доцільним. Це тим більш було б переконливо, якби розглядався технічний виріб, визначення функціонування якого було б пов'язане з розглядом не двох елементів нерезервованого з'єднання, а, скажімо, двадцяти чи двохсот.

Задача 1.6. Структурна схема функціонування технічного виробу військового призначення має нерезервоване з'єднання n елементів. Виріб поставлений на випробування. Визначити ймовірність того, що виріб витримає випробування на функціонування за зазначений термін, якщо ймовірність безвідмовної роботи i-го елемента P_i.

Розв'язання. Введемо до розгляду подію C, яка полягає в тому, що виріб за заданий термін не відмовить, та подію A_i, яка полягає в тому, що за заданий термін елемент l_i буде працездатним. На рис. 1.19 подана структурна схема виробу.

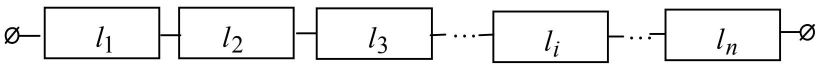

Рис. 1.19. Структурна схема функціонування виробу при нерезервованому з'єднанні елементів

Виходячи з того, що події A_i , $i=\overline{1,n}$ є незалежними, маємо

$$C=\prod_{i=1}^{n}A_i;\quad P(C)=P\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i)=\prod_{i=1}^{n}P_i\,.$$

Подія $\overline{C}$, яка полягає в тому, що відмова виробу може статися тоді, коли відмовить хоча б один з n елементів, тоді

$$\overline{C}=U-C;\quad P\left(\overline{C}\right)=1-\prod_{i=1}^{n}P_i\,.$$

Задача 1.7. Структурна схема функціонування технічного виробу військового призначення має резервне з'єднання n елементів. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що виріб витримає випробування за зазначений термін, якщо ймовірність безвідмовної роботи *i*-го елемента за той же термін становитиме P_i.

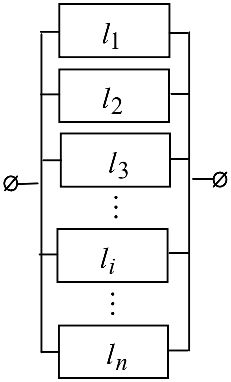

Рис. 1.20. Структурна схема функціонування виробу при резервному з’єднанні елементів

Розв’язання. Структурна схема виробу подана на рис. 1.20.

Розглянемо подію *C*, яка полягає в тому, що виріб витримає випробування за заданий термін часу, та подію A_i, яка полягає в тому, що і-й елемент витримає випробування за заданий термін часу, $i=\overline{1,n}$.

Тоді

$$C = U - \overline{C} = U - \prod_{i=1}^{n} \overline{A}_i = U - \prod_{i=1}^{n} \left(U - A_i\right)$$

та

$$P(C) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P_i\right); \quad P\left(\overline{C}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P_i\right).$$

Задача 1.8. Розглянемо технічний виріб військового призначення, структурна схема функціонування якого має загальний вигляд, тобто являє собою *m* послідовно з’єднаних блоків, у кожному з яких міститься *n* елементів резервного з’єднання. Нехай P_{ij} – ймовірність безвідмовної роботи елемента α_{ij}. Визначити ймовірність відмови та безвідмовної роботи виробу за заданий термін часу.

Розв’язання. Структурна схема функціонування виробу подана на рис. 1.21.

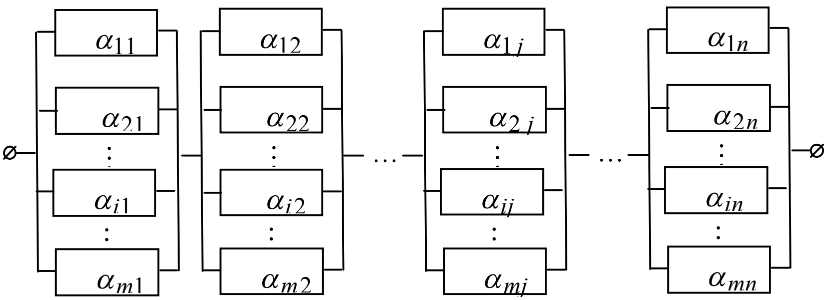

Рис. 1.21. Структурна схема функціонування виробу

Розглянемо подію *C*, яка полягає в тому, що виріб відмовив, та подію A_{ij}, яка полягає в тому, що відмовив α_{ij}-й елемент.

Тоді

$$C = U - \prod_{j=1}^{n}\left(U - \prod_{i=1}^{m} A_{ij}\right);$$

$$P(C) = P\left(U - \prod_{j=1}^{n}\left(U - \prod_{i=1}^{m} A_{ij}\right)\right) = 1 - \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \prod_{i=1}^{m} P_{ij}\right)$$

та

$$P\left(\overline{C}\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \prod_{i=1}^{m} P_{ij}\right).$$

У подальшому розглянемо способи обчислення ймовірностей випадкових подій.

1.6. Способи обчислення ймовірностей випадкових подій

У теорії ймовірностей розглядають такі способи визначення ймовірностей випадкових подій: *класичний, геометричний і статистичний.*

Класичний спосіб. Розглядається дослід, в якому можуть статися N рівноймовірних і несумісних наслідків. Нехай з N наслідків *M наслідків є сприятливими* з точки зору дослідника, тобто такими, яким відповідає поява випадкової події A. Тоді ймовірність випадкової події A визначається виразом

$$P(A) = \frac{M}{N}. \tag{1.25}$$

Розраховувати $P(A)$ за (1.25) можна тоді, коли в умові задачі (опису моделі реального явища природи) описана наявність *класичної моделі*, яка характеризується таким:

– послідовність елементарних подій складає скінченну дискретну множину або нескінченну, але зчисленну дискретну множину;

– елементарні події, які можуть статися в досліді, складають повну групу подій, тобто $A_i A_j = V, i \neq j;\ \sum_{i=1}^{n} A_i = U$;

– елементарні події є рівноймовірними.

Класичну модель можна реалізувати таким чином. В урну кладеться N куль, які пронумеровані числами від 1 до N та на дотик є однаковими. Кулі в урні ретельно перемішуються. З урни навмання виймається одна куля. Сприятлива подія – куля зазначеного номера.

Подія A_k полягає в тому, що навмання буде взято кулю за номером k. Рівноймовірність подій A_k забезпечується тим, що кулі в урні перемішуються та одна з куль вибирається навмання.

При класичній моделі розглядається подія B, яка полягає в тому, що номер кулі, яка виймається з урни, належить деякій множині M заданих чисел з набору $\overline{1,N}$. Якщо кулі, які складають множину M, пофарбувати у білий колір, а решту куль $N-M$ – у чорний колір, то подія B буде визначати появу кулі білого кольору. Той факт, що подія B відповідає появі одного з фіксованих наслідків, висловлюють так: "подія B сприяє M наслідків з N можливих". Тому класичну модель називають "схемою урн".

Розглянемо задачі, в яких ймовірність випадкової події обчислюється за класичним способом.

Задача 1.9. Розглядається дослід з метою виявлення грані з парною кількістю очок при підкиданні грального кубика. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що випаде грань з парною кількістю очок.

Розв'язання. Комплекс умов, які визначають відповідний дослід: гральний кубик; нескінченна гладка поверхня; значення характеристик зовнішнього середовища; експериментатор, який підкидає гральний кубик.

Елементарна подія $B_i, i=\overline{1,6}$ полягає в тому, що випаде i-та грань. Множина $\{B_i\}, i=\overline{1,6}$ відповідає опису, що зазначено вище, класичної моделі, бо множина $\{B_i\}, i=\overline{1,6}$ є скінченною, події $B_i, i=\overline{1,6}$ складають повну групу подій і вони є в силу симетрії грального кубика рівноймовірними. Уведемо до розгляду подію A, яка полягає в тому, що випаде грань з парною кількістю очок. Видно, що $A=B_2+B_4+B_6$, де відповідно події B_2, B_4, B_6 – це події, які полягають в тому, що випадуть грані з числом очок 2, 4 та 6. Виходить, маємо три сприятливі наслідки, які відповідають події A, а всіх наслідків шість.

Тому $P(A)=\dfrac{M}{N}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Примітка. При розгляданні наступних задач будемо описувати лише зміст досліду, мету проведення досліду, який передбачається, виходячи з того, що умова будь-якої задачі – це модель на вербальному (словесному) рівні відповідного реального об'єктивного явища природи. Перелік умов, що визначають дослід, є описом тих факторів, які така модель враховує. Особа, яка навчається, при розгляді задачі перш за все повинна усвідомити зміст досліду, а це значить, що вона хоча б уявно повинна визначити множину умов. Тільки тоді можна розраховувати на безпомилкове визначення тих наслідків, які слід розглядати. А в задачах, які в подальшому будуть розглядатись нами з метою ілюстрації працездатності уже викладених положень чи співвідношень, перелік умов, які визначають необхідний дослід, будемо опускати.

Задача 1.10. У книжці О. С. Вентцель "Теорія ймовірностей" видання 1969 року 560 сторінок. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що при відкритті книги навмання попадеться сторінка за номером, кратним числу сім.

Розв'язання. Елементарною подією B_i є подія, яка полягає в тому, що при відкритті книги навмання попадеться сторінка за номером i, де $i = \overline{1,560}$. Тоді всі елементарні наслідки, які можуть статися в цьому досліді, дорівнюють $N = 560$. Введемо до розгляду подію A, яка полягає в тому, що при відкритті книги навмання попадеться сторінка за номером, кратним числу сім. Тоді подія $A = B_7 + B_{14} + \ldots + B_{560}$, тобто число сприятливих наслідків $M = 80$, а значить $P(A) = \dfrac{M}{N} = \dfrac{80}{560} = \dfrac{1}{7}$.

Задача 1.11. При підготовці проведення екзамену *n* екзаменаційних білетів перемішуються навмання та викладаються в ряд. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що білети за номерами один та два будуть лежати поруч.

Розв'язання. Введемо до розгляду елементарну подію B_i, яка полягає в тому, що при розкладанні екзаменаційних білетів навмання в ряд буде визначений *i*-й варіант розкладання. Кількість елементарних подій відповідає кількості комбінацій, які можна скласти з *n* елементів (білетів) по *n*, тобто це є кількість перестановок, оскільки *i*-та комбінація відрізняється від *j*-ї комбінації тільки порядком розміщення елементів. Виходить, кількість усіх можливих наслідків $N = n!$. Для того, щоб визначити кількість сприятливих наслідків, будемо мислити, наприклад, так: довільний *i*-й варіант може відповідати тому, що білет за номером один та два будуть викладені поруч тоді, коли відносно білета за номером один білет за номером два буде лежати праворуч чи ліворуч. Тому подія *A*, яка полягає в тому, що білети за номером один та два будуть викладені поруч, буде відповідати $M = 2(n-1)!$ варіантам розкладання екзаменаційних білетів. Тоді

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{2(n-1)!}{n!} = \frac{2}{n}.$$

Задача 1.12. Навмання набирається телефонний номер, який складається із п'яти цифр. Визначити ймовірність того, що всі цифри будуть різні.

Розв'язання. Розглянемо елементарну подію B_i, яка полягає в тому, що набраний i-й варіант телефонного номера з п'яти цифр. Кількість усіх можливих наслідків, які відповідають подіям B_i, – це кількість розміщень $n = 10$ елементів (кількість цифр, які набираються) по $r = 5$ чарунках, тому $N = 10^5$. Сприятливі наслідки – це такі події B_i, які відповідають наборам, що відрізняються один від одного як цифрами, так і їх порядком запису (набору). А такі комбінації являють собою розміщення із n елементів по r, тобто $M = A_n^r$.

Тоді

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{A_n^r}{10^5} = \frac{A_{10}^5}{10^5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = 0{,}3024.$$

Задача 1.13 (Задача про вибірку без повернень). В урні є N куль однакових на дотик, M із них білі, а $N - M$ – чорні. Кулі в урні перемішуються. З урни виймають навмання n куль, які в урну потім не повертаються. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що серед n куль, які виймаються з урни, буде рівно m білих і $n - m$ чорних.

Розв'язання. Розглянемо елементарну подію B_i, яка полягає в тому, що з урни буде взято i-ту комбінацію n куль із N, в якій кількість білих куль не перевищує $\min\{n, M\}$, а решта куль чорні. Події B_i складають дискретну множину, вони складають повну групу подій та є рівноймовірними, що забезпечується перемішуванням куль та вибіркою навмання n куль з урни. Це забезпечує зміст класичної моделі. Введемо до розгляду подію A, яка полягає в тому, що у вибірку із n куль потрапить рівно m білих. Ймовірність цієї події слід визначати за (1.25). Кількість всіх можливих наслідків – це кількість комбінацій з N по n, кожна з яких складається з n елементів, а одна комбінація від іншої відрізняється елементами. Тому кількість всіх можливих наслідків є C_N^n. Кількість сприятливих наслідків, що відповідають тим комбінаціям, які будуть складатися рівно із m білих куль та $n - m$ чорних, визначиться як $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$, оскільки кожній комбінації із C_M^m слід поставити у відповідність комбінацію із C_{N-M}^{n-m}. Тому

$$P(A) = P_{n,m}(N, M) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \tag{1.26}$$

Вираз (1.26) називають формулою вибірки без повернень.

Задача 1.14. Партія із 100 виробів включає в себе 80 виробів стандартних. Робиться вибірка із 3 виробів. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що у вибірку із 3 виробів потрапить рівно один нестандартний виріб.

Розв'язання. Згідно із змістом задачі вибірки без повернень маємо, що $N=100; M=20;\ n=3; m=1$.

Тоді

$$P_{3,1}\left(100,20\right)=\frac{C_{20}^{1}\cdot C_{80}^{2}}{C_{100}^{3}}=0,391.$$

Геометричний спосіб. Розглядається область Q та область $q\subset Q$, що відображено на рис. 1.22.

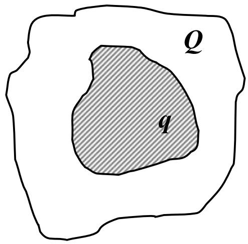

Рис. 1.22. Геометричне подання множин можливих та сприятливих наслідків

Ставиться дослід, який має за мету виявлення влучення в область q випадкової точки, яка навмання "кидається" в область Q. Кожна точка Q – це можливий наслідок, а кожна точка області q – це сприятливий наслідок. Тому ймовірність події, яка полягає в тому, що точка буде належати області q, визначається за співвідношенням

$$P\left(A\right)=\frac{\text{чисельна міра } q}{\text{чисельна міра } Q}, \tag{1.27}$$

яке і визначає зміст геометричного способу визначення ймовірності випадкової події.

Якщо Q та $q\subset Q$ є одновимірні області, то чисельна міра області q є довжиною відрізка $\left(c,d\right)$, тобто $\left(d-c\right)$, а чисельна міра області Q є довжиною відрізка $\left(a,b\right)$, тобто $\left(b-a\right)$, якщо умові $q\in Q$ відповідає $a<c<d<b$. Якщо Q та $q\subset Q$ є двовимірними областями, то чисельною мірою області q є її площа S_q, а чисельною мірою області Q є її площа S_Q, як це і відображено на рис. 1.22. Якщо Q та $q\subset Q$ є тривимірними областями, то чисельною мірою області q є її об'єм V_q, а чисельною мірою області Q є її об'єм V_Q. Аналогічно (1.27) слід тлумачити при розгляді областей Q та $q\subset Q$ будь-якої розмірності.

Все вищевикладене дозволяє висловлювати твердження, що (1.27) є узагальненням виразу (1.25), тобто геометричний спосіб визначення ймовірності випадкової події є узагальненням класичного способу.

Задача 1.15. Інтервалом часу, на протязі якого технічний виріб військового призначення використовується за призначенням, є t_l. Інтервалом часу, на протязі якого виріб перебуває на регламентному обслуговувані, є t_p. Визначити ймовірність події *A*, яка полягає в тому, що виріб буде працездатним у деякий момент часу експлуатаційного терміну.

Розв'язання. Чисельна міра одновимірної області *Q* визначається як $\left(t_l + t_p\right)$, а чисельна міра одновимірної області *q* визначається як t_l.

Тоді $P(A) = \dfrac{t_l}{t_l + t_p}$.

Задача 1.16. Дві особи домовились про зустріч у визначеному місті між 12 та 13 годинами. Кожна особа прибуває до місця зустрічі незалежно від іншої та рівноймовірно на протязі однієї години (між 12 та 13 годинами). Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що зустріч відбудеться, якщо особа, яка прибула до місця зустрічі першою, чекає 15 хвилин, а потім залишає місце зустрічі.

Розв'язання. Нехай t є змінною часу прибуття до місця зустрічі першої особи, а τ – другої особи. Умова задачі передбачає, що зустріч відбудеться, якщо $\left|t - \tau\right| \le \dfrac{1}{4}$, оскільки особа, яка прибула до місця зустрічі, чекає 15 хвилин, а потім покидає місце зустрічі. Тоді область *Q*, зазначена на рис. 1.23, відповідає всім можливим наслідкам, що відповідають елементарним подіям B_i, які полягають в тому, що зустріч відбудеться в *i*-й момент часу за проміжок часу від 12-ї до 13-ї години. Область *q* відповідає сприятливим наслідкам, які відповідають подіям B_i, які полягають

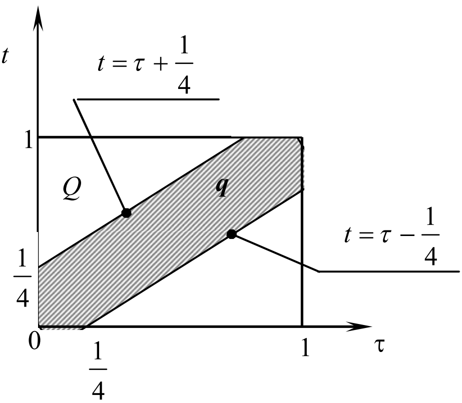

Рис. 1.23. Геометричне зображення можливих та сприятливих наслідків

в тому, що зустріч відбудеться в i-й момент часу проміжку часу від 12-ї до 13-ї години з урахуванням обмеження $\left|t-\tau\right| \le \frac{1}{4}$.

Тоді за (1.27) маємо

$$P(A)=\frac{S_q}{S_Q}=\frac{1-2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1}=\frac{7}{16}.$$

Відмітимо, що задача про зустріч вважається класичною, тому що до такої моделі можна звести багато прикладних задач військового й технічного призначення.

Задача 1.17 (задача Бюффона). Голка, довжина якої l, кидається навмання на папір, розкреслений паралельними лініями, на відстані L одна від одної. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що голка перетне одну із паралельних ліній, якщо $L \ge l$.

Розв'язання.

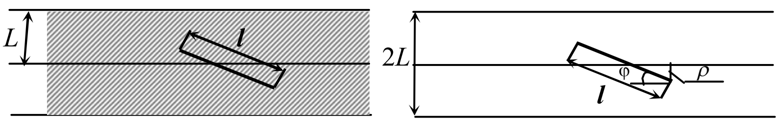

Рис. 1.24. Геометричне зображення змісту досліду

На рис. 1.24 подано геометричне зображення змісту досліду, з якого видно, що голка буде перетинати одну з паралельних ліній, якщо $\rho \le l\sin\varphi$. Усі можливі положення голки будуть відповідати точкам області прямокутника, яка описується в координатах $0 \le \rho \le L$ та $0 \le \varphi \le \pi$ (рис. 1.25), а положення голки, які відповідають сприятливим наслідкам, є точками області q.

Тоді

$$P(A)=\frac{S_q}{S_Q}=\frac{\int_0^{\pi} l\sin\varphi\, d\varphi}{L\pi}=$$

$$=\frac{-l\cos\varphi\Big|_0^{\pi}}{L\pi}=\frac{-l(-1-1)}{L\pi}=\frac{2l}{L\pi}.$$

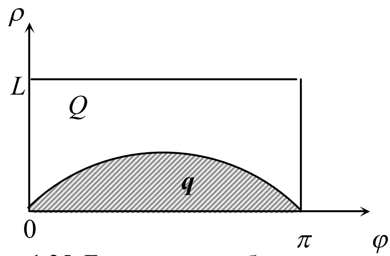

Рис. 1.25. Геометричне зображення можливих та сприятливих наслідків досліду

При статистичному способі визначення ймовірності випадкової події виходять із статистичного підходу означення поняття ймовірності випадкової події, що і було розглянуто вище в п.1.3, та приймають, що ймовірність випадкової події визначається частотою випадкової події, тобто

$$P(A)=P^*(A)=\frac{m}{n}, \tag{1.28}$$

де m – кількість сприятливих наслідків при повторенні досліду n разів.

Якщо в попередній задачі прийняти, що $L=l$, то

$$P(A)=\frac{2}{\pi}=P^*(A)=\frac{m}{n},$$

тоді $\pi=\dfrac{2n}{m}$, а це означає, що трансцендентне число π може бути визначене на основі статистичного моделювання. Так, при $n=10^4$ маємо $\pi=3{,}15$.

1.7. Формула повної ймовірності. Формула гіпотез

Розглянемо подію A, яка може статися за наявності однієї із гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots, H_n$, які складають повну групу подій, тобто $H_i H_j = V;\quad i \neq j;\ i,j=\overline{1,n}$ та $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = U$. На рис. 1.26 наведене геометричне тлумачення можливості появи випадкової події A в досліді за наявності гіпотез H_i, $i=\overline{1,n}$.

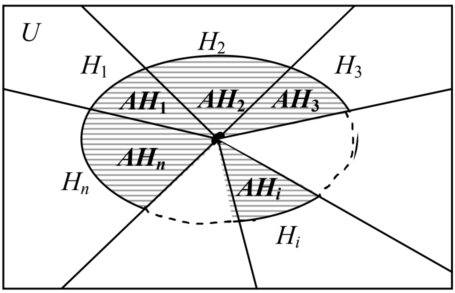

Рис. 1.26. Геометричне тлумачення появи події A в досліді за наявності гіпотез

З рисунка видно, що випадковою подією A є об’єднання (сума) виду $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AHi + \ldots + AH_n$. Події AH_i, $i=\overline{1,n}$ є несумісними, тому що несумісні $H_i, i=\overline{1,n}$; а події A та H_i є залежними, оскільки ймовірність події A залежить від того, сталася подія (гіпотеза) H_i чи ні.

Тоді маємо

$$P(A)=P\left(\sum_{i=1}^{n}AH_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(H_iA)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i).$$

Вираз
$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i) \tag{1.29}$$
називають *формулою повної ймовірності.*

Задача 1.18. З урни, в якій містяться 5 білих та 7 чорних куль, навмання вибираються дві кулі й перекладаються в урну, в якій є 5 білих та 3 чорні кулі. Кулі в другій урні перемішують та навмання вибирають одну кулю. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що куля, яку вибрали з другої урни, є білою.

Розв'язання. Введемо до розгляду подію *A*, яка полягає в тому, що з другої урни вибираємо білу кулю. З умови видно, що подія *A* може статися за наявності таких гіпотез:

– H_1 – гіпотеза, яка полягає в тому, що з першої урни в другу було перекладено дві білі кулі;

– H_2 – гіпотеза, яка полягає в тому, що з першої урни в другу було перекладено одну кулю білу та одну чорну;

– H_3 – гіпотеза, яка полягає в тому, що з першої урни в другу було перекладено дві чорні кулі.

Гіпотези H_1, H_2, H_3 складають повну групу подій, оскільки ніяких інших наслідків у досліді, який полягає у визначені складу куль, що перекладаються із першої урни в другу, бути не може, та один із цих наслідків обов'язково відбудеться.

Тоді
$$A = AH_1 + AH_2 + AH_3,$$
а з (1.29) маємо

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3). \tag{1.30}$$

Розглянемо детальніше визначення ймовірностей випадкових безумовних подій (ймовірність гіпотез) та випадкових умовних подій, які зазначені в правій частині (1.30).

Гіпотези H_1, H_2, H_3 є складними випадковими подіями, які можуть бути виражені через такі елементарні події:

– B_1 – подія, яка полягає в тому, що з першої урни буде вибрана перша куля білого кольору;

– B_2 – подія, яка полягає в тому, що з першої урни буде вибрана друга куля білого кольору.

Із умови задачі випливає таке:

– $\overline{B}_1$ – подія, яка полягає в тому, що з першої урни буде вибрана перша куля чорного кольору;

– $\overline{B}_2$ – подія, яка полягає в тому, що з першої урни буде вибрана друга куля чорного кольору.

Тоді

$$H_1 = B_1 B_2 ;\ H_2 = B_1 \overline{B}_2 + \overline{B}_1 B_2 ;\ H_3 = \overline{B}_1 \overline{B}_2 .$$

Події $B_1 \overline{B}_2$ та $\overline{B}_1 B_2$ є несумісними, а події B_1, B_2 – залежними.

Тому

$$P(H_1) = P(B_1 B_2) = P(B_1) P(\overline{B}_2 / B_1) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33};$$

$$P(H_2) = P(B_1 \overline{B}_2) + P(\overline{B}_1 B_2) = P(B_1) P(\overline{B}_2 / B_1) +$$

$$+ P(\overline{B}_1) P(B_2 / \overline{B}_1) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{66};$$

$$P(H_3) = P(\overline{B}_1 \overline{B}_2) = P(\overline{B}_1) P(\overline{B}_2 / \overline{B}_1) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22},$$

а також

$$P(A/H_1) = \frac{7}{10};\ P(A/H_2) = \frac{3}{5};\ P(A/H_3) = \frac{1}{2}.$$

Виходить, з (1.30) маємо

$$P(A) = \frac{5}{33} \cdot \frac{7}{10} + \frac{35}{66} \cdot \frac{3}{5} + \frac{7}{22} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{132}.$$

При розгляді прикладних задач виникає потреба визначити ймовірності гіпотез за умови, що подія A відбулась. На основі визначення ймовірності добутку маємо

$$P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i) = P(A)P(H_i/A);$$

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},$$

та з урахуванням (1.29)

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}. \quad (1.31)$$

Співвідношення (1.31) називають *формулою гіпотез* або *формулою Байєса*.

Задача 1.19. Транзистори виготовляються на трьох підприємствах. На першому підприємстві виготовляється 20 %, а на другому й третьому – 40 % продукції від загальної кількості. Продукція першого підприємства містить 100 % стандартних транзисторів, другого – 90 %, третього – 80 %. Продукція з усіх підприємств надходить на склад. Для виготовлення виробу з складу навмання вибрали нестандартний транзистор. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що транзистор виготовлений на другому підприємстві, за умови, що він є нестандартним.

Розв'язання. Введемо до розгляду подію A, яка полягає в тому, що зі складу надійшов нестандартний транзистор, та гіпотези такого змісту:

– H_1 – гіпотеза, яка полягає в тому, що транзистор виготовлений на першому підприємстві;

– H_2 – гіпотеза, яка полягає в тому, що транзистор виготовлений на другому підприємстві;

– H_3 – гіпотеза, яка полягає в тому, що транзистор виготовлений на третьому підприємстві.

Тоді

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)} =$$

$$= \frac{0,4 \cdot 0,1}{0,2 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,2} = \frac{0,04}{0,12} = 0,33.$$

Слід відзначити, що якщо $P\left(A/H_1\right)=0$, тоді гіпотезу H_1 можна було б не вводити до розгляду, а це означає, що можна висловлювати поняття “повної групи гіпотез”, тобто визначити таку сукупність гіпотез, за наявності яких подія *A* може статися. Тоді поняття “повної групи гіпотез” не збігається з поняттям “повної групи подій”. Звичайно, можна рекомендувати визначати гіпотези так, щоб вони складали завжди повну групу подій, оскільки при підрахунках потім відповідні ймовірності умовних подій будуть визначені рівними нулю.

На завершення цього параметра відмітимо, що формула повної ймовірності дозволяє обчислити ймовірність події *A*, яка може статися в досліді за наявності гіпотез, тобто дозволяє обчислити *апріорну* (додослідну) ймовірність випадкової події, а формула гіпотез дозволяє обчислити умовну ймовірність $P\left(H_i/A\right)$ за умови, що подія *A* вже відбулася, дослід вже поставлений і його результатом є випадкова подія *A*. Формула гіпотез дозволяє обчислити *апостеріорну* (післядослідну) ймовірність умовної події.

Якщо на практиці ймовірність події *A* може бути визначена за результатами випробувань, то результати обчислення ймовірностей умовних випадкових подій $P\left(H_i/A\right)$ за формулою гіпотез можуть служити підґрунтям для прийняття рішень щодо технічного вдосконалення виробів військового призначення.

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. Дайте означення теорії ймовірностей як науки.
2. Якщо відтворення деякої сукупності умов, за яких спостерігається деяке явище природи, означає дослід, то чи означає зміна хоча б однієї умови з цієї сукупності розуміння деякого іншого досліду?
3. Коли слід стверджувати, що розглядається випадковий наслідок досліду?
4. Дайте означення події, достовірної події, неможливої та випадкової подій.
5. Які випадкові події називають складними, сумісними, залежними?
6. Дайте означення алгебри подій.
7. Яку подію слід розуміти при визначенні суми, добутку, різниці двох подій?
8. Дайте визначення повної групи подій.
9. Які дві події називають протилежними?
10. Доведіть тотожність $AB+\bar{A}B=B;\quad \overline{\bar{A}+B}+A\bar{B}=A$.
11. Розкрийте розуміння ймовірності випадкової події.
12. Сформулюйте аксіоми теорії ймовірностей.

13. Запишіть вираз для визначення ймовірності суми чотирьох сумісних випадкових подій.

14. У чому полягає обґрунтування доцільності застосування класичного способу визначення ймовірності випадкової події?

15. Чи можна геометричний спосіб визначення ймовірності випадкової події розглядати як узагальнення класичного способу?

16. Чи можуть розрахунки за формулою Байєса бути підґрунтям для визначення доцільних шляхів удосконалення зразків озброєння та військової техніки?

Глава 2
ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

2.1. Означення випадкової величини та її закону розподілу

Введення поняття випадкової величини визначило наступний крок розвитку теорії ймовірностей як науки, яка займається виявленням закономірностей масових випадкових явищ природи, тому що опис випадкових явищ природи зручно подавати в термінах випадкових величин, а їх закономірності подавати законами розподілу випадкових величин.

Випадковою величиною називається величина, яка в результаті досліду може приймати певне можливе значення, причому заздалегідь невідомо, яке саме.

Прийнято позначати випадкові величини кінцевими великими літерами латинського алфавіту (X, Y, Z та ін.), а їх можливі значення – відповідно малими літерами: $x_i, i=\overline{1,n}$; $y_i, i=\overline{1,n}$; $z_i, i=\overline{1,n}$. Випадкові величини можуть бути *дискретними* або *неперервними.*

Випадкова величина називається дискретною, якщо її можливі значення складають дискретну скінченну чи нескінченну, але зчисленну множину.

Випадкова величина називається неперервною, якщо її можливі значення складають неперервну скінченну чи нескінченну множину, елементи якої суцільно заповнюють скінченний або нескінченний проміжок.

Приклад 2.1. Розглянемо дослід, який ставиться з метою виявлення працездатності двох виробів. Випадкова величина X – кількість працездатних виробів, вона може приймати такі свої можливі значення: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2.$ Множина можливих значень випадкової величини є дискретною скінченною, тому випадкова величина X є дискретною.

Приклад 2.2. Нехай дослід повторюється до появи випадкової події A, яка полягає в тому, що при підкиданні грального кубика випаде грань, на якій зазначено два очки. Випадкова величина X – кількість підкидань грального кубика до появи події A, вона може приймати свої можливі значення

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3,\ldots$. Множина можливих значень випадкової величини X є дискретною нескінченною, але зчисленною, а виходить, випадкова величина X є дискретною.

Розглянемо випадкову величину X, яка може приймати можливі значення $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$. За визначенням випадкової величини X випливає, що яке саме значення може прийняти X при проведені досліду, насамперед визначити неможливо. Тому події A_i, які полягають в тому, що $X = x_i, i = \overline{1,n}$, є випадковими. У досліді може статися лише одна подія $A_i, i = \overline{1,n}$, та обов'язково одна із $A_i, i = \overline{1,n}$ буде мати місце. Це означає, що сукупність подій $\{A_i\}, i = \overline{1,n}$ складає повну групу подій, оскільки $A_i A_j = V, i \neq j, i, j = \overline{1,n}$ та $\sum_{i=1}^{n} A_i = U$.

Тоді маємо

$$P(U) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \{X = x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P\{X = x_i\} = 1. \qquad (2.1)$$

Із (2.1) видно, що можна говорити щодо повних знань відносно випадкової величини X, якщо будемо мати знання щодо значень $P(A_i) = P(X = x_i), i = \overline{1,n}$.

Законом розподілу випадкової величини X як дискретної, так і неперервної, є всяке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини X та їм відповідних ймовірностей.

Форми подання закону розподілу випадкової величини X існують різні. Якщо випадкова величина X є дискретною, то її закон розподілу може подаватися в таких формах: *ряд розподілу, багатогранник розподілу, функція розподілу, твірна функція розподілу, характеристична функція розподілу.* При практичному опису закону розподілу дискретної випадкової величини в предметних галузях знань частіше використовують такі форми подання, як ряд розподілу, функція розподілу, твірна функція розподілу; подання закону розподілу у вигляді характеристичної функції розподілу використовується не завжди.

Якщо випадкова величина X є неперервною, то її закон розподілу може подаватися в таких формах: *функція щільностей імовірностей розподілу випадкової величини (функція щільностей імовірностей, функція щільностей, щільність ймовірностей), функція розподілу, твірна функція розподілу,* *характеристична функція розподілу.* При практичному використанні опису закону розподілу неперервної випадкової величини частіше використовуються такі форми, як щільність ймовірностей та функція розподілу, а такі форми, опису закону розподілу неперервної випадкової величини, як твірна функція та характеристична функція, використовуються не завжди.

Розглянемо визначення та властивості форм опису законів розподілу, які завжди використовуються при запису законів розподілу як дискретних, так і неперервних випадкових величин.

Ряд розподілу дискретної випадкової величини X – це таблиця, в першому рядку якої визначаються можливі значення випадкової величини, а в другому – відповідні їм імовірності подій, які полягають в тому, що випадкова величина X прийме значення $x_i, i = \overline{1,n}$.

Ряд розподілу випадкової дискретної величини *X* наведені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Ряд розподілу дискретної випадкової величини *X*

$X = x_i$	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
$P_i = P(X = x_i)$	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n

Як відзначалось вище, події $A_i = (X = x_i), i = \overline{1,n}$ складають повну групу подій, тоді

$$P\left[\sum_{i=1}^{n}\left(A_i = \{X = x_i\}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} P_i = 1 .$$

Багатогранник розподілу випадкової величини є графічним відображенням ряду розподілу (рис. 2.1).

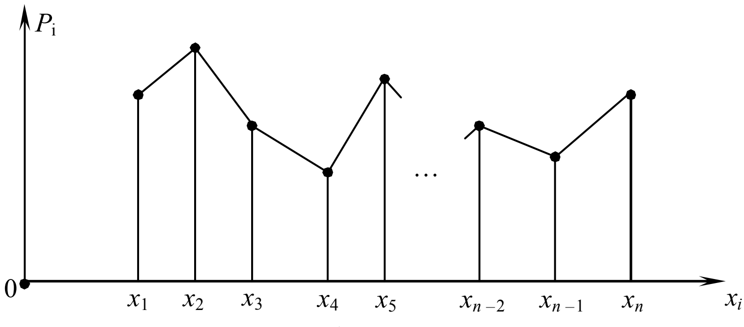

Рис. 2.1. Багатогранник розподілу дискретної випадкової величини

Примітка. Геометричне відображення ряду розподілу як таблиці являє собою точки на площині. З'єднання точок $(x_i, P_i), i = \overline{1, n}$, що відображене в поданні багатогранника розподілу дискретної випадкової величини на рис. 2.1, є умовним.

Вище було відзначено, що функція розподілу є формою опису закону розподілу як дискретної випадкової величини, так і неперервної.

Функцією розподілу випадкової величини X є така функція дійсної змінної x, яка чисельно дорівнює ймовірності випадкової події, яка полягає в тому, що випадкова величина X прийме значення, менше за можливе своє значення x.

Тобто

$$F(x) = P(X < x). \tag{2.2}$$

Як для дискретної, так і для неперервної випадкової величини можливе значення є деяким дійсним числом, тому геометричне тлумачення (2.2) є ймовірністю події *A*, яка полягає в тому, що $X \in (-\infty, x)$, що й зображено на рис. 2.2.

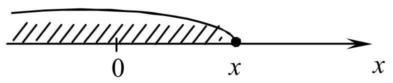

Рис. 2.2. Геометричне тлумачення функції розподілу випадкової величини *X*

Якщо *X* – дискретна випадкова величина, то на основі (2.2) та (1.12) маємо

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i), \tag{2.3}$$

де нерівність $x_i < x$ означає, що сума ймовірностей, яка розглядається, розповсюджується на всі ті можливі значення x_i, які задовольняють умові $x_i < x$, де x – є вибране значення змінної.

Графіки функції розподілу дискретної та неперервної випадкових величин подані на рис. 2.3. та 2.4.

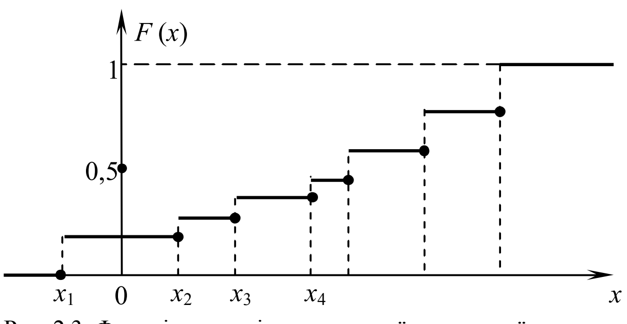

Рис. 2.3. Функція розподілу дискретної випадкової величини.

Відзначимо такі властивості функції розподілу випадкової величини.

1. *Якщо змінна x прямує до –∞, то функція розподілу прямує до 0, тобто*

$$F(x \to -\infty) \to 0.$$

Дійсно, якщо $x = -\infty$, то, виходячи із (2.2), $F(-\infty) = 0$, оскільки подія, яка полягає в тому, що $X < -\infty$, є неможливою, а ймовірність неможливої події дорівнює 0, тобто

$$F(-\infty) = P(X < -\infty) = P(V) = 0.$$

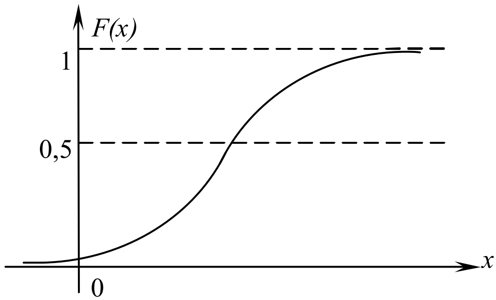

Рис. 2.4. Функція розподілу неперервної випадкової величини

2. *Якщо змінна x прямує до +∞, то функція розподілу прямує до 1, тобто*

$$F(x \to +\infty) \to 1.$$

Дійсно, оскільки

$$F(+\infty) = P(X < +\infty) = P(U) = 1.$$

3. *Функція розподілу є зростаючою функцією за змінною x, тобто якщо* $x_2 > x_1$, *то* $F(x_2) > F(x_1)$.

Дійсно, якщо $x_2 > x_1$, то подія $A = \{X < x_2\}$ є сумою двох несумісних подій $A_1 = \{X < x_1\}$ та $A_2 = \{x_1 < X < x_2\}$.

Тоді

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P\{x_1 < X < x_2\}, \qquad (2.4)$$

а згідно з першою аксіомою теорії ймовірностей (1.10) маємо, що $P\{x_1 < X < x_2\} > 0$, тому

$$F(x_2) > F(x_1).$$

3. *Ймовірність потрапляння випадкової величини в проміжок* (x_1, x_2) *дорівнює різниці функцій розподілу на кінцях цього проміжку, тобто*

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \qquad (2.5)$$

Ця властивість функції розподілу безпосередньо випливає з (2.4) та геометричного тлумачення означення функції розподілу (2.2).

4. *Функція розподілу дискретної випадкової величини в точці розриву є неперервною зліва, а величина стрибка функції розподілу в точці розриву дорівнює ймовірності того, що* $X = x_i$, *тобто*

$$\lim_{x \to x_i - 0} F(x) = \lim_{x \to x_i} F(x) \neq \lim_{x \to x_i + 0} F(x); \qquad (2.6)$$

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = P(X = x_i). \qquad (2.7)$$

Зауваження. Означення таких форм подання закону розподілу, як твірна функція випадкової величини та характеристична функція випадкової величини, будуть наведені в подальшому, оскільки їх визначення потребує викладання додаткових питань.

Розглянемо розв’язання задач, які передбачають визначення закону розподілу дискретної випадкової величини *X*.

Задача 2.1. Проводиться дослід з метою визначення кількості влучень у мішень, якщо стрілець виконує два постріли та ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,8. Визначити ряд розподілу та функцію розподілу випадкової величини кількості влучень у мішень.

Розв’язання. Розглянемо випадкову величину *X* – кількість влучень в мішень при двох пострілах стрільця. Можливі значення випадкової величини $X : x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2$. Множина можливих значень випадкової величини *X* є дискретною та скінченною, а за визначенням дискретної випадкової величини це означає, що випадкова величина *X* – кількість влучень в мішень при двох пострілах – є дискретною. А тому закон розподілу *X* слід визначати у вигляді ряду розподілу, багатогранника розподілу та функції розподілу.

Уведемо до розгляду такі випадкові події:

– B_1 – випадкова подія, яка полягає в тому, що стрілець влучить в мішень при першому пострілі;

– B_2 – випадкова подія, яка полягає в тому, що стрілець влучить в мішень при другому пострілі;

– A_0 – випадкова подія, яка полягає в тому, що після проведення досліду буде виявлено рівно нуль влучень у мішень;

– A_1 – випадкова подія, яка полягає в тому, що після проведення досліду буде виявлено рівно одне влучення в мішень;

– A_2 – випадкова подія, яка полягає в тому, що після проведення досліду буде виявлено рівно два влучення в мішень.

Випадкові події A_0, A_1, A_2 є складними, виразимо їх через елементарні випадкові події B_1, B_2.

Маємо

$$A_0 = \overline{B}_1 \overline{B}_2; \; A_1 = B_1 \overline{B}_2 + \overline{B}_1 B_2; \; A_2 = B_1 B_2,$$

де $\overline{B_1}+B_1=U;\ \overline{B_2}+B_2=U$, тобто $\overline{B_1}$ та $\overline{B_2}$ – протилежні події до B_1 та B_2.

За умовою задачі 2.1 $P(B_1)=P(B_2)=0{,}8$.

Тоді

$$P(A_0)=P\left(\overline{B_1}\right)P\left(\overline{B_2}\right)=0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}04;$$

$$P(A_1)=P\left(B_1\overline{B_2}\right)+P\left(\overline{B_1}B_2\right)=P(B_1)P\left(\overline{B_2}\right)+$$

$$+P\left(\overline{B_1}\right)P(B_2)=0{,}8\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}32;$$

$$P(A_2)=P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2)=0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}64,$$

де враховано те, що події $B_1\overline{B_2}$ та $\overline{B_1}B_2$ є несумісними, а випадкові події B_1 та B_2 є незалежними.

Ряд розподілу випадкової величини X і кількість влучень в мішень при двох пострілах стрільця наведено в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Ряд розподілу випадкової величини *X*

x_i	0	1	2
$P_i=P(X=x_i)$	0,04	0,32	0,64

Виходячи з означення функції розподілу (2.2), маємо

$$F(0)=P(X<0)=P(V)=0;$$

$$F(1)=P(X<1)=P(X=0)=0{,}04;$$

$$F(2)=P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}04+0{,}32=0{,}36;$$

$$F(3)=P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$=0{,}04+0{,}32+0{,}64=1{,}0.$$

Наведемо другий запис отриманих результатів розрахунків значень функції розподілу випадкової величини *X*, а саме:

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad x\le 0;\\ P(X=0)=0{,}04, \quad 0<x\le 1;\\ P(X=0)+P(X=1)=0{,}36, \quad 1<x\le 2;\\ P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1, x>2.\end{cases}$$

Для побудови графіка функції розподілу результати розрахунків зручно наводити в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Результати розрахунку функції розподілу

x_i	0	1	2	3
$P_i = P(X = x_i)$	0,04	0,32	0,64	
$F(x_i)$	0	0,04	0,36	1

Графічне подання функції розподілу за змістом задачі 2.1. наведено на рис. 2.5.

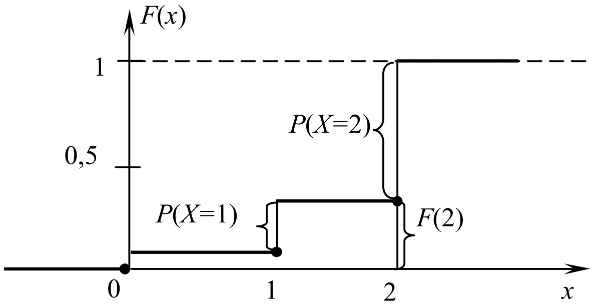

Рис. 2.5. Функція розподілу випадкової величини X

У загальному випадку функція розподілу дискретної випадкової величини має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0, \quad x \le x_1; \\ P(X=x_1), \quad x_1 < x \le x_2; \\ P(X=x_1)+P(X=x_2), \ x_2 < x \le x_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{x_i<x} P(X=x_i), x_{i-1} < x \le x_i; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1, \quad x > x_n \end{cases} \tag{2.8}$$

Примітка. У запису (2.8) права границя зміни змінної $x_{i-1} < x \le x_i$ включає в себе знак "менше в широкому розумінні", тобто "≤", що відповідає властивості функції розподілу (2.6).

Розглянемо визначення та властивості наступної форми подання закону розподілу неперервної випадкової величини, а саме щільності ймовірностей.

На рис. 2.4. наведений графік функції розподілу неперервної випадкової величини. Видно, що для неперервної випадкової величини функція розподілу $F(x)$ є монотонно зростаючою та неперервною функцією. Це означає, що існує похідна $F'(x)$.

Щільність ймовірностей неперервної випадкової величини X є похідною її функції розподілу, тобто

$$f(x) = F'(x). \tag{2.9}$$

Розглянемо такі властивості щільності ймовірностей випадкової величини.

1. Щільність ймовірностей є невід'ємною функцією, тобто

$$f(x) \ge 0 . \tag{2.10}$$

Ця властивість щільності ймовірностей випливає з третьої властивості функції розподілу, згідно з якою, якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) > F(x_1)$.

2. Згідно з означенням (2.9) маємо

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x) dx . \tag{2.11}$$

3. Властивість нормування полягає в тому, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\,. \qquad (2.12)$$

Ця властивість випливає із (2.11) та з того, що $F(\infty)=1$.

4. Визначення ймовірності потрапляння випадкової величини X в інтервал відповідає виразу вигляду

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\,. \qquad (2.13)$$

Дійсно, з (2.5) та (2.11) маємо

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

З метою визначення змісту геометричного тлумачення щільності ймовірностей розглянемо на рис. 2.6 графічне подання закону розподілу випадкової величини у вигляді функції розподілу та відповідної їй щільності ймовірностей.

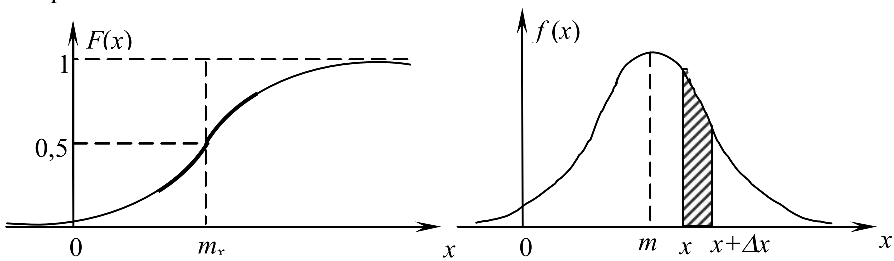

Рис. 2.6. Функція розподілу та щільність ймовірностей випадкової величини X

Примітка. У подальшому буде відзначено, що зображені на рис. 2.6 графічні подання функції розподілу та щільності ймовірностей відповідають випадковій величині X, яка підпорядкована нормальному закону розподілу.

На рис. 2.6. відмічена елементарна зміна можливого значення випадкової величини X. З (2.13) маємо

$$P(x < X < x + \Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(x)dx = f(\xi)\Delta x, \quad x < \xi < x + \Delta x\,.$$

Це означає, що геометричне тлумачення щільності ймовірностей є значенням імовірності потрапляння випадкової величини X в елементарний інтервал Δx, яке чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, площі прямокутника зі сторонами $f(\xi)$, де ξ належить Δx, що відзначено на рис. 2.6.

Розглянемо задачу, розв'язання якої пов'язане з використанням властивостей щільності ймовірностей випадкової величини X.

Задача 2.2. Визначити значення величини a, за якого функція $f(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$ є щільністю ймовірностей випадкової величини X. При цьому значенні величини a визначити функцію розподілу випадкової величини X та ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал $[-1,1]$.

Розв'язання. Виходячи з властивості нормування щільності ймовірностей випадкової величини X (2.12), маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{1+x^2}\,dx=a\cdot\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{\infty}=a\pi=1;\quad a=\frac{1}{\pi}.$$

Функція $f(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$ є функцією щільності ймовірностей випадкової величини X, яка підпорядкована закону розподілу Коші.

Далі за (2.11) та (2.13) маємо

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2};$$

$$P(-1<X<1)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx=0{,}5.$$

2.2. Числові характеристики випадкових величин

Знання закону розподілу випадкової величини дозволяє розв'язати будь-яку задачу, згідно з умовою якої розглядається випадкова величина. У той же час можна сформулювати багато прикладних задач, для розв'язання яких достатньо знання лише числових характеристик випадкової величини.

Характеристики, які висвітлюють та описують основні властивості закону розподілу випадкової величини, називаються числовими характеристиками випадкової величини.

До числових характеристик випадкової величини, які достатньо часто застосовуються, слід віднести:

– математичне сподівання випадкової величини ($M[X];m_x$);

– моду випадкової величини (M_{o_x});

– медіану випадкової величини (M_{e_x});

– квантиль випадкової величини (x_α).

– дисперсію випадкової величини ($D[X];D_x;\sigma_x^2$);

– середнє квадратичне відхилення випадкової величини (σ_x);

Розглянемо кожну із зазначених числових характеристик з точки зору визначення, практичного тлумачення та співвідношень для їх розрахунків як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

Математичним сподіванням випадкової величини називають таке середнє зважене її значення, відносно якого групуються всі можливі значення випадкової величини.

Сутність математичного сподівання випадкової величини як центра, відносно якого групуються всі можливі значення випадкової величини, визначимо при подальшому розгляді. Нехай розглядається деякий дослід, мета якого полягає у визначенні значень випадкової величини *X*. Дослід повторюється *n* раз. Нехай m_i – кількість результатів спостережень з *n*, за яких випадкова величина *X* набула значення $x_i,\, i=\overline{1,k},\, k<n$. Тоді середнє арифметичне спостережень випадкової величини визначиться виразом

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{n}=\sum_{i=1}^{k} x_i \frac{m_i}{n}=\sum_{i=1}^{k} x_i P_i^*\ , \tag{2.14}$$

де $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$; $P_i^* = \dfrac{m_i}{n}$ – частота появи спостереження x_i випадкової величини *X*.

Як було визначено в п. 1.3, частота випадкової події при наближені кількості випробувань до нескінченності прямує до ймовірності випадкової події (рис. 1.15). Це означає, що середнє арифметичне спостережень випадкової величини X (2.14) буде наближатись до $\sum_{i=1}^{k} x_i P_i$. Це число і є математичне сподівання випадкової величини X.

Якщо розглядати дискретну випадкову величину X, для якої закон розподілу поданий у вигляді ряду розподілу (див. табл. 2.1), то математичне сподівання дискретної випадкової величини X розраховується за виразом

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i . \tag{2.15}$$

Оскільки математичне сподівання є таке значення, відносно якого групуються можливі значення випадкової величини з урахуванням значень їх імовірностей $P(X = x_i), i = \overline{1, n}$, то можливе таке механічне тлумачення $M[X]$. Математичне сподівання випадкової величини можна уявити як центр ваги сукупності матеріальних точок, координата якого визначається виразом

$$M[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}, \tag{2.16}$$

де P_i – маса i-ї матеріальної точки;

x_i – координата i-ї матеріальної точки.

Таке тлумачення подане на рис. 2.7.

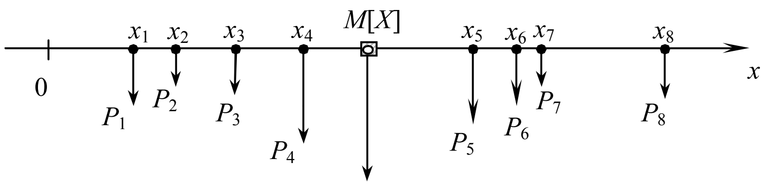

Рис. 2.7. Тлумачення змісту математичного сподівання випадкової величини

Оскільки математичне сподівання є точка на числовій осі, відносно якої групуються можливі значення випадкової величини, то *математичне сподівання випадкової величини X називають характеристикою положення випадкової величини.*

Розглянемо визначення математичного сподівання для неперервної випадкової величини *X*. Інтервал можливих значень $(-\infty;\infty)$ випадкової неперервної величини *X* розіб'ємо на n елементарних інтервалів $(x_{i-1}, x_i),\ i=\overline{1,n}$. Визначимо для кожного елементарного інтервалу $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, тоді, виходячи з геометричного тлумачення щільності ймовірностей неперервної випадкової величини, маємо

$$P\left(\widetilde{X}=\xi_i\right)=P(x_{i-1}<X<x_i)=f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\xi_i f(\xi_i),$$

а математичне сподівання випадкової величини *X*, виходячи з виразу (2.15), має вигляд

$$M\left[\widetilde{X}\right]=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f(\xi_i).$$

Якщо $n\to\infty$, то $\Delta x_i \to 0,\ \forall\ i=\overline{1,n-1}$, та $x_{i-1}\to x_i$, $\xi_i \to x_i$, то

$$M\left[\widetilde{X}\right]=\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta x\to 0)}}\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i). \qquad (2.17)$$

Права частина (2.17) є інтегральна сума, тоді

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx. \qquad (2.18)$$

Виходить, якщо випадкова величина *X* є дискретною, то математичне сподівання *X* розраховується за (2.15), а якщо випадкова величина *X* є неперервною, то математичне сподівання *X* розраховується за (2.18).

Мода випадкової величини X – це її найімовірніше значення.

У табл. 2.2. наведений ряд розподілу випадкової величини, яка розглядається в задачі 2.1. Із ряду розподілу випливає, що $M_{o_x}=2$, тому що $P(X=2)=0{,}64$. Якщо випадкова величина є неперервною, то M_{o_x} буде визначатись із розв'язання рівняння $f'(x)=0$, тобто, якщо $x=M_{o_x}$, то $f'(x=M_{o_x})=0$.

Медіана випадкової величини X є таке її значення, за якого виконується умова

$$P(X<M_{e_x})=P(X>M_{e_x})=\frac{1}{2}. \qquad (2.19)$$

Геометричне тлумачення медіани випадкової величини полягає в тому, що пряма $x = M_{e_x}$ ділить площу під кривою щільності ймовірностей неперервної випадкової величини навпіл. Якщо графік щільності неперервної випадкової величини є симетричним то $M_{e_x} = M_{o_x} = M[X]$. Як буде відзначено в подальшому випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу. Вищевідзначене означення медіани випадкової величини свідчить про те, що для дискретної випадкової величини X медіана як числова характеристика не завжди існує.

Квантилем випадкової величини X є таке її значення, якому відповідає $F^{-1}(\alpha)$, *тобто*

$$x_\alpha = F^{-1}(\alpha), \tag{2.20}$$

де $F^{-1}(\alpha)$ – обернена функція до функції розподілу випадкової величини X, $\alpha = P(X < x_\alpha) = F(x_\alpha)$.

Як це випливає з означення M_{o_x} та x_α, ці числові характеристики є також характеристиками положення випадкової величини X.

Характеристикою розсіювання можливих значень випадкової величини є дисперсія випадкової величини, чисельне значення якої характеризує тісноту групування можливих значень випадкової величини відносно центру розсіювання.

Дисперсія випадкової величини X є математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання, тобто

$$D[X] = M\left[\left|X - m_x\right|^2\right] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right], \tag{2.21}$$

де $\overset{\circ}{X} = X - m_x$ – центрована випадкова величина.

Зміст дисперсії випадкової величини згідно з її означенням (2.21) поданий на рис. 2.8.

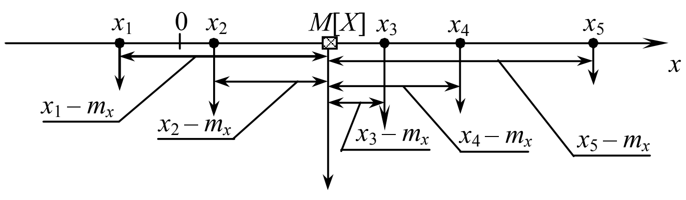

Рис. 2.8. Сутність дисперсії випадкової величини

На рис. 2.8. відзначені можливі значення $x_i, i=\overline{1,5}$ випадкової величини X та їх відхилення від математичного сподівання $(x_i - m_x), i=\overline{1,5}$.

Оскільки в (2.21) X – випадкова величина, а $\overset{\circ}{X} = X - m_x$ як невипадкова функція випадкового аргументу X теж є випадковою величиною, тоді й $Y = \overset{\circ}{X}{}^2 = (X - m_x)^2$, за тими ж міркуваннями, теж є випадковою величиною, то, виходячи із виразу (2.15) для визначення математичного сподівання дискретної випадкової величини та виразу (2.18) для визначення математичного сподівання неперервної випадкової величини, можуть бути записані вирази для визначення дисперсії відповідно для дискретної випадкової величини та неперервної випадкової величини у вигляді

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 P_i\,; \tag{2.22}$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_x)^2 f(x)\, dx\,. \tag{2.23}$$

Примітка. Визначення закону розподілу та числових характеристик невипадкової функції випадкового аргументу буде викладене далі (див. гл. 4). Там же будуть сформульовані й доведені теореми та властивості математичного сподівання випадкової величини, а саме $M[C] = C$, де C – невипадкова величина; $M[CX] = CM[X]$; $M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i]$.

З (2.22) та (2.23) видно, що дисперсія випадкової величини має розмірність квадрата розмірності випадкової величини. Природно відхилення випадкової величини від математичного сподівання (рис. 2.8) вимірювати в тих же одиницях, що й можливі значення випадкових величин. Тому на практиці для чисельного значення відхилення можливих значень випадкової величини від її математичного сподівання частіше користуються *середнім квадратичним відхиленням*, яке визначається як

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]}\,. \tag{2.24}$$

У загальному випадку під числовими характеристиками розуміють *початкові та центральні моменти всіх порядків випадкової величини X*, які, як це буде видно виходячи з їх означення, описують як вищезазначені числові характеристики випадкової величини, так і такі числові характеристики, як коефіцієнт асиметрії, коефіцієнт ексцесу та ін.

Початковими моментами k-го порядку відповідно дискретної та неперервної випадкової величини X називають:

$$\alpha_k = M\left[X^k\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^k P_i ; \tag{2.25}$$

$$\alpha_k = M\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx . \tag{2.26}$$

Центральними моментами k-го порядку відповідно дискретної та неперервної випадкової величини X називають:

$$\mu_k = M\left[\left|X - m_x\right|^k\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k P_i ; \tag{2.27}$$

$$\mu_k = M\left[\left|X - m_x\right|^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx . \tag{2.28}$$

Розглянемо значення початкових та центральних моментів випадкової величини X різних порядків.

Нехай $k = 0$, тоді

$$\alpha_0 = M\left[X^0\right] = M[1] = 1 ;$$

$$\mu_0 = M\left[\left|X - m_x\right|^0\right] = M[1] = 1, \text{ тобто } \alpha_0 = \mu_0 = 1 .$$

Нехай $k = 1$, тоді $\alpha_1 = M[X]$, а визначені вище співвідношення (2.25) та (2.26) для розрахунку початкового моменту першого порядку ($k = 1$) збігаються з відомими раніше (2.15) та (2.18) для розрахунку математичного сподівання відповідно дискретної та неперервної випадкової величини. При $k = 1$ маємо

$$\mu_1 = M\left[\left|X - m_x\right|^1\right] = M\left[\left|X - m_x\right|\right] = M[X] - M[m_x] = m_x - m_x = 0 ,$$

тобто центральний момент першого порядку $\mu_1 = 0$.

Нехай $k = 2$, тоді з (2.27) та (2.28) видно, що $\mu_2 = D[X]$, бо якщо $k = 2$, то (2.27) та (2.28) відповідають виразам (2.22) та (2.23).

Центральні моменти випадкової величини при $k \geq 2$ можуть бути виражені через початкові моменти порядків $k \geq 1$. Розглянемо таке:

$$\mu_2 = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right] = M\left[\left|X - m_x\right|^2\right] = M\left[X^2 - 2m_x X + m_x^2\right] =$$

$$= M\left[X^2\right] - M\left[2m_x X\right] + M\left[m_x^2\right] = M\left[X^2\right] - 2m_x M\left[X\right] + m_x^2 =$$

$$= M\left[X^2\right] - m_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2;$$

$$\mu_3 = M\left[\overset{\circ}{X}{}^3\right] = M\left[\left|X - m_x\right|^3\right] = M\left[X^3 - 3X^2 m_x + 3X m_x^2 - m_x^3\right] =$$

$$= M\left[X^3\right] - M\left[3m_x X^2\right] + M\left[3m_x^2 X\right] - M\left[m_x^3\right] = M\left[X^3\right] -$$

$$- 3m_x M\left[X^2\right] + 3m_x^2 M\left[X\right] - m_x^3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3.$$

Аналогічно можна провести перетворення для μ_k, $k \geq 4$.

Таким чином, зв’язок між центральними моментами та початковими моментами випадкової величини відповідає таким співвідношенням:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_0 = 1; \\ &\mu_1 = 0; \\ &\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2; \\ &\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3; \\ &\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4. \end{aligned}\right| \tag{2.29}$$

Аналогічні співвідношення можуть бути отримані для μ_k, $k \geq 5$.

Отриманий вираз для μ_2 дозволяє записати такі співвідношення для визначення дисперсії дискретної та неперервної випадкової величини:

$$D\left[X\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - m_x^2; \tag{2.30}$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - m_x^2 . \qquad (2.31)$$

Примітка. Вирази вигляду (2.29) дозволяють установити, що якщо графік щільності ймовірностей неперервної випадкової величини є симетричним відносно прямої $x = M_{o_x}$, то всі нечіткі центральні моменти μ_{2k+1} (якщо вони існують) дорівнюють 0; тому будь-який нечіткий центральний момент, що не дорівнює нулю, розглядають як характеристику асиметрії закону розподілу неперервної випадкової величини.

Як чисельна міра асиметрії графіка щільності ймовірностей неперервної випадкової величини виступає *коефіцієнт асиметрії*, який визначається виразом

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\sigma_x^k} .$$

Якщо $\beta_1 > 0$, то права гілка графіка щільності ймовірностей неперервної випадкової величини буде більш пологою, а ліва – більш крутою. Якщо $\beta_1 < 0$, то навпаки, ліва гілка буде більш пологою, а права – більш крутою. Вигляд графіка щільності неперервної випадкової величини при $\beta_1 > 0$ та $\beta_1 < 0$ поданий на рис. 2.9 та 2.10.

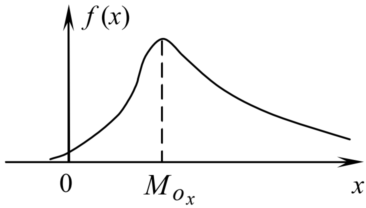

Рис. 2.9. Графік функції щільності ймовірностей випадкової величини при $\beta_1 > 0$

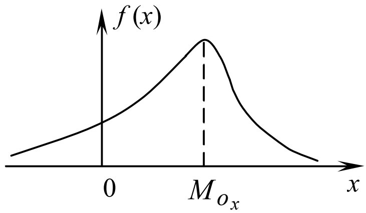

Рис. 2.10. Графік функції щільності ймовірностей випадкової величини при $\beta_1 < 0$

Якщо $\beta_1 = 0$, то графік функції щільності ймовірностей випадкової величини є симетричним відносно прямої $x = M_{o_x}$.

Центральний момент четвертого порядку визначає *коефіцієнт ексцесу (ексцес)* виразом

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 ,$$

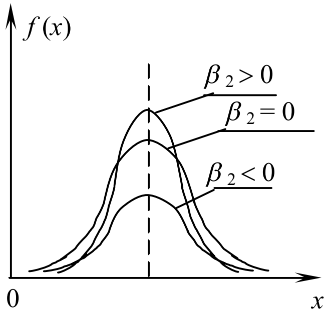

Рис. 2.11. Графіки функції ймовірностей при різних значеннях коефіцієнта ексцесу

який характеризує гостроверхість графіка функції щільності ймовірностей неперервної випадкової величини. Графік функції щільностей нормального закону розподілу відповідає $\beta_2 = 0$. Графік функції щільності ймовірностей, який має більш пологу вершину, ніж графік функції ймовірностей нормального закону розподілу, характеризується $\beta_2 < 0$, в протилежному випадку – $\beta_2 > 0$ (рис. 2.11).

2.3. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

Розглянемо закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин, які найчастіше використовуються при описі випадкових явищ природи, перелік яких наведений у дод. 2. Опис закону розподілу як будь-якого співвідношення, яке містить можливі значення випадкової величини та їм відповідні ймовірності, включає в себе параметри, які за своїм змістом або є числовими характеристиками випадкової величини, або однозначно їх визначають.

2.3.1. Біноміальний закон розподілу

Розглянемо дослід, в якому може статися випадкова подія *A*, ймовірність появи якої є $P(A) = P\ (0 < P < 1)$. Імовірність того, що подія *A* не відбудеться, є $P(\overline{A}) = 1 - P = q$. Дослід повторюється *n* раз. Наслідки при повторені такого досліду є незалежними, що означає, що ймовірність появи події *A* в *i*-му за номером досліді, де $i = \overline{1,n}$, не залежить від того, сталася чи ні подія *A* при *k*-му за номером досліді, де $k \neq i;\ i,k = \overline{1,n}$.

Повторення дослідів з рівноймовірними та незалежними дослідами *називають схемою незалежних випробувань або схемою Бернуллі.* Визначимо ймовірність події B_m, яка полягає в тому, *що в n дослідах випадкова подія A відбудеться рівно m раз.* Це означає, що будемо розглядати випадкову величину *X* – кількість дослідів із *n,* в яких може статися подія *A*. Можливі значення випадкової величини *X* позначимо *m*, та $m = 0, 1, 2, ..., n$. Виходячи з визначення випадкової величини, видно, що випадкова величина

X є дискретною, тому що множина її можливих значків є кінцевою дискретною множиною. Для опису закону розподілу X необхідно визначити $P(B_m) = P(X = m) = P_{n,m}$.

Уведену до розгляду випадкову подію B_m можна подати через елементарні події A_i, $i = \overline{1,n}$, які полягають в тому, що подія A відбудеться в i-му досліді.

Тоді маємо таке:

$$\begin{aligned} B_m = {} & A_1 \cdot A_2 \cdots A_m \cdot \overline{A}_{m+1} \cdot \overline{A}_{m+2} \cdots \overline{A}_n + \\ & + A_1 \cdot A_2 \cdots A_{m-1} \cdot \overline{A}_m \cdot A_{m+1} \cdot \overline{A}_{m+2} \cdots \overline{A}_n + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_{n-m} \cdot A_{n-m+1} \cdot A_{n-m+2} \cdots A_n . \end{aligned}$$

Доданки в правій частині подання події B_m є несумісними випадковими подіями, оскільки якщо, наприклад, розглядати перший та другий доданок, то не можуть одночасно статися події A_m та $\overline{A}_m$.

Події, які визначають зміст кожного доданка, є незалежними, як це було відзначено при описі схеми незалежних випробувань. Кожний доданок містить в своєму запису добуток n випадкових подій, m з яких означає, що подія A відбудеться в m дослідах із n, та $(n - m)$ означає, що подія A не відбудеться (відбудеться подія $\overline{A}$) в $(n - m)$ дослідах з n. Якщо записи доданків розглядати як подання комбінацій з n елементів, то видно, що комбінація від комбінації відрізняється лише порядком, місцем запису i-го, $i = \overline{1,n}$ елемента. Такі комбінації (див. дод. 1) є сполученням з n елементів по m, а кількість таких комбінацій визначається виразом

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} .$$

Враховуючи все відзначене і те, що $P(A_i) = p, i = \overline{1,n}$, а $P\left(\overline{A_i}\right) = q, i = \overline{1,n}$, будемо мати таке:

$$\begin{aligned} P(B_m) = {} & P\left(A_1 \cdot A_2 \cdots A_m \cdot \overline{A}_{m+1} \cdot \overline{A}_{m+2} \cdots \overline{A}_n\right) + \\ & + P\left(A_1 \cdot A_2 \cdots A_{m-1} \cdot \overline{A}_m \cdot A_{m+1} \cdot \overline{A}_{m+2} \cdots \overline{A}_n\right) + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + P\left(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_{n-m} \cdot A_{n-m+1} \cdot A_{n-m+2} \cdots A_n\right) = C_n^m p^m q^{n-m} . \end{aligned}$$

Значить, ймовірність події, яка полягає в тому, що в m дослідах з n випадкова подія A відбудеться, визначається виразом

$$P_{n,m} = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} . \qquad (2.32)$$

Співвідношення (2.32) називають *формулою Бернуллі*.

Розглянемо біном Ньютона вигляду

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} ,$$

де вираз (2.32) збігається з визначенням (m + 1)-го члена бінома Ньютона. Тому закон розподілу випадкової величини X – кількості появи випадкової події A в n дослідах з рівноймовірними та незалежними наслідками називають *біноміальним законом розподілу,* а (2.32) є аналітичним поданням цього закону, оскільки ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина X прийме своє можливе значення $m = \overline{0,n}$, визначається за (2.32).

Функцію

$$P(z) = (pz+q)^n = \sum_{m=0}^{n} P_{n,m}\, z^m \qquad (2.33)$$

називають *твірною функцією біноміального закону розподілу*, тому що вона створює ймовірності $P_{n,m}$ як коефіцієнт при змінній z у відповідному степені m.

Задача 2.3. Визначити закон розподілу випадкової величини X – кількість влучень в мішень, якщо стрілець виконує два постріли та ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі дорівнює 0,8.

Розв'язання. Із змісту задачі випливає, що дослід, мета якого полягає у виявлені події A – влучення в мішень, повторюється два рази. У кожному досліді $P(A_1) = P(A_2) = P(A) = 0{,}8$. Наслідки є незалежними, оскільки ймовірність того, що подія A настала в другому досліді не залежить від того, настане чи ні подія A при першому досліді. Отже, маємо повторення випробувань з рівноймовірними та незалежними наслідками. Це і відповідає змісту схеми Бернуллі, а тоді для визначення $P_{n,m}$, де $n = 2$, а $m = 0, 1, 2$ можна користуватись (2.32). Будемо мати

$$P_{2,0} = C_2^0 \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}04 ;$$

$$P_{2,1} = C_2^1 \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^1 = 2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}32 ;$$

$$P_{2,2} = C_2^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^0 = 2 \cdot 0{,}64 = 0{,}64 .$$

Згідно з (2.33) записуємо твірну функцію, а саме

$$\varphi(z) = (0{,}8z + 0{,}2)^2 = 0{,}64z^2 + 2 \cdot 0{,}8z \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 =$$
$$= 0{,}04z^0 + 0{,}32z^1 + 0{,}64z^2,$$

де коефіцієнти при z^0, z^1 та z^2 відповідно є $P_{2,0}; P_{2,1}; P_{2,2}$.

Визначимо, що отримані тут результати можуть бути подані у вигляді ряду розподілу та збігаються з результатами, які наведені в табл. 2.2.

2.3.2. Узагальнений біноміальний закон розподілу

У загальному випадку ймовірність сприятливого наслідку *A* в кожному досліді є різною, тобто $P(A_i) = P_i, i = \overline{1,n}$. Тоді будемо мати схему повторення випробувань з різноймовірними та незалежними наслідками. У цьому випадку ймовірність $P_{n,m}$ події, яка полягає в тому, що рівно в *m* дослідах із *n* сприятлива подія *A* відбудеться, визначається з твірної функції, яка має вигляд

$$\varphi(z) = \prod_{i=1}^{n} (P_i z + q_i) = \sum_{m=0}^{n} P_{n,m}\, z^m . \quad (2.34)$$

Розглянемо визначення найбільш уживаних числових характеристик випадкових величин, підпорядкованих біноміальному та узагальненому біноміальному законам розподілу.

Для цього введемо до розгляду випадкову величину X_i – кількість появ сприятливої події *A* в *i*-му досліді. Раніше була розглянута випадкова величина *X* – кількість появ сприятливої події *A* в *n* дослідах. Тоді маємо $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, а ряд розподілу випадкової величини X_i подано в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Ряд розподілу випадкової величини X_i

$x_i^{(k)}$	$x_i^{(1)} = 0$	$x_i^{(2)} = 1$
$P\left(X_i = x_i^{(k)}\right) = P_i^{(k)}$	$q_i^{(1)} = 1 - P_i^{(2)} =$ $= 1 - P_i = q_i$	$P_i^{(2)} = P_i$

Тоді з (2.15) маємо

$$M\left[X_i\right]=\sum_{k=1}^{2} x_i^{(k)} P_i^{(k)} = 0\cdot q_i^{(1)} + 1\cdot P_i^{(2)} = P_i\,, \qquad (2.35)$$

а з (2.30) маємо

$$D\left[X_i\right]=\sum_{k=1}^{2}\left[x_i^{(k)}\right]^2 P_i^{(k)} - m_{x_i}^2 = 0^2\cdot q_i + 1^2\cdot P_i - P_i^2 = P_i q_i\,. \qquad (2.36)$$

Вище в примітці були визначені без доведення деякі теореми та властивості математичного сподівання випадкової величини. Зараз згадаємо теорему щодо дисперсії суми незалежних випадкових величин, що теж буде наведено в главі 4. Отже вважаємо справедливим співвідношення

$$M\left[X\right]=M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right]; \qquad (2.37)$$

$$D\left[X\right]=D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D\left[X_i\right]. \qquad (2.38)$$

Виходячи із (2.37) та (2.38) та враховуючи (2.35) та (2.36), якщо випадкова величина X підпорядкована узагальненому біноміальному закону розподілу, будемо мати таке:

$$M\left[X\right]=\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} P_i\;; \qquad (2.39)$$

$$D\left[X\right]=\sum_{i=1}^{n} D\left[X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} P_i q_i\,. \qquad (2.40)$$

Оскільки для випадкової величини X, яка підпорядкована біноміальному закону розподілу, $P\left(A_i\right)=P\left(A\right)=P$, $\forall\; i=\overline{1,n}$, то

$$M\left[X\right]=nP\,; \qquad (2.41)$$

$$D\left[X\right]=nPq\,. \qquad (2.42)$$

Розглянемо співвідношення

$$\frac{P_{n,m+1}}{P_{n,m}}=\frac{C_n^{m+1}P^{m+1}q^{n-(m+1)}}{C_n^m P^m q^{n-m}}=\frac{\frac{n!}{(m+1)![n-(m+1)]!}P}{\frac{n!}{m!(n-m)!}q}=$$

$$=\frac{(n-m)P}{(m+1)q}.$$

Якщо $\frac{(n-m)P}{(m+1)q}\geq 1$, то $nP-mP\geq m(1-P)+1-P$;

$nP-mP\geq m-mP+1-P$; $nP\geq m+q$; $nP-q\geq m$.

Виходить, якщо $m=nP-q$, то $P_{n,m+1}=P_{n,m}$, якщо $m>nP-q$, то $P_{n,m+1}<P_{n,m}$.

За визначенням мода випадкової величини M_{o_x} є її найімовірнішим значенням. Із зазначеного вище видно, що якщо $(nP-q)$ – ціле число, то $M_{o_x}=m_0$ або $M_{o_x}=m_0+1$. Якщо $(nP-q)$ не є цілим числом, то M_{o_x} буде дорівнювати найближчому цілому, більшому $nP-q$. Це означає, що якщо випадкова величина підпорядкована біноміальному закону розподілу, то $nP-q<M_{o_x}<nP+P$.

Вираз (2.19) визначає означення медіани випадкової величини.

Для дискретної випадкової величини медіану слід визначати з виразу

$$P\left(X\leq M_{e_x}\right)=P\left(X>M_{e_x}\right)=\frac{1}{2},$$

або

$$P\left(X<M_{e_x}\right)=P\left(X\geq M_{e_x}\right)=\frac{1}{2}.$$

Це означає, що медіана для дискретної випадкової величини існує не завжди.

Задача 2.4. Виріб військового призначення складається з 8 однакових елементів та виконує своє функціональне призначення за наявності не менше 7 працездатних елементів. За час *t* кожний елемент незалежно один від одного може відмовити з ймовірністю 0,2. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що виріб відмовить за час *t*.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що дослід, який проводиться з метою виявлення працездатності елемента за час *t*, повторюється 8 разів.

Наслідки, які складають зміст події $A_i, i=\overline{1,8}$, є незалежними, а A_i – подія, яка полягає в тому, що *i*-й елемент відмовив за час *t*. За умовою задачі $P(A_i)=0{,}2$, тоді $P\left(\overline{A_i}\right)=0{,}8$.

Введемо до розгляду величину *X* – кількість елементів, які безвідмовно працюють за час *t*. Оскільки розглядається повторення досліду з рівноймовірними та незалежними наслідками, то випадкова величина *X* підпорядкована біноміальному закону розподілу, тому для визначення ймовірності подія B_m, яка полягає в тому, що за час *t m* елементів із *n* виявлено працездатними, можна користуватися формулою Бернуллі (2.32). Якщо випадкова подія *A* полягає в тому, що виріб за час *t* відмовив, то

$$P(A)=1-\left[P\left(B_{m=7}\right)+P\left(B_{m=8}\right)\right]=1-\left[\ P_{8,7}+P_{8,8}\ \right]=$$

$$=1-\left[C_8^7\cdot 0{,}8^7\cdot 0{,}2^1+C_8^8\cdot 0{,}8^8\cdot 0{,}2^0\right]=1-\left(8\cdot 0{,}8^7\cdot 0{,}2+0{,}8^8\right)=0{,}496.$$

Задача 2.5. Три літаки незалежно один від одного кидають з різних висот по одній бомбі на ціль. Імовірність влучення у ціль для першого літака дорівнює 0,3; для другого – 0,6; для третього – 0,7. Визначити найбільш імовірну кількість влучень у ціль, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини кількості влучень в ціль.

Розв'язання. Введемо до розгляду випадкову величину *X* – кількість бомб, які влучили у ціль. Можливі значення випадкової величини: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$. Множина можливих значень є дискретною та скінченною, тому випадкова величина *X* є дискретною випадковою величиною. Із змісту умови випливає, що дослід, який полягає у визначенні влучення в ціль, повторюється три рази. Сприятливими наслідками є випадкові події $B_i, i=\overline{1,3}$, які полягають в тому, що сталося влучення у ціль при киданні бомби *i*-м літаком. Ці наслідки є незалежними та різноймовірними, тому що $P(B_1)=0{,}3$; $P(B_2)=0{,}6$; $P(B_3)=0{,}7$. Тоді можна стверджувати, що випадкова величина *X* підпорядкована узагальненому біноміальному закону розподілу. Твірна функція (2.33) дозволяє визначити ймовірність подій, які полягають в тому, що із *n* дослідів рівно в *m* із них відбудеться сприятливий наслідок.

Маємо $\varphi(z)=\prod_{i=1}^{3}\left(P_i z+q_i\right)=(0{,}3z+0{,}7)(0{,}6z+0{,}4)(0{,}7z+0{,}3)$

$$=0{,}126z^3+0{,}432z^2+0{,}358z+0{,}084,$$

тобто $P_{3,3} = 0{,}126$; $P_{3,2} = 0{,}432$; $P_{3,1} = 0{,}358$; $P_{3,0} = 0{,}084$.

Виходить, мода випадкової величини X – кількості влучень у ціль – є $M_{o_x} = 2$.

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X визначаються виразами (2.39) та (2.40), тобто

$$M[X] = \sum_{i=1}^{3} P_i = 0{,}3 + 0{,}6 + 0{,}7 = 1{,}6;$$

$$D[X] = \sum_{i=1}^{3} P_i q_i = 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}66 \cdot$$

2.3.3. Закон розподілу Пуассона

Закон розподілу Пуассона є граничним законом розподілу для біноміального закону розподілу та може застосовуватись у випадку, коли кількість дослідів n достатньо велика, а ймовірність сприятливої випадкової події мала, порядку $\frac{1}{n}$, тобто $P(A) = P \cong \frac{1}{n}$. Тому закон розподілу Пуассона називають законом розподілу "рідких подій".

Відомо, що якщо випадкова величина X підпорядкована біноміальному розподілу, то $M[X] = nP$ та ймовірність події B_m, яка полягає в тому, що з n дослідів рівно в m з них відбудеться сприятлива подія A, визначається формулою Бернуллі, а саме

$$P(B_m) = P_{n,m} = C_n^m P^m (1-P)^{n-m}.$$

Введемо позначення $nP = a$; тоді $P = \frac{a}{n}$; $q = 1 - P = 1 - \frac{a}{n}$, а

$$P_{n,m} = C_n^m \left(\frac{a}{n}\right)^m \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-m}.$$

Маємо

$$\widetilde{P}_{n,m} = \lim_{n\to\infty} P_{n,m} = \lim_{n\to\infty} \left\{ C_n^m \left(\frac{a}{n}\right)^m \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m} \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]}{m!} \left(\frac{a}{n}\right)^m \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m} \right\} =$$

$$=\frac{a^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(m-1)}{n}\right]\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}\right\}=$$

$$=\frac{a^m}{m!}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n}\cdots\lim_{n\to\infty}\frac{n-(m-1)}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{a^m}{m!}e^{-a},$$

оскільки відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$;

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{a}}\right)^{\left(-\frac{n}{a}\right)(-a)}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{a}}\right)^{-\frac{n}{a}}\right\}^{(-a)}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}=e^{-a}.$$

Тобто якщо випадкова величина X підпорядкована закону розподілу Пуассона, то

$$\widetilde{P}_{n,m}=P(X=x=m;a)=\frac{a^x}{x!}e^{-a},\tag{2.43}$$

де $x=m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ – можливі значення випадкової величини X та a – параметр закону її розподілу.

Розглянемо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

Маємо

$$M[X]=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{a^x}{x!}e^{-a}=e^{-a}\left(0\frac{a^0}{0!}+1\frac{a^1}{1!}+2\frac{a^2}{2!}+3\frac{a^3}{3!}+4\frac{a^4}{4!}+\cdots\right)=$$

$$=ae^{-a}\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots\right)=ae^{-a}\cdot e^{a}=a,$$

оскільки $e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$;

$$D[X]=\sum_{x=0}^{\infty}x^{2}\frac{a^{x}}{x!}e^{-a}-\{M[X]\}^{2}=$$

$$=e^{-a}\left(0^{2}\frac{a^{0}}{0!}+1^{2}\frac{a^{1}}{1!}+2^{2}\frac{a^{2}}{2!}+3^{2}\frac{a^{3}}{3!}+4^{2}\frac{a^{4}}{4!}+5^{2}\frac{a^{5}}{5!}+\cdots\right)-a^{2}=$$

$$=ae^{-a}\left[1+\frac{2a}{1!}+\frac{3a^{2}}{2!}+\frac{4a^{3}}{3!}+\frac{5a^{4}}{4!}+\cdots\right]-a^{2}=$$

$$=ae^{-a}\left[1+\left(\frac{a}{1!}+\frac{a}{1!}\right)+\left(\frac{2a^{2}}{2!}+\frac{a^{2}}{2!}\right)+\left(\frac{3a^{3}}{3!}+\frac{a^{3}}{3!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{4a^{4}}{4!}+\frac{a^{4}}{4!}\right)+\cdots\right]-a^{2}=ae^{-a}\left[\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^{2}}{2!}+\frac{a^{3}}{3!}+\frac{a^{4}}{4!}+\cdots\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{a}{1!}+\frac{2a^{2}}{2!}+\frac{3a^{3}}{3!}+\frac{4a^{4}}{4!}+\cdots\right)\right]-a^{2}=ae^{-a}\left[e^{a}+a\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^{2}}{2!}+\frac{a^{3}}{3!}+\cdots\right)\right]-$$

$$-a^{2}=ae^{-a}\left(e^{a}+ae^{a}\right)-a^{2}=a+a^{2}-a^{2}=a\,.$$

Виходить, якщо випадкова величина X описується (2.43), тобто підпорядкована закону розподілу Пуассона, то

$$M[X]=D[X]=a\,. \qquad (2.44)$$

Задача 2.6. Виріб як складова автоматизованої системи управління військами складається з 1 000 елементів. Імовірність відмови кожного елемента за час t дорівнює 0,001 і не залежить від стану інших. Визначити ймовірність відмови за час t більше одного елемента.

Розв'язання. В умові задачі визначено, що дослід, який полягає у виявлені наслідку появи випадкової події B_i, яка означає відмову i-го елемента, повторюється n = 1 000 разів. Імовірність появи події B_i має порядок $\frac{1}{n}$, а саме $P(B_i) = 0{,}001$. Наслідки при повторенні досліду є незалежними, оскільки $P(B_i)$ не залежить від стану інших елементів. Тут має місце схема Бернуллі; тому для визначення ймовірності відмови за час *t* більше одного елемента можна скористатись формулою Бернуллі. Тоді якщо *A* – подія, яка полягає в тому, що за час *t* відмовить більше одного елемента, то

$$P(A) = \sum_{m=2}^{1000} P_{n,m} = 1 - \left(P_{1000,0} + P_{1000,1}\right) =$$

$$= 1 - \left(C_{1000}^{0} \cdot 0{,}004^{0} \cdot 0{,}999^{1000} + C_{1000}^{1} \cdot 0{,}001^{1} \cdot 0{,}999^{999}\right).$$

Видно, що при виконанні цього обчислення виникають розрахункові труднощі. Але оскільки *n* є достатньо велике, а $P(B_i)$ має порядок $\frac{1}{n}$, то можна використати граничне наближення біноміального закону розподілу – закон розподілу Пуассона.

Тоді

$$P(A) = \sum_{m=2}^{1000} P_{n,m} = 1 - \left(\frac{(1\,000 \cdot 0{,}001)^{0}}{0!} e^{-1} + \frac{(1\,000 \cdot 0{,}001)^{1}}{1!} e^{-1} \right) =$$

$$= 1 - \left(e^{-1} + e^{-1} \right) = 1 - \frac{2}{e} = 0{,}264 .$$

Відзначимо, що ця відповідь при $n = 1\,000$ буде відповідати розрахунку, який слід вважати точним, за формулою Бернуллі.

2.3.4. Геометричний закон розподілу

Розглянемо схему повторення випробувань, в якій при появі сприятливої події *A* випробування припиняються. Це означає, що якщо сприятлива випадкова подія *A* сталася при *k*-му випробуванні, то при (*k* – 1) випробуваннях подія *A* не відбувалась. Імовірність події *A* є $P(A) = P$, а $P(\overline{A}) = 1 - P = q$. Введемо до розгляду випадкову величину *X* – кількість дослідів, які необхідно поставити до першої появи випадкової події *A*. Можливі значення випадкової величини *X* – це числа натурального ряду, які складають дискретну нескінченну але зчисленну множину. Тому випадкова величина X є дискретною випадковою величиною, а закон її розподілу у вигляді ряду розподілу має вигляд, який наведений в табл. 2.5.

Таблиця 2.5

Ряд розподілу випадкової величини *X*, підпорядкованої геометричному закону розподілу

$X = x_k$	1	2	3	…	k	…
$P(X = x_k) = P$	P	qP	$q^2 P$	…	$q^{k-1} P$	…

Вираз

$$P(X = x_k) = q^{k-1} P, k = 1,2,... \tag{2.45}$$

слід вважати аналітичною формою подання геометричного закону розподілу випадкової величини *X*. Послідовність P_k складає геометричну нескінченну прогресію, тому закон розподілу називають геометричним законом розподілу випадкової величини *X*.

Визначимо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини *X*, підпорядкованої геометричному закону розподілу.

Маємо

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k = 1P + 2qP + 3q^2 P + 4q^3 P + \cdots + kq^{k-1} P + \cdots =$$

$$= \left(qP + q^2 P + q^3 P + \cdots + q^k P + \cdots\right)'_q = P\left(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^k + \cdots\right)'_q =$$

$$= P\left(\frac{q}{1-q}\right)'_q = P\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{P}{P^2} = \frac{1}{P};$$

$$D[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 P_k - m_x^2 = \left(1^2 \cdot P + 2^2 qP + 3^2 q^2 P + \cdots + k^2 q^{k-1} P + \cdots\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{P}\right)^2 = P\left(q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \cdots + kq^k + \cdots\right)'_q - \frac{1}{P^2} =$$

$$= P\left[q\left(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots + kq^{k-1} + \cdots\right)\right]'_q - \frac{1}{P^2} =$$

$$=P\left[q\left(\frac{q}{1-q}\right)_q^1\right]_q' - \frac{1}{P^2} = P\left[q\frac{1-q+q}{(1-q)^2}\right]_q' - \frac{1}{P^2} =$$

$$=P\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right)_q' - \frac{1}{P^2} = P\frac{(1-q)^2 + q\cdot 2(1-q)}{(1-q)^4} - \frac{1}{P^2} =$$

$$=P\frac{P^2+2Pq}{P^4} - \frac{1}{P^2} = \frac{P+2q}{P^2} - \frac{1}{P^2} = \frac{P+2q-1}{P^2} =$$

$$=\frac{P+2-2P-1}{P^2} = \frac{1-P}{P^2} = \frac{q}{P^2}.$$

Виходить, якщо випадкова величина X підпорядкована геометричному закону розподілу, то

$$\left.\begin{aligned} M[X] &= \frac{1}{P}; \\ D[X] &= \frac{q}{P^2}. \end{aligned}\right| \qquad (2.46)$$

Оскільки можливі значення випадкової величини $x_k = 1, 2, \ldots$ складають дискретну нескінченну, але зліченну множину, то мода та медіана випадкової величини X, яка підпорядкована геометричному закону розподілу, не існують.

2.3.5. Гіпергеометричний закон розподілу

Вище при розгляданні класичного способу визначення ймовірностей випадкової події як задачі, для розв'язання якої використовувався класичний спосіб, була поставлена та розв'язана задача про вибірку без повернень. Її формування є N куль, однакових на дотик. Серед цих куль M куль білого, а $N - M$ – чорного кольору. Із урни навмання вибирають n куль. Необхідно визначити ймовірність випадкової події A, яка полягає в тому, що серед n куль, які вибираються з N, буде рівно m куль білих. Було подано розв'язання такої задачі, де шукана ймовірність $P(A)$ визначається формулою

$$P(A) = P_{n,m}(N, M) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \qquad (2.47)$$

Введемо до розгляду величину X – кількість білих куль, які можуть потрапити у вибірку n куль із N. Можливі значення випадкової величини $x = m$ не перевищують $0, 1, 2, 3, \dots, \min\{M, n\}$, тоді (2.47) є виразом закону розподілу випадкової величини X, яка підпорядкована гіпергеометричному закону розподілу.

Математичне сподівання та дисперсія X визначаються виразами

$$\left.\begin{aligned} M[X] &= n\frac{M}{N}; \\ D[X] &= \frac{M \cdot n(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}. \end{aligned}\right| \qquad (2.48)$$

Задача 2.7. Головна частина ракети оперативно-тактичного призначення складається із одного бойового елемента та трьох небойових. Засоби протиракетної оборони противника не розпізнають елементи головної частини ракети та спроможні забезпечити протидію одночасно двом повітряним цілям. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що бойовий елемент головної частини ракети досягне цілі, для враження якої він призначений.

Розв'язання. Введемо до розгляду подію A, яка полягає в тому, що бойовий елемент складної головної частини ракети досягає цілі. За умовою задачі маємо, що $N = 4$; $M = 1$; $n = 2$; $m = 0$. Бойовий елемент досягне цілі тоді, коли він подолає протиракетну оборону (не потрапить у вибірку із 4 повітряних цілей по 2 цілі).

Маємо (2.47)

$$P(A) = P_{n=1;m=1}(N = 4, M = 1) = \frac{C_1^1 \cdot C_3^1}{C_4^2} = \frac{1 \cdot 3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Примітка. Якщо n значно менше $N(0{,}1N > n)$, то визначені значення ймовірностей $P(A)$ близькі до відповідних (за $x = m$) значень ймовірностей, визначених за біноміальним законом розподілу.

2.3.6. Рівномірний дискретний закон розподілу

Розглядається випадкова величина X – число, яке вибране навмання із натурального ряду чисел. Можливі значення випадкової величини X $x_i = 1, 2, 3, \dots, n$, а $P(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$, $\forall\, i = \overline{1, n}$, яка визначається класичним способом розрахунку ймовірності випадкової події

$A_i = \{X = x_i\}, i = \overline{1,n}$. Ряд розподілу випадкової величини X наведений в табл. 2.6.

Таблиця 2.6

Ряд розподілу випадкової величини *X*, підпорядкованої рівномірному закону розподілу

x_i	1	2	3	…	$n-1$	n
$P(X = x_i) = P_i$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

Визначимо математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

Маємо

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + n \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{1+n}{2};$$

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - m_x^2 = \left(1^2 \cdot \frac{1}{n} + 2^2 \cdot \frac{1}{n} + 3^2 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + n^2 \cdot \frac{1}{n}\right) -$$

$$-\left(\frac{1+n}{2}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) - \frac{(1+n)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(1+n)^2}{4} = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Отже,

$$\left.\begin{aligned} M[X] &= \frac{n+1}{2}; \\ D[X] &= \frac{n^2-1}{12}. \end{aligned}\right| \qquad (2.49)$$

Відзначимо, що в дод. 2 наведені перелік законів розподілу дискретних випадкових величин, вирази відповідних твірних та характеристичних функцій, а також значення основних числових характеристик.

2.4. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

2.4.1. Рівномірний закон розподілу неперервної випадкової величини

Означення. *Неперервна випадкова величина X підпорядкована рівномірному закону розподілу на відрізку $[a,b]$, якщо її щільність ймовірностей на цьому відрізку є сталою величиною, а за його межами дорівнює нулю, тобто:*

$$f(x)=\begin{cases} C, & a \le x \le b; \\ 0, & x < a;\ x > b. \end{cases} \tag{2.50}$$

Визначимо значення сталої *C*, виходячи з властивості нормування щільності ймовірностей випадкової величини.

Тоді

$$1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{a}^{b} Cdx = C(b-a);\ \ C=\frac{1}{b-a}$$

та

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 0, & x < a;\ x > b. \end{cases} \tag{2.51}$$

Визначимо функцію розподілу випадкової величини *X*, яка має рівномірний закон розподілу на відрізку $[a,b]$. Маємо

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a},$$

тоді

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{2.52}$$

Графіки щільності ймовірностей та функції розподілу випадкової величини *X*, яка підпорядкована рівномірному закону розподілу, подані на рис. 2.12.

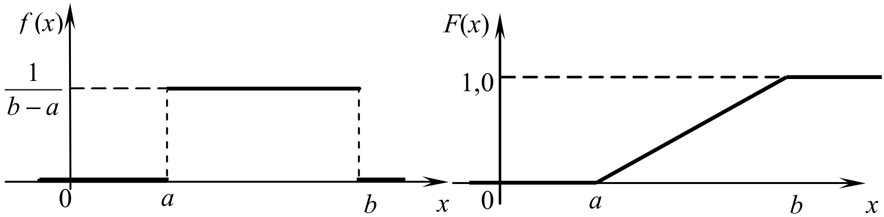

Рис. 2.12. Функція щільності ймовірностей та функція розподілу випадкової величини, підпорядкованої рівномірному закону розподілу на відрізку $[a,b]$

Розглянемо числові характеристики випадкової величини *X*.

Маємо

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx=\int_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2};$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\,dx-m_x^2=\int_{a}^{b} x^2\,\frac{1}{b-a}\,dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Тобто якщо випадкова величина *X* підпорядкована рівномірному закону розподілу, то

$$\left.\begin{aligned} M[X]&=\frac{a+b}{2};\\ D[X]&=\frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}\right| \qquad (2.53)$$

Виходячи з означення медіани випадкової величини, яке полягає в тому, що $P\left(X<M_{e_x}\right)=P\left(X>M_{e_x}\right)=\frac{1}{2}$, видно, що якщо розглядається випадкова величина X, яка підпорядкована рівномірному закону розподілу на відрізку $[a,b]$, то

$$M_{e_x}=M[X]=\frac{a+b}{2}.$$

Мода випадкової величини X, яка підпорядкована рівномірному закону розподілу на $[a,b]$, не існує.

2.4.2. Експоненціальний закон розподілу. Закон розподілу Вейбулла

Означення. *Випадкова величина X підпорядкована експоненціальному (показниковому) закону розподілу, якщо щільність ймовірностей має вигляд*

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0,\end{cases} \tag{2.54}$$

де λ – параметр.

Функція розподілу визначається згідно з властивістю щільності ймовірностей, а саме

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\lambda\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x},$$

та має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{2.55}$$

Графіки щільності ймовірностей та функції розподілу випадкової величини X, підпорядкованої експоненціальному закону розподілу, подані на рис. 2.13.

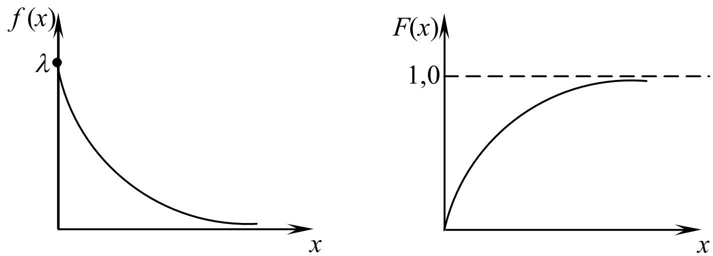

Рис. 2.13. Щільність та функція розподілу випадкової величини X, підпорядкованої експоненціальному закону розподілу

Розглянемо числові характеристики випадкової величини X.

$$M[X]=\int\limits_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\left|\begin{array}{c}\int u\,dv=uv-\int v\,du\\ u=x \quad du=dx\\ dv=e^{-\lambda x}dx \;\; v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{array}\right|=$$

$$=\lambda\left[x\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Bigg|_0^{\infty}-\int\limits_0^{\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}dx\right]=\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}.$$

$$D[X]=\int\limits_0^{\infty}x^2 f(x)dx-m_x^2=\int\limits_0^{\infty}x^2e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{cc}u=x^2 & du=2x\,dx\\ dv=e^{-\lambda x}dx & v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{array}\right|=\lambda\left[x^2\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Bigg|_0^{\infty}-\right.$$

$$\left.-\left(-\frac{2}{\lambda}\right)\int\limits_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx\right]-\frac{1}{\lambda^2}=2\int\limits_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{cc}u=x & du=dx\\ dv=e^{-\lambda x}dx & v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{array}\right|=2\left[x\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Bigg|_0^{\infty}+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx\right]-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=\frac{2}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Bigg|_0^{\infty}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Моду випадкової величини *X* визначимо із співвідношення $f'(x)=0$, тоді $\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)'_x\neq 0$; $\lambda e^{-\lambda x}(-\lambda)\neq 0$.

Виходить, M_{o_x} не існує.

Медіану випадкової величини X визначимо із співвідношення

$$P\left(X < M_{e_x}\right) = P\left(X > M_{e_x}\right) = \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$P\left(X < M_{e_x}\right) = \int_0^{M_{e_x}} f(x)dx = \lambda \int_0^{M_{e_x}} e^{-\lambda x}dx = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Bigg|_0^{M_{e_x}} =$$

$$= -\left(e^{-\lambda M_{e_x}} - 1\right) = 1 - e^{-\lambda M_{e_x}} = \frac{1}{2};$$

$$e^{-\lambda M_{e_x}} = \frac{1}{2}; \; -\lambda M_{e_x} = -ln 2; \; M_{e_x} = \frac{1}{\lambda} ln 2.$$

Виходить, основні числові характеристики випадкової величини X, підпорядкованої експоненціальному закону розподілу, визначаються такими виразами:

$$\left.\begin{aligned} & M[X] = \frac{1}{\lambda}; \quad D[X] = \frac{1}{\lambda^2}; \\ & \sigma_x = \frac{1}{\lambda}; \quad M_{e_x} = \frac{1}{\lambda} ln 2; \\ & M_{o_x} = \text{неіснує}. \end{aligned}\right| \tag{2.56}$$

Узагальненням експоненціального закону розподілу є закон розподілу Вейбулла, функція розподілу та функція щільності якого мають вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^a}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases} \tag{2.57}$$

$$f(x) = \begin{cases} a\lambda x^{a-1} e^{-\lambda x^a}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{2.58}$$

де a та λ – параметри закону розподілу Вейбулла.

Графіки щільності ймовірностей при різних значеннях параметра a подані на рис. 2.14.

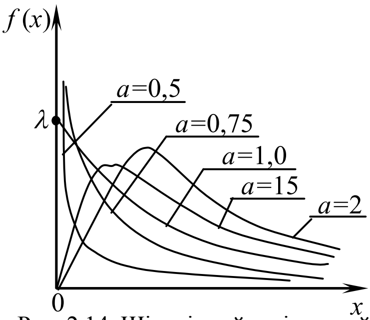

Рис. 2.14. Щільність ймовірностей закону розподілу Вейбулла при різних значеннях параметра

На рис. 2.14 відзначено, що якщо $a<1$, то гілки кривої щільності ймовірностей прямують до нескінченності при $x \to 0$ та при $x \to \infty$; при $a=1$ графік щільності ймовірностей відповідає експоненціальному закону розподілу; при *x = 0* та при $a>1$ щільність ймовірностей дорівнює нулю, досягає деякого максимального значення та в подальшому при $x \to \infty$ прямує до нескінченності.

З метою визначення основних числових характеристик випадкової величини *X*, яка підпорядкована закону розподілу Вейбулла, розглянемо для цього закону розподілу момент *k*-го порядку.

Маємо

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx = \int_0^{\infty} x^k a\lambda x^{a-1} e^{-\lambda x^a} dx =$$

$$= \left| t=\lambda x^a, x=\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{1}{a}}, \quad dx=\frac{1}{a}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{1}{a}-1}\frac{1}{\lambda}dt \right| =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{k}{a}} e^{-t} a\lambda \frac{1}{a}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{a-1}{a}} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{1}{a}-1} \frac{1}{\lambda}dt =$$

$$= \lambda^{-\frac{k}{a}} \int_0^{\infty} t^{\frac{k}{a}} e^{-t} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{a-1}{a}} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{-\frac{a-1}{a}} dt = \lambda^{-\frac{k}{a}} \int_0^{\infty} t^{\frac{k}{a}} e^{-t} dt =$$

$$= \lambda^{-\frac{k}{a}} \Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right),$$

де $$\Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right)=\int_0^\infty t^{\frac{k}{a}}e^{-t}dt$$ – гамма-функція Ейлера.

Тобто

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_k=\lambda^{-\frac{k}{a}}\Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right);\ M[X]=\alpha_1=\lambda^{-\frac{1}{a}}\Gamma\left(\frac{1}{a}+1\right);\\&D[X]=\alpha_2-\alpha_1^2=\lambda^{-\frac{2}{a}}\left[\Gamma\left(\frac{2}{a}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{a}+1\right)\right].\end{aligned}\right| \tag{2.59}$$

2.4.3. Нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу випадкової величини X має широке застосування на практиці, що пов’язано з таким. Значна частина планування та проведення дослідів пов’язана з вимірюванням параметрів, які мають певне фізичне тлумачення при розгляді тих чи інших описів явищ природи. Усяке вимірювання супроводжується помилками. Практично доведено, що випадкова величина, яка пов’язана із значеннями похибок вимірювання, підпорядкована нормальному закону розподілу. Закон розподілу суми випадкових величин, які підпорядковані нормальним законам розподілів, є нормальним законом розподілу. Закон розподілу суми випадкових величин, які підпорядковані довільним законам розподілу, при необмеженому зростанні її доданків за певних умов, які накладаються на числові характеристики цих випадкових величин, необмежено прямує до нормального закону розподілу.

Означення. *Випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, якщо щільність ймовірностей має вигляд*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},-\infty\le x\le\infty, \tag{2.60}$$

де σ та m – параметри.

Для того, щоб з’ясувати зміст параметрів σ та m закону розподілу (2.60), визначимо математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Маємо

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} z=\dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}};x=\sigma\sqrt{2}z+m; \\ dx=\sigma\sqrt{2}dz \end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma\sqrt{2}z+m\right)e^{-z^2}\sigma\sqrt{2}dz=$$

$$=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\sigma\sqrt{2}ze^{-z^2}dz+m\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz\right]=$$

$$=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-z^2}d\left(-z^2\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}m\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=$$

$$=-\frac{\sigma\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\frac{m\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}=m,$$

оскільки $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$ є інтеграл Пуассона, а

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)\,dx-m_x^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx-m^2=$$

$$=\left|\begin{array}{l} z=\dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}};x=\sigma\sqrt{2}z+m; \\ dx=\sigma\sqrt{2}dz \end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma\sqrt{2}z+m\right)^2e^{-z^2}\sigma\sqrt{2}dz-m^2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2z^2e^{-z^2}dz+\int_{-\infty}^{\infty}2\sigma\sqrt{2}mze^{-z^2}dz+\int_{-\infty}^{\infty}m^2e^{-z^2}dz\right]-m^2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\ 2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2}dz+2\sigma\sqrt{2}\cdot m\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}d(-z^2)+$$

$$+m^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz\ \Big]-m^2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\ 2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2}dz+0+m^2\cdot\sqrt{\pi}\ \Big]-m^2=$$

$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2}dz=\left|\begin{array}{l}\int udv=uv-\int vdu\\ u=z \qquad du=zdz\\ dv=ze^{-z^2}dz\ v=-\frac{1}{2}e^{-z^2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left[-z\frac{1}{2}e^{-z^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz\right]=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\Big[0+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\Big]=\sigma^2.$$

Тоді маємо, що в (2.60) параметр m є математичне сподівання, а параметр σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, яка підпорядкована нормальному закону розподілу. Виходить,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \qquad (2.61)$$

З метою виявлення виду графіка функції щільності ймовірностей (2.61) визначимо таке значення x, за якого $f(x)$ досягає максимуму. Маємо

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\left(-\frac{2(x-m_x)}{2\sigma_x^2}\right)=0\ ;\ x=m_x,$$

а $f(x=m_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(m_x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}$,

та $f''(x=m_x)<0$.

З (2.61) видно, що $f[x-m_x]=f[-(x-m_x)]$ і $f(-\infty)=f(\infty)=0$, а це означає, що графік функції (2.61) є симетричним відносно прямої $x=m_x$, а вісь абсцис є горизонтальною асимптотою функції (2.61). Графік (2.61) поданий на рис. 2.15, а вплив зростання параметрів m_x та σ_x на зміну графіка функції щільності подано на рис. 2.16 та 2.17.

Відзначене вище щодо виду графіка функції (2.61), а також означення моди та медіани випадкової величини *X* дають право стверджувати, що якщо випадкова величина *X* підпорядкована нормальному закону розподілу, то

$$m_x = M_{o_x} = M_{e_x}\,.$$

Розглянемо функцію розподілу випадкової величини *X*, щільність ймовірності якої відповідає (2.61).

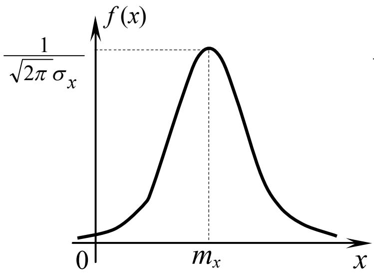

Рис. 2.15. Графік щільності випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу

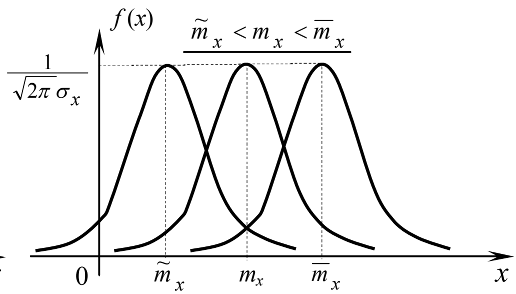

Рис. 2.16. Графіки щільності випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу при різних m_x

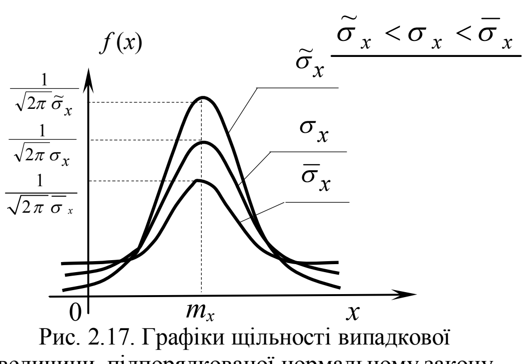

Рис. 2.17. Графіки щільності випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу при різних σ_x

Маємо

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx=\left|\begin{array}{l}\dfrac{x-m_x}{\sigma_x}=z;\\ x=\sigma_x z+m_x;\\ dx=\sigma_x dz\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x-m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}+\Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right), \qquad (2.62)$$

де $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ – інтеграл Пуассона;

$\Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функція Лапласа.

Виходить, функція розподілу випадкової величини X, яка підпорядкована нормальному закону розподілу, має вигляд

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right). \qquad (2.63)$$

Графік функції розподілу та відповідна їй функція щільності ймовірностей подана на рис. 2.18

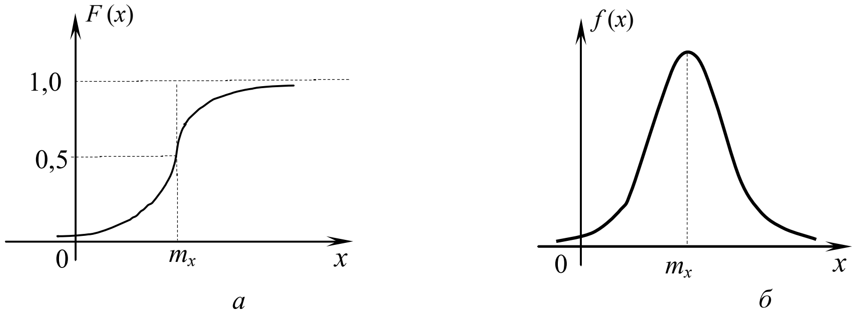

Рис. 2.18. Графіки функції розподілу (*а*) та функції щільності (*б*) випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу

Функція Лапласа затабульована, її значення подані в дод. 5.

Розглянемо властивості функції Лапласа, яку також прийнято називати інтегралом ймовірностей. Маємо $\Phi(\infty)=\frac{1}{2}$; $\Phi(0)=0$; $\Phi(-z)=-\Phi(z)$, тобто функція Лапласа є нечіткою функцією.

Якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, то

$$P\left(x_1 < X < x_2\right)=\Phi\left(\frac{x_2-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-m_x}{\sigma_x}\right), \qquad (2.64)$$

де було застосовано раніше викладену властивість функції розподілу випадкової величини X, яка підпорядкована будь-якому закону розподілу, а саме $P\left(x_1 < X < x_2\right)=F(x_2)-F(x_1)$.

Якщо розглядається інтервал, симетричний відносно математичного сподівання випадкової величини, то маємо

$$P\left(\left|X-m_x\right|<\varepsilon\right)=P\left(m_x-\varepsilon<X<m_x+\varepsilon\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{m_x+\varepsilon-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{m_x-\varepsilon-m_x}{\sigma_x}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right). \qquad (2.65)$$

Для чисельної оцінки розсіювання можливих значень випадкової величини *X*, яка підпорядкована нормальному закону розподілу, відносно математичного сподівання поруч з середнім квадратичним відхиленням σ_x використовують ймовірне відхилення E_x.

Означення. *Під ймовірним (серединним) відхиленням E_x випадкової величини X розуміють половину інтервалу, симетричного відносно математичного сподівання випадкової величини X, імовірність потрапляння в який дорівнює 0,5 (рис. 2.19), тобто*

$$P\left(\left|X - m_x\right| < E_x\right) = P\left(m_x - E_x < X < m_x + E_x\right) = \frac{1}{2} \qquad (2.66)$$

Враховуючи (2.65), маємо

$$\Phi\left(\frac{E_x}{\sigma_x}\right) = 0,25\,; \ \frac{E_x}{\sigma_x} \cong 0,674\,,$$

тобто

$$E_x \cong 0,674\ \sigma_x\,. \qquad (2.67)$$

Розглянемо задачу визначення ймовірностей потрапляння випадкової величини X, яка підпорядкована нормальному закону розподілу, в інтервали, довжина яких дорівнює σ_x, а саме в інтервали $(m_x, m_x + \sigma_x)$, $(m_x + \sigma_x, m_x + 2\sigma_x)$, $(m_x + 2\sigma_x, m_x + 3\sigma_x)$.

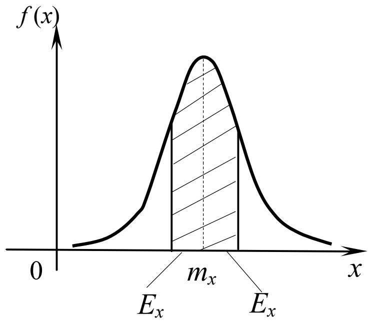

Рис. 2.19. Визначення ймовірного відхилення випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу

З (2.64) маємо

$$P(m_x < X < m_x + \sigma_x) = \Phi\left(\frac{m_x + \sigma_x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{m_x - m_x}{\sigma_x}\right) = \Phi(1) \cong 0,3413\,;$$

$$P\left(m_x + \sigma_x < X < m_x + 2\sigma_x\right) = \Phi\left(\frac{m_x + 2\sigma_x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{m_x + \sigma_x - m}{\sigma_x}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) \cong 0,1359\,;$$

$$P\left(m_x + 2\sigma_x < X < m_x + 3\sigma_x\right) = \Phi\left(\frac{m_x + 3\sigma_x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{m_x + 2\sigma_x - m_x}{\sigma_x}\right) =$$
$$= \Phi(3) - \Phi(2) \cong 0{,}021\,4\,,$$

а це означає, що

$$P\left(\left|X - m_x\right| < 3\sigma_x\right) \cong 0{,}997\,2\,. \qquad (2.68)$$

Вираз (2.68) дає змогу дати означення правила трьох сигма, суть якого така: *подія, яка полягає в тому, що випадкова величина, якщо вона підпорядкована нормальному закону розподілу, відхилиться від свого математичного сподівання на величину, що не перевищує трьох середніх квадратичних відхилень, є практично достовірною, оскільки ймовірність такої події дорівнює майже одиниці.*

На закінчення глави відзначимо, що закони розподілу неперервних випадкових величин, які слід вважати найбільш уживаними, наведені в дод. 2.

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. Дайте визначення випадкової величини.
2. Яку множину складають можливі значення дискретної випадкової величини?
3. Дайте визначення неперервної випадкової величини.
4. Як може бути наведений закон розподілу дискретної випадкової величини?
5. Дайте визначення ряду розподілу та багатогранника розподілу випадкової величини.
6. Чи складають повну групу подій події, які полягають в тому, що дискретна випадкова величина приймає те чи інше можливе значення?
7. Дайте визначення функції розподілу та визначте її властивості.
8. Дайте визначення щільності ймовірностей та визначте її властивості.
9. Чи визначають початкові та центральні моменти випадкової величини числові характеристики випадкової величини, які частіше вживаються?
10. Дайте визначення таким числовим характеристикам: математичному сподіванню випадкової величини, дисперсії випадкової величини, моді випадкової величини, медіані випадкової величини та квантилю випадкової величини.
11. Визначте фізичний зміст математичного сподівання та дисперсії випадкової величини.
12. Чи дозволяють значення числових характеристик випадкових величин розв’язати будь-яку задачу щодо опису випадкового та масового природного явища?

13. Який зміст має судження “розглядається схема Бернуллі”?

14. Визначте досліди, наслідки яких дають право стверджувати, що розглядаються випадкові величини, підпорядковані одному з відомих законів розподілу: біноміальному, узагальненому біноміальному, закону Пуассона, геометричному, рівномірному дискретному чи неперервному, експоненціальному, нормальному.

15. Визначте закон розподілу, який є узагальненням експоненціального закону розподілу.

16. Визначте зміст “правила 3σ” при розгляданні нормального закону розподілу випадкової величини.

Глава 3
СИСТЕМА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

3.1. Означення системи випадкових величин та її закону розподілу

Розв’язання практичних задач може бути пов’язане з тим, що результат досліду описується двома, трьома та більшою кількістю випадкових величин. Тоді розглядають двовимірну, тривимірну чи *n*-вимірну випадкову величину, які складають відповідно систему двох, трьох чи *n* випадкових величин. Кожну випадкову величину, яка входить до *n*-вимірної випадкової величини, слід розглядати як випадкову компоненту випадкового вектора відповідної розмірності. Так випадкова точка вибуху заряду при обстрілі цілі на площині має дві випадкові координати, які визначаються в прямокутній системі координат на площині. А випадкова точка вибуху заряду при обстрілі цілі в просторі має три випадкові координати, які визначаються в прямокутній системі координат в тривимірній області. У першому прикладі слід стверджувати, що розглядається двовимірний випадковий вектор (система двох випадкових величин) $\{X,Y\}$, а в другому – тривимірний випадковий вектор (система трьох випадкових величин) $\{X,Y,Z\}$.

У загальному випадку введемо таке означення системи випадкових величин.

Якщо кожній елементарній події l поставлені у відповідність координати точки n-вимірного простору

$$X_1 = f_1(l), X_2 = f_2(l),\ \ldots,\ X_n = f_n(l)$$

і кожна з функцій $f_i(l), i=\overline{1,n}$ є вимірювальною відносно введених у множині випадкових елементарних подій їх імовірностей, то сукупність $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$ – n-вимірна випадкова величина (n-вимірний випадковий вектор).

Для системи двох випадкових величин $\{X, Y\}$ розглядаються можливі її значення (x_i, y_j), $i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}$, а для системи трьох випадкових величин $\{X,Y,Z\}$ – (x_i, y_j, z_k), $i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}; k=\overline{1,r}$.

Усі визначення для системи випадкових величин будь якої розмірності мають однаковий зміст, а формалізовані записи аналогічні. Тому розглянемо повну систему двох випадкових величин.

Система двох випадкових величин може бути дискретною та неперервною. Використовують такі терміни: “система двох дискретних випадкових величин” чи “дискретна система двох випадкових величин” та “система двох неперервних випадкових величин” чи “неперервна система двох випадкових величин”. Означення системи двох дискретних випадкових величин та системи двох неперервних випадкових величин аналогічні означенням дискретної чи неперервної одновимірної випадкової величини.

Система двох випадкових величин $\{X,Y\}$ *є дискретною, якщо множини можливих значень випадкових величин* X *та* Y *(відповідно* $\{x_i\}, i=\overline{1,m}$ *та* $\{y_i\}, j=\overline{1,n}$*) є скінченними та дискретними.*

Система двох випадкових величин $\{X,Y\}$ *є неперервною, якщо можливі значення випадкових величин* X *та* Y *неперервно заповнюють деякі інтервали.*

Під законом розподілу будь-якої системи випадкових величин розуміють всяке співвідношення між можливими значеннями її випадкових величин та їм відповідними ймовірностями.

Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин подається у табл. 3.1, в якій зазначені можливі значення $x_i, i=\overline{1,m}$ випадкової величини X, можливі значення $y_j, j=\overline{1,n}$ випадкової величини Y, та кожному можливому значенню системи (x_i, y_j) поставлені у відповідність ймовірності $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$. Таку таблицю називають *таблицею розподілу системи двох дискретних випадкових величин зі скінченною кількістю їх можливих значень*.

Таблиця 3.1

Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин

$x \backslash y$	y_1	y_2	...	y_j	...	y_n
x_1	P_{11}	P_{12}	...	P_{1j}	...	P_{1n}

Закінчення табл. 3.1

$x \backslash y$	y_1	y_2	...	y_j	...	y_n
x_2	P_{21}	P_{22}	...	P_{2j}	...	P_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	P_{i1}	P_{i2}	...	P_{ij}	...	P_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_m	P_{m1}	P_{m2}	...	P_{mj}	...	P_{mn}

Сукупність випадкових подій $\{X = x_i, Y = y_j\}, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$ складає повну групу подій, тому

$$\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} \{X = x_i, Y = y_j\} = U, \tag{3.1}$$

де U – достовірна подія, а

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j) = 1; \tag{3.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = \sum_{j=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i); \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} P_{ij} = \sum_{i=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_j) = P(Y = y_j). \tag{3.4}$$

Вирази (3.3) та (3.4) дозволяють визначити ряди розподілів випадкових величин X та Y, які складають систему $\{X, Y\}$. Ряди розподілів наведені в табл. 3.2 та 3.3.

Таблиця 3.2

Ряд розподілу випадкової величини X

x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_m
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...	$P(X = x_i)$	...	$P(X = x_m)$

Таблиця 3.3

Ряд розподілу випадкової величини Y

y_i	y_1	y_2	...	y_j	...	P_n
$P(Y = y_j)$	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	...	$P(Y = y_j)$	...	$P(Y = y_n)$

Закон розподілу неперервної системи двох випадкових величин задається функцією розподілу або функцією щільності розподілу.

Під функцією розподілу неперервної системи двох випадкових величин розуміють таку функцію двох дійсних змінних, яка чисельно дорівнює ймовірності одночасного виконання двох нерівностей $X < x$ *та* $Y < y$.

Тобто

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y). \tag{3.5}$$

З геометричної точки зору функція розподілу системи двох випадкових величин – це ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова точка належить нескінченному квадрату з верхньою правою вершиною в точці з координатами (x, y), тобто $F(x, y) = P(\{X, Y\} \in D)$. Область D наведена на рис. 3.1.

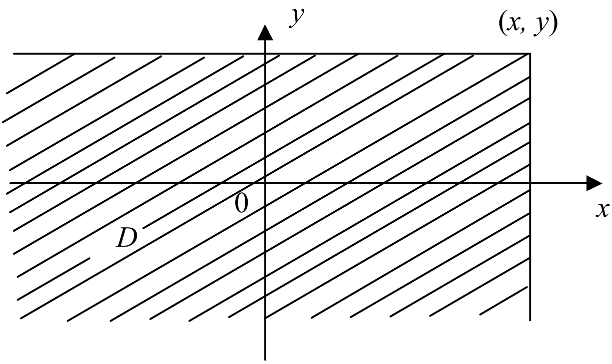

Рис. 3.1. Геометричне тлумачення функції розподілу системи двох неперервних випадкових величин

Функція розподілу системи двох неперервних випадкових величин має такі властивості.

1. *Функція розподілу* $F(x, y)$ *є неспадною функцією щодо кожної з своїх змінних, тобто*

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y) \text{ при } x_2 > x_1;$$
$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1) \text{ при } y_2 > y_1; \qquad (3.6)$$
$$F(x_2, y_2) \geq F(x_1, y_1) \text{ при } x_2 > x_1,\ y_2 > y_1.$$

Ця властивість безпосередньо випливає з визначення $F(x, y)$ та із геометричного її тлумачення.

2. *Якщо одна зі змінних чи обидві одразу наближаються до* $-\infty$*, то функція розподілу* $F(x, y)$ *наближається до* 0*, тобто*

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0. \qquad (3.7)$$

Дійсно, з (3.5) маємо

$$F(x, -\infty) = P(X < x, Y < -\infty) = P(A \cdot V) = P(V) = 0;$$
$$F(-\infty, y) = P(X < -\infty, Y = y) = P(V \cdot A) = P(V) = 0;$$
$$F(-\infty, -\infty) = P(X < -\infty, Y < -\infty) = P(V \cdot V) = P(V) = 0,$$

де A – випадкова подія та V – неможлива подія.

3. *Якщо обидві змінні наближаються до* $+\infty$*, то* $F(x, y)$ *наближається до* 1*, тобто*

$$F(+\infty, +\infty) = 1. \qquad (3.8)$$

Дійсно, з означення $F(x, y)$ (3.5) випливає таке

$$F(+\infty, +\infty) = P(X < +\infty, Y < +\infty) = P(U \cdot U) = P(U) = 1,$$

де U – достовірна подія.

4. *Якщо одна з змінних* $F(x, y)$ *наближається до* $+\infty$*, то* $F(x, y)$ *наближається до функції розподілу відповідної випадкової координати випадкового двовимірного вектора, тобто*

$$F(x, +\infty) = F_X(x); \quad F(+\infty, y) = F_Y(y). \qquad (3.9)$$

Дійсно, згідно з (3.5) маємо

$$F(x, +\infty) = P(X < x, Y < +\infty) = P(A \cdot U) = P(A) = P(X < x) = F_X(x);$$
$$F(+\infty, y) = P(X < +\infty, Y < y) = P(U \cdot B) = P(B) = P(Y < y) = F_Y(y),$$

де $A = \{X < x\}$, $B = \{Y < y\}$ – випадкові події.

Для системи двох неперервних випадкових величин закон розподілу може задаватись функцією щільності ймовірностей, яка має таке означення.

Якщо існує друга змішана похідна функції розподілу системи двох неперервних випадкових величин, то її називають функцією щільності системи двох неперервних випадкових величин, а саме

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}. \qquad (3.10)$$

Графік (3.10) є поверхнею, її прийнято називати поверхнею розподілу. Якщо її розрізати площиною паралельно площині xoy, то в перерізі будемо мати замкнуту лінію, в кожній точці якої щільність ймовірностей має стале значення. Лінії таких перерізів прийнято називати кривими рівної щільності.

Елементом імовірностей для системи двох неперервних випадкових величин є вираз $f(x,y)\Delta x\Delta y$, який визначає об'єм тривимірної області, що обмежена зверху поверхнею $f(x,y)$ та опирається на елементарний прямокутник $\Delta x\Delta y$.

Щільність ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин має такі властивості.

1. *Щільність ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин є невід'ємною функцією, тобто* $f(x,y)\geq 0$.

Ця властивість випливає з першої властивості функції розподілу системи двох неперервних випадкових величин.

2. *Якщо відома* $f(x,y)$, *то функція розподілу визначається виразом*

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\ dxdy \qquad (3.11)$$

згідно з (3.10).

3. *Властивість нормування полягає в тому, що*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dxdy=1. \qquad (3.12)$$

Дійсно, з властивості (3.8) функції розподілу та (3.11) маємо

$$F(\infty,\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1.$$

4. *Якщо відомий закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин у вигляді щільності ймовірностей, то можуть бути визначені щільності ймовірностей кожної з випадкових величин, які складають систему* $\{X,Y\}$ *згідно з виразами*

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy;\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx. \tag{3.13}$$

Дійсно, із (3.11) та (3.9) маємо

$$F(x,\infty)=F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy;$$

$$F(\infty,y)=F_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dxdy.$$

Після визначення похідних відповідно за змінними x та y отримаємо:

$$F'_x(x)=\left(\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\right)dx\right)'_x=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy;$$

$$F'_Y(y)=\left(\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\right)dy\right)'_y=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx.$$

З геометричного тлумачення щільності ймовірностей (3.10) видно, що якщо $f(x,y)dxdy$ є елементом імовірностей, то для довільної області D, яка має аналітичний опис границі та не має внутрішніх вирізів, справедливий вираз

$$P(\{X,Y\}\subset D)=\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy. \tag{3.14}$$

Співвідношення (3.14) дозволяє визначити запис для ймовірності події, яка полягає в тому, що випадкова точка $\{X,Y\}$ належить області прямокутника, який обмежений прямими $x=a$, $x=b$ та $y=c$, $y=d$, а саме

$$P(\{X,Y\}\subset D\;)=\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)\,dydx. \tag{3.15}$$

Цей результат може бути отриманий, якщо виходити із тлумачення геометричного змісту функції розподілу системи двох неперервних випадкових величин і (3.11). На рис. 3.2 зображена зазначена вище прямокутна область D .

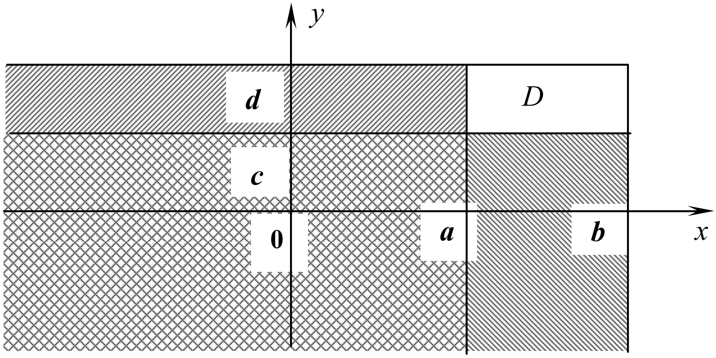

Рис. 3.2. Визначення $P\left(\left\{X,Y\right\}\subset D\right)$

Маємо

$$P\left(\left\{X,Y\right\}\subset D\right)=P\left(a\le X<b,c\le Y<d\right)=F\left(b,d\right)-F\left(a,d\right)-F\left(b,c\right)+$$

$$+F\left(a,c\right)=\int\limits_{-\infty}^{b}\int\limits_{-\infty}^{d}f\left(x,y\right)dydx-\int\limits_{-\infty}^{a}\int\limits_{-\infty}^{d}f\left(x,y\right)dydx-\int\limits_{-\infty}^{b}\int\limits_{-\infty}^{c}f\left(x,y\right)dydx+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{a}\int\limits_{-\infty}^{c}f\left(x,y\right)dydx=\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{-\infty}^{d}f\left(x,y\right)dydx-\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{-\infty}^{c}f\left(x,y\right)dydx=\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d}f\left(x,y\right)dydx.$$

Якщо область D має внутрішні вирізи або не має аналітичного виразу її границі, то ймовірність влучення випадкової точки в таку область D може бути визначена наближено. Область D розбивають на області прямокутників так, що

$$D=\bigcup_{i=1}^{n}D_{\square}^{(i)},\quad D_{\square}^{(i)}\bigcap D_{\square}^{(j)}=\emptyset,$$

де $\emptyset$ – пуста множина. Тоді ймовірність влучення випадкової точки $\left\{X,Y\right\}$ в область

$$D_{\square}^{(i)}\ \text{є}\ P_i\left(\left\{X,Y\right\}\in D_{\square}^{(i)}\right),$$

а ймовірність влучення випадкової точки $\{X,Y\}$ в область D визначиться як

$$P(\{X,Y\}\in D)=\sum_{i=1}^{n}P_i\left(\{X,Y\}\in D^{(i)}\right).$$

Примітка. Для системи n випадкових величин $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$ під функцією розподілу розуміють таку функцію n дійсних змінних, яка чисельно дорівнює ймовірності одночасної появи подій $A_i=\{X_i<x_i\}, i=\overline{1,n}$, тобто

$$F(x_1,x_2,x_3,...,x_i,...,x_n)=$$
$$=P(X_1<x_1,X_2<x_2,...,X_i<x_i,...,X_n<x_n).$$

Геометричне тлумачення функції розподілу системи n випадкових величин є ймовірністю випадкової події, яка полягає в тому, що випадкова n-вимірна точка належить n-вимірному паралелепіпеду, для якого ребра є паралельними осям координат в n-вимірному просторі.

Щодо властивостей функції розподілу системи $\{X_i\}$, $i=\overline{1,n}$, то слід відзначити таке.

1. Функція розподілу $F(x_1,x_2,...,x_{i-1},\infty,x_{i+1},...,x_n)$ є функцією розподілу системи $(n-1)$ випадкових величин, а функція розподілу $F(\infty,\infty,...,x_i,\infty,...,\infty)$ є функцією розподілу випадкової величини X_i, яка входить до системи $\{X_i\}$, $i=\overline{1,n}$.

2. $F(+\infty,+\infty,...,+\infty)=1$.

3. $\lim\limits_{x_k\to-\infty}F(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)=0$; $i,k=\overline{1,n}$; $k\le i$ при довільних значеннях інших змінних.

4. Функція розподілу є неспадною функцією щодо кожної змінної або щодо будь-якої їх сукупності $k\le i$; $i,k=\overline{1,n}$.

Означення функції розподілу та її властивості справедливі як для системи n неперервних випадкових величин, так і для системи n дискретних випадкових величин.

Якщо існує така $f(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)$, за якої

$$F(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}...\int_{-\infty}^{x_n}f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n,$$

то $f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)$ є функцією щільності ймовірностей системи неперервних n випадкових величин, тобто

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) = \frac{\partial^{(n)} F\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_i ... \partial x_n}.$$

Розмірність функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)$ є оберненою до розмірності добутку $\prod_{i=1}^{n} X_i$.

Щільність ймовірностей має такі властивості.

1. Щільність ймовірностей системи n неперервних випадкових величин є невід'ємною, тобто

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) \geq 0.$$

2. Функція $f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)$ може бути функцією щільності неперервної системи n випадкових величин, якщо вона відповідає умові нормування, а саме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) dx_1 dx_2 ... dx_i ... dx_n = 1.$$

3. Якщо n-вимірна область G не має вирізів та може бути описана її границя, то

$$P\left(\left\{X_i\right\}_n \subset G\right) = \int \int_{(G)} \cdots \int f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) dx_1 dx_2 ... dx_n,$$

де інтегрування розглядається по області G.

Задача 3.1. Система неперервних випадкових величин $\left\{X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n\right\}$ має рівномірний закон розподілу в n-вимірному паралелепіпеді $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = \overline{1, n}$. Визначити щільність ймовірностей та функцію розподілу системи випадкових величин $\left\{X_i\right\}, i = \overline{1, n}$.

Розв'язання. При означенні неперервного закону рівномірного розподілу маємо

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{V} & \text{при } (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \subset G; \\ 0 & \text{при } (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \not\subset G, \end{cases}$$

де G – n-вимірний паралелепіпед об'єму

$$V = \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} dx_i = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Щільність ймовірностей X_i, $i = \overline{1,n}$ випадкової величини має вигляд

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{b_i - a_i} & \text{при } x_i \in (a_i, b_i); \\ 0 & \text{при } x_i \notin (a_i, b_i), \end{cases}$$

а тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i),$$

якщо випадкові величини X_i, $i = \overline{1,n}$ є незалежними.

Функція розподілу системи $\{X_i\}, i = \overline{1,n}$ визначається з виразу

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i),$$

де $F_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_i < a_i; \\ \dfrac{x_i - a_i}{b_i - a_i} & \text{при } a_i \le x_i \le b_i; \\ 1 & \text{при } x_i > b_i; \end{cases}$

$i = \overline{1,n}$.

3.2. Залежність випадкових величин

Випадкові величини X та Y, які складають систему двох випадкових величин $\{X, Y\}$, можуть бути залежними або незалежними.

Випадкові величини X та Y є залежними, якщо закон розподілу однієї з них залежить від того, яке можливе значення прийняла друга випадкова величина.

Випадкові величини X та Y є незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яке можливе значення прийняла друга випадкова величина.

Залежним випадковим величинам відповідають умовні закони розподілу, а незалежним – безумовні закони розподілу. Так $F\left({}^{x}\!/\!{}_{y} \right)$ є умовною функцією розподілу випадкової величини X за умови, що випадкова величина Y прийняла своє можливе значення y. Аналогічний зміст має $F\left({}^{y}\!/\!{}_{x} \right)$ – умовна функція розподілу випадкової величини Y. У відповідності до означення функції щільності неперервної випадкової величини X, яка входить до системи двох неперервних випадкових величин $\{X,Y\}$, маємо $F'_x\left({}^{x}\!/\!{}_{y} \right) = f\left({}^{x}\!/\!{}_{y} \right)$, де $f\left({}^{x}\!/\!{}_{y} \right)$ – умовна щільність випадкової величини X за умови, що випадкова величина Y прийняла своє можливе значення y. Якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то $F_X(x), F_Y(y), f_X(x), f_Y(y)$ – відповідні безумовні функції розподілу та безумовні щільності розподілу випадкових величин X та Y, які складають систему випадкових величин $\{X,Y\}$.

Визначимо співвідношення, які пов'язують закон розподілу системи $\{X,Y\}$ та закон розподілу випадкових координат X та Y. З цією метою введемо до розгляду подію D, яка полягає в тому, що випадкова точка $\{X,Y\}$ буде належати елементарному прямокутнику $dxdy$, тобто $D = \{\{X,Y\} \in dxdy\}$, та події A і B, які полягають в тому, що випадкові величини X та Y будуть належати елементарним відрізкам dx і dy, тобто $A = \{x < X < x + dx\}$ і $B = \{y < Y < y + dy\}$. Тоді, враховуючи відзначений вище геометричний зміст щільності системи двох випадкових величин маємо

$$P(D) = f(x,y)dxdy = P(AB) = P[(x < X < x + dx)(y < Y < y + dy)] =$$

$$= P(A)P\left({}^{B}\!/\!{}_{A} \right) = P(x < X < x + dx)P(y < Y < y + dy / x < X < x + dx) =$$

$$= P(B)P\left(A/_B\right) = P(y < Y < y + dy)P\left(x < X < x + dx / y < Y < y + dy\right) =$$

$$= f_X(x)\,dx f\left(y/_x\right)dy = f_Y(y)\,dy f\left(x/_y\right)dx\,,$$

де використовується відома формула для добутку двох залежних випадкових подій.

Звідси

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= f_X(x) f\left(y/_x\right); \\ f(x,y) &= f_Y(y) f\left(x/_y\right). \end{aligned}\right| \tag{3.16}$$

Із (3.16) та (3.13) випливає, що

$$\left.\begin{aligned} f\left(x/_y\right) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx}; \\ f\left(y/_x\right) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy}. \end{aligned}\right| \tag{3.17}$$

Тобто якщо відомий закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин $\{X,Y\}$ у вигляді щільності ймовірностей, то можуть бути визначені умовні закони розподілу складових систем у вигляді умовних їх щільностей.

Виходячи з визначення незалежності випадкових величин, які складають систему, маємо таке:

$$f\left(x/_y\right) = f_X(x) \quad , \; f\left(y/_x\right) = f_Y(y);$$

тоді

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y). \tag{3.18}$$

Співвідношення (3.18) доцільно використовувати при розв'язанні задач, які пов'язані з визначенням залежності чи незалежності випадкових величин, що складають систему неперервних випадкових величин $\{X,Y\}$, а саме: якщо має місце (3.18), то випадкові величини X та Y є незалежними, якщо (3.18) не виконується, то X та Y є залежними.

Задача 3.2. Визначити залежність випадкових величин X та Y, що складають систему $\{X,Y\}$, підпорядковану рівномірному закону розподілу в області $D_{\square}$, яка утворена прямими: $x=a$; $x=b$; $y=c$; $y=d$.

Розв'язання. Область $D_{\square}$ подана на рис. 3.3. Для рівномірного закону розподілу системи двох неперервних випадкових величин $\{X,Y\}$ маємо

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & \text{при } \{X,Y\}\in D;\\ 0 & \text{при } \{X,Y\}\notin D.\end{cases}$$

З (3.13) визначимо безумовні закони розподілу випадкових величин X та Y, а саме:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_c^d \frac{1}{(b-a)(d-c)}dy=\frac{1}{b-a};$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_a^b \frac{1}{(b-a)(d-c)}dx=\frac{1}{d-c}.$$

Тоді $f(x,y)=\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}=f_X(x)f_Y(y)=\dfrac{1}{b-a}\cdot\dfrac{1}{d-c}$. Це дозволяє стверджувати, що випадкові величини X та Y, які складають систему $\{X,Y\}$, що має рівномірний закон розподілу в області зазначеного прямокутника, є незалежними.

Задача 3.3. Визначити залежність випадкових величин X та Y, які складають систему $\{X,Y\}$, підпорядковану рівномірному закону розподілу в області D_0, що описана колом з радіусом r, центр якого розташовується в точці ($x=0$, $y=0$).

Розв'язання. За умовою задачі маємо

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2} & \text{при } \{X,Y\}\in D_0=\{x^2+y^2\le r^2\};\\ 0 & \text{при } \{X,Y\}\notin D_0=\{x^2+y^2\le r^2\}.\end{cases}$$

Область D_0 зображена на рис. 3.3.

Тоді

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=$$

$$=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2}dy=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2};$$

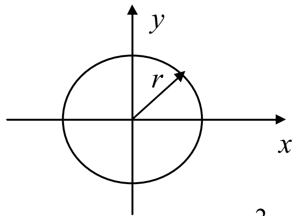

Рис. 3.3. Область $D_0=\{x^2+y^2\le r^2\}$.

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \frac{1}{\pi r^2}dx=\frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}.$$

Виходить, у відповідності з (3.18) маємо

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi r^2}\neq f_X(x)f_Y(y)=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}\cdot\frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2},$$

тобто випадкові величини X та Y, які складають систему $\{X,Y\}$, підпорядковану рівномірному закону розподілу в області D_0, є залежними.

Якщо випадкові величини, що складають системи двох дискретних випадкових величин, є незалежними, то

$$P_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j), \tag{3.19}$$

а якщо випадкові величини є залежними, то

$$P_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P\left(Y=y_j/X=x_i\right)=$$

$$=P(Y=y_j)P\left(X=x_i/Y=y_j\right). \tag{3.20}$$

Тоді умовні ймовірності як ймовірності умовних випадкових подій $\left\{ X = x_i \big/ Y = y_j \right\}$ та $\left\{ Y = y_j \big/ X = x_i \right\}$ визначаються за формулами:

$$\left. \begin{aligned} P\left(X = x_i \big/ Y = y_j \right) &= \frac{P_{ij}}{P\left(Y = y_j\right)} = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(Y = y_j\right)}; \\ P\left(Y = y_j \big/ X = x_i \right) &= \frac{P_{ij}}{P\left(X = x_i\right)} = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(X = x_i\right)}. \end{aligned} \right| \qquad (3.21)$$

Задача 3.4. Для системи двох дискретних випадкових величин, закон розподілу якої наведений в табл. 3.4, визначити безумовні закони розподілу випадкових величин X та Y. Установити, чи є випадкові величини залежними, а в разі їх залежності визначити їх умовні закони розподілу.

Таблиця 3.4

Закон розподілу $\{X, Y\}$

y_j \ x_i	2	5	8
0,4	0,15	0,3	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Розв'язання. Безумовні закони розподілу визначаються з (3.3) та (3.4), а саме:

$$P\left(X = x_i\right) = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}\ ; \ P\left(Y = y_j\right) = \sum_{i=1}^{m} P_{ij}\ .$$

У табл. 3.5 поданий безумовний закон розподілу випадкової величини X, а в табл. 3.6 – безумовний закон розподілу випадкової величини Y.

Таблиця 3.5

Закон розподілу X

x_i	2	5	8
$P(X = x_i)$	0,2	0,42	0,38

Таблиця 3.6

Закон розподілу Y

y_j	0,4	0,8
$P(Y = y_j)$	0,8	0,2

З (3.19) визначимо, чи є незалежними випадкові величини X та Y. Маємо

$$P(X = 2, Y = 0{,}4) = 0{,}15 \neq 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16\,;$$

$$P(X = 2, Y = 0{,}8) = 0{,}05 \neq 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04\,;$$

$$P(X = 5, Y = 0{,}4) = 0{,}3 \neq 0{,}42 \cdot 0{,}8 = 0{,}336\,;$$

$$P(X = 5, Y = 0{,}8) = 0{,}12 \neq 0{,}42 \cdot 0{,}2 = 0{,}084\,;$$

$$P(X = 8, Y = 0{,}4) = 0{,}35 \neq 0{,}38 \cdot 0{,}8 = 0{,}304\,;$$

$$P(X = 8, Y = 0{,}8) = 0{,}03 \neq 0{,}38 \cdot 0{,}2 = 0{,}074\,.$$

Отримані відповіді згідно з (3.19) свідчать про те, що випадкові величини X та Y є залежними. Співвідношення (3.21) визначають умовні закони розподілу випадкової величини X за умови, що $Y = 0{,}4$. Цей закон розподілу наведений в табл. 3.7.

Таблиця 3.7

Умовний закон розподілу $X/_{Y=0,4}$

$x_i/_{Y = 0,4}$	2	5	8
$P\left(x_i/_{Y = 0,4}\right)$	0,1875	0,375	0,475

У табл. 3.8 визначений умовний закон розподілу випадкової величини X за умови, що $Y =$ 0,8.

Таблиця 3.8

Умовний закон розподілу $X / Y = 0{,}8$

$x_i / Y = 0{,}8$	2	5	8
$P\left(x_i / Y = 0{,}8 \right)$	0,25	0,6	0,15

Аналогічно за (3.21) визначаються умовні закони розподілу випадкової величини Y за умови, що $X = 2;\ X = 5;\ X = 8.$

Примітка. Випадкові величини $X_i, i = \overline{1,n}$, які складають *n*-вимірну систему неперервних випадкових величин $\{X_i\}, i = \overline{1,n}$, називаються залежними, якщо закон розподілу будь-якої з них $X_j, j = 1,n$ залежить від того, які значення приймають інші випадкові величини $X_i, i = \overline{1,n}$; $i \neq j$.

Якщо випадкові величини $X_i, i = \overline{1,n}$ є залежними, то

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\right) =$$
$$= f_{X_1}\left(x_1\right) f\left(x_2 / x_1 \right) f\left(x_3 / x_1 x_2 \right) f\left(x_4 / x_1 x_2 x_3 \right) \times$$
$$\times \ldots \times f\left(x_i / x_1 x_2 \ldots x_{i-1} \right) \times \ldots \times f\left(x_n / x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \right), \tag{3.22}$$

а якщо випадкові величини $X_i, i = \overline{1,n}$ є незалежними, то

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}\left(x_i\right). \tag{3.23}$$

3.3. Числові характеристики випадкових величин, які складають систему випадкових величин

Розглянемо числові характеристики двовимірного випадкового вектора $\{X, Y\}$.

Під числовими характеристиками двовимірної системи випадкових величин розуміють початкові й центральні моменти всіх порядків, а саме:

$$\alpha_{r,s} = M\left[X^r Y^s \right]; \qquad (3.24)$$

$$\mu_{r,s} = M\left[\overset{\circ}{X}{}^r \, \overset{\circ}{Y}{}^s \right], \qquad (3.25)$$

де $\overset{\circ}{X} = X - M[X]$, $\overset{\circ}{Y} = Y - M[Y]$ – центровані випадкові величини та розглядається початковий момент порядку r відносно випадкової величини X та порядку s відносно випадкової величини Y, а також розглядається центрований момент порядку r відносно центрованої випадкової величини $\overset{\circ}{X}$ та порядку s відносно центрованої випадкової величини $\overset{\circ}{Y}$.

Безпосередній підрахунок $\alpha_{r,s}$ та $\mu_{r,s}$ для систем двох дискретних і неперервних випадкових величин виконується за формулами вигляду

$$\alpha_{r,s} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} x_i^r y_j^s P_{ij}; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r y^s f(x,y)\,dxdy; \end{cases} \qquad (3.26)$$

$$\mu_{r,s} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(x_i - m_x\right)^r \left(y_j - m_y\right)^s P_{ij}; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_x\right)^r \left(y - m_y\right)^s f(x,y)\,dxdy. \end{cases} \qquad (3.27)$$

Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то

$$\alpha_{r,s} = \alpha_r(X)\alpha_s(Y); \quad \mu_{r,s} = \mu_r(X)\mu_s(Y),$$

оскільки

$$\alpha_{r,s} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} x_i^r y_j^s P_i P_j = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^r P_i \sum\limits_{j=1}^{n} y_j^s P_j = \alpha_r(X)\alpha_s(Y); \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r y^s f_X(x) f_Y(y)\,dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)\,dx \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^s f_Y(y)\,dy = \alpha_r(X)\ \alpha_s(Y). \end{cases}$$

Якщо розглядається система двох дискретних незалежних випадкових величин, то центральний момент порядку (r,s) має вигляд

$$\mu_{r,s}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_x)^r\left(y_j-m_y\right)^s P_i P_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(x_i-m_x)^r P_i\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-m_y\right)^s P_j=\mu_r(X)\mu_s(Y),$$

а якщо розглядається система двох неперервних випадкових величин, то центральний момент порядку (r,s) має вигляд

$$\mu_{r,s}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^r\left(y-m_y\right)^s f_X(x)f_Y(y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^r f_X(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}\left(y-m_y\right)^s f_Y(y)dy=\mu_r(X)\mu_s(Y).$$

Із (3.26) та (3.27) маємо $\alpha_{0,0}=\mu_{0,0}=1$, оскільки

$$\alpha_{0,0}=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}x_i^0 y_j^0 P_{ij}=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}P_{ij}=1;\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^0y^0 f(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1;\end{cases}$$

$$\mu_{0,0}=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_i-m_x)^0\left(y_j-m_y\right)^0 P_{ij}=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}P_{ij}=1;\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^0\left(y-m_y\right)^0 f(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1,\end{cases}$$

а $\mu_{1,0}=\mu_{0,1}=0$, тому що

$$\mu_{1,0}=\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_x)^1(y_j-m_y)^0P_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_x)P_{ij}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_y-m_x)(y-m_y)^0f(x,y)\,dxdy=\\ =\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)f(x,y)\,dxdy\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iP_{ij}-m_x\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}=m_x-m_x=0;\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\,dxdy-m_x\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dxdy=m_x-m_x=0;\end{cases}$$

$$\mu_{0,1}=\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_x)^0(y_j-m_y)P_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_jP_{ij}-m_y\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}=\\ =m_y-m_y=0;\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^0(y-m_y)f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\,dxdy-\\ -m_y\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dxdy=0.\end{cases}$$

При розв’язанні практичних задач, які пов’язані з розгляданням системи двох випадкових величин, використовуються початкові моменти $\alpha_{1,0}$ та $\alpha_{0,1}$, а також центральні моменти $\mu_{2,0};\mu_{0,2};\mu_{11}$. Як випливає з визначення початкових моментів (3.24) та із (3.26),

$$\alpha_{1,0} = M\left[X^1Y^0\right] = M[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i P_{ij}\,; \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)\,dxdy; \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\alpha_{0,1} = M\left[X^0Y^1\right] = M[Y] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_j P_{ij}\,; \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)\,dxdy. \end{cases} \tag{3.29}$$

Тобто початковий момент $\alpha_{1,0}$ є математичним сподіванням випадкової величини X, а початковий момент $\alpha_{0,1}$ є математичним сподіванням випадкової величини Y. Значення $M[X] = m_x$, $M[Y] = m_y$ є координатами точки (m_x, m_y), відносно якої розсіюються можливі значення $(x_i, y_j), i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$ системи випадкових величин $\{X, Y\}$. Це зображено на рис. 3.4.

Розглянемо центральні моменти.

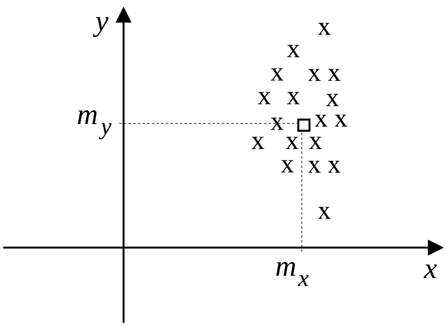

Рис. 3.4. Геометричне тлумачення змісту математичних сподівань випадкових величин X та Y, які складають систему $\{X, Y\}$

Центральні моменти $\mu_{2,0}$ та $\mu_{0,2}$ за визначенням (3.25) є відповідно дисперсіями випадкових величин X та Y і характеризують, як це відомо виходячи з фізичного змісту дисперсії випадкової величини, розсіювання можливих значень системи $\{X, Y\}$ відносно точки (m_x, m_y).

Із (3.25) і (3.27) видно, що вирази для визначення дисперсій випадкових величин X та Y, які входять до системи $\{X, Y\}$ дискретних чи неперервних випадкових величин, мають вигляд

$$\mu_{2,0} = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2 \overset{\circ}{Y}{}^0\right] = D[X] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_i - m_x)^2 P_{ij}; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f(x, y)dxdy; \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\mu_{0,2} = M\left[\overset{\circ}{X}{}^0 \overset{\circ}{Y}{}^2\right] = D[Y] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(y_i - m_y)^2 P_{ij}; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y - m_y)^2 f(x, y)dxdy. \end{cases}$$

Центральний момент

$$\mu_{11} = R_{XY} = M\left[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\right] = M\left[(X - m_x)(Y - m_y)\right]$$

називають кореляційним (автокореляційним) моментом випадкових величин X і Y, які складають систему $\{X, Y\}$. Він характеризує наявність і тісноту кореляційного зв'язку між випадковими величинами X і Y. У відповідності до (3.27) кореляційний момент визначається для системи двох дискретних і неперервних випадкових величин такими виразами:

$$\mu_{11} = R_{XY} = R_{YX} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_i - m_x)(y_i - m_y)P_{ij}; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)(y - m_y)f(x, y)dxdy. \end{cases} \tag{3.31}$$

У п. 3.2 визначене поняття залежності випадкових величин X і Y, які складають систему на рівні їх безумовних чи умовних законів розподілу. Поняття корельованості випадкових величин визначається за числовою характеристикою R_{XY}. Тому в загальному випадку, коли розглядається система $\{X,Y\}$, яка підпорядкована будь-якому закону розподілу, з наявності корельованості випадкових величин не можна робити висновки щодо залежності випадкових величин X і Y.

Якщо $R_{XY}=0$, то випадкові величини X і Y є некорельованими. Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то таке твердження є необхідним і достатнім для висновку щодо їх некорельованості, а якщо випадкові величини є некорельованими, то це не означає, що вони незалежні. Для підтвердження цього розглянемо наступну задачу.

Задача 3.5. Система двох випадкових величин X і Y підпорядкована рівномірному закону розподілу в області кола одиничного радіуса. Установити, чи є залежними ці випадкові величини та яке значення має кореляційний момент.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & \text{при} \quad \{X,Y\}\in D;\\ 0 & \text{при} \quad \{X,Y\}\notin D,\end{cases}$$

де область D зображена на рис. 3.5.

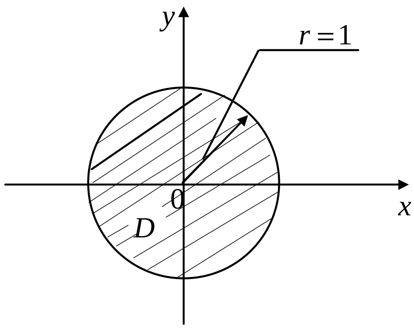

Рис. 3.5. Область кола одиничного радіуса

Рівнянням кола, яке оточує область D, є $x^2+y^2=1$. Відомо, що випадкові величини X і Y, які складають систему, є незалежними, якщо $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, а також відомо, що

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy;$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

У нашому випадку маємо

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi};$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dx=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}.$$

Тоді

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\neq f_X(x)f_Y(y)=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}\cdot\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}.$$

Це означає, що випадкові величини є залежними. Визначимо кореляційний момент. Маємо

$$R_{XY}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi}\iint_{(x^2+y^2\leq 1)}xydxdy,$$

оскільки

$$m_x=\frac{1}{\pi}\iint_{(x^2+y^2\leq 1)}xdxdy=\begin{vmatrix}x=\rho\cos\varphi\\ dxdy=\rho d\rho d\varphi\end{vmatrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho^2\cos\varphi d\rho d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\rho^2d\rho\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1\sin\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=0;$$

$$m_y=\frac{1}{\pi}\iint_{(x^2+y^2\leq 1)}ydxdy=\begin{vmatrix}y=\rho\sin\varphi\\ dxdy=\rho d\rho d\varphi\end{vmatrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^1\rho^2d\rho\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1(-\cos\varphi)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{3}[-(\cos 2\pi-\cos 0)]=0.$$

Тоді $R_{XY}=\frac{1}{\pi}\iint_{(x^2+y^2\leq 1)}xydxdy=\begin{vmatrix}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ dxdy=\rho d\rho d\varphi\end{vmatrix}=$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1 \int_0^0 \sin\varphi d(\sin\varphi) = 0 .$$

При розв'язанні цієї задачі ми з'ясували, що випадкові величини є залежними, а їх кореляційний момент дорівнює нулю, тобто з некорельованості не випливає висновок про незалежності випадкових величин.

Розглянемо ще одну задачу.

Задача 3.6. Нехай випадкова величина X має $m_x = 0$ та її закон розподілу є симетричним. Нехай $Y = X^2$. Визначити кореляційний момент $\{X, Y\}$.

Розв'язання. Визначимо математичне сподівання випадкової величини Y, маємо

$$M[Y] = M\left[X^2\right] = \sigma_x^2 .$$

Тоді

$$R_{XY} = M\left[(X - m_x)(Y - m_y)\right] = M\left[X\left(X^2 - \sigma_x^2\right)\right] =$$

$$= M\left[X^3\right] - M\left[X\sigma_x^2\right] = M\left[X^3\right] - \sigma_x^2 M[X] = M\left[X^3\right] = \mu_3(X).$$

А оскільки закон розподілу випадкової величини є симетричним, то центральний її момент третього порядку $\mu_3(X) = 0$. Дійсно, нехай випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = 0, c_x = 1$, тоді

$$\mu_3(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(-\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \int u dv = vu - \int v du \\ u = x^2 \quad du = 2x dx \\ dv = e^{\frac{-x^2}{2}} d\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad v = e^{\frac{-x^2}{2}} \end{array} \right| = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} - 2\int_{-\infty}^{\infty} x e^{\frac{-x^2}{2}} dx \right) =$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left(0+2\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-x^2}{2}}d\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)=\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=0.$$

Розв'язання цієї задачі дає можливість визначити, що некорельовані випадкові величини можуть бути навіть функціонально пов'язані. Значення R_{XY} свідчить про тісноту кореляційного зв'язку. Із (3.30) видно, що кореляційний момент має розмірність, яка визначається добутком розмірностей випадкових величин X і Y. Тому для визначення наявності корельованості та її тісноти використовують коефіцієнт кореляції.

Для визначення виразу для коефіцієнта кореляції розглянемо кореляційний момент нормованих випадкових величин

$$X^*=\frac{X - m_x}{\sigma_x};\ \ Y^*=\frac{Y - m_y}{\sigma_y}.$$

Для X^* і Y^* визначимо математичні сподівання та дисперсії.

$$M\left[X^*\right]=M\left[\frac{X-m_x}{\sigma_x}\right]=\frac{1}{\sigma_x}M\left[X-m_x\right]=\frac{1}{\sigma_x}\left(m_x-m_x\right)=0;$$

$$M\left[Y^*\right]=M\left[\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right]=\frac{1}{\sigma_y}M\left[Y-m_y\right]=\frac{1}{\sigma_y}\left(m_y-m_y\right)=0;$$

$$D\left[X^*\right]=D\left[\frac{X-m_x}{\sigma_x}\right]=\frac{1}{\sigma_x^2}D[X-m_x]=\frac{1}{\sigma_x^2}[D[X]-0]=1;$$

$$D\left[Y^*\right]=D\left[\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right]=\frac{1}{\sigma_y^2}D[Y-m_y]=\frac{1}{\sigma_y^2}[D[Y]-0]=1.$$

Тоді

$$R_{X^*Y^*}=M\left[\left(X^*-m_{x^*}\right)\left(Y^*-m_{y^*}\right)\right]=M\left[X^*Y^*\right]=$$

$$=M\left[\frac{X-m_x}{\sigma_x}\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right]=\frac{1}{\sigma_x\sigma_y}M\left[\left(X-m_x\right)\left(Y-m_y\right)\right]=\frac{R_{XY}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Кореляційний момент X^* і Y^* називають коефіцієнтом кореляційного зв'язку випадкових величин X і Y, тобто

$$r_{xy} = \frac{R_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Для визначення значень r_{xy} розглянемо таке.

Нехай для системи випадкових величин $\{X, Y\}$ $Y = \alpha X + \beta$, тоді

$$D[Y] = D[\alpha X + \beta] = \alpha^2 D[X]; \; \sigma_y = |\alpha| \sigma_x,$$

$$R_{XY} = M\left[(X - m_x)(Y - m_y)\right] = M\left[(X - m_x)(\alpha X + \beta - (\alpha m_x + \beta))\right] =$$

$$= M\left[(X - m_x)\alpha(X - m_x)\right] = \alpha M\left[(X - m_x)^2\right] = \alpha\sigma_x^2.$$

Маємо

$$r_{xy} = \frac{R_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\alpha \sigma_x^2}{\sigma_x |\alpha| \sigma_x} = \frac{\alpha}{|\alpha|}.$$

Звідси, якщо $\alpha > 0$, то $r_{xy} = 1$, якщо $\alpha < 0$, то $r_{xy} = -1$.

Виходить, якщо $r_{xy} = \pm 1$, то коефіцієнт кореляції характеризує лінійну залежність між випадковими величинами, а саме тоді $Y = \alpha X + \beta$, де α і β є невипадковими величинами.

Далі розглянемо випадкову величину

$$Z = \frac{1}{\sigma_x} X \pm \frac{1}{\sigma_y} Y,$$

для якої визначимо дисперсію. Маємо

$$D[Z] = D\left[\frac{1}{\sigma_x} X \pm \frac{1}{\sigma_y} Y\right] = \frac{1}{\sigma_x^2} D[X] + \frac{1}{\sigma_y^2} D[Y] \pm 2R_{\hat{X}\hat{Y}},$$

де $\widehat{X} = \frac{1}{\sigma_x} X$, $\hat{Y} = \frac{1}{\sigma_y} Y$,

а $M\left[\widehat{X}\right] = M\left[\frac{1}{\sigma_x} X\right] = \frac{1}{\sigma_x} M[X]$; $M\left[\hat{Y}\right] = M\left[\frac{1}{\sigma_y} Y\right] = \frac{1}{\sigma_y} M[Y]$.

Тоді

$$D[Z]=1+1\pm 2R_{\hat{X}\hat{Y}}=2\pm 2M\left[\left(\hat{X}-m_{\hat{x}}\right)\left(\hat{Y}-m_{\hat{y}}\right)\right]=$$

$$=2\pm 2M\left[\left(\frac{1}{\sigma_x}X-\frac{1}{\sigma_x}m_x\right)\left(\frac{1}{\sigma_y}Y-\frac{1}{\sigma_y}m_y\right)\right]=$$

$$=2\pm 2\frac{1}{\sigma_x\sigma_y}M\left[\left(X-m_x\right)\left(Y-m_y\right)\right]=2\pm 2r_{xy}=2\left(1\pm r_{xy}\right).$$

З цього результату видно, що оскільки $D[Z]\geq 0$, то $\left|r_{xy}\right|\leq 1$.

Викладене вище дозволяє стверджувати, що якщо $r_{xy}=0$, то випадкові величини X і Y, які складають систему $\{X,Y\}$, є некорельованими; якщо $r_{xy}=\pm 1$, то між випадковими величинами існує лінійна функціональна залежність; якщо $r_{xy}>0$, то між випадковими величинами існує невід'ємний кореляційний зв'язок, якщо $r_{xy}<0$, то між випадковими величинами існує від'ємний кореляційний зв'язок.

Вище відзначено, що для системи двох неперервних випадкових величин $\{X,Y\}$, коли випадкові величини є залежними, з (3.17) можуть бути визначені умовні закони розподілу $f\left(x/y\right)$ та $f\left(y/x\right)$, а для системи двох дискретних випадкових величин умовні ймовірності $P\left(X=x_i/Y=y_j\right)$ та $P\left(Y=y_j/X=x_i\right)$ можуть бути визначені з (3.21). Тоді має сенс говорити про умовні математичні сподівання для випадкової величини X за умови, що випадкова величина $Y=y$, та для випадкової величини Y за умови, що випадкова величина $X=x$, які для системи двох дискретних та неперервних випадкових величин визначаються за формулами вигляду

$$M_y[X]=\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} x_i P_i\left(X=x_i \big/ Y=y_j\right);\\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x/y)dx;\end{cases} \tag{3.32}$$

$$M_x[Y]=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} y_j P_j\left(Y=y_j \big/ X=x_i\right);\\ \int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy.\end{cases} \tag{3.33}$$

Співвідношення для визначення умовних дисперсій мають вигляд

$$\left.\begin{aligned} D_y[X]&=\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\left[x_i-M_y[X]\right]^2 P_i\left(X=x_i \big/ Y=y_j\right);\\ \int_{-\infty}^{\infty}\left[x-M_y[X]\right]^2 f(x/y)dx;\end{cases}\\ D_x[Y]&=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\left[y_j-M_x[Y]\right]^2 P_j\left(Y=y_j \big/ X=x_j\right);\\ \int_{-\infty}^{\infty}\left[y-M_x[Y]\right]^2 f(y/x)dy.\end{cases}\end{aligned}\right| \tag{3.34}$$

Як видно з (3.32) та (3.33), $M_y[X]=\varphi(y)$ і $M_x[Y]=f(x)$. Визначається, що $M_y[X]=\varphi(y)$ – лінія регресії X на Y, а $M_x[Y]=f(x)$ – лінія регресії Y на X. Лінія регресії X на Y та Y на X не збігаються.

Примітка. Для систем n випадкових дискретних та неперервних величин $\{X_i\}$, де $i=\overline{1,n}$, початковий момент порядку $\sum_{i=1}^{n} S_i$ визначається виразом

$$\alpha_{S_1, S_2, \ldots, S_n} = M\left[X_1^{S_1} X_2^{S_2} \ldots X_n^{S_{n1}} \right] =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{k_1=1}^{m_1} \sum\limits_{k_2=1}^{m_2} \cdots \sum\limits_{k_n=1}^{m_n} \left(x_{k_1}^{(1)} \right)^{S_1} \left(x_{k_2}^{(2)} \right)^{S_2} \ldots \left(x_{k_n}^{(n)} \right)^{S_n} P_{k_1 k_2 \ldots k_n} \; ; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^{S_1} x_2^{S_2} \ldots x_n^{S_n} f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n \; , \end{cases}$$

а центральний момент порядку $\sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ визначається виразом

$$\mu_{S_1, S_2, \ldots, S_n} = M\left[\left(X_1 - m_{x_1}\right)^{S_1} \left(X_2 - m_{x_2}\right)^{S_2} \ldots \left(X_n - m_{x_n}\right)^{S_n} \right] =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{k_1=1}^{m_1} \sum\limits_{k_2=1}^{m_2} \cdots \sum\limits_{k_n=1}^{m_n} \left(x_{k_1}^{(1)} - m_{x_1} \right)^{S_1} \left(x_{k2}^{(2)} - m_{x_2} \right)^{S_2} \ldots \left(x_{k_n}^{(n)} - m_{x_n} \right)^{S_n} \times \\ \times P_{k_1 k_2 \ldots k_n} \; ; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x_1 - m_{x_1}\right)^{S_1} \left(x_2 - m_{x_2}\right)^{S_2} \ldots \left(x_n - m_{x_n}\right)^{S_n} \times \\ \times f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n \; . \end{cases}$$

До числових характеристик, що використовуються при розгляді системи n випадкових неперервних величин при вирішенні практичних завдань відносять математичні сподівання та дисперсії окремих випадкових величин, що входять до системи та визначаються за виразами вигляду

$$M\left[X_i\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_i f_{x_i}\left(x_i\right) dx_i \, ;$$

$$D\left[X_i\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x_i - m_{x_i}\right)^2 f_{x_i}\left(x_i\right) dx_i \; ,$$

де $f_{x_i}\left(x_i\right)$ є щільність ймовірностей випадкової величини X_i та

$$f_{x_i}\left(x_i\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)dx_1 dx_2 ...dx_{i-1}dx_{i+1}...dx_n .$$

Також розглядаються кореляційні моменти будь-яких двох випадкових величин X_υ та X_ξ, що визначаються з виразу

$$R_{X_\upsilon X_\xi}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x_\upsilon - m_{x_\upsilon}\right)\left(x_\xi - m_{x_\xi}\right) f_{X_\upsilon X_\xi}\left(x_\upsilon, x_\xi\right)dx_\upsilon dx_\xi ,$$

де $f_{X_\upsilon X_\xi}\left(x_\upsilon, x_\xi\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)dx_1 dx_2 ... dx_{\upsilon-1}\times$

$$\times dx_{\upsilon+1}...dx_{\xi-1}dx_{\xi+1}\dots dx_n .$$

У цілому для системи $\{X_i\},\ i=\overline{1,n}$ кореляційний зв'язок випадкових величин описується кореляційною матрицею, що має вигляд

$$R=\left\|R_{X_\upsilon X_\xi}\right\|=\begin{pmatrix} R_{X_1X_1} & R_{X_1X_2} & \cdots & R_{X_1X_\xi} & \cdots & R_{X_1X_n} \\ R_{X_2X_1} & R_{X_2X_2} & \cdots & R_{X_2X_\xi} & \cdots & R_{X_2X_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{X_\upsilon X_1} & R_{X_\upsilon X_2} & \cdots & R_{X_\upsilon X_\xi} & \cdots & R_{X_\upsilon X_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{X_nX_1} & R_{X_nX_2} & \cdots & R_{X_nX_\xi} & \cdots & R_{X_nX_n} \end{pmatrix},$$

для якої $R_{X_\xi X_\upsilon}=D\left[X_\upsilon\right],\quad \upsilon=\overline{1,n};\quad R_{X_\upsilon X_\xi}=R_{X_\xi X_\upsilon}$, тобто по діагоналі кореляційної матриці зазначені дисперсії випадкових величин $\{X_i\},\ i=\overline{1,n}$. Кореляційна матриця є симетричною.

Якщо випадкові величини $\{X_i\}$, $i=\overline{1,n}$, що складають систему, є незалежними, а виходить некорельованими, то матриця R має вигляд

$$R=\begin{pmatrix} D[X_1] & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & D[X_2] & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D[X_i] & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & D[X_n] \end{pmatrix}.$$

Використовують також нормовану кореляційну матрицю, що містить коефіцієнти кореляції та має вигляд

$$R=\left\| r_{x_\upsilon x_\xi} \right\|=\begin{pmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \cdots & r_{x_1x_\xi} & \cdots & r_{x_1x_n} \\ r_{x_2x_1} & 1 & \cdots & r_{x_2x_\xi} & \cdots & r_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_\upsilon x_1} & r_{x_\upsilon x_2} & \cdots & r_{x_\upsilon x_\xi} & \cdots & r_{x_\upsilon x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_nx_1} & r_{x_nx_2} & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4. Двовимірний нормальний закон розподілу

Відомо, що якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, то щільність ймовірностей визначається виразом

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Для системи двох випадкових величин $\{X,Y\}$ якщо X та Y є незалежними випадковими величинами, то $f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$, тому щільність ймовірностей системи двох випадкових величин $\{X,Y\}$, що підпорядкована нормальному закону розподілу, визначається виразом

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{(x-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(x-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]}. \qquad (3.35)$$

Вираз (3.35) описує поверхню, для якої максимальне значення $f(x,y)$ досягається в точці (m_x, m_y), а при $x \to -\infty$, або $y \to -\infty$, або при $x \to \infty$ та $y \to \infty$ будемо мати $f(x,y) \to 0$.

Визначимо зміст лінії перерізу поверхні $f(x,y)$ площиною, паралельною xoy. Такі лінії називають лініями сталих щільностей, тобто

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(x-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]}=c.$$

Маємо

$$e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(x-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]}=c2\pi\sigma_x\sigma_y.$$

Прологарифмуємо цей вираз при основі e та позначимо

$$\ell n\left(c2\pi\sigma_x\sigma_y\right)=-\frac{\lambda^2}{2}.$$

Тоді

$$-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(x-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]=\ell n\left(c2\pi\sigma_x\sigma_y\right)=-\frac{\lambda^2}{2}.$$

Скоротимо на $\left(-\frac{1}{2}\right)$ і почленно поділимо на λ^2. Тоді маємо, що лінія перерізу визначається виразом

$$\frac{\left(x-m_x\right)^2}{\left(\lambda\sigma_x\right)^2}+\frac{\left(x-m_y\right)^2}{\left(\lambda\sigma_y\right)^2}=1\,. \qquad (3.36)$$

Це є еліпс, центр якого міститься в точці (m_x, m_y), а півосі є кратними середнім квадратичним відхиленням, тобто $a=\lambda\sigma_x$, $b=\lambda\sigma_y$. Такий еліпс (3.36) називають еліпсом розсіювання (розсіювання можливих значень системи $\{X,Y\}$ відносно центра розсіювання (m_x, m_y)), а головні осі, які паралельні осям системи координат, називають осями розсіювання. Якщо $\lambda=3$, то еліпс розсіювання називають повним еліпсом розсіювання, для якого, як це раніше визначало "правило 3σ", $P\left(\{X,Y\}\in D_{\text{ел.р}}\right)=0{,}997$, тобто подія, яка полягає в тому, що випадкова точка належить області повного еліпса розсіювання $D_{\text{ел.р}}$, є практично достовірною.

Примітка. Для еліпса розсіювання a та b можуть визначатися через імовірні відхилення E_x та E_y. Якщо $\sigma_x=\sigma_y=\sigma$, тоді визначають круг розсіювання.

Визначимо ймовірність влучення випадкової точки $\{X,Y\}$ в область D, що обмежена прямокутником: $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$.

Маємо

$$P\left(\{X,Y\}\in D\right)=P\left[(a<X<b)(c<Y<d)\right]=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int_a^b f_X(x)dx\int_c^d f_Y(y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_a^b e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\int_c^d e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}dy=$$

$$=\left[\Phi\left(\frac{b-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{d-m_y}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{c-m_y}{\sigma_y}\right)\right],$$

де $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функція Лапласа.

Тобто

$$P(\{X,Y\}\in D_{\square})=\left[\Phi\left(\frac{b-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\Phi\left(\frac{d-m_y}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{c-m_y}{\sigma_y}\right)\right]. \qquad (3.37)$$

Розглянемо визначення ймовірностей влучення випадкової точки $\{X,Y\}$ в область, обмежену еліпсом розсіювання.

Для довільної області D для системи двох випадкових величин $\{X,Y\}$, підпорядкованої довільному закону розподілу, ймовірність влучення випадкової точки $\{X,Y\}$ в область D визначається з виразу (3.14). У нашому випадку, коли розглядається система $\{X,Y\}$, що підпорядкована нормальному закону розподілу, а область $D_{\text{ел.р}}$ обмежена еліпсом розсіювання, маємо

$$P(\{X,Y\}\in D_{\text{ел.р}})=\iint\limits_{(D_{\text{ел.р}})}\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]}dxdy,$$

де область $D_{\text{ел.р}}$ обмежена еліпсом

$$\frac{\left(x-m_x\right)^2}{\left(\lambda\sigma_x\right)^2}+\frac{\left(x-m_y\right)^2}{\left(\lambda\sigma_y\right)^2}=1\,.$$

Введемо до розгляду узагальнену полярну систему координат, для якої

$$x-m_x=\lambda\sigma_x\,\rho\cos\varphi\,;$$

$$y-m_y=\lambda\sigma_y\,\rho\sin\varphi\,,$$

а модуль Якобіана переходу з прямокутної системи координат до узагальненої полярної системи координат має вигляд

$$|I|=\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\lambda\sigma_x\cos\varphi & -\lambda\sigma_{\text{x}}\,\rho\sin\varphi\\ \lambda\sigma_y\sin\varphi & +\lambda\sigma_{\text{y}}\,\rho\cos\varphi\end{matrix}\right\|=\left|\,\lambda^2\sigma_x\sigma_y\,\rho\right|.$$

В узагальненій полярній системі координат рівняння еліпса розсіювання має вигляд

$$\frac{\lambda^2\sigma_x^2\rho^2\cos^2\varphi}{\lambda^2\sigma_x^2}+\frac{\lambda^2\sigma_y^2\rho^2\sin^2\varphi}{\lambda^2\sigma_y^2}=1\,;$$

$$\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=1\,;\;\rho^2=1\,;\;\rho=1\,.$$

Тоді

$$P\left(\{X,Y\}\in D_{\text{ел.р}}\right)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left[\frac{\lambda^2\sigma_x^2\rho^2\cos^2\varphi}{2\sigma_x^2}+\frac{\lambda^2\sigma_y^2\rho^2\sin^2\varphi}{2\sigma_y^2}\right]}\times$$

$$\times\lambda^2\sigma_x\sigma_y\,\rho\,d\rho\,d\varphi=\frac{\lambda^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho e^{-\frac{\lambda^2\rho^2}{2}}d\rho=\lambda^2\int\limits_0^1\rho e^{-\frac{\lambda^2\rho^2}{2}}d\rho=$$

$$= \lambda^2 \left(-\frac{1}{\lambda^2} \right) \int\limits_0^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{\lambda^2 \rho^2}{2}} d\left(-\frac{\lambda^2 \rho^2}{2} \right) = -e^{-\frac{\lambda^2 \rho^2}{2}} \Bigg|_0^{-\frac{\lambda^2}{2}} = 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}} .$$

Виходить,

$$P\left(\{X, Y\} \in D_{\text{ел.р}} \right) = 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}} . \tag{3.38}$$

Задача 3.7. Система незалежних випадкових величин $\{X, Y\}$ підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = 1$, $m_y = 2$, $E_x = 2$, $E_y = 4$. Визначити ймовірність влучення випадкової точки $\{X, Y\}$ в область, обмежену еліпсом

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 .$$

Розв'язання. Якщо заданий еліпс є еліпсом розсіювання, то ймовірність того, що випадкова точка $\{X, Y\}$ належить області D, обмеженій заданим еліпсом, слід визначати з (3.38). Якщо заданий еліпс не є еліпсом розсіювання, то ймовірність події, що визначена в умові задачі, слід визначати з (3.14). Необхідно визначити, чи є заданий еліпс еліпсом розсіювання. Еліпс розсіювання – це такий еліпс, в якого центр визначається точкою (m_x, m_y), а півосі є кратними середнім квадратичним відхиленням σ_x та σ_y випадкових величин X та Y. Маємо $m_x = 1$, $m_y = 2$; виходить, заданий еліпс має центр у точці ($m_x = 1$, $m_y = 2$), тобто центр еліпса збігається з центром розсіювання можливих значень системи $\{X, Y\}$, а

$$\lambda^2 = \frac{a^2}{\sigma_x^2} = \frac{4}{\left(\frac{2}{0{,}674} \right)^2} \cong 0{,}453 ; \quad \lambda^2 = \frac{b^2}{\sigma_y^2} = \frac{16}{\left(\frac{4}{0{,}674} \right)^2} \cong 0{,}453 ,$$

тобто півосі еліпса є кратними σ_x і σ_y, оскільки $E_x \cong 0,674\sigma_x$; $E_y \cong 0,674\sigma_y$. Тоді введена в задачі область D є областю $D_{\text{ел.р}}$ еліпса розсіювання та

$$P\left(\{X,Y\} \in D_{\text{ел.р}}\right) = 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}} = 1 - e^{-\frac{0,453}{2}} \cong 0,2.$$

Якщо $D_{\text{ел.р}}$ – область, обмежена еліпсом з $\lambda = 1$, то таку область називають областю одиничного еліпса розсіювання, для якого

$$P\left(\{X,Y\} \in D_{\text{ел.р}}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \cong 0,394.$$

Примітка. Розглянемо *n*-вимірну систему незалежних величин $\{X_i\}$, $i = \overline{1,n}$, що підпорядкована *n*-вимірному нормальному закону розподілу. Тоді щільність ймовірностей має визначення

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)dx_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_i}} e^{-\frac{\left(x_i - m_{x_i}\right)^2}{2\sigma_{x_i}^2}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i - m_{x_i}\right)^2}{\sigma_{x_i}^2}}, \qquad (3.39)$$

а функція розподілу має визначення

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^{-1} \int_{-\infty}^{x_i} e^{-\frac{\left(x - m_{x_i}\right)^2}{2\sigma_{x_i}^2}} dx_i. \qquad (3.40)$$

Перейдемо до розгляду системи двох залежних випадкових величин $\{X,Y\}$, що підпорядкована нормальному закону розподілу. Щільність ймовірностей у цьому випадку має вигляд

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2\left(1-r_{xy}^2\right)}\left[\frac{\left(x-m_x\right)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2r_{xy}\left(x-m_x\right)\left(y-m_y\right)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{\left(y-m_y\right)^2}{\sigma_y^2}\right]}, \qquad (3.41)$$

де r_{xy} – коефіцієнт кореляції.

З (3.41) видно, що якщо $r_{xy}=0$, то будемо мати відомий вираз щільності ймовірностей (3.35), тобто, при $r_{xy}=0$ вираз (3.41) буде відповідати щільності ймовірностей для незалежних випадкових величин, що складають систему $\{X,Y\}$, підпорядковану нормальному закону розподілу. Раніше відзначалося, що в загальному вигляді некорельованість випадкових величин, які складають систему $\{X,Y\}$, не є достатньою умовою для висловлювання твердження, що випадкові величини є незалежними. Як бачимо, винятком є система випадкових величин $\{X,Y\}$, що підпорядкована нормальному закону розподілу. Виходить, коли розглядається система випадкових величин, що має нормальний закон розподілу, то з доведення того, що випадкові величини є незалежними, випливає твердження, що вони є некорельованими, а з доведення того, що випадкові величини є некорельованими випливає твердження, що ці випадкові величини є незалежними.

Якщо випадкові величин X та Y є залежними і складають систему $\{X,Y\}$, що підпорядкована нормальному закону розподілу, то

$$f\left(x/y\right)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx};\quad f\left(y/x\right)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy}.$$

Щільність $f(x,y)$ визначається з (3.41), тоді умовна щільність випадкової величини X за умови, що $Y=y$, має вигляд

$$f\left(x/y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-r_{xy}^2}}e^{-\frac{\left\{x-\left[m_x+r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-m_y\right)\right]\right\}^2}{2\sigma_x^2\left(1-r_{xy}^2\right)}},$$

а умовна щільність випадкової величини Y за умови, що $X=x$, має вигляд

$$f\left(y/x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}e^{-\frac{\left\{y-\left[m_y+r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-m_x\right)\right]\right\}^2}{2\sigma_y^2\left(1-r_{xy}^2\right)}}.$$

Порівняння виразів для $f\left(x/y\right)$ і $f\left(y/x\right)$ з (3.41) або з (3.35) дає право стверджувати, що умовні щільності $f\left(x/y\right)$ і $f\left(y/x\right)$ відповідають нормальному закону розподілу, для якого умовні математичні сподівання та умовні дисперсії визначаються виразами:

$$M_y\left[X\right]=m_x+r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-m_y\right); \tag{3.42}$$

$$M_x\left[Y\right]=m_y+r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-m_x\right); \tag{3.43}$$

$$D_y\left[X\right]=\sigma_x^2\left(1-r_{xy}^2\right); \tag{3.44}$$

$$D_x\left[Y\right]=\sigma_y^2\left(1-r_{xy}^2\right). \tag{3.45}$$

Із (3.42) та (3.43) видно, що умовне математичне сподівання $M_y\left[X\right]$ випадкової величини X є функцією $\varphi(y)$ змінної y, а умовне математичне сподівання $M_x\left[Y\right]$ випадкової величини Y є функцією $f(x)$ змінної x. Залежності $f(x)$ та $\varphi(y)$ є лінійними виразами від відповідної змінної, а саме:

$$M_y\left[X\right]=\varphi(y)=r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y+\left(m_x-r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}m_y\right); \tag{3.46}$$

$$M_x\left[Y\right]=f(x)=r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x+\left(m_y-r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x\right). \tag{3.47}$$

Виходить, якщо система випадкових величин $\{X,Y\}$ підпорядкована нормальному закону розподілу, то лінії регресії X на Y та Y на X є рівняннями прямих. Звідси випливає таке тлумачення змісту коефіцієнта кореляції:

– якщо $r_{xy}>0$, то це означає, що зі зростанням можливих значень однієї з випадкових величин можливі значення другої випадкової величини зростають за умовним математичним сподіванням (рис. 3.6);

– якщо $r_{xy}<0$, то це означає, що зі зростанням можливих значень однієї з випадкових величин можливі значення другої випадкової величини зменшуються за умовним математичним сподіванням (рис. 3.7).

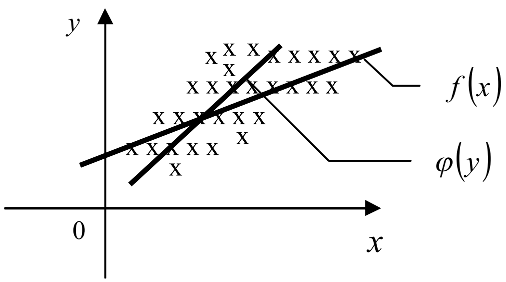

Рис. 3.6. Можливі значення системи, що відповідають невід'ємному значенню коефіцієнта кореляції

Тобто, якщо $r_{xy}>0$, чи $r_{xy}<0$, то можливі значення системи групуються відносно лінії регресії X на Y та Y на X. Це зображено на рис. 3.6 та на рис. 3.7. Якщо $r_{xy}=0$, то можливі значення системи групуються відносно точки $\left(m_x, m_y\right)$, що зображено на рис. 3.8, та видно з (3.46), оскільки тоді $M_y\lfloor X\rfloor = m_x$, а також з (3.47), оскільки тоді $M_x\lfloor Y\rfloor = m_y$.

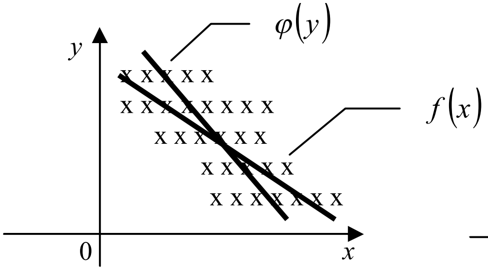

Рис. 3.7. Можливі значення системи, що відповідають від'ємному значенню коефіцієнта кореляції

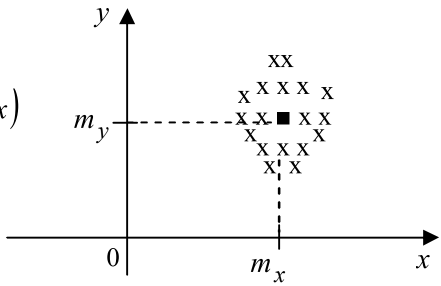

Рис. 3.8. Можливі значення системи, що відповідають $r_{xy} = 0$

3.5. Закон розподілу Релея

Розглянемо двовимірну випадкову величину $\{X, Y\}$, що підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. Раніше відзначалося, що еліпс розсіювання визначається виразом

$$\frac{\left(x{-}m_x\right)^2}{\left(\lambda\sigma_x\right)^2} + \frac{\left(x{-}m_y\right)^2}{\left(\lambda\sigma_y\right)^2} = 1, \tag{3.48}$$

якщо розглядається система двох випадкових величин, що підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами m_x, m_y, σ_x, σ_y. Якщо розглядати систему $\{X, Y\}$, що підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, то рівняння еліпса розсіювання буде мати вигляд

$$\frac{x^2}{(\lambda\sigma)^2} + \frac{y^2}{(\lambda\sigma)^2} = 1;$$

$$x^2 + y^2 = (\lambda\sigma)^2 = r^2, \tag{3.49}$$

тобто маємо коло розсіювання. Виходячи з того, що ймовірність влучення випадкової точки $\{X,Y\}$ в область, що обмежена еліпсом розсіювання (3.48), має вигляд

$$P\left(\{X,Y\}\in D_{\text{ел.р}}\right)=1-e^{-\frac{\lambda^2}{2}},$$

можна записати, що ймовірність влучення випадкової точки $\{X,Y\}$, підпорядкованої нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, в область, обмежену колом розсіювання (3.49), має вигляд

$$P\left(\{X,Y\}\in D_o\right)=1-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \tag{3.50}$$

оскільки $\lambda^2 = \dfrac{r^2}{\sigma^2}$.

Оскільки випадкова точка визначається за виразом $R=\sqrt{X^2+Y^2}$, де R є випадковий радіус вектор, то

$$F(r)=P(R<r)=1-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \tag{3.51}$$

є функцією розподілу випадкової величини R, а тоді

$$f(r)=\begin{cases}\dfrac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & r\ge 0\\ 0, & r<0\end{cases} \tag{3.52}$$

є виразом щільності ймовірностей випадкової величини R.

Функція розподілу (3.51) та щільність ймовірностей (3.52) – це вирази закону розподілу Релея випадкової величини R. Визначимо основні числові характеристики закону розподілу Релея. Маємо

$$M[R]=m_r=\int_0^\infty rf(r)dr=\int_0^\infty r\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr=\left.\left(-re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right)\right|_0^\infty+$$

$$+\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = 0 + \sigma \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cong 1{,}25\sigma \ ;$$

$$D[R] = \int_0^{\infty} r^2 f(r) dr - m_r^2 = \int_0^{\infty} r^2 \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr - \frac{\pi\sigma^2}{2} = \left.\left(-r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right)\right|_0^{\infty} +$$

$$+\int_0^{\infty} 2re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr - \frac{\pi\sigma^2}{2} = 0 - 2\sigma^2 \int_0^{-\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} d\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} \right) - \frac{\pi\sigma^2}{2} = -$$

$$\left. -2\sigma^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right|_0^{-\infty} - \frac{\pi\sigma^2}{2} == 2\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{2} = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right);$$

$$f'(r) = \left(\frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right)'_r = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} + \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{2r}{2\sigma^2} \right) = 0; M_{o_r} = \sigma.$$

$$\int_0^{M_{e_r}} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = \frac{1}{2}; \ \left. -e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right|_0^{M_{e_r}} = \frac{1}{2}; \ -\left(e^{-\frac{M_{e_r}^2}{2\sigma^2}} - 1 \right) = \frac{1}{2};$$

$$e^{-\frac{M_{e_r}^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2}; \ -\frac{M_{e_r}^2}{2\sigma^2} = -\ell n 2; \ M_{e_r} = \sigma\sqrt{2\ell n 2}\,.$$

Виходить, для закону розподілу Релея математичне сподівання випадкової величини R, дисперсія випадкової величини R, мода та медіана випадкової величини R визначаються за такими формулами:

$$M[R]=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,; \tag{3.53}$$

$$D[R]=\sigma^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right); \tag{3.54}$$

$$M_{o_r}=c\,; \tag{3.55}$$

$$M_{e_r}=\sigma\sqrt{2\ell n 2}\,. \tag{3.56}$$

Графік щільності ймовірностей закону розподілу Релея наведений на рис. 3.9.

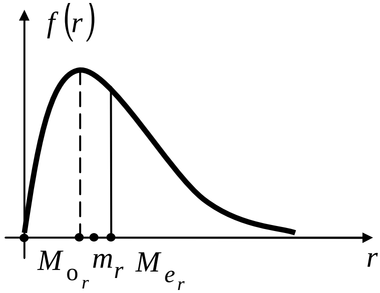

Рис. 3.9. Щільність ймовірностей закону розподілу Релея

Узагальненням закону розподілу Релея є закон розподілу Райса.

Задача 3.8. Радіус кругової зони ураження точкової цілі, який визначений з урахуванням характеристик міцності елементів цілі, дорівнює $r_з=0{,}1$ км. Імовірне відхилення засобу ураження дорівнює E = 0,05 км. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що ціль будь уражена.

Розв'язання. Ураження цілі відповідає влученню засобу ураження в область круга з радіусом $r_з$, тому ймовірність події, яка полягає в тому, що ціль буде уражена, визначається у відповідності до функції розподілу закону розподілу Релея. Маємо

$$P(A)=P(R<r_з)=1-e^{-\frac{r_з^2}{2\sigma^2}},$$

де $\sigma=\dfrac{E}{0{,}674}=\dfrac{0{,}05}{0{,}674}=0{,}074$.

Тоді

$$P(A)=1-e^{-\frac{0,1^2}{2\cdot 0,074^2}} \cong 1-e^{-1}=1-0,37=0,63.$$

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. В якому вигляді можуть бути подані закони розподілу системи дискретних та неперервних випадкових величин?
2. Чисельній мірі якої випадкової події відповідає зміст функції розподілу двовимірної випадкової величини?
3. Чи дозволяє значення закону розподілу двовимірної випадкової величини визначити ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що випадкова точка буде належати будь-якій двовимірній області?
4. Який фізичний сенс мають математичні сподівання та середні квадратичні відхилення двох випадкових величин, які складають двовимірну систему випадкових величин?
5. Який еліпс називають повним еліпсом розсіювання?
6. Чи можна для будь-якої системи двох випадкових величин стверджувати, що рівність нулю їх кореляційного моменту відповідає незалежності цих випадкових величин?
7. Чому поняття незалежності випадкових величин не відповідає поняттю корельованості цих випадкових величин?
8. Визначте вигляд кореляційної матриці системи n незалежних випадкових величин.
9. Переконайтесь, що кореляційний момент двох нормованих випадкових величин відповідає коефіцієнту кореляції двох випадкових величин, які складають систему.

Г л а в а 4
ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ АРГУМЕНТІВ

4.1. Визначення функції випадкового аргументу та її закон розподілу

При описі випадкових явищ природи, коли розглядається дві або більше випадкові величини, які пов’язані між собою деякою функціональною залежністю, мають місце невипадкові функції однієї чи багатьох випадкових величин. На практиці слід розглядати функції випадкових величин (функції випадкових аргументів), коли проводяться непрямі вимірювання. Так, якщо розглядається дослід, мета якого полягає в тому, щоб визначити значення напруги U у деякому електричному ланцюгу, а вимірюється значення сили струму I в цьому ланцюгу, то розглядається невипадкова функція однієї випадкової величини, яка має вигляд $U = RI$, де R – опір ланцюга є невипадковою величиною. З наведеної залежності видно, що кожному значенню випадкової величини сили струму I в ланцюгу відповідає значення випадкової величини U – напруги ланцюга.

Якщо між випадковими величинами X та Y існує функціональний зв'язок, то розглядається невипадкова функція випадкової величини (випадкового аргументу) вигляду $Y = \varphi(X)$.

У загальному випадку можуть розглядатись функції однієї випадкової величини $Y = \varphi(X)$, функції двох випадкових величин $Y = \varphi(X_1, X_2)$, функції n випадкових величин $Y = \varphi(X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n)$.

Нехай розглядається, наприклад, функція випадкового аргументу $Y = \varphi(X)$. Нас будуть цікавити розв'язання таких задач:

– визначення закону розподілу випадкової величини Y (невипадкової функції випадкової величини X), якщо відомий закон розподілу випадкової величини X (випадкового аргументу);

– визначення числових характеристик випадкової величини Y, якщо відомий закон розподілу випадкової величини X;

– визначення числових характеристик випадкової величини Y, якщо відомі числові характеристики випадкової величини X.

Якщо випадкова величина X є дискретною випадковою величиною, а її закон розподілу поданий рядом розподілу, який наведений у табл. 4.1, то випадкова величина $Y = \varphi(X)$ також є дискретною випадковою величиною, можливі значення якої визначаються з відношень $y_i = \varphi(x_i)$, $i = \overline{1,n}$, а їм відповідні ймовірності задовольняють рівності

$$P(Y = y_i) = P(X = x_i) = P_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Таблиця 4.1

Ряд розподілу випадкової величини *X*

x_i	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
$P(X = x_i) = P_i$	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n

Тоді ряд розподілу функції випадкового аргументу $Y = \varphi(X)$ має вигляд, який подано в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Ряд розподілу випадкової величини *Y*

$y_i = \varphi(x_i)$	$y_1 = \varphi(x_1)$	$y_2 = \varphi(x_2)$	…	$y_i = \varphi(x_i)$	…	$y_n = \varphi(x_n)$
$P(Y = y_i) = P_i$	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n

Нехай кільком можливим значенням x_i, $i = \overline{1,m}$, де $m < n$, випадкової величини X відповідає одне й те саме значення функції $y_1 = y_i = \varphi(x_i)$, $i = \overline{1,m}$. Це означає, що подія $(Y = y_1)$ є рівносильною об'єднанню подій $(X = x_i)$, $i = \overline{1,m}$, тобто

$$(Y = y_1) = \bigcup_{i=1}^{m} (X = x_i).$$

Оскільки події $\{X = x_i\}$, $i = \overline{1,m}$ є несумісними, то

$$P(Y = y_1) = \sum_{i=1}^{m} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} P_i,$$

а для решти можливих значень x_i, $i = \overline{m+1,n}$, маємо

$$P(Y = y_i) = P(X = x_i), \quad i = \overline{m+1,n}.$$

Тоді ряд розподілу функції випадкового аргументу $Y = \varphi(X)$ має вигляд, який подано в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Ряд розподілу випадкової величини $Y = \varphi(X)$

y_i	y_1	y_2	y_3	…	P_{n-m}
$P(Y = y_i) = P_i$	$\sum_{i=1}^{m} P_i$	P_{m+1}	P_{m+2}	…	P_n

Задача 4.1. За право одного кидка грального кубика гравець сплачує 2 гривні, виграш сплачується гравцю у відповідності до виразу

$Y = (X-2)^2$, де X – випадкова величина кількості очок, що випали на верхній грані. Скласти ряд розподілу випадкової величини *Y*.

Розв'язання. За умовою задачі випадкова величина X є дискретною випадковою величиною, яка приймає можливі значення $x_i = i,\ i = \overline{1,6}$. Тоді випадкова величина Y також є дискретною випадковою величиною, а її можливими значеннями є $y_1 = 0$; $y_2 = 1$; $y_3 = 4$; $y_4 = 9$; $y_5 = 16$. Ряд розподілу випадкової величини *Y* поданий в табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Ряд розподілу випадкової величини *Y*

y_i	0	1	4	9	16
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Розглянемо визначення закону розподілу функції випадкової величини *X* у випадку, коли *X* – неперервна випадкова величина. Нехай функція $\varphi(X)$ є монотонною неперервною зростаючою функцією, має обернену $X = \psi(Y)$ та є такою, що має похідну на інтервалі (a, b) усіх можливих значень

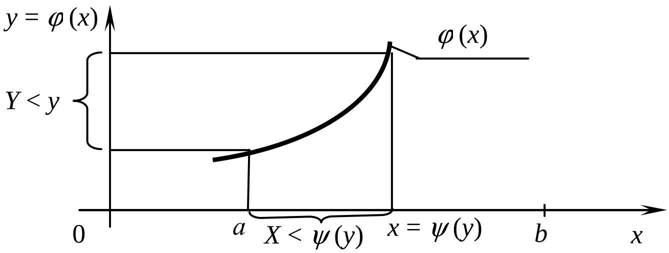

Рис. 4.1. Графік монотонної зростаючої функції $\varphi(x)$

випадкової величини *X*. Графік функції поданий на рис. 4.1.

Функція розподілу випадкової величини *Y* визначається за означенням $G(y) = P(Y < y)$. Якщо функція $y = \varphi(x)$ є монотонною та зростаючою на інтервалі (a, b) усіх можливих значень випадкової величини *X*, то подія $\{Y < y\}$ еквівалентна події $\{X < \psi(y)\}$. Тоді

$$G(y) = P(Y < y) = P(a < X < \psi(y)) = \int_a^{\psi(y)} f(x)\,dx,$$

де $f(x)$ – щільність ймовірностей випадкової величини *X*, а щільність ймовірностей випадкової величини *Y* визначається як

$$q(y)=G'(y)=\left(\int\limits_{a}^{\psi(y)} f(x)dx\right)'_y = f[\psi(y)]\psi'(y). \qquad (4.1)$$

Якщо функція $\varphi(x)$ є монотонною неперервною спадною функцією, має обернену $X=\psi(Y)$ і на інтервалі (a,b) можливих значень випадкової величини *X* має похідну, то подія $\{Y<y\}$ може статися тоді, коли виникає подія $\{\psi(y)<X<b\}$, що відзначено на рис. 4.2.

У цьому випадку функція щільності визначиться як

$$q(y)=G'(y)=$$

$$=\left(\int\limits_{\psi(y)}^{b} f(x)dx\right)'_y =$$

$$=-\left(\int\limits_{b}^{\psi(y)} f(x)dx\right)'_y =$$

$$=-f[\psi(y)]\psi'(y). \qquad (4.2)$$

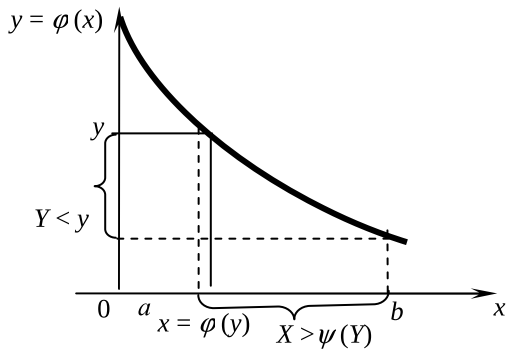

Рис. 4.2. Графік монотонної спадної функції $\varphi(x)$

Виходячи з властивості функції щільності ймовірностей випадкової величини *Y*, яка полягає в тому, що $q(y)>0$, записи (4.1) та (4.2), якщо функція $Y=\varphi(X)$ є монотонною, неперервною, спадною чи зростаючою і такою, яка має похідну на інтервалі (a,b) можливих значень випадкової величини *X*, можна об'єднати та подати як

$$q(y)=f[\psi(y)]\left|\psi'(y)\right|. \qquad (4.3)$$

Примітка. Інтервал можливих значень випадкової величини *X* може бути $(-\infty,\infty)$.

Задача 4.2. Випадкова величина *X* підпорядкована нормальному закону розподілу, тобто

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

і пов'язана з випадковою величиною *Y* лінійною залежністю вигляду

$$Y = aX + b,$$

де a і b – невипадкові величини. Визначити закон розподілу випадкової величини *Y*.

Розв'язання. Закон розподілу випадкової величини *Y* будемо визначати у вигляді функцій щільності $q(y)$ за (4.3). Розв'язання задачі зручно подавати у такому записі:

$$\left.\begin{array}{c} Y=\varphi(X); \\ X=\psi(Y); \\ |\psi'(y)|. \end{array}\right| \begin{array}{l} Y=aX+b; \\ X=\dfrac{Y-b}{a}; \\ \dfrac{1}{a}. \end{array}$$

З (4.3) маємо

$$q(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x a}e^{-\frac{[y-(am_x+b)]^2}{2(a\sigma_x)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}},$$

де $m_y = am_x + b,\quad \sigma_y = a\sigma_x$.

Таким чином, як свідчить розв'язання цієї задачі, якщо випадкова величина *X* підпорядкована нормальному закону розподілу з характеристиками m_x, c_x та випадкові величини *Y* і *X* зв'язані лінійною залежністю, то випадкова величина *Y* також підпорядкована нормальному закону розподілу з характеристиками $m_y = am_x + b$, $\sigma_y = a\sigma_x$.

Задача 4.3. Випадкова величина *X* підпорядкована експоненціальному закону розподілу, тобто

$$f(x)=3e^{-3x},\ x\geq 0,$$

та пов'язана з випадковою величиною *Y* за виразом

$$Y = 2 - 3X.$$

Визначити закон розподілу випадкової величини *Y*.

Розв'язання. Маємо

$$\begin{array}{c|l} Y = \varphi(X); & Y = 2 - 3X; \\ X = \psi(Y); & X = \dfrac{2-Y}{3}; \\ |\psi'(y)|. & \dfrac{1}{3}. \end{array}$$

Тоді $q(y) = 3e^{-3\frac{2-y}{3}} \cdot \frac{1}{3} = e^{(y-2)},\ y \le 2,$

оскільки з $x \ge 0$, що зазначено у виразі $f(x)$ випадкової величини *X*, маємо $\frac{2-y}{3} \ge 0,\ y \le 2$. Отже, функція щільності ймовірностей має вигляд

$$q(y) = \begin{cases} e^{(y-2)}, & y \le 2; \\ 0, & y > 2, \end{cases}$$

та подана на рис. 4.3.

Задача 4.4. Випадкова величина *X* підпорядкована закону розподілу Коші, а саме:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}.$$

Випадкова величина *Y* є оберненою до випадкової величини *X*, тобто

$$Y = \frac{1}{X}.$$

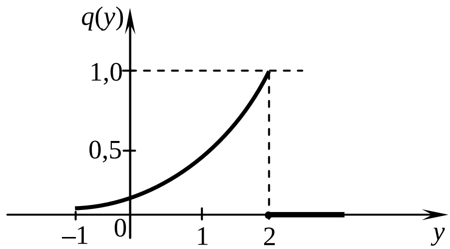

Рис. 4.3. Графік функції щільності випадкової величини *Y*

Визначити закон розподілу випадкової величини *Y*.

Розв'язання. Функціональна залежність випадкових величин *X* та *Y* подана на рис. 4.4.

З рис. 4.4. видно, що функція $y = \frac{1}{x}$ при $x = 0$ має розрив другого роду, але обернена функція $x = \frac{1}{y}$ визначається однозначно, тому закон розподілу випадкової величини *Y* визначимо з (4.3). Маємо

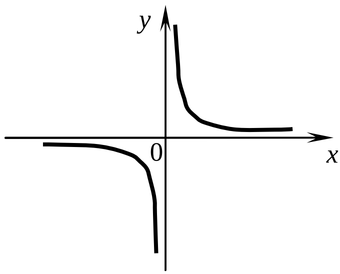

Рис. 4.4. Графік функціональної залежності випадкових величин *Y* та *X*

$Y=\varphi(X);$	$Y=\dfrac{1}{X};$
$X=\psi(Y);$	$X=\dfrac{1}{Y};$
$\lvert\psi'(y)\rvert.$	$\dfrac{1}{y^2}.$

Тоді

$$q(y)=\frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}\cdot\frac{1}{y^2}=$$

$$=\frac{y^2}{\pi\left(1+y^2\right)}\cdot\frac{1}{y^2}=\frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}.$$

Тобто закон розподілу оберненої випадкової величини *Y* до випадкової величини *X*, якщо випадкова величина *X* підпорядкована закону розподілу Коші, також є законом розподілу Коші.

Задача 4.5. Випадкова величина радіуса круга ураження *X* підпорядкована закону розподілу Релея з параметром c, тобто

$$f(x)=\frac{x}{c^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad x\geq 0.$$

Визначити закон розподілу випадкової величини площі круга ураження *Y*.

Розв'язання. Випадкова величина *Y*, яка є монотонною при $X\geq 0$, пов'язана з випадковою величиною *X* виразом $Y=\pi X^2$.

Маємо

$Y=\varphi(X);$	$Y=\pi X^2;$
$X=\psi(Y);$	$X=\sqrt{\dfrac{Y}{\pi}};$
$\lvert\psi'(y)\rvert.$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi y}}.$

Тоді

$$q(y)=\frac{\sqrt{\frac{y}{\pi}}}{\sigma^2}\cdot e^{-\frac{y}{2\pi\sigma^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{y}{2\pi\sigma^2}},\quad y\geq 0,$$

тобто випадкова величина площі круга ураження *Y*, радіус якого є випадкова величина *X*, що підпорядкована закону розподілу Релея, підпорядкована експоненціальному закону розподілу з параметром $\frac{1}{2\pi\sigma^2}$.

Задача 4.6. Через точку *a*, яка лежить на осі 0η, проводиться пряма *ab* під кутом *X* до осі 0η (рис. 4.5). Випадкова величина *X* підпорядкована рівномірному закону розподілу на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right)$. Визначити закон розподілу випадкової величини *Y* – абсциси точки перетину прямої *ab* з віссю 0ξ.

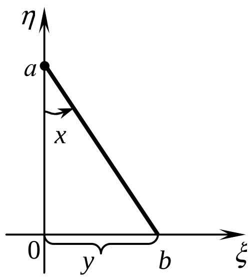

Рис. 4.5. Визначення можливих значень випадкової величини *Y*

Розв'язання. Якщо випадкова величина *X* підпорядкована рівномірному закону розподілу на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right)$, то її щільність ймовірностей має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x\in\left(-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right);\\ 0, & x\notin\left(-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

З рис. 4.5. видно, що $Y=a\cdot\mathrm{tg}X$. Тоді

$$
\begin{array}{c|l}
Y=\varphi(X); & Y=a\cdot \mathrm{tg}X; \\
X=\psi(Y); & X=\mathrm{arctg}\dfrac{Y}{a}; \\
|\psi'(y)|. & \dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{a^2}}\cdot\dfrac{1}{a}.
\end{array}
$$

Тоді з (4.3) маємо

$$
q(y)=f[\psi(y)]|\psi'(y)|=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\pi a\left(1+\dfrac{y^2}{a^2}\right)}, \quad -\infty<y<\infty .
$$

Тобто випадкова величина *Y* підпорядкована закону розподілу Коші.

Перейдемо до розгляду того випадку, коли функція $Y=\varphi(X)$ на інтервалі $(a;b)$ можливих значень випадкової величини *X* не є монотонною; кажуть що функція $Y=\varphi(X)$ є функцією загального вигляду, що й показано на рис. 4.6.

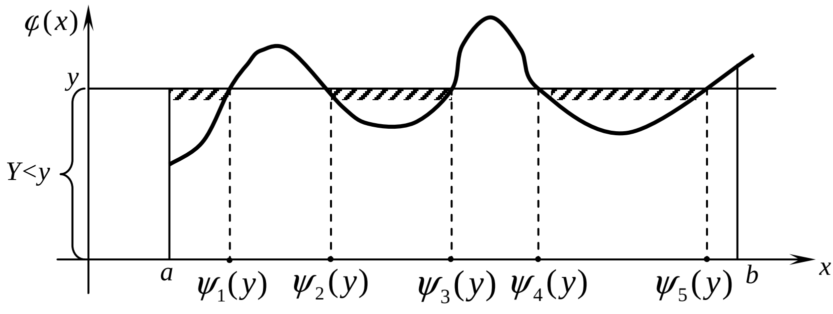

Рис. 4.6. Графік функції загального вигляду

У цьому випадку обернена функція $X=\psi(Y)$ є неоднозначною. Кількість значень оберненої функції залежить від того, яке можливе значення у випадкової величини *Y* розглядається. У випадку, зазначеному на рис. 4.6, подія $\{Y < y\}$ відбудеться тоді, коли відбудеться хоча б одна з несумісних подій: $\{a < X < \psi_1(y)\}$, $\{\psi_2(y) < X < \psi_3(y)\}$, $\{\psi_4(y) < X < \psi_5(y)\}$.

Тоді маємо

$$G(y) = P(Y < y) = P\left(\{X \in (a;\psi_1(y))\} + \{X \in (\psi_2(y);\psi_3(y))\} +\right.$$

$$\left. + \{X \in (\psi_4(y);\psi_5(y))\}\right) = \int_a^{\psi_1(y)} f(x)dx + \int_{\psi_2(y)}^{\psi_3(y)} f(x)dx + \int_{\psi_4(y)}^{\psi_5(y)} f(x)dx;$$

$$q(y) = G'(y) = f[\psi_1(y)]\psi_1'(y) + \left(\left[\int_a^{\psi_3(y)} f(x)dx - \int_a^{\psi_2(y)} f(x)dx\right]\right)_y' +$$

$$+\left(\left[\int_a^{\psi_5(y)} f(x)dx - \int_a^{\psi_4(y)} f(x)dx\right]\right)_y' = f[\psi_1(y)]\psi_1'(y) +$$

$$+ f[\psi_3(y)]\psi_3'(y) + f[\psi_2(y)]\psi_2'(y) + f[\psi_5(y)]\psi_5'(y) +$$

$$+ f[\psi_4(y)]\,\psi_4'(y),$$

де функції $x = \psi(y)$ значення $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_3(y)$, $x = \psi_5(y)$ відповідають областям зростання функції $y = \varphi(x)$ і відповідні похідні $\psi_1'(y)$, $\psi_3'(y)$, $\psi_5'(y)$ є додатними, а функції $x = \psi(y)$ значення $x = \psi_2(y)$, $x = \psi_4(y)$ відповідають областям спадання функції $y = \varphi(x)$ і відповідні похідні $\psi_2'(y)$, $\psi_4'(y)$ є від'ємними.

Виходячи з вищевикладеного видно, що якщо k – кількість значень оберненої функції, яка відповідає визначеному можливому значенню випадкової величини *Y*, а $\psi_1(y);\psi_2(y);\ldots;\psi_i(y);\ldots;\psi_k(y)$ –

значення оберненої функції, які відповідають y, то в загальному випадку маємо

$$q(y)=\sum_{i=1}^{k} f\left[\psi_i(y)\right]\left|\psi_i'(y)\right|. \qquad (4.4)$$

Задача 4.7. Випадкова величина X підпорядкована закону розподілу, щільність ймовірностей якого $f(x)$, $x\in(-\infty;+\infty)$. Визначити щільність ймовірностей випадкової величини $Y=|X|$.

Розв'язання. На рис. 4.7. наведений графік функціональної залежності $Y=|X|$.

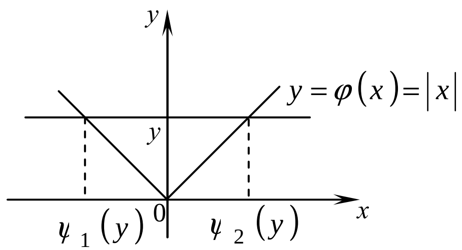

Рис. 4.7. Графік функціональної залежності випадкових величин *Y* та Х

З визначеного вище порядку запису маємо

$Y=\varphi(X);$	$Y=\|X\|;$
$X=\psi(Y);$	$X=\begin{cases} Y & \text{при } X>0; \\ -Y & \text{при } X<0; \end{cases}$
$\|\psi'(y)\|.$	1,

тоді з (4.4) визначимо $q(y)$, а саме:

$$q(y)=f\left[\psi_1(y)\right]\cdot|-1|+f\left[\psi_2(y)\right]\cdot|1|=f(-y)\cdot 1+f(y)\cdot 1=$$
$$=f(-y)+f(y),\quad y>0.$$

Примітка. Якщо випадкова величина X підпорядкована закону розподілу, для якого $f(-x)=f(x)$, наприклад, X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $(m_x=0;\ \sigma_x)$, то щільність розподілу модуля випадкової величини X буде визначатись за виразом

$$q(y)=2f\left[\psi(y)\right]=2f(y),\quad y>0.$$

Задача 4.8. Визначити щільність ймовірностей невипадкової функції випадкового аргументу $Y=\sin X$, якщо випадкова величина X підпорядкована рівномірному закону на інтервалі $[0;\pi]$.

Розв'язання. Функціональна залежність випадкових величин Y та X наведена на рис. 4.8.

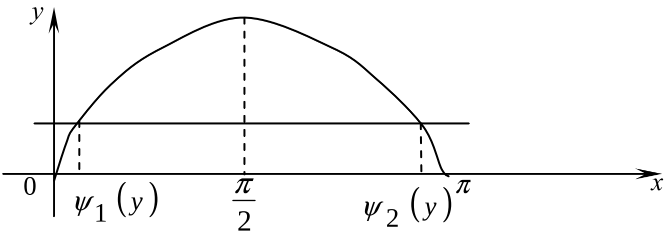

Рис. 4.8. Графік функціональної залежності випадкових величин *Y* та *X*

Маємо

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} \text{ при } x\in[0,\pi];\\ 0 \text{ при } x\notin[0,\pi],\end{cases}$$

а також

$Y=\varphi(X);$	$Y=\sin X;$
$X=\psi(Y);$	$X=\begin{cases}\arcsin Y \text{ при } x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];\\ \pi-\arcsin Y \text{ при } x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right];\end{cases}$
$\lvert\psi'(y)\rvert.$	$\begin{cases}\left\lvert\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right\rvert \text{ при } x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];\\ \left\lvert-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right\rvert \text{ при } x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right].\end{cases}$

Тоді з (4.4) визначимо щільність ймовірностей випадкової величини *Y*, а саме

$$q(y)=f[\psi_1(y)]\left|\psi_1'(y)\right|+f[\psi_2(y)]\left|\psi_2'(y)\right|=$$

$$=f(\arcsin y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+f(\pi-\arcsin y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}=$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} ,$$

тобто

$$q(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & \text{при } 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{при } y < 0, y > 1. \end{cases}$$

Задача 4.9. Визначити щільність ймовірностей випадкової величини $Y = X^2$, якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = 0$, а $c_x = 1$.

Розв'язання. За умовою задачі маємо

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} ,\ x \in (-\infty, +\infty),$$

а функціональна залежність випадкових величин Y та X подана на рис. 4.9.

Зазначимо таке:

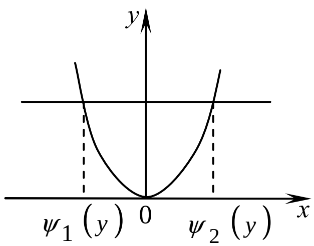

Рис. 4.9. Функціональна залежність випадкових величин Y та X

$$Y = \varphi(X); \qquad Y = X^2;$$

$$X = \psi(Y); \qquad X = \pm\sqrt{Y};$$

$$|\psi'(y)|. \qquad \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Тоді з (4.4) маємо

$$q(y) = f[\psi_1(y)]|\psi_1'(y)| + f[\psi_2(y)]|\psi_2'(y)| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(-\sqrt{y}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} .$$

Тобто

$$q(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, \quad y>0.$$

4.2. Числові характеристики функції випадкового аргументу

Розглянемо спочатку числові характеристики функції одного випадкового аргументу $Y=\varphi(X)$. *До найбільш уживаних числових характеристик функцій випадкового аргументу відносять математичне сподівання та дисперсію функцій випадкового аргументу*.

Нехай при розгляді $Y=\varphi(X)$ випадкова величина X є дискретною та закон її розподілу поданий рядом розподілу (табл. 4.5).

Таблиця 4.5

Ряд розподілу випадкової величини *X*

x_i	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
$P(X=x_i)=P_i$	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n

Тоді випадкова величина $Y=\varphi(X)$ також є дискретною, а її закон розподілу буде поданий рядом розподілу, який наведений табл. 4.6, де $P(Y=y_i)=P(\varphi(X)=\varphi(x_i))=P(X=x_i)=P_i$.

Таблиця 4.6

Ряд розподілу випадкової величини $Y=\varphi(X)$

$y_i=\varphi(x_i)$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	…	$\varphi(x_i)$	…	$\varphi(x_n)$
$P(Y=y_i)=P_i$	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n

Математичне сподівання випадкової величини $Y=\varphi(X)$ визначиться за відомим відношенням для математичного сподівання для дискретної випадкової величини, а саме

$$M[Y]=M[\varphi(X)]=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)P_i\ . \tag{4.5}$$

Якщо випадкова величина X є неперервною, то область її можливих значень $(-\infty;+\infty)$ розіб’ємо на інтервали $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$

та розглянемо

$$P\left(x_{i-1} < X < x_i\right) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = f(\xi_i)\Delta x_i\,, \quad \xi_i \in \left(x_{i-1}, x_i\right).$$

Тоді

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\xi_i\right) f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$$

визначає інтегральну суму, яка при $n - \infty$ буде відповідати тому, що $\Delta x_i - 0$, і дозволяє визначити вираз для математичного сподівання функції випадкового неперервного аргументу $Y = \varphi\left(X\right)$, а саме:

$$M(Y) = M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\,dx\,. \tag{4.6}$$

Виходячи з означення дисперсії випадкової величини, тобто з того, що

$$D(Y) = D[\varphi(X)] = M\left\{[\varphi(X) - M[\varphi(X)]]^2\right\},$$

та з відомих співвідношень для математичних сподівань (4.5) і (4.6), маємо

$$D[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \{\varphi(x_i) - M[\varphi(X)]\}^2 P_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi^2(x_i) P_i - \{M[\varphi(X)]\}^2\,, \tag{4.7}$$

якщо випадкова величина X є дискретною, та

$$D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(x) - M[\varphi(X)]\}^2 f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) f(x)\,dx - \{M[\varphi(X)]\}^2\,, \tag{4.8}$$

якщо випадкова величина X є неперервною.

Невипадкова функція випадкової величини $Y = \varphi\left(X\right)$ за своїм означенням є випадковою величиною, тому що, і як відзначалось раніше, в загальному випадку числовими характеристиками $Y = \varphi\left(X\right)$ є початкові та центральні моменти всіх порядків. Якщо $Y=\varphi\left(X\right)$ є дискретною випадковою величиною, то початковий момент s-го порядку визначається з виразу

$$\alpha_s=\sum_{k=1}^{n}\varphi^s\left(x_k\right)P_k\ , \tag{4.9}$$

де $\varphi\left(x_k\right)$ – k-те можливе значення дискретної випадкової величини $\varphi\left(X\right)$;

$P_k=P\{\varphi\left(X\right)=\varphi\left(x_k\right)\}$ – імовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина $\varphi\left(X\right)$ прийме своє можливе значення рівним $\varphi\left(x_k\right)$.

Якщо $\varphi\left(X\right)$ – неперервна випадкова величина, то

$$\alpha_s=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^s\left(x\right)f\left(x\right)dx\,, \tag{4.10}$$

де $\varphi\left(x\right)$ – можливе значення неперервної випадкової величини $\varphi\left(X\right)$;

$f\left(x\right)$ – щільність ймовірностей випадкового аргументу X.

Центральний момент s-го порядку відповідно для дискретної та неперервної $Y=\varphi\left(X\right)$ визначаються з виразів

$$\mu_s=\sum_{k=1}^{n}\{\varphi\left(x_k\right)-M\left[\varphi\left(X\right)\right]\}^s\ P_k\ ; \tag{4.11}$$

$$\mu_s=\int_{-\infty}^{\infty}\{\varphi(x)-M[\varphi(X)]\}^s f\left(x\right)dx\,. \tag{4.12}$$

Примітка 1. Якщо за відомим законом розподілу випадкової величини X буде, як це визначено в 4.1, визначений закон розподілу $Y=\varphi\left(X\right)$ у вигляді ряду розподілу в тому разі, коли функція випадкового аргументу є дискретною випадковою величиною, чи у вигляді щільності ймовірностей в тому разі, коли функція випадкового аргументу є неперервною випадковою величиною, то початкові та центральні моменти визначаються з виразів вигляду

$$\left.\begin{aligned}\alpha_s&=\sum_{k=1}^{n}y_k^s P_k\ ;\\ \mu_s&=\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-m_y\right)^s P_k\ ,\end{aligned}\right| \tag{4.13}$$

коли $Y = \varphi\left(X\right)$ є дискретною випадковою величиною, та

$$\left.\begin{aligned}\alpha_s &= \int_{-\infty}^{\infty} y^s q(y)\, dy\,;\\ \mu_s &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - m_y\right)^s q(y)\, dy\,,\end{aligned}\right| \tag{4.14}$$

коли $Y = \varphi\left(X\right)$ є неперервною випадковою величиною.

Примітка 2. Якщо розглядається невипадкова функція багатьох випадкових величин, тобто якщо $Y = \varphi\left(X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n\right)$, то

$$M[Y] = M\left[\varphi\left(X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n\right)\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)\times$$

$$\times f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)\prod_{i=1}^{n} dx_i\,; \tag{4.15}$$

$$D[Y] = D\left[\varphi\left(X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n\right)\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\varphi\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) -\right.$$

$$\left. - M\left[\varphi\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)\right]\right\}^2 f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)\prod_{i=1}^{n} dx_i\,, \tag{4.16}$$

де $f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)$ – щільність ймовірностей системи випадкових величин $\left\{X_i\right\}, i = \overline{1,n}$.

4.3. Властивості й теореми щодо математичного сподівання випадкових величин

Для математичного сподівання випадкових величин вірні такі властивості й теореми.

Властивість 1. *Математичним сподіванням невипадкової величини є сама невипадкова величина, тобто*

$$M\left[C\right]=C. \tag{4.17}$$

Доведення. Дійсно, за означенням математичним сподіванням випадкової величини є невипадкова величина, відносно якої групуються всі можливі значення випадкової величини, а можливим значенням невипадкової величини є вона сама, тому й точкою, відносно якої буде групуватись сама випадкова величина є вона сама, тобто невипадкова величина.

Властивість 2. *Математичне сподівання добутку невипадкової величини на випадкову величину дорівнює добутку невипадкової величини на математичне сподівання випадкової величини, тобто*

$$M\left[CX\right]=CM\left[X\right]. \tag{4.18}$$

Доведення. Властивість 2 випливає з того, що невипадкова величина, яка є сталою при даному розгляді та яка входить до кожного доданка, виноситься за дужки при додаванні *n* доданків. Такий запис маємо при розгляді дискретної випадкової величини. Кажуть, що стала виноситься за символ суми. Якщо маємо запис математичного сподівання неперервної випадкової величини $Y = CX$, то стала *C* виноситься за символ інтеграла, а саме

$$M\left[Y=\varphi(X)\right]=M\left[Y=CX\right]=\int_{-\infty}^{\infty} C\,x\,f(x)\,dx=$$

$$=C\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx=CM\left[X\right].$$

Теорема 1. *Математичне сподівання суми випадкових величин* $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$ *дорівнює сумі їх математичних сподівань, тобто*

$$M\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}M\left[X_i\right]. \tag{4.19}$$

Доведення. Нехай розглядаються дискретні випадкові величини *X* і *Y* та відомий закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $\{X,Y\}$, який поданий у вигляді матриці розподілу $\left\|P_{ij}\right\|, i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$, де $P_{ij}=P\left(X=x_i, Y=y_j\right)$. Нас цікавить $M\left[Z\right]=M\left[X+Y\right]$. Таким чином, вводиться до розгляду дискретна двовимірна випадкова величина $\{X,Y\}$ та невипадкова функція двох випадкових величин. Маємо

$$M[Z]=M[X+Y]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i+y_j\right)P_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iP_{ij}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_jP_{ij}=\sum_{i=1}^{m}x_i\sum_{j=1}^{n}P_{ij}+\sum_{j=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{m}P_{ij}=\sum_{i=1}^{m}x_iP_i+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}y_jP_j=M[X]+M[Y].$$

Нехай розглядається функція n випадкових величин $Z=\sum_{i=1}^{n}X_i$, де $X_i, i=\overline{1,n}$ є неперервні випадкові величини, які складають n вимірну систему випадкових величин $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$, щільність ймовірностей якої має вигляд $f\left(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n\right)$. Для функції n випадкових величин $Z=\varphi\left(X_1,X_2,\dots,X_i,\dots,X_n\right)$ маємо

$$M[Z]=M\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n\right)\times$$

$$\times f\left(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n\right)\prod_{i=1}^{n}dx_i=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(x_1+x_2+\dots+x_i+\dots+x_n\right)\times$$

$$\times f\left(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n\right)\prod_{i=1}^{n}dx_i=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_1f\left(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n\right)\prod_{i=1}^{n}dx_i+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)\prod_{i=1}^{n} dx_i +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)\prod_{i=1}^{n} dx_i +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_n f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)\prod_{i=1}^{n} dx_i =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)\prod_{i=1}^{n} dx_i = \sum_{i=1}^{n} M[X_i].$$

Теорема доведена.

Слід відзначити, що при доведенні теореми обмежень щодо незалежності випадкових величин $X_i, i=\overline{1,n}$, які складають систему $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$ випадкових величин, не накладалось. Тому теорема вірна як для незалежних, так і для залежних випадкових величин $X_i, i=\overline{1,n}$.

Теорема 2. *Математичне сподівання центрованої випадкової величини дорівнює* 0, *тобто*

$$M\left[\overset{\circ}{X}\right]=0. \quad (4.20)$$

Доведення.

$$M\left[\overset{\circ}{X}\right]=M\left[\left(X-m_x\right)\right]=M[X]-M[m_x]=m_x-m_x=0,$$

де перетворення відповідають змістам теореми 1 та властивості 1.

Теорема 3. *Математичне сподівання лінійної функції n випадкових величин* $Z=\sum_{i=1}^{n}(a_i X_i + b_i)$ *дорівнює тій же лінійній функції від їх математичних сподівань, а саме*

$$M\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i X_i + b_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i M\left[X_i\right] + b_i\right). \qquad (4.21)$$

Доведення. Використовуючи твердження теореми 1 та властивостей 1 і 2, маємо

$$M[Z] = M\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i X_i + b_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} M\left[a_i X_i + b_i\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{M\left[a_i X_i\right] + M\left[b_i\right]\right\} = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i M\left[X_i\right] + b_i\right).$$

Теорема 4. *Математичне сподівання добутку двох залежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань плюс кореляційний момент, тобто*

$$M[XY] = M[X]M[Y] + R_{XY}. \qquad (4.22)$$

Доведення. Для системи двох випадкових величин $\{X, Y\}$ справедливо, що якщо випадкові величини *X* та *Y*, які складають систему, є залежними, то вони є і корельованими. Виходячи з цього, розглянемо кореляційний момент випадкових величин *X* та *Y*. За означенням кореляційного моменту та користуючись визначеними вище теоремами та властивостями математичного сподівання випадкових величин, маємо

$$R_{XY} = M\left[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\right] = M\left[(X - m_x)(Y - m_y)\right] =$$

$$= M\left[XY - m_y X - m_x Y + m_x m_y\right] = M[XY] - M\left[m_y X\right] -$$

$$- M\left[m_x Y\right] + M\left[m_x m_y\right] = M[XY] - m_x m_y,$$

звідки

$$M[XY] = M[X]M[Y] + R_{XY},$$

що й необхідно було довести.

Відомо: якщо випадкова величина *X* та *Y*, які складають систему $\{X, Y\}$, є незалежними, то $R_{XY} = 0$. Виходить, якщо випадкові величини незалежні, то

$$M[XY] = M[X]M[Y]. \qquad (4.23)$$

Співвідношення (4.23) справедливе в загальному випадку, коли розглядається добуток n незалежних випадкових величин. Тобто якщо $Z = \prod_{i=1}^{n} X_i$, то

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} M\left[X_i\right]. \qquad (4.24)$$

Доведення (4.24) полягає в такому. Нехай випадкові величини $X_i, i = \overline{1,n}$ є незалежними неперервними величинами. Тоді щільність ймовірностей системи відповідає співвідношенню вигляду

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}\left(x_i\right),$$

а

$$M\left(Z\right) = M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}\left(x_i\right) \prod_{i=1}^{n} dx_i =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{X_i}\left(x_i\right) dx_i = \prod_{i=1}^{n} M\left[X_i\right],$$

де підінтегральна функція $\prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}\left(x_i\right) = \prod_{i=1}^{n} x_i f_{X_i}\left(x_i\right)$, а отже, n-кратний невизначений інтеграл дорівнює добутку n співмножників, кожен з яких – математичне сподівання випадкових величин $X_i, i = \overline{1,n}$.

Для загального випадку, коли випадкові величини $X_i, i = \overline{1,n}$ є незалежними, теорема 4 доведена, тобто математичне сподівання їх добутку визначається співвідношення (4.24).

4.4. Властивості й теореми щодо дисперсії випадкових величин

Для дисперсії випадкових величин справедливі такі властивості й теореми.

Властивість 1. *Дисперсія невипадкової величини дорівнює нулю, тобто*

$$D[C]=0. \tag{4.25}$$

Доведення. За означенням дисперсії маємо

$$D[C]=M\left[\left(\overset{\circ}{C}\right)^2\right]=M\left[(C-M[C])^2\right]=0.$$

За своїм фізичним змістом дисперсія – це чисельна міра розсіювання можливих значень випадкової величини відносно її математичного сподівання. Оскільки невипадкова величина має одне можливе значення, яке збігається із самою невипадковою величиною, та математичне сподівання невипадкової величини також збігається з самою невипадковою величиною, то і чисельна міра розсіювання можливих значень невипадкової величини відносно її математичного сподівання дорівнює нулю. Зміст цього розуміння поданий вище у вигляді формалізованого запису.

Властивість 2. *Дисперсія невипадкової функції* $Y = CX$ *визначається за виразом*

$$D[Y]=D[CX]=C^2 D[X]. \tag{4.26}$$

Доведення. За означенням дисперсії випадкової величини маємо

$$D[Y]=D[CX]=M\left[(CX-M[CX])^2\right]=M\left[(CX-CM[X])^2\right]=$$

$$=M\left[C^2\,(X-M[X])^2\right]=C^2 M\left[(X-M[X])^2\right]=C^2 D[X].$$

Теорема 1. *Дисперсія суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій плюс два їх кореляційні моменти, тобто*

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2R_{XY}. \tag{4.27}$$

Доведення. За означенням дисперсії невипадкової функції $Z = X + Y$ маємо

$$D[Z]=D[X+Y]=M\left[((X+Y)-M[X+Y])^2\right]=$$

$$=M\left[((X-M[X])+(Y-M[Y]))^2\right]=M\left[\left(\overset{\circ}{X}+\overset{\circ}{Y}\right)^2\right]=$$

$$= M\left[\overset{o}{X}{}^{2} + 2\overset{o}{X}\overset{o}{Y} + \overset{o}{Y}{}^{2} \right] = M\left[\overset{o}{X}{}^{2} \right] + M\left[\overset{o}{Y}{}^{2} \right] + 2M\left[\overset{o}{X}\overset{o}{Y} \right] =$$

$$= D[X] + D(Y) + 2R_{XY}.$$

Розглянемо невипадкову функцію $Z = X - Y$. Визначимо дисперсію різниці двох випадкових величин:

$$D[Z] = D[X - Y] = M\left[\left((X - Y) - M[X - Y] \right)^2 \right] =$$

$$= M\left[\left((X - M[X]) - (Y - M[Y]) \right)^2 \right] = M\left[\overset{o}{X}{}^{2} - 2\overset{o}{X}\overset{o}{Y} + \overset{o}{Y}{}^{2} \right] =$$

$$= M\left[\overset{o}{X}{}^{2} \right] + M\left[\overset{o}{Y}{}^{2} \right] - 2M\left[\overset{o}{X}\overset{o}{Y} \right] == D[X] + D(Y) - 2R_{XY}.$$

Тобто якщо розглядаються невипадкові функції $Z = X \pm Y$, то

$$D[X \pm Y] = D[X] + D[Y] \pm 2R_{XY}. \qquad (4.28)$$

Якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то $R_{XY} = 0$, а це означає, що

$$D[X + Y] = D[X - Y] = D[X] + D[Y]. \qquad (4.29)$$

Розглянемо загальний випадок, коли маємо X_i, $i = \overline{1,n}$ залежних випадкових величин, які складають систему $\{X_i\}, i = \overline{1,n}$. Числовими характеристиками системи $\{X_i\}, i = \overline{1,n}$, які вважаються найбільш уживаними, є математичні сподівання випадкових величин $M[X_i], i = \overline{1,n}$ та кореляційна матриця $\left\| R_{X_i X_j} \right\|$, $i, j = \overline{1,n}$. Нас цікавить визначення дисперсії невипадкової функції n випадкових величин $Y = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$ вигляду $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$. За змістом кореляційна матриця $\left\| R_{X_i X_j} \right\|$, $i, j = \overline{1,n}$ є симетричною відносно головної діагоналі, тобто $R_{X_i X_j} = R_{X_j X_i}$, $i, j = \overline{1,n}$; а значення елементів головної діагоналі відповідають дисперсіям випадкових величин X_i, $i = \overline{1,n}$, тому що

$$R_{X_i X_i} = M\left[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_i \right] = M\left[\left(\overset{\circ}{X}_i \right)^2 \right] = D\left[X_i \right], \ i = \overline{1,n}.$$

Зазначене вище відношення для дисперсії суми двох випадкових величин (4.27) відповідає сумі елементів кореляційної матриці системи двох випадкових величин $\{X, Y\}$. Виходячи з цього, для невипадкової функції $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ будемо мати

$$D(Z) = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} R_{X_i X_j} \tag{4.30}$$

або

$$D(Z) = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \right] = \sum_{i=1}^{n} D\left[X_i \right] + 2 \sum_{i<j} R_{X_i X_j}, \tag{4.31}$$

де символ $i < j$ означає, що розглядається сума кореляційних моментів для всіх попарних комбінацій випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$.

З (4.31) видно, що якщо випадкові величини X_i, $i = \overline{1,n}$ є незалежними, то

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \right] = \sum_{i=1}^{n} D\left[X_i \right]. \tag{4.32}$$

Теорема 2. *Дисперсія лінійної комбінації залежних випадкових величин* $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$, *де* a_i, $i = \overline{1,n}$ *та* b *є невипадковими величинами, визначається виразом*

$$D[Y]=D\left[\sum_{i=1}^{n}a_i X_i+b\right]=\sum_{i=1}^{n}a_i^2 D[X_i]+2\sum_{i<j}a_i a_j R_{X_i X_j} \ . \quad (4.33)$$

Доведення. Виходячи із змісту властивостей 1, 2 та теореми 1 щодо дисперсії суми випадкових величин $X_i, i=\overline{1,n}$, маємо

$$D[Y]=D\left[\sum_{i=1}^{n}a_i X_i+b\right]=D\left[\sum_{i=1}^{n}a_i X_i\right]+D[b]=\sum_{i=1}^{n}D[a_i X_i]+$$

$$+2\sum_{i<j}R_{\widehat{X}_i\widehat{X}_j}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2 D[X_i]+2\sum_{i<j}a_i a_j R_{X_i X_j},$$

де $\widehat{X}_i=a_i X_i,\ \widehat{X}_j=a_j X_j,$
а тоді

$$R_{\widehat{X}_i\widehat{X}_j}=M\Big[\big(a_i X_i-M[a_i X_i]\big)\big(a_j X_j-M[a_j X_j]\big)\Big]=$$

$$=M\big[a_i a_j\big(X_i-M[X_i]\big)\big(X_j-M[X_j]\big)\big]=$$

$$=a_i a_j M\left[\overset{\circ}{X}_i\ \overset{\circ}{X}_j\right]=a_i a_j R_{X_i X_j}\ .$$

З (4.33) випливає, що якщо випадкові величини $X_i, i=\overline{1,n}$ є незалежними, то

$$D\left[\sum_{i=1}^{n}a_i X_i+b\right]=D\left[\sum_{i=1}^{n}a_i X_i\right]. \qquad (4.34)$$

Теорема 3. *Якщо випадкові величини X та Y є незалежними то дисперсія їх добутку визначається з виразу*

$$D[XY]=D[X]D[Y]+m_x^2 D[Y]+m_y^2 D[X]. \qquad (4.35)$$

Доведення. Розглянемо невипадкову функцію двох випадкових величин $Z=XY$. За означенням дисперсії маємо

$$D[Z]=D[XY]=M\left[(YX-M[XY])^{2}\right]=M\left[\left(XY-m_x m_y\right)^{2}\right]=$$
$$=M\left[X^2Y^2-2XYm_x m_y+m_x^2m_y^2\right]=M\left[X^2\right]M\left[Y^2\right]-$$
$$-2m_x m_y M[X]M[Y]+M\left[m_x^2m_y^2\right]=\left[D[X]+m_x^2\right]\left[D[Y]+m_y^2\right]-$$
$$-m_x^2m_y^2=D[X]\,D[Y]+D[X]m_y^2+D[Y]m_x^2+m_x^2m_y^2-m_x^2m_y^2=$$
$$=D[X]\,D[Y]+m_x^2D[Y]+m_y^2D[X],$$

де $M[X^2]=D[X]+m_x^2$ та $M[Y^2]=D[Y]+m_y^2$, оскільки другий центральний момент випадкової величини, наприклад *X*, – це дисперсія випадкової величини, тобто $\mu_2=D\left[X\right]$, а також відомо, що $\mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2$, де $\alpha_2=M[X^2]$, $\alpha_1=M\left[X\right]$ – початкові моменти випадкової величини *X* другого та першого порядку.

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то дисперсія добутку центрованих випадкових величин* $\overset{\circ}{X}$ *та* $\overset{\circ}{Y}$ *є добутком їх дисперсій, тобто*

$$D\left[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\right]=D\left[\overset{\circ}{X}\right]D\left[\overset{\circ}{Y}\right]. \qquad (4.36)$$

Доведення. Для величин *X* та *Y* випадок їх залежності є спільним по відношенню до випадку, коли випадкові величини *X* та *Y* розглядаються незалежними. Відомо, що $\overset{\circ}{X}=X-M\left[X\right]$, $\overset{\circ}{Y}=Y-M\left[Y\right]$. Оскільки центровані випадкові величини $\overset{\circ}{X}$ та $\overset{\circ}{Y}$ означаються як невипадкові лінійні функції відповідно випадкових величин *X* та *Y*, то залежним випадковим величинам *X* та *Y* будуть відповідати залежні випадкові величини $\overset{\circ}{X}$ та $\overset{\circ}{Y}$, а незалежним випадковим величинам *X* та *Y* – незалежні $\overset{\circ}{X}$ та $\overset{\circ}{Y}$. Тому для доведення зазначеної теореми 4 будемо виходити зі змісту теореми 3, тобто співвідношення (4.35).

Тоді маємо

$$D\left[\overset{\circ}{X}\,\overset{\circ}{Y}\right] = D\left[\overset{\circ}{X}\right]D\left[\overset{\circ}{Y}\right] + D\left[\overset{\circ}{X}\right]\left\{M\left[\overset{\circ}{Y}\right]\right\}^2 + D\left[\overset{\circ}{Y}\right]\left\{M\left[\overset{\circ}{X}\right]\right\}^2 =$$

$$= D\left[\overset{\circ}{X}\right]D\left[\overset{\circ}{Y}\right],$$

оскільки $M\left[\overset{\circ}{Y}\right] = M\left[\overset{\circ}{X}\right] = 0$.

Задача 4.10. Випадкові величини X та Y відповідають за змістом елементарним похибкам, які виникають на вході технічного приладу військового призначення. Випадкові величини мають числові характеристики $m_x = -2$; $m_y = 4$; $c_x = 2$; $\sigma_y = 3$; $r_{xy} = -\frac{1}{2}$. Похибка на виході технічного приладу є невипадковою функцією двох випадкових величин і визначається з виразу

$$Z = 3X^2 - 2XY + Y^2 - 3.$$

Визначити математичне сподівання похибки на виході технічного приладу.

Розв'язання.

$$M[Z] = M\left[3X^2 - 2XY + Y^2 - 3\right] = M\left[3X^2\right] - M[2XY] +$$

$$+ M\left[Y^2\right] - M[3] = 3M\left[X^2\right] - 2M[XY] + M\left[Y^2\right] - 3 =$$

$$= 3\left[D[X] + m_x^2\right] - 2\left[m_x m_y + R_{XY}\right] + \left[D[Y] + m_y^2\right] - 3 =$$

$$= 3\left[2^2 + (-2)^2\right] - 2\left[(-2)\cdot 4 + r_{xy}\sigma_x\sigma_y\right] + \left[3^2 + 4^2\right] - 3 =$$

$$= 3(4+4) - 2(-8 + (-0{,}5)\cdot 2\cdot 3) + 9 + 16 - 3 = 68.$$

Математичне сподівання випадкової величини Z – похибки на виході технічного приладу – становить $M[Z] = 68$.

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. Які задачі можуть бути поставлені та розв'язані при описі масових і випадкових явищ природи за наявності невипадкової функції випадкових аргументів і закону розподілу випадкових аргументів?

2. Чи може бути визначений закон розподілу невипадкової функції випадкових аргументів за наявності невипадкової функції випадкових аргументів та числових характеристик випадкових аргументів?

3. Якого змісту задачі при описі масових і випадкових явищ природи можуть бути поставлені та розв'язані за наявності невипадкової функції випадкових аргументів і числових характеристик випадкових аргументів?

4. Доведіть, що закон розподілу невипадкової функції випадкового аргументу буде нормальним, якщо закон розподілу аргументу є нормальним, а функціональна залежність $Y = \varphi(X)$ є лінійною.

5. Доведіть, що дисперсія суми та різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій.

6. Визначте теореми й властивості математичного сподівання та дисперсії випадкових величин.

Глава 5
ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ФУНКЦІЇ

5.1. Поняття характеристичної функції та її властивості

Характеристичною функцією випадкової величини X *називається математичне сподівання комплексної випадкової величини* $U = e^{itX}$*, тобто*

$$g_x(t) = M[U] = M\left[e^{itX}\right], \tag{5.1}$$

де X – дійсна випадкова величина, t – параметр, а $i = \sqrt{-1}$.

Характеристична функція $g_x(t)$ розмірності не має, параметр t має розмірність, зворотну розмірності випадкової величини X, тому що комплексна випадкова величина U являє собою одиничний радіус-вектор з випадковим кутом tX на комплексній площині. Математичним сподіванням $M[U]$ також є одиничний радіус-вектором, але з невипадковим кутом на комплексній площині.

Якщо X – дискретна випадкова величина, що приймає свої можливі значення x_k при $k = \overline{1,n}$, а $P(X = x_k) = P_k$ при $k = \overline{1,n}$ – відповідні їм ймовірності, то характеристична функція визначається із співвідношенням вигляду

$$g_x(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{itx_k} P_k, \tag{5.2}$$

де e^{itx_k} – не що інше, як можливі значення комплексної випадкової величини e^{itX} .

Якщо X – неперервна випадкова величина та її закон розподілу заданий щільністю ймовірностей $f(x)$, то характеристична функція визначається співвідношенням вигляду

$$g_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx . \tag{5.3}$$

Як видно з (5.3) характеристична функція є перетворенням Фур'є функції щільності ймовірностей неперервної випадкової величини і однозначно визначається цією щільністю ймовірностей. А це означає, що щільність ймовірностей однозначно визначається через характеристичну функцію $g_X(t)$ зворотним перетворенням Фур'є, а саме

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g_X(t)\,dt . \tag{5.4}$$

Зауваження. Характеристичні функції були запропоновані О. М. Ляпуновим (1857 – 1918) при доведенні ним сформульованої граничної теореми, яка на теперішній час носить назву центральної граничної теореми теорії ймовірностей. Як видно з (5.4), характеристична функція, як і функція розподілу та щільність ймовірностей, також є формою вираження закону розподілу випадкової величини, тому вона може використовуватись при вирішенні будь-яких завдань стохастичної природи. Тому характеристичні функції визначають як математичний апарат.

Доведемо основні властивості характеристичної функції.

1. Характеристичною функцією невипадкової величини a є комплексне число e^{ita}.

Маємо, що математичне сподівання сталої є стала, тобто

$$g_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ita} f(x)dx = e^{ita} . \tag{5.5}$$

2. Якщо параметр $t=0$, то

$$g(t=0)=1. \tag{5.6}$$

Дійсно,

$$g_x(t=0)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

що випливає з властивості нормування щільності ймовірностей випадкової величини X.

3. Для всіх значень параметра t характеристична функція за модулем не перевищує одиницю, тобто

$$|g_x(t)| \le 1. \tag{5.7}$$

Маємо,

$$|g_x(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{itx} f(x) \right|$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{itx} \right| | f(x) | dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot f(x)dx = 1,$$

оскільки $\left| e^{itx} \right| = 1$ та функція щільності ймовірностей $f(x)$ за властивістю є невід'ємною.

Ця властивість дозволяє стверджувати, що характеристична функція визначена для всякої випадкової величини.

4. Якщо між випадковими величинами X і Y має місце лінійна залежність, тобто $Y = aX + b$, де a і b є невипадкові величини, то

$$g_y(t) = e^{itb} g_x(at). \tag{5.8}$$

Дійсно, маємо

$$g_y(t) = M\left[e^{itY} \right] = M\left[e^{it(aX+b)} \right] = M\left[e^{itb} e^{i(at)X} \right] = e^{itb} g_x(at).$$

5. Якщо випадкові величини X_1, X_2, ..., X_k, ..., X_n є незалежними, то характеристична функція їх суми дорівнює добутку їх характеристичних функцій, тобто якщо

$$Y = \sum_{k=1}^{n} X_k ,$$

то

$$g_y(t) = \prod_{k=1}^{n} g_{x_k}(t). \tag{5.9}$$

Дійсно,

$$g_y(t) = M\left[e^{itY}\right] = M\left[e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k}\right] = M\left[\prod_{k=1}^{n} e^{itX_k}\right] =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} M\left[e^{itX_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} g_{x_k}(t).$$

6. Якщо s-й початковий момент випадкової величини X *існує, тобто якщо* $|\alpha_s| = M\left[|X|^s\right] < \infty,\ s \geq 1$, *то є визначеною неперервна s-та похідна по* t *характеристичної функції випадкової величини* X *та*

$$g_x^{(s)}(t=0) = i^s \alpha_s . \tag{5.10}$$

Оскільки

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx} f(x)dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|ixe^{itx} f(x)\right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |i||x|\left|e^{itx}\right||f(x)|dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx = |\alpha_s| \langle \infty ,$$

то $\int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx} f(x)dx$ рівномірно збігається відносно t і тому можливе диференціювання під знаком інтегралу.

Маємо

$$g'_x(t) = i\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx} f(x)dx\,,$$

якщо $\lambda < s$, то

$$g_x^{(\lambda)}(t) = i^{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} x^{\lambda}e^{itx} f(x)dx\,,$$

а оскільки інтеграл у цьому виразі рівномірно збігається, то

$$g_x^{(\lambda+1)}(t) = i^{\lambda+1}\int_{-\infty}^{\infty} x^{\lambda+1}e^{itx} f(x)dx$$

та $$g_x^{(\lambda+1)}(t=0) = i^{\lambda+1}\alpha_{\lambda+1}\,,$$

що і визначає справедливість (5.10).

7. Комплексно сполучена характеристична функція випадкової величини X *є характеристичною функцією комплексно сполученої випадкової величини, тобто*

$$\overline{g_x(t)} = g_x(-t). \tag{5.11}$$

Дійсно,

$$\overline{g_x(t)} = \overline{M[e^{itX}]} = M\left[e^{-itX}\right] = M\left[e^{i(-t)X}\right] = g_x(-t).$$

Співвідношення (5.10) дозволяє визначити основні числові характеристики випадкової величини X, а саме математичне сподівання та дисперсію X.

Із (5.10) маємо, що початковий момент випадкової величини X s-го порядку визначається як

$$\alpha_s = \frac{g_x^{(s)}(t=0)}{i^s} = \frac{(-i)^s\, g_x^{(s)}(t=0)}{(-i)^s\, i^s} = (-i)^s\, g_x^{(s)}(t=0).$$

Тоді

$$M[x]=\alpha_1=-ig'_x(t=0), \qquad (5.12)$$

а
$$D[x]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - m_x^2 = \alpha_2-\alpha_1^2 \;;$$

$$D[x]=(-i)^2\, g''_x\,(t=0)-[-ig'_x\,(t=0)]^2 =$$

$$=-g''_x\,(t=0)+[g'_x\,(t=0)]^2\;;$$

$$D[x]=[g'(t=0)]^2-g''_x(t=0). \qquad (5.13)$$

5.2. Характеристичні функції основних одновимірних законів розподілу

Розглянемо характеристичну функцію випадкової величини, яка підпорядкована біноміальному закону розподілу. Відомо, що випадкова величина X підпорядкована біноміальному закону розподілу, якщо в кожному з n незалежних випробувань $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p=q$. Тоді у відповідності до (5.2) маємо

$$g_x(t)=e^{it\cdot 1}\cdot p+e^{it\cdot 0}q=e^{it}p+1-p=1+p\left(e^{it}-1\right),$$

тобто

$$g_x(t)=1+p\left(e^{it}-1\right). \qquad (5.14)$$

Задача 5.1. Визначити характеристичну функцію випадкової величини X – кількості появи події A в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність появи події A дорівнює p.

Розв'язання. Введемо до розгляду випадкову величину X_k – кількість появи події A в k-му випробуванні. Можливі значення випадкової величини X_k є $x_{k_1}=1$, $x_{k_2}=0$. Характеристична функція випадкової величини X_k згідно з (5.14) має вигляд

$$g_{x_k}(t)=1+p\left(e^{it}-1\right).$$

Якщо X – випадкова величина кількості появи події A в n незалежних випробуваннях, то

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k ,$$

а згідно з (5.9) маємо

$$g_x(t) = \prod_{k=1}^{n} g_{x_k}(t) = \left[1 + p\left(e^{it} - 1\right)\right]^n .$$

Отже,

$$g_x(t) = \left[1 + p\left(e^{it} - 1\right)\right]^n .$$

Розглянемо визначення характеристичної функції закону розподілу Пуассона.

Відомо, що випадкова величина X підпорядкована закону розподілу Пуассона, якщо

$$P\left(X = x; a\right) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}, \;\; x = 0, 1, 2 \dots .$$

Тоді

$$g_x(t) = M\left[e^{itX}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \frac{a^x}{x!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(ae^{it}\right)^x}{x!} = e^{-a} e^{ae^{it}} = e^{a\left(e^{it}-1\right)},$$

оскільки

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

Отже, для випадкової величини X, яка підпорядкована закону розподілу Пуассона,

$$g_x(t) = e^{a\left(e^{it}-1\right)}. \qquad (5.15)$$

Задача 5.2. Довести, що якщо випадкові величини X_1, X_2, …, X_k, …, X_n є незалежними та підпорядкованими закону Пуассона з параметрами a_k, де $k=\overline{1,n}$, то випадкова величина

$$Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

також підпорядкована закону Пуассона з параметром $\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Розв'язання. Згідно з (5.9) та (5.15) маємо

$$g_y(t) = \prod_{k=1}^{n} g_{x_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{a_k\left(e^{it}-1\right)} = e^{\left(e^{it}-1\right)\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} .$$

Отриманий результат має вигляд (5.15), тому доведено, що випадкова величина Y також підпорядкована закону розподілу Пуассона.

Нехай випадкова величина X підпорядкована рівномірному неперервному закону розподілу на інтервалі (a,b), її щільність ймовірностей має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x \in (a,b); \\ 0 & \text{при } x \notin (a,b). \end{cases}$$

Тоді характеристична функція випадкової величини X визначається як

$$g_x(t) = M\left[e^{itX}\right] = \int_a^b e^{itx}\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{it}\int_{ita}^{itb} e^{itx}\,d(itx) =$$

$$= \frac{1}{it(b-a)}\left(e^{itb} - e^{ita}\right),$$

тобто

$$g_x(t) = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}. \tag{5.16}$$

Якщо випадкова величина X підпорядкована рівномірному неперервному закону розподілу на інтервалі $(-a,a)$, то

$$g_x(t) = \frac{1}{at}\cdot\frac{e^{ita} - e^{-ita}}{2i} = \frac{\sin at}{at}, \tag{5.17}$$

оскільки $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ є відомою формулою Ейлера.

Розглянемо визначення характеристичної функції для випадкової величини X, яка підпорядкована експоненціальному (показниковому) закону розподілу. Випадкова величина X підпорядкована експоненціальному закону розподілу, якщо щільність ймовірностей визначається з виразу

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, t \ge 0.$$

За визначенням характеристичної функції (5.3) маємо

$$g_x(t) = \int_0^\infty e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-x(\lambda - it)} dx = -\frac{\lambda}{\lambda - it} e^{-x(\lambda - it)} \Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - it} = \frac{\lambda(\lambda + it)}{\lambda^2 + t^2},$$

оскільки добуток комплексно сполучених чисел дорівнює квадрату модуля комплексного числа $\lambda - it$.

Отже, якщо випадкова величина X підпорядкована експоненціальному закону розподілу, то її характеристична функція має вигляд

$$g_x(t) = \frac{\lambda(\lambda + it)}{\lambda^2 + t^2}. \tag{5.18}$$

Задача 5.3. Відома характеристична функція у вигляді (5.18). Необхідно визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

Розв'язання. Згідно з (5.12) маємо

$$M[X] = -ig'_x(t=0) = -i\left(\frac{\lambda(\lambda + it)}{\lambda^2 + t^2}\right)'_t \Bigg|_{t=0} =$$

$$= -i\lambda \frac{i\left(\lambda^2 + t^2\right) - (\lambda + it)\cdot 2t}{\left(\lambda^2 + t^2\right)^2}\Bigg|_{t=0} = -\frac{i\lambda \cdot \lambda^2}{\lambda^4} = \frac{1}{\lambda}; \quad M[X] = \frac{1}{\lambda},$$

а згідно з (5.13) маємо

$$D[X]=[g'(t=0)]^2-g_x{}''(t=0)=\left[\left.\left(\frac{\lambda(\lambda+it)}{\lambda^2+t^2}\right)'_t\right|_{t=0}\right]^2-$$

$$-\left.\left(\frac{\lambda(\lambda+it)}{\lambda^2+t^2}\right)''_t\right|_{t=0}=\left(\frac{i}{\lambda}\right)^2-\left.\left(\lambda\frac{i(\lambda^2+t^2)-(\lambda+it)\cdot 2t}{(\lambda^2+t^2)^2}\right)'_t\right|_{t=0}=$$

$$=-\frac{1}{\lambda^2}-\lambda\left(-\frac{2}{\lambda^3}\right)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Отже , $D[X]=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Таким чином, ми отримали відомі нам раніше результати щодо математичного сподівання та дисперсії випадкової величини X, яка підпорядкована експоненціальному закону розподілу. Це на прикладі розв'язання задачі 5.3 підтверджує те, що характеристичну функцію випадкової величини слід розглядати як форму запису закону розподілу випадкової величини.

Якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, тобто

$$f(x;m_x,\sigma_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

то щодо визначення її характеристичної функції маємо таке:

$$g_x(t)=M\left[e^{itX}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx.$$

Проведемо заміну змінної, а саме введемо $z = \dfrac{x - m_x}{\sigma_x} - it\sigma_x$ та $x = z\sigma_x + it\sigma_x^2 + m_x$, $dx = \sigma_x dz$.

Тоді

$$g_x(t) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma_x z - t^2\sigma_x^2 + im_x t - \frac{z^2}{2} - it\sigma_x z - \frac{i^2 t^2 \sigma_x^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_x t - \frac{t^2\sigma_x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{im_x t - \frac{t^2\sigma_x^2}{2}},$$

оскільки інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$ є інтегралом Пуассона, тобто

$$g_x(t) = e^{im_x t - \frac{t^2\sigma_x^2}{2}}. \tag{5.19}$$

З (5.19) видно, що якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = 0$, $\sigma_x = 1$, то

$$g_x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{5.20}$$

У відповідності до (5.8) випадкова величина

$$Y = aX + b,$$

де X – випадкова величина, яка підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = 0$, $\sigma_x = 1$, a та b – невипадкові величини, має таку характеристичну функцію:

$$g_y(t) = e^{itb} g_x(at) = e^{itb} e^{-\frac{a^2t^2}{2}} = e^{itb - \frac{a^2t^2}{2}},$$

тобто

$$g_y(t) = e^{itb - \frac{a^2t^2}{2}}. \tag{5.21}$$

Задача 5.4. Довести, що якщо випадкові величини X_1 та X_2 є незалежними та мають нормальні закони розподілу з параметрами m_{x_1}, σ_{x_1}, m_{x_2}, σ_{x_2}, то випадкова величина $Y = X_1 + X_2$ також має нормальний закон розподілу з $m_y = m_{x_1} + m_{x_2}$, $\sigma_y = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}$.

Розв'язання. Згідно з (5.19) випадкові величини X_1 та X_2 мають характеристичні функції

$$g_{x_1}(t) = e^{im_{x_1}t - \frac{\sigma_{x_1}^2 t^2}{2}} \quad \text{та} \quad g_{x_2}(t) = e^{im_{x_2}t - \frac{\sigma_{x_2}^2 t^2}{2}},$$

а у відповідності з (5.9) маємо

$$g_y(t) = g_{x_1}(t) \cdot g_{x_2}(t) = e^{im_{x_1}t - \frac{\sigma_{x_1}^2 t^2}{2}} \cdot e^{im_{x_2}t - \frac{\sigma_{x_2}^2 t^2}{2}} =$$

$$= e^{i\left(m_{x_1} + m_{x_2}\right) t - \frac{\left(\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2\right) t^2}{2}}.$$

Якщо порівняти цей результат з (5.19), то можна стверджувати, що випадкова величина $Y = X_1 + X_2$ також підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_y = m_{x_1} + m_{x_2}$, $\sigma_y = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}$.

Задача 5.5. Випадкова величина X підпорядкована закону розподілу Пуассона з параметром λ. Необхідно довести, що граничним законом розподілу при $\lambda \to \infty$ для випадкової величини

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

є нормальний закон розподілу з параметрами $m_z = 0$, $\sigma_z = 1$.

Розв'язання. Для випадкової величини X характеристична функція має вигляд

$$g_x(t) = e^{\lambda\left(e^{it} - 1\right)}.$$

Випадкова величина Z лінійно виражена через X, а саме

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X - \sqrt{\lambda}.$$

Виходячи з властивості характеристичної функції, а саме, якщо

$$Z = aX + b,$$

то

$$g_z(t) = e^{itb} g_x(at),$$

будемо мати

$$g_z(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}} e^{\lambda\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1\right)} =$$

$$= e^{-it\sqrt{\lambda}} \cdot e^{\lambda\left[\left(1 + \frac{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}{1!} + \frac{\left(i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)^2}{2!} + \frac{\left(i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)^3}{3!} + \ldots\right) - 1\right]} =$$

$$= e^{-it\sqrt{\lambda}} e^{\frac{it\lambda}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2\lambda}{2\lambda} - \frac{it\lambda}{6\lambda^{3/2}} + \frac{t^4\lambda}{24\lambda^3} + \ldots} = e^{-it\sqrt{\lambda} + it\sqrt{\lambda} - \frac{t^2}{2} - \frac{it}{6\sqrt{\lambda}} + \frac{t^4}{24\lambda^2} + \ldots} =$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{it}{6\sqrt{\lambda}} + \frac{t^4}{24\lambda^2} + \ldots}.$$

Тоді

$$\lim_{\lambda \to \infty} g_z(t) = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{it}{6\sqrt{\lambda}} + \frac{t^4}{24\lambda^2} + \ldots} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Цей результат відповідає (5.20), що свідчить про те, що зазначена в умові задачі випадкова величина Z при $\lambda \to \infty$ має нормальний закон розподілу з параметрами $m_z = 0$, $\sigma_z = 1$. При практичному використанні це означає, що якщо випадкова величина X підпорядкована закону Пуассона з достатньо великим значенням параметра λ, то щодо випадкової величини Z при вирішенні завдань можна користуватися нормальним законом розподілу з параметрами $m_z = 0$, $\sigma_z = 1$.

5.3. Характеристичні функції багатовимірних випадкових величин

Якщо розглядається система двох випадкових величини $\{X, Y\}$, то під характеристичною функцією розуміють

$$g(t_1, t_2) = M\left[e^{it_1X + it_2Y}\right]. \qquad (5.22)$$

Для системи дискретних випадкових величин маємо

$$g(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} e^{it_1x_k + it_2y_j} \cdot P_{kj}\,, \qquad (5.23)$$

а для системи неперервних випадкових величин маємо

$$g(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_1x + it_2y} f(x, y)dxdy\,. \qquad (5.24)$$

Характеристична функція n-вимірної системи випадкових величин $\{X_k\}$, де $k = \overline{1,n}$, визначається як

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_n) = M\left[e^{i\sum_{k=1}^{n} t_k X_k}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sum_{k=1}^{n} t_k x_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n\,. \qquad (5.25)$$

Якщо відома характеристична функція системи (5.25), то може бути визначена щільність ймовірностей системи за виразом

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sum_{k=1}^{n} t_k x_k} g(t_1, \ldots, t_n)dt_1 \ldots dt_n\,. \qquad (5.26)$$

Основними властивостями характеристичної функції системи випадкових величин $\{X_k\}$, $k=\overline{1,n}$ є наступні.

1. Характеристична функція системи при всіх $t_k=0$, $k=\overline{1,n}$ *дорівнює одиниці, тобто*

$$g(t_1=0,\ t_2=0,\ \ldots,\ t_n=0)=1.$$

2. Модуль характеристичної функції системи не перевищує одиниці, тобто

$$\left|g(t_1,t_2,\ldots,t_n)\right|\le 1.$$

3. Якщо відома характеристична функція $g(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ *системи* $\{X_k\}$, $k=\overline{1,n}$, *то може бути визначена характеристична функція будь-якої підсистеми* $s\le n$ *випадкових величин. Для цього необхідно в характеристичній функції* $g(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ *прийняти* $t_k=0$ *для всіх* $k=\overline{1,n}$, *за винятком* $k=s$. *Так, наприклад,*

$$g(t_1)=g(t_1,t_2=0,t_3=0,\ldots,t_n=0);$$

$$g(t_3,t_5)=g(t_1=0,t_2=0,t_3,t_4=0,t_5,t_6=0,\ldots,t_n=0).$$

4. Якщо випадкові величини X_k, *де* $k=\overline{1,n}$, *які складають систему* $\{X_k\}$, $k=\overline{1,n}$, *є незалежними, то*

$$g(t_1,t_2,\ldots,t_n)=g(t_1)\cdot g(t_2)\cdot\ldots\cdot g(t_n).$$

5. За наявності характеристичної функції $g(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ *системи випадкових величин* $\{X_k\}$, $k=\overline{1,n}$ *можуть бути визначені початкові моменти довільних порядків, а саме*

$$M\left[X_1^{k_1},X_2^{k_2},\ldots,X_n^{k_n}\right]=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n=$$

$$=(-i)^{\sum\limits_{j=1}^{n}k_j}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots k_n}g(t_1,t_2,\ldots,t_n)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\ldots\partial t_n^{k_n}}\right]\Bigg|_{t_1=t_2=\ldots t_n=0}.$$

6. Якщо $g(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ є характеристичною функцією n-вимірної системи випадкових величин $\{X_k\}$ при $k=\overline{1,n}$, то характеристична функція n-вимірної системи випадкових величин $Z=\{a_kX_k+b_k\}$, де $k=\overline{1,n}$, a_k та b_k є невипадковими величинами, визначається таким виразом:

$$g_z(t_1,t_2,\ldots,t_n)=e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}b_kt_k}g(a_1t_1,a_2t_2,\ldots,a_nt_n).$$

Дійсно, маємо

$$M\left[e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}t_k(a_kX_k+b_k)}\right]=M\left[e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}t_kb_k}e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}t_k(a_kX_k)}\right]=$$

$$=e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}b_kt_k}M\left[e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}(t_ka_k)X_k}\right]=e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}b_kt_k}g(a_1t_1,a_2t_2,\ldots,a_nt_n).$$

Задача 5.6. Довести, що характеристична функція системи двох незалежних випадкових величин, яка підпорядкована нормальному двовимірному закону розподілу з параметрами m_x, m_y, σ_x, σ_y, є добутком характеристичних функцій випадкових величин X та Y.

Розв'язання. Якщо система випадкових величин $\{X,Y\}$ підпорядкована нормальному закону розподілу та складається з незалежних випадкових величин, які мають параметри m_x, m_y, σ_x, σ_y, то щільність розподілу системи $\{X,Y\}$ визначається виразом вигляду

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \cdot e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]}.$$

Тоді за визначенням характеристичної функції для системи двох випадкових величин (5.24) маємо

$$g(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_1x+it_2y} \cdot \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \cdot e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]} dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_1x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot e^{it_2y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} dxdy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_1x} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_2y} \cdot e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} dy =$$

$$= e^{im_xt_1 - \frac{\sigma_x^2t_1^2}{2}} \cdot e^{im_yt_2 - \frac{\sigma_y^2t_2^2}{2}} = g_x(t_1) \cdot g_y(t_2) =$$

$$= e^{i(m_xt_1 + m_yt_2) - \frac{1}{2}\left(\sigma_x^2t_1^2 + \sigma_y^2t_2^2\right)},$$

де використані перетворення, які були викладені вище при розгляді характеристичної функції випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу.

Тобто якщо система двох незалежних випадкових величин підпорядкована двовимірному нормальному закону розподілу з параметрами m_x, m_y, σ_x, σ_y, то характеристична функція має вигляд

$$g(t_1, t_2) = g_x(t_1) \cdot g_y(t_2) = e^{i(m_xt_1 + m_yt_2) - \frac{1}{2}\left(\sigma_x^2t_1^2 + \sigma_y^2t_2^2\right)}.$$

Зауваження 1. Розв'язання цієї задачі могло бути основане на використанні властивості 4, визначеної в цьому підрозділі.

Зауваження 2. Якщо система $\{X, Y\}$ підпорядкована нормальному двовимірному закону розподілу, а випадкові величини X та Y є залежними з параметрами m_x, m_y, σ_x, σ_y, то характеристична функція має вигляд

$$g(t_1, t_2) = e^{im_x t_1 + im_y t_2 - \frac{1}{2}\left(\sigma_x^2 t_1^2 + 2\sigma_x \sigma_y r_{xy} t_1 t_2 + \sigma_y^2 t_2^2\right)},$$

де r_{xy} – кореляційний коефіцієнт системи $\{X, Y\}$.

Якщо $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = 1$, то

$$g(t_1, t_2) = e^{-\frac{1}{2}\left(t_1^2 + 2r_{xy} t_1 t_2 + t_2^2\right)}.$$

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. Дайте визначення характеристичної функції випадкової величини.
2. Сформулюйте властивості характеристичної функції випадкової величини.
3. Запишіть співвідношення, що пов'язує характеристичну функцію випадкової величини та її початковий момент s -го порядку.
4. Запишіть вирази для характеристичної функції основних законів розподілу одновимірних випадкових величин.
5. Дайте визначення характеристичної функції системи двох та n випадкових величин.
6. Чи дозволяє характеристична функція системи n випадкових величин визначити характеристичну функцію підсистеми випадкових величин, що становить $s < n$ випадкових величин?
7. У чому полягають підстави, які дають право стверджувати, що характеристична функція випадкової величини чи системи випадкових величин є формою запису їх законів розподілу?
8. Визначте характеристичну функцію випадкової величини $Y = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k + b$, якщо випадкові величини X_k є незалежними та підпорядковані нормальним законам розподілу з параметрами m_{x_k}, σ_{x_k}.

9. Визначте характеристичну функцію нормованої випадкової величини $Y = \dfrac{X - m_x}{\sigma_x}$, якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами m_x, c_x.

10. Розглядається серія з *n* незалежних випробувань, в кожному з яких випадкова подія A може відбутися з імовірністю $P = \dfrac{\lambda}{n}$, де λ – деяке невід'ємне число. Нехай X є випадкова величина, що визначає кількість появ події A. Доведіть, що

$$\lim_{n \to \infty} P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

тобто доведіть, що граничним законом розподілу для закону розподілу Бернуллі є закон розподілу Пуассона.

Глава 6
ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

6.1. Закон великих чисел

Раніше відзначалось, що теорія ймовірностей – це розділ математики, в якому виявляються закономірності великої кількості випадкових подій. Ця закономірність проявляється в тому, що при спостереженні великої кількості випадкових подій має місце незмінність результату. Так, при спостереженні великої кількості результатів незалежних випробувань виявляється незмінність частоти випадкових подій $\widetilde{P}^*(A)$. Оскільки при повторенні незалежних і рівноймовірних випробувань випадкова величина X_i – кількість появи події *A* при *i*-му випробуванні – може приймати тільки два значення (один – коли подія *A* настала, та нуль – коли подія *A* не настала), то частота події $\widetilde{P}^*(A)$ збігається з середнім значенням випадкових величин X_i при *n* випробуваннях. Тоді при великій кількості випробувань спостерігається незмінність середнього значення випадкових величин X_i. Виходить, при великій кількості випробувань *n*, які є незалежними та рівноймовірними, частота $\widetilde{P}^*(A)$ та середнє значення випадкових величин мають властивість стійкості. Ця стійкість $\widetilde{P}^*(A)$, яку трактують як статистичну стійкість, і виправдовує статистичне означення ймовірності випадкової події $\widetilde{P}^*(A)$. Статистична стійкість $\widetilde{P}^*(A)$ чи середнього значення випадкових величин

X_i становить в широкому розумінні фізичний зміст закону великих чисел, який слід тлумачити так: за достатньо великої кількості випробувань результат окремого випробування практично не впливає на середній результат. А це означає, що за достатньо великої кількості випробувань, в яких спостерігаються можливі значення випадкової величини X, їх середнє значення практично стає невипадковою величиною, оскільки результат кожного окремого досліду на нього практично не впливає.

Виходячи з такого змісту закону великих чисел, П. Л. Чебишевим у 1845 році був сформульований принцип "практичної переконливості", який полягає в тому, що якщо ймовірність деякої події достатньо мала, то слід вважати, що в окремому досліді ця подія практично не відбувається.

Формально закон великих чисел реалізовується переліком граничних теорем, кожна з яких виявляє за певних умов та за достатньо великої кількості дослідів наближення середніх результатів можливих значень випадкової величини, яка розглядається в досліді, до деякої невипадкової величини, яка є сталою.

Відоме поняття границі: змінна X_n при зростанні n наближається до сталої границі a, якщо різниця за модулем $|X_n - a|$ стає меншою за будь-яке невід'ємне ε для всіх значень n, починаючи з деякого достатньо великого числа. Якщо виходити із статистичного означення ймовірності випадкової події, то для частоти випадкової події $\widetilde{P}^*(A)$ та її ймовірності $P(A)$ визначення такого твердження границі слід визнати некоректними. Фізично немає нічого неможливого в тому, наприклад, що за достатньо великої кількості дослідів, які полягають у виявлені появи тієї чи іншої грані при підкидані монети, що частота появи орла відхилиться від ймовірності цієї події на великому $\varepsilon_1 > \varepsilon$. Так, якщо монета підкидається 1 000 разів, то можливо, що всі 1 000 разів випаде решка, але така подія, яка полягає в тому, що при підкидані монети 1 000 разів випаде решка, є тільки практично неможливою. Тому при розгляді послідовності випадкових величин $\widehat{X}_n$ розглядають границю за ймовірністю.

Означення. *Послідовність випадкових величин* $\widehat{X}_n$ *наближається за ймовірністю до невипадкової величини а, якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *ймовірність нерівності* $\left|\widehat{X}_n - a\right| \le \varepsilon$ *при* $n - \propto$ *дорівнює одиниці, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\widehat{X}_n - a\right| \le \varepsilon\right) = 1.$$

Це означення свідчить про те, що якими б не були довільно малими наперед задані $\varepsilon > 0$ та $\delta > 0$, завжди можна знайти таке велике число N, за якого для всіх $n > N$ виконується нерівність $P\left(\left|\widehat{X}_n - a\right| \le \varepsilon\right) > 1-\delta$.

Доказ сукупності граничних теорем теорії ймовірностей, які за своїм формулюванням описують закон великих чисел, оснований на нерівності П. Л. Чебишева .

6.2. Нерівність П. Л. Чебишева

Нерівність П. Л. Чебишева має таке формулювання.

Для будь-якої випадкової величини, яка має кінцеву дисперсію, при довільному $\varepsilon > 0$ *справедливо*

$$P\left(\left|X - m_x\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D[X]}{\varepsilon^2}, \tag{6.1}$$

тобто нерівність П. Л. Чебишева стверджує, що ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання на величину, яка перевищує будь-яке невід'ємне число ε*, обмежена зверху величиною* $\dfrac{Dx}{\varepsilon^2}$.

Для доведення цієї нерівності розглянемо на числовій прямій інтервал, зображений на рис. 6.1.

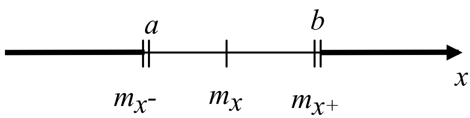

Рис. 6.1. Інтервали відхилення $\left|X-m_x\right| \ge \varepsilon$

Маємо

$$P\left(\left|X-m_x\right| \ge \varepsilon\right) = $$
$$= P\left(X \notin (a,b)\right) =$$
$$= \int\limits_{\left(\left|x-m_x\right| \ge \varepsilon\right)} f(x)\,dx \le$$

$$\le \int\limits_{\left(\left|x-m_x\right| \ge \varepsilon\right)} \frac{(x-m_x)^2}{\varepsilon^2} f(x)\,dx,$$

оскільки

$$\frac{(x-m_x)^2}{\varepsilon^2} > 1.$$

Тоді

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{(|x-m_x| \geq \varepsilon)} (x-m_x)^2 f(x)\, dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 f(x)\, dx = \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Виходить,

$$P(|X - m_x| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Оскільки

$$P(|X - m_x| \geq \varepsilon) + P(|X - m_x| < \varepsilon) = 1,$$

то

$$P(|X - m_x| < \varepsilon) > 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}. \qquad (6.2)$$

Вирази (6.1) та (6.2) дають змогу отримати відповідно верхню та нижню границю: $P(|X - m_x| \geq \varepsilon)$; $P(|X - m_x| < \varepsilon)$. Аналогічно проводиться доведення нерівності П. Л. Чебишева у випадку, коли розглядається дискретна випадкова величина X, яка приймає свої можливі значення x_1, x_2, …, x_n з імовірностями P_1, P_2, …, P_n, але тільки замість інтегралів розглядаються суми для тих значень x_i, для яких $|x_i - m_x| \geq \varepsilon$. Для неперервної випадкової величини X $P(X = m_x - \varepsilon) = P(X = m_x + \varepsilon) = 0$, але в (6.1) залишимо символ рівності, маючи на увазі, що (6.1) справедливе й для дискретної випадкової величини.

Задача 6.1. Для неперервної величини X, яка має математичне сподівання m_x та середнє квадратичне відхилення $_x$, оцінити ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина відхиляється від свого математичного сподівання на величину, яка перевищує 3 $_x$, та порівняти цю оцінку з імовірністю цієї ж події в разі, коли випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу.

Розв'язання. Оцінку ймовірності визначеної події проведемо з (6.1).

Тоді

$$P\left(\left|X-m_x\right|\geq\varepsilon\right)=P\left(\left|X-m_x\right|\geq 3\sigma_x\right)\leq\frac{D[X]}{(3\sigma_x)^2}=\frac{\sigma_x^2}{9\sigma_x^2}=\frac{1}{9}. \qquad (6.3)$$

Визначимо точне значення ймовірності цієї події за умови, що випадкова величина *X* підпорядкована нормальному закону розподілу.

Маємо

$$P\left(\left|X-m_x\right|\geq\varepsilon\right)=1-P\left(\left|X-m_x\right|<\varepsilon\right)=$$

$$=1-P\left(m_x-\varepsilon<X<m_x+\varepsilon\right)=$$

$$=1-P\left(m_x-3\sigma_x<X<m_x+3\sigma_x\right)=$$

$$=1-\left[\Phi\left(\frac{m_x+3\sigma_x-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{m_x-3\sigma_x-m_x}{\sigma_x}\right)\right]=$$

$$=1-\left[\Phi(3)+\Phi(3)\right]=1-2\Phi(3)=1-2\cdot 0,498\ 6=0,002\ 8.$$

Як видно, оцінка ймовірності події, яка полягає в тому, що випадкова величина відхиляється від свого математичного сподівання на величину, яка перевищує 3 $_x$, дорівнює 0,111 1, а значення ймовірності цієї події за умови, що випадкова величини *X* підпорядкована нормальному закону, дорівнює 0,002 8. Тобто нерівність П. Л. Чебишева дає досить грубу оцінку ймовірності події, яка розглядається, у порівнянні з точним значенням імовірності цієї події в тому разі, коли закон розподілу випадкової величини є нормальним, оскільки 0,111 1 значно більше, ніж 0,002 8.

Зауваження 1. При розв'язанні цієї задачі можна було скористатися відомим "правилом 3 $_x$", яке має місце в тому разі, коли випадкова величина підпорядкована нормальному закону розподілу, та яке визначає, що $P\left(\left|X-m_x\right|<3\sigma_x\right)\cong 0{,}997$.

Зауваження 2. Розв'язання цієї задачі також свідчить про те, що для будь-якої випадкової величини ймовірність події, яка полягає в тому, що "правило 3 $_x$" не виконується, не перевищує $\frac{1}{9}$.

Розв'язання цієї задачі дозволяє визначити таке: оцінка за (6.1) є достатньо грубою верхньою границею, а оцінка за (6.2) є достатньо грубою нижньою границею. Цей факт можна визначити як недолік при практичному використанні (6.1) та (6.2). Але те, що ці оцінки за (6.1) та (6.2) при практичному використанні можуть бути отримані без знання закону розподілу випадкової величини X, є суттєвою перевагою нерівності П. Л. Чебишева.

6.3. Теорема П. Л. Чебишева

Розглядається випадкова величина X з відомим математичним сподіванням m_x та σ_x^2. Це означає, що відомий закон розподілу X. Нехай $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ – генеральна сукупність можливих значень випадкової величини X, з якої проводиться $n < k$ серій незалежних випадкових вибірок $\left\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n_i}}\right\}, i = \overline{1, n}$, де n_i – кількість випробувань в i-й серії, кожна з яких розглядається як можливі значення випадкової величини X_i, $i = \overline{1, n}$. У такому разі кажуть: над випадковою величиною X проводиться n незалежних дослідів, в яких вона приймає значення X_i, $i = \overline{1, n}$.

Введено до розгляду випадкову величину

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{6.4}$$

Теорема П. Л. Чебишева стверджує таке.

При наближенні кількості незалежних випробувань до нескінченності (n) *середнє арифметичне значення випадкових величин, які спостерігаються при* n *незалежних випробуваннях над випадковою величиною X, прямує за ймовірністю до її математичного сподівання, тобто*

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x \right| < \varepsilon \right) = 1. \tag{6.5}$$

Доведення. Оскільки X_i, $i = \overline{1, n}$ – значення випадкової величини X при n незалежних випробуваннях, які відповідають випадковим вибіркам, зазначеним вище, то $m_{x_i} = m_x$ та $\sigma_{x_i}^2 = \sigma_x^2 \quad \forall \quad i = \overline{1, n}$.

Розглянемо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини Y_n. Маємо

$$M[Y_n] = M\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{n \cdot m_x}{n} = m_x;$$

$$D[Y_n] = D\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{n\sigma_x^2}{n^2} = \frac{\sigma_x^2}{n}.$$

Тобто

$$\left.\begin{aligned} M\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] &= m_x; \\ D\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] &= \frac{\sigma_x^2}{n}. \end{aligned}\right| \tag{6.6}$$

Виходить, математичне сподівання середнього арифметичного випадкових величин X_i, $i = \overline{1, n}$, які спостерігаються при незалежних випробуваннях над випадковою величиною X, збігається з математичним сподіванням випадкової величини X, а дисперсія середнього арифметичного випадкових величин X_i, $i = \overline{1, n}$ при зростанні кількості випробувань зменшується.

Для випадкової величини Y_n запишемо нерівність П. Л. Чебишева (6.2). Тоді

$$P\left(\left|Y_n - m_{y_n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D[Y_n]}{\varepsilon^2},$$

а з урахуванням (6.6) будемо мати

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma_x^2}{n\varepsilon^2},$$

де видно, що якщо n , то (6.5) виконується. Теорема доведена. Слід відзначити, що якщо всі можливі значення випадкової величини X складають генеральну сукупність, то випадковим вибіркам з генеральної сукупності $\{x_i\}$, $i = \overline{1, n}$, буде відповідати $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ середнє арифметичне результатів спостережень як можливе значення випадкової величини $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$. Тоді (6.5) має таке тлумачення: при необмеженому зростанні кількості спостережень n середнє арифметичне результатів спостережень за ймовірністю прямує до математичного сподівання випадкової величини X.

Задача 6.2. Помилка при округленні результату вимірювання як випадкова величина підпорядкована рівномірному закону розподілу на інтервалі (–0,5; 0,5). Оцінити ймовірність того, що сумарна помилка за абсолютною величиною буде не менше 15 при округленні 100 результатів незалежних вимірювань.

Розв'язання. Нехай X_i – випадкова величина помилки округлення при i-му вимірюванні. Оскільки випадкова величина X_i підпорядкована рівномірному закону розподілу на інтервалі (– 0,5; 0,5), то

$$M[X_i] = \frac{-0,5+0,5}{2} = 0;\ D[X_i] = \frac{[0,5-(-0,5)]^2}{12} = \frac{1}{12}.$$

Якщо Y – випадкова величина сумарної помилки при округленні 100 результатів незалежних вимірювань, тоді $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$, а за граничною теоремою П. Л. Чебишева (6.5) маємо

$$P\left(\left|\ Y=\sum_{i=1}^{100} X_i\ \right| \ge 0{,}15\right) \le \frac{\sigma_{x_i}^2}{n\cdot 0{,}15^2} = \frac{1}{12\cdot 100\cdot 0{,}15^2} = \frac{1}{27} = 0{,}04\,.$$

Тобто ймовірність події, яка полягає в тому, що сумарна помилка за абсолютною величиною при округленні 100 результатів незалежних вимірювань буде не менше 15, не перевищує 0,04.

6.4. Узагальнена теорема П. Л. Чебишева

Нехай над випадковою величиною *X* проводиться *n* незалежних різних дослідів і кожному *i*-му досліду відповідає X_i – випадкова величина. У цьому разі закони розподілу випадкових величин будуть різними (можуть збігатися лише види законів розподілу), а тому будуть різними їх математичні сподівання m_{x_i}, $i=\overline{1,n}$ та дисперсія $\sigma_{x_i}^2$, $i=\overline{1,n}$.

Узагальнена теорема П. Л. Чебишева стверджує таке.

Якщо розглядається послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, *які мають різні математичні сподівання* m_{x_i}, $i=1, 2, \ldots$ *та різні дисперсії* $\sigma_{x_i}^2$, $i=1, 2, \ldots$, *які обмежені зверху одним і тим же числом L, то різниця між середнім арифметичним випадкових величин* X_i, *які спостерігаються, та середнім арифметичним їх математичних сподівань при наближені кількості випробувань до нескінченості (n) прямує за ймовірністю до нуля, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right]\ \right| \ge \varepsilon\right)=0\,. \qquad (6.7)$$

Доведення. Виходячи з того, що $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n}$ залежить від *n*, та маючи на увазі зазначене вище означення наближення послідовності випадкових величин до невипадкової величини за ймовірністю, маємо таке судження.

Розглядаємо

$$Y_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \text{та} \quad M[Y_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i};$$

$$D[Y_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] \le \frac{nL}{n^2} = \frac{L}{n}.$$

Згідно з нерівністю П. Л. Чебишева маємо, що

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| \ge \varepsilon \right) \le \frac{L}{n\varepsilon^2}.$$

Яким би малим не було довільне ε, завжди можна вибрати n таким великим, щоб права частина зазначеного виразу була б менше від довільно визначеного δ, тому

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| \ge \varepsilon \right) \le \delta,$$

а якщо *n*   , то маємо (6.7).

Якщо перейти до протилежної події, то будемо мати

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| < \varepsilon \right) > 1 - \delta,$$

а якщо *n*   , то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

6.5. Теорема А. А. Маркова

Розглядається послідовність залежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, які мають математичні сподівання $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}, \ldots$ та кореляційну матрицю $\left\| R_{x_i, x_j} \right\| = \left\| M\left[\overset{\circ}{X}_i \, \overset{\circ}{X}_j \right] \right\|$, розміри якої залежать від *n*. Як і раніше,

$$M\left[Y_n\right] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i},$$

а також відомо, що для залежних випадкових величин

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D\left[X_i\right] + 2\sum_{i<j} R_{x_i,x_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{x_i,x_j},$$

тобто дисперсія суми залежних випадкових величин дорівнює сумі елементів кореляційної матриці.

Тоді

$$D\left[Y_n\right] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{x_i,x_j}.$$

Якщо на елементи кореляційної матриці накласти вимоги, які полягають в тому, щоб $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{x_i,x_j}$ при n зростала б повільніше ніж n^2, то тоді $\lim\limits_{n- \propto} D\left[Y_n\right] = 0$.

Формулювання теореми А. А. Маркова є таким.

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *є залежними з математичними сподівання* $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}, \ldots$ *та*

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=n}^{n} X_i\right] = 0, \tag{6.8}$$

то різниця між середнім арифметичним цих випадкових величин та середнім арифметичним їх математичних сподівань при $n - \propto$ *прямує за ймовірністю до нуля, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| \ge \varepsilon\right) = 0. \tag{6.9}$$

Доведення. До випадкової величини Y_n застосуємо нерівність П. Л. Чебишева, тоді маємо

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_{x_i}\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D[Y_n]}{\varepsilon^2}.$$

Оскільки за (6.8) при $n \to \infty$ $D[Y_n] \to 0$, то при довільно малому ε можна вибрати n таким великим, що $\frac{D[Y_n]}{\varepsilon^2} < \delta$ для будь-якого $\delta > 0$, тоді

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_{x_i}\right|\geq\varepsilon\right)\leq\delta,$$

а ймовірність протилежної події

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_{x_i}\right|<\varepsilon\right)>1-\delta,$$

що й стверджує (6.9). Для протилежної події, яка зазначена в (6.9), маємо

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_{x_i}\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Задача 6.3. Залежні випадкові величини $X_1,\ X_2,\ldots$ мають однакові математичні сподівання та обмежені дисперсії. Чи можна до послідовності $X_1,\ X_2,\ldots$ застосовувати закон великих чисел, якщо всі кореляційні моменти $R_{X_iX_j}$, $i\neq j;\ i,j=1,2,\ldots$ є від'ємними?

Розв'язання. Нехай $\sigma^2_{\max}$ є найбільшою з дисперсій випадкових величин $X_1, X_2,\ldots$. Тоді

$$D\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}D[X_i]+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}R_{X_iX_j}\leq\sum_{i=1}^{n}D[X_i]\leq n\sigma^2_{\max}.$$

Згідно з граничною теоремою А. А. Маркова (6.9) маємо

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

якщо

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = 0.$$

Розглянемо випадок, зазначений в умові задачі, коли дисперсія середнього арифметичного випадкових величин прямує до нуля ($n - \propto$).

Маємо

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sigma_{\max}^2}{n^2} = 0.$$

Тобто умови граничної теореми А. А. Маркова виконуються, а виходить, до послідовності випадкових величин X_1, X_2, ... можна застосувати закон великих чисел.

Задача 6.4. Кожна з незалежних випадкових величин X_k з однаковою ймовірністю може приймати два значення: - k^S та k^S; $k = 1, 2$ .... За якого S для послідовності X_1, X_2, ... виконуються умови граничної теореми А. А. Маркова?

Розв'язання. Для випадкової величини X_k маємо

$$M[X_k] = -k^S \cdot \frac{1}{2} + k^S \cdot \frac{1}{2} = 0;$$

$$D[X_k] = (-k^S - 0)^2 \frac{1}{2} + \left(k^S - 0\right)^2 \frac{1}{2} = k^{2S}.$$

Тоді

$$D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_k] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^{2S}.$$

Якщо $S = \frac{1}{2}$, то маємо

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2S} = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

як суму арифметичної прогресії, тоді

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\left[X_k\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Тобто якщо $S = \frac{1}{2}$, а виходить, і при $S > \frac{1}{2}$ умова граничної теореми А. А. Маркова не виконується. До послідовності випадкових величин $X_1, X_2, ... X_k, ...$ закон великих чисел не можна застосовувати.

Якщо $S < \frac{1}{2}$, то $2S < 1 - \nu$, де $\nu > 0$, тоді

$$D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^{1-\nu} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(1^{1-\nu} + 2^{1-\nu} + ... + n^{1-\nu}\right) \leq \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot n^{1-\nu} = \frac{1}{n^{\nu}};$$

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\nu}} = 0 \text{ при } 0 < \nu < 1.$$

Виходить, до послідовності випадкових величин $X_1, X_2, ...$ може бути застосована гранична теорема А. А. Маркова, тобто може бути застосований закон великих чисел.

6.6. Теорема Я. Бернуллі

Теорема Я. Бернуллі встановлює зв'язок між частотою появи подія *A* та її ймовірністю.

Теорема стверджує таке.

При необмеженому зростанні кількості дослідів з незалежними наслідками частота події A прямує за ймовірністю до її ймовірності, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|P^*(A) - P(A)\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (6.10)$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

де X_i – випадкова величина кількості появи події A в i-му досліді. Ця випадкова величина може приймати два можливі значення: один з ймовірністю $P(A) = P$ та нуль з ймовірністю $1 - P(A) = 1 - P$. Закон розподілу у вигляді ряду розподілу наведений в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Ряд розподілу випадкової величини X_i

$x_i^{(k)}$	$x_i^{(k=1)} = 1$	$x_i^{(k=2)} = 0$
$P\left(X_i = x_i^{(k)}\right)$	$p^{(k=1)} = P$	$p^{(k=2)} = 1 - P$

Тоді $M[X_i] = \sum_{k=1}^{m} x_i^{(k)} p^{(k)} = 1 \cdot P + 0(1-P) = P$;

$$D[X_i] = \sum_{k=1}^{m} \left(x_i^{(k)} - m_{x_i}\right)^2 p^{(k)} = (1-P)^2 P + (0-P)^2 (1-P) =$$

$$=(1-P)\left(P - P^2 + P^2\right) = P(1-P).$$

Тобто

$$\left. \begin{aligned} M[X_i] &= P(A); \\ D[X_i] &= P(A)(1 - P(A)). \end{aligned} \right| \qquad (6.11)$$

Випадкова величина $\sum_{i=1}^{n} X_i$ є кількістю подій A в n дослідах з незалежними наслідками, а

$$P^*(A) = Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n};$$

$$M[P^*(A)] = M\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n}\cdot nP = P;$$

$$D[P^*(A)] = D\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{n\cdot P(1-P)}{n^2} = \frac{Pq}{n},$$

де $q = 1 - P$.

Тобто маємо

$$\left.\begin{aligned} &M[P^*(A)] = P; \\ &D[P^*(A)] = \frac{Pq}{n}. \end{aligned}\right| \qquad (6.12)$$

Використаємо нерівність П. Л. Чебишева

$$P(|Y - M[Y]| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{D[Y]}{\varepsilon^2};$$

$$P(|P^*(A) - M[P^*(A)]| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{D[P^*(A)]}{\varepsilon^2};$$

$$P(|P^*(A) - P(A)| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{Pq}{n\varepsilon^2},$$

де видно, що якщо n , то (6.10) виконується. Теорема доведена.

При практичному використанні теорема Я. Бернуллі користується виразами

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - P\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{Pq}{n\varepsilon^2} \qquad (6.13)$$

або

$$P(|m - nP| \le n\varepsilon) \ge 1 - \frac{Pq}{n\varepsilon^2}, \qquad (6.14)$$

де m – кількість наслідків при n незалежних випробуваннях, за яких відбувається подія A.

Задача 6.5. Виготовлено 100 000 виробів. Імовірність події A, яка полягає в тому, що виріб відповідає вимогам стандарту, $P(A)$=0,95. Оцінити ймовірність події, яка полягає в тому, що кількість виробів, які відповідають вимогам стандарту, буде не менше 94 000 та не більше 96 000.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що проведено n = 100 000 дослідів, які характеризуються незалежними та рівноймовірними наслідками, тому випадкова величина $X = m$ – кількість наслідків, за яких відбувається подія A, підпорядкована біноміальному закону розподілу. Тоді $M[X] = nP$. Використовуючи (6.14), маємо

$$P(94\,000 \le X = m \le 96\,000) = P(|m - 100\,000 \cdot 0{,}95| \le 1\,000) \ge$$

$$\ge 1 - \frac{0{,}95 \cdot 0{,}05}{100\,000 \cdot 0{,}01^2} \cong 0{,}995 .$$

Виходить, з імовірністю не менше 0,995 можна стверджувати, що кількість виробів, які відповідають стандарту, буде перебувати в межах (94 000 – 96 000).

Задача 6.6. При кожному випробуванні сприятливий наслідок (випадкова подія A) відбувається з імовірністю P = 0,8. Оцінити ймовірність того, що при 300 незалежних випробуваннях подія A настане від 230 до 250 разів.

Розв'язання. Введемо до розгляду випадкову величину X – кількість появ події A при n = 300 випробуваннях.

Використаємо граничну теорему Я. Бернуллі, маємо

$$m_x = nP = 300 \quad 0{,}8 = 240; \; P(|m - nP| \le n\varepsilon) \ge 1 - \frac{Pq}{n\varepsilon^2},$$

тоді

$$P(230 \le X \le 250) = P(|X - m_x| \le 10) = P(|X - 240| \le 10) \ge 1 - \frac{Pq}{n\varepsilon^2},$$

а оскільки $n\varepsilon = 10$, то $\varepsilon = \frac{10}{300} = \frac{1}{30}$, тоді

$$P(|X - 240| \le 10) \ge 1 - \frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{300\left(\frac{1}{30}\right)^2} = 0{,}52 .$$

6.7. Теорема Пуассона

Теорема Пуассона має відношення до випадку, коли розглядається повторення незалежних дослідів з різноймовірними наслідками. При i-му досліді подія A може відбутися з імовірністю P_i, i = 1, 2 ... . Теорема Пуассона стверджує таке.

При наближенні кількості незалежних випробувань до нескінченності (n) різниця між частотою події A та середнім арифметичним її ймовірностей прямує за ймовірністю до нуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| P_n^*(A) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i \right| \geq \varepsilon \right) = 0. \qquad (6.15)$$

Доведення. Доведення теореми Пуассона випливає з узагальненої теореми П. Л. Чебишева. Дійсно, оскільки

$$P_n^*(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

де X_i – випадкова величина кількості наслідків, в яких відбувається подія A при i-му досліді, та $M[X_i]=P_i$, $D[X_i]=P_i(1-P_i)$, $i=1, 2, \ldots$. Дисперсія X_i при будь-якому i є обмеженою величиною $L = 0{,}25$, оскільки максимальне значення $P_i\ (1 - P_i)$ досягається при $P_i = 0{,}5$. Застосовуючи узагальнену теорему П. Л. Чебишева, переконаємось у вірності (6.15).

6.8. Локальна гранична теорема Муавра – Лапласа

Розглянемо закономірність, яка спостерігається для схеми послідовних незалежних випробувань. Це означає, що для послідовності повних груп подій $A_1^{(s)}$, $A_2^{(s)}$, …, $A_k^{(s)}$, $s = \overline{1, n}$ імовірність появи події $P\left(A_i^{(s)}\right)$, $i = \overline{1, k}$ в групі з індексом s не залежить ні від значення цього індексу, ні від того, які події відбудуться в інших групах, та $\sum_{i=1}^{k} P\left(A_i^{(s)}\right) = 1$. Така схема вперше була розглянута Я. Бернуллі при $k = 2$. Ця схема отримала назву схема Бернуллі, для якої справедлива формула Бернуллі

$$P_{n,m} = C_n^m P^m q^{n-m},$$

де $q = 1 - P$, а $P_{n,m}$ – ймовірність події, яка полягає в тому, що з n випробувань рівно в m із них відбудеться наслідок, який нас цікавить (розглядається подія A) та рівно $(n-m)$ разів відбудеться подія $\overline{A}$. Очевидно, що $\sum_{m=0}^{n} P_{n,m} = 1$. Якщо X – випадкова величина – кількість подій A при n дослідах, то $P(X = m) = P_{n,m}$. Ці ймовірності є коефіцієнтами при z^m бінома

$$(q+Pz)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m P^m q^{n-m} z^m = \sum_{m=0}^{n} P_{n,m} z^m .$$

Тому вважають, що випадкова величина X підпорядкована біноміальному закону розподілу. Відомо, що коефіцієнти бінома $(q+Pz)^n$ спочатку зростають до певного значення, а потім спадають. Щоб визначити умови, за яких коефіцієнти зростають та спадають, розглянемо $P_{n,m}$ як функцію від n. Тоді будемо мати

$$\frac{P_{n,m+1}}{P_{n,m}} = \frac{\dfrac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} P^{m+1} q^{n-m-1}}{\dfrac{n!}{m!(n-m)!} P^m q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1} \frac{P}{q},$$

якщо $\dfrac{n-m}{m+1}\dfrac{P}{q} \ge 1$, то $nP - mP \ge (m+1)(1-P)$; $m \le nP - q$

і $\quad P_{n,m+1} \ge P_{n,m}$;

якщо $m > nP - q$, то $P_{n,m+1} < P_{n,m}$.

Тоді якщо m приймає малі значення до $nP – q$, то $P_{n,m}$ зростає, а потім, зі зростанням m, $P_{n,m}$ спадає. Найбільше значення $P_{n,m}$ визначає моду M_{o_x} випадкової величини X. Для біноміального закону розподілу маємо $nP - q \le M_{o_x} \le nP + P$. Зазначене вище дозволяє встановити, що якщо $nP - q < 0$, то $P_{n,o} > P_{n,1} > .... > P_{n,m}$, а якщо $nP - q = 0$, то $P_{n,o} = P_{n,1} > P_{n,2} > ... > P_{n,m}$.

Повернемося до змісту задачі 6.5. При її розв’язанні відзначалося, що випадкова величина $X = m$ підпорядкована біноміальному закону розподілу, тому ймовірність події, яка полягає в тому, що кількість виробів, які відповідають вимогам стандарту, буде не менше 94 000 та не більше 96 000, може бути визначена точно за формулою Бернуллі, а саме

$$P(94\,000 \le X = m \le 96\,000) = \sum_{m=94\,000}^{96\,000} C_{10^5}^{m} \cdot 0{,}95^{m} \cdot 0{,}05^{10^5 - m}.$$

Видно, що цей підрахунок пов'язаний з розрахунковими труднощами, які виникають при підрахунку кількості сполучень C_n^m із $n=10^5$ елементів по m елементів, яка змінюється від 94 000 до 96 000 елементів.

Відзначена вище закономірність зміни $P_{n,m}$ при зміні m та належність розрахункових труднощів при розрахунку сполучень при великих n та m привели до визначення граничних виразів, які б дозволили з достатньою точністю розрахувати ймовірності випадкових подій зазначеного вище змісту.

Таке граничне співвідношення вперше було запропоноване у 1730 р. Муавром для випадку, коли ймовірність сприятливого наслідку в досліді дорівнює $\frac{1}{2}$. Цей результат був узагальнений Лапласом на випадок, коли $0 < P(A) < 1$ та отримав назву локальної теореми Муавра – Лапласа.

Теорема. *Якщо ймовірність появи сприятливого наслідку A при n незалежних дослідах є сталою величиною $0 < P < 1$, то ймовірність $P_{n,m}$ того, що в цих дослідах подія A настане рівно m разів, задовольняє співвідношенню*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n,m}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi nPq}} e^{-\frac{(m-nP)^2}{2nPq}}} = 1 \tag{6.16}$$

рівномірно для всіх m, для яких $\frac{m-nP}{2\sqrt{nPq}}$ перебуває у будь-якому скінченному інтервалі.

Задача 6.7. Імовірність виготовлення бракованого виробу дорівнює $0{,}005$. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що з 10 000 виробів, взятих навмання, рівно 40 будуть бракованими.

Розв'язання. Використовуючи (6.16), маємо

$$P_{n,m} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 10\,000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} e^{-\frac{(40-100\,00 \cdot 0{,}005)^2}{2 \cdot 10\,000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} \approx 0{,}002\,06.$$

Точне значення зазначеної ймовірності, розраховане за формулою Бернуллі, дає $P_{n=10\ 000,m=40} = 0,001\ 97$.

Розв'язання цієї задачі свідчить про те, що співвідношення (6.16) дає задовільний результат при практичному його використанні.

6.9. Інтегральна гранична теорема Муавра – Лапласа

Гранична інтегральна теорема Муавра – Лапласа має таке формулювання.

Теорема. *Якщо* m *– кількість появ випадкової події* A *(сприятливих наслідків) при* n *незалежних випробуваннях, в кожному з яких імовірність цієї події дорівнює* $P\,(0<P<1)$, *то рівномірно по відношенню* a *та* b $(-\infty \le a<b\le +\infty)$ *при зростанні кількості випробувань до нескінченості* $(n\to\infty)$ *виконується співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a\le\frac{m-nP}{\sqrt{nPq}}<b\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\,. \qquad (6.17)$$

Гранична теорема Я. Бернуллі була опублікована у 1713 р. Її практичне використання пов'язане із записом (6.13) та дає оцінку ймовірності події, яка полягає в тому, що при n незалежних випробуваннях, у кожному з яких сприятливий наслідок (випадкова подія A) може статися з ймовірністю $P\,(0<P<1)$, частота події A $P^*(A)$ відхилиться від імовірності цієї події $P(A)$ на величину, не більшу, ніж деяке невід'ємне ε. Інтегральна гранична теорема (6.17) в окремому випадку була доведена Муавром у 1730 році, а узагальнена на випадок $0 < P < 1$ у 1812 році Лапласом. Одним з практичних використань (6.17) є визначення (на відміну від теореми Я. Бернуллі, яка дозволяє лише оцінити її) імовірності зазначеної вище випадкової події. З цією метою розглянемо таке:

$$P\left(\left|P^*(A)-P(A)\right|<\varepsilon\right)=P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|<\varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon<\frac{m-nP}{n}<\varepsilon\right)=$$

$$=P\left(-\varepsilon\frac{n}{\sqrt{nPq}}<\frac{n\,(m-nP)}{\sqrt{nPq}\cdot n}<\varepsilon\frac{n}{\sqrt{nPq}}\right)=P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}<\frac{m-nP}{\sqrt{nPq}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}\right)\cong$$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}\right),$$

де $P^*(A)=\frac{m}{n}$ – випадкова величина, оскільки m (кількість спостережень, які відповідають появі події A у вибірці), – є випадковою величиною; $P(A)=P$; $\frac{n}{\sqrt{nPq}}>0$, тому в двохсторонній нерівності знак нерівності не змінюється, а $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – є функцією Лапласа.

Тобто

$$P\left(\left|P^* - P\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}\right). \tag{6.18}$$

Примітка. Слід відзначити, що якщо $n - \infty$, то $P\left(\left|P^* - P\right| < \varepsilon\right) \to 1$, оскільки $\Phi(\infty)=\frac{1}{2}$. Це означає, що отримується вже відомий результат, який зазначений вище як гранична теорема Бернуллі.

Практичне використання (6.18) дозволяє розв’язувати такі задачі.

1. Визначати ймовірність того, що частота появи події A відхилиться від імовірності цієї події не більш, ніж на ε.

2. Визначати кількість випробувань, яку необхідно провести для того, щоб з імовірністю не менше β можна було б стверджувати, що частота сприятливого наслідку (подія A) відхилилась від імовірності цієї події не більш, ніж на ε.

3. Визначати границі, в яких буде перебувати випадкова величина $\frac{m - nP}{\sqrt{nPq}}$, при n незалежних випробуваннях, якщо ймовірність випадкової події A дорівнює P, де $0 < P < 1$, та ймовірність того, що частота випадкової події A відхилиться від імовірності цієї події, дорівнює β.

Задача 6.8. Скільки разів треба підкинути монету, щоб імовірність отримати відхилення частоти появи орла від імовірності його появи на величину, яка не перевищує $\varepsilon = 0{,}05$, була б не менше $0{,}99$?

Розв'язання. Із (6.18) випливає, що

$$P\left(\left|P^* - P\right| < 0{,}05\right) = 2\Phi\left(0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) = \beta \geq 0{,}99;$$

$$\Phi\left(0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}25}}\right) \geq 0{,}495;\ 0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}25}} \geq 2{,}58;$$

$$\frac{n}{0{,}25} \geq 2\ 662{,}56;\ n \geq 665{,}6;\ \ n = 666.$$

Тобто щоб з імовірністю $\beta = 0{,}99$ бути впевненим у тому, що частота появи орла відхилиться від імовірності появи орла на величину, яка не перевищує $\varepsilon = 0{,}05$, необхідно провести 666 випробувань.

Зауваження. Із змісту задачі 6.8 можна зробити висновок, що якщо прийняти $\beta_1 < \beta$ та $\varepsilon_1 > \varepsilon$, то необхідна кількість випробувань буде значно меншою. Так, при $\beta_1 = 0{,}75$ та $\varepsilon_1 = 0{,}1$ $n = 34$.

Задача 6.9. Визначити ймовірність того, що частота появи орла відхиляється від імовірності цієї події не більш, ніж на $\varepsilon = 0{,}005$ при кількості випробувань $n = 10\ 000$.

Розв'язання. З (6.18) маємо

$$P\left(\left|P^* - P\right| < 0{,}005\right) = 2\Phi\left(0{,}005\sqrt{\frac{10000}{0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) = 2 \cdot 0{,}3413 \cong 0{,}683.$$

Задача 6.10. Визначити границі, в яких буде перебувати відхилення частоти появи орла від ймовірності тієї ж події з імовірністю не менш, ніж 0,9 при 1 000 випробувань.

Розв'язання. Використаємо (6.18). Маємо

$$P\left(\left|P^* - P\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{1\ \ 000}{0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) = \beta \geq 0{,}9,$$

$$\varepsilon\sqrt{\frac{1\ 000}{0,25}}\geq 1,65;\ \varepsilon\geq 0,026;\ \varepsilon=0,027.$$

6.10. Гранична теорема О. М. Ляпунова

Гранична теорема О. М. Ляпунова пов'язана з визначенням закону розподілу суми випадкових величин, коли кількість доданків прямує до нескінченності. На практиці ця теорема О. М. Ляпунова має важливе значення, тому її називають центральною граничною теоремою теорії ймовірностей.

Розглянемо теорему О. М. Ляпунова в такому формулюванні.

Теорема. *Якщо випадкові величини X_1, X_2, ..., X_k, ... є незалежними та підпорядкованими одному й тому ж закону розподілу з математичним сподіванням m_x та дисперсією σ_x^2, то закон розподілу випадкової величини $Y_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ при необмеженому зростанні кількості доданків ($n\to\infty$) наближається до нормального закону розподілу.*

Доведення. Розглянемо доведення для випадку, коли випадкові величини є неперервними.

Оскільки випадкові величини X_k підпорядковані одному й тому ж закону розподілу, то X_k, $k=\overline{1,n}$ відповідають одні й ті ж характеристичні функції, тобто $q_{x_1}(t)=q_{x_2}(t)=...=q_x(t)$. Якщо X_k, $k=\overline{1,n}$ є незалежними, то характеристична функція випадкової величини Y_n має вигляд

$$q_{y_n}(t)=\left[q_x(t)\right]^n. \tag{6.19}$$

Подамо $q_x(t)$ у вигляді ряду Маклорена поблизу точки $t=0$ та обмежимось трьома членами ряду. Тоді

$$q_x(t)=q_x(t=0)+q_x'(t=0)t+\left[\frac{q_x''(t=0)}{2!}+\alpha(t)\right]\cdot t^2,$$

де при $t=0$ маємо $\alpha(t)\to 0$.

Визначимо $q_x(t=0)$; $q_x'(t=0)$; $q_x''(t=0)$. З (5.6) $q_x(t=0)=1$, з (5.10) $q_x'(t=0)=i\alpha_1=im_x$; $q_x''(t=0)=i^2\alpha_2=-\left(\mu_2+\alpha_1^2\right)$, де α_1–

початковий момент першого порядку, а μ_2 – центральний момент другого порядку.

Приймемо $m_x = 0$, що відповідає перенесенню початку прямокутної системи координат в точку m_x та не обмежує узагальнення доведення теореми. Тоді $q_x'(t = 0) = 0$, а $q_x''(t = 0) = -\mu_2 = -\sigma_x^2$.

Вираз (6.19) буде мати вигляд

$$q_{y_n}(t) = \left[1 - \left[\frac{\sigma_x^2}{2} - \alpha(t)\right] \cdot t^2\right]^n . \qquad (6.20)$$

Від випадкової величини Y_n перейдемо до нормованої випадкової величини

$$Z_n = \frac{Y_n}{\sigma_x \sqrt{n}}, \qquad (6.21)$$

для якої маємо

$$D[Z_n] = D\left[\frac{Y_n}{\sigma_x\sqrt{n}}\right] = D\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sigma_x\sqrt{n}}\right] = \frac{\sum_{k=1}^{n} D[X_k]}{\sigma_x^2 \cdot n} = \frac{n \cdot \sigma_x^2}{\sigma_x^2 \cdot n} = 1,$$

тобто дисперсія Z_n не залежить від n.

Якщо довести, що закон розподілу Z_n при $n - \propto$ наближається до нормального закону розподілу, то тим самим буде доведено, що при $n - \propto$ закон розподілу випадкової величини Y_n також наближається до нормального закону розподілу, оскільки Y_n лінійно залежить від випадкової величини Z_n, як про це свідчить (6.21).

Розглянемо характеристичну функцію випадкової величини Z_n та покажемо, що при $n - \propto$ вона прямує до виразу характеристичної функції нормального закону розподілу.

Згідно з властивістю характеристичної функції (5.8) маємо

$$q_{z_n}(t) = \left[1 - \left[\frac{\sigma_x^2}{2} - \alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma_x^2}\right]^n;$$

$$\ln q_{z_n}(t) = n\ln\left\{1-\left[\frac{\sigma_x^2}{2}-\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma_x^2}\right\}.$$

Нехай $\left[\frac{\sigma_x^2}{2}-\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma_x^2} = \chi$, тоді $\ln q_{z_n}(t) = n\ln(1-\chi)$, якщо n прямує до нескінченності, то χ пряму до нуля, а при достатньо великому n величину χ слід вважати малою. Якщо $\ln(1-\chi)$ подати рядом Маклорена, який має вигляд

$$\ln(1-\chi) = -\chi - \frac{\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3} - \ldots - \frac{\chi^n}{n} - \ldots,$$

і утримати лише перший член ряду, то тоді

$$\ln q_{z_n}(t) = -n\chi;$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln q_{zn}(t) = \lim_{n\to\infty}[n(-\chi)] = \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{t^2}{2}+\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{\sigma_x^2}\right\} =$$

$$= -\frac{t^2}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{t^2}{\sigma_x^2}\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right) = -\frac{t^2}{2},$$

тому що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t^2}{\sigma_x^2}\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right) = 0,$$

оскільки при поданні $q_x(t)$ у вигляді ряду Маклорена при $t - 0$ $a(t) - 0$, а у нас

$$\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right)\to 0.$$

Виходить, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\ln q_{z_n}(t) = -\frac{t^2}{2};$$

$$\lim_{n\to\infty} q_{z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{6.22}$$

Випадкова величина Z_n за виразом (6.21) має $M[Z_n]=0$, $D[Z_n]=1$, а (6.22) відповідає (5.20), тобто відповідає виразу характеристичної функції нормального закону розподілу випадкової величини, для якої $m_x = 0$, а $\sigma_x^2 = 1$. Виходить сформульована теорема доведена.

Існують інші формулювання центральної граничної теореми теорії ймовірності в залежності від того, що приймають як міру однорідності доданків X_k.

О. М. Ляпуновим у 1900 році була доведена теорема у такому формулюванні.

Теорема. *Якщо* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *є незалежними випадковими величинами з математичними сподіваннями* $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}$ *та дисперсіями* $\sigma_{x_1}^2, \sigma_{x_2}^2, \ldots, \sigma_{x_n}^2$, *то випадкова величина*

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - m_{x_k}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}} \tag{6.23}$$

при $n \to \infty$ *має нормальне розподілення, якщо можна підібрати таке* $\delta > 0$, *за якого*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} M\left[\left(X_k - m_{x_k}\right)^{2+\delta}\right]}{\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2\right)^{1+\frac{\delta}{2}}} = 0. \tag{6.24}$$

Якщо в (6.24) прийняти $\delta = 1$, то будемо мати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} M\left[\left(X_k - m_{x_k}\right)^{3}\right]}{\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0, \tag{6.25}$$

тобто тоді (6.25) визначає умови, які накладаються на треті центральні моменти випадкової величини Y_n. Оскільки $M[Y_n]=0$ та $D[Y_n]=1$, то граничне рівняння має вигляд

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha<\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(X_k-m_{x_k}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}}<\beta\right)=\text{Ц}(\beta)-\text{Ц}(\alpha), \tag{6.26}$$

де $\text{Ц}(\beta)$ та $\text{Ц}(\alpha)$ – функції Лапласа аргументів β та α відповідно.

Зміст умов (6.24) чи (6.25) полягає в тому, щоб в (6.23) не було таких доданків, вплив яких на розсіювання $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ був би занадто великим у порівнянні з впливом усіх останніх, а також не повинно бути великої кількості випадкових величин, вплив яких на розсіювання зазначеної суми був би непомірно малий у порівнянні із сумарним впливом решти доданків випадкових величин.

Зауваження 1. Узагальненою умовою в порівнянні з (6.24), при виконанні якої справедлива центральна гранична теорема теорії ймовірностей, є умова Ліндерберга, сформульована в 1922 році, яка має такий зміст:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\left(\left|x_k-m_{x_k}\right|>\tau\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}\right)}\left(x_k-m_{x_k}\right)^2 f_{x_k}(x)\,dx=0, \tag{6.27}$$

де τ – будь-яке невід'ємне число, а $f_{x_k}(x)$ – щільність розподілу випадкової величини X_k.

Фізичний зміст (6.27) полягає в такому. Уводиться до розгляду подія A_k – випадкова подія, яка полягає в тому, що буде виконуватись нерівність

$$\left|X_k-m_{x_k}\right|>\tau\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2},\ k=\overline{1,n}. \tag{6.28}$$

Тоді ймовірність того, що хоча б для однієї з n випадкових величин $X_1, X_2,..., X_n$ буде виконуватись нерівність (6.28), має вигляд

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\left(\left|x_k - m_{x_k}\right| > \tau\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}\right)} f_{x_k}(x)dx \le$$

$$\le \frac{1}{\left(\tau\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}\right)^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\left(\left|x_k - m_{x_k}\right| > \tau\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}\right)} \left(x_k - m_{x_k}\right)^2 f_{x_k}(x)dx .$$

Ця нерівність за умови (6.27) прямує до 0. Тому умова Ліндерберга (6.27) еквівалентна вимозі щодо рівномірної малості доданків $\dfrac{X_k - m_{x_k}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}}$ у загальній сумі. При виконанні (6.27) імовірність того, що хоча б один з доданків $\dfrac{X_k - m_{x_k}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}}$ перебільшить величину τ, прямує до 0 при зростанні кількості доданків до нескінченності.

Зауваження. Узагальненням нерівності П. Л. Чебишева є нерівність О. М. Колмогорова, яка має таке означення.

Якщо незалежні випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n,...$ мають скінченні дисперсії, то

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - M\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]}{\varepsilon^2}. \qquad (6.29)$$

Нерівність О. М. Колмогорова (6.29) відносять до посиленого закону великих чисел, який має таке означення.

Послідовність випадкових величин $X_1, \quad X_2, \ldots, X_n, \ldots$ підпорядковується посиленому закону великих чисел, якщо

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\left[X_k\right]\right)\to 0\right) = 1 .$$

Розглянемо практичні використання доведеної в цьому підрозділі граничної теореми О. М. Ляпунова.

Відомо, що якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, то ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що випадкова величина X належить інтервалу (a; b), розраховується згідно з таким виразом:

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a - m_x}{\sigma_x}\right).$$

Якщо за теоремою О. М. Ляпунова закон розподілу випадкової величини $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, де $X_i, \quad i = \overline{1, k}$ є незалежними випадковими величинами, наближається до нормального закону розподілу, то справедливе таке визначення:

$$P\left(a < Y = \sum_{i=1}^{n} X_i < b\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{b - M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2}}\right) - \Phi\left(\frac{a - M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2}}\right). \qquad (6.30)$$

Оскільки теорема О. М. Ляпунова гранична, а n розглядається скінченим, то (6.30) дає наближений результат, який відрізняється від точного в третьому чи четвертому знаці після коми у виразі десяткового дробу.

Задача 6.11. П'ятдесят бомбардувальників незалежно один від одного здійснюють серійне бомбардування полоси укріплення противника. Кожен бомбардувальник кидає одну серію бомб. Для однієї серії математичне сподівання кількості бомб, які влучили в полосу укріплення, дорівнює 2, а середнє квадратичне відхилення дорівнює 1. Знайти ймовірність того, що в полосу укріплення противника влучить від 90 до110 бомб.

Розв'язання. Нехай X_i – випадкова величина кількості бомб, які влучать у полосу укріплення противника при здійсненні *i*-ї серії бомбардування. Тоді $Y=\sum_{i=1}^{50} X_i$ є випадковою величиною кількості влучень у полосу укріплення противника при здійсненні 50 серій бомбардування. Згідно з теоремою Ляпунова випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, а отже,

$$P\left(90<Y=\sum_{i=1}^{50} X_i<110\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{110-M\left[\sum_{i=1}^{50} X_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{50} D\left[X_i\right]}}\right)-\Phi\left(\frac{90-M\left[\sum_{i=1}^{50} X_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{50} D\left[X_i\right]}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{110-2\cdot 50}{\sqrt{50\cdot 1}}\right)-\Phi\left(\frac{90-2\cdot 50}{\sqrt{50\cdot 1}}\right)=$$

$$=\Phi(1,414)+\Phi(1,414)=2\cdot 0,421\quad 3=0,843.$$

Задача 6.12. Визначити ймовірність того, що після 900 кидань монети виграш гравця буде від 600 до 1200 гривень, якщо при появі орла гравець виграє 4 гривні, а при появі решки програє 2 гривні.

Розв'язання. Нехай X_i – випадкова величина значення виграшу гравця при *i*-му киданні монети. Випадкова величини X_i має ряд розподілу, наведений у табл. 6.2.

Таблиця 6.2

Ряд розподілу випадкової величини X_i

$x_i^{(k)}$	4	–2
$P\left(X_i=x_i^{(k)}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Тоді

$$M[X_i]=\sum_{k=1}^{2} x_i^{(k)}P\left(X_i=x_i^{(k)}\right)=\ 4\cdot\frac{1}{2}+(-2)\cdot\frac{1}{2}\ =\ 1\,;$$

$$D[X_i]=\sum_{k=1}^{2}\left(x_i^{(k)}\right)^2 P\left(X_i=\ x_i^{(k)}\right)-\ \left(M\left[X_i\right]\right)^2=$$

$$=4^2\cdot\frac{1}{2}+(-2)^2\cdot\frac{1}{2}-1^2=9\,.$$

Якщо X – випадкова величина виграшу гравця при 900 киданнях монети, то

$$X\ =\sum_{i=1}^{900} X_i\,.$$

З центральної теореми теорії ймовірностей маємо

$$P\left(600<X=\sum_{i=1}^{900} X_i<1\ \ 200\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{1\quad 200-M\left[\sum\limits_{i=1}^{900} X_i\right]}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{900} D[X_i]}}\right)-\Phi\left(\frac{600-M\left[\sum\limits_{i=1}^{900} X_i\right]}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{900} D[X_i]}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{1\quad 200-900\cdot 1}{\sqrt{900\cdot 9}}\right)-\Phi\left(\frac{600-900\cdot 1}{\sqrt{900\cdot 9}}\right)=$$

$$=\Phi(3{,}33)+\Phi(3{,}33)\equiv 2\cdot 0{,}499\quad 57\cong 1{,}0\,.$$

Задача 6.13. Відбувається груповий повітряний бій, в якому беруть участь 30 бомбардувальників з одного та 30 винищувачів з іншого боку. Кожен винищувач атакує один бомбардувальник і збиває його з імовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що у повітряному бою буде збито не менше 10 та не більше 30 бомбардувальників.

Розв'язання. Розглянемо X_i – випадкову величину кількості збитих бомбардувальників у i-му повітряному бою. Якщо Y – випадкова величина кількості збитих бомбардувальників у повітряному бою, то тоді $Y = \sum_{i=1}^{30} X_i$.

За теоремою О. М. Ляпунова будемо мати

$$P(10 < Y < 30) = P\left(10 < Y = \sum_{i=1}^{30} X_i < 30\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{30 - M\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right]}{\sqrt{D\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right]}}\right) - \Phi\left(\frac{6 - M\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right]}{\sqrt{D\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right]}}\right).$$

Уведені до розгляду випадкові величини X_i є незалежними, тому можна стверджувати, що, виходячи з умови задачі, дослід, в якому подія A, що полягає в тому, що в i-му повітряному бою буде збитий бомбардувальник, може статися з ймовірністю $P(A) = 0{,}2$, повторюється 30 разів. Адже слід стверджувати, що розглядається повторення дослідів з незалежними та рівноймовірними наслідками. Отже, випадкова величина Y (кількість бомбардувальників у повітряному бою) підпорядкована біноміальному закону розподілу, для якого $M[Y] = nP$, а $D[Y] = nPq$.

Тоді

$$M[Y] = M\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right] = 30 \cdot 0{,}2 = 6;$$

$$D[Y] = D\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right] = 30 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 4{,}8,$$

а отже,

$$P\left(10 < Y = \sum_{i=1}^{30} X_i < 30\right) = \Phi\left(\frac{30 - nP}{\sqrt{nPq}}\right) - \Phi\left(\frac{10 - nP}{\sqrt{nPq}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{30-6}{\sqrt{4{,}8}}\right) - \Phi\left(\frac{10-6}{\sqrt{4{,}8}}\right) = \Phi(10{,}96) - \Phi(1{,}83) = 0{,}5 - 0{,}46 = 0{,}034\,.$$

Розглянемо ймовірність події, яка полягає в тому, що в повітряному бою буде збито не більше 10 бомбардувальників. Маємо

$$P\left(0 < Y = \sum_{i=1}^{30} X_i < 10\right) = \Phi\left(\frac{10-6}{\sqrt{4,8}}\right) - \Phi\left(\frac{0-6}{\sqrt{4,8}}\right) =$$

$$= \Phi(1,83) + \Phi(2,74) = 0,466 + 0,497 = 0,963.$$

Відзначимо, що співвідношення

$$P\left(a < Y = \sum_{i=1}^{30} X_i < b\right) = \Phi\left(\frac{b-nP}{\sqrt{nPq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-nP}{\sqrt{nPq}}\right) \quad (6.31)$$

називають інтегральним наближенням біноміального закону розподілу.

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. У чому полягає фізичний зміст закону великих чисел?
2. Назвіть граничні теореми теорії ймовірностей, які слід розглядати як формальне тлумачення закону великих чисел.
3. Визначте практичну значущість та обмеженість використання нерівності П. Л. Чебишева.
4. За виконанням яких умов для визначення досліду локальна та інтегральна теореми Муавра – Лапласа є справедливими?
5. Визначте практичну значущість локальної граничної теореми Муавра – Лапласа.
6. Визначте зміст задач, які випливають із змісту інтегральної граничної теореми Муавра – Лапласа та які є суттєвими при плануванні експерименту.
7. Скільки разів слід підкинути монету, щоб імовірність отримання відхилення частоти появи орла від імовірності його появи на величину, яка б не перевищувала за абсолютною величиною 0, 01, була не менше 0,99?
8. На скільки треба збільшити кількість незалежних випробувань, щоб з імовірністю не менше 0,95 можна було б стверджувати, що частота події A відхилиться від її ймовірності = 0,5 на величину , яка змінюється від 0,01 до 0,001?
9. Гравець кидає 4 монети і в залежності від того чи буде кількість монет, які випали орлом, парною або непарною, одержує або сплачує стільки гривень, скільки випало орлів. Чи вигідна ця гра для гравця?

9. Визначте характеристичну функцію нормованої випадкової величини $Y = \frac{X - m_X}{\sigma_X}$, якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами m_X, c_X.

10. Розглядається серія з n незалежних випробувань, в кожному з яких випадкова подія A може відбутися з імовірністю $P = \frac{\lambda}{n}$, де λ – деяке невід'ємне число. Нехай X є випадкова величина, що визначає кількість появ події A. Доведіть, що

$$\lim_{n \to \infty} P\,(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

тобто доведіть, що граничним законом розподілу для закону розподілу Бернуллі є закон розподілу Пуассона.

Глава 6
ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

6.1. Закон великих чисел

Раніше відзначалось, що теорія ймовірностей – це розділ математики, в якому виявляються закономірності великої кількості випадкових подій. Ця закономірність проявляється в тому, що при спостереженні великої кількості випадкових подій має місце незмінність результату. Так, при спостереженні великої кількості результатів незалежних випробувань виявляється незмінність частоти випадкових подій $\tilde{P}^*(A)$. Оскільки при повторенні незалежних і рівноймовірних випробувань випадкова величина X_i – кількість появи події A при i-му випробуванні – може приймати тільки два значення (один – коли подія A настала, та нуль – коли подія A не настала), то частота події $\tilde{P}^*(A)$ збігається з середнім значенням випадкових величин X_i при n випробуваннях. Тоді при великій кількості випробувань спостерігається незмінність середнього значення випадкових величин X_i. Виходить, при великій кількості випробувань n, які є незалежними та рівноймовірними, частота $\tilde{P}^*(A)$ та середнє значення випадкових величин мають властивість стійкості. Ця стійкість $\tilde{P}^*(A)$, яку трактують як статистичну стійкість, і виправдовує статистичне означення ймовірності випадкової події $\tilde{P}^*(A)$. Статистична стійкість $\tilde{P}^*(A)$ чи середнього значення випадкових величин

X_i становить в широкому розумінні фізичний зміст закону великих чисел, який слід тлумачити так: за достатньо великої кількості випробувань результат окремого випробування практично не впливає на середній результат. А це означає, що за достатньо великої кількості випробувань, в яких спостерігаються можливі значення випадкової величини X, їх середнє значення практично стає невипадковою величиною, оскільки результат кожного окремого досліду на нього практично не впливає.

Виходячи з такого змісту закону великих чисел, П. Л. Чебишевим у 1845 році був сформульований принцип "практичної переконливості", який полягає в тому, що якщо ймовірність деякої події достатньо мала, то слід вважати, що в окремому досліді ця подія практично не відбувається.

Формально закон великих чисел реалізовується переліком граничних теорем, кожна з яких виявляє за певних умов та за достатньо великої кількості дослідів наближення середніх результатів можливих значень випадкової величини, яка розглядається в досліді, до деякої невипадкової величини, яка є сталою.

Відоме поняття границі: змінна X_n при зростанні n наближається до сталої границі a, якщо різниця за модулем $|X_n - a|$ стає меншою за будь-яке невід'ємне ε для всіх значень n, починаючи з деякого достатньо великого числа. Якщо виходити із статистичного означення ймовірності випадкової події, то для частоти випадкової події $\tilde{P}^*(A)$ та її ймовірності $P(A)$ визначення такого твердження границі слід визнати некоректними. Фізично немає нічого неможливого в тому, наприклад, що за достатньо великої кількості дослідів, які полягають у виявлені появи тієї чи іншої грані при підкидані монети, що частота появи орла відхилиться від ймовірності цієї події на великому $\varepsilon_1 > \varepsilon$. Так, якщо монета підкидається 1 000 разів, то можливо, що всі 1 000 разів випаде решка, але така подія, яка полягає в тому, що при підкидані монети 1 000 разів випаде решка, є тільки практично неможливою. Тому при розгляді послідовності випадкових величин $\widehat{X}_n$ розглядають границю за ймовірністю.

Означення. *Послідовність випадкових величин* $\widehat{X}_n$ *наближається за ймовірністю до невипадкової величини a, якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *ймовірність нерівності* $\left|\widehat{X}_n - a\right| \le \varepsilon$ *при* $n - \propto$ *дорівнює одиниці, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\widehat{X}_n - a\right| \le \varepsilon\right) = 1.$$

Це означення свідчить про те, що якими б не були довільно малими наперед задані $\varepsilon > 0$ та $\delta > 0$, завжди можна знайти таке велике число *N*, за якого для всіх *n* > *N* виконується нерівність $P\left(\left|\widehat{X}_n - a\right| \le \varepsilon \right) > 1 - \delta$.

Доказ сукупності граничних теорем теорії ймовірностей, які за своїм формулюванням описують закон великих чисел, оснований на нерівності П. Л. Чебишева .

6.2. Нерівність П. Л. Чебишева

Нерівність П. Л. Чебишева має таке формулювання.

Для будь-якої випадкової величини, яка має кінцеву дисперсію, при довільному $\varepsilon > 0$ *справедливо*

$$P\left(\left|X - m_x\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D[X]}{\varepsilon^2}, \tag{6.1}$$

тобто нерівність П. Л. Чебишева стверджує, що ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання на величину, яка перевищує будь-яке невід'ємне число ε*, обмежена зверху величиною* $\frac{Dx}{\varepsilon^2}$.

Для доведення цієї нерівності розглянемо на числовій прямій інтервал, зображений на рис. 6.1.

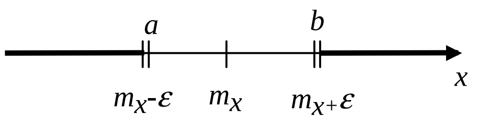

Рис. 6.1. Інтервали відхилення $\left| X - m_x \right| \ge \varepsilon$

Маємо

$$P\left(\left| X - m_x \right| \ge \varepsilon\right) = $$

$$= P\left(X \notin (a, b) \right) = $$

$$= \int\limits_{(|x - m_x| \ge \varepsilon)} f(x)\,dx \le$$

$$\le \int\limits_{(|x - m_x| \ge \varepsilon)} \frac{(x - m_x)^2}{\varepsilon^2} f(x)\,dx,$$

оскільки

$$\frac{(x - m_x)^2}{\varepsilon^2} > 1.$$

Тоді

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{(|x-m_x|\ge\varepsilon)}(x-m_x)^2 f(x)dx\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx=\frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Виходить,

$$P(|X-m_x|\ge\varepsilon)\le\frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Оскільки

$$P(|X-m_x|\ge\varepsilon)+P(|X-m_x|<\varepsilon)=1,$$

то

$$P(|X-m_x|<\varepsilon)>1-\frac{D[X]}{\varepsilon^2}. \qquad (6.2)$$

Вирази (6.1) та (6.2) дають змогу отримати відповідно верхню та нижню границю: $P(|X-m_x|\ge\varepsilon)$; $P(|X-m_x|<\varepsilon)$. Аналогічно проводиться доведення нерівності П. Л. Чебишева у випадку, коли розглядається дискретна випадкова величина X, яка приймає свої можливі значення x_1, x_2, …, x_n з імовірностями P_1, P_2, …, P_n, але тільки замість інтегралів розглядаються суми для тих значень x_i, для яких $|x_i-m_x|\ge\varepsilon$. Для неперервної випадкової величини X $P(X=m_x-\varepsilon)=P(X=m_x+\varepsilon)=0$, але в (6.1) залишимо символ рівності, маючи на увазі, що (6.1) справедливе й для дискретної випадкової величини.

Задача 6.1. Для неперервної величини X, яка має математичне сподівання m_x та середнє квадратичне відхилення σ_x, оцінити ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина відхиляється від свого математичного сподівання на величину, яка перевищує $3\sigma_x$, та порівняти цю оцінку з імовірністю цієї ж події в разі, коли випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу.

Розв'язання. Оцінку ймовірності визначеної події проведемо з (6.1).

Тоді

$$P\left(\left|X-m_x\right|\geq\varepsilon\right)=P\left(\left|X-m_x\right|\geq 3\sigma_x\right)\leq\frac{D[X]}{(3\sigma_x)^2}=\frac{\sigma_x^2}{9\sigma_x^2}=\frac{1}{9}. \quad (6.3)$$

Визначимо точне значення ймовірності цієї події за умови, що випадкова величина *X* підпорядкована нормальному закону розподілу.

Маємо

$$P\left(\left|X-m_x\right|\geq\varepsilon\right)=1-P\left(\left|X-m_x\right|<\varepsilon\right)=$$

$$=1-P\left(m_x-\varepsilon<X<m_x+\varepsilon\right)=$$

$$=1-P\left(m_x-3\sigma_x<X<m_x+3\sigma_x\right)=$$

$$=1-\left[\Phi\left(\frac{m_x+3\sigma_x-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{m_x-3\sigma_x-m_x}{\sigma_x}\right)\right]=$$

$$=1-\left[\Phi(3)+\Phi(3)\right]=1-2\Phi(3)=1-2\cdot 0{,}498\ 6=0{,}002\ 8.$$

Як видно, оцінка ймовірності події, яка полягає в тому, що випадкова величина відхиляється від свого математичного сподівання на величину, яка перевищує $3\sigma_x$, дорівнює 0,111 1, а значення ймовірності цієї події за умови, що випадкова величини *X* підпорядкована нормальному закону, дорівнює 0,002 8. Тобто нерівність П. Л. Чебишева дає досить грубу оцінку ймовірності події, яка розглядається, у порівнянні з точним значенням імовірності цієї події в тому разі, коли закон розподілу випадкової величини є нормальним, оскільки 0,111 1 значно більше, ніж 0,002 8.

Зауваження 1. При розв'язанні цієї задачі можна було скористатися відомим "правилом $3\sigma_x$", яке має місце в тому разі, коли випадкова величина підпорядкована нормальному закону розподілу, та яке визначає, що $P\left(\left|X-m_x\right|<3\sigma_x\right)\cong 0{,}997$.

Зауваження 2. Розв'язання цієї задачі також свідчить про те, що для будь-якої випадкової величини ймовірність події, яка полягає в тому, що "правило $3\sigma_x$" не виконується, не перевищує $\frac{1}{9}$.

Розв'язання цієї задачі дозволяє визначити таке: оцінка за (6.1) є достатньо грубою верхньою границею, а оцінка за (6.2) є достатньо грубою нижньою границею. Цей факт можна визначити як недолік при практичному використанні (6.1) та (6.2). Але те, що ці оцінки за (6.1) та (6.2) при практичному використанні можуть бути отримані без знання закону розподілу випадкової величини *X*, є суттєвою перевагою нерівності П. Л. Чебишева.

6.3. Теорема П. Л. Чебишева

Розглядається випадкова величина *X* з відомим математичним сподіванням m_x та σ_x^2. Це означає, що відомий закон розподілу *X*. Нехай $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ – генеральна сукупність можливих значень випадкової величини *X*, з якої проводиться $n < k$ серій незалежних випадкових вибірок $\left\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ \ldots, \ x_{i_{n_i}}\right\}, i = \overline{1, n}$, де n_i – кількість випробувань в i-й серії, кожна з яких розглядається як можливі значення випадкової величини X_i, $i = \overline{1, n}$. У такому разі кажуть: над випадковою величиною *X* проводиться n незалежних дослідів, в яких вона приймає значення X_i, $i = \overline{1, n}$.

Введено до розгляду випадкову величину

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i . \tag{6.4}$$

Теорема П. Л. Чебишева стверджує таке.

При наближенні кількості незалежних випробувань до нескінченності ($n \to \infty$) *середнє арифметичне значення випадкових величин, які спостерігаються при* n *незалежних випробуваннях над випадковою величиною X, прямує за ймовірністю до її математичного сподівання, тобто*

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x \right| < \varepsilon \right) = 1. \tag{6.5}$$

Доведення. Оскільки X_i, $i = \overline{1, n}$ – значення випадкової величини *X* при n незалежних випробуваннях, які відповідають випадковим вибіркам, зазначеним вище, то $m_{x_i} = m_x$ та $\sigma_{x_i}^2 = \sigma_x^2 \quad \forall \quad i = \overline{1, n}$.

Розглянемо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини Y_n.

Маємо

$$M[Y_n] = M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{n \cdot m_x}{n} = m_x;$$

$$D[Y_n] = D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{n\sigma_x^2}{n^2} = \frac{\sigma_x^2}{n}.$$

Тобто

$$\left.\begin{aligned} & M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = m_x; \\ & D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{\sigma_x^2}{n}. \end{aligned}\right| \tag{6.6}$$

Виходить, математичне сподівання середнього арифметичного випадкових величин X_i, $i = \overline{1, n}$, які спостерігаються при незалежних випробуваннях над випадковою величиною X, збігається з математичним сподіванням випадкової величини X, а дисперсія середнього арифметичного випадкових величин X_i, $i = \overline{1, n}$ при зростанні кількості випробувань зменшується.

Для випадкової величини Y_n запишемо нерівність П. Л. Чебишева (6.2).

Тоді

$$P\left(\left|Y_n - m_{y_n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D[Y_n]}{\varepsilon^2},$$

а з урахуванням (6.6) будемо мати

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}-m_x\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{\sigma_x^2}{n\varepsilon^2},$$

де видно, що якщо $n\to\infty$, то (6.5) виконується. Теорема доведена. Слід відзначити, що якщо всі можливі значення випадкової величини X складають генеральну сукупність, то випадковим вибіркам з генеральної сукупності $\{x_i\}$, $i=\overline{1,n}$, буде відповідати $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ середнє арифметичне результатів спостережень як можливе значення випадкової величини $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$. Тоді (6.5) має таке тлумачення: при необмеженому зростанні кількості спостережень $n\to\infty$ середнє арифметичне результатів спостережень за ймовірністю прямує до математичного сподівання випадкової величини X.

Задача 6.2. Помилка при округленні результату вимірювання як випадкова величина підпорядкована рівномірному закону розподілу на інтервалі (–0,5; 0,5). Оцінити ймовірність того, що сумарна помилка за абсолютною величиною буде не менше 15 при округленні 100 результатів незалежних вимірювань.

Розв'язання. Нехай X_i – випадкова величина помилки округлення при i-му вимірюванні. Оскільки випадкова величина X_i підпорядкована рівномірному закону розподілу на інтервалі (– 0,5; 0,5), то

$$M[X_i]=\frac{-0{,}5+0{,}5}{2}=0;\ D[X_i]=\frac{[0{,}5-(-0{,}5)]^2}{12}=\frac{1}{12}.$$

Якщо Y – випадкова величина сумарної помилки при округленні 100 результатів незалежних вимірювань, тоді $Y=\sum_{i=1}^{100} X_i$, а за граничною теоремою П. Л. Чебишева (6.5) маємо

$$P\left(\left|\ Y=\sum_{i=1}^{100} X_i\ \right|\geq 0{,}15\right)\leq\frac{\sigma_{x_i}^2}{n\cdot 0{,}15^2}=\frac{1}{12\cdot 100\cdot 0{,}15^2}=\frac{1}{27}=0{,}04\,.$$

Тобто ймовірність події, яка полягає в тому, що сумарна помилка за абсолютною величиною при округленні 100 результатів незалежних вимірювань буде не менше 15, не перевищує 0,04.

6.4. Узагальнена теорема П. Л. Чебишева

Нехай над випадковою величиною X проводиться n незалежних різних дослідів і кожному i-му досліду відповідає X_i – випадкова величина. У цьому разі закони розподілу випадкових величин будуть різними (можуть збігатися лише види законів розподілу), а тому будуть різними їх математичні сподівання m_{x_i}, $i=\overline{1,n}$ та дисперсія $\sigma_{x_i}^2$, $i=\overline{1,n}$.

Узагальнена теорема П. Л. Чебишева стверджує таке.

Якщо розглядається послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, *які мають різні математичні сподівання* m_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots$ *та різні дисперсії* $\sigma_{x_i}^2$, $i = 1, 2, \ldots$, *які обмежені зверху одним і тим же числом L, то різниця між середнім арифметичним випадкових величин* X_i, *які спостерігаються, та середнім арифметичним їх математичних сподівань при наближені кількості випробувань до нескінченості* ($n\to\infty$) *прямує за ймовірністю до нуля, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right]\ \right|\geq\varepsilon\right)=0\,. \tag{6.7}$$

Доведення. Виходячи з того, що $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n}$ залежить від n, та маючи на увазі зазначене вище означення наближення послідовності випадкових величин до невипадкової величини за ймовірністю, маємо таке судження.

Розглядаємо

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \text{та} \quad M[Y_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i};$$

$$D[Y_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] \le \frac{nL}{n^2} = \frac{L}{n}.$$

Згідно з нерівністю П. Л. Чебишева маємо, що

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{L}{n\varepsilon^2}.$$

Яким би малим не було довільне ε, завжди можна вибрати n таким великим, щоб права частина зазначеного виразу була б менше від довільно визначеного δ, тому

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| \ge \varepsilon\right) \le \delta,$$

а якщо $n \to \infty$, то маємо (6.7).

Якщо перейти до протилежної події, то будемо мати

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta,$$

а якщо $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| < \varepsilon\right) = 1.$$

6.5. Теорема А. А. Маркова

Розглядається послідовність залежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, які мають математичні сподівання $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}, \ldots$ та кореляційну матрицю $\left\| R_{x_i, x_j} \right\| = \left\| M\left[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j \right] \right\|$, розміри якої залежать від n. Як і раніше,

$$M[Y_n] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i},$$

а також відомо, що для залежних випадкових величин

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] + 2\sum_{i<j} R_{x_i,x_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{x_i,x_j},$$

тобто дисперсія суми залежних випадкових величин дорівнює сумі елементів кореляційної матриці.

Тоді

$$D[Y_n] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{x_i,x_j}.$$

Якщо на елементи кореляційної матриці накласти вимоги, які полягають в тому, щоб $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{x_i,x_j}$ при $n\to\infty$ зростала б повільніше ніж n^2, то тоді $\lim_{n-\propto} D[Y_n] = 0$.

Формулювання теореми А. А. Маркова є таким.

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ є залежними з математичними сподівання $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}, \ldots$ та

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=n}^{n} X_i\right] = 0, \tag{6.8}$$

то різниця між середнім арифметичним цих випадкових величин та середнім арифметичним їх математичних сподівань при $n - \propto$ прямує за ймовірністю до нуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| \ge \varepsilon\right) = 0. \tag{6.9}$$

Доведення. До випадкової величини Y_n застосуємо нерівність П. Л. Чебишева, тоді маємо

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| \ge \varepsilon \right) \le \frac{D[Y_n]}{\varepsilon^2}.$$

Оскільки за (6.8) при $n \to \infty$ $D[Y_n] \to 0$, то при довільно малому ε можна вибрати n таким великим, що $\dfrac{D[Y_n]}{\varepsilon^2} < \delta$ для будь-якого $\delta > 0$, тоді

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| \ge \varepsilon \right) \le \delta,$$

а ймовірність протилежної події

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| < \varepsilon \right) > 1 - \delta,$$

що й стверджує (6.9). Для протилежної події, яка зазначена в (6.9), маємо

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Задача 6.3. Залежні випадкові величини X_1, X_2, ... мають однакові математичні сподівання та обмежені дисперсії. Чи можна до послідовності X_1, X_2, ... застосовувати закон великих чисел, якщо всі кореляційні моменти $R_{X_i X_j}$, $i \ne j$; $i,j = 1, 2, ...$ є від'ємними?

Розв'язання. Нехай $\sigma_{\max}^2$ є найбільшою з дисперсій випадкових величин $X_1, X_2, ...$ Тоді

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} R_{X_i X_j} \le \sum_{i=1}^{n} D[X_i] \le n\sigma_{\max}^2.$$

Згідно з граничною теоремою А. А. Маркова (6.9) маємо

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| \ge \varepsilon\right) = 0,$$

якщо

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = 0.$$

Розглянемо випадок, зазначений в умові задачі, коли дисперсія середнього арифметичного випадкових величин прямує до нуля ($n - \propto$).

Маємо

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sigma_{\max}^2}{n^2} = 0.$$

Тобто умови граничної теореми А. А. Маркова виконуються, а виходить, до послідовності випадкових величин X_1, X_2, ... можна застосувати закон великих чисел.

Задача 6.4. Кожна з незалежних випадкових величин X_k з однаковою ймовірністю може приймати два значення: - k^S та k^S; $k=1,2$ .... За якого S для послідовності X_1, X_2, ... виконуються умови граничної теореми А. А. Маркова?

Розв'язання. Для випадкової величини X_k маємо

$$M[X_k] = -k^S \cdot \frac{1}{2} + k^S \cdot \frac{1}{2} = 0;$$

$$D[X_k] = (-k^S - 0)^2 \frac{1}{2} + \left(k^S - 0\right)^2 \frac{1}{2} = k^{2S}.$$

Тоді

$$D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_k] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^{2S}.$$

Якщо $S = \frac{1}{2}$, то маємо

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2S} = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

як суму арифметичної прогресії, тоді

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\left[X_k\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Тобто якщо $S = \frac{1}{2}$, а виходить, і при $S > \frac{1}{2}$ умова граничної теореми А. А. Маркова не виконується. До послідовності випадкових величин X_1, X_2, ... X_k, ... закон великих чисел не можна застосовувати.

Якщо $S < \frac{1}{2}$, то $2S < 1 - \nu$, де $\nu > 0$, тоді

$$D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^{1-\nu} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(1^{1-\nu} + 2^{1-\nu} + ...+ n^{1-\nu}\right) \le \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot n^{1-\nu} = \frac{1}{n^{\nu}};$$

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\nu}} = 0 \text{ при } 0 < \nu < 1.$$

Виходить, до послідовності випадкових величин X_1, X_2, ... може бути застосована гранична теорема А. А. Маркова, тобто може бути застосований закон великих чисел.

6.6. Теорема Я. Бернуллі

Теорема Я. Бернуллі встановлює зв'язок між частотою появи подія *A* та її ймовірністю.

Теорема стверджує таке.

При необмеженому зростанні кількості дослідів з незалежними наслідками частота події A прямує за ймовірністю до її ймовірності, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|P^*(A) - P(A)\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{6.10}$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

де X_i – випадкова величина кількості появи події A в i-му досліді. Ця випадкова величина може приймати два можливі значення: один з ймовірністю $P(A) = P$ та нуль з ймовірністю $1 - P(A) = 1 - P$. Закон розподілу у вигляді ряду розподілу наведений в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Ряд розподілу випадкової величини X_i

$x_i^{(k)}$	$x_i^{(k=1)} = 1$	$x_i^{(k=2)} = 0$
$P\left(X_i = x_i^{(k)}\right)$	$p^{(k=1)} = P$	$p^{(k=2)} = 1 - P$

Тоді $M[X_i] = \sum_{k=1}^{m} x_i^{(k)} p^{(k)} = 1 \cdot P + 0(1-P) = P$;

$$D[X_i] = \sum_{k=1}^{m} \left(x_i^{(k)} - m_{x_i}\right)^2 p^{(k)} = (1-P)^2 P + (0-P)^2 (1-P) =$$

$$= (1-P)\left(P - P^2 + P^2\right) = P(1-P).$$

Тобто

$$\left.\begin{aligned} &M[X_i] = P(A); \\ &D[X_i] = P(A)(1 - P(A)). \end{aligned}\right| \qquad (6.11)$$

Випадкова величина $\sum_{i=1}^{n} X_i$ є кількістю подій A в n дослідах з незалежними наслідками, а

$$P^*(A) = Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n};$$

$$M\left[P^*(A)\right]=M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left[X_i\right]=\frac{1}{n}\cdot nP=P;$$

$$D\left[P^*(A)\right]=D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\left[X_i\right]=\frac{n\cdot P(1-P)}{n^2}=\frac{Pq}{n},$$

де $q=1-P$.

Тобто маємо

$$\left.\begin{aligned} &M\left[P^*(A)\right]=P;\\ &D\left[P^*(A)\right]=\frac{Pq}{n}. \end{aligned}\right| \qquad (6.12)$$

Використаємо нерівність П. Л. Чебишева

$$P\left(\left|Y-M[Y]\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D[Y]}{\varepsilon^2};$$

$$P\left(\left|P^*(A)-M\left[P^*(A)\right]\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D\left[P^*(A)\right]}{\varepsilon^2};$$

$$P\left(\left|P^*(A)-P(A)\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{Pq}{n\varepsilon^2},$$

де видно, що якщо $n\to\infty$, то (6.10) виконується. Теорема доведена.

При практичному використанні теорема Я. Бернуллі користується виразами

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{Pq}{n\varepsilon^2} \qquad (6.13)$$

або

$$P\left(\left|m-nP\right|\le n\varepsilon\right)\ge 1-\frac{Pq}{n\varepsilon^2}, \qquad (6.14)$$

де m – кількість наслідків при n незалежних випробуваннях, за яких відбувається подія A.

Задача 6.5. Виготовлено 100 000 виробів. Імовірність події A, яка полягає в тому, що виріб відповідає вимогам стандарту, $P(A)=0{,}95$. Оцінити ймовірність події, яка полягає в тому, що кількість виробів, які відповідають вимогам стандарту, буде не менше 94 000 та не більше 96 000.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що проведено n = 100 000 дослідів, які характеризуються незалежними та рівноймовірними наслідками, тому випадкова величина $X = m$ – кількість наслідків, за яких відбувається подія A, підпорядкована біноміальному закону розподілу. Тоді $M\,[X] = nP$. Використовуючи (6.14), маємо

$$P\left(94\,000 \le X = m \le 96\,000\right) = P\left(\left|m - 100\,000 \cdot 0{,}95\right| \le 1\,000\right) \ge$$

$$\ge 1 - \frac{0{,}95 \cdot 0{,}05}{100\,000 \cdot 0{,}01^2} \cong 0{,}995 .$$

Виходить, з імовірністю не менше 0,995 можна стверджувати, що кількість виробів, які відповідають стандарту, буде перебувати в межах (94 000 – 96 000).

Задача 6.6. При кожному випробуванні сприятливий наслідок (випадкова подія A) відбувається з імовірністю P = 0,8. Оцінити ймовірність того, що при 300 незалежних випробуваннях подія A настане від 230 до 250 разів.

Розв'язання. Введемо до розгляду випадкову величину X – кількість появ події A при n = 300 випробуваннях.

Використаємо граничну теорему Я. Бернуллі, маємо

$$m_x = nP = 300 \cdot 0{,}8 = 240; \quad P\left(\left|m - nP\right| \le n\varepsilon\right) \ge 1 - \frac{Pq}{n\varepsilon^2},$$

тоді

$$P(230 \le X \le 250) = P\left(\left|X - m_x\right| \le 10\right) = P\left(\left|X - 240\right| \le 10\right) \ge 1 - \frac{Pq}{n\varepsilon^2},$$

а оскільки $n\varepsilon = 10$, то $\varepsilon = \frac{10}{300} = \frac{1}{30}$, тоді

$$P\left(\left|X - 240\right| \le 10\right) \ge 1 - \frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{300\left(\frac{1}{30}\right)^2} = 0{,}52 .$$

6.7. Теорема Пуассона

Теорема Пуассона має відношення до випадку, коли розглядається повторення незалежних дослідів з різноймовірними наслідками. При i-му досліді подія A може відбутися з імовірністю P_i, i = 1, 2 … . Теорема Пуассона стверджує таке.

При наближенні кількості незалежних випробувань до нескінченності ($n \to \infty$) різниця між частотою події A та середнім арифметичним її ймовірностей прямує за ймовірністю до нуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| P_n^*(A) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i \right| \geq \varepsilon \right) = 0. \qquad (6.15)$$

Доведення. Доведення теореми Пуассона випливає з узагальненої теореми П. Л. Чебишева. Дійсно, оскільки

$$P_n^*(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

де X_i – випадкова величина кількості наслідків, в яких відбувається подія A при i-му досліді, та $M[X_i]=P_i$, $D[X_i]=P_i(1-P_i)$, $i=1, 2, \ldots$. Дисперсія X_i при будь-якому i є обмеженою величиною $L = 0{,}25$, оскільки максимальне значення P_i $(1 - P_i)$ досягається при $P_i = 0{,}5$. Застосовуючи узагальнену теорему П. Л. Чебишева, переконаємось у вірності (6.15).

6.8. Локальна гранична теорема Муавра – Лапласа

Розглянемо закономірність, яка спостерігається для схеми послідовних незалежних випробувань. Це означає, що для послідовності повних груп подій $A_1^{(s)}$, $A_2^{(s)}, \ldots, A_k^{(s)}$, $s=\overline{1,n}$ імовірність появи події $P\left(A_i^{(s)}\right)$, $i=\overline{1,k}$ в групі з індексом s не залежить ні від значення цього індексу, ні від того, які події відбудуться в інших групах, та $\sum_{i=1}^{k} P\left(A_i^{(s)}\right) = 1$. Така схема вперше була розглянута Я. Бернуллі при $k = 2$. Ця схема отримала назву схема Бернуллі, для якої справедлива формула Бернуллі

$$P_{n,m} = C_n^m P^m q^{n-m},$$

де $q = 1 - P$, а $P_{n,m}$ – ймовірність події, яка полягає в тому, що з n випробувань рівно в m із них відбудеться наслідок, який нас цікавить (розглядається подія A) та рівно $(n\!-\!m)$ разів відбудеться подія $\overline{A}$. Очевидно, що $\sum_{m=0}^{n} P_{n,m} = 1$. Якщо X – випадкова величина – кількість подій A при n дослідах, то $P(X = m) = P_{n,m}$. Ці ймовірності є коефіцієнтами при z^m бінома

$$(q+Pz)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m P^m q^{n-m} z^m = \sum_{m=0}^{n} P_{n,m} z^m .$$

Тому вважають, що випадкова величина X підпорядкована біноміальному закону розподілу. Відомо, що коефіцієнти бінома $(q+Pz)^n$ спочатку зростають до певного значення, а потім спадають. Щоб визначити умови, за яких коефіцієнти зростають та спадають, розглянемо $P_{n,m}$ як функцію від *n*. Тоді будемо мати

$$\frac{P_{n,m+1}}{P_{n,m}} = \frac{\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} P^{m+1} q^{n-m-1}}{\frac{n!}{m!(n-m)!} P^m q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1} \frac{P}{q},$$

якщо $\frac{n-m}{m+1}\frac{P}{q} \geq 1$, то $nP-mP \geq (m+1)(1-P)$; $m \leq nP-q$

і $P_{n,m+1} \geq P_{n,m}$;

якщо $m > nP-q$, то $P_{n,m+1} < P_{n,m}$.

Тоді якщо m приймає малі значення до $nP - q$, то $P_{n,m}$ зростає, а потім, зі зростанням m, $P_{n,m}$ спадає. Найбільше значення $P_{n,m}$ визначає моду M_{o_x} випадкової величини X. Для біноміального закону розподілу маємо $nP-q \leq M_{o_x} \leq nP+P$. Зазначене вище дозволяє встановити, що якщо $nP-q<0$, то $P_{n,o} > P_{n,1} > .... > P_{n,m}$, а якщо $nP-q=0$, то $P_{n,o} = P_{n,1} > P_{n,2} > ... > P_{n,m}$.

Повернемося до змісту задачі 6.5. При її розв’язанні відзначалося, що випадкова величина $X = m$ підпорядкована біноміальному закону розподілу, тому ймовірність події, яка полягає в тому, що кількість виробів, які відповідають вимогам стандарту, буде не менше 94 000 та не більше 96 000, може бути визначена точно за формулою Бернуллі, а саме

$$P\left(94\,000 \le X = m \le 96\,000\right) = \sum_{m=94\,000}^{96\,000} C_{10^5}^{m} \cdot 0{,}95^{m} \cdot 0{,}05^{10^5 - m}.$$

Видно, що цей підрахунок пов’язаний з розрахунковими труднощами, які виникають при підрахунку кількості сполучень C_n^m із $n = 10^5$ елементів по m елементів, яка змінюється від 94 000 до 96 000 елементів.

Відзначена вище закономірність зміни $P_{n,m}$ при зміні m та належність розрахункових труднощів при розрахунку сполучень при великих n та m привели до визначення граничних виразів, які б дозволили з достатньою точністю розрахувати ймовірності випадкових подій зазначеного вище змісту.

Таке граничне співвідношення вперше було запропоноване у 1730 р. Муавром для випадку, коли ймовірність сприятливого наслідку в досліді дорівнює $\frac{1}{2}$. Цей результат був узагальнений Лапласом на випадок, коли $0 < P(A) < 1$ та отримав назву локальної теореми Муавра – Лапласа.

Теорема. *Якщо ймовірність появи сприятливого наслідку* A *при* n *незалежних дослідах є сталою величиною* $0 < P < 1$, *то ймовірність* $P_{n,m}$ *того, що в цих дослідах подія* A *настане рівно* m *разів, задовольняє співвідношенню*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n,m}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi nPq}} e^{-\frac{(m-nP)^2}{2nPq}}} = 1 \qquad (6.16)$$

рівномірно для всіх m, *для яких* $\dfrac{m - nP}{2\sqrt{nPq}}$ *перебуває у будь-якому скінченному інтервалі.*

Задача 6.7. Імовірність виготовлення бракованого виробу дорівнює $0{,}005$. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що з 10 000 виробів, взятих навмання, рівно 40 будуть бракованими.

Розв’язання. Використовуючи (6.16), маємо

$$P_{n,m} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 10\,000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} e^{-\frac{(40 - 100\,00 \cdot 0{,}005)^2}{2 \cdot 10\,000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} \approx 0{,}002\,06.$$

Точне значення зазначеної ймовірності, розраховане за формулою Бернуллі, дає $P_{n=10\ 000,m=40}=0{,}001\ 97$.

Розв’язання цієї задачі свідчить про те, що співвідношення (6.16) дає задовільний результат при практичному його використанні.

6.9. Інтегральна гранична теорема Муавра – Лапласа

Гранична інтегральна теорема Муавра – Лапласа має таке формулювання.

Теорема. *Якщо* m *– кількість появ випадкової події* A *(сприятливих наслідків) при* n *незалежних випробуваннях, в кожному з яких імовірність цієї події дорівнює* $P(0<P<1)$, *то рівномірно по відношенню* a *та* b $(-\infty \le a<b\le +\infty)$ *при зростанні кількості випробувань до нескінченості* $(n\to\infty)$ *виконується співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a\le\frac{m-nP}{\sqrt{nPq}}<b\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\,. \tag{6.17}$$

Гранична теорема Я. Бернуллі була опублікована у 1713 р. Її практичне використання пов’язане із записом (6.13) та дає оцінку ймовірності події, яка полягає в тому, що при n незалежних випробуваннях, у кожному з яких сприятливий наслідок (випадкова подія A) може статися з ймовірністю $P(0<P<1)$, частота події A $P^*(A)$ відхилиться від імовірності цієї події $P(A)$ на величину, не більшу, ніж деяке невід’ємне ε. Інтегральна гранична теорема (6.17) в окремому випадку була доведена Муавром у 1730 році, а узагальнена на випадок $0<P<1$ у 1812 році Лапласом. Одним з практичних використань (6.17) є визначення (на відміну від теореми Я. Бернуллі, яка дозволяє лише оцінити її) імовірності зазначеної вище випадкової події. З цією метою розглянемо таке:

$$P\left(\left|P^*(A)-P(A)\right|<\varepsilon\right)=P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|<\varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon<\frac{m-nP}{n}<\varepsilon\right)=$$

$$=P\left(-\varepsilon\frac{n}{\sqrt{nPq}}<\frac{n(m-nP)}{\sqrt{nPq}\cdot n}<\varepsilon\frac{n}{\sqrt{nPq}}\right)=P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}<\frac{m-nP}{\sqrt{nPq}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}\right)\cong$$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}\right),$$

де $P^*(A)=\frac{m}{n}$ – випадкова величина, оскільки m (кількість спостережень, які відповідають появі події A у вибірці), – є випадковою величиною; $P(A)=P$; $\frac{n}{\sqrt{nPq}}>0$, тому в двохсторонній нерівності знак нерівності не змінюється, а $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – є функцією Лапласа.

Тобто

$$P\left(\left|P^*-P\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}\right). \tag{6.18}$$

Примітка. Слід відзначити, що якщо $n - \propto$, то $P\left(\left|P^*-P\right|<\varepsilon\right)\to 1$, оскільки $\Phi(\infty)=\frac{1}{2}$. Це означає, що отримується вже відомий результат, який зазначений вище як гранична теорема Бернуллі.

Практичне використання (6.18) дозволяє розв’язувати такі задачі.

1. Визначати ймовірність того, що частота появи події A відхилиться від імовірності цієї події не більш, ніж на ε.

2. Визначати кількість випробувань, яку необхідно провести для того, щоб з імовірністю не менше β можна було б стверджувати, що частота сприятливого наслідку (подія A) відхилилась від імовірності цієї події не більш, ніж на ε.

3. Визначати границі, в яких буде перебувати випадкова величина $\frac{m-nP}{\sqrt{nPq}}$, при n незалежних випробуваннях, якщо ймовірність випадкової події A дорівнює P, де $0<P<1$, та ймовірність того, що частота випадкової події A відхилиться від імовірності цієї події, дорівнює β.

Задача 6.8. Скільки разів треба підкинути монету, щоб імовірність отримати відхилення частоти появи орла від імовірності його появи на величину, яка не перевищує $\varepsilon = 0{,}05$, була б не менше $0{,}99$?

Розв'язання. Із (6.18) випливає, що

$$P\left(\left|P^* - P\right| < 0{,}05\right) = 2\Phi\left(0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right) = \beta \geq 0{,}99;$$

$$\Phi\left(0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}25}}\right) \geq 0{,}495;\ 0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}25}} \geq 2{,}58;$$

$$\frac{n}{0{,}25} \geq 2\ 662{,}56;\ n \geq 665{,}6;\ \ n = 666.$$

Тобто щоб з імовірністю $\beta = 0{,}99$ бути впевненим у тому, що частота появи орла відхилиться від імовірності появи орла на величину, яка не перевищує $\varepsilon = 0{,}05$, необхідно провести 666 випробувань.

Зауваження. Із змісту задачі 6.8 можна зробити висновок, що якщо прийняти $\beta_1 < \beta$ та $\varepsilon_1 > \varepsilon$, то необхідна кількість випробувань буде значно меншою. Так, при $\beta_1 = 0{,}75$ та $\varepsilon_1 = 0{,}1$ $n = 34$.

Задача 6.9. Визначити ймовірність того, що частота появи орла відхиляється від імовірності цієї події не більш, ніж на $\varepsilon = 0{,}005$ при кількості випробувань $n = 10\ 000$.

Розв'язання. З (6.18) маємо

$$P\left(\left|P^* - P\right| < 0{,}005\right) = 2\Phi\left(0{,}005\sqrt{\frac{10000}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right) = 2\cdot 0{,}3413 \cong 0{,}683.$$

Задача 6.10. Визначити границі, в яких буде перебувати відхилення частоти появи орла від ймовірності тієї ж події з імовірністю не менш, ніж 0,9 при 1 000 випробувань.

Розв'язання. Використаємо (6.18). Маємо

$$P\left(\left|P^* - P\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{1\ 000}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right) = \beta \geq 0{,}9,$$

$$\varepsilon\sqrt{\frac{1\ 000}{0{,}25}}\geq 1{,}65;\ \varepsilon\geq 0{,}026;\ \varepsilon=0{,}027.$$

6.10. Гранична теорема О. М. Ляпунова

Гранична теорема О. М. Ляпунова пов'язана з визначенням закону розподілу суми випадкових величин, коли кількість доданків прямує до нескінченності. На практиці ця теорема О. М. Ляпунова має важливе значення, тому її називають центральною граничною теоремою теорії ймовірностей.

Розглянемо теорему О. М. Ляпунова в такому формулюванні.

Теорема. *Якщо випадкові величини* $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ *є незалежними та підпорядкованими одному й тому ж закону розподілу з математичним сподіванням* m_x *та дисперсією* σ_x^2, *то закон розподілу випадкової величини* $Y_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ *при необмеженому зростанні кількості доданків* ($n - \infty$) *наближається до нормального закону розподілу.*

Доведення. Розглянемо доведення для випадку, коли випадкові величини є неперервними.

Оскільки випадкові величини X_k підпорядковані одному й тому ж закону розподілу, то X_k, $k=\overline{1,n}$ відповідають одні й ті ж характеристичні функції, тобто $q_{x_1}(t)=q_{x_2}(t)=\ldots=q_x(t)$. Якщо X_k, $k=\overline{1,n}$ є незалежними, то характеристична функція випадкової величини Y_n має вигляд

$$q_{y_n}(t)=[q_x(t)]^n. \tag{6.19}$$

Подамо $q_x(t)$ у вигляді ряду Маклорена поблизу точки $t=0$ та обмежимось трьома членами ряду. Тоді

$$q_x(t)=q_x(t=0)+q_x'(t=0)t+\left[\frac{q_x''(t=0)}{2!}+\alpha(t)\right]\cdot t^2,$$

де при $t=0$ маємо $\alpha(t) - 0$.

Визначимо $q_x(t=0)$; $q_x'(t=0)$; $q_x''(t=0)$. З (5.6) $q_x(t=0)=1$, з (5.10) $q_x'(t=0)=i\alpha_1=im_x$; $q_x''(t=0)=i^2\alpha_2=-(\mu_2+\alpha_1^2)$, де α_1-

початковий момент першого порядку, а μ_2 – центральний момент другого порядку.

Приймемо $m_x = 0$, що відповідає перенесенню початку прямокутної системи координат в точку m_x та не обмежує узагальнення доведення теореми. Тоді $q_x'(t = 0) = 0$, а $q_x''(t = 0) = -\mu_2 = -\sigma_x^2$.

Вираз (6.19) буде мати вигляд

$$q_{y_n}(t) = \left[1 - \left[\frac{\sigma_x^2}{2} - \alpha(t)\right] \cdot t^2\right]^n . \tag{6.20}$$

Від випадкової величини Y_n перейдемо до нормованої випадкової величини

$$Z_n = \frac{Y_n}{\sigma_x \sqrt{n}}, \tag{6.21}$$

для якої маємо

$$D[Z_n] = D\left[\frac{Y_n}{\sigma_x\sqrt{n}}\right] = D\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sigma_x\sqrt{n}}\right] = \frac{\sum_{k=1}^{n} D[X_k]}{\sigma_x^2 \cdot n} = \frac{n \cdot \sigma_x^2}{\sigma_x^2 \cdot n} = 1,$$

тобто дисперсія Z_n не залежить від n.

Якщо довести, що закон розподілу Z_n при $n - \propto$ наближається до нормального закону розподілу, то тим самим буде доведено, що при $n - \propto$ закон розподілу випадкової величини Y_n також наближається до нормального закону розподілу, оскільки Y_n лінійно залежить від випадкової величини Z_n, як про це свідчить (6.21).

Розглянемо характеристичну функцію випадкової величини Z_n та покажемо, що при $n - \propto$ вона прямує до виразу характеристичної функції нормального закону розподілу.

Згідно з властивістю характеристичної функції (5.8) маємо

$$q_{z_n}(t) = \left[1 - \left[\frac{\sigma_x^2}{2} - \alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma_x^2}\right]^n ;$$

$$\ln q_{z_n}(t) = n\ln\left\{1-\left[\frac{\sigma_x^2}{2}-\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma_x^2}\right\}.$$

Нехай $\left[\frac{\sigma_x^2}{2}-\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma_x^2} = \chi$, тоді $\ln q_{z_n}(t) = n\ln(1-\chi)$, якщо n прямує до нескінченності, то χ пряму до нуля, а при достатньо великому n величину χ слід вважати малою. Якщо $\ln(1-\chi)$ подати рядом Маклорена, який має вигляд

$$\ln(1-\chi) = -\chi - \frac{\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3} - \ldots - \frac{\chi^n}{n} - \ldots,$$

і утримати лише перший член ряду, то тоді

$$\ln q_{z_n}(t) = -n\chi;$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln q_{zn}(t) = \lim_{n\to\infty}[n(-\chi)] = \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{t^2}{2}+\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{\sigma_x^2}\right\} =$$

$$= -\frac{t^2}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{t^2}{\sigma_x^2}\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right) = -\frac{t^2}{2},$$

тому що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t^2}{\sigma_x^2}\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right) = 0,$$

оскільки при поданні $q_x(t)$ у вигляді ряду Маклорена при $t - 0$ $a(t) - 0$, а у нас

$$\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right) \to 0.$$

Виходить, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\ln q_{z_n}(t) = -\frac{t^2}{2};$$

$$\lim_{n\to\infty} q_{z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}. \qquad (6.22)$$

Випадкова величина Z_n за виразом (6.21) має $M[Z_n]=0$, $D[Z_n]=1$, а (6.22) відповідає (5.20), тобто відповідає виразу характеристичної функції нормального закону розподілу випадкової величини, для якої $m_x = 0$, а $\sigma_x^2 = 1$. Виходить сформульована теорема доведена.

Існують інші формулювання центральної граничної теореми теорії ймовірності в залежності від того, що приймають як міру однорідності доданків X_k.

О. М. Ляпуновим у 1900 році була доведена теорема у такому формулюванні.

Теорема. *Якщо* $X_1, X_2, \ ..., X_n$ *є незалежними випадковими величинами з математичними сподіваннями* $m_{x_1}, m_{x_2}, \ ..., m_{x_n}$ *та дисперсіями* $\sigma_{x_1}^2, \sigma_{x_2}^2, \ ..., \sigma_{x_n}^2$, *то випадкова величина*

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - m_{x_k}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}} \qquad (6.23)$$

при $n \to \infty$ *має нормальне розподілення, якщо можна підібрати таке* $\delta > 0$,

за якого

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} M\left[\left(X_k - m_{x_k}\right)^{2+\delta}\right]}{\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2\right)^{1+\frac{\delta}{2}}} = 0. \qquad (6.24)$$

Якщо в (6.24) прийняти $\delta = 1$, то будемо мати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} M\left[\left(X_k - m_{x_k}\right)^{3}\right]}{\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0, \qquad (6.25)$$

тобто тоді (6.25) визначає умови, які накладаються на треті центральні моменти випадкової величини Y_n. Оскільки $M[Y_n]=0$ та $D[Y_n]=1$, то граничне рівняння має вигляд

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha<\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-m_{x_k}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}}<\beta\right)=\text{Ц}(\beta)-\text{Ц}(\alpha), \tag{6.26}$$

де $\text{Ц}(\beta)$ та $\text{Ц}(\alpha)$ – функції Лапласа аргументів β та α відповідно.

Зміст умов (6.24) чи (6.25) полягає в тому, щоб в (6.23) не було таких доданків, вплив яких на розсіювання $\sum_{k=1}^{n} X_k$ був би занадто великим у порівнянні з впливом усіх останніх, а також не повинно бути великої кількості випадкових величин, вплив яких на розсіювання зазначеної суми був би непомірно малий у порівнянні із сумарним впливом решти доданків випадкових величин.

Зауваження 1. Узагальненою умовою в порівнянні з (6.24), при виконанні якої справедлива центральна гранична теорема теорії ймовірностей, є умова Ліндерберга, сформульована в 1922 році, яка має такий зміст:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\left(\left|x_k-m_{x_k}\right|>\tau\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}\right)}\left(x_k-m_{x_k}\right)^2 f_{x_k}(x)\,dx=0, \tag{6.27}$$

де τ – будь-яке невід’ємне число, а $f_{x_k}(x)$ – щільність розподілу випадкової величини X_k.

Фізичний зміст (6.27) полягає в такому. Уводиться до розгляду подія A_k – випадкова подія, яка полягає в тому, що буде виконуватись нерівність

$$\left|X_k-m_{x_k}\right|>\tau\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2},\ k=\overline{1,n}. \tag{6.28}$$

Тоді ймовірність того, що хоча б для однієї з n випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ буде виконуватись нерівність (6.28), має вигляд

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\left(\left|x_k - m_{x_k}\right| > \tau\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma^2_{x_k}}\right)} f_{x_k}(x)\,dx \le$$

$$\le \frac{1}{\left(\tau\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma^2_{x_k}}\right)^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\left(\left|x_k - m_{x_k}\right| > \tau\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma^2_{x_k}}\right)} \left(x_k - m_{x_k}\right)^2 f_{x_k}(x)\,dx .$$

Ця нерівність за умови (6.27) прямує до 0. Тому умова Ліндерберга (6.27) еквівалентна вимозі щодо рівномірної малості доданків $\frac{X_k - m_{x_k}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma^2_{x_k}}}$ у загальній сумі. При виконанні (6.27) імовірність того, що хоча б один з доданків $\frac{X_k - m_{x_k}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma^2_{x_k}}}$ перебільшить величину τ, прямує до 0 при зростанні кількості доданків до нескінченності.

Зауваження. Узагальненням нерівності П. Л. Чебишева є нерівність О. М. Колмогорова, яка має таке означення.

Якщо незалежні випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ мають скінченні дисперсії, то

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - M\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]}{\varepsilon^2}. \qquad (6.29)$$

Нерівність О. М. Колмогорова (6.29) відносять до посиленого закону великих чисел, який має таке означення.

Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ підпорядковується посиленому закону великих чисел, якщо

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\left[X_k\right]\right)\to 0\right)=1.$$

Розглянемо практичні використання доведеної в цьому підрозділі граничної теореми О. М. Ляпунова.

Відомо, що якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, то ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що випадкова величина X належить інтервалу (a; b), розраховується згідно з таким виразом:

$$P\left(a<X<b\right)=\Phi\left(\frac{b-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x}\right).$$

Якщо за теоремою О. М. Ляпунова закон розподілу випадкової величини $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$, де X_i, $i=\overline{1,k}$ є незалежними випадковими величинами, наближається до нормального закону розподілу, то справедливе таке визначення:

$$P\left(a<Y=\sum_{i=1}^{n} X_i<b\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{b-M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{x_i}^2}}\right)-\Phi\left(\frac{a-M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{x_i}^2}}\right). \qquad (6.30)$$

Оскільки теорема О. М. Ляпунова гранична, а n розглядається скінченим, то (6.30) дає наближений результат, який відрізняється від точного в третьому чи четвертому знаці після коми у виразі десяткового дробу.

Задача 6.11. П’ятдесят бомбардувальників незалежно один від одного здійснюють серійне бомбардування полоси укріплення противника. Кожен бомбардувальник кидає одну серію бомб. Для однієї серії математичне сподівання кількості бомб, які влучили в полосу укріплення, дорівнює 2, а середнє квадратичне відхилення дорівнює 1. Знайти ймовірність того, що в полосу укріплення противника влучить від 90 до110 бомб.

Розв'язання. Нехай X_i – випадкова величина кількості бомб, які влучать у полосу укріплення противника при здійсненні i-ї серії бомбардування. Тоді $Y=\sum\limits_{i=1}^{50} X_i$ є випадковою величиною кількості влучень у полосу укріплення противника при здійсненні 50 серій бомбардування. Згідно з теоремою Ляпунова випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, а отже,

$$P\left(90<Y=\sum_{i=1}^{50} X_i<110\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{110-M\left[\sum\limits_{i=1}^{50} X_i\right]}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{50} D\left[X_i\right]}}\right)-\Phi\left(\frac{90-M\left[\sum\limits_{i=1}^{50} X_i\right]}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{50} D\left[X_i\right]}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{110-2\cdot 50}{\sqrt{50\cdot 1}}\right)-\Phi\left(\frac{90-2\cdot 50}{\sqrt{50\cdot 1}}\right)=$$

$$=\Phi(1,414)+\Phi(1,414)=2\cdot 0,421\quad 3=0,843.$$

Задача 6.12. Визначити ймовірність того, що після 900 кидань монети виграш гравця буде від 600 до 1200 гривень, якщо при появі орла гравець виграє 4 гривні, а при появі решки програє 2 гривні.

Розв'язання. Нехай X_i – випадкова величина значення виграшу гравця при i-му киданні монети. Випадкова величини X_i має ряд розподілу, наведений у табл. 6.2.

Таблиця 6.2

Ряд розподілу випадкової величини X_i

$x_i^{(k)}$	4	–2
$P\left(X_i=x_i^{(k)}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Тоді

$$M[X_i] = \sum_{k=1}^{2} x_i^{(k)} P\left(X_i = x_i^{(k)}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} + (-2) \cdot \frac{1}{2} = 1;$$

$$D[X_i] = \sum_{k=1}^{2} \left(x_i^{(k)}\right)^2 P\left(X_i = x_i^{(k)}\right) - \left(M[X_i]\right)^2 =$$

$$= 4^2 \cdot \frac{1}{2} + (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} - 1^2 = 9.$$

Якщо X – випадкова величина виграшу гравця при 900 киданнях монети, то

$$X = \sum_{i=1}^{900} X_i.$$

З центральної теореми теорії ймовірностей маємо

$$P\left(600 < X = \sum_{i=1}^{900} X_i < 1\ 200\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1\ 200 - M\left[\sum_{i=1}^{900} X_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{900} D[X_i]}}\right) - \Phi\left(\frac{600 - M\left[\sum_{i=1}^{900} X_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{900} D[X_i]}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1\ 200 - 900 \cdot 1}{\sqrt{900 \cdot 9}}\right) - \Phi\left(\frac{600 - 900 \cdot 1}{\sqrt{900 \cdot 9}}\right) =$$

$$= \Phi(3{,}33) + \Phi(3{,}33) \equiv 2 \cdot 0{,}499\ \ 57 \cong 1{,}0.$$

Задача 6.13. Відбувається груповий повітряний бій, в якому беруть участь 30 бомбардувальників з одного та 30 винищувачів з іншого боку. Кожен винищувач атакує один бомбардувальник і збиває його з імовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що у повітряному бою буде збито не менше 10 та не більше 30 бомбардувальників.

Розв'язання. Розглянемо X_i – випадкову величину кількості збитих бомбардувальників у i-му повітряному бою. Якщо Y – випадкова величина кількості збитих бомбардувальників у повітряному бою, то тоді $Y = \sum_{i=1}^{30} X_i$.

За теоремою О. М. Ляпунова будемо мати

$$P(10 < Y < 30) = P\left(10 < Y = \sum_{i=1}^{30} X_i < 30\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{30 - M\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right]}{\sqrt{D\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right]}}\right) - \Phi\left(\frac{6 - M\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right]}{\sqrt{D\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right]}}\right).$$

Уведені до розгляду випадкові величини X_i є незалежними, тому можна стверджувати, що, виходячи з умови задачі, дослід, в якому подія A, що полягає в тому, що в i-му повітряному бою буде збитий бомбардувальник, може статися з ймовірністю $P(A) = 0{,}2$, повторюється 30 разів. Адже слід стверджувати, що розглядається повторення дослідів з незалежними та рівноймовірними наслідками. Отже, випадкова величина Y (кількість бомбардувальників у повітряному бою) підпорядкована біноміальному закону розподілу, для якого $M[Y] = nP$, а $D[Y] = nPq$.

Тоді

$$M[Y] = M\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right] = 30 \cdot 0{,}2 = 6;$$

$$D[Y] = D\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right] = 30 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 4{,}8,$$

а отже,

$$P\left(10 < Y = \sum_{i=1}^{30} X_i < 30\right) = \Phi\left(\frac{30 - nP}{\sqrt{nPq}}\right) - \Phi\left(\frac{10 - nP}{\sqrt{nPq}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{30-6}{\sqrt{4{,}8}}\right) - \Phi\left(\frac{10-6}{\sqrt{4{,}8}}\right) = \Phi(10{,}96) - \Phi(1{,}83) = 0{,}5 - 0{,}46 = 0{,}034.$$

Розглянемо ймовірність події, яка полягає в тому, що в повітряному бою буде збито не більше 10 бомбардувальників. Маємо

$$P\left(0 < Y = \sum_{i=1}^{30} X_i < 10\right) = \Phi\left(\frac{10-6}{\sqrt{4,8}}\right) - \Phi\left(\frac{0-6}{\sqrt{4,8}}\right) =$$

$$= \Phi(1,83) + \Phi(2,74) = 0,466 + 0,497 = 0,963.$$

Відзначимо, що співвідношення

$$P\left(a < Y = \sum_{i=1}^{30} X_i < b\right) = \Phi\left(\frac{b-nP}{\sqrt{nPq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-nP}{\sqrt{nPq}}\right) \quad (6.31)$$

називають інтегральним наближенням біноміального закону розподілу.

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. У чому полягає фізичний зміст закону великих чисел?
2. Назвіть граничні теореми теорії ймовірностей, які слід розглядати як формальне тлумачення закону великих чисел.
3. Визначте практичну значущість та обмеженість використання нерівності П. Л. Чебишева.
4. За виконанням яких умов для визначення досліду локальна та інтегральна теореми Муавра – Лапласа є справедливими?
5. Визначте практичну значущість локальної граничної теореми Муавра – Лапласа.
6. Визначте зміст задач, які випливають із змісту інтегральної граничної теореми Муавра – Лапласа та які є суттєвими при плануванні експерименту.
7. Скільки разів слід підкинути монету, щоб імовірність отримання відхилення частоти появи орла від імовірності його появи на величину, яка б не перевищувала за абсолютною величиною 0, 01, була не менше 0,99?
8. На скільки треба збільшити кількість незалежних випробувань, щоб з імовірністю не менше 0,95 можна було б стверджувати, що частота події A відхилиться від її ймовірності ρ = 0,5 на величину α, яка змінюється від 0,01 до 0,001?
9. Гравець кидає 4 монети і в залежності від того чи буде кількість монет, які випали орлом, парною або непарною, одержує або сплачує стільки гривень, скільки випало орлів. Чи вигідна ця гра для гравця?

Ч а с т и н а 2
ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

Г л а в а 7
ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ

7.1. Визначення випадкової функції та її закону розподілу

У попередніх главах предметом розгляду та вивчення була випадкова величина, яка, за означенням, є такою величиною, що при проведенні досліду приймає одне єдине значення з множини її можливих значень та яка заздалегідь не може бути визначена. Якщо при проведенні досліду спостерігається множина значень, кожне з яких є можливим значенням відповідних випадкових величин, то слід стверджувати, що в досліді спостерігається деяка функція з множини можливих значень випадкової функції.

Змінна $X(t)$ *називається випадковою функцією, якщо при кожному значенні параметра* $t = t_k$ *вона є випадковою величиною* $X(t_k)$.

Якщо реєструвати всі значення, які буде приймати випадкова функція при n повторень незалежних дослідів, то будемо мати множину невипадкових функцій $\{x_1(t); x_2(t); ...; x_n(t)\}$, кожну з яких слід визначати як можливе значення випадкової функції. Тому справедливе і таке означення випадкової функції.

Випадковою функцією називається така функція, яка при проведенні досліду приймає той чи інший вигляд з множини своїх можливих значень та яка заздалегідь не може бути визначеною.

Наведемо приклади випадкових функцій.

Приклад 7.1. Розглядається випадкова функція $X(t)$ – функціональна залежність сили струму від часу в електричному ланцюгу. У цьому прикладі $X(t)$– неперервна випадкова функція від неперервного аргументу.

Приклад 7.2. Розглядається випадкова функція $X(t)$ – функціональна залежність кількості каналів телефонної станції, які заповнені, від часу. Випадкова функція $X(t)$ є дискретною випадковою функцією від неперервного аргументу.

Якщо розглядається випадкова функція $X(t)$ від неперервного аргументу, то її називають *випадковим процесом*, а якщо аргумент є дискретним, то $X(t)$ називають *випадковими послідовностями* або *випадковими ланцюгами*.

Випадкові функції прийнято позначати $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, а їх можливі реалізації відповідно $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Розглянемо неперервну випадкову функцію неперервного аргументу $X(t)$. Поставимо дослід, зафіксуємо невипадкову функцію $x_1(t)$, яка є реалізацією $X(t)$. Якщо повторити дослід, то будемо мати другу реалізацію $X(t)$, тобто $x_2(t)$. На рис. 7.1 наведені реалізації випадкової функції $X(t)$ при повторенні досліду *n* раз.

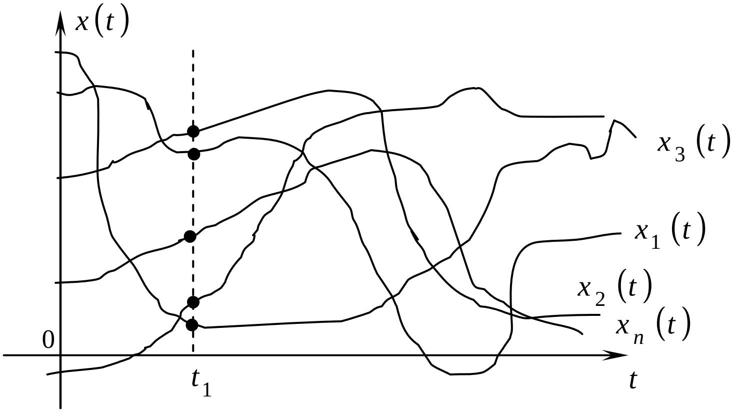

Рис. 7.1. Можливі реалізації випадкової функції $X(t)$

З такого подання випливає, що випадкову функцію $X(t)$ слід розглядати як сукупність її можливих реалізацій. Зафіксуємо аргумент $t = t_1$, тоді отримаємо *n* значень випадкової функції $x_1(t_1);\ x_2(t_1);\ ...;\ x_i(t_1);\ ...;\ x_n(t_1)$, які слід тлумачити як *n* можливих значень випадкової величини $X(t_1)$. Якщо розглядати одночасно два значення неперервного аргументу t, то будемо мати систему двох випадкових величин $\{X(t_1), X(t_2)\}$. А якщо неперервний параметр t подати як *n* його значень $\{t_i\}, i = \overline{1,n}$, то випадкову функцію $X(t)$ слід розглядати, як *n*-вимірну систему випадкових величин $\{X_i\}, i = \overline{1,n}$. Таким чином, випадкову функцію $X(t)$ можна розглядати, як узагальнення системи випадкових величин у випадку, коли кількість випадкових величин, які складають систему випадкових величин, прямує до нескінченності.

При такому погляді на розуміння випадкової функції $X(t)$ як закон розподілу слід розглядати, наприклад, щільність ймовірностей системи нескінченної кількості випадкових величин. Зрозуміло, що таке подання закону розподілу випадкової функції $X(t)$ не має ні понятійного, ні практичного змісту.

Для опису випадкової функції розглядається закон розподілу випадкової величини $X(t_k)$ для кожного значення $t = t_k$. Тобто вводиться до розгляду функція розподілу вигляду

$$F(x,t) = P[X(t) < x], \tag{7.1}$$

або одновимірна щільність ймовірностей вигляду

$$f(x,t) = \frac{dF(x,t)}{dx}. \tag{7.2}$$

Одновимірний закон розподілу $X(t)$ у вигляді (7.1) або (7.2) описує конкретний переріз $t = t_k$, він дозволяє розрахувати $M[X(t)]$, $D[X(t)]$. Однак можна визначити дві випадкові функції $X_1(t)$ та $X_2(t)$, для яких $M[X_1(t)] = M[X_2(t)]$ та $D[X_1(t)] = D[X_2(t)]$, що і наведено на рис. 7.2 та 7.3, а $X_1(t)$ та $X_2(t)$ принципово різні.

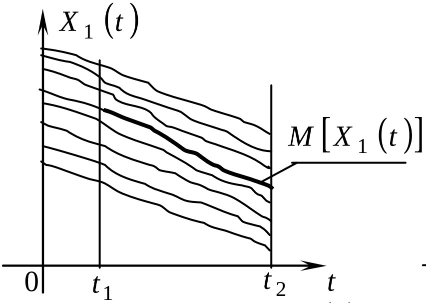

Рис. 7.2. Можливі значення $X_1(t)$, для якої $M[X_1(t)] = M[X_2(t)]$

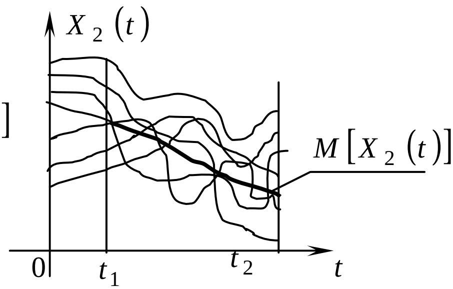

Рис. 7.3. Можливі значення $X_2(t)$, для якої $M[X_2(t)] = M[X_1(t)]$

Із рис. 7.2 та 7.3 видно, що знання одновимірного закону $X(t)$ є недостатнім, оскільки для $X(t)$ при $t = t_1$ та $t = t_2$ існує зв'язок, який може бути виявленим при введені до розгляду двовимірної функції розподілу вигляду

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[X(t_1) < x_1; X(t_2) < x_2] \tag{7.3}$$

або двовимірної щільності ймовірностей вигляду

$$f\left(x_1,x_2;t_1,t_2\right)=\frac{\partial^2 F\left(x_1,x_2;t_1,t_2\right)}{\partial x_1\partial x_2}. \qquad (7.4)$$

Існує клас спеціальних випадкових функцій, наприклад, марковські випадкові процеси (або процеси без післядії), для опису яких достатньо введення одновимірних законів розподілу вигляду (7.1) або (7.2), а для класу випадкових процесів, які прийнято називати стаціонарними випадковими процесами, необхідно визначати й двовимірні закони розподілу вигляду (7.3) або (7.4).

Випадкова функція називається стаціонарною, якщо її ймовірнісні властивості не залежать від вибору початку відрахунку зміни параметра t.

Таке тлумачення стаціонарної випадкової функції означає, що її закон розподілу не змінюється, якщо послідовність аргументу $t_1,\ t_2,\ldots,\ t_n$ замінити на послідовність $t_1+\tau,\ t_2+\tau,\ \ldots,\ t_n+\tau$, тобто

$$\begin{aligned}&f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n\right)=\\&=f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ t_1+\tau,t_2+\tau,\ \ldots,\ t_n+\tau\right),\end{aligned} \qquad (7.5)$$

де n та τ можна прийняти довільними.

Із (7.5) випливає таке. Одновимірна щільність ймовірностей стаціонарної випадкової функції за будь-яких значень τ приймає значення

$$f\left(x;t\right)=f\left(x;t+\tau\right) \text{ або } f\left(x;t\right)=f\left(x\right). \qquad (7.6)$$

Двовимірна щільність ймовірностей стаціонарної випадкової функції залежить від різниці t_1-t_2. Дійсно,

$$f\left(x_1,x_2;t_1,t_2\right)=f\left(x_1,x_2;t_1+\tau,t_2+\tau\right),$$

а якщо $\tau=-t_2$, то маємо

$$f\left(x_1,x_2;t_1,t_2\right)=f\left(x_1,x_2;t_1-t_2\right). \qquad (7.7)$$

А. Я. Хінчик запропонував поняття стаціонарної в широкому розумінні випадкової функції. При цьому розуміються ті випадкові функції, які визначаються одновимірними та двовимірними законами розподілу. Виходячи з такого означення стаціонарної в широкому розумінні випадкової функції випливає, що всяка стаціонарна випадкова функція одночасно є і стаціонарною в широкому розумінні, а якщо випадкова функція є стаціонарною в широкому розумінні, то вона може бути нестаціонарною.

7.2. Характеристики випадкової функції

До характеристик випадкової функції відносять: математичне сподівання випадкової функції $\left(M\left[X(t)\right],\ m_x(t)\right)$, дисперсію випадкової функції $\left(D\left[X(t)\right], D_x(t)\right)$, кореляційну функцію $R_X\left(t_1, t_2\right)$.

Математичним сподіванням випадкової функції $X(t)$ *називається невипадкова функція, яка визначається з виразу*

$$M\left[X(t)\right]=m_x(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x,t)dx\,. \tag{7.8}$$

За своїм фізичним тлумаченням математичним сподіванням випадкової функції $X(t)$ є деяка невипадкова функція $m_x(t)$, відносно якої при будь-якому t групуються реалізації випадкової функції $X(t)$, що і відображено на рис. 7.2 та 7.3.

При кожному $t=t_k$ математичним сподіванням $m_x\left(t_k\right)$ є математичне сподівання відповідної випадкової величини $X\left(t_k\right)$.

Раніше відзначалося, що якщо $X(t)$ є стаціонарною випадковою функцією, то $f(x;t)=f(x)$, а тоді $m_x(t)=\text{const}$.

Дисперсією випадкової функції $X(t)$ *є невипадкова функція* $D_x(t)$, *яка визначається з виразу*

$$D_x(t)=D\left[X(t)\right]=M\left[\left(X(t)-m_x(t)\right)^2\right]=M\left[\left(\overset{\circ}{X}(t)\right)^2\right]=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x-m_x(t)\right)^2 f(x)dx\,, \tag{7.9}$$

де $\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t)$ – центрована випадкова функція.

За фізичним змістом дисперсія $X(t)$ характеризує при кожному t розкидання можливих значень $X(t)$ відносно її математичного сподівання $m_x(t)$.

З означення стаціонарної випадкової функції випливає, що дисперсія стаціонарної випадкової функції є сталою, тобто $D\left[X(t)\right]=\text{const}$.

Кореляційною функцією випадкової функції $X(t)$ є математичне сподівання добутку центрованих випадкових величин $\overset{\circ}{X}(t_1)$ та $\overset{\circ}{X}(t_2)$, тобто

$$\left.\begin{aligned} &R_X(t_1,t_2)=M[(X(t_1)-m_x(t_1))(X(t_2)-m_x(t_2))]= \\ &=M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_x(t_1))(x_2-m_x(t_2))\times \\ &\times f(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1dx_2. \end{aligned}\right| \tag{7.10}$$

З (7.10) видно, що якщо $t_2=t_1$, то $R_X(t_1,t_2)=D_x(t)$.

За своїм фізичним змістом кореляційна функція характеризує стохастичну залежність між двома перерізами випадкової функції при фіксованих t_1 та t_2.

Кореляційна функція симетрична відносно своїх аргументів, тобто $R_X(t_1,t_2)=R_X(t_2,t_1)$, тому при графічному поданні кореляційної функції $R_X(t_1,t_2)$ це є поверхня, симетрична відносно вертикальної площини Q, яка проходить через бісектрису кута t_1Ot_2 (рис. 7.4).

Якщо випадкові величини $X(t_1)$ та $X(t_2)$ є незалежними, то $R_X(t_1,t_2)=0$; протилежне не завжди справедливо, тобто якщо $R_X(t_1,t_2)=0$, то випадкові величини $X(t_1)$ та $X(t_2)$ можуть бути стохастично залежними. Якщо $R_X(t_1,t_2)\neq 0$, то стохастична залежність між $X(t_1)$ та $X(t_2)$ обов'язково існує. При зростанні $|t_1-t_2|$ залежність випадкових величин $X(t_1)$ та $X(t_2)$ спадає, а при достатньо великому значенні $|t_1-t_2|$ можна вважати, що випадкові величини є незалежними, оскільки

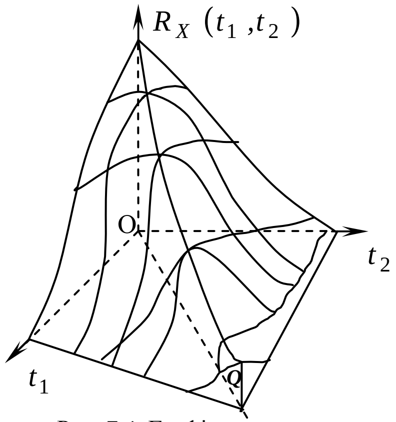

Рис. 7.4. Графічне подання кореляційної функції $R_X(t_1,t_2)$

$$\lim_{|t_1-t_2|\to\infty} R_X(t_1,\ t_2)=0. \tag{7.11}$$

Розглянемо властивості, які має кореляційна функція $R_X(t_1, t_2)$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$.

1. *Кореляційна функція $R_X(t_1, t_2)$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$ залежить тільки від різниці $t_1 - t_2$.*

Дійсно, маємо

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - m_x(t_1))(x_2 - m_x(t_2)) \times$$

$$\times f(x_1, \ x_2; t_1 - t_2)dx = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau), \tag{7.12}$$

де $\tau = t_1 - t_2$.

2. *Кореляційна функція $R_X(t_1, t_2)$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$ є парною функцією.*

Дійсно,

$$R_X(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right] =$$

$$= M\left[\overset{\circ}{X}(t_2 + \tau)\overset{\circ}{X}(t_2)\right] = R_X(\tau), \tag{7.13}$$

а тоді

$$R_X(-\tau) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_2 + (-\tau))\overset{\circ}{X}(t_2)\right],$$

але якщо $t_2 - \tau = s$, $t_2 = s + \tau$, то

$$R_X(-\tau) = M\left[\overset{\circ}{X}(s)\overset{\circ}{X}(s + \tau)\right]. \tag{7.14}$$

Порівнюючи (7.13) та (7.14), маємо

$$R_X(\tau) = R_X(-\tau), \tag{7.15}$$

а це є означення чіткості функції.

3. *Усі значення кореляційної функції за модулем стаціонарної випадкової функції $X(t)$ не перевищують значення її дисперсії, тобто*

$$\left|R_X(t_1 - t_2)\right| = \left|R_X(\tau)\right| \le R_X(0) = R_X(t_1 = t_2) =$$

$$= D[X(t)] = \text{const}. \tag{7.16}$$

Дійсно, тому що справедливе таке:

$$M\left[\left(\overset{\circ}{X}(t)\pm\overset{\circ}{X}(t+\tau)\right)^2\right]=M\left[\left(\overset{\circ}{X}(t)\right)^2\right]+M\left[\left(\overset{\circ}{X}(t+\tau)\right)^2\right]\pm$$

$$\pm 2M\left[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t+\tau)\right]=2R_X(0)\pm 2R_X(\tau)=2D[X(t)]\pm 2R_X(\tau), \quad (7.17)$$

де

$$M\left[\left(\overset{\circ}{X}(t)\right)^2\right]=M\left[\left(\overset{\circ}{X}(t+\tau)\right)^2\right]=D[X(t)]=D[X(t+\tau)]=\text{const};$$

$$M\left[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t+\tau)\right]=R_X(\tau).$$

Оскільки (7.17) визначає математичне сподівання квадрата суми чи різниці центрованих випадкових величин $\overset{\circ}{X}(t), \overset{\circ}{X}(t+\tau)$, то

$$2D[X(t)]\pm 2R_X(\tau)\geq 0;$$

$$D[X(t)]\geq \pm R_X(\tau);$$

$$|R_X(\tau)|\leq D[X(t)],$$

що й необхідно було довести.

Примітка. Замість кореляційної функції можна користуватися кореляційною функцією нормованих випадкових величин $\overset{\circ}{X}(t_1)$ та $\overset{\circ}{X}(t_2)$, яку називають коефіцієнтом кореляції, тобто

$$r_x(t_1, t_2)=\frac{R_X(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}, \quad (7.18)$$

де $\sigma_x(t)=\sqrt{D[X(t)]}$, та при $t_1=t_2$ $r_x(t_1, t_2)=1$.

7.3. Лінійні перетворення випадкової функції

Функціонування будь-якої динамічної системи можна описувати так: на вході динамічної системи постійно діє функція $x(t)$, а динамічна система *B* на виході постійно формує “реакцію” на $x(t)$ у вигляді постійно діючої функції $y(t)$. Але оскільки завжди існують похибки збурення, то на вході динамічної системи постійно буде діяти випадкова функція $X(t)$, яка буде формувати на виході динамічної системи *B* випадкову функцію $Y(t)$. Такий зміст функціонування динамічної системи схематично наведений на рис. 7.5.

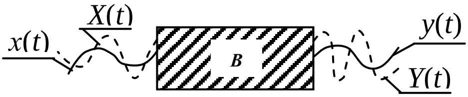

Рис. 7.5. Графічне подання функціонування динамічної системи

При оцінці ефективності функціонування динамічної системи дослідникові чи особі, яка приймає рішення, необхідно знати, наскільки великими будуть випадкові похибки на виході за наявності відомих значень випадкових збурень на вході. Відповідь будемо мати за наявності розв’язку задачі, яка полягає у визначенні випадкової функції $Y[t]$ як результату дії оператора *A* динамічної системи *B* на випадкову функцію $X[t]$, тобто розглядається

$$Y[t] = A[X(t)]. \tag{7.19}$$

Формально (7.19) означає таке: відомі характеристики $X[t]$ – математичне сподівання $M[X(t)]$ та кореляційна функція $R_X(t_1, t_2)$; необхідно визначити математичне сподівання $M[Y(t)]$ та кореляційну функцію $R_Y(t_1, t_2)$ випадкової функції $Y[t]$.

Розглянемо розв’язання зазначеної задачі в разі, коли динамічна система *B* належить до класу систем лінійних перетворень, тоді *A* є лінійним оператором.

7.3.1. Визначення характеристик суми невипадкової та випадкової функцій

Розглядаємо

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t),$$

де $\varphi(t)$ – невипадкова функція, тоді маємо

$$M[Y(t)] = M[X(t) + \varphi(t)] = M[X(t)] + M[\varphi(t)] = M[X(t)] + \varphi(t),$$

тобто

$$M[X(t) + \varphi(t)] = M[X(t)] + \varphi(t). \tag{7.20}$$

Визначимо центровану випадкову функцію $\overset{\circ}{Y}(t)$, а саме

$$\overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - M[Y(t)] = X(t) + \varphi(t) - M[X(t)] - \varphi(t) = \overset{\circ}{X}(t).$$

Отже,

$$R_Y(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)\right] = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right] = R_X(t_1, t_2);$$

$$R_Y(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2). \tag{7.21}$$

7.3.2. Визначення характеристик добутку невипадкової та випадкової функцій

Розглянемо

$$Y(t) = \varphi(t)X(t),$$

де $\varphi(t)$ – невипадкова функція, тоді

$$M[Y(t)] = M[\varphi(t)X(t)] = \varphi(t)M[X(t)]; \tag{7.22}$$

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \varphi(t)X(t) - \varphi(t)M[X(t)] = \varphi(t)\overset{\circ}{X}(t);$$

$$R_Y(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)\right] = M\left[\varphi(t_1)\overset{\circ}{X}(t_1)\varphi(t_2)\overset{\circ}{X}(t_2)\right] =$$

$$= \varphi(t_1)\varphi(t_2)M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right] = \varphi(t_1)\varphi(t_2)R_X(t_1, t_2),$$

отже, тоді

$$R_Y(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)R_X(t_1, t_2). \tag{7.23}$$

Відзначимо, що якщо $X(t)$ є стаціонарною випадковою функцією, а $\varphi(t) \neq \text{const}$, то $Y(t)$ – не є стаціонарною випадковою функцією.

7.3.3. Визначення характеристик суми двох випадкових функцій

Розглядаємо

$$Y(t) = X(t) + Z(t),$$

де $X(t)$ та $Z(t)$ є випадкові функції.

Маємо

$$M\left[Y(t)\right]=M\left[X(t)+Z(t)\right]=M\left[X(t)\right]+M\left[Z(t)\right];$$

$$\overset{\circ}{Y}(t)=X(t)+Z(t)-\left[M\left[X(t)\right]+M\left[Z(t)\right]\right]=\overset{\circ}{X}(t)+\overset{\circ}{Z}(t);$$

$$R_Y\left(t_1,t_2\right)=M\left[\overset{\circ}{Y}\left(t_1\right)\overset{\circ}{Y}\left(t_2\right)\right]=M\left\{\left[\overset{\circ}{X}\left(t_1\right)+\overset{\circ}{Z}\left(t_1\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\overset{\circ}{X}\left(t_2\right)+\overset{\circ}{Z}\left(t_2\right)\right]\right\}=M\left[\overset{\circ}{X}\left(t_1\right)\overset{\circ}{X}\left(t_2\right)+\overset{\circ}{X}\left(t_1\right)\overset{\circ}{Z}\left(t_2\right)+\right.$$

$$\left.+\overset{\circ}{Z}\left(t_1\right)\overset{\circ}{X}\left(t_2\right)+\overset{\circ}{Z}\left(t_1\right)\overset{\circ}{Z}\left(t_2\right)\right]=R_X\left(t_1,t_2\right)+R_{XZ}\left(t_1,t_2\right)+$$

$$+R_{XZ}\left(t_2,\ t_1\right)+R_Z\left(t_1,\ t_2\right),$$

тобто

$$M\left[X\left(t\right)+Z\left(t\right)\right]=M\left[X\left(t\right)\right]+M\left[Z\left(t\right)\right]; \tag{7.24}$$

$$R_Y\left(t_1,t_2\right)=R_X\left(t_1,t_2\right)+R_{XZ}\left(t_1,\ t_2\right)+$$

$$+R_{XZ}\left(t_2,\ t_1\right)+R_Z\left(t_1,\ t_2\right). \tag{7.25}$$

Якщо $R_{XZ}\left(t_1,\ t_2\right)=R_{XZ}\left(t_1-t_2\right)$, то $Y\left[t\right]=X\left(t\right)+Z\left(t\right)$ – стаціонарна функція; якщо $R_{XZ}\left(t_1,t_2\right)=0$, тобто якщо $X\left(t\right)$ та $Y\left(t\right)$ – некорельовані випадкові функції, то

$$R_Y\left(t_1,\ t_2\right)=R_X\left(t_1,\ t_2\right)+R_Z\left(t_1,\ t_2\right), \tag{7.26}$$

а при $t_1=t_2$

$$D\left[Y\left(t\right)\right]=D\left[X\left(t\right)\right]+D\left[Z\left(t\right)\right]. \tag{7.27}$$

7.3.4. Похідна випадкової функції

Випадкова величина X є границею за ймовірністю послідовності випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|X_n-X\right|>\varepsilon\right)=0. \tag{7.28}$$

Означення (7.28) прийнято позначати так:

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X.$$

Похідною випадкової функції $X(t)$ *(стохастичною похідною) називається границя за ймовірністю випадкової величини*

$$\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t} \tag{7.29}$$

при $\Delta t \to 0$, *тобто*

$$Y(t)=\frac{dX(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}. \tag{7.30}$$

Виходячи з означення (7.28), вираз (7.30) визначає границю за ймовірністю для (7.29), якщо

$$\lim_{\Delta t\to 0}P\left(\left|\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-Y(t)\right|>\varepsilon\right)=0.$$

Розглянемо характеристики для (7.30), маємо

$$M\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right]=\frac{M[X(t+\Delta t)]-M[X(t)]}{\Delta t}$$

та

$$M[Y(t)]=\frac{dM[X(t)]}{dt}, \tag{7.31}$$

тобто *математичне сподівання похідної від випадкової функції* $X(t)$ *дорівнює похідній від її математичного сподівання.*

Центрована випадкова функція $Y(t)$ визначається як

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-\frac{M[X(t+\Delta t)]-M[X(t)]}{\Delta t}=$$

$$=\frac{\overset{\circ}{X}(t+\Delta t)-\overset{\circ}{X}(t)}{\Delta t},$$

тоді

$$R_Y(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)\right]=M\left[\frac{\overset{\circ}{X}(t_1+\Delta t_1)-\overset{\circ}{X}(t_1)}{\Delta t_1}\times\right.$$

$$\times\frac{\overset{\circ}{X}(t_2+\Delta t_2)-\overset{\circ}{X}(t_2)}{\Delta t_2}\Bigg]=\frac{1}{\Delta t_1\Delta t_2}M\Big[\overset{\circ}{X}(t_1+\Delta t_1)\overset{\circ}{X}(t_2+\Delta t_2)-$$

$$-\overset{\circ}{X}(t_1+\Delta t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)-\overset{\circ}{X}(t_1)\times\overset{\circ}{X}(t_2+\Delta t_2)+\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\Big]=$$

$$=\frac{1}{\Delta t_1\Delta t_2}\left[R_X(t_1+\Delta t_1,\ t_2+\Delta t_2)-R_X(t_1+\Delta t_1,\ t_2)\right.-$$

$$\left.-R_X(t_2+\Delta t_2,\ t_1)+R_X(t_1,\ t_2)\right]. \qquad (7.32)$$

Розглянемо (7.32) при $\Delta t_1 \to 0$ та $\Delta t_2 \to 0$. Отримаємо

$$R_Y(t_1,t_2)=\lim_{\Delta t_1\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta t_1}\left[\lim_{\Delta t_2\to 0}\frac{R_X(t_1+\Delta t_1,t_2+\Delta t_2)-R_X(t_1+\Delta t_1,t_2)}{\Delta t_2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\lim_{\Delta t_2\to 0}\frac{R_X(t_2+\Delta t_2,t_1)-R_X(t_2,t_1)}{\Delta t_2}\right]\right\}=$$

$$=\lim_{\Delta t_1\to 0}\frac{R'_X(t_1+\Delta t_1,t_2)-R'_X(t_1,t_2)}{\Delta t_1}=\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}.$$

Тобто кореляційна функція похідної від випадкової функції дорівнює другій змішаній похідній від кореляційної функції випадкової функції $X(t)$, а саме

$$R_Y(t_1,t_2)=\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}. \qquad (7.33)$$

Якщо $X(t)$ – стаціонарна випадкова функція, то

$$R_Y(t_1,t_2)=-R''_X(t_1-t_2), \qquad (7.34)$$

де відзначена похідна за аргументом $(t_1 - t_2)$. Із (7.34) видно, що $Y(t)$ також буде стаціонарною функцією, оскільки її кореляційний момент залежить від різниці $(t_1 - t_2)$.

Задача 7.1. На вхід диференціюючого механізму подається випадкова функція $X(t)$, яка має характеристики $m_X(t) = \sin t$ та $R_X(t_1, t_2) = D_x e^{-a(t_1 - t_2)^2}$, де D_x – постійна дисперсія $X(t)$. Визначити характеристики випадкової функції $Y(t) = X'(t)$.

Розв'язання. За (7.31) та з (7.33) маємо

$$M[Y(t)] = \frac{dM[X(t)]}{dt} = \frac{d\sin t}{dt} = \cos t\,;$$

$$R_Y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = 2D_x a e^{-a(t_1 - t_2)^2}\left[1 - 2a(t_1 - t_2)^2\right].$$

Якщо $t_1 = t_2$, то $R_Y(t_1, t_2) = D_y(t) = 2D_x a$.

7.3.5. Інтегрування випадкових функцій

Розглядається інтегральна сума

$$\sum_{k=1}^{n} X(\tau_k)\Delta t_k$$

для випадкової функції $X(t)$ на $[t_0, t]$. Границю за ймовірністю інтегральної суми, якщо вона існує, називають стохастичним інтегралом від випадкової функції $X(t)$, а саме

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} X(u)du\,.$$

У подальшому будемо розглядати більш загальну лінійну операцію вигляду

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} A(t, u)X(u)du\,, \qquad (7.35)$$

де $A(t, u)$ – ядро інтеграла (7.35).

Визначимо характеристики випадкової функції $Y(t)$.

Маємо

$$M[Y(t)] = M\left[\int_{t_0}^{t} A(t,u)X(u)du\right] = \int_{t_0}^{t} A(t,u)M[X(u)]du. \quad (7.36)$$

Центрована випадкова функція $\overset{\circ}{Y}(t)$ має вигляд

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \int_{t_0}^{t} A(t,u)X(u)du - \int_{t_0}^{t} A(t,u)M[X(u)]du = \int_{t_0}^{t} A(t,u)\overset{\circ}{X}(u)du,$$

тоді кореляційна функція $R_Y(t_1, t_2)$ визначиться як

$$R_Y(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)\right] = M\left[\left(\int_{t_0}^{t_1} A(t_1, u)\overset{\circ}{X}(u)du\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int_{t_0}^{t_2} A(t_2, v)\overset{\circ}{X}(v)dv\right)\right] =$$

$$= M\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} A(t_1, u)A(t_2, v)\overset{\circ}{X}(u)\overset{\circ}{X}(v)du\,dv\right] =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} A(t_1, u)A(t_2, v)M\left[\overset{\circ}{X}(u)\overset{\circ}{X}(v)\right]dudv =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} A(t_1, u)A(t_2, v)R_X(u, v)dudv.$$

Тобто якщо $Y(t)$ є (7.35), то

$$R_Y(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} A(t_1, u) A(t_2, v) R_X(u, v)\, du\, dv. \tag{7.37}$$

У загальному випадку якщо $X(t)$ – стаціонарна випадкова функція, то $Y(t)$ не є стаціонарною випадковою функцією; щоб $Y(t)$ була стаціонарною, необхідно та достатньо виконання таких умов:

– ядро $A(t, u)$ повинно залежати тільки від різниці $(t - u)$, тобто $A(t, u) = A(t - u)$;

– випадковий процес повинен бути сталим, що при нашому розгляді означає, що $t_0 = -\infty$.

Тоді

$$M[Y(t)] = \int_{-\infty}^{t} A(t, u) M[X(t)] du = M[X(t)] \int_{0}^{\infty} A(z) dz = \text{const}, \tag{7.38}$$

де $z = t - u$;

$$R_Y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} A(t_1, u) A(t_2 - v) du dv =$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} A(z) A(\omega) R_X(t_1 - t_2 - z + \omega) dz d\omega, \tag{7.39}$$

де $z = t_1 - u$; $\omega = t_2 - v$.

7.4. Канонічне розвинення випадкових функцій

При розв’язанні більшості практичних задач використання викладених вище лінійних перетворень випадкових функцій пов’язане із значними розрахунковими труднощами. Тому при розв’язанні таких задач використовують інші методи, які пов’язані з достатньо простими перетвореннями. Одним із таких методів є метод канонічного розвинення випадкової функції, запропонований В. С. Пугачовим.

Ідея методу канонічного розвинення полягає в тому, що випадкова функція, над якою необхідно провести ті чи інші перетворення, перш за все подається як сума елементарних випадкових функцій.

Випадкова функція

$$\tilde{X}(t) = V \cdot \varphi(t), \tag{7.40}$$

де V – випадкова величина, а $\varphi(t)$ *– невипадкова функція, називається елементарною випадковою функцією.*

На рис. 7.6 подані можливі реалізації елементарної випадкової функції $\tilde{X}(t)$, сформовані на основі невипадкової функції $x = \varphi(t)$ при зміні її ординати при фіксованому значенні аргументу *t* у відповідності до можливих значень випадкової величини *V*, а вісь абсцис також є реалізацією $\tilde{X}(t)$, яка відповідає випадку, коли $V = 0$. Прикладом елементарної випадкової функції може бути $\tilde{X}(t)=V\sin t$, реалізації якої наведені на рис. 7.7.

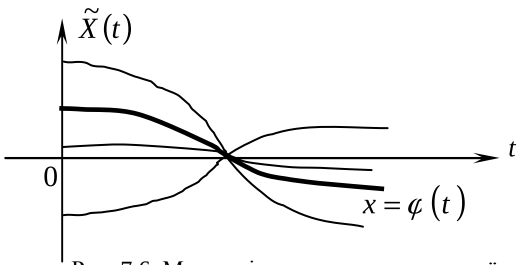

Рис. 7.6. Можливі значення елементарної випадкової функції $\tilde{X}(t)$

Для елементарної випадкової функції $\tilde{X}(t)$ випадковість реалізується можливими значеннями випадкової величини *V*, а залежність від аргументу *t* – невипадковою функцією $\varphi(t)$.

Розглянемо характеристики елементарної випадкової функції. Маємо, що її математичне сподівання визначається як

$$m_{\tilde{x}}(t) = M[V\varphi(t)] = m_v \varphi(t), \tag{7.41}$$

де m_v – математичне сподівання випадкової величини *V*.

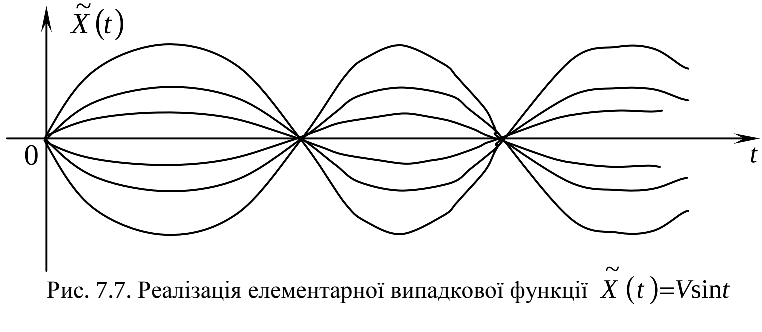

Рис. 7.7. Реалізація елементарної випадкової функції $\tilde{X}(t)=V\sin t$

Із (7.41) видно, що якщо $m_v = 0$, то $m_{\tilde{X}}(t) = 0$. З глави 6 відомо, що якщо розглядається центрована випадкова величина $\overset{\circ}{V}$, то її математичне сподівання $M\left[\overset{\circ}{V}\right] = 0$. Якщо $m_v = 0$, то в означенні елементарної випадкової функції (7.40) $V = \overset{\circ}{V}$, тобто зазначена центрована випадкова величина.

Визначимо кореляційний момент елементарної випадкової функції $\tilde{X}(t)$. Маємо

$$R_{\tilde{X}}(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{\tilde{X}}(t_1)\overset{\circ}{\tilde{X}}(t_2)\right] = \varphi(t_1)\varphi(t_2) M\left[\left(\overset{\circ}{V}\right)^2\right] =$$

$$= \varphi(t_1)\varphi(t_2) D_v,$$

де D_v – дисперсія випадкової величини V.

Над елементарними випадковими функціями можуть бути виконані будь-які лінійні перетворення. При цьому випадкова величина V як співмножник виноситься за символ оператора A, невипадкова функція перетворюється за тим же оператором A, а саме

$$A\left[\tilde{X}(t)\right] = V \cdot A[\varphi(t)]. \qquad (7.42)$$

Із (7.42) випливає таке: якщо на вхід динамічної системи подається деяка випадкова функція $X(t)$ загального вигляду, то вона може бути подана точно чи наближено сумою елементарних функцій, над якими в подальшому виконуються перетворення. Така ідея і покладена в основу методу канонічного розвинення.

Нехай розглядається випадкова функція

$$X(t) = m_x(t) + \overset{\circ}{X}(t)$$

та нехай вона має таке подання у вигляді суми:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{n} V_i \varphi_i(t), \qquad (7.43)$$

де $V_i,\ i=\overline{1,n}$ – випадкові величини, для яких $M[V_i]=0,\ i=\overline{1,n}$;

$\varphi_i(t),\ i=\overline{1,n}$ – невипадкові функції;

$m_x(t)$ – математичне сподівання випадкової функції $X(t)$.

Вираз (7.43) прийнято називати розвиненням випадкової функції, випадкові величини $V_i,\ i=\overline{1,n}$ – коефіцієнти розвинення, невипадкові функції $\varphi_i(t),\ i=\overline{1,n}$ – координатні функції.

Визначимо реакцію лінійної системи *B* з оператором *A* на випадкову функцію $X(t)$, яка подана розвиненням (7.43). Будемо дотримуватись принципу суперпозиції, який полягає в тому, що реакція системи на суму деяких дій дає суму дій системи на кожну окремо дію, тоді

$$Y(t)=A[X(t)]=A[m_x(t)]+\sum_{i=1}^{n}V_i A[\varphi_i(t)]=m_y(t)+\sum_{i=1}^{n}V_i\psi_i(t), \quad (7.44)$$

де $A[m_x(t)]=m_y(t)$; $A[\varphi_i(t)]=\psi_i(t)$, $i=\overline{1,n}$.

Вираз (7.44) є розвиненням випадкової функції $Y(t)$ на елементарні випадкові функції, коефіцієнтами якого є ті ж самі випадкові величини $V_i,\ i=\overline{1,n}$, а математичне сподівання $M[Y(t)]$ та координатні функції розвинення $Y(t)$ отримані як дія оператора *A* на математичне сподівання та координатні функції випадкової функції $X(t)$.

Тоді маємо таке правило: *якщо випадкова функція $X(t)$, яка подана розвиненням на елементарні випадкові функції, піддається лінійному перетворенню оператором A, то коефіцієнти розвинення залишаються незмінними, а математичне сподівання та координатні функції піддаються тому ж самому лінійному перетворенню оператором A.*

Розглянемо випадкову функцію $X(t)$, яка задана розвиненням (7.43), а саме

$$X(t)=m_x(t)+\sum_{i=1}^{n}V_i\varphi_i(t),$$

де $V_i\ , i=\overline{1,n}$ – випадкові величини, які складають систему випадкових величин $\{V_i\}, i=\overline{1,n}$, для якої $M[V_i]=0, i=\overline{1,n}$ та $\left\| R_{V_i, V_j} \right\|, i, j=\overline{1,n}$ є кореляційною матрицею.

Визначимо кореляційну функцію $X(t)$; маємо

$$R_X(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right]=M\left[\left\{\left(m_x(t_1)+\sum_{i=1}^{n}V_i\varphi_i(t_1)\right)-\right.\right.$$

$$\left.-M\left[\left(m_x(t_1)+\sum_{i=1}^{n}V_i\varphi_i(t_1)\right)\right]\right\}\times\left\{\left(m_x(t_2)+\sum_{j=1}^{n}V_j\varphi_j(t_2)\right)-\right.$$

$$\left.\left.-M\left[\left(m_x(t_2)+\sum_{j=1}^{n}V_j\varphi_j(t_2)\right)\right]\right\}\right]=M\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}V_i\varphi_i(t_1)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-M\left[\sum_{i=1}^{n}V_i\varphi_i(t_1)\right]\right\}\left\{\sum_{j=1}^{n}V_j\varphi_j(t_2)-M\left[\sum_{j=1}^{n}V_j\varphi_j(t_2)\right]\right\}\right]=$$

$$=M\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}V_i\varphi_i(t_1)-\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t_1)\,M(V_i)\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\sum_{j=1}^{n}V_j\varphi_j(t_2)-\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(t_2)M(V_j)\right\}\right]=M\left[\sum_{i=1}^{n}V_i\varphi_i(t_1)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{j=1}^{n}V_j\varphi_j(t_2)\right]=M\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}V_iV_j\varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M\left[V_iV_j\right]\varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_{V_iV_j}\,\varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2),$$

де $M[V_i]=M[V_j]=0,\ i, j=\overline{1,n}$, тоді $V_i=\overset{\circ}{V}_i;V_j=\overset{\circ}{V}_j$, а також $R_{V_iV_j}=D_{V_i}$ при $i=j;\ \ i, j=\overline{1,n}$.

Тобто $$R_X(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_{V_iV_j}\,\varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2). \qquad (7.45)$$

Із (7.45) випливає, що якщо випадкові величини є некорельованими, тобто коли $R_{V_iV_j}=0$ при $i\neq j$, то

$$R_X(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2)D[V_i]. \qquad (7.46)$$

Вираз (7.43) називають *канонічним розвиненням випадкової функції* $X(t)$, а вираз (7.46) називають *канонічним розвиненням кореляційної функції* $R_X(t_1,t_2)$ *випадкової функції* $X(t)$.

Якщо в (7.46) призначити $t_1=t_2$, то будемо мати визначення дисперсії випадкової функції (7.43), а саме

$$D[X(t)]=D_x(t)=\sum_{i=1}^{n}[\varphi_i(t)]^2 D[V_i]. \qquad (7.47)$$

Тобто при порівнянні порівнюючи (7.43), (7.46), (7.47) видно, що якщо відоме канонічне розвинення випадкової функції $X(t)$, то можна записати канонічне розвинення її кореляційної функції та дисперсії.

7.5. Спектральне розвинення стаціонарної випадкової функції на скінченному проміжку часу. Спектр дисперсій

Випадкова функція $X(t)$, як це було відзначено вище, називається стаціонарною, якщо її ймовірнісні властивості не залежать від початку відліку аргументу, а це відповідає тому, що $M[X(t)]=\text{const}$, $D[X(t)]=\text{const}$, $R_X(t_1,t_2)=R_X(\tau)$, де $\tau=t_1-t_2$. Останнє приводить до більш простих виразів лінійних перетворень стаціонарної випадкової функції.

Вигляд кореляційної функції випадкової функції (випадкового процесу) відповідає її структурі. У залежності від того, які частоти мають перевагу в складі структури випадкової функції, її кореляційна функція буде мати той чи інший вигляд. Такий погляд і відповідає поняттю спектрального складу випадкової функції.

Поняття “спектр” часто використовується у фізиці й техніці. Якщо коливальний процес подається у вигляді суми гармонічних коливань різних частот, то спектром коливань процесу називається функція, яка описує розподілення амплітуд по різних частотах. Щодо внутрішньої структури коливального процесу, то його характеризують за перевагою тих чи інших коливань у спектрі. Для стаціонарного випадкового процесу також можна розглядати спектральний опис, тільки амплітуду слід розглядати як випадкові величини. *Спектр стаціонарної випадкової функції описує розподілення дисперсій по різних частотах.*

Розглянемо стаціонарну випадкову функцію $X(t)$, одна її реалізація, яка спостерігається на інтервалі $(0, T)$, подана на рис. 7.8, а її кореляційна функція $R_X(\tau)$ зображена графіком на рис. 7.9.

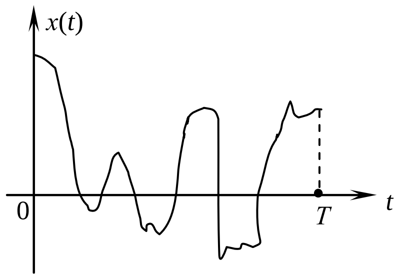

Рис. 7.8. Реалізація стаціонарної випадкової функції $X(t)$

Раніше відзначалось, що кореляційна функція $R_X(\tau)$ стаціонарної випадкової функції є чіткою, тобто $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$, тому її графік є симетричним відносно осі ординат, а аргумент змінюється від $-T$ до T.

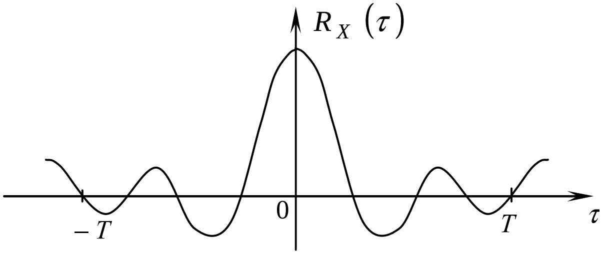

Рис. 7.9. Кореляційна функція стаціонарної випадкової функції $X(t)$

Чітка функція на інтервалі ($-T$, T) може бути подана рядом Фур'є, який має вигляд

$$R_X(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos\omega_k \tau, \tag{7.48}$$

де $\omega_k = k\omega_1$, $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{2T} = \dfrac{\pi}{T}$; а коефіцієнти D_k визначаються виразами

$$D_0=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}R_X(\tau)d\tau; \qquad (7.49)$$

$$D_k=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}R_X(\tau)\cos\omega_k\tau d\tau, k\neq 0. \qquad (7.50)$$

Оскільки $R_X(\tau)$ – чітка функція, то $D_0=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}R_X(\tau)d\tau$;

$$D_k=\frac{2}{T}\int_{0}^{T}R_X(\tau)\cos\omega_k\tau d\tau, k\neq 0.$$

Враховуючи, що

$\cos\omega_k\tau=\cos\omega_k(t_1-t_2)=\cos\omega_k t_1\cos\omega_k t_2+\sin\omega_k t_1\sin\omega_k t_2$,

вираз (7.48) буде мати вигляд

$$R_X(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(D_k\cos\omega_k t_1\cos\omega_k t_2+D_k\sin\omega_k t_1\sin\omega_k t_2\right), \qquad (7.51)$$

який є *канонічним розвиненням кореляційної функції стаціонарної випадкової функції* $X(t)$ *по координатних функціях* $\cos a_k t$ *і* $\sin a_k t$ *з частотами, кратними* a_1.

Вираз (7.51) дає можливість подати канонічне розвинення самої стаціонарної випадкової функції в такому вигляді:

$$X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(U_k\cos\omega_k\tau+V_k\sin\omega_k\tau\right), \qquad (7.52)$$

де U_k, V_k – некорельовані випадкові величини, які мають

$$M[U_k]=M[V_k]=0, k=\overline{1,\infty} \text{ та } D[U_k]=D[V_k]=D_k, k=\overline{1,\infty}. \qquad (7.53)$$

Розвинення (7.52) називають *спектральним розвиненням стаціонарної випадкової функції*, яке є розвиненням $X(t)$ на гармонічні коливання різних частот $a_1, a_2, ..., a_k, ...$, а амплітудами цих коливань є випадкові величини.

Розглянемо дисперсію стаціонарної випадкової функції $X(t)$, яка задана канонічним розвиненням (7.52).

$$D[X(t)] = M\left[|X(t) - M[X(t)]|^2\right] = M\left[\left[\overset{\circ}{X}(t)\right]^2\right] =$$

$$= M\left[\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\overset{\circ}{U}_k \cos\omega_k t + \overset{\circ}{V}_k \sin\omega_k t\right)\right]^2\right] =$$

$$= M\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\overset{\circ}{U}{}_k^2 \cos^2\omega_k t + \overset{\circ}{V}{}_k^2 \sin^2\omega_k t\right) + 2\overset{\circ}{U}_0 \cos\omega_0 t \overset{\circ}{V}_0 \sin\omega_0 t + \right.$$

$$+ 2\overset{\circ}{U}_0 \cos\omega_0 t \overset{\circ}{U}_1 \cos\omega_1 t + 2\overset{\circ}{U}_0 \cos\omega_0 t \overset{\circ}{V}_1 \sin\omega_1 t + \ldots +$$

$$\left. + 2\overset{\circ}{V}_0 \sin\omega_0 t \overset{\circ}{U}_1 \cos\omega_1 t + 2\overset{\circ}{V}_0 \sin\omega_0 t \overset{\circ}{V}_1 \sin\omega_1 t + \ldots\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(M\left[\overset{\circ}{U}{}_k^2\right]\cos^2\omega_k t + M\left[\overset{\circ}{V}{}_k^2\right]\sin^2\omega_k t\right) + 2\cos\omega_0 t \sin\omega_0 t \times$$

$$\times M\left[\overset{\circ}{U}_0 \overset{\circ}{U}_1\right] + 2\cos\omega_0 t \sin\omega_1 t\, M\left[\overset{\circ}{U}_0 \overset{\circ}{V}_1\right] + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} D_k \left(\cos^2\omega_k t + \sin^2\omega_k t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k ,$$

оскільки справедливо (7.53); $M\left[U_i V_j\right] = M\left[\overset{\circ}{U}_i \overset{\circ}{V}_j\right] = 0$, оскільки $M\left[U_i\right] = M\left[V_j\right] = 0$ та випадкові величини U_i, V_j є некорельованими, $i, j = \overline{1, \infty}$.

Отже,

$$D[X(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} D_k . \tag{7.54}$$

Дисперсія стаціонарної випадкової функції дорівнює сумі дисперсій усіх гармонік її спектрального розвинення. Розподіл дисперсії за частотами поданий на рис. 7.10.

Такий розподіл дисперсій називають *дискретним спектром дисперсій*.

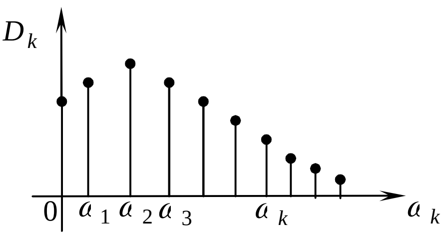

Рис. 7.10. Розподіл дисперсій за частотами

7.6. Спектральне розвинення стаціонарної випадкової функції на нескінченному проміжку часу. Спектральна щільність

У п.7.5 було розглянуте спектральне розвинення стаціонарної функції на скінченному проміжку часу (0, *T*). Очевидно, що чим більший інтервал часу буде розглядатись, тим точнішим буде наше уявлення щодо випадкової функції. Тому при описі спектрального розвинення стаціонарної випадкової функції є сенс переходу до границі при $T - \propto$. Тоді $\omega_1 = \frac{\pi}{T}$ буде прямувати до нуля, а відхилення між частотами, на яких будується спектр, буде необмежено зменшуватись і дискретний спектр буде наближатись до неперервного, в якому елементарному інтервалу частот Δa буде відповідати елементарна дисперсія $\Delta D(a)$.

Виходячи з розвинення кореляційної функції стаціонарної випадкової функції в ряд Фур'є на інтервалі (-*T*, *T*), а саме з виразів (7.48) – (7.50) та з того, що середня щільність дисперсії має вигляд

$$\overline{S}_X(\omega_k) = \frac{D_k}{\Delta a},$$

де Δa – елементарна відстань між сусідніми частотами, вираз, який описує розвинення кореляційної функції $R_X(\tau)$ на інтервалі (−*T*, *T*) в ряд Фур'є, прийме вигляд

$$R_X(\tau) = \sum_{k=0}^{\propto} \overline{S}_X(\omega_k) \cos \omega_k \tau \cdot \Delta\omega, \tag{7.55}$$

де
$$\overline{S}_X(\omega_k) = \frac{2}{\pi} \int_0^T R_X(\tau) \cos \omega_k \tau \, d\tau. \tag{7.56}$$

Якщо $T - \propto$, то $\Delta a - 0$; тоді (7.55) та (7.56) будуть мати вигляд

$$R_X(\tau) = \int_0^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega; \tag{7.57}$$

$$S_X(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau, \tag{7.58}$$

де $S_X(a)$ − спектральна щільність стаціонарної випадкової функції (спектральна щільність дисперсії).

Вирази (7.57) та (7.58) є перетворенням Фур'є для функцій $R_X(\tau)$ та $S_X(\omega)$, а також є розвиненням функцій на елементарні гармонічні коливання з неперервним спектром. Із (7.57) видно, що при $\tau = 0$

$$R_X(\tau=0)=D[X(t)]=\int_0^{\infty} S_X(\omega)d\omega, \qquad (7.59)$$

тобто площа під кривою функції спектральної щільності є дисперсією випадкової функції $X(t)$. На рис. 7.11 подана залежність спектральної щільності від частоти.

Співвідношення (7.59) є розвиненням дисперсії $D[X(t)]$ на суму елементарних доданків, кожне з яких є величиною дисперсії, яка відповідає елементарному значенню частоти $\Delta\omega = d\omega$.

Таким чином, введена нова характеристика стаціонарного випадкового процесу – *спектральна щільність*, яка описує частотний склад стаціонарного випадкового процесу.

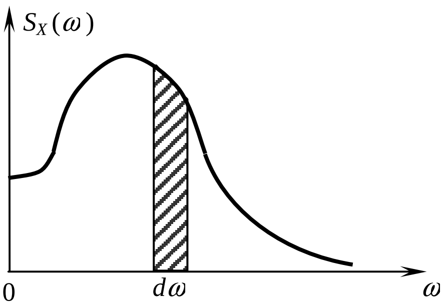

Рис. 7.11. Залежність спектральної щільності дисперсії випадкової функції

Слід відзначити, що на практиці також використовують *нормовану спектральну щільність*, яка визначається виразом вигляду

$$\rho_X(\omega)=\frac{S_X(\omega)}{D[X(t)]}. \qquad (7.60)$$

Якщо ввести до розгляду *нормовану кореляційну функцію*

$$\rho_X(\tau)=\frac{R_X(\tau)}{D[X(t)]}, \qquad (7.61)$$

то (7.60) та (7.61) пов'язані такими перетвореннями Фур'є:

$$\rho_X(\tau)=\int_0^{\infty} \rho_X(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega; \qquad (7.62)$$

$$\rho_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\rho_X(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \qquad (7.63)$$

Із (7.61) та (7.62) видно, що якщо $\tau = 0$, то

$$\int_0^{\infty}\rho_X(\omega)d\omega = \rho_X(\tau = 0) = 1, \qquad (7.64)$$

тобто площа під кривою нормованої спектральної щільності дорівнює одиниці.

7.7. Ергодична властивість стаціонарних випадкових функцій

При розв’язанні практичних задач частіше мають місце випадки коли закон розподілу випадкової функції невідомий. Тоді визначення характеристик випадкової функції математичного сподівання та кореляційної функції неможливе. Розглядають задачу оцінки математичного сподівання та кореляційної функції за результатами спостережень. Для розв’язання цієї задачі принципово необхідно розраховувати на достатньо велику кількість результатів спостережень над випадковою функцією.

Метод обробки результатів спостережень з метою оцінки характеристик випадкової функції достатньо складний. Виникає питання: чи можна для стаціонарної випадкової функції запропонувати інший більше простий спосіб, який би базувався на відомих властивостях характеристик стаціонарної випадкової функції, а саме на тому, що $M[X(t)] = \text{const}$ та $R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau)$.

Виникає ще одне питання: оскільки стаціонарний випадковий процес є однорідним за часом, то при оцінці його характеристик чи є необхідним розраховувати на достатньо велику кількість спостережень над випадковим процесом, чи, можливо, одна єдина його реалізація, достатньо довготривала за часом, може бути повноправним і достатнім статистичним спостереженням.

Відзначимо, що для окремого класу стаціонарних випадкових функцій з метою оцінки їх характеристик достатньо розглядати одну єдину реалізацію, яка є довготривалою за часом. У такому разі прийнято казати, що стаціонарна випадкова функція має *властивість ергодичності.*

Отже, ергодична властивість стаціонарної випадкової функції полягає в тому, що кожна окрема реалізація стаціонарної випадкової функції є повноправним представником усієї сукупності можливих реалізацій, і тоді її середні значення характеристик за часом приблизно дорівнюють середнім значенням характеристик за всією множиною реалізацій.

Зазначена властивість стаціонарної випадкової функції підтверджується змістом такої теореми.

Теорема 7.1. *Якщо математичне сподівання та дисперсія стаціонарної випадкової функції є скінченними та*

$$\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau)=0, \tag{7.65}$$

то

$$\lim_{T\to\infty} D[U(t)]=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt\right]=0. \tag{7.66}$$

Доведення. Розглянемо математичне сподівання середнього значення $X(t)$ на проміжку $[0, T]$.

Маємо

$$M[U(t)]=M\left[\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt\right]=\frac{1}{T}\int_0^T M[X(t)]dt=M[X(t)],$$

тобто

$$M[U(t)]=M[X(t)]. \tag{7.67}$$

Розглянемо дисперсію $U(t)$, маємо

$$D[U(t)]=M\left[[U(t)-M[U(t)]]^2\right]=M\left[\left[\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt-M[X(t)]\right]^2\right]=$$

$$=M\left[\left[\frac{1}{T}\int_0^T [X(t)-M[X(t)]]\,dt\right]^2\right]=\frac{1}{T^2}M\left[\int_0^T \overset{\circ}{X}(t)\,dt\int_0^T \overset{\circ}{X}(s)\,ds\right]=$$

$$=\frac{1}{T^2}M\left[\int_0^T\int_0^T \overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{X}(s)\,dt\,ds\right]=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T M\left[\overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{X}(s)\right]dt\,ds=$$

$$=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_X(t-s)\,dt\,ds. \tag{7.68}$$

Введемо до розгляду $\varepsilon > 0$ і підберемо таке $\delta > 0$, за якого $\left|R_X(\tau)\right| < \varepsilon$ при $|\tau| > \delta$. Це можливе тому, що

$$\lim_{\tau \to \infty} R_X(\tau) = 0.$$

Область інтегрування (7.68) розіб'ємо на дві підобласті, одна з яких буде відповідати умові $|t-s| \le \delta$, а друга – $|t-s| > \delta$. Ці області інтегрування подані на рис. 7.12.

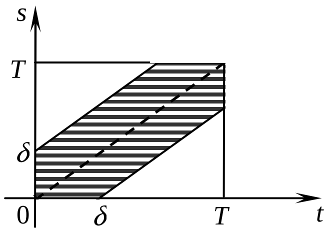

Рис. 7.12. Області інтегрування для визначення $D\left[U(t)\right]$

Тоді

$$\int_0^T\int_0^T R_X(t-s)\,ds\,dt = \iint\limits_{(|t-s|\le\delta)} \left|R_X(t-s)\right| ds\,dt + \iint\limits_{(|t-s|>\delta)} \left|R_X(t-s)\right| ds\,dt;$$

$$\left|\int_0^T\int_0^T R_X(t-s)\,ds\,dt\right| \le \iint\limits_{(|t-s|\le\delta)} \left|R_X(t-s)\right| ds\,dt + \iint\limits_{(|t-s|>\delta)} \left|R_X(t-s)\right| ds\,dt. \qquad (7.69)$$

У першому інтегралі правої частини виразу (7.69) маємо

$$\left|R_X(t-s)\right| \le R_X(0) = D\left[X(t)\right],$$

а площа заштрихованої області інтегрування (рис. 7.12) визначається як

$$T^2 - \frac{2(T-\delta)^2}{2} = T^2 - T^2 + 2T\delta - \delta^2 < 2T\delta.$$

У другому інтегралі правої частини виразу (7.69) маємо $\left|R_X(t-s)\right| < \varepsilon$, бо $|\tau| > \delta$, або $|t-s| > \delta$, а площа області інтегрування (рис. 7.12 – незаштрихована область) визначається з виразу $\frac{2(T-\delta)^2}{2}$ та є меншою за T^2.

Тоді

$$\left| \int_0^T \int_0^T R_X \ (t-s) ds\, dt \right| \le 2\,\delta T D\,[X\ (t)] + \varepsilon T^{\,2}$$

та

$$|D[U(t)]| = \left| \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R_X \ (t-s) ds dt \right| < \varepsilon + \frac{2\delta D[X(t)]}{T},$$

де видно, що при достатньо великому T будемо мати

$$\left| D\left[U\left(t\right)\right]\right| < 2\varepsilon\,,$$

а це означає, що

$$\lim_{T - \infty} D[U(t)] = 0\,.$$

Теорема доведена.

Практичний висновок з доведеної теореми має такий зміст.

Із запису відомої нерівності П. Л. Чебишева

$$P\left(\left| X - m_x \right| > \varepsilon\right) \le \frac{D\left[X\right]}{\varepsilon^2}$$

видно, що чим меншою буде дисперсія випадкової величини, тим меншою буде ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання за модулем на величину, яка перевищує $\varepsilon > 0$.

При розгляді теореми стверджується, що $D\left[U\left(t\right)\right]$ буде достатньо мала при великих T, а $M\left[U\left(t\right)\right] = M\left[X\left(t\right)\right]$. Це означає, що ймовірність події, яка полягає в тому, що $U\left(t\right)$ відхилиться від $M\left[U\left(t\right)\right]$ за модулем на величину, яка перевищує $\varepsilon > 0$, є достатньо малою при величинах T.

Таким чином, при достатньо великих T справедливо, що

$$M\,[X\,(t)] = m_x^*\,(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt\,, \tag{7.70}$$

$$R_X(\tau) = R_X^*(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(t+\tau)dt, \tag{7.71}$$

де $m_x^*(t)$ та $R_X^*(t)$ – статистичні оцінки математичного сподівання і кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу, які визначені за однією лише реалізацією.

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. Дайте означення випадкової функції та з’ясуйте, чому в якості закону її розподілу розглядаються лише одновимірні або двовимірні закони розподілу.
2. У чому полягає особливість опису одновимірних та двовимірних законів розподілу стаціонарної випадкової функції?
3. Визначте, в чому полягає зміст кореляційної функції як характеристики випадкової функції.
4. Які дії над характеристиками випадкової функції виконуються при розгляді лінійного оператора?
5. У чому полягає суть канонічного розвинення випадкової функції?
6. У чому полягає сутність спектрального розвинення стаціонарної випадкової функції на скінченному та нескінченному проміжку часу?
7. Визначте сенс спектральної щільності як характеристики стаціонарного випадкового процесу.
8. Визначте клас стаціонарних випадкових функцій, які мають властивість ергодичності.

Г л а в а 8
СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

8.1. Означення та класифікація систем масового обслуговування

Системами масового обслуговування (СМО) називають системи, які складаються з будь-якої кількості каналів обслуговування, які призначені для обслуговування будь-якого потоку заявок, що надходять на систему у випадкові моменти часу.

Прикладами систем масового обслуговування можуть бути довідкові бюро, телефонні станції, станції технічного обслуговування, відділи магазинів, система станцій протиповітряної оборони та ін.

Як канали обслуговування при цьому виступають робочі місця, лінії зв’язку, радіолокаційні станції виявлення, канали супроводження повітряних цілей та канали наведення на них засобів ураження. Як потік заявок виступають потік заявок на надання довідок, потік абонентів, потік автомобілів, потік покупців, потік літаків, які проходять через зону дії протиповітряної оборони.

Обслуговування потоку заявок, які надходять на систему у випадковий момент часу, триває на протязі випадкового терміну часу. Випадковий характер потоку заявок і тривалості їх обслуговування за часом обумовлює те, що в системі масового обслуговування протікає випадковий процес.

Можуть виникнути випадки, коли в деякі проміжки часу на вході системи масового обслуговування накопичуються заявки, тоді вони або стають в чергу, або залишають систему масового обслуговування. Можуть виникнути випадки, коли в деякі проміжки часу система масового обслуговування може функціонувати недовантаженою або зовсім простоювати.

Системи масового обслуговування можуть буди *одноканальними або багатоканальними.*

Кожна система масового обслуговування в залежності від кількості каналів та їх продуктивності, а також від характеру потоку заявок має пропускну здатність, яка дозволяє їй справлятися з обслуговуванням потоку заявок.

Під ефективністю функціонування системи масового обслуговування розуміють відповідність бажаного результату її функціонування тому результату, який може виникнути. Як результат функціонування системи масового обслуговування може розглядатись кількість заявок, які система обслужила за деякий термін часу (за хвилину, за годину, за добу).

Під показником ефективності функціонування системи масового обслуговування розуміють чисельну міру відповідності результату функціонування, який склався, бажаному.

Як показники (характеристики) ефективності функціонування системи масового обслуговування в залежності від мети дослідження можуть виступати:

– закон розподілу випадкової величини кількості заявок, які може обслужити система масового обслуговування за прийнятий термін часу;

– математичне сподівання випадкової величини кількості заявок, які може обслужити система масового обслуговування за прийнятий термін часу;

– закон розподілу випадкової величини часу перебування заявки в черзі;

– закон розподілу випадкової величини кількості заявок, які перебувають в черзі;

– математичне сподівання випадкової величини часу перебування заявки в черзі;

– математичне сподівання випадкової величини кількості заявок в черзі та ін.

Теорія масового обслуговування становить розділ теорії ймовірностей, в якому розглядаються виявлення залежностей між параметрами потоку заявок, кількістю каналів, їх продуктивністю та ефективністю функціонування системи масового обслуговування.

Системи масового обслуговування класифікують на *системи масового обслуговування з відмовою* та *системи масового обслуговування з очікуванням*.

Для систем масового обслуговування з відмовою заявка, яка надійшла до системи в момент часу, коли всі канали зайняті, отримує відмову, вона залишає систему та в подальшому в обслуговуванні участі не бере. Для систем масового обслуговування з очікуванням заявка, яка надійшла на систему в момент часу, коли всі канали зайняті, становиться до черги та чекає доти, доки не звільниться один з каналів. Як тільки один з каналів звільниться, то заявка, яка стоїть в черзі, приймається на обслуговування.

Обслуговування для систем масового обслуговування з очікуванням може бути:

– *упорядкованим*, коли заявки обслуговуються по черзі;

– *невпорядкованим*, коли заявки обслуговуються у випадковому порядку;

– *з пріоритетом*, коли обслуговуванню окремих заявок віддається перевага (обслуговування окремих заявок забезпечується поза чергою).

Системи масового обслуговування з очікуванням розділяють на системи масового обслуговування *з обмеженим очікуванням* та на системи масового обслуговування *з необмеженим очікуванням*.

Для систем масового обслуговування з необмеженим очікуванням будь-яка заявка, яка надійшла на систему в момент часу, коли всі канали зайняті, ставиться до черги і необмежено за часом чекає звільнення будь-якого каналу, який прийме цю заявку до обслуговування. Це означає, що заявка, яка є в черзі, буде обслугована системою обов'язково.

Для систем масового обслуговування з обмеженим обслуговуванням на термін перебування заявки в черзі накладаються ті чи інші обмеження: за довжиною черги; за терміном часу очікування обслуговування; за кількістю заявок, які одночасно перебувають у черзі. При кожному з розглянутих обмежень заявка очікує обслуговування деякий час, а потім залишає систему.

У залежності від того, яка система масового обслуговування розглядається, для оцінки ефективності її функціонування використовують ті чи інші показники ефективності системи масового обслуговування.

Для системи масового обслуговування з відмовою використовують:

– *абсолютну пропускну здатність* (середню кількість заявок, які може обслужити система за одиницю часу);

– *відносну пропускну здатність* (відношення середньої кількості заявок, які може обслужити система за одиницю часу, до середньої кількості заявок, які надійшли за цей термін часу на систему для обслуговування);

– *середню кількість зайнятих каналів*;

– *середній відносний час простою системи* та ін.

Для систем масового обслуговування з необмеженим очікуванням показники абсолютної та відносної пропускної здатності системи не мають сенсу існування, оскільки кожна заявка буде обслужена. Для таких систем використовують інші показники, наприклад, середню кількість заявок, які перебувають в черзі.

8.2. Потік подій та його властивості. Найпростіший потік подій

У теорії ймовірностей послідовність подій, які йдуть одна за одною в деякі терміни часу, називають *потоком подій*.

Якщо події, які утворюють потік, відрізняються тільки моментами часу їх появи, то *потік подій називають однорідним*.

Якщо події йдуть одна за одною через однакові проміжки часу, то *потік подій називають регулярним*.

Потік подій називається стаціонарним, якщо ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що в деякий інтервал часу τ потрапляння тієї чи іншої кількості подій в потоці залежить тільки від довжини інтервалу часу τ і не залежить від того, де саме на часовій осі цей інтервал часу τ розглядається.

Це означення стаціонарності потоку відповідає умові, яка полягає в тому, що якщо потік є стаціонарним, то його ймовірнісні характеристики не залежать від вибору початку відліку часу. Так, для стаціонарного потоку характерна постійна щільність подій, тобто середня кількість подій (заявок) за одиницю часу.

При описі практичних задач потік заявок, який розглядається, є стаціонарним лише на деякому скінченному інтервалі часу. Роблять припущення щодо стаціонарності потоку на всьому часовому інтервалі протікання випадкового процесу.

Потік подій називається потоком без післядії, якщо для будь-яких двох інтервалів часу, які не перетинаються, ймовірність припадання деякої кількості подій на один з них не залежить від кількості подій, яка буде відповідати другому інтервалу часу.

Якщо потік подій є потоком без післядії, то заявки надходять на систему масового обслуговування незалежно одна від одної.

Примітка. У гл. 1 було дано означення: дві події, які можуть статися при проведенні досліду, називаються незалежними, якщо ймовірність однієї з них не залежить від того, сталася чи ні друга подія. Означення потоку без післядії відповідає за змістом відомому означенню щодо незалежності випадкових подій.

Потік подій називається ординарним, якщо ймовірність потрапляння на елементарний часовий інтервал Δt двох чи більше подій непомірно мала в порівнянні з імовірністю потрапляння на цей елементарний інтервал Δt рівно однієї події. У цьому разі висловлюють думку про те, що якщо потік подій є ординарним, то заявки надходять на систему масового обслуговування по одній.

Якщо потік подій має всі три властивості, тобто якщо він є стаціонарним потоком без післядії та ординарним, то його називають найпростішим потоком подій або стаціонарним пуассонівським потоком.

Для найпростішого потоку подій випадкова величина X – кількість подій, які можуть належати деякому визначеному інтервалу часу, – розподілена за законом Пуассона, тобто ймовірність події, яка полягає в тому, що кількість подій (заявок) $X = K$, що належать інтервалу часу t, визначається таким співвідношенням:

$$P_K(t) = \frac{\Omega^K(t)}{K!} e^{-\Omega(t)}, \qquad (8.1)$$

де $\Omega(t)$ – математичне сподівання випадкової величини X.

Найпростіший потік подій має важливе значення при розгляді практичних задач, оскільки при складанні (накладанні) великої кількості ординарних, стаціонарних потоків практично з будь-якою післядією утворюється потік, який є достатньо близьким до найпростішого потоку. У багатьох випадках достатньо накласти чотири або п’ять потоків, і сумарний буде практично найпростішим потоком.

Якщо потік є потоком без післядії та ординарним, але не відповідає вимозі стаціонарності, то такий потік подій називають *нестаціонарним пуассонівським потоком*.

Для найпростішого потоку інтенсивність потоку $\lambda = \text{const}$, а для нестаціонарного пуассонівського потоку $\lambda = \lambda(t)$. Для часового інтервалу $(t_0, t_0 + t)$ в разі, коли потік є найпростішим, у виразі (8.1) маємо $\Omega(t) = \lambda t$, а якщо розглядається нестаціонарний пуассонівський потік, то

$$\Omega(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(t) dt.$$

Потік подій схематично можна зобразити точками на часовій осі, що й подано на рис. 8.1.

Розглянемо найпростіший потік подій, який характеризується інтенсивністю λ. Нехай T – випадкова величина часового інтервалу між сусідніми подіями в цьому потоці. З метою визначення закону розподілу випадкової величини T визначимо момент часу $t = t_0$ та відмітимо деяке її можливе значення t (рис. 8.1). Визначимо ймовірність події, яка полягає в тому що $T < t$. Для виконання цієї події необхідно, щоб на часовий інтервал t потрапляла хоча б одна подія потоку.

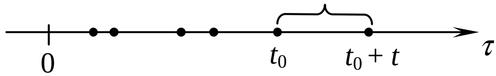

Рис. 8.1. Схематизація потоку подій

Для випадкової події, яка полягає в тому, що на часовий інтервал t потрапить хоча б одна подія потоку, протилежною подією є подія, яка полягає в тому, що на часовий інтервал t потрапить рівно нуль подій потоку, тобто цей часовий інтервал t є пустим.

Тоді

$$F(t) = P(T < t) = 1 - P_{K=0} = 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Якщо функція розподілу визначається виразом

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \tag{8.2}$$

а функція щільності випадкової величини визначається виразом

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \tag{8.3}$$

то (8.2) та (8.3) свідчать про те, що випадкова величина T – величина часового інтервалу між сусідніми подіями найпростішого потоку, підпорядкована експоненціальному закону розподілу.

Для нестаціонарного пуассонівського потоку закон розподілу випадкової величини T буде залежати від того, де на осі часу буде розташований момент часу t_0 (розташована перша подія), та від залежності $\lambda = \lambda(t)$. Тобто маємо

$$F_{t_0}(t) = 1 - e^{-\int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(t)\,dt}; \tag{8.4}$$

$$f_{t_0}(t) = \lambda(t_0 + t) e^{-\int\limits_{t_0}^{t_0+t} \lambda(t)\,dt} . \qquad (8.5)$$

Співвідношення (8.2), (8.3) відповідають стаціонарному пуассонівському потоку подій, а (8.4), (8.5) відповідають нестаціонарному пуассонівському потоку. У першому та в другому випадках потоки мають властивість без післядії. За такої класифікації нестаціонарний пуассонівський потік слід розглядати як узагальнення найпростішого.

Другим узагальненням найпростішого потоку є нестаціонарний пуассонівський потік з обмеженою післядією.

8.3. Потоки Пальма. Потоки Ерланга

Якщо випадкові величини T_1, T_2, …, T_i,…, T_n, які відповідають проміжкам часу між послідовними подіями, що надходять до системи масового обслуговування, є незалежними та підпорядковані одному і тому ж закону розподілу, то потік подій називають *потоком Пальма*. Якщо всі випадкові величини $T_i\ ,i=\overline{1,n}$ є незалежними та підпорядковані експоненціальному закону, то маємо окремий випадок потоку Пальма, а саме найпростіший потік.

Розглянемо приклад потоку Пальма. Деякий пристрій функціонує до першої відмови. Відмова пристрою настає внаслідок відмови його функціонального елемента. Як тільки відмова пристрою сталася, він моментально замінюється новим. Час працездатності i-го елемента T_i є випадковою величиною, яка підпорядкована деякому закону розподілу. Таким чином формується потік подій, які відповідають відмовам пристрою. За наявності однакових законів розподілу випадкових величин $T_i\ ,i=\overline{1,n}$ будемо розглядати потік відмов, який є потоком Пальма. У разі, коли всі $T_i\ ,i=\overline{1,n}$ підпорядковані експоненціальному закону, будемо мати потік відмов, який є найпростішим потоком.

Розглянемо потоки Ерланга. Потік Ерланга можна сформувати шляхом "просіювання" найпростішого потоку подій. Якщо в найпростішому потоці зберегти для розгляду тільки кожну третю подію, то тим саме буде сформовано потік подій, який називають потоком Ерланга третього порядку. Якщо в найпростішому потоці зберегти кожну k-ту подію, то буде сформовано потік подій Ерланга k-го порядку. Формування потоку Ерланга третього порядку наведене на рис. 8.2, де $t_1^{(3)}$, $t_2^{(3)}$, $t_3^{(3)}$, $t_4^{(3)}$ є можливими значеннями відповідних випадкових величин $T_1^{(3)}$, $T_2^{(3)}$, $T_3^{(3)}$, $T_4^{(3)}$.

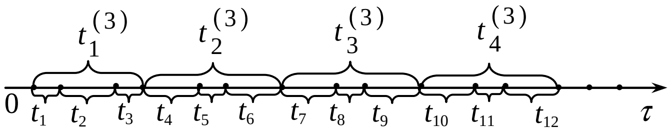

Рис. 8.2. Формування потоку Ерланга третього порядку

При такому розумінні потоку Ерланга k-го порядку можна стверджувати, що найпростіший потік є частковим випадком потоку Ерланга, тобто найпростіший потік є потоком Ерланга першого порядку.

Випадкова величина часового інтервалу між сусідніми випадковими подіями в потоці Ерланга k-го порядку визначається як

$$T^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} T_i \, , \tag{8.6}$$

де T_i – випадкова величина часового інтервалу між сусідніми подіями для найпростішого потоку.

Визначимо щільність ймовірностей випадкової величини $T^{(k)}$. Розглянемо найпростіший потік з інтенсивністю λ та інтервалами часу між сусідніми подіями T_1, $T_2, \ldots, T_k$.

На рис. 8.3 відзначені можливі значення $t_1, t_2, \ldots, t_k$ випадкових величин T_1, $T_2, \ldots, T_k$, а також можливе значення $t^{(k)}$ випадкової величини $T^{(k)}$ – часового інтервалу між сусідніми подіями в потоці Ерланга k-го порядку.

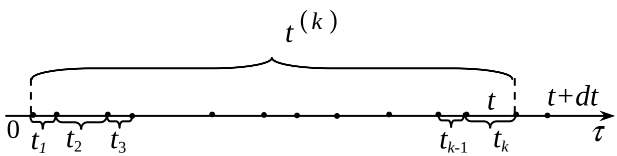

Рис. 8.3. Формування потоку Ерланга k-го порядку

Якщо $f_k(t)$ – щільність ймовірностей закону розподілу Ерланга k-го порядку, то $f_k(t)dt$ – значення ймовірності того, що випадкова величина $T^{(k)}$ прийме значення в інтервалі $(t, t+dt)$, тобто

$$P(\, t < T^{(k)} < t + dt \,) = f_k(t)\, dt. \tag{8.7}$$

Виходячи з означення потоку подій Ерланга k-го порядку, маємо, що k-та точка найпростішого потоку потрапляє на інтервал часу $(t,\ t + dt)$, а $(k - 1)$ точка потрапляє на інтервал $(0,\ t)$.

Розглянемо визначення ймовірності події, яка полягає в тому, що k-та точка найпростішого потоку потрапляє на часовий інтервал $(t,\ t + dt)$. Найпростіший потік має властивість ординарності, а це означає, що якщо P_1 – ймовірність події, яка полягає в тому, що на інтервал $(t,\ t + dt)$ в найпростішому потоці потрапить рівно одна заявка, а P_0 – ймовірність події, яка полягає в тому, що на інтервал $(t,\ t + dt)$ в найпростішому потоці потрапить рівно 0 заявок, то

$$P_1(\Delta t) = 1 - P_0(\Delta t) = 1 - \frac{(\lambda\Delta t)^0}{0!} e^{-\lambda\Delta t} = 1 - e^{-\lambda\Delta t} = 1 - (1 - \lambda\Delta t) = \lambda\Delta t,$$

де для найпростішого потоку згідно із законом Пуассона

$$P_0(\Delta t) = \frac{(\lambda\Delta t)^0}{0!} e^{-\lambda\Delta t},$$

та $e^{-\lambda\Delta t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda\Delta t)^n}{n!}$ – ряд Маклорена, в якому збережено перший та другий члени розвинення.

Імовірність того, що на часовий інтервал $(0,\ t)$ потрапить рівно $(k - 1)$ заявка, в найпростішому потоці визначається за законом Пуассона, а саме

$$P_{k-1}(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Тоді

$$P(t < T^{(k)} < t + dt) = P_1(\Delta t) P_{k-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \lambda\Delta t,$$

а з урахуванням (8.7) щільність ймовірностей випадкової величини T^k – часового інтервалу між сусідніми подіями для потоку подій Ерланга k-го порядку визначається виразом вигляду

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, \tag{8.8}$$

де λ – інтенсивність найпростішого потоку подій. Співвідношення прийнято називати законом розподілу Ерланга k-го порядку.

Розглянемо числові характеристики закону розподілу Ерланга k-го порядку.

Оскільки за означенням потоку Ерланга k-го порядку

$$T^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} T_i ,$$

де T_i – випадкова величина часового інтервалу між сусідніми подіями в найпростішому потоці, підпорядкована експоненціальному закону розподілу, для якої

$$M[T_i] = \frac{1}{\lambda};\; D[T_i] = \frac{1}{\lambda^2},$$

то

$$M\left[T^{(k)}\right] = m_{t(k)} = M\left[\sum_{i=1}^{k} T_i\right] = \sum_{i=1}^{k} M[T_i] = \frac{k}{\lambda};$$

$$D\left[T^{(k)}\right] = D\left[\sum_{i=1}^{k} T_i\right] = \sum_{i=1}^{k} D[T_i] = \frac{k}{\lambda^2}.$$

Отже, математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $T^{(k)}$ визначається з таких виразів:

$$\left.\begin{aligned} m_{t(k)} &= \frac{k}{\lambda}; \\ \sigma_{t(k)} &= \frac{\sqrt{k}}{\lambda}. \end{aligned}\right| \qquad (8.9)$$

Уведемо до розгляду інтенсивність потоку Ерланга k-го порядку Λ_k, яка також за означенням потоку Ерланга k-го порядку пов'язана з інтенсивністю найпростішого потоку відношенням

$$\Lambda_k = \frac{\lambda}{k}. \qquad (8.10)$$

З урахуванням (8.10) вирази (8.8) та (8.9) будуть мати вигляд

$$f_k(t) = \frac{(k \cdot \Lambda_k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-k\Lambda_k t}; \qquad (8.11)$$

$$m_{t(k)} = \frac{1}{\Lambda_k}; \qquad (8.12)$$

$$\sigma_{t(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}\Lambda_k}. \qquad (8.13)$$

Якщо для потоку Ерланга будь-якого порядку інтенсивність є незмінною, тобто $\Lambda_k = \Lambda = \text{const}$, то для потоку подій Ерланга будь-якого порядку маємо

$$m_t = \frac{1}{\Lambda};\ \sigma_t = \frac{1}{\sqrt{k}\Lambda}, \qquad (8.14)$$

що означає, що математичне сподівання випадкової величини $T^{(k)}$ – часового інтервалу між сусідніми подіями в потоці Ерланга будь-якого порядку є сталою величиною, а середнє квадратичне відхилення залежить від порядку потоку.

Із (8.14) видно, що якщо $k \to \infty$, то $\sigma_t \to 0$, а це означає, що при необмеженому зростанні порядку потоку Ерланга часовий інтервал між сусідніми його подіями як випадкова величина необмежено наближається до сталої, тобто при необмеженому зростанні порядку потоку Ерланга потік Ерланга необмежено прямує до регулярного потоку.

Задача 8.1. При обробці статистичних даних щодо часових інтервалів між сусідніми подіями в деякому потоці встановлено, що статистична оцінка математичного сподівання випадкової величини часового інтервалу $T^{(k)}$ між сусідніми подіями m_t^* = 2 хв, а статистична оцінка середнього квадратичного відхилення випадкової величини $T^{(k)}$ є σ_t^* = 0,9 хв. Визначити потік подій Ерланга, що має числові характеристики, які збігаються з їх статистичними оцінками за результатами спостережень.

Розв'язання. Визначити потік подій Ерланга; це означає, що необхідно визначити закон розподілу (8.11), тобто необхідно визначити порядок потоку Ерланга k та інтенсивність потоку Λ_k. Згідно з умовою задачі виходимо з (8.12) та (8.13), тобто з того, що

$$\sigma_t^* = \sigma_{t(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}\Lambda_k} = 0{,}9 \text{ хв};$$

$$m_t^* = m_{t(k)} = \frac{1}{\Lambda_k} = 2 \text{ хв}.$$

Тоді маємо

$$\Lambda_k = \frac{1}{m_t^*} = 0{,}5 \text{ подій/хв};$$

$$k = \left(\frac{1}{\sigma_t^* \Lambda_k} \right)^2 = \left(\frac{1}{0{,}9 \cdot 0{,}5} \right)^2 = 4{,}9 \approx 5,$$

а з (8.11) маємо

$$f_5(t) = \frac{(k\Lambda_k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-k\Lambda_k t} = \frac{(5 \cdot 0{,}5)^5}{4!} t^4 e^{-5 \cdot 0{,}5 t} = 4{,}1 t^4 e^{-2{,}5t}.$$

Отже, потік Ерланга, який має приблизно такі самі числові характеристики, які визначені й за результатами спостережень, має порядок потоку k = 5, інтенсивність Λ_k = 0,5 подій/хв та закон розподілу у вигляді щільності ймовірностей $f_5(t) = 4{,}1 t^4 e^{-2{,}5t}$.

8.4. Марковські випадкові процеси

Розглянемо деяку фізичну систему S, стан якої змінюється за часом. Якщо стан системи S змінюється за часом випадковим чином, тобто не можливо наперед стверджувати, в якому стані буде функціонувати система, то слід говорити про те, що в системі протікає випадковий процес. Випадковий процес, який протікає в системі S, обумовлюється тим, що з одного стану в інший система переходить або неперервно з часом, або дискретно (стрибком) в деякі моменти часу, які визначаються чи появою нової заявки, чи зміною кількості зайнятих каналів обслуговування. Вважається, що множина станів системи S є скінченною. Випадковий процес у системі S також обумовлюється тим, що обслуговування заявки, яка надійшла на систему, проводиться на протязі інтервалу часу, який є випадковою величиною.

Нехай $\{S_i\}, i = \overline{1,n}$ – множина можливих функціональних станів системи S, а $P_i(t)$ – ймовірність події, яка полягає в тому, що в момент часу t система буде функціонувати в S_i-му функціональному стані; тоді, оскільки події A_i, які полягають в тому, що система в момент часу t функціонує в S_i-му функціональному стані, складають повну групу подій, маємо

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1, \tag{8.15}$$

а сукупність $\{P_i(t)\}, i = \overline{1,n}$ у момент часу t характеризує (описує) випадковий процес, який протікає в системі.

Означення. *Якщо для кожного моменту часу* t_0 *ймовірність будь-якого стану системи* S *у майбутньому при* $t > t_0$ *залежить тільки від стану системи в теперішній час при* $t = t_0$ *та не залежить від того, коли й яким* *чином система прийшла в цей стан, тобто не залежить від того, як протікав процес у системі в попередні інтервали часу, то такий випадковий процес називається марковським випадковим процесом.*

У відповідності до цього означення марковські випадкові процеси ще називають процесами без післядії. При розв'язанні практичних задач маємо справу з процесами, які при деяких припущеннях можна вважати марковськими випадковими процесами.

Наведемо приклад марковського випадкового процесу. Відома гра, в якій фішка гравця, який прагне перемогти, повинна пройти деяку скінченну кількість пунктів $i = \overline{1,n}$. Перебування фішки в i-му пункті відповідає S_i-му функціональному стану системи. Перехід стану S_i в S_j, i, $j = \overline{1,n}$ відбувається у відповідності з кількістю очок, які випадають при підкиданні гравцем грального кубика, що й забезпечує випадковість зміни станів системи. При цьому з будь-якого стану S_i, який фіксується фішкою гравця, система переходить з імовірностями P_{ij} до стану S_j незалежно від того, коли і яким чином фішка гравця (незалежно від попередніх кроків гравця) фіксувала стан S_i.

При розгляді фізичної системи S з дискретними станами користуються геометричною схемою, в якій відзначають можливі функціональні стани системи та можливі переходи зі стану до стану. Таку схематизацію функціонування системи називають *графом станів*.

Розглянемо пристрій, який складається з двох вузлів, кожний із яких може відмовити. При своєму функціонуванні пристрій як система S може перебувати в таких станах: S_1 – обидва вузли є працездатними; S_2 – перший вузол працездатний, а другий відмовив; S_3 – перший вузол відмовив, а другий є працездатним; S_4 – обидва вузли відмовили. Граф станів, який геометрично схематизує функціонування пристрою, поданий на рис. 8.4. На рисунку

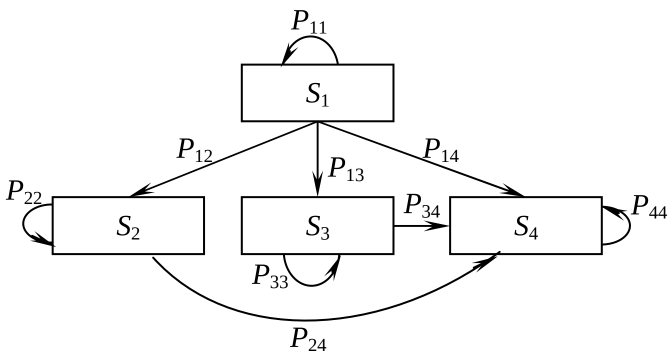

Рис. 8.4. Граф станів функціонування пристрою

відзначені можливі переходи з одного функціонального стану в інший за рахунок випадкового потоку подій, а подія відповідає відмові вузла.

Якщо на графі станів відзначені ймовірності можливих переходів зі стану до стану, то кажуть, що складено *розмічений граф станів функціонування системи* S.

Граф станів функціонування пристрою, зображений на рис. 8.4, показує таке: якщо пристрій як система в деякий момент часу функціонує в стані S_1, то в подальшому під дією потоку відмов ця система може перейти при своєму функціонуванні до станів S_2 , S_3 , S_4 у відповідності до значень ймовірностей переходу P_{12}, P_{13}, P_{14} або залишитись функціонувати в стані S_1 з ймовірністю P_{11}; якщо в деякий момент часу пристрій функціонує в стані S_2, то в подальшому він може з ймовірністю P_{24} перейти функціонувати до стану S_4 або залишитись функціонувати в стані S_2 з ймовірністю P_{22}; якщо в деякий момент часу пристрій функціонує в стані S_3, то в подальшому він може з імовірністю P_{34} перейти функціонувати до стану S_4 або залишитись функціонувати в стані S_3 з ймовірністю P_{33}; якщо в деякий момент часу пристрій функціонує в стані S_4, то в подальшому він може залишитись функціонувати в цьому стані з ймовірністю P_{44}.

Якщо перехід системи зі стану до стану проходить у фіксовані моменти часу, то випадковий процес називають *випадковим процесом з дискретними станами та дискретним часом*.

Якщо перехід системи зі стану до стану проходить в будь-який випадковий момент часу, то випадковий процес називають *випадковим процесом з дискретними станами та неперервним часом.*

8.5. Марковські випадкові процеси з дискретними станами та дискретним часом

Розглядається система *S*, яка може функціонувати в одному з *n* функціональних станів. Нехай $S_i^{(k)}$ є випадковою подією, яка полягає в тому, що після *k* кроків (переходів з одного стану в інший) система *S* буде функціонувати в S_i-му стані. Тоді випадкові події $S_1^{(k)}$, $S_2^{(k)}$, ..., $S_n^{(k)}$ складають повну групу подій, а випадковий процес, який відбувається в системі, подається такою послідовністю подій:

$$S_1^{(0)}, S_2^{(1)}, S_1^{(2)}, S_1^{(3)}, S_3^{(4)}, \dots .$$

Послідовність подій, яка описує випадковий процес, називається *марковським ланцюгом*, якщо для кожного кроку ймовірність переходу з будь-якого стану S_i в будь-який інший стан S_j не залежить від того, коли і яким чином система потрапила в S_i-й функціональний стан. Імовірність переходу $P_{ij}^{(k)}$ називають *перехідними ймовірностями марковського ланцюга*.

Номер кроку k визначається моментом часу, в який на систему надходить наступна заявка або звільняється канал системи, який був зайнятий обслуговуванням заявки. Якщо ймовірність переходу не залежить від номера кроку, то марковський ланцюг називається *однорідним*, у противному разі – *неоднорідним*.

Імовірності переходу P_{ij} для однорідних марковских ланцюгів складають *матриці перехідних ймовірностей*, де P_{ij} – імовірність переходу системи S за один крок із стану S_i в стан S_j; P_{ii} – імовірність події, яка полягає в тому, що після k кроків система S залишається функціонувати в S_i-му стані; ці ймовірності мають такий вигляд:

$$Q = \left\| P_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & P_{i2} & P_{i3} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m1} & P_{m2} & P_{m3} & \dots & P_{mj} & \dots & P_{mn} \end{pmatrix}. \quad (8.16)$$

Якщо в (8.16) $P_{k\ell} = 0$, то за один крок система S не може перейти із S_i-го стану в S_l -й стан. Зі змісту матриці перехідних імовірностей (8.16) видно, що

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1, \forall i = \overline{1,m}; \\ &P_{ii} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} P_{ij}, \; i = \overline{1,m}. \end{aligned} \right| \quad (8.17)$$

Відзначимо, що матриця перехідних імовірностей (8.16) з урахуванням (8.17) однозначно описує однорідний марковський процес з дискретними станами та дискретним часом. Перший рядок (8.16) містить ймовірності розташування системи після першого кроку.

Неоднорідний марковський процес однозначно описується послідовністю матриць перехідних імовірностей $Q^{(k)} = \left\| P_{ij}^{(k)} \right\|$, $k = 1, 2, 3 \ldots$. Для матриці $Q^{(k)} = \left\| P_{ij}^{(k)} \right\|$ елементом матриці $P_{ij}^{(k)}$ є ймовірність переходу системи із S_i -го в S_j -й стан на *k*-му кроці.

Оскільки на *k*-му кроці система *S* може функціонувати в одному зі S_i, $i = \overline{1,n}$ функціональних станів, то вектор $\{P_i(k)\}_n$ є вектором імовірностей подій, які полягають в тому, що на *k*-му кроці система буде функціонувати в S_i -му, $i = \overline{1,n}$ стані.

Розглянемо співвідношення, які дозволяють визначити ймовірність функціонування системи *S* в S_i -му, $i = \overline{1,n}$ функціональному стані, на прикладі розв'язання такої задачі.

Задача 8.2. Функціонування системи *S* відповідає однорідному марковському ланцюгу. Розмічений граф станів системи *S* подано на рис. 8.5.

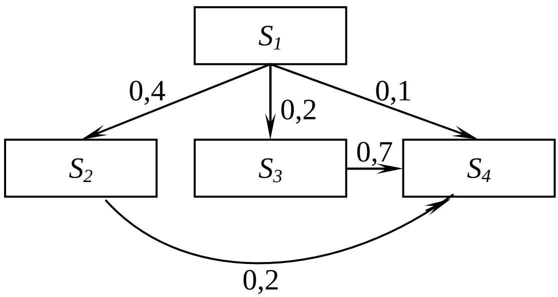

Рис. 8.5. Розмічений граф станів системи

Визначити ймовірності функціонування системи в можливих функціональних станах на другому й третьому кроці.

Розв'язання. Розмічений граф станів дозволяє записати матрицю перехідних імовірностей, яка має вигляд

$$Q = \left\| P_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де у відповідності до (8.17) відзначено, що

$$P_{11} = 1 - (P_{12} + P_{13} + P_{14}) = 1 - (0,4 + 0,2 + 0,1) = 0,3;$$

$$P_{22} = 1 - (P_{21} + P_{23} + P_{24}) = 1 - (0 + 0,4 + 0,2) = 0,4;$$

$$P_{33} = 1 - (P_{31} + P_{32} + P_{34}) = 1 - (0 + 0 + 0,7) = 0,3;$$

$$P_{44} = 1 - (P_{41} + P_{42} + P_{43}) = 1 - (0 + 0 + 0) = 1.$$

Імовірності функціонування системи після першого кроку (на першому кроці) визначаються першим рядком матриці Q.

Імовірності функціонування системи в можливому функціональному стані S_i, $i = \overline{1,n}$ на k-му кроці, де k = 2, 3, … визначаються виразом

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^{n} P_j(k-1) P_{ij}, \tag{8.18}$$

де $P_j(k-1)$ – імовірність функціонування системи в можливому функціональному стані S_j, $j = \overline{1,n}$ на (k – 1)-му кроці.

Співвідношення (8.18) відповідає однорідному марковському ланцюгу. Для неоднорідного марковського ланцюга будемо мати вираз

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^{n} P_j(k-1) P_{ij}^{(k)}, \tag{8.19}$$

де $P_{ij}^{(k)}$ – перехідна ймовірність системи S зі стану S_i у стан S_j на k-му кроці.

У відповідності до умов задачі з (8.18) маємо таке:

$$P_1(k=2) = P_1(k=1) P_{11} = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09;$$

$$P_2(k=2) = P_1(k=1) P_{12} + P_2(k=1) P_{22} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,28;$$

$$P_3(k=2) = P_1(k=1) P_{13} + P_2(k=1) P_{23} + P_3(k=1) P_{33} =$$
$$= 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,28;$$

$$P_4(k=2) = P_1(k=1) P_{14} + P_2(k=1) P_{24} + P_3(k=1) P_{34} +$$
$$+ P_4(k=1) P_{44} = 0,3 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 1,0 = 0,35.$$

Таким чином, на другому кроці система може функціонувати в можливих функціональних станах у відповідності з вектором імовірностей

$$\{P_i\ (k=2)\}_{n=4} = \{0{,}09; 0{,}28; 0{,}28; 0{,}35\}.$$

Примітка. На початку цього підрозділу відзначалося, що випадкові події $S_i^{(k)}$, які полягають в тому, що на k-му кроці система буде функціонувати в S_i-му функціональному стані, складають повну групу подій.

При визначенні ймовірностей функціонування системи в можливому функціональному стані на другому кроці отримуємо

$$\sum_{i=1}^{4} P\left(S_i^{(k=2)}\right) = \sum_{i=1}^{4} P_i\ (k=2) = 0{,}09 + 0{,}28 + 0{,}28 + 0{,}35 = 1{,}0.$$

Введемо означення: $P(k)$ – матриця-стовпець ймовірностей $P_i\ (k)$, $i = \overline{1,n}$; $P(k-1)$ – матриця стовпець ймовірностей $P_j(k-1)$, $j = \overline{1,n}$; $Q^{(k)}$ – матриця перехідних імовірностей на k-му кроці. Тоді співвідношення (8.18) та (8.19) зручно подавати в матричній формі запису, а саме:

$$\left.\begin{aligned} P(k) &= Q^T P(k-1); \\ P(k) &= \left(Q^{(k)}\right)^T P(k-1). \end{aligned}\right| \tag{8.20}$$

З (8.20) визначимо, що і запропоновано в умові задачі 8.2, імовірності функціонування системи в можливих функціональних станах на третьому кроці.

Маємо

$$P(k=3) = Q^T P(k=2) = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}09 \\ 0{,}28 \\ 0{,}28 \\ 0{,}35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}027 \\ 0{,}148 \\ 0{,}214 \\ 0{,}611 \end{pmatrix}.$$

З результатів розв'язання задачі можуть бути зроблені такі висновки. Малоймовірно сподіватися, що система S на третьому кроці буде функціонувати у функціональному стані S_1, оскільки $P_1(k = 3) = 0{,}027$. Найбільшу ймовірність, що дорівнює $P_4(k = 3) = 0{,}611$, буде мати подія, яка полягає в тому, що на третьому кроці (після третього кроку) система S буде функціонувати у функціональному стані S_4.

8.6. Марковські випадкові процеси з дискретними станами та неперервним часом

Якщо перехід системи зі стану S_i, $i=\overline{1,n}$ до стану S_j, $j=\overline{1,n}$ відбувається у випадкові моменту часу, то має місце марковський випадковий процес з дискретними станами та неперервним часом. Зміну станів, яка відбувається в системі, називають *марковським неперервним ланцюгом*.

Розглянемо визначення ймовірностей подій, які полягають в тому, що система буде функціонувати в S_i, $i=\overline{1,n}$ функціональному стані.

Нехай $\{S_i\}$, $i=\overline{1,n}$ – дискретні стани, а $P_i(t)$ – імовірність події, яка полягає в тому, що в момент t система буде функціонувати в стані S_i. Звичайно, для будь-якого t

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t)=1,$$

оскільки в будь-який момент часу t події, які полягають в тому, що система буде функціонувати в стані S_i, $i=\overline{1,n}$, складають повну групу подій.

Якщо $P_{ij}(\Delta t)$ – імовірність події, яка полягає в тому, що за елементарний інтервал часу Δt система переходить зі стану S_i до стану S_j, то *щільність ймовірностей переходу системи із стану S_i до стану S_j* визначається як

$$\lambda_{ij}=\lim_{\Delta t-0}\frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}. \tag{8.21}$$

Звідси з точністю до нескінченно малих вищих порядків маємо

$$P_{ij}(\Delta t)\cong\lambda_{ij}\Delta t.$$

Якщо λ_{ij} не залежить від t, тобто від того, в який момент часу починається елементарний проміжок часу t, то марковський процес з дискретними станами та неперервним часом називається *однорідним*, якщо $\lambda_{ij}=\lambda_{ij}(t)$ – то *неоднорідним*.

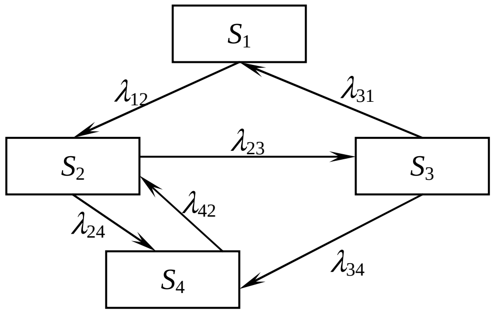

Рис. 8.6. Розмічений граф станів марковського процесу з дискретними станами та неперервним часом

Граф станів, в якому відзначені щільності ймовірностей переходу зі станів S_i, $i = \overline{1,n}$ до станів S_j, $j = \overline{1,n}$ називають *розміченим графом станів* марковського процесу з дискретними станами та неперервним часом (рис. 8.6).

Для марковського процесу з дискретними станами та неперервним часом, розмічений граф станів якого наведений на рис. 8.6, розглянемо визначення $P_1(t)$ – імовірність того, що система в момент часу t функціонує в S_1-му функціональному стані. Надамо t приріст Δt та визначимо ймовірність події, яка полягає в тому, що в момент часу $t + \Delta t$ система буде функціонувати в S_1-му стані. Розглянемо у відповідності до рис. 8.6 таку випадкову подію та гіпотези:

− A – подія, яка полягає в тому, що в момент часу $t + \Delta t$ система буде функціонувати в стані S_1;

− H_1 – гіпотеза, яка полягає в тому, що в момент часу t система буде функціонувати в стані S_1;

− H_2 – гіпотеза, яка полягає в тому, що в момент часу t система буде функціонувати в стані S_3.

Тоді

$A = AH_1 + AH_3;$

$$P(A) = P_1(t + \Delta t) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) =$$

$$= P_1(t)(1 - \lambda_{12}\Delta t) + P_3(t)\lambda_{31}\Delta t;$$

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t) - \lambda_{12}P_1(t)\Delta t + P_3(t)\lambda_{31}\Delta t;$$

$$\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=-\lambda_{12}P_1(t)+\lambda_{31}P_3(t);$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=-\lambda_{12}P_1(t)+\lambda_{31}P_3(t);$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt}=-\lambda_{12}P_1(t)+\lambda_{31}P_3(t)\,. \qquad (8.22)$$

Для визначення диференціальних рівнянь, які пов'язують $P_2(t)$, $P_3(t)$ та $P_4(t)$ з іншими $P_i(t), i=\overline{1,4}$ та відомими $\lambda_{ij}, i,j=\overline{1,4}$, слід поступати аналогічно, тобто для визначення $P_2(t)$ необхідно ввести до розгляду випадкову подію B, яка полягає в тому, що в момент часу $t+\Delta t$ система буде функціонувати в S_2 -му функціональному стані, та гіпотези H_1, H_2, H_3, які відповідно полягають в тому, що в момент часу t система буде функціонувати в станах S_2, S_1 та S_4.

Тобто для визначення $P_i(t), i=\overline{1,4}$, що відповідає розміченому графу станів, який поданий на рис. 8.6, слід розглянути таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{dP_1(t)}{dt}=-\lambda_{12}P_1(t)+\lambda_{31}P_3(t);\\[2ex]\dfrac{dP_2(t)}{dt}=-(\lambda_{23}+\lambda_{24})P_2(t)+\lambda_{12}P_1(t)+\lambda_{42}P_4(t);\\[2ex]\dfrac{dP_3(t)}{dt}=-(\lambda_{31}+\lambda_{34})P_3(t)+\lambda_{23}P_2(t);\\[2ex]\dfrac{dP_4(t)}{dt}=-\lambda_{42}P_4(t)+\lambda_{24}P_2(t)+\lambda_{34}P_3(t).\end{cases} \qquad (8.23)$$

Відзначимо, що з (8.23) видно таке. Для будь-якої системи S, процес функціонування якої відповідає марковському процесу з дискретними станами та неперервним часом, система диференціальних рівнянь за наявності розміченого графу станів може бути складена, виходячи з формальних міркувань, а саме: праві частини запису рівнянь для $dP_i(t)$, які відповідають переходу системи зі стану S_i до будь-якого іншого, мають доданки зі знаком “мінус”, а ті, які відповідають переходу системи з будь-якого стану $S_j, j=\overline{1,4}; j \neq i$ до стану S_i, мають доданки зі знаком “плюс”.

Таким чином, функціонування системи S з дискретними станами та неперервним часом у будь-який момент часу t описується системою диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{1j} P_1(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_{j1} P_j(t); \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{2j} P_2(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_{j2} P_j(t); \\ \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \\ \dfrac{dP_i(t)}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{ij} P_i(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_{ji} P_j(t); \\ \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{nj} P_n(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_{jn} P_j(t), \end{cases} \qquad (8.24)$$

де видно, що всіх станів, в яких може функціонувати система, є n; з кожного S_i-го стану система при своєму функціонуванні може перейти в $S_j, j=\overline{1,k}$ різних станів; у стан S_i система при функціонуванні може перейти з S_j, $j=\overline{1,m}$ станів.

Система диференціальних рівнянь (8.24) називається *системою диференціальних рівнянь О. М. Колмогорова.*

Розв’язання (8.24) за початкових умов

$$P_1(t=0)=1, P_i(t=0)=0, i=\overline{2,n}$$

дає ймовірність станів $P_i(t), i=\overline{1,n}$.

8.7. Одноканальна система масового обслуговування з відмовою

Розглянемо одноканальну систему масового обслуговування з відмовою.

На систему надходить найпростіший (стаціонарний пуассонівський) потік з інтенсивністю λ. Заявка, яка надійшла на систему в момент часу, коли канал зайнятий, отримує відмову та покидає систему. Обслуговування заявки триває на протязі часу *T*, який є випадковою величиною, підпорядкованою експоненціальному закону розподілу. Потік подій, які відповідають обслуговуванню заявки, також є найпростішим та має інтенсивність μ. Визначимо ефективність функціонування одноканальної системи масового обслуговування з відмовою за показниками абсолютної пропускної здатності та відносної пропускної здатності.

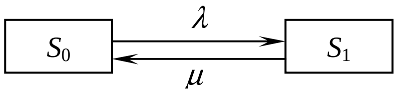

Рис. 8.7. Розмічений граф станів одноканальної системи масового обслуговування з відмовою

Для одноканальної системи масового обслуговування з відмовою можливі два функціональні стани: S_0 – канал вільний; S_1 – канал зайнятий. Розмічений граф станів поданий на рис. 8.7.

На рис. 8.7 відзначено, що система із функціонального стану S_0 може перейти у функціональний стан S_1 та цей перехід обумовлює найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ. Із стану S_1 система може перейти в стан S_0, і цей перехід обумовлює найпростіший потік обслуговування з інтенсивністю μ.

Система диференціальних рівнянь О. М. Колмогорова, яка описує процес функціонування одноканальної системи масового обслуговування з відмовою, має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\mu P_1(t) + \lambda P_0(t). \end{cases} \tag{8.25}$$

Оскільки $P_0(t) + P_1(t) = 1$, то (8.25) перетвориться до рівняння вигляду

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu(1 - P_0(t));$$

або

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) P_0(t) + \mu, \tag{8.26}$$

тобто замість системи двох диференціальних рівнянь (8.25) достатньо розглянути диференціальне рівняння (8.26). Розглянемо розв’язання (8.26) за початкових умов $P_0(t = 0) = 1$; $P_1(t = 0) = 0$. Це означає, що в початковий момент часу $t = 0$ канал є вільним, тобто подія, яка полягає в тому, що в момент часу $t = 0$, система функціонує (перебуває) у функціональному стані S_0 є достовірною.

Загальним розв’язанням (8.26) є

$$P_0(t) = e^{-(\lambda+\mu)t}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t} + c\right), \qquad (8.27)$$

а частковим розв’язанням (8.26) з урахуванням зазначених вище початкових умов є

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}, \qquad (8.28)$$

тоді $$P_1(t) = 1 - P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right). \qquad (8.29)$$

На рис. 8.8 подане графічне зображення залежної від часу $P_0(t)$ за (8.28) та $P_1(t)$ за (8.29).

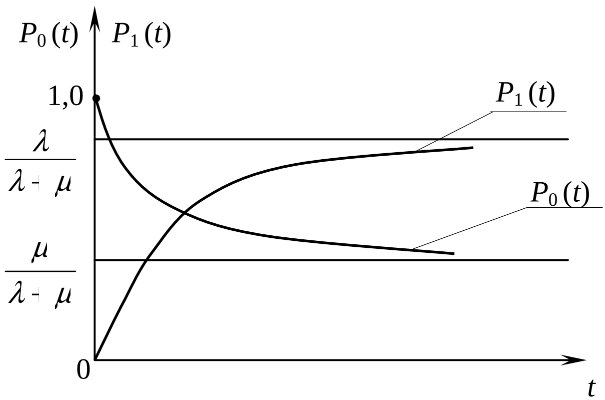

Рис. 8.8. Залежність від часу ймовірностей функціонування системи в станах S_0 та S_1

З рис. 8.8 та із співвідношень (8.28) та (8.29) видно, що при достатньо великих t процес, який відбувається в системі масового обслуговування з відмовою, необмежено наближається до *сталого процесу,* для якого

$$P_0(t) = P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu};$$

$$P_1(t) = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \qquad (8.30)$$

тобто ймовірності подій, які полягають в тому, що система масового обслуговування з відмовою буде функціонувати в станах S_0 та S_1, є сталими та визначаються характеристиками (інтенсивностями) потоків заявок й обслуговування.

Відносна пропускна здатність є відношенням середньої кількості заявок, обслужених за одиницю часу, до середньої кількості заявок, які надходять на систему за той же інтервал часу. Для моменту часу t імовірність того, що канал є незайнятим, тобто заявка, яка надійде на систему в момент часу t, буде прийнята до обслуговування, визначається

$$q = P_0(t), \tag{8.31}$$

а якщо процес функціонування системи є сталим, то

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \tag{8.32}$$

Абсолютна пропускна здатність одноканальної системи масового обслуговування визначається виразом

$$A = \lambda q = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

Поняття відмови одноканальної системи масового обслуговування з відмовою пов’язане з таким: заявка, яка надійшла на систему в момент часу, коли канал зайнятий, отримує відмову. Відмова системи відповідає її функціонуванню у функціональному стані S_1. Тому ймовірність відмови системи визначається з (8.28), а в разі сталого процесу, який протікає в системі, маємо

$$P_{\text{відм.}} = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \tag{8.33}$$

8.8. Багатоканальна система масового обслуговування з відмовою

Можливі стани функціонування багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою визначаються кількістю каналів, з яких вона складається. Визначимо функціональні стани за кількістю зайнятих каналів, тоді будемо мати таке:

S_0 – усі канали вільні;

S_1 – один канал зайнятий, а $(n – 1)$ каналів вільні ;

S_2 – два канали зайняті, а $(n – 2)$ каналів вільні;

… … … … … … … … … … … … … … … … … …

S_k – k каналів зайняті, а $(n – k)$ каналів вільні;

… … … … … … … … … … … … … … … … … …

S_n – усі n каналів зайняті.

Розмічений граф станів функціонування багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою наведений на рис. 8.9.

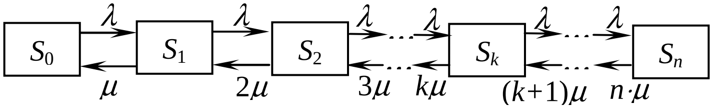

Рис. 8.9. Розмічений граф станів багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою

На рис. 8.9 відзначено, що система, якщо вона функціонує у функціональному стані $S_k\ , k = \overline{0, n-1}$, під впливом найпростішого потоку заявок з інтенсивністю λ перейде в S_{k+1}-й, $k = \overline{0, n-1}$ стан. Якщо система функціонує в S_1-му функціональному стані, то вона під впливом найпростішого потоку обслуговування з інтенсивністю μ перейде в S_0-й функціональний стан. Якщо система функціонує в S_k-му функціональному стані, то під впливом найпростішого потоку з інтенсивністю $k\mu$ вона перейде в S_{k-1}-й функціональний стан.

Система диференціальних рівнянь О. М. Колмогорова для визначення ймовірностей подій, які полягають в тому, що система S буде функціонувати в $S_i\ , i = \overline{1, n}$ станах, має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) P_1(t) + \lambda P_0(t) + 2\mu P_2(t); \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \dfrac{dP_k(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu) P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t); \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = -n\mu P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t). \end{cases} \tag{8.34}$$

Розв’язання (8.34) розглядається за початкових умов $P_0(t = 0) = 1$, $P_k(t = 0) = 0$, $k = \overline{1, n}$.

Для постановки та розв’язання практичних задач, коли розглядається їх моделювання у вигляді багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою, особливе значення мають моделі, в яких процес, що протікає в системі, розглядається сталим. Більш того, можна довести, що для будь-якої системи масового обслуговування з відмовою граничний режим її функціонування, який складається, є сталим, тобто справедливо, що

$$\lim_{t-\infty} P_k(t) = P_k, \quad k = \overline{1,n}.$$

Із (8.34) видно, що для умови сталого процесу, який протікає в багатоканальної системі масового обслуговування, будемо мати

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = 0, k = \overline{0,n}.$$

Система диференціальних рівнянь перетворюється в систему звичайних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0; \\ \lambda P_0 - (\lambda + \mu) P_1 + 2\mu P_2 = 0; \\ \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \\ \lambda P_{k-1} - (\lambda + k\mu) P_k + (k+1)\mu P_{k+1} = 0; \\ \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \\ \lambda P_{n-2} - [\lambda + (n-1)\mu] P_{n-1} + n\mu P_n = 0; \\ \lambda P_{n-1} - n\mu P_n = 0. \end{cases} \tag{8.35}$$

Для отримання розв'язку (8.35) з першого рівняння визначимо P_1 через P_0, а з другого рівняння визначимо P_2 через P_0 і так далі. Тоді маємо

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0;$$

$$\lambda P_0 - (\lambda + \mu) \frac{\lambda}{\mu} P_0 + 2\mu P_2 = 0;$$

$$P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0;$$

$$P_3 = \frac{\lambda^3}{3!\,\mu^3} P_0;$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} P_0,$$

якщо $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, то

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0 .$$

Раніше відзначалося, що події, які полягають в тому, що система буде функціонувати в одному із S_i $,i = \overline{1,n}$ станів, складають повну групу подій, тобто ці події є несумісними та одна із них в досліді відбудеться обов’язково. А це означає, що

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1.$$

Тоді

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} P_0 = 1;$$

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}}; \\ P_k &= \frac{\dfrac{\rho^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}}. \end{aligned}\right| \qquad (8.36)$$

Формула (8.36) дозволяє визначити ймовірність подій, які полягають в тому, що система буде функціонувати в S_k $,k = \overline{0,n}$ функціональних станах. Важливо відзначити, що для визначення P_k $,k = \overline{0,n}$ необхідно знати інтенсивності найпростіших потоків заявок та їх обслуговування. Співвідношення (8.36) називають *формулою Ерланга,* а систему рівнянь (8.35) називають *системою рівнянь Ерланга*.

Заявка, яка надійде на систему в момент часу, коли будуть зайняті всі канали, отримає відмову. Тому ймовірністю відмови багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою є

$$P_{\text{відм}} = P_n = \frac{\dfrac{\rho^n}{n!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}}. \qquad (8.37)$$

Примітка. Якщо в (8.37) прийняти $n = 1$, то будемо мати відомий вираз для ймовірності відмови одноканальної системи масового обслуговування з відмовою, а саме:

$$P_{\text{відм}} = \frac{\dfrac{\rho^1}{1!}}{\dfrac{\rho^0}{0!} + \dfrac{\rho^1}{1!}} = \frac{\rho}{1+\rho} = \frac{\dfrac{\lambda}{\mu}}{1+\dfrac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Якщо як показник ефективності функціонування багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою розглядати відносну пропускну здатність, то

$$q = \sum_{k=0}^{n-1} P_k = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - P_n = 1 - \frac{\dfrac{\rho^n}{n!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}}. \qquad (8.38)$$

Задача 8.3. Станція наведення винищувача на повітряну ціль має 3 канали. Кожний канал одночасно може наводити один винищувач на одну ціль. Середній час наведення винищувача на ціль дорівнює 2 хв. Потік повітряних цілей є найпростішим та має інтенсивність потоку $\lambda = 1{,}5$ літака за хвилину. Станцію наведення можна розглядати як триканальну систему масового обслуговування з відмовою, оскільки ціль, наведення по якій не почалось в момент часу, коли вона вийшла в зону відповідальності станції наведення, залишається необслуженою (неатакованою). Визначити ймовірність функціонування станції наведення в можливих станах (режимах), відносну пропускну здатність станції наведення та середню частку цілей, які проходять через зону відповідальності станції необстріляними.

Розв'язання. Середній час наведення винищувача на ціль відповідає математичному сподіванню випадкової величини $T_{\text{обсл}}$ – часу обслуговування, яка для найпростішого потоку підпорядкована експоненціальному потоку розподілу. Тоді задано, що $M\ [T_{\text{обсл}}] = m_{t\text{обсл}} = 2$ хв. За умовою задачі станція наведення є триканальною системою масового обслуговування з відмовою, тоді розмічений граф станів відповідає рис. 8.10.

Подані на рис. 8.10 функціональні стани мають такий зміст:

S_0 – усі три канали незайняті;

S_1 – один канал зайнятий та два канали незайняті;

S_2 – два канали зайняті та один канал незайнятий;

S_3 – зайняті три канали.

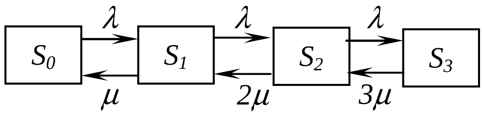

Рис. 8.10. Розмічений граф станів станції наведення як трьохканальної системи масового обслуговування

Оскільки інтервал часу неперервного функціонування станції наведення є непорівнянно великим по відношенню до інтервалу часу, на протязі якого станція обслуговує повітряну ціль (здійснює на неї наведення), то випадковий процес, який протікає в триканальній системі масового обслуговування з відмовою, слід вважати сталим процесом. Тому користуємося визначеною вище формулою Ерланга.

Маємо

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1{,}5}{\frac{1}{2}} = 3, \; \mu = \frac{1}{m_{t_{\text{обсл}}}} = \frac{1}{2};$$

$$P_0 = \frac{\frac{\rho^0}{0!}}{\sum_{k=0}^{3} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{\frac{3^0}{0!}}{\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}} = \frac{1}{13} = 0{,}077;$$

$$P_1 = \frac{\frac{3^1}{1!}}{13} = \frac{3}{13} = 0{,}231;$$

$$P_2 = \frac{\frac{3^2}{2!}}{13} = \frac{4{,}5}{13} = 0{,}346;$$

$$P_3 = \frac{\frac{3^3}{3!}}{13} = \frac{4{,}5}{13} = 0{,}346.$$

Відносну пропускну здатність визначимо з (8.38).

Маємо

$$q = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - P_3 = 1 - 0{,}346 = 0{,}654.$$

Середня частка цілей, які проходять через зону відповідальності станції наведення необстріляними, визначається як

$$P_{\text{відм}} = P_3 = 0{,}346.$$

8.9. Одноканальна система масового обслуговування з очікуванням

Розглянемо одноканальну систему масового обслуговування, на яку надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ; потік обслуговування є найпростішим з інтенсивністю μ. Заявка, яка надійшла на систему в момент часу, коли канал був зайнятим, становиться в чергу, яка має m місць, та чекає обслуговування.

Розмічений граф станів одноканальної системи масового обслуговування з очікуванням поданий на рис. 8.11.

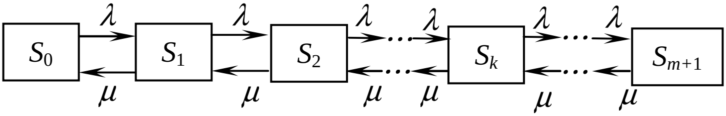

Рис. 8.11. Розмічений граф станів одноканальної системи масового обслуговування з очікуванням

Одноканальна система масового обслуговування з очікуванням, що відзначено на рис. 8.11, може функціонувати в таких станах:

S_0 – канал вільний;
S_1 – канал зайнятий, черги немає;
S_2 – канал зайнятий, в черзі одна заявка;
… … … … … … … … … … … … … …
S_k – канал зайнятий, в черзі (k–1) заявка;
… … … … … … … … … … … … … …
S_{m+1} – канал зайнятий, в черзі m заявок.

Час очікування в черзі $T_{\text{очік}}$ є випадковою величиною, підпорядкована експоненціальному закону розподілу, тобто щільність ймовірності розподілу має вигляд

$$h(t_{\text{очік}}) = \nu e^{-\nu t_{\text{очік}}},$$

де $\nu = \dfrac{1}{m_{t_{\text{очік}}}}$.

Система рівнянь Ерланга, яка описує сталий процес функціонування одноканальної системи масового обслуговування з очікуванням, має вигляд

$$
\begin{cases}
-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0; \\
-(\lambda+\mu) P_1 + \lambda P_0 + \mu P_2 = 0; \\
-(\lambda+\mu) P_2 + \lambda P_1 + \mu P_3 = 0; \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
-(\lambda+\mu) P_k + \lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1} = 0; \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
-\mu P_{m+1} + \lambda P_m = 0.
\end{cases} \tag{8.39}
$$

З (8.39) маємо

$$
\left.
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0 \ ; \\
P_2 &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 \ ; \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
P_k &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 \ ; \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
P_{m+1} &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} P_0 \ .
\end{aligned}
\right| \tag{8.40}
$$

Оскільки

$$
\sum_{k=0}^{m+1} P_k = 1,
$$

то

$$
\sum_{k=0}^{m+1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 = 1.
$$

Отже,

$$
P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{m+1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{m+1} \rho^k} = \frac{1}{\frac{1-\rho^{m+2}}{1-\rho}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \tag{8.41}
$$

де $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ та $\sum_{k=0}^{m+1} \rho^k$ – сума геометричної прогресії.

Тоді остаточно маємо

$$\left.\begin{aligned}
&P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}};\\
&P_1 = \rho P_0;\\
&P_2 = \rho^2 P_0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_k = \rho^k P_0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_{m+1} = \rho^{m+1} P_0.
\end{aligned}\right| \qquad (8.42)$$

Примітка. Інтенсивність потоків заявок та обслуговування може збігатися, тоді, як видно із того, що

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m+1} \rho^k} = \frac{1}{1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{m+1}} = \frac{1}{m+2},$$

імовірності функціонування системи в можливих станах збігаються, тобто $P_0 = P_k = \dfrac{1}{m+2}, k = \overline{1, m+1}$, та визначаються кількістю місць в черзі m.

Як видно з (8.42), імовірність відмови одноканальної системи масового обслуговування з очікуванням визначається зі співвідношення

$$P_{\text{відм}} = P_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}, \qquad (8.43)$$

відносна пропускна здатність та абсолютна пропускна здатність системи відповідно визначаються як

$$\left.\begin{aligned}
&q = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}.\\
&A = \lambda q
\end{aligned}\right| \qquad (8.44)$$

Визначимо математичне сподівання кількості заявок в черзі як математичне сподівання дискретної випадкової величини R, яка може приймати свої можливі значення 1, 2, 3, …, m. Маємо

$$M[R] = 1 \cdot P_2 + 2P_3 + 3P_4 + \ldots + mP_{m+1} =$$

$$= 1 \cdot \rho^2 P_0 + 2\rho^3 P_0 + 3\rho^4 P_0 + \ldots + m\rho^{m+1} P_0 =$$

$$= \rho^2 P_0 (1 + 2\rho + 3\rho^3 P_0 + \ldots + m\rho^{m-1}) =$$

$$= \rho^2 P_0 (\rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^m)^1_\rho = \rho^2 P_0 \left(\frac{\rho - \rho^{m+1}}{1-\rho} \right)^1_\rho =$$

$$= \rho^2 P_0 \frac{1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)}{(1-\rho)^2}.$$

З урахуванням виразу для P_0 з (8.42) маємо

$$M[R] = \frac{\rho^2 \left[1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)\right]}{(1 - \rho^{m+2})(1-\rho)}. \qquad (8.45)$$

Математичне сподівання кількості заявок, що пов’язані з системою, тобто, як тих, що перебувають в черзі, так і тих, що обслуговуються, визначимо з таких міркувань. Нехай K – випадкова величина кількості заявок, які пов’язані з системою; R – випадкова величина кількості заявок, які перебувають в черзі; Ω – випадкова величина кількості заявок, які перебувають на обслуговуванні.

Тоді

$$K = R + \Omega \text{ та } M[K] = M[R] + M[\Omega].$$

Оскільки розглядається одноканальна система масового обслуговування з чергою, то випадкова величина Ω може приймати два можливі значення – 0 та 1, а також

$$P(\Omega = 0) = P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}};$$

$$P(\Omega = 1) = 1 - P_0 = \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}.$$

Тоді

$$M[\Omega] = 0 \cdot P_0 + 1(1 - P_0) = \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}},$$

а з урахуванням (8.45) маємо

$$M[K] = M[R] + M[\Omega] = \frac{\rho^2 \left[1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)\right]}{(1 - \rho^{m+2})(1 - \rho)} + \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1 - \rho^{m+2}}. \quad (8.46)$$

Математичне сподівання часу очікування обслуговування для заявки, яка перебуває в черзі, визначається з виразу

$$M\left[T_{\text{очік}}\right] = \frac{M[R]}{\lambda}, \quad (8.47)$$

тобто середній час очікування визначається середньою кількістю заявок у черзі та інтенсивністю найпростішого потоку заявок.

Математичне сподівання часу перебування заявки в системі визначається з виразу

$$M\left[T_{\text{сист}}\right] = \frac{M[R]}{\lambda} + \frac{q}{\mu}, \quad (8.48)$$

де $\frac{q}{\mu}$ – середній час обслуговування заявок.

Наприкінці відзначимо, що при моделюванні процесу функціонування систем масового обслуговування важливим є випадок, коли заявки, які надходять на систему в разі зайнятості каналу обслуговування, складають необмежену чергу. Якщо $m \to \infty$, то кількість можливих функціональних станів системи є необмеженою. Якщо $\rho \geq 1$, то граничного сталого режиму для системи не існує, а черга зростає необмежено.

Якщо $\rho < 1$, то існує граничний сталий режим функціонування системи, для якого маємо таке:

$$\left.\begin{aligned}
&P_k = \rho^k (1 - \rho), k = 0, 1, 2, \ \ldots; \\
&M[R] = \frac{\rho^2}{1 - \rho}; \\
&M[K] = \frac{\rho}{1 - \rho}; \\
&M\left[T_{\text{очік}}\right] = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)}; \\
&M\left[T_{\text{сист}}\right] = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)}.
\end{aligned}\right| \quad (8.49)$$

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. Які ознаки визначають систему масового обслуговування?
2. Які властивості має найпростіший потік подій?
3. Чи можна розглядати найпростіший потік подій окремим випадком потоку Ерланга?
4. Чи визначається зміна станів функціонування марковського випадкового процесу з дискретними станами та дискретним часом?
5. Виходячи з розміченого графу станів функціонування багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою, записати відповідну їй систему диференціальних рівнянь О. М. Колмогорова?
6. Які ознаки функціонування технічних систем визначають випадковий процес, що при цьому розглядається, як сталий?
7. Які визначаються показники ефективності функціонування системи масового обслуговування з очікуванням?

Частина 3
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Глава 9
ОБРОБКА СПОСТЕРЕЖЕНЬ

9.1. Предмет та задачі математичної статистики

У теорії ймовірностей розглядаються закономірності масових випадкових явищ. При цьому використовуються такі описи закономірностей, як імовірність випадкової події, закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин та їх числові характеристики, закони розподілу невипадкових функцій випадкових величин, систем випадкових величин і випадкових процесів.

Виявлення зазначених описів закономірностей масових випадкових явищ можливе лише шляхом постановки експерименту й обробка результатів спостережень.

Математична статистика – це наука, в якій розглядаються теоретичні питання планування експерименту над випадковими явищами та обробки результатів спостережень на основі понять та положень теорії ймовірностей.

Оскільки результати спостережень можна розглядати як сукупність значень, що можуть бути отримані при проведенні n експериментів над будь-якою випадковою величиною, то викладки щодо задач математичної статистики доцільно вести мовою випадкових величин.

До задач, які розглядаються в математичній статистиці, відносять насамперед такі.

1. Планування експерименту.
2. Групування статистичних даних, одержаних у результаті спостережень чи проведенні експериментів, опрацьовування статистичних звітів у вигляді таблиць, графіків.
3. Статистична оцінка ймовірностей випадкових подій.
4. Ухвалювання гістограм частот і статистичної функції розподілу на основі результатів спостережень.
5. Статистична точкова та інтервальна оцінка параметрів законів розподілу.
6. Перевірка статистичних гіпотез.

Перша задача пов’язана з визначенням доцільного групування та подання результатів спостережень з метою подальшого їх аналізу. Друга – з визначенням до початку дослідження кількості необхідних випробувань, необхідної для того, щоб різниця між частотою випадкової події $P^*(A)$ та ймовірністю цієї події з достатньо великою ймовірністю не перевищувала заданої величини ε, або для того, щоб похибка, яку будемо мати при використанні середнього арифметичного результатів спостережень замість математичного сподівання випадкової величини, також з достатньо великою ймовірністю не перевищувала заданого значення ε. Третя задача пов'язана з визначенням оцінки ймовірності випадкової величини, яка розглядається при заданому обсязі результатів спостережень. Четверта – з визначенням статистичної функції розподілу випадкової величини $F^*(x)$. П'ята задача пов'язана з визначенням співвідношень, за якими слід проводити статистичні точкові оцінки параметрів відомих законів розподілу, які б відповідали вимогам, що формулюються щодо точкових оцінок параметрів. Визначені інтервальні оцінки параметрів законів розподілу відповідають заданому рівню довірчої ймовірності $\beta = P\left(\left|a^* - a\right| < \varepsilon\right)$, де a^* – точкова статистична оцінка параметра a. Шоста задача може мати декілька постановок у залежності від формулювання статистичної гіпотези. Так, гіпотеза може визначатися відносно закону розподілу випадкової величини, можливі значення якої спостерігаються в експерименті, чи відносно незалежності випадкових величин X_1 та X_2, які складають систему двох випадкових величин, можливі значення яких спостерігаються. Статистичні гіпотези можуть мати й інший зміст. Розв'язання задач щодо перевірки статистичних гіпотез ґрунтується на загальному методичному підході. А саме, для відповідної гіпотези за прийнятим критерієм визначається можливе значення випадкової величини статистики. Закон розподілу випадкової величини статистики є відомим, або його визначають при граничному переході при кількості випробувань $n - \propto$. Для заданого рівня значущості α за законом розподілу випадкової величини статистики R визначається квантиль $r_\alpha = F^{-1}(1-\alpha)$, де $F(r) = P(R < r)$ – функція розподілу випадкової величини статистики R. Якщо розрахункове значення статистики $\bar{r}$ буде відповідати нерівності $\bar{r} \geq r_\alpha$, то гіпотеза відхиляється, а в разі $\bar{r} < r_\alpha$ робиться висновок, що вибіркові значення не суперечать гіпотезі, яка висунута до розгляду.

Таким чином, розв'язання задач математичної статистики допомагає особі, яка приймає рішення, зробити розумний висновок щодо завдань, які вона розглядає. Математична статистика в цілому допомагає експериментатору краще усвідомити результати спостережень над випадковими явищами; оцінити, чи є результати спостережень значущими відносно гіпотез, які він висуває, та зробити висновок щодо прийняття чи неприйняття висунутої гіпотези.

9.2. Сутність вибіркового методу

При експериментальному дослідженні закономірностей випадкових явищ у математичній статистиці виходять з того, що експеримент може бути повторений багато разів. Якщо мати на увазі, що експеримент – це реалізація комплексу деяких умов, то зазначене вище багатократне повторення експерименту не тільки є виконанням умови масовості випадкових явищ, але і допущенням, оскільки повторити експеримент, враховуючи його означення, практично не можливо.

В експерименті фіксується зазначена ознака об'єкта, який вивчається. Розрізняють загальну та основну ознаки. *Загальною ознакою* є властивість, згідно з якою об'єкт об'єднується в однорідні сукупності, а *основною ознакою* є властивість об'єкта, яка досліджується в даному експерименті. Загальні та основні ознаки можуть мати кількісну природу, якщо вони виражені в числах, або якісну природу, наприклад професія, колір та ін.

Нехай, наприклад, експериментально досліджується вага деталі; тоді тип деталі, який визначається її цільовим призначенням, буде становити загальну ознаку, а вага деталі – основну ознаку. При експериментальному випробуванні ракети з метою визначення значень характеристик точності загальною ознакою є тип (модифікація) ракети, а основною – значення характеристики точності.

Окреме конкретне значення основні ознаки в математичній статистиці називають *реалізацією*, *результатом випробування*, *варіантом* основної ознаки.

При статистичному дослідженні ймовірнісних властивостей сукупності об'єктів у загальному випадку дослідник не може проводити експеримент над кожним з них. Так, для визначення придатності партії зерна для посіву неможливо здійснити перевірку кожної зернини. При визначенні відповідності розрахункових значень тактико-технічних характеристик зразка озброєння реальним їх значенням неможливо (не має сенсу) проводити випробування всіх одиниць зразка озброєння, який розглядається.

Метод, який застосовується при вивченні ймовірнісних властивостей усієї сукупності об'єктів, які досліджуються, називається *вибірковим методом*. У відповідності до вибіркового методу основні ознаки всієї сукупності об'єктів спостерігаються тільки в тій частині, яку називають *вибіркою*. Тобто *вибіркою* в математичній статистиці називають сукупність варіантів основної ознаки, які спостерігаються в експерименті, що планується, а сукупність усіх можливих варіантів, над якими ведеться спостереження, називають *генеральною сукупністю*. Оскільки наслідок експерименту наперед визначити неможливо, а сукупність варіантів основної ознаки вибирається навмання, то вибірку ще називають *випадковою вибіркою*.

Зручно основну ознаку об’єкта описувати випадковою величиною X, а при спостереженні основної ознаки будемо мати сукупність її значень $\{x_i^*\}, i=\overline{1,n}$. До проведення експерименту ця послідовність є випадковою вибіркою. Тому зручно випадкову вибірку описувати n-вимірним випадковим вектором $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$, можливими значеннями якого є $\{x_i^*\}, i=\overline{1,n}$. Випадковий характер вибірки визначається тим, що неможливо завчасно визначити значення елементів вибірки, які є реалізацією випадкових величин $X_i, i=\overline{1,n}$. Тому апріорно (до проведення експерименту) вибірка є випадковою, а апостеріорно (після проведення експерименту) вона є невипадковою (детермінованою величиною).

Кількість елементів вибірки n називається *об’ємом вибірки*. Кількість елементів генеральної сукупності може бути скінченною та нескінченною. Якщо із 100 одиниць деякого зразка озброєння для дослідження вибрано 20 одиниць, то кількість елементів генеральної сукупності складає скінченну множину, а кількість елементів випадкової вибірки $n=20$. Якщо в експерименті розглядається час безвідмовної роботи деякого виробу, то кількість елементів генеральної сукупності складає нескінченну множину.

Вибірки можуть бути *повторними* і *безповторними*. Якщо елемент вибірки після експериментального визначення основної ознаки знову повертається до множини генеральної сукупності, то вибірка є повторною. У противному разі – безповторною.

Якщо елементи з генеральної сукупності виймаються по одному, то вибірку називають *простою*. У подальшому будемо розглядати тільки прості вибірки, що відповідає, як правило, практиці проведення експериментальних досліджень в різних галузях науки. Тому терміни “проста вибірка” та “випадкова вибірка” зручно замінити на термін “вибірка”.

Виходячи із зазначених тут властивостей вибірки, випадковому вектору $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$, що визначений вище, з точки зору незалежності випадкових величин $X_i, i=\overline{1,n}$, які складають вектор $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$, відповідає такий вираз щільності ймовірностей:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i),$$

де $f_{X_i}(x_i)$ – щільність ймовірностей випадкової компоненти X_i.

За даними вибірки досить упевнено можна судити про ймовірнісні властивості всієї генеральної сукупності, якщо вибірка є *презентабельною*. Презентабельність вибірки визначається її об'ємом (кількістю її елементів n), а також організацією проведення експерименту, яка повинна забезпечити кожному елементу генеральної сукупності рівноймовірність бути вибраним до вибірки.

Елементи вибірки дозволяють скласти для подальшого розгляду випадкові величини вигляду $S=\varphi\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, які при розв'язанні задач математичної статистики прийнято називати *статистиками*. Прикладами таких статистик можуть бути: $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ – вибіркова сума; $S=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – вибіркове середнє. На відміну від імовірнісних термінів "функція розподілу", "математичне сподівання випадкової величини" та ін., при експериментальному дослідженні ймовірнісних описів генеральної сукупності використовують ті ж самі терміни, тільки їх називають *статистичними* або *вибірковими*: "статистична функція розподілу випадкової величини", "статистичне (статистична оцінка) математичне сподівання випадкової величини".

9.3. Планування експерименту

Першою задачею, яку повинен розв'язати дослідник при експериментальному визначенні закономірностей масових випадкових явищ, є планування експерименту. Планування експерименту пов'язане з виконанням вимог до вибірки, яку дослідник сподівається отримати. Це, перш за все, визначається метою дослідження та прийнятим рівнем довіри до отриманого результату статистичної оцінки, які будуть забезпечуватись обґрунтованим визначенням об'єму вибірки.

Так, якщо мета полягає у визначенні інтервалу $\left|P^*(A)-P(A)\right|<\varepsilon$, в якому буде перебувати невідома ймовірність випадкової події $P(A)$ з заданим рівнем довіри не менше β до отриманого результату, то дослідник визначає кількість випробувань n при заданих ε та β згідно з інтегральною теоремою Муавра – Лапласа (6.17). Це означає, що необхідно, використовуючи (6.18), а саме

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}\right)\geq\beta, \tag{9.1}$$

визначити n. Тобто

$$n \geq \frac{Pq}{\varepsilon^2}\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^2, \tag{9.2}$$

де $\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)$ – обернена функція Лапласа аргументу $\frac{\beta}{2}$.

Отже, якщо дослідник проведе n випробувань, визначених з (9.2), то частота $P^*(A)$ відхилиться від невідомої ймовірності на величину, яка не перевищує ε. Довіра до цього результату забезпечується не менш ніж β.

Якщо мета дослідження полягає у визначенні інтервалу $\left|P^*(A) - P(A)\right| < \varepsilon$ при заданих n та β, то з (9.1) маємо

$$\varepsilon \leq \sqrt{\frac{Pq}{n}}\,\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right). \tag{9.3}$$

Тому, якщо дослідник має у своєму розпорядженні n випробувань, то з довірою більше β можна стверджувати, що невідома ймовірність $P(A)$ відхилиться від частоти $P^*(A)$, яка може бути визначена при відомому n, на величину, яка не перевищує ε.

Якщо мета дослідника полягає у визначенні рівня довіри до результату, який може бути отриманий при заданих ε та n щодо відхилення $P(A)$ від $P^*(A)$, то ймовірність події, яка полягає в тому, що $\left|P^*(A) - P(A)\right| < \varepsilon$, визначиться з (6.18), тобто

$$P\left(\left|P^*(A) - P(A)\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}\right).$$

Розглянемо задачі планування експерименту, який проводиться з метою експериментального дослідження невідомого математичного сподівання випадкової величини $M[X]$. Можливі такі постановки задач. Задача перша: визначити об’єм вибірки, за якого з рівнем довіри не менше $\beta = P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x\right| < \varepsilon\right)$, де $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – випадкова величина, середнє арифметичне відхилиться від невідомого математичного сподівання випадкової величини X на величину, що не перевищує задане ε. Випадкова величина $\sum_{i=1}^{n} X_i$ – це сума n незалежних випадкових величин X_i, які підпорядковані одному й тому ж закону розподілу. Тоді згідно з граничною теоремою О. М. Ляпунова можна вважати, що випадкова величина $\sum_{i=1}^{n} X_i$ підпорядкована нормальному закону розподілу. Зазначимо, що на практиці вже при $n \geq 20$ можна приблизно визначити, що $\sum_{i=1}^{n} X_i$ підпорядкована нормальному закону розподілу, тоді і $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ також буде підпорядкована нормальному закону розподілу, який має такі параметри:

$$M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot m_x = m_x ;$$

$$D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\left[X_i\right] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{n},$$

де m_x та σ_x^2 – математичне сподівання та дисперсія випадкових величин $X_i, i = \overline{1,n}$, які складають систему $\{X_i\}, i = \overline{1,n}$ та $m_{x_1} = m_{x_2} = ... = m_{x_n} = m_x$ та $\sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2 = ... = \sigma_{x_n}^2 = \sigma_x^2$.

Тоді маємо

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m_x\right| < \varepsilon\right) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_x}\right) \geq \beta; \qquad (9.4)$$

$$n \geq \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^2 . \qquad (9.5)$$

Визначимо, що об’єм вибірки n за (9.5) може бути визначений, якщо відома дисперсія σ_x^2.

Друга задача: при заданих n та ε визначити рівень довіри β, за якого невідоме математичне сподівання m_x відхилиться від середнього арифметичного результатів спостережень на величину, яка не перевищує ε. З (9.4) маємо

$$\beta \ge 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}_x^*}\right), \tag{9.6}$$

де $\tilde{\sigma}_x^*$ – статистична оцінка середнього квадратичного відхилення випадкової величини X.

Третя задача: визначити інтеграл, в якому буде перебувати невідоме математичне сподівання випадкової величини X з рівнем довіри β при заданій кількості випробувань n. Маємо

$$\beta = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}_x^*}\right); \quad \varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}_x^*}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right). \tag{9.7}$$

Тоді інтервал, в якому буде перебувати m_x, має вигляд

$$\left(\tilde{m}^* - \frac{\tilde{\sigma}_x^*}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right) \le m_x \le \tilde{m}_x^* + \frac{\tilde{\sigma}_x^*}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right),$$

де $\tilde{m}_x^*$ – статистична оцінка математичного сподівання m_x.

9.4. Початкова обробка спостережень

Початкова обробка спостережень полягає у групуванні статистичних даних, отриманих у результаті спостережень чи проведення експериментів, та опрацюванні статистичних звітів у вигляді таблиць та графіків.

Реалізацією випадкового вектора $\{X_i\}, i = \overline{1,n}$ в експерименті є невипадковий вектор $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_i, ..., \tilde{x}_n)$, який відповідає певній вибірці. Цей результат спостережень подають у вигляді табл. 9.1, яку називають *простим статистичним рядом* або *простою статистичною сукупністю*.

Таблиця 9.1

Простий статистичний ряд

i	1	2	3	…	i	…	n
$\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	…	$\tilde{x}_i$	…	$\tilde{x}_n$

При постановці окремих експериментів дослідника може цікавити не тільки значення основної ознаки, але і місце цього значення в простому статистичному ряді. Так, наприклад, якщо в експерименті спостерігається величина похибки, то цікаво знати найменше та найбільше її значення. Тому завжди значення основної ознаки, що спостерігались в експерименті та які подані простим статистичним рядом, ранжирують і результати спостережень подають у вигляді неспадної послідовності. Такий запис результатів спостережень подають у вигляді табл. 9.2, яку називають *ранжированим статистичним рядом* або *варіаційним рядом*.

Таблиця 9.2

Ранжирований статистичний ряд

i	1	2	3	…	i	…	n
x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_n

У ранжированому ряду $x_1 = \min\limits_i \{\tilde{x}_i\}, x_n = \min\limits_i \{\tilde{x}_i\}$, а елемент за номером i називають i-ю порядковою статистикою. До порядкових статистик також відносять:

x_1 – *найменший елемент вибірки*;

x_n – *найбільший елемент вибірки*;

$a = x_n - x_1$ – *розмах вибірки*;

$$M_{e_x} = \begin{cases} \frac{x_{m+1}}{2}, \text{ якщо } \quad n - \text{непарне}, \quad n = m+1; \\ \frac{1}{2}(x_m + x_{m+1}), \text{ якщо } \quad n - \text{парне}, n = 2m. \end{cases}$$ – *статистичну медіану*.

У загальному випадку елементи x_i у ранжированому ряду можуть повторюватись. Якщо n_i – кількість повторенн елемента x_i у ранжированому ряду, то $P_i^* = {n_i}/{n}$, $i = \overline{1,l}$ – частота появи значення x_i, тоді результати спостережень подають у вигляді табл. 9.3.

Таблиця 9.3

Статистичний аналог ряду розподілу

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_l
P_i^*	P_1^*	P_2^*	P_3^*	…	P_i^*	…	P_l^*

Таблиця 9.3 також називається варіаційним рядом, який є статистичним аналогом ряду розподілу дискретної випадкової величини. З визначення варіаційного ряду випливає, що $\sum_{i=1}^{l} P_i^* = 1$. Користуються графічним поданням варіаційного ряду, наведеним у табл. 9.3. Таке графічне подання називається *статистичним багатогранником*, який слід розглядати як статистичний аналог багатогранника розподілу як форми визначення закону розподілу дискретної випадкової величини.

У випадку, коли кількість спостережень є великою (перевищує декілька сотень), то спостереження основної ознаки подають у вигляді *групованого статистичного ряду*. При визначенні групованого статистичного ряду роблять так: розмах вибірки поділяють на *інтервали* (*розряди*), кількість інтервалів вибирають 10÷20, визначається частота подання кількості спостережень у кожний інтервал як $P_i^* = m_i / n$, де m_i – кількість спостережень, які належать інтервалу (x_i, x_{i+1}), а x_i та x_{i+1} – відповідно початок та кінець i-го інтервалу. За такого опрацювання спостережень групований статистичний ряд подається у вигляді табл. 9.4.

Таблиця 9.4

Групований статистичний ряд при інтервальному поданні результатів спостережень

I_i	$I_1 = \{x_1 \div x_2\}$	$I_2 = \{x_2 \div x_3\}$	$I_3 = \{x_3 \div x_4\}$	…	$I_i = \{x_i \div x_{i+1}\}$	…	$I_k = \{x_{k-1} \div x_k\}$
m_i	m_1	m_2	m_3	…	m_i	…	m_k
$\tilde{P}_i^*$	$\tilde{P}_1^*$	$\tilde{P}_2^*$	$\tilde{P}_3^*$	…	$\tilde{P}_i^*$	…	$\tilde{P}_k^*$

Для групованого статистичного ряду також $\sum_{i=1}^{k} P_i^* = 1$.

Зазначена вище початкова обробка спостережень, подана табл. 9.2 – 9.4, забезпечує розв’язання таких задач: статистичної оцінки ймовірностей випадкових подій, визначення гісторгами частот та статистичної функції розподілу випадкових величин.

9.5. Статистична оцінка ймовірностей випадкових подій

Нехай в експерименті спостерігається наслідок, який полягає в тому, відбудеться чи ні випадкова подія. Наприклад, спостерігається випадкова подія A, яка полягає в тому, що деяке значення основної ознаки перебуває в заданих межах. Тоді в ранжированому ряду, який зазначений в табл. 9.2, x_i приймає значення 1, коли подія A відбулася, або 0 – коли подія A не відбулася. Частота події A як статистична оцінка ймовірності випадкової події A визначиться з виразу

$$\tilde{P}^*(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad (9.8)$$

9.6. Визначення гістограми частот і статистичної функції розподілу

Якщо в експерименті спостерігається дискретна випадкова величина, то статистичним аналогом її закону розподілу у вигляді ряду розподілу виступає, як було зазначено вище, варіаційний ряд, поданий табл. 9.3. Розглянемо визначення гістограми частот і статистичної функції розподілу як статистичних аналогів відповідно щільності ймовірностей та функції розподілу неперервної випадкової величини.

Гістограма частот за своїм змістом є графічним поданням групованого статистичного ряду, наведеного табл. 9.4, яка будується за правилом: на осі абсцис прямокутної системи координат відкладаються інтервали $\left(x_i \div x_{i+1}\right)$, а по осі ординат для кожного інтервалу відкладають $\hat{P}_i = \tilde{P}_i^* \big/ \left(x_{i-1} - x_i\right)$, де $\tilde{P}_i^*$ – частота появи значення основної ознаки, яка спостерігається в експерименті та яка зазначена в групованому статистичному ряду, а $\left(x_{i+1} - x_i\right)$ – довжина i-го інтервалу. За такої побудови площа прямокутника зі сторонами $\hat{P}_i$ та $\left(x_{i+1} - x_i\right)$ дорівнює $\tilde{P}_i^*$. Гістограма частот випадкової величини подана на рис. 9.1

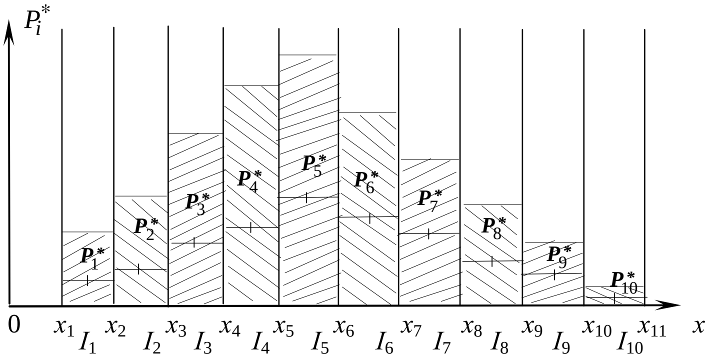

Рис. 9.1. Гістограма частот випадкової величини

Вище відзначено, що гістограма частот випадкової величини є статистичним аналогом щільності ймовірностей випадкової величини. Це випливає з того, що $\sum_{i=1}^{k} \tilde{P}_i^* = 1$ для групованого статистичного ряду, а правило побудови гістограми частот реалізує цю його властивість. Для щільності ймовірностей випадкової величини відома властивість ранжирування, яка полягає в тому, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) dx = 1 .$$

Під статистичною функцією розподілу випадкової величини X *розуміють частоту випадкової події* $A = \left\{X < x\right\}$ *для вибірки, яка розглядається, тобто*

$$F^*\left(x\right) = \tilde{P}^*\left(X < x\right) \tag{9.9}$$

або

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le \bar{x}_1; \\ \tilde{P}_1^*, & \text{якщо} \quad \bar{x}_1 < x \le \bar{x}_2; \\ \tilde{P}_1^* + \tilde{P}_2^*, & \text{якщо} \quad \bar{x}_2 < x \le \bar{x}_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; & \\ \tilde{P}_1^* + \tilde{P}_2^* + \ldots + \tilde{P}_i^*, & \text{якщо} \quad \bar{x}_i < x \le \bar{x}_{i+1}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; & \\ \tilde{P}_1^* + \tilde{P}_2^* + \ldots + \tilde{P}_{k-1}^*, & \text{якщо} \quad \bar{x}_{k-1} < x \le \bar{x}_k; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > \bar{x}_k. \end{cases} \qquad (9.10)$$

Зручно при побудові статистичної функції розподілу розглядати середини інтервалів $\bar{x}_i, i=\overline{1,k}$. Виходячи з (9.10), статистична функція розподілу $F^*(x)$ подана на рис. 9.2.

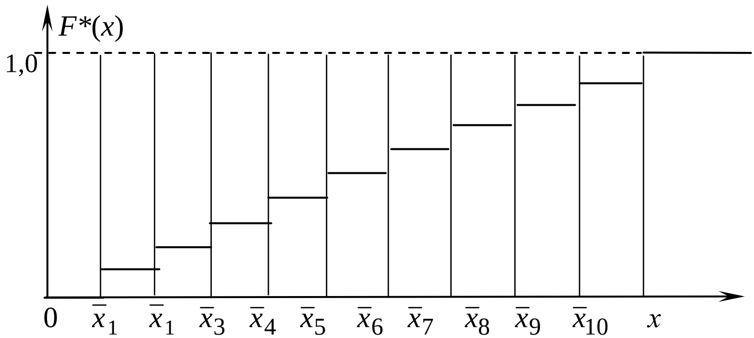

Рис. 9.2. Статистична функція розподілу випадкової величини

Зазначені графіки гістограми частот і статистичної функції розподілу в залежності від подальшого їх використання згладжують неперервними кривими.

Визначена в цій главі обробка спостережень в подальшому використовується дослідником у відповідності до поставленої мети, яка пов’язана з експериментальним виявленням закономірностей масових випадкових явищ.

Запитання для самостійної перевірки знань

1. У чому полягає сутність вибіркового методу?
2. Який зміст надається загальній та основній ознакам об’єкта, над яким проводиться спостереження?
3. Які задачі можуть ставитись при плануванні експерименту?
4. У чому полягає зміст опрацьовування результатів спостережень при їх початковій обробці?
5. Інформацію якого змісту отримує дослідник при побудові гістограми частот?

Г л а в а 10
СТАТИСТИЧНА ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

10.1. Вимоги, які ставляться до статистичних оцінок параметрів законів розподілу

Необхідність розв’язання задачі, яка полягає у визначенні статистичних оцінок параметрів законів розподілу, виникає в таких випадках. Закон розподілу випадкової величини X, можливі значення якої складають генеральну сукупність, в цілому невідомий, оскільки відомий лише вид закону, а його параметри невідомі. Тоді необхідно за об’ємом n вибірки оцінити параметри закону розподілу випадкової величини X. При розв’язанні спеціальних практичних задач закон розподілу випадкової величини X дослідника не цікавить, а необхідно знати лише числові характеристики випадкової величини X. Окремі числові характеристики випадкової величини X складають зміст параметрів її закону розподілу. Так, наприклад, якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, то її числові характеристики, математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення є параметрами нормального закону розподілу. У цьому випадку також виникає завдання статистичної оцінки параметрів законів розподілу. На практиці має місце і третій випадок. Він пов’язаний з тим, що дослідник може розраховувати лише на обмежений об'єм вибірки (декілька десятків). З практики обробки статистики різної фізичної природи відомо, що якщо об'єм вибірки обмежений, то рівень довіри до результатів обробки такої статистики з метою, наприклад, визначення закону розподілу не задовольняє практичні вимоги. У такому разі може розглядатися задача тільки статистичних оцінок основних числових характеристик випадкової величини X – математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення.

Розглянемо задачу щодо визначення числових характеристик випадкової величини X за результатами n незалежних дослідів. Нехай досліди ще не проведені, тоді їх результати нам невідомі. Якщо X_i – випадкова величина результату i-го досліду, то $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$ є випадковим вектором, який відповідає величинам результатів при проведенні n незалежних дослідів. Закони розподілів випадкових величин $X_i, i=\overline{1,n}$ є однаковими та відповідають закону розподілу випадкової величини X. Нехай нас цікавить визначення за результатами n дослідів деякого параметра a, який пов'язаний із законом розподілу випадкової величини X. Приблизне визначення параметра a називають його оцінкою a^*. Усяка оцінка, яка може бути отримана на основі дослідних даних $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$, є *функцією випадкових величин* $X_i, i=\overline{1,n}$ вигляду

$$a^* = \varphi\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right). \tag{10.1}$$

Якщо a^* згідно з (10.1) є невипадковою функцією n випадкових величин $X_i, i=\overline{1,n}$, то оцінка параметра a^* є також випадковою величиною. Так, наприклад, згідно з граничною теоремою П. Л. Чебишева *оцінкою для математичного сподівання є середнє арифметичне результатів, які спостерігаються при n незалежних дослідах,* а саме

$$m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{10.2}$$

Такий погляд дає право стверджувати, що будь-яка оцінка a^* параметра a є випадковою величиною та є функцією n випадкових величин X_1, X_2, ..., X_n. Закон розподілу a^* залежить від закону розподілу випадкової величини X та від вигляду функції (10.1), а також від кількості

n дослідів. Як відзначалося вище, випадкові величини a^* називають статистиками. Закони розподілу для статистик існують і можуть бути визначені при граничних переходах.

Статистики для початкових і центральних моментів s-го порядку мають вигляд

$$\alpha_s^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^s \ ; \quad \mu_s^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \tilde{m}_x^*\right)^s . \tag{10.3}$$

Якщо кількість n дослідів є великою (декілька сотень), то застосування (10.3) є незручним з розрахункової точки зору. Тоді роблять так: у кожному інтервалі (розряді) розглядають випадкову величину $\tilde{X}_i$, яка відповідає середині інтервалу та виступає представником інтервалу. Тоді у відповідності до запису табл. 9.4 маємо

$$\alpha_s^* = \sum_{i=1}^{k} \tilde{X}_i^s P_i \ ; \quad \mu_s^* = \sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{X}_i - \tilde{m}_x^*\right)^s P_i . \tag{10.4}$$

Зазначені тут вирази (10.2) – (10.4) відповідають певному вигляду функції (10.1). У цілому можливі й інші функціональні залежності статистичної оцінки параметра від $X_i\ , i = \overline{1,n}$. Нас цікавлять такі залежності вигляду (10.1), які будуть забезпечувати отримання найбільш доцільних оцінок параметрів законів розподілу. З цією метою до статистичних оцінок законів розподілу висуваються, на основі відомих граничних теорем теорії ймовірностей та здорового глузду, такі вимоги:

– *статистична оцінка параметра повинна бути змістовною,* тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|a^* - a\right| < \varepsilon\right) = 1, \tag{10.5}$$

що означає, що при необмеженому збільшенні кількості дослідів $(n - \infty)$ *статистична оцінка параметра* a^* *за ймовірністю наближається до параметра, який оцінюється;*

– *оцінка параметра повинна бути незміщеною,* тобто

$$M\left[a^*\right] = a, \tag{10.6}$$

що означає, що математичне сподівання оцінки параметра повинне збігатися з самим параметром, а отже, ми не повинні робити систематичних похибок при використанні a^* *замість* a *в бік завищення чи заниження;*

– *оцінка параметра повинна бути ефективною,* тобто

$$D\left[a^{*}\right] = \min, \tag{10.7}$$

що означає, що отримана змістовна та незміщена оцінка має бути якомога менш випадковою, а отже, у порівнянні з іншими повинна мати мінімальну дисперсію.

На практиці не завжди вдається визначити такі статистичні оцінки параметрів, які б задовольняли всі зазначені вище вимоги. В інтересах спрощення розрахунків користуються оцінками a^{*}, які є незначно зміщеними чи не відповідають вимозі ефективності, але ними користуються, тому що дисперсія є незначно більшою у порівнянні з (10.7).

10.2. Метод максимальної правдоподібності визначення параметрів законів розподілу

Методи визначення статистичних оцінок параметрів законів розподілу в математичній статистиці відносять до методів оцінювання. Відомі такі методи оцінювання параметрів законів розподілу:

– метод моментів;
– метод мінімуму ризику (принцип мінімаксу);
– метод максимуму апріорної ймовірності;
– метод максимуму правдоподібності.

В основу методу моментів покладений принцип рівності вибіркових (статистичних) і дійсних, але невідомих моментів розподілу, які залежать від параметрів, що оцінюються. Кількість моментів, які порівнюються, відповідає кількості параметрів, які оцінюються. Статистичні моменти розподілу визначаються за співвідношеннями, аналогічними для дискретних випадкових величин. Реалізація вибірки $\{x_i\}, i = \overline{1,n}$ виступає аналогом можливих значень дискретної випадкової величини, а частоти $P^{*}\left(X = x_j\right) = \dfrac{1}{n}$ є аналогом імовірностей ряду розподілу. Якщо випадкова величина підпорядкована однопараметричному закону розподілу та необхідно знайти статистичну оцінку a^{*}, тоді маємо

$$\alpha_1^{*} = \alpha_1\,; \quad \alpha_1^{*}[X] = \alpha_1\left(a^{*}\right) = \alpha_1(a) = m_x(a), \tag{10.8}$$

де α_1^{*} та α_1 – відповідно вибірковий та дійсний початковий моменти першого порядку, а значить $a^{*} = \alpha_1^{-1}\left(\alpha_1^{*}\right)$. Якщо кількість параметрів, які оцінюються, $m > 1$, то розглядається система m рівнянь вигляду (10.8).

Задача 10.1 Визначити оцінку λ^* параметра λ експоненціального закону розподілу.

Розв'язання. Відомо, що функція щільності експоненціального закону розподілу має вигляд

$$f(t;\lambda) = \lambda e^{-\lambda t},$$

а також відомо, що $\alpha_1 = \alpha_1(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Тоді

$$\lambda^* = \alpha_1^{-1}\left(\alpha_1^*\right) = \frac{1}{\alpha_1^*} = \frac{1}{\tilde{m}_x^*},$$

де m_x^* – вибіркове (статистичне) математичне сподівання.

Задача 10.2. Визначити оцінки m_x^*, σ_x^* параметрів m_x, σ_x нормального закону розподілу.

Розв'язання. Якщо випадкова величина підпорядкована нормальному закону розподілу, то

$$f(x; m_x, \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Відомо, що $\quad a_1 = a_1(m_x) = m_x;$

$$\alpha_2 = \alpha_2(m_x, \sigma_x) = \sigma_x^2 + m_x^2.$$

Тому $\quad m_x = \alpha_1^{-1}(\alpha_1) = \alpha_1;$

$$\sigma_x = \sigma_x(\alpha_2, m_x) = \alpha_2^{-1}(\alpha_2, m_x) = \sqrt{\alpha_2 - m_x^2},$$

а $\quad \tilde{m}_x^* = \alpha_1^{-1}\left(\alpha_1^*\right) = \tilde{\alpha}_1^*;$

$$\tilde{\sigma}_x^* = \alpha_2^{-1}\left(\alpha_2^*, m_x^*\right) = \sqrt{\tilde{\alpha}_2^* - \tilde{m}_x^{*2}},$$

де $\tilde{\alpha}_2^*$ – вибірковий другий початковий момент.

Метод моментів має широке використання на практиці, тому що він потребує простих розрахунків. Але (10.9) забезпечує отримання зміщених оцінок параметрів законів розподілу. Тому його використовують для отримання перших наближень оцінок параметрів.

Метод мінімуму ризику ґрунтується на використанні формули Байєса для апостеріорної умовної щільності розподілу. Розглядається функція витрат, яка є випадковою та відповідає відхиленню параметра a від її статистичної оцінки. Як статистична оцінка параметра a приймається таке його значення a^*, за якого для вибірки, що розглядається, забезпечується мінімум умовних середніх витрат.

Метод максимуму апостеріорної ймовірності передбачає, що статистичною оцінкою a^* параметра a слід вважати таку оцінку a^*, за якої досягається максимум умовної ймовірності події $A=\left\{ {}^{a}\!\big/_{X = x_i} \right\}$.

Метод максимуму правдоподібності ґрунтується на принципі максимуму правдоподібності, що покладений в основу практичних методів визначення невідомих параметрів законів розподілу за результатами обробки наслідків дослідів.

Зміст методу максимуму правдоподібності полягає в такому. Нехай проведено $n \times m$ незалежних спостережень над випадковою величиною X, підпорядкованою невідомому закону розподілу з невідомими параметрами, а саме $f\left(x; a_1, a_2, ..., a_l, ..., a_L\right)$.

Результати спостережень подані матрицею вигляду

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{i1} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{i2} & \cdots & x_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1j} & x_{2j} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{nj} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{2m} & x_{2m} & \cdots & x_{im} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}.$$

Спостереження $\{x_{ij}\}, j=\overline{1,m}$ можна розглядати як можливі значення X_i випадкової величини, закон розподілу якої буде описуватись тим же вектором параметрів, тобто $f_{X_i}\left(x_i; a_1, a_2, ..., a_l, ..., a_L\right)$. Оскільки проведені випробування є незалежними, то випадкові величини $X_i, i=\overline{1,n}$ також є незалежними, а закон розподілу системи випадкових величин

$\{X_i\}, i=\overline{1,n}$ має вигляд

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_l, \ldots, a_L) = \\ = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_l, \ldots, a_L). \qquad (10.9)$$

За аналогією з n-вимірним нормальним законом розподілу для системи $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$ незалежних випадкових величин, для якого щільність ймовірностей вигляду (10.9) досягає максимуму в точці $(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n})$, за методом максимуму правдоподібності як статистичні оцінки параметрів $\{a_l\}, l=\overline{1,L}$ приймають ті значення параметрів $\{a_l^*\}, l=\overline{1,L}$, за яких функція найбільшої правдоподібності вигляду

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_L) = \\ = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_L) \qquad (10.10)$$

досягає максимуму.

Тому статистичні оцінки параметрів законів розподілу $\{a_l\}, l=\overline{1,L}$ визначаються при розв'язанні системи рівнянь вигляду

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_L)}{\partial a_l} = 0, \quad l=\overline{1,L} \qquad (10.11)$$

Далі розглянемо визначення параметрів законів розподілу неперервних та дискретних випадкових величин, які є найбільш вживаними при розв'язанні практичних задач.

10.3. Статистична оцінка параметрів законів розподілу неперервних та дискретних випадкових величин

10.3.1. Статистична оцінка параметрів нормального закону розподілу за методом максимальної правдоподібності

Відомо, що випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, якщо щільність має вигляд

$$f(x;m_x,\sigma_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad -\infty\le x\le+\infty .$$

Тоді згідно з (10.10) функція найбільшої правдоподібності буде мати такий вигляд:

$$L(x_1,x_2,...,x_n;m_x,\sigma_x)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x_i-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\right)^n\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} . \qquad (10.12)$$

Для більш зручних перетворень та розв'язання системи вигляду (10.11) прологарифмуємо (10.12). Тоді будемо мати

$$\ln L(x_1,x_2,\ \ ...,x_n;m_x,\sigma_x)=$$

$$=-n\ln\sqrt{2\pi}-n\ln\sigma_x-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 ;$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial m_x}=\dfrac{1\cdot 2}{2\sigma_x^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m_x)=0;\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma_x}=-\dfrac{n}{\sigma_x}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2\left(-\dfrac{2\sigma_x}{\sigma_x^4}\right)=0.\end{cases}$$

Звідси

$$\tilde{m}_x^*=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}; \qquad (10.13)$$

$$\tilde{\sigma}_x^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \tilde{m}_x^*\right)^2}{n}. \tag{10.14}$$

Співвідношення (10.13) та (10.14) можуть бути прийняті як статистична оцінка математичного сподівання та статистична оцінка дисперсії випадкової величини X, підпорядкованої нормальному закону розподілу, якщо (10.13) та (10.14) задовольняють вимогам, які висуваються до статистичних оцінок параметрів законів розподілу. Вимога змістовності (10.5) для (10.13) та (10.14) має вигляд

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - m_x\right)^2}{n} - \sigma_x^2\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Зазначимо, що за визначенням

$$\sigma_x^2 = D[X] = M\left[\left|X - m_x\right|^2\right]$$

та за змістом граничної теореми П. Л. Чебишева

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

де випадкові величини $X_i, i = \overline{1,n}$, які описують випадкову вибірку, є незалежними та підпорядкованими одному й тому ж закону розподілу, вимога змістовності до статистичних оцінок параметрів законів розподілу для (10.13) та (10.14) виконується.

Перевіримо виконання вимоги незміщеності (10.6) для статистичної оцінки математичного сподівання (10.13). Маємо

$$M\left[\tilde{m}_x^*\right] = M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{1}{n}M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\cdot n\cdot m_x = m_x,$$

тобто вимога незміщеності для (10.13) виконується. З метою розгляду виконання вимоги незміщеності для статистичної оцінки дисперсії виконуємо такі перетворення

$$\tilde{\sigma}_x^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{m}_x^*\right)^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i - m_x\right) - \left(\tilde{m}_x^* - m_x\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i - m_x\right)^2 - 2\left(x_i - m_x\right)\left(\tilde{m}_x^* - m_x\right) + \left(\tilde{m}_x^* - m_x\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^2 - \frac{1}{n}2\left(\tilde{m}_x^* - m_x\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{m}_x^* - m_x\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^2 - 2\left(\tilde{m}_x^* - m_x\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_x}{n}\right) + \frac{1}{n}\cdot n\left(\tilde{m}_x^* - m_x\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^2 - 2\left(\tilde{m}_x^* - m_x\right)\left(\tilde{m}_x^* - \frac{1}{n}\cdot n\cdot m_x\right) + \left(\tilde{m}_x^* - m_x\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^2 - \left(\tilde{m}_x^* - m_x\right)^2 .$$

Отже,

$$M\left[\sigma_x^{*2}\right] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - m_x\right)^2 - \left(\tilde{m}_x^* - m_x\right)^2\right] =$$

$$=\frac{1}{n}M\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-m_x\right)^2\right]-M\left[\left(\tilde{m}_x^*-m_x\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left[\left(X_i-m_x\right)^2\right]-M\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}-m_x\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot n\sigma_x^2-D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right]=\sigma_x^2-\frac{\sigma_x^2}{n}=\sigma_x^2\left(1-\frac{1}{n}\right);$$

$$M\left[\sigma_x^{*2}\right]=\sigma_x^2\left(1-\frac{1}{n}\right). \qquad (10.15)$$

Вимога незміщеності для статистичної оцінки дисперсії випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу, якщо цю оцінку визначати за виразом (10.14), не виконується. Але, як видно з (10.15), така оцінка є незміщеною при $n - \infty$. Для того, щоб оцінка (10.14) задовольняла вимозі незміщеності за будь-якого n її помножують на величину $\frac{n}{n-1}$, тоді

$$S_x^2=\frac{n}{n-1}\tilde{\sigma}_x^{*2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\tilde{m}_x^*\right)^2}{n-1}. \qquad (10.16)$$

Статистичну оцінку середнього квадратичного відхилення називають стандартом та розраховують

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{m}_x^*\right)^2}{n-1}}. \qquad (10.17)$$

Оскільки

$$D\left[m_x^* = \frac{\sum_{i-1}^{n} X_i}{n} \right] = \frac{D[X]}{n};$$

$$\lim_{n\to\infty} D\left[m_x^*\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{D[X]}{n} = 0,$$

то при достатньо великих n статистична оцінка математичного сподівання випадкової величини (10.13) є ефективною.

Оцінка (10.17) не є ефективною, а є симетрично ефективною, тобто при збільшенні n відношення дисперсії оцінки до мінімально можливої наближаються до одиниці.

Статистичні оцінки параметрів нормального закону розподілу слід проводити за співвідношеннями (10.13) та (10.17).

10.3.2. Статистична оцінка параметра експоненціального закону розподілу за методом максимальної правдоподібності

Випадкова величина T підпорядковується експоненціальному закону розподілу, якщо щільність ймовірностей має вигляд

$$f(t;\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, \; t \geq 0 .$$

Тоді функція максимальної правдоподібності визначається з виразу

$$L(t_1, \mathrm{t}_2, \ldots \mathrm{t}_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda t_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i}. \qquad (10.18)$$

Прологарифмуємо (10.18) та визначимо похідну за параметром λ, тоді

$$\ln L(t_1, \mathrm{t}_2, \ldots \mathrm{t}_n; \lambda) = n \ln\lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} t_i ;$$

$$\frac{d\ln L\left(t_1, t_2, \ \dots t_n; \lambda\right)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} t_i .$$

Як статистичну оцінку λ^* параметра λ згідно з методом максимальної правдоподібності слід приймати таке значення λ^*, за якого (10.18) досягає максимуму. Тому

$$\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} t_i = 0 \ ; \ \tilde{\lambda}^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}} = \frac{1}{\tilde{m}_t^*}, \tag{10.19}$$

де $\tilde{m}_t^*$ – статистична оцінка математичного сподівання випадкової величини T .

У п. 10.3.1 доведено, що m_t^* задовольняє вимоги, які висуваються до статистичних оцінок параметрів законів розподілу.

10.3.3 Статистична оцінка параметра біноміального закону розподілу за методом максимальної правдоподібності

Якщо випадкова величина X підпорядкована біноміальному закону розподілу, то

$$P(X = m; p) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m} ,$$

де m – можливе значення випадкової величини X та m = 0, 1, 2, …, *n*; $p = p(A)$ – ймовірність сприятливого наслідку в досліді.

Оскільки $P(X = m; p)$ є ймовірністю події, яка полягає в тому, що сприятливий наслідок виникне рівно m разів у n дослідах, то функція максимальної правдоподібності визначається виразом

$$L(m; \mathrm{p}) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m} .$$

Тоді

$$\ln L(m; \mathrm{p}) = \ln C_n^m + m\ln p + (n - m)\ln(1 - p);$$

$$\frac{d\ln L(m; \mathrm{p})}{dp} = \frac{m}{p} - \frac{n - m}{1 - p} = 0;$$

$$m - mp - np + mp = 0; m - np = 0;$$

$$P^*(A)=\frac{m}{n}, \tag{10.20}$$

тобто як статистичну оцінку $P^*(A)$ параметра біноміального закону розподілу $P(A)$ слід приймати частоту випадкової події A.

На основі граничної теореми Я. Бернуллі, яка відповідає

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|p^* - p\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

слід стверджувати, що (10.20) відповідає вимозі змістовності. Оскільки

$$P^*(A) = m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n};$$

$$M\left[P^*(A)\right] = M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right]}{n} = \frac{n\cdot P(A)}{n} = P(A),$$

де випадкова величина X_i – це кількість появи сприятливого наслідку в i-му досліді, яка приймає свої можливі значення 1 з імовірністю $P(A)$ або 0 з імовірністю 1- $P(A)$; $\mathrm{M}\left[\mathrm{X}_{\mathrm{i}}\right] = P(A)$, то (10.20) відповідає вимозі незміщеності. Вище в п.10.3.1. відзначалося, що $P^*(A) = m_x^*$ є ефективною оцінкою.

10.3.4. Статистична оцінка параметра закону розподілу Пуассона за методом максимальної правдоподібності

Випадкова величина X підпорядковується закону розподілу Пуассона, якщо

$$P(X = m; a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

де m – можливе значення випадкової величини X, a – параметр закону.

Проводимо спостереження над випадковою величиною X. При n незалежних випробуваннях, в кожному з яких може виникнути сприятливий наслідок A, випадкова величина X – кількість сприятливих наслідків – при n випробуваннях може приймати можливі значення $x_i = 0, 1, 2, ..., n$. Якщо $r = \max\{x_i\}$, а m_k, $k = \overline{1,r}$ – кількість можливих значень x_i, то функція максимальної правдоподібності буде мати вигляд

$$L(x_1, x_2, \ ...., \ x_n; a) = \prod_{k=0}^{r} \left(\frac{a^k}{k!} e^{-a} \right)^{m_k}. \qquad (10.21)$$

Тоді

$$ln\, L(x_1, x_2, \ ...., \ x_n; a) = \sum_{k=0}^{r} m_k (k \ln a - \ln k! - a);$$

$$\frac{d\, ln\, L(x_1, x_2, \ ..., \ x_n; a)}{da} = \sum_{k=0}^{r} m_k \left(\frac{k}{a} - 1 \right) = 0;$$

$$\frac{1}{a} \sum_{k=0}^{r} k \cdot m_k - \sum_{k=0}^{r} m_k = 0; \ a = \frac{\sum_{k=0}^{r} k \cdot m_k}{\sum_{k=0}^{r} m_k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \ \tilde{a}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \qquad (10.22)$$

Оскільки статистична оцінка $\tilde{a}^*$ параметра a закону розподілу Пуассона є середнім арифметичним результатів спостережень, то така оцінка $\tilde{a}^*$ відповідає вимогам змістовності, незміщеності та ефективності.

10.4. Поняття функції інформації

Розглянемо випадкову вибірку $X = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ з розподілу $L(Y) \in F$. Апріорна інформація щодо випадкової величини Y, яка спостерігається, полягає в тому, що функція розподілу $F(y; И)$ є елементом заданого параметричного класу функцій розподілу F, тобто $F(y; И)$ відповідає відомому вигляду закону розподілу, але залежить від невідомого параметра $И$, який може бути будь-якою точкою заданої параметричної множини. Тоді в загальному вигляді задача оцінювання параметра має такий зміст: використовуючи стохастичну інформацію, яка надається вибіркою $X = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$, необхідно зробити висновок щодо дійсного значення Θ^* невідомого параметра Θ.

При точковому оцінюванні невідомого параметра Θ відшукують таку статистику $T(X)$, під якою розуміють будь-яку випадкову величину, яка є функцією тільки від вибірки $X=\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, значення якої при реалізації $(x_1, x_2, ..., x_n)$ вибірки X приймають за наближене значення параметра Θ. Тоді статистика $T(X)$ буде оцінкою параметра Θ.

Очевидно, що для оцінювання параметра Θ можна використовувати різні оцінки. Для того, щоб вибрати кращу з них, необхідно використати критерій, який би відповідав мірі близькості оцінки до дійсного значення параметра, що оцінюється. Оцінку, яка буде відповідати мінімальному значенню такої близькості, вважають оптимальною. Для того, щоб звузити клас таких оцінок, до них висувають певні вимоги. Оскільки будь-яка оцінка, статистика $T(X)$ є випадковою величиною, то загальною вимогою до побудови оцінок є вимога щодо концентрації можливих значень $T(X)$ відносно дійсного значення параметра Θ, який оцінюється.

Як таку вимогу приймають

$$M\left[T(x)\right]=\Theta, \quad \forall\Theta\in\Theta$$

і це визначається як вимога незміщеності.

Виходячи з того, що статистики $T(X)$, які задовольняють вимогу незміщеності, існують та складають клас Γ, за своїм змістом вони відповідають критерію $D[T(X)]$.

Тоді якщо $T^*(X)\in\Gamma$ *та* $T(X)\in\Gamma$, *маємо*

$$D_\Theta\left[T^*(X)\right]\le D_\Theta\left[T(X)\right], \quad \forall\Theta\in\Theta \qquad (10.23)$$

та за критерієм мінімуму дисперсії оцінка $T^*(X)$ *рівномірно по параметру* Θ *не гірше за оцінку* $T(X)$, *а якщо маємо строгу нерівність хоча б при одному* $\Theta\in\Theta$, *то оцінку* $T^*(X)$ *слід вважати більш точною.*

Оцінка $T^*(X)\in\Gamma$ *називається оптимальною, якщо для неї виконується умова*

$$D_\Theta\left[T^*(X)\right]=\inf_{\Gamma} D_\Theta\left[T(X)\right], \qquad \forall\Theta\in\Theta. \qquad (10.24)$$

Функція, яка розглядається для реалізації $(x_1, x_2, ..., x_n)$ випадкової вибірки $X = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ з $L(Y) \in \Gamma$

$$L(x_1, x_2, \quad ..., x_n; \Theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; \Theta) \tag{10.25}$$

як функція параметра Θ, є функцією правдоподібності. Як щільність ймовірності системи випадкових величин $X = \{X_i\}, i = \overline{1,n}$ маємо $L(x_1, x_2, \quad ..., x_n; \Theta) > 0$, а при допущенні її диференціювання за параметром И маємо

$$\ln L(x_1,\ x_2, \quad ...,\ x_n;\ \Theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln\ f_{X_i}(x_i;\ \Theta).$$

Випадкову величину

$$U(X;\ \Theta) = \frac{\partial \ln L(X;\ \Theta)}{\partial\, \Theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln\ f_{X_i}(x_i;\ \Theta)}{\partial\, \Theta} \tag{10.26}$$

називають функцією внеску вибірки X, *а* $\dfrac{\partial\ \ln\ f_{X_i}(x_i;\ \Theta)}{\partial\ \ \Theta}$ – *функцією внеску* i *-го спостереження.*

Для випадку векторного параметра $(\Theta_1,\ \Theta_2, \quad ..., \Theta_r)$ під внеском вибірки розуміють випадковий вектор $\big(U_1(X;\ \Theta),\ U_2(X;\ \Theta), \quad ...,\ U_r(X;\ \ \Theta)\big)$,

де
$$U_i(X,\ \Theta) = \frac{\partial\ \ln L(X;\ \Theta)}{\partial\ \ \Theta_i}, \qquad i = \overline{1,r}.$$

Для (10.25) справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} .... \int_{-\infty}^{\infty} L(x_1,\ x_2, \quad ...,\ x_n;\ \Theta)\ dx_i,\ dx_2, \quad ...,\ dx_n = 1.$$

Тоді

$$0=\int\limits_{-\infty}^{\infty}....\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial L(x_1,x_2,\quad ...,x_n;\Theta)}{\partial\,\Theta}dx_i,dx_2....dx_n=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}....\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\ln L(x_1,x_2,\quad ...,x_n;\ \Theta)}{\partial\,\Theta}L(x_1,x_2,\quad ...,x_n;\Theta)\,dx_i,dx_2,\quad ...,dx_n=$$

$$=M\left[U(X;\ \Theta)\right],$$

тобто
$$M\left[U(X;\ \Theta)\right]=0 \tag{10.27}$$

Під функцією інформації Фішера щодо параметра Θ*, яка міститься у вибірці* $X\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ *розуміють*

$$i_n(\Theta)=D_\Theta\left[U(X;\ \Theta)\right]=M_\Theta\left[U^2(X;\Theta)\right], \tag{10.28}$$

а величину

$$i(\Theta)=M_\Theta\left[\left(\frac{\partial\ln\ f_{X_i}(x_i;\ \Theta)}{\partial\,\Theta}\right)^2\right] \tag{10.29}$$

називають кількістю фішерівської інформації, яка міститься в одному спостереженні.

Із (10.28) та (10.19) випливає, що

$$i_n(\Theta)=ni(\Theta), \tag{10.30}$$

тобто що кількість фішерівської інформації, яка міститься у вибірці, зростає пропорційно об’єму вибірки.

Розглядаючи (10.29) та (10.30), маємо

$$i_n(\Theta)=nM\left[\left(\frac{\partial}{\partial\,\Theta}\ln\ f_{Xi}(x_i;\Theta)\right)^2\right], \tag{10.31}$$

якщо розглядається неперервна випадкова величина,

$$i_n(\Theta)=nM\left[\left(\frac{\partial}{\partial\,\Theta}\ln P(x;\ \Theta)\right)^2\right], \tag{10.32}$$

якщо розглядається дискретна випадкова величина.

Для дисперсії статистики $T(X)$, яка є незміщеною оцінкою параметра

Θ, виконується нерівність Рао – Крамера

$$D\left[T\left(X\right)\right] \geq \frac{1}{i_n\left(\Theta\right)}. \tag{10.33}$$

Розглянемо таку задачу.

Задача 10.3. Розглядається вибірка $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ з нормального закону розподілу $N(Y; m_y, \sigma_y)$ з невідомими параметрами m_y, σ_y. Довести, що вибіркове середнє є статистичною ефективною оцінкою математичного сподівання m_y.

Розв'язання. Відомо, що

$$D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{\sigma_x^2}{n}; \quad f_{X_i}\left(x_i; m_x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} l^{-\frac{\left(x_i - m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}};$$

$$\ln f_{X_i}\left(x_i; m_x\right) = -\frac{\left(x_i - m_x\right)^2}{2\sigma_x^2} - \ln\sqrt{2\pi}\sigma_x;$$

$$\frac{\partial \ln f_{X_i}\left(x_i; m_x\right)}{\partial m_x} = \frac{x_i - m_x}{\sigma_x^2};$$

$$M\left[\left[\frac{X_i - m_x}{\sigma_x^2}\right]^2\right] = \frac{1}{\sigma_x^4} M\left[\left(X_i - m_x\right)^2\right] = \frac{\sigma_{x_i}^2}{\sigma_x^4} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^4} = \frac{1}{\sigma_x^2}.$$

Тоді

$$i_n\left(m_x\right) = nM\left[\frac{\left(X_i - m_x\right)^2}{\sigma_x^4}\right] = \frac{n}{\sigma_x^2};$$

$$D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right]=\frac{\sigma_x^2}{n}=\frac{1}{\frac{n}{\sigma_x^2}}=\frac{1}{i_n\left(m_x\right)}.$$

Отже, статистична оцінка

$$\tilde{m}_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

є ефективною оцінкою параметра m_x нормального закону розподілу випадкової величини.

10.5. Інтервальна оцінка параметрів законів розподілу випадкових величин

Вище розглядалося, що як оцінка параметра закону розподілу виступало число. Так, у випадку нормального закону розподілу як статистичну оцінку математичного сподівання слід розглядати середнє арифметичне результатів спостережень (10.13), а як статистичну оцінку середнього квадратичного відхилення слід розглядати стандарт (10.17). У силу випадковості вибірки статистики

$$m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} = X_i\ ; \qquad \sigma_x^{*^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - m_x^*\right)^2$$

є випадковими величинами, а (10.13) та (10.17) – відповідно їх можливі значення. Тому (10.13) та (10.17) називають точковими статистичними оцінками математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення.

Виникає питання: якщо відносно невідомого параметра a ми користуємось його статистичною оцінкою a^*, то яку похибку при цьому допускаємо, яка довіра до такого результату оцінки. Згідно з граничною теоремою П. Л. Чебишева чим меншим об'ємом статистики ми користуємось, тим з більшою ймовірністю слід сподіватись, що середнє арифметичне як статистика, яка використовується для статистичної оцінки математичного сподівання випадкової величини X, відхилиться від дійсного значення математичного сподівання на величину, більшу, ніж деяке значення ε.

Достовірність статистичної оцінки параметра закону розподілу в математичній статистиці описують рівнем *довірчої ймовірності*, під якою розуміють

$$P\left(\left|\alpha * -\alpha\right| < \varepsilon\right) = \beta . \qquad (10.34)$$

Приймається рівень β, відповідний інтервал $I_\beta = \left(\alpha^* - \varepsilon, \alpha^* + \varepsilon\right)$ є довірчим *інтервалом*, а його границі $a^* - \varepsilon$ та $a^* + \varepsilon$ є *границями інтервалу довір'я*.

Статистика a^* є випадковою величиною, тоді границі довірчого інтервалу є випадковими величинами. Параметр закону розподілу a є невипадковою величиною. Тоді довірчу ймовірність $\beta = P\left(\alpha^* - \varepsilon < \alpha < \alpha^* + \varepsilon\right)$ слід розуміти як імовірність того, що випадковий інтервал накриє невипадкову точку a на числовій прямій (рис. 10.1).

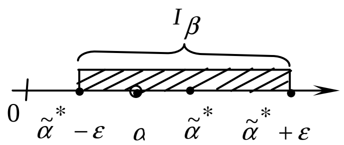

Рис. 10.1. Геометричне тлумачення змісту довірчої ймовірності

З геометричного розуміння змісту довірчої ймовірності випливає, що більшому інтервалу довір'я I_β відповідає більший рівень довірчої ймовірності β. Параметр a нам невідомий, і ми його не можемо визначити, тому що для цього необхідно мати нескінченну кількість результатів спостережень над випадковою величиною. Оскільки наші знання щодо параметра a завжди мають помилки, то звичайно існує бажання зменшити ці помилки. Останнє означає, що нас цікавить менший інтервал I_β. Але меншому інтервалу відповідає і менший рівень довірчої ймовірності. Очевидно, що знання щодо параметра a з малими похибками, яким відповідає низький рівень довірчої ймовірності β, не можуть задовольнити дослідника. Також не можуть задовольнити дослідника знання щодо параметра a, яким відповідають великі похибки та відповідно великі знання рівня довірчої ймовірності. Прийнято виходити з такого. Довірчим інтервалом I_β є інтервал значень параметра a, який не суперечить дослідним даним. Вважається, що ті значення параметра a, для яких $\left|\alpha * -\alpha\right| > \varepsilon$, суперечать дослідним даним, а подія, яка полягає в тому, що $\left|\alpha * -\alpha\right| > \varepsilon$, є малоймовірною, тобто ймовірність $1 - \beta$ є малою. Значення параметра a, для яких $\left|\alpha * -\alpha\right| < \varepsilon$, є сумісними з дослідними даними. Подія, яка полягає в тому, що $|\alpha * - \alpha| < \varepsilon$, є практично достовірною, тобто довірча ймовірність β є велика. Виходячи з такого міркування, довірчу ймовірність задають в межах від 0,8 до 0,99.

10.6. Інтервальна оцінка параметрів нормального закону розподілу

Розглянемо визначення інтервальної оцінки параметрів нормального закону розподілу – математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення випадкової величини. З визначення довірчої ймовірності (10.34) маємо

$$\beta = P\left(|\alpha^* - \alpha| < \varepsilon \right) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(\xi) d\xi,$$

де $f(\xi)$ – щільність ймовірностей випадкової величини $(\alpha^* - \alpha)$. Якщо закон розподілу випадкової величини a^* відомий, то можна визначити закон розподілу випадкової величини $(\alpha^* - \alpha)$ як невипадкової функції випадкової величини a^*. Числові характеристики випадкової величини $(\alpha^* - \alpha)$ самі залежать від невідомого параметру a^*.

Щоб обійти ці труднощі, використовують два такі методичні прийоми. Перший полягає в тому, що статистику

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

яка за своїм змістом є випадковою величиною, розглядають як суму n незалежних та однаково розподілених випадкових величин X_i, $i = \overline{1,n}$. Згідно з граничною теоремою О. М. Ляпунова випадкова величина m_x^* підпорядковується нормальному закону розподілу. На практиці вже при $n \geq 20$ можна вважати, що закон розподілу m_x^* приблизно є нормальним. Відомо, що

$$M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right] = m_x ; \quad D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right] = \frac{\sigma_x^2}{n} ;$$

$$\tilde{m}_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i ; \quad \tilde{\sigma}_x^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \tilde{m}_x^* \right)^2 .$$

Тоді $$P\left(\left|m_x^* - m_x\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\tilde{\sigma}_{m_x^*}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\varepsilon}{\tilde{\sigma}_x^*}\right) = \beta,$$

звідки

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}_x^*}{\sqrt{n}} \arg\Phi\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\tilde{\sigma}_x^*}{\sqrt{n}} t_\beta . \quad (10.35)$$

При такому підході маємо такий довірчий інтервал:

$$I_\beta = \left\{\tilde{m}_x^* - \frac{\tilde{\sigma}_x^*}{\sqrt{n}} t_\beta ; \tilde{m}_x^* + \frac{\tilde{\sigma}_x^*}{\sqrt{n}} t_\beta\right\}. \quad (10.36)$$

Слід відзначити, що розглянутий тут методичний підхід для визначення довірчого інтервалу для m_x може бути використаний у разі достатньо великої кількості випробувань над випадковою величиною X, яка підпорядкується довільному закону розподілу.

Другий методичний підхід для визначення довірчого інтервалу параметра a полягає в тому, що від розгляду випадкової величини a^*, закон розподілу якої залежить від самого параметра a, переходять до розгляду випадкової величини, скажімо U, функціонально пов’язаної з a^*, закон розподілу якої не залежить від невідомого параметра a та визначається через статистичні оцінки параметрів законом розподілу випадкової величини X і кількістю випробувань n. Так, якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, то для визначення довірчого інтервалу невідомого математичного сподівання m_x випадкової величини X розглядається статистика як випадкова величина

$$\mathrm{T} = \frac{\sqrt{\mathrm{n}}\left|\mathrm{m}_\mathrm{x}^* - \mathrm{m}_\mathrm{x}\right|}{\mathrm{S}_\mathrm{x}}, \quad (10.37)$$

де $$m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i ; \quad S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{n}\left(x_i - \tilde{m}_x^*\right)^2} \quad ;$$

$$\tilde{m}_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad (10.38)$$

яка підпорядковується *закону розподілу Ст'юдента з* $(n-1)$ *степенями свободи,* функція щільності якого має вигляд

$$S(t,n)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\;\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \tag{10.39}$$

де $\Gamma(u)=\int\limits_0^{\infty} x^{u-1}e^{-x}dx$ – гамма-функція Ейлера.

Для визначення довірчого інтервалу невідомого середнього квадратичного відхилення c_x випадкової величини X розглядається статистика

$$V=\chi^2=\frac{(n-1)\sigma_x^{*2}}{\sigma_x^2}, \tag{10.40}$$

де $\sigma_x^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\tilde{m}_x^*\right)^2$; $\tilde{m}_x^*=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$,

яка підпорядковується "закону розподілу χ^2" (закону розподілу Хельметра – Пірсона) з $(n-1)$ степенями свободи, щільність ймовірності якого має вигляд

$$f(\vartheta)=f\left(\chi^2\right)=\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\chi^2\right)^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}}. \tag{10.41}$$

Нехай проведено n незалежних випробувань над випадковою величиною X, яка підпорядковується нормальному закону розподілу з невідомими параметрами m_x і c_x. Отримані статистичні оцінки $\tilde{m}_x^*$ та S_x за (10.38). Для визначення довірчого інтервалу для m_x маємо таке:

$$P\left(\left|m_x^* - m_x\right| < \varepsilon\right) = P\left(\frac{\sqrt{n}\left|m_x^* - m_x\right|}{S_x} < \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{S_x}\right) =$$

$$= P\left(|T| < t_\beta\right) = \int_{-t_\beta}^{t_\beta} S(t,n)dt = 2\int_0^{t_\beta} S(t,n)dt = \beta,$$

де використовується властивість парності розподілу Ст’юдента. Закон розподілу Ст’юдента затабульований. За заданими β та n для рівняння

$$\beta = 2\int_0^{t_\beta} S(t,n)dt$$

визначається $$t_\beta = \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{S_x}.$$

Тоді

$$\varepsilon = \frac{t_\beta \cdot S_x}{\sqrt{n}} \tag{10.42}$$

та довірчий інтервал для m_x має вигляд

$$I_\beta = \left\{\tilde{m}_x^* - \frac{t_\beta \cdot S_x}{\sqrt{n}} < m_x < \tilde{m}_x^* + \frac{t_\beta \cdot S_x}{\sqrt{n}}\right\},$$

для якого $$P\left(\tilde{m}_x^* - \frac{t_\beta \cdot S_x}{\sqrt{n}} < m_x < \tilde{m}_x^* + \frac{t_\beta \cdot S_x}{\sqrt{n}}\right) = \beta \tag{10.43}$$

Для визначення довірчого інтервалу щодо c_x вибирають такі два значення статистики (10.40) χ_1^2 та χ_2^2, за яких

$$P\left(\chi^2 < \chi_1^2\right) = P\left(\chi^2 > \chi_2^2\right) = \frac{1-\beta}{2}.$$

Тоді

$$P\left(\chi_1 < \frac{s_x\sqrt{n-1}}{\sigma_x} < \chi_2\right) = \beta;$$

$$P\left(\frac{1}{\chi_2} < \frac{\sigma_x}{s_x\sqrt{n-1}} < \frac{1}{\chi_1}\right) = \beta;$$

$$P\left(s_x\frac{\sqrt{n-1}}{\chi^2} < \sigma_x < s_x\frac{\sqrt{n-1}}{\chi_1}\right) = \beta;$$

$$P\left(s_x \cdot z_1 < c_x < s_x \cdot z_2\right) = \beta$$

та

$$I_\beta = \{z_1 \cdot s_x < c_x < z_2 \cdot s_x\}, \qquad (10.44)$$

де $z_1 = \frac{\sqrt{n-1}}{\chi_2}$ і $z_2 = \frac{\sqrt{n-1}}{\chi_1}$ визначаються у відповідності до (10.41) за таблицею за вхідними даними відносно β – рівня довірчої ймовірності та n – кількості випробувань.

10.7. Інтервальна оцінка ймовірності випадкової події

У п. 10.3.3 показано, що за методом максимальної правдоподібності як точкову статистичну оцінку ймовірності випадкової події $P(A)$ слід приймати частоту випадкової події $P^*(A)$. Для випадкової вибірки, яка описується випадковим вектором $\{X_i\}$, $i = \overline{1,n}$, де X_i – випадкова величина кількості сприятливих наслідків у i-му досліді,

$$P^*(A) = m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i . \qquad (10.45)$$

Маємо

$$M\left[P^*(A)\right]=P(A);D\left[P^*(A)\right]=D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\left[X_i\right]=\frac{P(A)(1-P(A))}{n}=\frac{Pq}{n}. \qquad (10.46)$$

Вище відзначалося, що при незалежних випробовуваннях уже при $n \geq 20$ можна побачити, що закон розподілу випадкової величини (10.45) близький до нормального закону розподілу з числовими характеристиками (10.46).

Тоді

$$P\left(\left|P^*(A)-P(A)\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{Pq}}\right)=\beta, \qquad (10.47)$$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{Pq}{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)=t_\beta\sqrt{\frac{Pq}{n}}.$$

Довірчий інтервал для невідомої ймовірності випадкової події A, $P(A)=P$, який відповідає довірчій імовірності β, має вигляд

$$I_\beta=\left\{P^*-t_\beta\sqrt{\frac{P^*\left(1-P^*\right)}{n}}<P<P^*+t_\beta\sqrt{\frac{P^*\left(1-P^*\right)}{n}}\right\}. \qquad (10.48)$$

Примітка. Можна навести таке геометричне тлумачення визначення довірчого інтервалу (10.48). Нехай в (10.47) $r=\sqrt{P(1-P)}$.

Тоді

$$P^*-P=\frac{t_\beta}{\sqrt{n}}r, \qquad (10.49)$$

де

$$r^2+P^2-P+\frac{1}{4}=\frac{1}{4};$$

$$r^2+\left(P-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

є рівняння кола, яке зображене на рис. 10.2

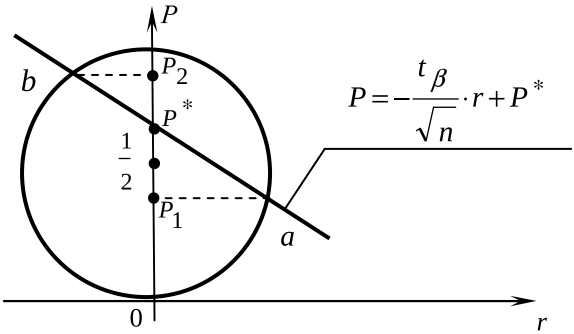

Рис. 10.2. Геометричне визначення довірчого інтервалу для імовірності випадкової події

Якщо за результатами спостережень визначити $P^*(A)$, то з (10.49) маємо $P=-\frac{t_\beta}{\sqrt{n}}r+P^*$, що є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $\left(-\frac{t_\beta}{\sqrt{n}}\right)$, яка в координатах $P0r$ (рис. 10.2) перетинає коло в точках a і b, ординати яких визначають ліву P_1 та праву P_2 границі довірчого інтервалу для імовірності випадкової події $P(A)$.

10.8. Оцінювання числових характеристик системи випадкових величин і невипадкових функцій випадкового аргументу

Розглянемо систему двох випадкових величин $\{X,Y\}$, над якою проведено n незалежних випробувань, результатом яких є множина пар чисел (x_i, y_i), $i=\overline{1,n}$. Змістовні, незміщені та ефективні точкові статистичні оцінки математичних сподівань, дисперсій та кореляційного моменту випадкових величин X та Y, які складають систему $\{X, Y\}$, визначаються з таких виразів:

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{m}_x^* = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ ;\ \tilde{m}_y^* = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\ ;\ \tilde{D}_x^* = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{m}_x^*\right)^2\ ; \\ \tilde{D}_y^* = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \tilde{m}_y^*\right)^2\ ;\ \tilde{R}_{XY}^* = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{m}_x^*\right)\left(y_i - \tilde{m}_y^*\right).\end{array}\right| \tag{10.50}$$

При розрахунках зручно користуватись співвідношеннями, які випливають із статистичних оцінок початкових і центральних моментів і мають вигляд:

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{D}_x^* = \dfrac{n}{n-1}\tilde{\mu}_{2,0}^* = \dfrac{n}{n-1}\left[\tilde{\alpha}_{2,0}^* - \left(\tilde{\alpha}_{1,0}^*\right)^2\right]; \\ \tilde{D}_y^* = \dfrac{n}{n-1}\tilde{\mu}_{0,2}^* = \dfrac{n}{n-1}\left[\tilde{\alpha}_{0,2}^* - \left(\tilde{\alpha}_{0,1}^*\right)^2\right]; \\ \tilde{R}_{XY}^* = \dfrac{n}{n-1}\tilde{\mu}_{1,1}^* = \dfrac{n}{n-1}\left[\tilde{\alpha}_{1,1}^* - \tilde{\alpha}_{1,0}^*\tilde{\alpha}_{1,0}^*\right],\end{array}\right| \tag{10.51}$$

де

$$\tilde{\alpha}_{1,0}^* = \tilde{m}_x^*;\ \tilde{\alpha}_{0,1}^* = \tilde{m}_y^*;\ \tilde{\alpha}_{2,0}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\ ;$$

$$\tilde{\alpha}_{0,2}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\ ;\ \ \tilde{\alpha}_{1,1}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ y_i\ .$$

Отже, точковими оцінками числових характеристик системи двох випадкових величин, які використовуються на практиці, є $\tilde{m}_x^*$, $\tilde{m}_y^*$ і кореляційна матриця

$$R_{\{X,Y\}}^* = \left\|\begin{array}{cc}\tilde{R}_{X,X}^* = \tilde{D}_x^* & \tilde{R}_{X,Y}^* \\ \tilde{R}_{Y,X}^* & \tilde{R}_{Y,Y}^* = \tilde{D}_y^*\end{array}\right\|, \tag{10.52}$$

де $\tilde{R}_{X,Y}^* = \tilde{R}_{Y,X}^*$.

Розглянемо систему m випадкових величин $\{X_i\}_m$, над якою проводиться n спостережень, які зручно подавати у вигляді матриці $\left\|x_{ij}^*\right\|_{m,n}$. При такому записі результатів спостережень i-й рядок містить n спостережень $\left\{x_{ij}^*\right\}$, $j=\overline{1,n}$ над випадковою величиною X_i, яка входить до системи $\{X_i\}_m$. Як статистичні оцінки числових характеристик $\{X_i\}_m$ виступають:

$$\left\{\tilde{m}_{x_i}^*\right\}_m ; R_{\{X_i\}_m}^* = \left\| \begin{matrix} \tilde{R}_{X_1,X_1}^* & \tilde{R}_{X_1,X_2}^* & \tilde{R}_{X_1,X_3}^* & \cdots & \tilde{R}_{X_1,X_m}^* \\ & \tilde{R}_{X_2,X_2}^* & \tilde{R}_{X_2,X_3}^* & \cdots & \tilde{R}_{X_2,X_m}^* \\ & & \tilde{R}_{X_3,X_3}^* & \cdots & \tilde{R}_{X_3,X_m}^* \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \tilde{R}_{X_m,X_m}^* \end{matrix} \right\|, \quad (10.53)$$

де

$$\left. \begin{aligned} &\tilde{m}_{x_i}^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^*, \ i=\overline{1,m}; \\ &\tilde{R}_{X_i,X_i}^* = \tilde{D}_{x_i}^* = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \tilde{m}_{x_i}^*\right)^2, \ i=\overline{1,m}; \\ &\tilde{R}_{X_i,X_l}^* = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \tilde{m}_{x_i}^*\right)\left(x_{ij} - \tilde{m}_{x_l}^*\right), \quad i=\overline{1,m}; \\ &l=\overline{1,m}; \quad i \neq l; \quad i < l. \end{aligned} \right| \quad (10.54)$$

Для системи $\{X_i\}_m$ може бути визначена нормована кореляційна матриця $\left\|\tilde{r}_{x_i,x_l}^*\right\|$, елементи якої є коефіцієнтами кореляції та для якої $\tilde{r}_{x_i,x_i}^* = 1$;

$$\tilde{r}^*_{x_i,x_l} = \frac{\tilde{R}^*_{X_i,X_l}}{\tilde{\sigma}^*_{x_i}\tilde{\sigma}^*_{x_l}}, \quad i=\overline{1,m};\, l=\overline{1,m};\, i\neq l;\, i<l.$$

Розглянемо статистичні оцінки числових характеристик невипадкової функції випадкових величин.

Нехай маємо невипадкову функцію однієї випадкової величини $Y=\varphi(X)$. Якщо над випадковою величиною проведено n незалежних випробувань, які є $\{x_i^*\}_n$, то для кожного вимірювання випадкової величини X ставиться у відповідність $y_i^* = \varphi(x_i^*),\ i=\overline{1,n}$. У подальшому видно, що розглянуті вище методи статистичних оцінок числових характеристик випадкової величини X можуть бути використані для статистичних оцінок числових характеристик випадкової величини Y. Так, у відповідності до методу найбільшої правдоподібності змістовні, незміщені та ефективні статистичні оцінки для $M[\varphi(X)]$ та $D[\varphi(X)]$ будуть отримані за такими співвідношеннями:

$$\tilde{m}^*_{\varphi(x)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i^*);\ \tilde{D}^*_{\varphi(x)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\varphi(x_i^*) - \tilde{m}^*_{\varphi(x)}\right]^2. \quad (10.55)$$

Для загального випадку, коли розглядається невипадкова функція m випадкових величин $Y=\varphi(X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_m)$, статистичні оцінки $\tilde{m}^*_{\varphi(x_1,x_2,...,x_m)}, \tilde{D}^*_{\varphi(x_1,x_2,...,x_m)}$ проводяться за співвідношеннями, аналогічними (10.55), де кожній m-вимірній точці $\{x_{ij}^*\},\ i=\overline{1,m}$ в j-му спостереженні буде поставлено у відповідність $\varphi(x_{1j}^*, x_{2j}^*, ..., x_{mj}^*,)$. При цьому індекс i в (10.55) треба замінити на j, який також буде відповідати переліку кількості спостережень.

10.9 Статистичні оцінки характеристик випадкових функцій

Розглядається випадкова функція $X(t)$. Проведені n незалежних випробувань формують множину $\{x_i(t)\}_n$ невипадкових функцій, які за своїм змістом є можливими значеннями (реалізації) випадкової функції $X(t)$. На рис. 10.3 подані реалізації $X(t)$.

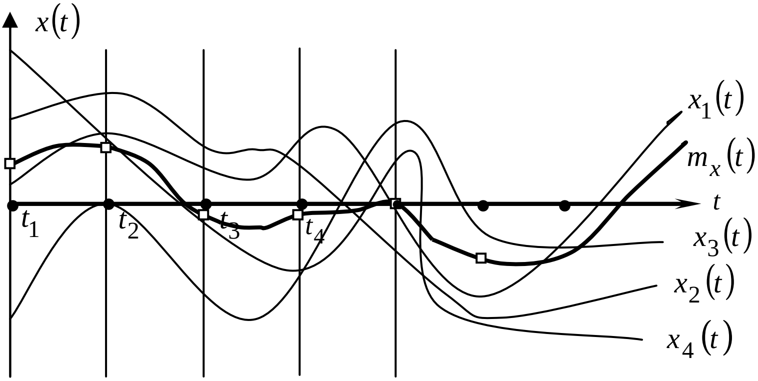

Рис. 10.3. Реалізації випадкової функції

Нас цікавлять статистичні оцінки характеристик випадкової функції: $m_x^*(t)$ – оцінка математичного сподівання; $D_x^*(t)$ – оцінка дисперсії; $R_X^*(t_1,t_2)$ – оцінка кореляційної функції. У перетинах t_j, $j=\overline{1,m}$ випадкової функції $X(t)$ спостерігаються значення реалізацій $x_i(t_j), i=\overline{1,n}$. Видно, що для прийнятого моменту часу t_j, $j=\overline{1,m}$ відповідає n спостережень над випадковою величиною $X(t_j)$. При експерименті значення часу t_j, $j=\overline{1,m}$ задають у відповідності до кроку $h_j = t_{j+1} - t_j$, який визначається в залежності від можливостей регістраційної апаратури. Результати спостережень подають у вигляді табл. 10.1, в якій рядки відповідають реалізаціям, а стовпці – перетинам випадкової функції $X(t)$. Елементи $x_i(t_j)$, які зазначені в таблиці, відповідають результатам спостережень над випадковими величинами $X(t_j)$, $j=\overline{1,m}$.

Таблиця 10.1

Результати спостережень над випадковою функцією

t / $x_i(t)$	t_1	t_2	…	t_j	…	t_k	…	t_m
$x_1(t)$	$x_1(t_1)$	$x_1(t_2)$	…	$x_1(t_j)$	…	$x_1(t_k)$	…	$x_1(t_m)$

Закінчення табл. 10.1

$x_i(t)$ \ t	t_1	t_2	…	t_j	…	t_k	…	t_m
$x_2(t)$	$x_2(t_1)$	$x_2(t_2)$	…	$x_2(t_j)$	…	$x_2(t_k)$	…	$x_2(t_m)$
$x_3(t)$	$x_3(t_1)$	$x_3(t_2)$	…	$x_3(t_j)$	…	$x_3(t_k)$	…	$x_3(t_m)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$x_i(t)$	$x_i(t_1)$	$x_i(t_2)$	…	$x_i(t_j)$	…	$x_i(t_k)$	…	$x_i(t_m)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$x_n(t)$	$x_n(t_1)$	$x_n(t_2)$	…	$x_n(t_j)$	…	$x_n(t_k)$	…	$x_n(t_m)$

Подані в табл. 10.1 результати спостережень над випадковою функцією $X(t)$ слід розглядати як n спостережень над m-вимірною випадковою величиною $\{X(t_j)\}_m$. Тоді статистичні оцінки характеристик $X(t)$ слід визначати з таких виразів:

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{m}_x^*(t_j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(t_j), \quad j=\overline{1,m};\\
&\tilde{D}_x^*(t_j)=\frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t_j)-\left[\tilde{m}_x^*(t_j)\right]^2\right\},\ j=\overline{1,m};\\
&\tilde{R}_X^*(t_j,t_k)=\frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(t_j)x_i(t_k)-\tilde{m}_x^*(t_j)\tilde{m}_x^*(t_k)\right\},\\
&j=\overline{1,m};\quad k=\overline{1,m};\quad j\neq k;\quad j<k.
\end{aligned}\right| \qquad (10.56)$$

Результати обчислень $\tilde{m}_x^*(t_j)$, $j=\overline{1,m};$ $\tilde{D}_x^*(t_j)$, $j=\overline{1,m}$ подають у вигляді таблиць, а результати обчислень $\tilde{R}_X^*(t_j,t_k)$, $j=\overline{1,m};$ $k=\overline{1,m};$ $j\neq k;$ $j<k$ – у вигляді кореляційної матриці.

Задача 10.4. У табл. 10.2 наведені дані результатів спостережень одинадцяти реалізацій випадкової функції $X(t)$ у моменти часу $t_j=\overline{0;\,10}$ с з кроком $h=1$ с.

Таблиця 10.2

Результати спостережень

$x_i(t)$ \ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1(t)$	0,7	1,2	2,0	3,2	4,7	6,0	6,4	6,6	6,3	5,6	5,0
$x_2(t)$	1,2	2,0	3,6	4,6	5,1	5,5	6,0	6,2	6,2	6,0	6,0
$x_3(t)$	2,0	3,3	4,1	4,4	4,5	4,5	4,8	5,5	6,0	6,3	6,2
$x_4(t)$	2,5	2,9	3,0	3,2	3,8	4,7	5,4	5,5	5,4	5,7	6,2
$x_5(t)$	2,7	3,8	4,7	5,1	5,3	5,2	5,0	4,9	5,1	5,7	6,6
$x_6(t)$	3,2	3,9	4,1	4,1	4,0	4,2	5,0	6,0	6,3	6,1	5,7
$x_7(t)$	3,8	4,5	5,0	5,4	5,5	5,6	5,5	5,5	5,2	5,0	4,9
$x_8(t)$	4,1	3,8	3,6	3,9	4,8	5,8	6,2	6,1	5,7	5,4	5,4
$x_9(t)$	4,2	4,9	5,0	4,6	4,3	4,0	4,2	4,7	5,7	6,6	6,8
$x_{10}(t)$	5,4	4,3	3,2	2,9	3,1	3,8	4,5	5,5	6,4	7,0	7,2
$x_{11}(t)$	5,8	5,6	5,4	5,2	4,8	4,5	4,3	4,3	4,4	4,5	4,8

Визначити статистичні оцінки характеристик випадкової функції $X(t)$.

Розв'язання. Результати розрахунків за (10.56) подані в табл. 10.3 та 10.4, де в табл. 10.3 подана статистична оцінка математичного сподівання $X(t)$ за прийнятим часом спостережень, а в табл. 10.4 подана кореляційна матриця, яка є дискретним описом кореляційної функції $R_X(t_1,t_2)$ випадкової функції $X(t)$.

Таблиця 10.3

Статистична оцінка математичного сподівання випадкової функції

t_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{m}_x^*(t_j)$	3,2	3,7	4,0	4,2	4,5	4,9	5,2	5,5	5,7	5,8	5,9

Таблиця 10.4

Кореляційна матриця

t_j \ t_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2,6	1,9	0,9	0,2	–0,3	–0,7	–0,8	–0,7	–0,4	–0,1	–0,1
1		1,6	1,1	0,5	–0,07	–0,5	–0,7	–0,7	–0,5	–0,1	–0,07
2			1,0	0,7	0,3	–0,06	–0,5	–0,6	–0,4	–0,2	–0,05
3				0,7	0,7	0,09	–0,2	–0,3	–0,3	–0,3	–0,2
4					0,5	0,4	0,2	–0,03	–0,2	–0,3	–0,3
5						0,6	0,5	0,3	–0,002	–0,3	–0,4
6							0,6	0,4	0,1	–0,1	–0,3
7								0,5	0,3	–0,2	–0,4
8									0,4	0,3	0,2
9										0,5	0,49
10											0,7

Математичне сподівання та дисперсія випадкової функції є невипадковими функціями аргументу t. Дані, наведені в табл. 10.3, є дискретним поданням статистичної оцінки математичного сподівання випадкової функції $X(t)$ як невипадкової функції $\tilde{m}_x^*(t_j)$. Оскільки $R_X(t_j, t_j) = D_x(t_j)$, то діагональні значення кореляційної матриці (табл. 10.4) є табличним поданням статистичної оцінки дисперсії випадкової функції $X(t)$ як невипадкової функції $\tilde{D}_x^*(t_j)$.

10.10. Статистичне оцінювання характеристик стаціонарної випадкової функції

Ми пам’ятаємо, що випадкова функція $X(t)$ називається стаціонарною, якщо її ймовірнісні властивості не залежать від відліку часу. Для стаціонарних випадкових функцій $D_x(t) = \text{const}$, $R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau)$, де $\tau = t_2 - t_1$. Зміст методу статистичного оцінювання характеристик стаціонарних випадкових функцій полягає в такому.

Нехай над стаціонарною випадковою функцією $X(t)$ проведено n незалежних випробувань. Результати спостережень, як і раніше, надаються у вигляді табл. 10.1. Обробка результатів спостережень полягає в тому, що для кожного перерізу по t_j випадкової функції $X(t)$ з (10.56) визначаються оцінки, які потім осереднюються. Тоді маємо

$$\tilde{m}_x^*(t)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{m}_x^*\left(t_j\right)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\left(t_j\right)=\frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}x_i\left(t_j\right); \quad (10.57)$$

$$\tilde{D}_x^*(t)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{D}_x^*\left(t_j\right)=$$

$$=\frac{n}{m(n-1)}\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\left(t_j\right)-\left[\tilde{m}_x^*\left(t_j\right)\right]^2\right\}; \quad (10.58)$$

$$\tilde{R}_X^*(\tau)=\frac{1}{m-k}\sum_{j=1}^{m-k}\tilde{R}_X^*\left(t_j,t_{j+k}\right),\quad k=\overline{1,m-1}. \quad (10.59)$$

Розглянемо зміст (10.59). Якщо зафіксувати τ, то $\tilde{R}_X^*(\tau)$ – число. Так, на прикладі розрахунків, які подані в табл. 10.4, постійне значення τ відповідає головній діагоналі, де $\tau=0$, оскільки $\tau=t_2-t_1$, а головній діагоналі відповідає $t_1=t_2$ і $\tilde{R}_X^*(\tau)=\tilde{D}_x^*(t)$. Осереднювання результатів за (10.59) відповідає напрямкам, паралельним головній діагоналі, яким відповідають $\tau=\overline{1{,}10}$. Якщо $k=\overline{1,m-1}$, то буде забезпечуватись осереднення результатів оцінки (в задачі 10.4 маємо $m=11$). Результати розрахунків з (10.57) дають, що $\tilde{m}_x^*(t)=4{,}78$; з (10.58) – що $\tilde{D}_x^*(t)=0{,}88$, а з (10.59) – зазначені в табл. 10.5.

Таблиця 10.5

Значення кореляційного моменту

τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{R}_X^*(\tau)$	0,68	0,31	–0,08	–0,34	–0,5	–0,5	–0,4	–0,18	–0,09	–0,1

За даними табл. 10.6 може бути побудована залежність $\tilde{R}_X^*(\tau)$ як функція τ, що і зображено на рис. 10.4

Слід відзначити, що якщо дослідник при організації випробувань над випадковою функцією $X(t)$, результати яких подані при розгляді задачі (10.4), не мав відомостей щодо стаціонарності $X(t)$, то отримані статистичні оцінки характеристик $\tilde{m}_x^*(t)$, $\tilde{D}_x^*(t)$, $\tilde{R}_x^*(t)$ показують на те, яка стаціонарна випадкова функція $X(t)$ є найближчою до тієї $X(t)$, над якою були проведені випробування. Розглянемо графік залежності кореляційного моменту, який наведений на рис. 10.4. Наявність при деяких значеннях τ від'ємних значень кореляційного моменту свідчить про те, що структура $X(t)$ характеризується елементами періодичності. Якщо при зростанні τ амплітуда коливання кореляційної функції зменшується та при подальшому збільшенні τ кореляційна функція наближається до нуля, то це дає право досліднику робити висновок щодо того, що випадкова функція $X(t)$, яка досліджується, може наближено вважатись стаціонарною, оскільки така зміна кореляційного моменту відповідає відомій властивості стаціонарної випадкової функції. Слід відзначити ще одну обставину. Скажімо так: "незакономірні" коливання при великих τ (рис. 10.4), які можуть спостерігатись при обробці результатів спостережень, можна пояснити тим, що була проведена обробка недостатньої кількості спостережень над випадковою функцією $X(t)$. Тому в таких випадках доцільно згладити графік кореляційної функції, що і відзначено пунктиром на рис. 10.4.

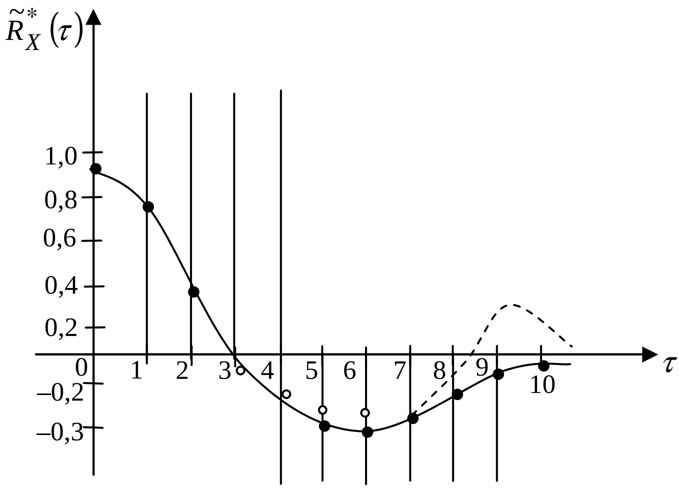

Рис. 10.4. Залежність кореляційного моменту

Розглянемо статистичне оцінювання характеристик випадкових стаціонарних функцій, які характеризуються властивістю ергодичності. Раніше відзначалося, що властивість ергодичності стаціонарних випадкових функцій полягає в тому, що одна, достатньо довга за часом реалізація є представником множини реалізацій $X(t)$. Тому оцінки характеристик стаціонарних випадкових функцій, які мають властивості ергодичності, можуть бути отримані не як середні значення за часом випробувань, а як середні значення за часом T, на протязі якого спостерігається одна реалізація стаціонарного ергодичного випадкового процесу.

Раніше відзначалось, що згідно з теоремою щодо ергодичності стаціонарних випадкових функцій середнє значення за часом статистичних оцінок їх характеристик за ймовірністю прямує до характеристик процесу, які оцінюються. Тому співвідношення, за якими слід проводити оцінки характеристик ергодичності стаціонарної випадкової функції $X(t)$, мають вигляд

$$\tilde{m}_x^* = \tilde{m}_x^*(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(z)d(z),\ t \in [0, T]; \tag{10.60}$$

$$\tilde{D}_x^* = \tilde{D}_x^*(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \left[x(z) - \tilde{m}_x^*(t)\right]^2 dz,\quad t \in [0, T]; \tag{10.61}$$

$$\tilde{R}_x^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \left[x(z) - \tilde{m}_x^*(t)\right]\left[x(z+\tau) - \tilde{m}_x^*(t)\right]dz, t \in [0, T]. \tag{10.62}$$

Наближені розв’язки (10.60) – (10.62) отримують за такою методикою. Нехай проведено спостереження за реалізацією $x(t)$ ергодичної стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Значення $x(t_i)$, $i = \overline{1, m}$ реалізації $x(t)$ відповідають рівним проміжкам часу та наведені в табл. 10.6.

Таблиця 10.6

Значення реалізації ергодичної стаціонарної випадкової функції

t	t_1	t_2	…..	t_i	…..	t_m
$x(t)$	$x(t_1)$	$x(t_2)$	….	$x(t_i)$	….	$x(t_m)$

За такого планування проведення спостережень інтервал часу $[0, T]$ подається підінтервалами завдовжки $h = \frac{T}{m}$, а моменти часу t_1, $t_2, ..., t_m$ відповідають серединам підінтервалів $\left[t_i - \frac{h}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right]$.

Вважається, що в межах підінтервалу функція, яка описує реалізацію $x(t)$, є сталою величиною, тобто $x(t_i) = \text{const}$. Для малої довжини h маємо

$$\int_{t_i-\frac{h}{2}}^{t_i+\frac{h}{2}} x(t)dt = x(t_i)h,\ i=\overline{1,m}.$$

Тоді вирази для наближеного визначення (10.60) та (10.61) мають вигляд

$$\tilde{m}_x^* = \tilde{m}_x^*(t) = \frac{1}{T}h\sum_{i=1}^{m} x(t_i) = \frac{1}{\frac{T}{h}}\sum_{i=1}^{m} x(t_i) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x(t_i); \tag{10.63}$$

$$\tilde{D}_x^* = \tilde{D}_x^*(t) = \frac{h}{T}\sum_{i=1}^{m}\left[x(t_i) - \tilde{m}_x^*(t)\right]^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[x(t_i) - \tilde{m}_x^*\right]^2. \tag{10.64}$$

Для відшукання наближеного визначення (10.62) введемо до розгляду змінну k, тоді $\tau = kh$, а границя інтеграла (10.62) є $T - \tau = mh - kh = h(m - k)$.

Приймаючи, як і раніше, що $x(t_i) = \text{const}$, маємо

$$\int_{t_i-\frac{h}{2}}^{t_i+\frac{h}{2}} \left[x(z) - \tilde{m}_x^*(t)\right]\left[x(z+\tau) - \tilde{m}_x^*(t)\right]dz = h\left[x(t_i) - \tilde{m}_x^*\right]\left[x(t_{i+k}) - \tilde{m}_x^*(z)\right],$$

а також

$$\tilde{R}_x^*(t) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\left[x(z) - \tilde{m}_x^*(t)\right]\left[x(z+\tau) - \tilde{m}_x^*(t)\right]dz \cong$$

$$\cong \frac{1}{h(m-k)}h\sum_{i=1}^{m-k}\left\{\left[x(t_i) - \tilde{m}_x^*(t)\right]\left[x(t_{i+k}) - \tilde{m}_x^*(t)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{m-k}\sum_{i=1}^{m-k}\left\{\left[x(t_i) - \tilde{m}_x^*(t)\right]\left[x(t_{i+k}) - \tilde{m}_x^*\right]\right\}. \tag{10.65}$$

Тобто маючи результати спостережень за єдиною реалізацією $x(t)$ ергодичної стаціонарної випадкової функції $X(t)$, з (10.63) – (10.65) можна отримати статистичні оцінки її характеристик.

10.11. Статистичне оцінювання параметрів законів розподілу за результатами нерівноточних вимірювань

Усі розглянуті в цій главі методи визначення статистичних оцінок параметрів законів розподілу випадкових величин, системи випадкових величин, невипадкових функцій випадкових величин та статистичних оцінок характеристик випадкових функцій мають ценз для рівноточних вимірювань. Рівноточність вимірювань забезпечується багаторазовим повторюванням досліду, де під дослідом розуміється реалізація деякого комплексу умов. Якщо при повтореннях досліду комплекс умов змінюється, то тоді прийнято говорити про нерівноточні вимірювання тієї ознаки, яка спостерігається.

На практиці досить часто виникає необхідність розв’язувати задачі оцінювання параметрів законів розподілу за наявності нерівноточних результатів спостережень. Результати вимірювань, які відповідають різним комплексам умов проведення вимірювань (точніше кажучи, різним дослідам), будуть характеризуватись різною точністю. Більшу перевагу слід віддавати більш точним результатам вимірювання.

Нехай проведено n незалежних нерівноточних вимірювань $\{x_i\}$, $i=\overline{1,n}$ випадкової величини X. Результат кожного вимірювання x_i, $i=\overline{1,n}$, як і раніше, будемо розглядати як можливе значення випадкової величини X_i, $i=\overline{1,n}$. Якщо результати спостережень рівноточні, то $M[X_i]=M[X], \forall i=\overline{1,n};$ а $D[X_i]=\sigma_i^2, i=\overline{1,n}$. Нас цікавлять такі оцінки параметрів законів розподілу, які є змістовними, незміщеними та ефективними.

Покажемо, що статистика

$$m_x^*=\sum_{i=1}^{n} g_i X_i \ , \tag{10.66}$$

де g_i – вага вимірювання x_i випадкової величини X_i є змістовною, незміщеною та ефективною.

Дійсно,

$$M\left[m_x^*\right]=M\left[\sum_{i=1}^{n} g_i X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} g_i M\left[X_i\right]=m_x \sum_{i=1}^{n} g_i \ ,$$

вимога незміщеності буде виконана, якщо $\sum_{i=1}^{n} g_i=1$. Визначимо дисперсію (10.66), маємо

$$D\left[m_x^*\right]=D\left[\sum_{i=1}^{n} g_i X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} g_i^2 D\left[X_i\right]=\sum_{i=1}^{n-1} g_i^2 D\left[X_i\right]+$$

$$+\left(1-\sum^{n-1} g_i\right)^2 D\left[X_n\right]. \qquad (10.67)$$

Мінімум (10.67) забезпечує виконання вимоги ефективності. Визначимо, за яких умов (10.67) має мінімальне значення. Маємо

$$\frac{dD\left[m_x^*\right]}{dg_i}=2\left[g_i\sigma_i^2-\left(1-\sum_{i=1}^{n-1} g_i\right)\sigma_n^2\right]=2\left[g_i\sigma_i^2-g_n\sigma_n^2\right]=0,\ i=\overline{1,n-1}.$$

Тоді

$$g_i\sigma_i^2=g_n\sigma_n^2=C,\quad i=\overline{1,n-1}.$$

Маючи на увазі, що

$$g_i=\frac{C}{\sigma_i^2};\quad \sum_{i=1}^{n} g_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{C}{\sigma_i^2}=1;\quad C=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}},$$

визначимо статистику (10.66), тоді

$$m_x^*=\sum_{i=1}^{n} g_i X_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{C}{\sigma_i^2}X_i=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\sigma_i^2}. \qquad (10.68)$$

А отже, статистична оцінка математичного сподівання за результатами n незалежних різноточних спостережень, яка має визначення

$$\tilde{m}_x^*=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sigma_i^2}, \qquad (10.69)$$

є ефективною.

Дисперсія (10.68) має вигляд

$$D\left[m_x^*\right]=D\left[\sum_{i=1}^{n} g_i X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} g_i^2 D\left[X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{C}{\sigma_i^2}\right)^2;$$

$$D\left[X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}\right)},$$

тобто

$$D\left[m_x^*\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}\right)^2}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}.$$

Приймемо, що дисперсії випадкових величин X_i, $i=\overline{1,n}$ є обмеженими зверху числом L, тобто $D\left[X_i\right]\le L$, $i=\overline{1,n}$. Розглянемо вимогу змістовності для (10.66). Маємо

$$P\left(\left|m_x^*-m_x\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D\left[m_x^*\right]}{\varepsilon^2}\ge 1-\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}=$$

$$=1-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L}\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L}=1-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n\frac{1}{L}}=1-\frac{L}{n\varepsilon^2},$$

де при $n\to\infty$ видно, що

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|m_x^*-m_x\right|<\varepsilon\right)=1,$$

тобто вимога змістовності виконується.

Отже використання (10.69) при n незалежних нерівноточних випробовуваннях забезпечує визначення змістовної, незміщеної та ефективної статистичної оцінки математичного сподівання випадкової величини X_i.

Статистична оцінка дисперсії випадкової величини X_i при n незалежних та нерівноточних випробуваннях має вигляд

$$\tilde{D}_x^*=S_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}g_i\left(x_i-\tilde{m}_x^*\right)^2=\frac{1}{n-1}\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i-\tilde{m}_x^*\right)^2}{\sigma_i^2}. \quad (10.70)$$

10.12. Згладжування результатів вимірювань за методом найменших квадратів

Розглядаються дві фізичні величини x та y, які пов'язані функціональною залежністю. Вид функціональної залежності досліднику часто буває відомий на основі фізичних тлумачень. Задача згладжування результатів вимірювань ставиться так. Відомо, що

$$y=\varphi\left(x;a_1,a_2,...,a_m\right), \tag{10.71}$$

де a_k, $k=\overline{1,m}$ – невідомі параметри, визначення яких на основі n незалежних вимірювань дозволяють з класу (виду) залежностей (10.71) указати конкретну функціональну залежність між y та x.

Результати n незалежних вимірювань $\{x_i, y_i\}$, $i=\overline{1,n}$ геометрично можна подати точками у прямокутній системі координат xoy.

Якщо на площині $x0y$ подати залежність $y=\varphi(x)$, то точки як результати вимірювань не будуть належати кривій $y=\varphi(x)$ (рис. 10.5), оскільки при вимірюванні значень x і y мають місце похибки. Тому виникає задача: як за результатами дослідів найкращим чином відобразити залежність y від x. Таку задачу називають задачею згладжування дослідних даних. Очевидно, що метод обробки дослідних даних повинен забезпечити збереження загальної тенденції залежності змінних y та x і згладити випадкові відхилення, які виникають внаслідок похибок при вимірюваннях.

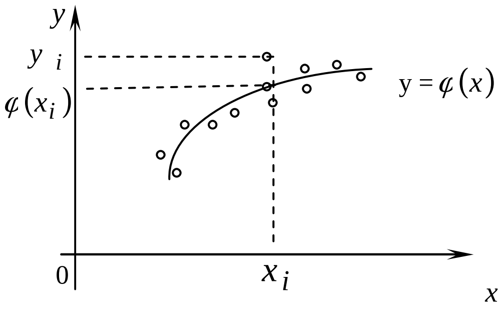

Рис. 10.5 Згладжування результатів спостережень

Розглянемо *метод найменших квадратів*, який дозволяє для заданого виду функціональної залежності $y=\varphi\left(x;a_1,a_2,...,a_k,...,a_m\right)$ так визначити за результатами дослідних даних параметри a_k, $k=\overline{1,m}$, щоб крива $y=\varphi(x;a_1,a_2,...,a_k,...,a_m)$ кращим чином відображала тенденцію залежності y від x. Перейдемо до розгляду змісту методу найменших квадратів та виявлення змісту умови “найкращим чином згладжувати дослідні дані”. Нехай дійсна залежність y від x виражається функцією $y = \varphi(x)$. Експериментальні точки відхиляються від неї за рахунок похибок вимірювань (рис. 10.5). Можна виходити з того, що випадкові величини ξ_i, $i = \overline{1,n}$ підпорядковані нормальним законам розподілу з параметрами $m_{y_i} = \varphi(x_i)$ та $\sigma_{y_i}^2 = \sigma^2$, $\forall i = \overline{1,n}$, оскільки мають місце рівноточні вимірювання. Тоді щільність ймовірностей випадкової величини ξ_i має вигляд

$$f(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} e^{-\frac{[y_i - \varphi(x_i)]^2}{2\sigma^2}}.$$

Випадкові величини ξ_i, $i = \overline{1,n}$ складають систему випадкових величини $\{\xi_i\}$, $i = \overline{1,n}$ та є незалежними (проведено n незалежних випробувань), тоді щільність системи $\{\xi_i\}$, $i = \overline{1,n}$ визначається з виразу

$$f(y_1, y_2, \dots\dots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{[y_i - \varphi(x_i)]^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi c}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i)]^2}. \tag{10.72}$$

Оскільки (10.72) є щільністю n-вимірної випадкової величини $\{\xi_i\}$, $i = \overline{1,n}$, підпорядкованої нормальному закону розподілу, то точка $\{\varphi(x_i)\}_n$, i-та координата якої є математичним сподіванням випадкової величини ξ_i, відповідає максимальному значенню (10.72). Максимальне значення (10.72) забезпечується тоді, коли *сума квадратів відхилення значень* y_i *від* $\varphi(x_i)$ *буде мінімальною*, тобто

$$F = \min \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i)]^2. \tag{10.73}$$

Із (10.72) випливає, що метод найменших квадратів ґрунтується на тому, що похибки вимірювань як випадкові величини підпорядковані нормальному закону розподілу.

Алгоритм розв'язання задачі згладжування дослідних даних за методом найменших квадратів полягає в такому.

Нехай маємо результати вимірювань (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$, які подають, як правило, у вигляді таблиці, визначений вид функції (10.71). Необхідно вибрати параметри a_k, $k = \overline{1,m}$ так, щоб виконувалась умова (10.73). Для цього необхідно розв'язати систему рівнянь вигляду

$$\frac{\partial L(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = \overline{1,m}, \tag{10.74}$$

де $L(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k,\,....,}\, \alpha_m)]^2$.

Після перетворень маємо

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i; a_1, a_2, ..., a_m)] \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1}\right|_{x_i} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i; a_1, a_2, ..., a_m)] \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2}\right|_{x_i} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i; a_1, a_2, ..., a_m)] \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_m}\right|_{x_i} = 0, \end{cases} \tag{10.75}$$

де $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}\right| x_i, ..., \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m}\right|_{x_i}$ – частинні похідні функції $\varphi(x_i; a_1, a_2, ..., a_m)$ за параметрами $a_1, a_2, ..., a_m$, визначені у точці x_i.

Задача 10.5. Результати n незалежних рівноточних спостережень $\{x_i y_i\}$, $i = \overline{1,n}$ згладити лінійною функцією $y = ax + b$.

Розв'язання. Система (10.75) має вигляд

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a x_i + b)] x_i = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a x_i + b)] \cdot 1 = 0, \end{cases} \tag{10.76}$$

оскільки

$$\left.\frac{\partial\varphi(x;a,b)}{\partial a}\right|_{x=x_i}=\left.\frac{\partial(ax+b)}{\partial a}\right|_{x=x_i}=\left.x\right|_{x=x_i}=x_i;$$

$$\left.\frac{\partial\varphi(x;a,b)}{\partial b}\right|_{x=x_i}=\left.\frac{\partial(ax+b)}{\partial b}\right|_{x=x_i}=\left.1\right|_{x=x_i}=1.$$

Для (10.76) виконаємо такі перетворення, а саме:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0;\\ \sum\limits_{i=1}^{n}y_i-a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-\sum\limits_{i=1}^{n}b=0;\end{cases}\quad\text{та}\quad\begin{cases}a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i;\\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+b\cdot n=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}\tag{10.77}$$

Розв'язання (10.77) дає $a=\dfrac{\Delta_a}{\Delta}$; $b=\dfrac{\Delta_b}{\Delta}$,

де $\Delta_a=\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}y_i & n\end{vmatrix}$; $\Delta_b=\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}x^2 & \sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i & \sum\limits_{i=1}^{n}y_i\end{vmatrix}$; $\Delta=\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i & n\end{vmatrix}$

є визначниками другого порядку.

Задача 10.6. Результати n незалежних випробувань $\{x_i, y_i\}$, $i=\overline{1,n}$ згладити квадратичною залежністю вигляду $y=ax^2+bx+c$.

Розв'язання. Система (10.75) має вигляд

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=n}^{n}\left[y_i-\left(ax_i^2+bx_i+c\right)\right]x_i^2=0;\\ \sum\limits_{i=n}^{n}\left[y_i-\left(ax_i^2+bx_i+c\right)\right]x_i=0;\\ \sum\limits_{i=n}^{n}\left[y_i-\left(ax_i^2+bx_i+c\right)\right]=0.\end{cases}\tag{10.78}$$

Система (10.78) після перетворень має вигляд

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} x_i\ y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - c\sum_{i=1}^{n} x_i = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i - c\cdot n = 0; \end{cases}$$

та остаточно

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\ y_i\,; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\ y_i\,; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i\ . \end{cases} \qquad (10.79)$$

Розв’язання (10.79) дає

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta b}{\Delta}, \quad c = \frac{\Delta c}{\Delta},$$

де $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \Delta$ – визначники третього порядку невідомих a, b, c відповідно та системи. Крива $y = ax^2 + dx + c$ тим самим визначена.

Запитання для самостійної перевірки знань

1. На яких підставах складено вимоги до статистичної оцінки параметрів законів розподілу?
2. У чому полягає зміст методу максимуму правдоподібності статистичної оцінки параметрів законів розподілу?
3. У чому полягає зміст довірчої ймовірності?
4. З яких міркувань призначається рівень довірчої ймовірності?

5. Статистичні оцінки яких параметрів системи *n*-вимірної величини частіше за все використовуються на практиці?

6. У чому полягає зміст методичного підходу до статистичного оцінювання параметрів законів розподілу?

7. Який основний принцип вважається прийнятим під час реалізації згладжування результатів вимірювань за методом найменших квадратів?

8. Чи можливо за результатами статистичної оцінки кореляційної функції випадкового процесу дійти до висновку щодо його стаціонарності?

Глава 11
ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

11.1. Опис гіпотез

Статистичною гіпотезою називають будь-яке твердження щодо закону розподілу чи властивостей випадкової величини, яка спостерігається при проведенні досліду.

Статистичні гіпотези висуваються виходячи з теоретичних суджень відносно їх змісту або результатів статистичних досліджень попередніх спостережень. Нехай, наприклад, розглядається дослід з метою визначення значення фізичної величини a, точне значення якої невідоме і воно не змінюється при повторенні спостережень. На результати вимірювань впливає багато випадкових чинників, а саме: точність настройки приладу, похибки округлення результату спостереження та ін. Результат i-го спостереження можна розглядати як випадкову величину $X_i = a + \varepsilon_i$, де ε_i – випадкова величина похибки вимірювання. Можна виходити з того, що випадкова величина похибки ε_i складається з великої кількості похибок, кожна з яких не є суттєвою. А це дає підстави вважати, що умова Ліндерберга для центральної граничної теореми теорії ймовірностей щодо рівномірної малості випадкових величин, які складають випадкову величину ε_i, виконується. Отже, на основі теоретичних суджень можна висувати гіпотезу відносно того, що випадкова величина X_i підпорядковується нормальному закону розподілу.

Гіпотезу, яка висувається, прийнято позначати H_0, *її називають основною (нульовою) гіпотезою, а будь-яку іншу альтернативу –* H_1, *називають додатковою гіпотезою.*

1. *Гіпотеза щодо виду закону розподілу випадкової величини.* Розглядається випадкова вибірка з генеральної сукупності, яку складають можливі значення випадкової величини X з невідомим законом розподілу

$L(x)$. Випадкова вибірка реалізовується проведенням n незалежних випробувань. Висувається гіпотеза H_0, яка полягає в тому, що статистична функція розподілу $F_n(x)$ випадкової величини X, яка відповідає n незалежним випробуванням, погоджується з відомою теоретичною функцією розподілу $F(x)$, тобто $H_0 : F_n(x) = F(x)$.

2. *Гіпотеза щодо виду класу законів розподілу випадкової величини.* Гіпотеза H_0, яка полягає в тому, що $F_n(x)$ погоджується з передбачуваним класом теоретичних функцій розподілу $F = \{F(x;\Theta), \Theta \in \Theta\}$, де Θ – вектор параметрів теоретичної функції розподілу, а Θ – множина параметрів теоретичної функції розподілу, тобто $H_0 : F_n(x) = F(x;\Theta)$. Так наприклад, спостерігається значення цілочисельної випадкової величини X, закон розподілу якої невідомий, необхідно розглянути гіпотезу, яка полягає в тому, що $F_n(x)$ погоджується з $F(x;\Theta) \in \Pi(\Theta)$, де $\Pi(\Theta)$ –сукупність всіх пуассонівських розподілень

$$f(x(a)) = \begin{cases} \dfrac{a^x}{x!} e^{-a}, & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{в інших випадках}, \ a \in \Theta. \end{cases}$$

Зауваження. У першому випадку гіпотеза H_0 *є гіпотезою щодо закону розподілу; її називають простою*. У другому – *гіпотеза* H_0 *є гіпотезою щодо виду закону розподілу; її називають складною*. Але в тому й іншому випадку формулюється гіпотеза H_0 щодо виду закону розподілу.

3. *Гіпотеза однорідності.* Розглядається k серій незалежних випробувань, результати яких $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i})$; $i = \overline{1,k}$, де n_i – кількість незалежних випробувань i-ї серії. Чи можна такі результати спостережень розглядати як спостереження над однією й тією ж випадковою величиною, тобто чи можна вважати, що закон розподілу випадкової величини від серії до серії не змінюється? Якщо закон розподілу випадкової величини від серії до серії випробувань не змінюється, то вважають, що статистичні данні є *однорідними*. Тоді висувається гіпотеза щодо закону розподілу, яка полягає у тому, що статистична функція розподілу $F_{n_i}(x)$, яка відповідає результатам n_i незалежних випробувань i-ї серії, погоджується з теоретичною функцією

розподілу $F_i(x)$, що передбачається, та всі $F_i(x)$, $i=\overline{1,k}$ збігаються, тобто висувається гіпотеза $H_0 : F_{n_i}(x), \quad i=\overline{1,k}$.

4. *Гіпотеза незалежності.* Розглядається сукупність значень двовимірної випадкової величини $\{X_1, X_2\}$, які складають генеральну сукупність з невідомим законом розподілу $L(x_1, x_2)$. Є підстави вважати, що випадкові величини X_1 та X_2, які складають систему $\{X_1, X_2\}$ є незалежними. Висувається гіпотеза $H_0 : F_n(x_1, x_2) = F^*_{nx_1}(x_1)F^*_{nx_2}(x_2)$.

У загальному випадку може розглядатись k-вимірна система випадкових величин.

5. *Гіпотеза випадковості.* Результат досліду описується n-вимірною випадковою величиною $X=\{X_1, X_2, \ ..., X_n\}$ з невідомою функцією розподілу $F_x(x_1,\ x_2,\ ..., x_n)$. Чи можна розглядати випадкову величину X як випадкову вибірку з розподілу $L(y)$ випадкової величини Y, тобто чи є компоненти X_i, $i=\overline{1,n}$ незалежними та однаково розподіленими?

Висувається гіпотеза

$$H_0 : F_x(x_1,\ x_2,\ \ ...,\ x_n) = F_Y(x_1)F_Y(x_2), ...,F_Y(x_n),$$

де $F_Y(x_i) = L(y), i=\overline{1,n}$ – деяка одновимірна функція розподілу, однакова для всіх $i=\overline{1,n}$.

11.2. Критерії згоди

Нехай для дослідження висунута гіпотеза H_0. Задача полягає в тому, щоб сформулювати таке правило, яке б дозволило за результатами відповідних спостережень зробити висновок, є висунута гіпотеза правильною (правдивою) чи неправильною (неправдивою).

Правило, згідно з яким висунута гіпотеза H_0 приймається чи відхиляється, називається статистичним критерієм (критерієм) перевірки гіпотези.

Нехай щодо розподілу випадкової величини $X=\{X_1, X_2, \ ..., X_n\}$, можливе значення якої є результатом досліду, що розглядається, висувається гіпотеза H_0. З метою створення критерію перевірки цієї гіпотези H_0 потрібно знайти таку статистику $T=T(X)$, яка буде характеризувати відхилення емпіричних даних від відповідних гіпотетичних значень згідно з гіпотезою H_0, закон розподілу якої у випадку істинності гіпотези H_0 можна було б визначити.

Далі будемо виходити з того, що така статистика, яка є випадковою величиною, та закон її розподілу визначені. Нехай $\Gamma = \{t : t = T(X)\},\ x \in X$ є множина можливих значень статистики $T(X)$. Для достатньо малого $a > 0$ визначимо підмножину $\Gamma_{1a} \subset \Gamma$ так, щоб імовірність випадкової події $\{T(X) \in \Gamma_{1a}\}$ у випадку, коли гіпотеза H є правильною, відповідала умові

$$P\left(T(X) \in \Gamma_{1\alpha} \middle| H_0\right) \leq \alpha. \qquad (11.1)$$

Тоді правило перевірки гіпотези H_0 полягає в такому. Нехай $\left(x_1, x_2, \ \ldots, x_n\right)$ – реалізація випадкової величини $\{X_1, X_2, \ \ldots, X_n\}$, яка спостерігається в досліді, та $t = T(X)$ – відповідне значення випадкової величини статистики $T(x)$. Якщо $t \in \Gamma_{1a}$, то в разі справедливості гіпотези H_0 відбувається подія, якій відповідає мала ймовірність, менше a, тому гіпотеза H_0 є неправильною, її треба відкинути, оскільки вона суперечить дослідним даним. У разі, коли $t \notin \Gamma_{1a}$, немає обґрунтувань, за якими слід відмовитись від гіпотези H_0, що була прийнята. У цьому випадку слід вважати, що прийнята гіпотеза H_0 не суперечить результатам спостережень. Слід відзначити, що факт $t \in \Gamma_{0a} = \Gamma / \Gamma_{1a}$ не може бути доказом того, що гіпотеза H_0 є правдивою. Цей факт свідчить лише про те, що погодженість дослідних даних і теоретичних припущень є достатньо добрим на рівні a.

Визначена вище статистика називається статистикою критерію, а підмножина її значень Γ_{1a} *називається критичною областю для гіпотези* H_0, тобто стверджується той факт, що значення t, яке належить підмножині Γ_{1a}, розглядається як твердження, що гіпотеза H_0 є неправдивою.

Число a *називається рівнем значущості критерію.* Його трактують як імовірність події, яка полягає в тому, що гіпотеза буде відхилена тоді, коли вона є правдивою. При перевірці гіпотез можуть статися помилки двох родів.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відхилена правильна гіпотеза; ця помилка оцінюється числом a.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята неправильна гіпотеза. Число a задається малим, частіше приймають значення

$0,005; 0,01; 0,001$. Якщо, наприклад, $\alpha = 0,01$, то це означає, що в одному випадку зі 100 є ризик припуститися помилки – відхилити гіпотезу H_0 тоді, коли вона є вірною.

Виходячи з вищезазначеного маємо, що критерій визначається описом відповідної критичної області як підмножини $\Gamma_{1\alpha} \subset \Gamma$, яка включає в себе всі малоймовірні при гіпотезі H_0 значення статистики критерію. Як критичну область приймають $\Gamma_{1\alpha} = \{t \geq t_\alpha\}$, де t_α – критичне статистичне значення критерію.

Критична область, перш за все, визначається метою, для якої будується критерій. Кожний критерій будується для того, щоб визначити, чи мають місце відхилення від основної гіпотези H_0. Відхилення від основної гіпотези можуть мати різну фізичну природу. Будують критерії, які враховують будь-які відхилення, тоді як критична область виступає $\Gamma_{1\alpha} = \{t \geq t_\alpha\}$; будують критерії, які враховують тільки відхилення спеціального виду, тоді як критична область виступає *двостороння* критична область, а саме: $\Gamma_{1\alpha} = \{t \geq t_{\alpha_1}\} U \{t \leq t_{\alpha_2}\}$, де t_α та t_{α_2} – відповідно правостороннє та лівостороннє критичні значення статистики $T(X)$.

Для перевірки однієї й тієї ж гіпотези H_0 можна будувати різні критерії згоди, які будуть використовувати різні статистики $T(X)$, а вибір того чи іншого критерію ґрунтується на принципах порівняння різних критеріїв. Такі принципи пов'язані з дослідженням зміни критеріїв за тих чи інших відхилень від основної гіпотези.

Будь-який розподіл $F(x)$ випадкової величини X, який може бути істинним, але не збігається з розподілом, що розглядається відповідно до основної гіпотези H_0, називається *альтернативним*, а їх сукупність називають *альтернативною гіпотезою* H_1.

Нехай для H_0 побудований критерій з рівнем значущості α, який враховує статистику $T(X)$, а $\Gamma_{1\alpha}$ - відповідна критична область. Тоді

$$W(\Gamma_{1\alpha}; F(x)) = P(T(X) \in \Gamma_{1\alpha} / F(x)) \qquad (11.2)$$

як імовірність випадкової події, яка полягає в тому, що статистика критерію належить критичній області за умови, що істинним розподілом спостережень є розподіл $F(x)$, називають *функцією потужності критерію*.

Відзначимо, що для $F(x)$, які відповідають основній гіпотезі H_0, функцію потужності критерію (11.2) називають потужністю критерію при альтернативі $F(x)$. Виходячи з (11.2), слід відзначити, що критерій тим більш потужний, чим більше його потужність при альтернативній гіпотезі H_1. Дійсно, якщо значення статистики $T(X) = t$, яке спостерігається при n незалежних випробуваннях, належить критичній області, то нульову гіпотезу H_0 відхиляють; якщо істинною є деяка альтернатива, то тим самим приймається вірне рішення. Тому значення $W\left(\Gamma_{1\alpha}; F(x)\right)$, якщо $F(x) \in H_1$, визначає рівень ймовірності прийняття вірного рішення в тій ситуації, коли H_0 є неправильною гіпотезою.

Властивість незміщеності для критерію означає, що

$$W\left(\Gamma_{1\alpha}; F(x)\right) \le \alpha, \ \forall F(x) \in H_0;$$

$$W\left(\Gamma_{1\alpha}; F(x)\right) > \alpha, \ \forall F(x) \in H_1.$$

Тобто ймовірність відхилити гіпотезу H_0, коли вона є вірною, не перевищує рівня α, а якщо гіпотеза H_0 є неправдивою, то вона відхиляється з імовірністю, яка перевищує рівень α.

11.3. Перевірка гіпотези щодо виду закону розподілу генеральної сукупності

Розглядається випадкова вибірка з генеральної сукупності, для якої закон розподілу $L(x)$ невідомий. Результатам n незалежних випробувань відповідає статистична функція розподілу $F_n(x)$, яка є випадковою, оскільки вибірка є випадковою. Висувається гіпотеза H_0, яка полягає в тому, що $F_n(x)$ погоджується з теоретичною функцією розподілу $F(x)$, тобто H_0: $F_n(x) = F(x)$. Ця гіпотеза підлягає перевірці. Якщо H_0 справедлива, то на рівні значущості критерію, який приймається, можна вважати, що генеральна сукупність підпорядкована закону розподілу $F(x)$. Висновок щодо справедливості чи несправедливості гіпотези H_0 формується на основі критерію згоди.

11.3.1. Критерій згоди О. М. Колмогорова

Випадкова вибірка з генеральної сукупності описується n-вимірною випадковою величиною $\{X_i\}, i = \overline{1,n}$. Відповідна функція розподілу $F_n(x)$ є випадковою величиною. Реалізація $\{X_i\}, i = \overline{1,n}$, а саме $(x_1, x_2, \ ..., x_n)$, дозволяє побудувати статистичну функцію розподілу $F_n^*(x)$, яка є реалізацією $F_n(x)$.

Відзначимо таке твердження.

Нехай $F_n(x) -$ *функція розподілу, яка відповідає випадковій вибірці з розподілу* $L(X)$ *та* $F(x)$ *і є теоретичною функцією розподілу, що передбачається.* Тоді для будь-якого x та будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо, що

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|F_n(x) - F(x)\right| < \varepsilon\right) = 1, \qquad (11.3)$$

тобто при необмеженому зростанні кількості випробувань функція розподілу $F_n(x)$ як випадкова величина за ймовірністю прямує до теоретичної функції розподілу $F(x)$. Із (11.3) випливає, що для кожного x випадкова величина $F_n(x)$ є кращою оцінкою $F(x)$, та із зростанням об'єму випадкової вибірки n спостерігається зближення $F_n(x)$ з $F(x)$.

Як статистика критерію згоди розглядається випадкова величина

$$T(X) = D_n(X) = \sup_{-\infty<x<\infty} \left|F_n(x) - F(x)\right|, \qquad (11.4)$$

тобто випадкова величина найбільшого відхилення $F_n(x)$ від $F(x)$.

На рис. 11.1 подані графіки функції розподілу $F(x)$, можливе визначення $F_n^*(x)$ та можливе значення статистики $D_n(X) = t$.

Граничний закон розподілу статистики (11.4), який називають законом розподілу О. М. Колмогорова, має вигляд

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n} D_n(X) < t\right) = K(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2t^2} . \qquad (11.5)$$

Із (11.3) та (11.4) випливає, що при великих n у випадках, коли H_0 є справедливою, значення статистики $D(X)$ не буде суттєво відрізнятись від

0, а тому критичну область критерію, визначеного на статистиці $D(X)$, варто задавати у вигляді $\Gamma_{1\alpha} = \{t \geq t_\alpha\}$.

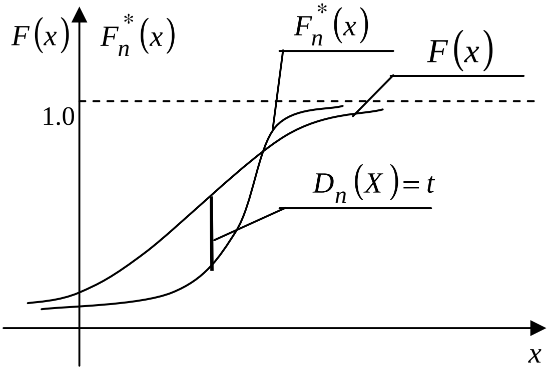

Рис. 11.1. Можливе значення статистики критерію О. М. Колмогорова

Особливістю статистики $D_n(X)$ є те, що її розподіл, коли гіпотеза H_0 є справедливою, не залежить від вигляду функції розподілу $F(x)$. Для практики застосування критерію О. М. Колмогорова це має важливе значення. А саме, закон розподілу (11.5) табулюють один раз, коли випадкова величина $D_n(X)$ є відхиленням $F_n(x)$ від теоретичного закону розподілу $F(x)$ для випадкової величини X, підпорядкованої рівномірному закону розподілу на інтервалі $[0,1]$, а потім використовують ці таблиці для перевірки гіпотези H_0 щодо будь-якого закону розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини.

Другим важливим моментом слід відзначити те, що розподіл статистики $D_n(X)$ (11.5) при $n \geq 20$ практично не залежить від n. Тому при $n \geq 20$ критичну границю t_α критичної області $\Gamma_{1\alpha} = \{t \geq t_\alpha\}$ можна приймати $t_\alpha = \dfrac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}$, де $\lambda_\alpha = K^{-1}(1-\alpha)$ – квантиль розподілу (11.5) при $(1 - \alpha)$.

Тоді маємо

$$P\left(D_n \in \Gamma_{1\alpha}/H_0\right) = P\left(\sqrt{n}D_n(X) \geq \lambda_\alpha/H_0\right) = 1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha,$$

що відповідає зазначеному вище (11.1).

Отже, критерій О. М. Колмогорова має такий зміст. При прийнятому рівні значущості α *визначається* $\lambda_\alpha = K^{-1}(1-\alpha)$*; якщо* *значення статистики* $t = D_n(X)$, *яке спостерігається при* n *незалежних випробуваннях, задовольняє нерівності* $\sqrt{n}t \geq \lambda_\alpha$, *то гіпотеза* H_0 *відхиляється; якщо* $\sqrt{n}t < \lambda_\alpha$, *то робиться висновок, що дослідні дані не суперечать гіпотезі* H_0.

11.3.2. Критерій згоди К. Пірсона

Критерій згоди К. Пірсона (критерій згоди "хі-квадрат", критерій згоди χ^2) застосовується для перевірки гіпотези щодо виду закону розподілу, коли як теоретичний закон розподілу, згідно з гіпотезою H_0 , розглядається будь-який дискретний чи неперервний, одновимірний чи багатовимірний закон розподілу.

Випадкова вибірка $\{X_i\}, i = \overline{1, n}$ та її відповідна реалізація розглядається як результат n незалежних випробувань $(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$. Ці спостереження групуються за інтервалами, як це було зазначено в п. 6.4. Визначається кількість спостережень, які належать i-му інтервалу m_i, $i = \overline{1, k}$. Тоді $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. Висувається гіпотеза H_0, яка полягає в тому, що статистична функція розподілу $F_n(x)$, що відповідає випадковій вибірці $\{X_i\}, i = \overline{1, n}$, погоджується з теоретичною функцією розподілу $F(x)$. Відповідно до H_0 визначається $p_i = P\left(X \in J_i / H_0\right)$, $i = \overline{1, k}$, тобто ймовірності випадкової події, яка полягає в тому, що випадкова величина X, функція розподілу якої у відповідності до H_0 є $F(x)$ і належить інтервалу J_i. Тоді зазначена гіпотеза H_0 зводиться до гіпотези відносно того, що ймовірності поліноміального розподілу побудованого вектора $m = (m_1, m_2, ..., m_i, ..., m_k)$ мають значення $P = (P_1, P_2, ..., P_i, ..., P_k)$. Як статистику критерію К. Пірсона, яка характеризує відхилення вибіркових даних (тобто m_i) від відповідних гіпотетичних значень (в даному випадку від середніх $M\left(m_i / H_0\right) = nP_i$), розглядають випадкову величину

$$T(X)=\chi_n^2(m)=\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i-nP_i)^2}{nP_i}. \qquad (11.6)$$

Зауважимо, що в (11.6) m_i є випадковою величиною, яка відповідає випадковій вибірці $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$. Реалізації $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ випадкової вибірки $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$ відповідає реалізація вектора $m^*=\left(m_1^*, m_2^*, \ldots, m_i^*, \ldots, m_k^*\right)$, яка дозволяє розрахувати можливі значення випадкової величини статистики $T(X)=t$, а саме

$$t=\chi_n^2\left(m^*\right)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(m_i^*-nP_i\right)^2}{nP_i}=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\left(m_i^*\right)^2}{nP_i}-\frac{2nP_i m_i^*}{nP_i}+\frac{n^2P_i^2}{nP_i}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(m_i^*\right)^2}{nP_i}-2\sum_{i=1}^{k}m_i^*+n\sum_{i=1}^{k}P_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(m_i^*\right)^2}{nP_i}-2n+n=\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(m_i^*\right)^2}{nP_i}-n.$$

Тобто

$$t=\chi_n^2\left(m^*\right)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(m_i^*\right)^2}{nP_i}-n. \qquad (11.7)$$

Справедливе твердження, що при необмеженому зростанні кількості випробувань $n-\propto$ закон розподілу статистики $\chi_n^2(m)$, при $0<p_i<1$ та незалежно від виду теоретичної функції розподілу $F(x)$ згідно з гіпотезою H_0, прямує до закону розподілу χ^2 з $(k-1)$ степенями свободи, тобто

$$\lim_{n\to\infty}L\left(\chi_n^2(m)\middle|H_0\right)=\chi_{k-1}^2, \qquad (11.8)$$

де χ_{k-1}^2 – символ функції розподілу випадкової величини χ^2.

Щільність випадкової величини χ^2 має вигляд

$$f_r\left(\chi^2\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma\left(\dfrac{r}{2}\right)}\left(\chi^2\right)^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}, \chi^2 \geq 0; \\ 0, \qquad \chi^2 < 0; \end{cases} \tag{11.9}$$

де r - степінь свободи; $\Gamma\left(\dfrac{r}{2}\right) = \int\limits_0^{\infty} \tau^{\frac{r}{2}-1} e^{-\tau} \alpha\tau$ – гамма функція.

При перевірці зазначеної вище гіпотези H_0 кількість степенів свободи $r = k - 1$, де k - кількість інтервалів (розрядів). На практиці граничний розподіл (11.8) можна використовувати з добрим наближенням при $n \geq 50$ та $m_i \geq 5$, $i = \overline{1,k}$. Критичну границю t_α вибирають рівною квантилю розподілу χ^2_{k-1} при $1 - \alpha$. Тоді дійсно

$$P\left(\chi^2_n\left(m\right) \in \Gamma_{1\alpha} \middle| H_0\right) = P\left(\chi^2_n(m) \geq \chi^2_{1-\alpha;\, k-1}\right) = \int\limits_{\chi^2_{1-\alpha;\, k-1}}^{\infty} f_{k-1}\left(\chi^2\right) \alpha\chi^2 = \alpha .$$

Критерій К. Пірсона (критерій χ^2) має наступний зміст. Нехай прийнятий рівень значущості α_1, маємо об'єм спостережень n над випадковою величиною X, усі можливі значення якої складають генеральну сукупність, вектор $m^* = \left(m_1^*,\ m_2^*,\ \ldots,\ m_i^*,\ \ldots,\ m_k^*\right)$ задовольняє вимоги $n \geq 50$ та $m_i^* \geq 5$, $i = \overline{1,k}$; тоді якщо значення статистики $t = \chi^2_n\left(m^*\right)$, яке спостерігається, задовольняє нерівність $t \geq t_\alpha = \chi^2_{1-\alpha;k-1}$, то гіпотеза H_0 відхиляється, в противному разі вважається, що гіпотеза H_0 не суперечить результатам випробувань і гіпотеза H_0 вважається справедливою.

Критерій К. Пірсона також використовується для перевірки складної гіпотези, коли розглядається погодженість $F_n(x)$ з класом теоретичних функцій розподілу $F = \left\{F\left(x;\Theta\right), \Theta \in \Theta\right\}$, де $\Theta -$ вектор параметрів теоретичної функції розподілу, яка передбачається. У такому разі ймовірності випадкових подій, які полягають в тому, що випадкова величина X належить $I_i, i=\overline{1,k}$ інтервалам при гіпотезі H_0, є функціями від Θ, тобто

$$P_i(\Theta)=P(X\in I_i/H_0)=\int_{I_i} dF(x;\Theta), \quad i=\overline{1,k}.$$

Тоді статистика критерію χ^2 (11.6) має вигляд

$$\chi_n^2(m;\Theta)=\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i-nP_i(\Theta))^2}{nP_i(\Theta)}.$$

Щоб виключити невизначеність, що пов'язана з невідомим вектором параметрів Θ, роблять так: компоненти вектора Θ заміняють їх статистичними оцінками та в подальшому розглядають Θ_n вектор статистичних оцінок параметрів. У такому разі $P_i(\Theta_n)$ є функцією від вибірки і зазначене вище граничне співвідношення (11.8) не можна вважати справедливим. Також відзначимо, що розподіл статистики (11.9) буде залежати від методу побудови оцінки Θ_n.

У 1924 році Р. Фішером було показано, що існують методи оцінювання И, за яких граничний розподіл статистики

$$\chi_n^2(m;\Theta_n)=\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i-nP_i(\Theta_n))^2}{nP_i(\Theta_n)} \qquad (11.10)$$

має розподіл χ_{k-1-r}^2 з $(k-1-r)$ степенями свободи, де r - розмірність вектора параметрів Θ теоретичного закону $F(x;\Theta)$.

Критерій згоди χ^2 для перевірки складної гіпотези H_0 має такий зміст.

Нехай прийнятий рівень значущості α *маємо об'єм спостережень* n *над випадковою величиною* X, *можливі значення якої складають генеральну сукупність, і вектор* $m^*=(m_1^*, m_2^*, \ldots, m_i^*, \ldots, m_k^*)$, *який задовольняє вимоги* $n\ge 50$ *та* $m_i^*\ge 5, i=\overline{1,k}$; *тоді якщо значення статистики* (11.10) $t=\chi^2(m^*;\Theta_n)$ *задовольняє нерівність* $t\ge t_\alpha=\chi^2_{1-\alpha;k-1-r}$, *то* *гіпотеза* H_0 *вважається несправедливою, в противному разі, коли* $t \geq t_\alpha = \chi^2_{1-\alpha;\, k-1-r}$, *робиться висновок, що гіпотеза* H_0 *не суперечить дослідним даним.*

11.4. Перевірка гіпотези однорідності

Зміст гіпотези однорідності наведений в п. 11.1. Розглянемо перш за все випадок, коли є дві незалежні вибірки $\{X_i\},\ i = \overline{1, n}$ та $\{Y_j\},\ j = \overline{1, m}$, які відповідають одному й тому ж природному явищу, але отримані в різних умовах. Необхідно перевірити, чи є ці вибірки випадковими вибірками з одного й того ж розподілу, чи закони розподілу від вибірки до вибірки змінюються?

Формально задача має постановку. Розглядається $\{X_i\},\ i = \overline{1, n}$ як вибірка з розподілу $L(X)$ з невідомою функцією розподілу $F_1(x)$ та $\{Y_j\},\ j = \overline{1, m}$ як вибірка з розподілу $L(Y)$ з невідомою функцією розподілу $F_1(x)$; $F_{1n}(x)$ та $F_{2m}(x)$ – функції розподілу, які відповідають цим вибіркам. Необхідно перевірити гіпотезу H_0, яка полягає в тому, що $F_1(x) = F_2(x)$.

11.4.1. Критерій згоди Смирнова

Критерій згоди Смирнова використовується для неперервних $F_1(x)$, $F_2(x)$ законів розподілу. Як статистика критерію розглядається випадкова величина

$$D_{n,m} = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| F_{1n}(x) - F_{2m}(x) \right|, \qquad (11.11)$$

де $F_{1n}(x)$ та $F_{2m}(x)$ – функції, які відповідають випадковим вибіркам, тому є випадковими. Емпірична функція розподілу є оптимальною оцінкою для теоретичної функції розподілу, тому при збільшенні об'єму вибірки $F_{1n}(x)$ та $F_{2m}(x)$ зближуються та у випадку, коли гіпотеза H_0 справедлива, вони оцінюють одну і ту ж невідому функцію розподілу. Таким чином, у цих випадках статистика критерію (11.11) не повинна суттєво відхилятися від нуля. Тому якщо статистика $D_{n,m}$ має велике значення, то це необхідно оцінювати як факт, за яким гіпотезу H_0 потрібно відхилити.

Виходячи з цього, критичну область вибирають у вигляді $\Gamma_{1\alpha} = \{t \geq t_\alpha(n,m)\}$, де $D_{n,m} = t$ – розрахункове значення статистики (11.11), а $t_\alpha(n,m)$ – критична границя, яка є прийнятою при рівні значущості α; згідно з відомим при гіпотезі H_0 граничним розподілом при $n,m - \propto$ можна вважати, що $t_\alpha(n,m) = \lambda_\alpha \sqrt{\frac{n+m}{nm}}$, де $K(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$, тобто λ_α – квантиль розподілу О. М. Колмогорова при рівні функції розподілу $(1 - \alpha)$.

Дійсно, тоді маємо

$$P\left(D_{n,m} \in \Gamma_{1\alpha}/H_0\right) = P\left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m} \geq \lambda_\alpha \Big/ H_0\right) = 1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha .$$

Критерій однорідності Смирнова: якщо об'єми вибірок достатньо великі, то за результатами вибіркових даних розраховується значення t статистики $D_{n,m}$ та при $t \geq \lambda_\alpha \sqrt{\frac{n+m}{nm}}$ гіпотеза H_0 вважається несправедливою; ймовірність помилки відхилення вірної гіпотези при цьому є на рівні α.

Відзначимо, що прийнятий критерій перевірки незмінності функції розподілу не залежить від виду функції, що дійсний закон розподілу практично завжди є невідомим, а цікавим є питання: чи не змінюється невідомий закон розподілу від вибірки до вибірки. Вимога неперервності функцій розподілу завжди випливає з фізичного змісту того природного явища, яке розглядається, тому не потребує додаткових перевірок.

11.4.2. Критерій однорідності χ^2

На практиці при перевірці гіпотези однорідності часто використовується критерій однорідності χ^2. Його використовують для перевірки однорідності даних, які мають дискретну структуру, тобто тоді, коли в дослідах спостерігається змінна ознака, яка приймає скінченну кількість різних значень. До такої схеми можна привести будь-яку модель, якщо запропонувати метод групування даних. Тому критерій однорідності χ^2 вважається універсальним. Крім того, за допомогою цього критерію можна розглядати будь-яку кількість вибірок, у той час як критерій однорідності Смирнова дозволяє порівнювати тільки дві вибірки.

Нехай проведено k послідовних серій незалежних спостережень, які складаються з $n_1, n_2, \ldots, n_k$ вимірювань. У кожному досліді спостерігається деяка змінна ознака, яка приймає S різних значень. Якщо m_{ij} – кількість реалізацій i-го наслідку в j-й серії, то $\sum_{i=1}^{s} m_{ij} = n_j$, $j = \overline{1,k}$.

Необхідно перевірити гіпотезу H_0, яка полягає у тому, що всі спостереження проводились над однією й тією ж випадковою величиною, тобто якщо P_{iJ} – невідома ймовірність появи i-го наслідку у випробуваннях j-ї серії, $i = \overline{1,s}$; $j = \overline{1,k}$, то H_0 означає, що $\left(P_{1j}, P_{2j}, \ldots, P_{ij\ldots}, P_{sj}\right) = \left(P_1, P_2, \ldots, P_{i\ldots}, P_s\right) \forall i = \overline{1,s}$, де $P = \left(P_1, P_2, \ldots, P_s\right)$ - невідомий вектор імовірностей та $\sum_{i=1}^{S} P_i = 1$.

Оскільки $M\left[\, m_{ij} / H_0 \right] = n_j P_i$, то як міру відхилення дослідних даних від їх гіпотетичних значень приймають статистику

$$\chi_n^2(P) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(m_{ij} - n_j P_i\right)^2}{n_j P_i} \quad . \qquad (11.12)$$

Використання (11.12) потребує статистичної оцінки невідомих імовірностей $P_i, i = \overline{1,s}$, якими є

$$P_i^* = \frac{m_{i\bullet}}{n}, \text{ де } \qquad m_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{k} m_{ij}, i = \overline{1,s};\ n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} m_{il} \quad . \qquad (11.13)$$

З урахуванням (11.13), (11.12) буде відповідати таким перетворенням. Маємо

$$\chi_n^2(P) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(m_{ij} - n_j \frac{m_{i\bullet}}{n}\right)^2}{n_j \frac{m_{i\bullet}}{n}} = n \sum_{i=1}^{S} \sum_{j=1}^{K} \left(\frac{m_{ij}^2}{n_j m_{i\bullet}} - \right.$$

$$-\frac{2m_{ij}n_j\frac{m_{i\bullet}}{n}-n_jP_i}{n_jm_{i\bullet}}+\frac{n_j^i\frac{m_{i\bullet}^2}{n^2}}{n_jm_{i\bullet}}\Bigg)=n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{m_{ij}^2}{n_jm_{i\bullet}}-\right.$$

$$\left.-2\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{m_{ij}^2}{n}+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{n_jm_{i\bullet}}{n^2}\right)=n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{m_{ij}^2}{n_jm_{i\bullet}}-2\frac{n}{n}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{s}m_{i\bullet}\sum_{j=1}^{k}n_j\right)=n\left(\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{K}\frac{m_{ij}^2}{n_jm_{i\bullet}}-2+\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot n\right)=$$

$$=n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{m_{iy}^2}{n_jm_{i\bullet}}-1\right).$$

Тобто статистика критерію χ^2 перевірки гіпотези однорідності має вигляд

$$\chi_n^2(P)=n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{m_{ij}^2}{n_jm_{i\bullet}}-1\right). \qquad (11.14)$$

Критичну область задають у вигляді $\Gamma_{1\alpha}=\{\, t\geq t_\alpha\}$, де t - розрахункове значення статистики за (11.14), а t_α - критична границя, яка визначається як квантиль при заданому рівні значущості α граничного розподілу випадкової величини (11.14), який має вигляд

$$\lim_{n\to\infty}L\left(\chi_n^2(P)/H_0\right)=\chi^2_{(s-1)(k-1)},$$

де $\chi^2_{(s-1)(k-1)}$ – функція розподілу χ^2 з $(s-1)(k-1)$ степенями свободи.

Критерій однорідності χ^2 *тоді має такий зміст: гіпотеза однорідності* H_0 *відхиляється тоді й тільки тоді, коли розраховане за фактичними даним* t *статистики* (11.14) *задовольняє нерівності* $t\geq\chi^2_{1-\alpha;(s-1)(k-1)}$; *у противному разі робиться висновок, що гіпотеза однорідності* H_0 *не суперечить статистичним даним.*

11.5. Критерій незалежності χ^2

У досліді спостерігається двовимірна випадкова величина $\{X_1, X_2\}$, функція розподілу якої $F(x_1, x_2)$ невідома. Є підстави вважати, що випадкові X_1 та X_2 є незалежними, тобто необхідно перевірити гіпотезу незалежності $H_0 : F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$.

Для перевірки зазначеної гіпотези незалежності використовують критерій незалежності χ^2. Розглядається дискретна модель зі скінченною кількістю наслідків. Нехай випадкова величина X_1 приймає скінченну кількість s деяких значень, а саме $a_1, a_2, \ ..., a_i, a_s$, а випадкова величина X_2 – k значень, а саме $b_1, b_2, \ ..., b_{1j}, \ ..., b_k$. Якщо розглядається випадкова величина $\{X_1, X_2\}$, яка є неперервною, то значення випадкових величин X_1 та X_2, отримані при вимірюваннях, насамперед групують всю множину значень X_1 та розбивають на s інтервалів $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}, \ ..., \Gamma_i^{(1)}, \ ..., \Gamma_S^{(1)}$, а множину значень X_2 – на k інтервалів $\Gamma_1^{(2)}, \Gamma_2^{(2)}, \ ..., \Gamma_j^{(2)}, \ ..., \Gamma_k^{(1)}$. Тоді множина значень випадкової величини розбивається на sk інтервалів-прямокутників $\left(I_i^{(1)} \times I_j^{(2)}\right), \ i = \overline{1,s}; \ \ j = \overline{1,k}$, які є елементами декартового добутку векторів $\Gamma^{(1)} = \left\{ \Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}, \ ..., \Gamma_i^{(1)}, \ ..., \Gamma_s^{(1)} \right\}$ та $\Gamma^{(2)} = \left\{ \Gamma_1^{(2)}, \Gamma_2^{(2)}, \ ..., \Gamma_j^{(2)}, \ ..., \Gamma_k^{(1)} \right\}$. Якщо m_{ij} – кількість значень (a_i, b_j) випадкової величини $\{X_1, X_2\}$, що спостерігаються, які потрапили в інтервал $\left(\Gamma_i^1 \times \Gamma_j^{(2)}\right), \ i = \overline{1,s}; \ j = \overline{1,k}$, то $\sum\limits_{i=1}^{s} \sum\limits_{j=1}^{k} m_{ij} = n$.

Результати спостережень подають у вигляді таблиці поєднання двох ознак (табл. 11.1.)

Якщо $P_{ij} = (X_1 = a_i; X_2 = b_j)$ є ймовірністю події, яка полягає в тому, що випадкова величина X_1 прийме значення a_i та випадкова величина

X_2 прийме значення b_j, то гіпотеза незалежності означає, що існують $s+k$ сталих $P_{i\bullet}$ та $P_{\bullet j}$, яким відповідає

$$\sum_{i=1}^{s} P_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{k} P_{\bullet j} = 1 \text{ та } P_{ij} = P_{i\bullet} P_{\bullet j}. \qquad (11.15)$$

Гіпотеза незалежності H_0 є твердженням щодо того, що m_{ij} як випадкові величини розподілені згідно з поліноміальним законом розподілу з імовірностями наслідків, які задовольняють (11.15). Із (11.15) також видно, що вектор невідомих імовірностей $P = \left\{ P_{1\bullet}, P_{2\bullet}, \ldots, P_{(s-1)\bullet}; P_{\bullet 1}, P_{\bullet 2}, \ldots, P_{\bullet (k-1)} \right\}$ має $r = s+k-2$ невідомих компонент. Як статистичні оцінки компонент вектора P приймають

$$P_i^* = \frac{m_{i\bullet}}{n}, i = \overline{1,s};$$

$$P_{\bullet j}^* = \frac{m_{\bullet y}}{n}, j = \overline{1,k}; j = \overline{1,k};$$

$$P_{ij}^* = \frac{m_{ij}}{n}, i = \overline{1,s}; j = \overline{1,k}.$$

Таблиця 11.1

Поєднання двох ознак

$X_1 \backslash X$	b_1	b_2	…	b_j	…	b_k	$\sum_{j=1}^{k}$
a_1	m_{11}	m_{12}	…	m_{ij}	…	m_{1k}	$m_{1\bullet}$
a_2	m_{21}	m_{22}	…	m_{2j}	…	m_{2k}	$m_{2\bullet}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_i	m_{i1}	m_{i2}	…	m_{ij}	…	m_{ik}	$m_{i\bullet}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_s	m_{s1}	m_{s2}	…	m_{sj}	…	m_{sk}	$m_{s\bullet}$
$\sum_{i=1}^{s}$	$m_{\bullet 1}$	$m_{\bullet 2}$	…	$m_{\bullet j}$	…	$m_{\bullet k}$	n

Статистика критерію незалежності має вигляд

$$\chi_n^2(P)=n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(\frac{m_{ij}}{} - \frac{m_{i\bullet}}{n}\frac{m_{j\bullet}}{n}\right)^2}{\frac{m_{i\bullet}}{n}\frac{m_{j\bullet}}{n}}=n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(m_{ij}-\frac{m_{i\bullet}m_{\bullet j}}{n}\right)^2}{m_{i\bullet}m_{\bullet j}}=$$

$$=n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{m_{ij}^2}{m_{i\bullet}m_{j\bullet}}-2\frac{m_{ij}}{n}+\frac{m_{i\bullet}m_{j\bullet}}{n^2}\right)=n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{m_{ij}^2}{m_{i\bullet}m_{j\bullet}}-2\frac{n}{n}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sum_{i=1}^{s}m_{i\bullet}\sum_{j=1}^{k}m_{j\bullet}}{n^2}\right)=n\left(\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{k}\frac{m_{ij}^2}{m_{i\bullet}m_{j\bullet}}-1\right).$$

Тобто маємо

$$\chi_n^2(P)=n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_{ij}^2}{m_{i\bullet}m_{j\bullet}}-1\right). \qquad (11.16)$$

У п. 11.3 відзначалось, що при перевірці складної гіпотези за критерієм χ^2 граничний розподіл статистики відповідає розподілу χ^2_{N-1-r} з $(N-1-r)$ степенями свободи. У нашому випадку маємо $r=s+k-2,\quad N=ks$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} L\left(\chi_n^2(P)/H_0\right)=\chi^2_{(s-1)(k-1)}$.

Критична область визначається $\Gamma_{1\alpha}=\{t\geq t_\alpha\}$, де t - розрахункове значення статистики (11.16), а t_α - критична границя, яка за прийнятого рівня значущості α визначається як $t_\alpha=\chi^2_{(1-\alpha);(s-1)(k-1)}$.

Тоді критерій незалежності χ^2 має вигляд: *при прийнятому рівні* α *та достатньо великому* n *гіпотеза* H_0 *вважається несправедливою, якщо* $t\geq t_\alpha=\chi^2_{(1-\alpha);(s-1)(k-1)}$, *а у противному разі вважається, що гіпотеза* H_0 *не суперечить дослідним даним.*

11.6. Перевірка гіпотези випадковості

Зміст гіпотези випадковості поданий в п. 11.1. Там відзначено, що в досліді спостерігається n-вимірна випадкова величина $X=\{X_1, X_2, \ \ldots, X_i, \ \ldots, X_n\}$, яка має невідому функцію розподілу $F_x(x_1, x_2, \ \ldots, x_n)$. Чи можна розглядати випадкову величину X як випадкову вибірку з розподілу деякої випадкової величини Y, тобто чи є компоненти X_i незалежними та чи підкоряються X_i, $i=\overline{1,n}$ одному і тому же закон розподілу? Це означає, що розглядається гіпотеза H_0: $F_x(x_1, x_2, \ \ldots, x_n)=F_Y(x_1)F_Y(x_2)\ldots F_Y(x_n)$.

Критерій перевірки гіпотези H_0 складають виходячи з таких міркувань. Якщо гіпотеза H_0 справедлива, то компоненти вектора X є "рівноправними", тому дані досліду не повинні бути впорядкованими. Тобто ситуацію, яка відповідає гіпотезі H_0, можна охарактеризувати як "повний хаос". При відхиленні від гіпотези дані спостережень мають той чи інший порядок, тобто мають вплив зв'язків між компонентами вектора X. Тому критерій гіпотези H_0 слід будувати на статистиці, яка вимірює ступінь "повного хаосу" результатів спостережень. *Такою статистикою є статистика за кількістю інверсій у випадковій вибірці.*

Нехай для вибірки $X=\{X_1, X_2, \ \ldots, X_n\}$ побудовано варіаційний ряд $\{X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots . X_{(n)}\}$. Відзначимо, що компоненти X_i та X_j утворюють *інверсію,* якщо $i<j$, але у варіаційному ряді X_i міститься праворуч X_j, тобто спостереженню з меншим номером відповідає більше значення. Нехай ν_i - кількість інверсій, яка утворюється компонентою $X_i, i=\overline{1,n-1}$, тобто у варіаційному ряду ліворуч X_i є ν_i елементів вибірки з більшими номерами. Тоді $T_n(X)=\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{n-1}$ є загальною кількістю інверсій для вибірки X. Статистика $T_n(X)$ є дійсною мірою "повного хаосу" для спостережень, яка може бути використана для перевірки гіпотези H_0. Розглянемо два крайні випадки, коли варіаційний ряд має вигляд $\{X_1 < X_2 < \ldots . X_n\}$ або $\{X_n < X_{n-1} < \ldots . X_1\}$. Ці випадки слід розглядати як "повну відсутність хаосу". Такі випадки не відповідають гіпотезі випадковості H_0. Якщо маємо $\{X_1 < X_2 < \ldots X_n\}$, то статистика $T_n(X)=0$, а якщо маємо $\{X_n < X_{n-1} < ....X_1\}$, то статистика приймає найбільше значення і визначається як

$$T_n(X)=(n-1)+(n-2)+...+(n-n)=nn-(1+2+...+n)=$$
$$=nn-\frac{1+n}{2}n=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Розгляд цих двох випадків свідчить про те, що малі значення статистики $T_n(X)$, близькі до 0, та великі значення статистики $T_n(X)$, близькі до $\frac{n(n-1)}{2}$, слід визначати як критичні для гіпотези H_0.

Кількість відносних розташувань елементів вибірки $X=\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ дорівнює $n!$. Але, виходячи із міркувань симетрії, у варіаційному ряді вони мають однакову ймовірність $\frac{1}{n!}$. Зазначена вище випадкова величина η_i - кількість інверсій, яка утворюється компонентою X_i – може приймати свої можливі значення, що визначаються розміщенням компоненти X_i по відношенню до $X_{i+1}, X_{i+2}, ..., X_n$ у варіаційному ряду і не залежать від відносного розташування останніх між собою. Це означає, що випадкова величина η_i за будь-якого $i=\overline{1,n-2}$ не залежить від $\eta_{i+1},...,\eta_{n-1}$, тобто випадкові величини $\eta_1,...,\eta_{n-1}$ є незалежними. Випадкова величина η_i з рівними ймовірностями $\frac{1}{n-i+1}$ може приймати можливі значення $0,1, ..., n-1$, тому твірна її функція має вигляд

$$\varphi_i(z)=\sum_{r=0}^{n=1} P(\eta_i=r)z^2=\frac{1}{n-i+1}\left(1+z+z^2+...+z^{n-1}\right),$$

а твірна функція статистики $T_n(X)$ має вигляд

$$\Phi_n(z)=\sum_r P(T_n(X)=r)z^r=\prod_{i=1}^{n-1}\varphi_i(z)=\frac{1}{n!}\prod_{r=1}^{n-1}\left(1+z+...+z^r\right). \quad (11.17)$$

Математичні сподівання випадкових величин η_i та $T_n(X)$ визначаються виразами:

$$M[\eta_i]=(\varphi_i)_z\Big|_{z=1}=\frac{1}{n-i+1}\left[0+1+2z+3z^2+\ldots+(n-i)z^{n-i-1}\right]\Big|_{z=1}=$$

$$=\frac{1}{n-i+1}[1+2+3+\ldots+(n-1)]=\frac{1}{n-i+1}\frac{1+(n-i)}{2}(n-i)=\frac{n-i}{2};$$

$$M[T_n(X)]=\sum_{i=1}^{n-1}M[\eta_i]=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n-i}{2}=\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{2}+\cdots+\frac{n-(n-1)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n-3}{2}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-1}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}}{2}(n-1)=\frac{n(n-1)}{4}.$$

Отже, математичне сподівання статистики $T_n(X)$ *при гіпотезі* H_0 *буде збігатися з серединою проміжку* $\left[0,\frac{n(n-1)}{2}\right]$, *а тоді в критичну область* $\Gamma_{1\alpha}$ *слід включити всі цілі числа цього проміжку, які достатньо віддалені від середини, тобто слід визначити* $\Gamma_{1\alpha}=\left\{\left|t-\frac{n(k-1)}{4}\right|>t_\alpha(n)\right\}$, *де* t – *можливі значення статистики* $T_n(X)$, *які мають вигляд* 0, 1, …, $\frac{n(n-1)}{2}$. *Критичну границю* $t_\alpha(n)$ *при прийнятому рівні значущості* α *визначають виходячи з умови* $P(T_n(X)\in\Gamma_{1\alpha}/H_0)\leq\alpha$ *або еквівалентно з умови*

$$P(T_n(X)\in\Gamma_{1\alpha}/H_0)=P\left\{\left(\frac{n(n-1)}{4}-t_\alpha(n)\leq T_n(X)\leq\frac{n(n-1)}{4}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+t_\alpha(n)\right)/H_0\right)\Big\}\geq 1-\alpha, \qquad (11.18)$$

де $t_\alpha(n)$ – мінімальне число, яке задовольняє (11.18). На рис. 11.2 зазначено критичну область $\Gamma_{1\alpha}$.

Розвиваючи твірну функцію (11.17) за ступенями z та розраховуючи коефіцієнти при z^r, обчислюють ймовірності $P(T_n(X)=r/H_0)$ при n, яке задається, та при будь-якому r, що дає можливість визначити критичну границю $t_\alpha(n)$.

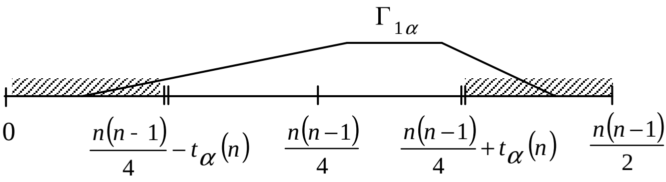

Рис. 11.2. Критична область гіпотези випадковості

Для великого об’єму вибірки n використовують таке асимптотичне наближення критерію випадковості: доведено, що характеристична функція нормованої статистики

$$T_n^*(X)=\left(T_n(X)-\frac{n(n-1)}{4}\right)\frac{6}{n^{\frac{3}{2}}} \tag{11.19}$$

наближується при $n-\propto$ та при будь-якому $t=T_n^*(X)$ до $e^{-\frac{t^2}{2}}$ – характеристичної функції нормального закону розподілу. А це означає, що $L\left(T_n^*(X)/H_0\right)\underset{n\to\infty}{\to}N(0{,}1)$, тобто що закон розподілу нормованої статистики $T_n^*(X)$ при гіпотезі H_0 при $n-\propto$ наближується до нормативного закону розподілу з параметрами $m_x=0,\ c_x=1$. Тоді зміст критерію перевірки гіпотези випадковості H_0 полягає в такому.

Для значення a, яке приймається, критичну границю t_a визначають виходячи з умови $\Phi^*(-t_\alpha)=\frac{\alpha}{2}$,

де

$$\Phi^*(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\int\limits_{n\to\infty}^{z}e^{-\frac{t^2}{2}}\alpha t;$$

за фактичними даними $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, *які спостерігаються, визначається* $t=T_n(X)$ *– кількість інверсій у вибірці, якщо*

$\left|t-\frac{n(n-1)}{4}\right|\frac{6}{n^{\frac{3}{2}}}>t_{\alpha}(n)$, *то гіпотеза* H_0 *відхиляється як така, що суперечить даним; у противному разі визначається, що гіпотеза незалежності та однакового розподілу відповідає дослідним даним.*

Імовірність помилкового відхилення гіпотези H_0, яка є істиною, при цьому визначається як

$$p\left(\left|T_n-\frac{n(n-1)}{4}\right|\frac{6}{n^{\frac{3}{2}}}>t_{\alpha}(n)/H_0\right)\underset{n\to\infty}{\to}2\Phi^*\left(-t_{\alpha}(n)\right)=\alpha .$$

Відзначений критерій дає задовільні результати уже при $n>10$.

11.7. Дисперсійний аналіз

Розробка моделей будь-якого реального явища починається з визначення множини факторів, які необхідно враховувати. Зміст дисперсійного аналізу полягає в тому, що він дозволяє виявити вплив окремого фактора на мінливість будь-якої ознаки фактора, значення якого можуть бути отримані в досліді. За кількістю факторів розглядається однофакторний, двофакторний та багатофакторний дисперсійний аналіз.

При повторенні дослідів вважається, що дисперсія випадкової величини значення ознаки від серії до серії випробувань залишається незмінною. Це відповідає випадковим вибіркам з однієї генеральної сукупності. Випадкову величину значення ознаки розглядають як суму незалежних випадкових величин, кожна з яких є результатом впливу кожного фактора на мінливість значення ознаки. Так, наприклад, якщо розглядати двофакторний дисперсійний аналіз, визначається, що сумарною дисперсією випадкової величини ознаки є

$$\sigma^2=\sigma_A^2+\sigma_B^2+\sigma_{AB}^2+\sigma_z^2,$$

де

σ_A^2 – частка дисперсії зазначеної випадкової величини, яка враховує вплив фактора A;

σ_B^2 – частка дисперсії, яка враховує вплив фактора B;

$\sigma_{AB}^2 -$ частка дисперсії, яка враховує сумісний вплив факторів A і B;

$\sigma_z^2 -$ частка дисперсії, що визначається впливом інших незазначених факторів, яку прийнято називати випадковою дисперсією.

Розглянемо на початку простий випадок, коли величина дисперсії випадкової величини значення ознаки σ_0^2 відома, а досліджується фактор A, вплив якого при k спостереженнях визначився як $(x_1, x_2, \ \ ..., x_k)$, а статистична оцінка дисперсії має вигляд

$$\tilde{\sigma}_x^{*2} = s_x^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \tilde{m}_x^*\right)^2 = \frac{1}{k-1}\left[\sum_{i=1}^{k}x_i^2 - \sum_{i=1}^{k}2x_i\tilde{m}_x^* + \sum_{i=1}^{k}\tilde{m}_x^{*2}\right] =$$

$$= \frac{1}{k-1}\left[\sum_{i=1}^{k}x_i^2 - 2\tilde{m}_x^*\sum_{i=1}^{k}x_i + k\tilde{m}_x^{*2}\right] = \frac{1}{k-1}\left[\sum_{i=1}^{k}x_i^2 - \frac{k}{k}2\tilde{m}_x^*\sum_{i=1}^{k}x_i + k\tilde{m}_x^{*2}\right] =$$

$$= \frac{1}{k-1}\left[\sum_{i=1}^{k}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)^2\right]. \qquad (11.20)$$

Якщо s_x^2 і σ_0^2 відрізняються незначно, то слід вважати, що вплив фактора A на мінливість значення ознаки є незначним (зміст основної гіпотези H_0), оскільки він приводить до значного збільшення розкиду результатів спостережень. Вплив фактора A буде значним тоді, коли s_x^2 буде значно відрізнятись від σ_0^2. Тоді слід вважати, що часткою дисперсії, яка обумовлена впливом фактора A, є $\sigma_A^2 \cong s_x^2 - \sigma_0^2$.

Розглянемо на прикладі зміст фактора A та його вплив на мінливість значення ознаки, яка може спостерігатись в досліді. При виготовленні деталі на токарному верстаті має місце невідповідність центрів верстата, закріплення деталі та центрів кріплення самої деталі (фактор A). Помилка у значенні діаметра деталі є випадковою величиною. Розкладання значень діаметра (ознаки, яка розглядається) оцінюється статистичною оцінкою дисперсії цієї випадкової величини s_x^2. Якщо σ_0^2 – дисперсія випадкової величини помилки у значенні діаметра деталі, то $\sigma_A^2 \cong s_x^2 - \sigma_0^2$ – частка дисперсії, яка обумовлена впливом фактора A.

Перевірка гіпотези H_0 щодо суттєвості впливу фактора A на ознаку ґрунтується на порівнянні s_x^2 та σ_0^x, яке описується значенням статистики $T_n(X) = s_x^2 / \sigma_0^2$. Вплив фактора A вважається суттєвим, якщо

$$\frac{s_x^2}{\sigma_0^2} \geq F_{1-\alpha;\nu_1,\nu_2}, \qquad (11.21)$$

де s_x^2 – статистична оцінка дисперсії, яка визначається за результатами спостережень з (11.20);

$F_{1-\alpha;\nu_1,\nu_2}$ – квантиль розподілу Р. Фішера при рівні значущості α та степенях свободи ν_1 та ν_2.

Тобто якщо виконується (11.21), *то гіпотеза H_0 щодо несуттєвості впливу фактора A відхиляється, а в противному разі вважається, що гіпотеза H_0 не суперечить дослідним даним.*

Задача 11.1. Підприємство має досвід виготовлення деякої продукції 25 років. За останні 6 років приріст прибутків підприємства в мільйонах гривень визначається даними: $x_1 = 0{,}16$; $x_2 = 0{,}18$; $x_3 = 0{,}19$; $x_4 = 0{,}2$; $x_5 = 0{,}21$; $x_6 = 0{,}23$. За даними попередніх років відомо, що $\sigma_0^2 = 0{,}000\,1$. Необхідно перевірити гіпотезу H_0, яка полягає в тому, що фактор зростання продуктивності праці є несуттєвим у порівнянні зі зростанням прибутків підприємства.

Розв'язання. За статистичними даними зростання прибутків підприємства за останні шість років з (11.20) маємо $s_x^2 = 0{,}000\,6$; при $\alpha = 0{,}05$; $\nu_1 = 5$; $\nu_2 = \infty$, маємо

$$F_{1-\alpha;\nu_1,\nu_2} = F_{0{,}95;5;\infty} = 2{,}2.$$

Тоді $t = T_n(X) = \dfrac{s_x^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{0{,}000\;\;6}{0{,}000\;\;1} = 6 > F_{0{,}95;5;\infty} = 2{,}2,$

отже, гіпотеза H_0 відхиляється, тобто зростання продуктивності праці на підприємстві є суттєвим фактором, що впливає на зростання його прибутків.

Отже, як було відзначено, розглядався простий випадок, а саме: значення дисперсії випадкової величини ознаки σ_0^2 вважалося відомим. На практиці значення σ_0^2 генеральної сукупності невідоме. *У цьому* загальному випадку розглянемо *однофакторний дисперсійний аналіз.*

Розглянемо суттєвість впливу фактора A на мінливість ознаки на серіях випробувань (рівнях) $A_1, A_2, ..., A_j, ..., A_m$. Кожна серія містить n незалежних вимірювань значень ознаки, які подані в табл. 11.2.

Таблиця 11.2

Значення вимірювання ознаки за серіями

	Серії випробувань					
	A_1	A_2	…	A_j	…	A_m
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1m}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2m}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{im}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nm}
$\bar{x}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	…	$\bar{x}_j$	…	$\bar{x}_m$

У табл. 11.2 $\bar{x}_j$ – середнє випробувань значення ознаки за j-ю серією, яке визначається як

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \; j = \overline{1,m}. \tag{11.22}$$

Введемо до розгляду таке:

– загальне вибіркове значення випадкової величини – значення ознаки (статистична оцінка математичного сподівання випадкової величини X) за виразом

$$\bar{x} = \tilde{m}_x^* = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}; \tag{11.23}$$

– загальну суму квадратів відхилення значень, які спостерігаються, від загального вибіркового середнього $\bar{x}$ за виразом

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2; \tag{11.24}$$

– факторну суму квадратів відхилення групових (серійних) середніх $\bar{x}_j$

від загального вибіркового середнього $\bar{x}$, яка характеризує розсіювання між серіями, за виразом

$$Q_A = n\sum_{j=1}^{m}\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2 \; ; \tag{11.25}$$

– залишкову суму квадратів відхилення значень за серією від свого середнього, яка характеризує розсіювання в серії (групі), за виразом

$$Q_o = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2 . \tag{11.26}$$

Покажемо, що загальна сума Q квадратів відхилення значень ознаки, які спостерігаються в A_j, $j = \overline{1,m}$ серіях, від загального вибіркового середнього $\bar{x}$, складається з факторної суми Q_A квадратів відхилення групових середніх $\bar{x}_j$ від загального середнього $\bar{x}$ та залишкової суми Q_o квадратів відхилення значень за серією від середнього за серією, тобто покажемо, що $Q = Q_A + Q_o$.

Маємо

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right) + \left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)\right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2 =$$

$$= Q_o + n\sum_{j=1}^{m}\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2 + 2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right) =$$

$$= Q_o + Q_A + 2\sum_{j=1}^{m}\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right) =$$

$$= Q_o + Q_A + 2\left(\sum_{j=1}^{m}\bar{x}_j - \sum_{j=1}^{m}\bar{x}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right) =$$

$$= Q_o + Q_A + 2\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij} - \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{m \cdot n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right) =$$

$$= Q_{\text{о}} + Q_A + 2\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \frac{m}{m\cdot n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \overline{x}_j\right) = Q_{\text{о}} + Q_A .$$

Це доведення свідчить про те, що при незалежних випробуваннях загальна сума квадратів відхилення значень ознаки, яка визначає статистичну оцінку дисперсії при mn вимірюваннях, складається з характеристики розсіювання між серіями та характеристик розсіювання всередині серії. При такому розгляді видно, що Q враховує вплив фактора A на мінливість значення ознаки, оскільки якщо фактор A суттєво впливає на мінливість значення ознаки, то серії спостережень будуть різними та будуть різними і групові середні, які тим більше будуть розсіяні відносно загального середнього, чим більший вплив має фактор A. Тому для оцінки впливу фактора A на мінливість значення ознаки доцільно розглядати Q_A.

Введемо до розгляду основну гіпотезу H_0, яка полягає в тому, що фактор A не впливає на мінливість значень ознаки. Тоді загальна статистична оцінка дисперсії, статистична оцінка дисперсії, яка характеризує розсіювання між серіями, та статистична оцінка залишкової дисперсії, яка характеризує розсіювання всередині серій, тобто

$$S_x^2 = \frac{Q}{nm-1}; \quad S_A^2 = \frac{Q_A}{m-1}; \quad S_{\text{о}}^2 = \frac{Q_{\text{о}}}{m(n-1)}, \tag{11.27}$$

є незміщеними оцінками дисперсії σ_o^2 генеральної сукупності, оскільки при справедливості зазначеної тут гіпотези H_0

$$M\left[S_x^2\right] = \sigma_{\text{о}}^2; \quad M\left[S_A^2\right] = \sigma_{\text{о}}^2; \quad M\left[S_{\text{о}}^2\right] = \sigma_{\text{о}}^2 .$$

Тому якщо ввести основну гіпотезу H_0, яка полягає в тому, що фактор A є несуттєвим щодо його впливу на мінливість значень ознаки, то слід порівнювати S_A^2 та $S_{\text{о}}^2$. Вводять до розгляду статистику

$$T_n(X) = \frac{S_A^2}{S_{\text{о}}^2}. \tag{11.28}$$

Вплив фактора A на мінливість значень ознаки вважається суттєвим, якщо значення статистики $T_n(X)$, розраховане за результатами спостережень, задовольняє умову

$$T_n(X) = t = \frac{S_A^2}{S_o^2} \geq F_{1-\alpha;\, \nu_1 = m-1;\, \nu_2 = m(n-1)}, \qquad (11.29)$$

де $F_{1-\alpha;\, \nu_1 = m-1;\, \nu_2 = m(n-1)}$ – квантиль розподілу Р. Фішера при рівні значущості α та степенях свободи $\nu_1 = m - 1, \nu_2 = m(n - 1)$, які відповідають статистичним оцінкам факторної дисперсії S_A^2 і залишкової дисперсії S_o^2. У противному разі, коли

$$T_n(X) = t = \frac{S_A^2}{S_o^2} < F_{1-\alpha;\, \nu_1 = m-1;\, \nu_2 = m(n-1)}, \qquad (11.30)$$

вважається, що висунута гіпотеза H_0, яка полягає в тому, що фактор A є несуттєвим щодо мінливості значень ознаки, не суперечить статистичним даним. Гіпотеза H_0 приймається.

Задача 11.2. За шість років були використані п’ять різних технологій для вирощування сільськогосподарської культури. Дані урожайності наведені в табл. 11.3. Установити ступінь впливу технології вирощування сільськогосподарської культури на мінливість значень її врожайності.

Розв’язання. З (11.22), (11.23), (11.25), (11.26), (11.27), (11.29) розраховується статистичне значення статистики $T_n(X)$, яке є $t = \frac{S_A^2}{S_o^2} = \frac{0{,}095}{0{,}044} = 1{,}93$, та порівнюється із значеннями квантилю розподілу Р. Фішера при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ основної гіпотези H_0, яка полягає в тому, що фактор A, – вплив технології вирощування сільськогосподарської культури, який дорівнює $F_{1-0{,}05;\nu_1=4;\nu_2=25} = 2{,}8$ – не є суттєвим для мінливості значень урожайності цієї культури. Тоді за критерієм (11.30) гіпотезу H_0 слід вважати істинною при $\alpha = 0{,}05$, оскільки $t = 1{,}93 < F_{0{,}95;4;25} = 2{,}8$. А це означає, що виходячи із статистичних даних, які подані в табл. 11.3, слід вважати, що розглянуті технології не мають суттєвого впливу на мінливість значень урожайності сільськогосподарської культури.

Таблиця 11.3

Статистика урожайності

Роки	Технології (фактор A)				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	1,2	0,6	0,9	1,7	1,0
2	1,1	1,1	0,6	1,4	1,4
3	1,0	0,8	0,8	1,3	1,1
4	1,3	0,7	1,0	1,5	0,9
5	1,1	0,7	1,0	1,2	1,2
6	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5

Розглянемо двофакторний дисперсійний аналіз.

Двофакторний дисперсійний аналіз проводиться тоді, коли виникає необхідність установити вплив на мінливість значень ознаки одночасно двох факторів A та B. Прикладом необхідності планування та проведення двофакторного аналізу може бути така задача. Нехай розглядається виробництво деякої деталі на підприємстві. Виробництво декількох деталей проводиться одночасно на декількох однотипних верстатах. Деталі, що виготовляються є однотипними, тобто мають однакове функціональне призначення. Для виготовлення деталей використовуються різні партії з точки зору показників якості та сировини. Необхідно з'ясувати, чи є суттєвим вплив різної настройки верстатів та різних партій сировини на мінливість значення визначеного параметра деталей, які виготовляються.

Тоді можна вважати, що фактор A – настройка верстата, а фактор B – партія сировини.

При двофакторному дисперсійному аналізі результати спостережень подають у вигляді табл. 11.4.

Таблиця 11.4

Результати спостережень при двофакторному дисперсійному аналізі

Серії фактора A \ Серії фактора B	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_υ	$\bar{x}_{i\bullet}$
A_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	$x_{1\upsilon}$	$x_{1\bullet}$
A_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2j}	$\cdots$	$x_{2\upsilon}$	$x_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	x_{i1}	x_{i2}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	$x_{i\upsilon}$	$x_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	x_{r1}	x_{r2}	$\cdots$	x_{rj}	$\cdots$	$x_{r\upsilon}$	$x_{r\bullet}$
$\bar{x}_{\bullet j}$	$\bar{x}_{\bullet 1}$	$\bar{x}_{\bullet 2}$	$\cdots$	$\bar{x}_{\bullet j}$	$\cdots$	$\bar{x}_{\bullet\upsilon}$	$\bar{x}$

У табл. 11.4 зазначено таке:

$$\bar{x}_{\bullet j} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_{ij} \qquad (11.31)$$

є середнім значенням спостережень, яке відповідає B_j, j-й серії спостережень за фактором B;

$$\bar{x}_{i\bullet} = \frac{1}{\upsilon}\sum_{j=1}^{\upsilon} x_{ij} \qquad (11.32)$$

є середнім значенням спостережень, яке відповідає A_i, i-й серії спостережень за фактором A;

$$\bar{x} = \frac{1}{\upsilon r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon} x_{ij} \qquad (11.33)$$

є загальним середнім значенням усіх спостережень.

Основний зміст двофакторного дисперсійного аналізу полягає в тому, що випадкова величина X – помилка у визначенні значень ознаки розглядається як

$$X = X_1 + X_2 + X_3,$$

де X_1 – випадкова величина помилки визначення значень ознаки, природа випадковості якої полягає в наявності фактора A;

X_2 – випадкова величина помилки визначення значень ознаки, природа випадковості якої полягає в наявності фактора B;

X_3 – випадкова величина помилки визначення значень ознаки, природа випадковості якої зумовлена впливом усіх інших факторів, що в даному випадку не враховуються.

Випадкові величини X_1, X_2, X_3 розглядаються незалежними. Покажемо, що статистична оцінка загальної дисперсії s_x^2 складається зі статистичної оцінки факторної дисперсії s_1^2, обумовленої впливом фактора A, статистичної оцінки факторної дисперсії s_2^2, обумовленої впливом фактора B, та статистичної оцінки s_3^2 залишкової дисперсії, обумовленої впливом усіх інших факторів, які при даному розгляді не враховуються. Тобто покажемо, що

$$s_x^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \frac{Q}{r\upsilon - 1} = \frac{Q_1}{r-1} + \frac{Q_2}{\upsilon - 1} + \frac{Q_3}{(r-1)(\upsilon-1)},$$

де $$Q = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2;\ Q_1 = \upsilon\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}\right)^2;\tag{11.34}$$

$$Q_2 = r\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}\right)^2;\ Q_3 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{x}\right)^2$$

та Q_1 характеризує мінливість значень ознаки за рахунок впливу фактора A; Q_2 характеризує мінливість значень ознаки за рахунок впливу фактора B; Q_3 характеризує мінливість значень ознаки за рахунок впливу всіх інших факторів.

Доведення зазначеного в (11.34) потребує визначення того, що $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$. Дійсно, маємо

$$Q = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\Big[\left(\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}\right) + \left(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}\right) +$$

$$+ \left(x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{x}\right)\Big]^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}\right)^2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}\right)^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{x}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}\right)\left(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}\right) +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}\right)\left(x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{x}\right) + 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}\right)\times$$

$$\times\left(x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{x}\right) = \upsilon\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}\right)^2 + r\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}\right)^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{x}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}\right)\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}\right) +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}\right)\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{x}\right) + 2\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}\right)\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{r}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet j}+\bar{x}\right)=Q_1+Q_2+Q_3+2\left(\sum_{i=1}^{r}\bar{x}_{i\bullet}-\sum_{i=1}^{r}\bar{x}\right)\times$$

$$\times j\sum_{i=1}^{\upsilon}\left(\bar{x}_{\bullet j}-\bar{x}\right)+2\left(\sum_{i=1}^{r}\bar{x}_{i\bullet}-\sum_{i=1}^{r}\bar{x}\right)\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet j}+\bar{x}\right)+$$

$$+2\left(\sum_{i=1}^{\upsilon}\bar{x}_{\bullet j}-\sum_{i=1}^{\upsilon}\bar{x}\right)\sum_{i=1}^{r}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet j}+\bar{x}\right)=Q_1+Q_2+Q_3+$$

$$+2\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\upsilon}\sum_{j=1}^{\upsilon}x_{ij}-\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\upsilon r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}x_{ij}\right)\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(\bar{x}_{\bullet j}-\bar{x}\right)+2\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\upsilon}\sum_{j=1}^{\upsilon}x_{ij}-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\upsilon r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}x_{ij}\right)\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet j}+\bar{x}\right)+2\left(\sum_{j=1}^{\upsilon}\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}x_{ij}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{\upsilon}\frac{1}{\upsilon r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}x_{ij}\right)\sum_{i=1}^{r}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet j}+\bar{x}\right)=Q_1+Q_2+Q_3+$$

$$+2\left(\frac{1}{\upsilon}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}x_{ij}-\frac{r}{\upsilon r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}x_{ij}\right)\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(\bar{x}_{\bullet j}-\bar{x}\right)+2\left(\frac{1}{\upsilon}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}x_{ij}-\right.$$

$$\left.-\frac{r}{\upsilon r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}x_{ij}\right)\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet j}+\bar{x}\right)+2\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\sum_{i=1}^{r}x_{ij}-\right.$$

$$\left.-\frac{\upsilon}{\upsilon r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\sum_{i=1}^{r}x_{ij}\right)\sum_{i=1}^{r}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet j}+\bar{x}\right)=Q_1+Q_2+Q_3+2\cdot 0\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(\bar{x}_{\bullet j}-\bar{x}\right)+2\cdot 0\cdot\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet j}+\bar{x}\right)+2\cdot 0\cdots\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{r}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet j}+\bar{x}\right)=Q_1+Q_2+Q_3.$$

Для визначення впливу факторів A та B на мінливість значення ознаки розглядаються відповідно статистики

$$T_n^{(A)}(X)=\frac{s_1^2}{s_3^2}; \quad T_n^{(B)}(X)=\frac{s_2^2}{s_3^2}. \qquad (11.35)$$

Введемо до розгляду основні гіпотези: $H_0^{(A)}$ – гіпотеза, яка полягає в тому, що фактор A не має суттєвого впливу на мінливість значення ознаки; $H_0^{(B)}$ – гіпотеза, яка полягає в тому, що фактор B не має суттєвого впливу на мінливість значення ознаки. За критерієм Р. Фішера гіпотези $H_0^{(A)}$ та $H_0^{(B)}$ відхиляються, якщо відповідно

$$\begin{aligned} t^{(A)} &= T_n^{(A)}(X)=\frac{s_1^2}{s_3^2} \geq F_{1-\alpha;\,\nu_1=(r-1);\,\nu_2=(\upsilon-1)(r-1)}; \\ t^{(B)} &= T_n^{(B)}(X)=\frac{s_2^2}{s_3^2} \geq F_{1-\alpha;\,\nu_1=(\upsilon-1);\,\nu_2=(\upsilon-1)(r-1)}, \end{aligned} \qquad (11.36)$$

де $t^{(A)}, t^{(B)}$ – можливі значення відповідних статистик (11.35);

ν_1 – степінь свободи, який відповідає більшій статистичній оцінці дисперсії;

ν_2 – степінь свободи, який відповідає меншій статистичній оцінці дисперсії;

$F_{1-\alpha}$ – квантиль розподілу Р. Фішера при рівні значущості статистик (11.35) α та степенях свободи ν_1, ν_2.

Гіпотези $H_0^{(A)}$, $H_0^{(B)}$ вважаються такими, що не суперечать результатам спостережень, і вони приймаються, якщо

$$\begin{aligned} t^{(A)} &= T_n^{(A)}(X)=\frac{s_1^2}{s_3^2} < F_{1-\alpha;\,\nu_1=(r-1);\,\nu_2=(\upsilon-1)(r-1)}; \\ t^{(B)} &= T_n^{(B)}(X)=\frac{s_2^2}{s_3^2} < F_{1-\alpha;\,\nu_1=(\upsilon-1);\,\nu_2=(\upsilon-1)(r-1)}. \end{aligned} \qquad (11.37)$$

Нерівності (11.37) будуть виконуватися при заданому рівні значущості α, в тому випадку, коли розрахункові значення s_1^2 та s_2^2 будуть малі, а це справедливо в тому разі, якщо середнє результатів спостережень за рядками, тобто за серіями спостережень за фактором A, та середнє результатів спостережень за стовпцями, тобто за серіями спостережень за фактором B (див. табл.11.4), практично не відрізняються. Це й означає, що фактор A та фактор B відповідно не мають суттєвого впливу на мінливість значень ознаки.

Задача 11.3. Результати спостережень значень ознаки при розгляданні двох факторів ведені в табл. 11.5. Визначити наявність суттєвого впливу факторів, які розглядаються, на мінливість значень ознаки.

Таблиця 11.5

Значення результатів спостережень

Фактор B / Фактор A	B_1	B_2	B_3	$\overline{x}_{i\bullet}$
A_1	1	2	3	2
A_2	5	6	10	7
$\overline{x}_{\bullet j}$	3	4	6,5	$\overline{x}=4{,}5$

Розв'язання. З (11.34) маємо $Q_1=37{,}5;$ $Q_2=13;$ $Q_3=3;$ $Q=53{,}5$ та $s_1^2=37{,}5$; $s_2^2=6{,}5$; $s_3^2=1{,}5$, оскільки

$$Q_1=\upsilon\sum_{i=1}^{r}\left(\overline{x}_{i\bullet}-\overline{x}\right)^2=3\sum_{i=1}^{2}\left(\overline{x}_{i\bullet}-4{,}5\right)^2=3\left[(2-4{,}5)^2+(7-4{,}5)^2\right]=37{,}5;$$

$$Q_2=r\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(\overline{x}_{\bullet j}-\overline{x}\right)^2=2\sum_{i=1}^{3}\left(\overline{x}_{\bullet j}-4{,}5\right)^2=2\left[(3-4{,}5)^2+(4-4{,}5)^2+\right.$$

$$\left.+(6{,}5-4{,}5)^2\right]=13;$$

$$Q_3=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(x_{ij}-\overline{x}_{i\bullet}-\overline{x}_{\bullet j}+\overline{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\left(x_{ij}-\overline{x}_{i\bullet}-\overline{x}_{\bullet j}+\overline{x}\right)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\left[\left(x_{i1}-\overline{x}_{i\bullet}-3+4{,}5\right)^2+\left(x_{i2}-\overline{x}_{i\bullet}-4+4{,}5\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(x_{i3}-\overline{x}_{i\bullet}-6{,}5+4{,}5\right)^2\right]=(1-2+1{,}5)^2+(2-2+0{,}5)^2+(3-2-2)^2+$$

$$+(5-7+1{,}5)^2+(6-7+0{,}5)^2+(10-7-2)^2=3;$$

$$Q=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon}\left(x_{ij}-\overline{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\left(x_{ij}-\overline{x}\right)^2=(1-4{,}5)^2+(2-4{,}5)^2+$$

$$+(3-4,5)^2+(5-4,5)^2+(6-4,5)^2+(10-4,5)^2=53,5;$$

$$s_1^2=\frac{Q_1}{r-1}=\frac{37,5}{2-1}=37,5; \quad s_2^2=\frac{Q_2}{\upsilon-1}=\frac{13}{3-1}=6,5; \; s_3^2=\frac{Q_3}{(r-1)(\upsilon-1)}=\frac{3}{1\cdot 2}=1,5 .$$

Розрахункове значення статистики (11.35), тоді

$$t^{(A)}=T_n^{(A)}(X)=\frac{s_1^2}{s_3^2}=\frac{37,5}{1,5}=2,5; \quad t^{(B)}=T_n^{(B)}(X)=\frac{s_2^2}{s_3^2}=\frac{6,5}{1,5}=4,3.$$

При рівні значущості $\alpha=0{,}05$ квантилі розподілу Р. Фішера мають значення: $F_{1-\alpha;\nu_1=(r-1);\nu_2=(\upsilon-1)(r-1)}=F_{0,95;\nu_1=1;\nu_2=2}=18,51;$

$$F_{1-\alpha;\nu_1=(\upsilon-1);\nu_2=(\upsilon-1)(r-1)}=F_{0,95;\nu_1=2;\nu_2=2}=19,0.$$

За критерієм Р. Фішера маємо

$$t^{(A)}=25>F_{0,95;\nu_1=1;\nu_2=2}=18,51;$$

$$t^{(B)}=4,3<F_{0,95;\nu_1=2;\nu_2=2}=19,0,$$

тобто фактор A має суттєвий вплив на мінливість значень ознаки й основну гіпотезу за фактором A слід вважати несправедливою, а фактор B не має суттєвого впливу на мінливість значень ознаки та гіпотезу за фактором B слід признати справедливою.

11.8. Поняття про кореляційний та регресійний аналіз

При розробці моделей функціонування складних систем дослідник, спираючись на свої суб'єктивні судження, вводить до розгляду множину факторів, які необхідно враховувати. У подальшому кожному фактору ставиться у відповідність змінна. Окремі змінні можуть мати стохастичну природу; за необхідності, якщо це відповідає змісту функціонування складної системи, змінні стохастичної природи слід розглядати як системи двох чи більше випадкових величин. Закони розподілу таких систем випадкових величин досліднику невідомі. Він може лише розраховувати на знання результатів спостережень наслідків дослідів, які ставить природа чи сам дослідник. Тоді слід говорити про двовимірну $\{X,Y\}$ чи багатовимірну $\{X_i\}$, $i=\overline{1,n}$ випадкову вибірку із деякої генеральної сукупності. Так, наприклад, при розгляданні двовимірної випадкової вибірки з метою опису моделі функціонування системи слід визначити: чи є випадкові величини незалежними, чи вони є залежними, чи між ними існує тісний звичайний функціональний зв'язок. Відповіді на ці питання можуть бути отримані при проведенні *кореляційного та регресійного аналізу, під якими розуміють сукупність методів визначення наявності стохастичної залежності між випадковими величинами та її тісноти за статистичними оцінками показників їх числових характеристик.*

У п. 3.2 відзначалось, що залежність (незалежність) випадкових величин X та Y, які складають систему двох випадкових величин $\{X,Y\}$, визначається на рівні законів розподілу випадкових величин, а поняття корельованості (некорельованості) випадкових величин X та Y визначається на рівні числових характеристик системи випадкових величин $\{X,Y\}$. Там же в п. 3.2 відзначалося, що якщо випадкові величини X та Y, які складають систему $\{X,Y\}$, є незалежними, то для будь-яких законів розподілу системи слід стверджувати, що вони є й некорельованими, а якщо встановлено, що випадкові величини X та Y є некорельованими, то вони можуть бути як залежними, так і незалежними. Також відзначалось, що якщо встановлено, що система двох випадкових величин підпорядкована нормальному закону розподілу, то з некорельованості випадкових величин однозначно випливає їх незалежність. Виходячи з вищезазначеного, слід стверджувати, що оскільки випадкова вибірка $\{X,Y\}$ з генеральної сукупності, якою користується дослідник, не дає інформації щодо закону розподілу системи двох випадкових величин $\{X,Y\}$, то побудову кореляційного поля не слід вважати доцільною як перший крок при проведенні кореляційного аналізу. Так, побудоване кореляційне поле за даними випадкової вибірки може привести до припущення, що випадкові величини X та Y є некорельованими, а вони можуть бути залежними, а отже між ними існує стохастична залежність. Тому при проведенні кореляційного аналізу першим кроком слід вважати перевірку гіпотези H_0, яка полягає в тому, що випадкові величини X та Y, які складають систему $\{X,Y\}$, є незалежними за критерієм χ^2 згідно з (11.5). Якщо така гіпотеза H_0 буде визнана достовірною, то кореляційний аналіз, який пов'язаний з випадковою вибіркою $\{X,Y\}$, слід вважати завершеним та слід прийняти рішення, що між випадковими величинами X та Y стохастичної залежності не існує.

Якщо гіпотеза H_0 буде визнана неправдивою, то на цьому кроці кореляційного аналізу є такий висновок: випадкові величини X та Y, які складають систему $\{X,Y\}$, слід розглядати як такі, що мають стохастичну залежність або функціонально пов'язані між собою. Тоді виникає питання числової оцінки тісноти стохастичної залежності випадкових величин X та Y. Визначення такої оцінки також є завданням кореляційного аналізу.

У п. 3.3 відзначалося, що тіснота стохастичної залежності випадкових величин оцінюється за значенням кореляційного моменту R_{XY} або коефіцієнта кореляції r_{xy}. У п. 3.4 відзначався зміст $r_{xy} > 0$, та $r_{xy} < 0$, а саме: якщо $r_{xy} > 0$ ($r_{xy} < 0$), то це означає, що якщо можливі значення однієї випадкової величини, скажімо X, зростають, то друга випадкова величина Y зростає (спадає) за умовним математичним сподіванням $M_y[X]$ або $M_x[Y]$.

Умовне математичне сподівання $M_y[X]$ є функцією змінної y, яку називають регресією X на Y, а умовне математичне сподівання $M_x[Y]$ є функцією змінної x, яку називають регресією Y на X.

Визначення виду залежності $M_y[X] = \varphi(y)$ чи $M_x[Y] = f(x)$ становить зміст регресійного аналізу.

У п. 3.4 викладено, що якщо випадкові величини X та Y, які складають систему $\{X, Y\}$, є залежними та система $\{X, Y\}$ підпорядкована двовимірному нормальному закону розподілу, то $M_y[X]$ та $M_x[Y]$ визначаються з виразів (3.46) та (3.47). А як видно з (3.46) та (3.47), $\varphi(y)$ та $f(x)$ є рівняннями прямих вигляду

$$\varphi(y) = M_y[X] = r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y + \left(m_x - r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}m_y\right);$$

$$f(x) = M_x[Y] = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x + \left(m_y - r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x\right).$$

Тому слід стверджувати, що наступним кроком кореляційного аналізу, який проводиться з метою виявлення оцінки тісноти стохастичної залежності між випадковими величинами X та Y, виходячи з випадкової вибірки $\{X, Y\}$, є перевірка гіпотези H_0, яка полягає в тому, що випадкові величини X та Y підпорядковані нормальним законам розподілу. Перевірка гіпотези H_0, зміст якої викладений у п. 11.3, проводиться згідно з критерієм О. М. Колмогорова чи критерієм χ^2. У разі, якщо гіпотеза H_0 буде визнана справедливою для випадкових величин X та Y, то це означає, що система $\{X, Y\}$ підпорядкована нормальному закону розподілу. Таке твердження може бути прийнято при визначеному рівні значущості α. А отже, регресії

X на Y $\varphi(y)=M_y[X]$ чи Y на X $f(x)=M_x[Y]$ мають зазначений вище вигляд.

Нехай випадковій вибірці $\{X,Y\}$ відповідають результати спостережень (x_i, y_i), $i=\overline{1,n}$. Статистичні оцінки числових характеристик двох випадкових величин, які входять до виразів ліній регресії (3.46) та (3.47), можуть бути отримані з (10.50), а вирази ліній регресії X на Y та Y на X мають записи вигляду

$$\varphi(y)=\tilde{r}_{xy}^* \frac{\tilde{\sigma}_x^*}{\tilde{\sigma}_y^*} y+\left(\tilde{m}_x^* - \tilde{r}_{xy}^* \frac{\tilde{\sigma}_x^*}{\tilde{\sigma}_y^*} \tilde{m}_y^*\right); \tag{11.38}$$

$$f(x)=\tilde{r}_{xy}^* \frac{\tilde{\sigma}_y^*}{\tilde{\sigma}_x^*} x+\left(\tilde{m}_y^* - \tilde{r}_{xy}^* \frac{\tilde{\sigma}_y^*}{\tilde{\sigma}_x^*} \tilde{m}_x^*\right). \tag{11.39}$$

Визначенням ліній регресії з (11.38) та (11.39) у разі, коли система двох випадкових величин $\{X,Y\}$, яка відповідає випадковій вибірці $\{X,Y\}$, має залежні випадкові величини X,Y та підпорядкована нормальному закону розподілу, завершується кореляційний та регресійний аналіз для вибірки $\{X,Y\}$, оскільки (11.38) та (11.39) дають відповіді щодо наявності стохастичної залежності між випадковими величинами X і Y та щодо характеру зміни її тісноти.

Якщо для випадкової вибірки $\{X,Y\}$ гіпотеза H_0 щодо незалежності випадкових величин буде визнана несправедливою, тобто буде встановлено, що випадкові величини є залежними, а гіпотеза H_0 щодо відповідності закону розподілу системи $\{X,Y\}$ нормальному двовимірному закону розподілу буде визнана несправедливою, то подальший кореляційний аналіз буде проводитися з метою визначення оцінки тісноти стохастичної залежності та має відбуватися таким чином. Будується кореляційне поле, на основі аналізу якого дослідникам висувається одна з двох альтернатив: регресія Y на X (X на Y) близька до лінійної регресії; регресія Y на X (X на Y) більш відповідає нелінійній регресії. Якщо приймається перша альтернатива, *то тіснота стохастичного зв'язку оцінюється за статистичною оцінкою коефіцієнта кореляції*

$$\tilde{r}^*_{xy} = \frac{\tilde{R}^*_{XY}}{\tilde{\sigma}^*_x \tilde{\sigma}^*_y}, \tag{11.40}$$

де $$\tilde{R}^*_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{m}^*_x\right)\left(y_i - \tilde{m}^*_y\right);$$

$$\tilde{m}^*_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,;\ \tilde{m}^*_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\,;$$

$$\tilde{\sigma}^*_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{m}^*_x\right)^2}\,;\ \tilde{\sigma}^*_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \tilde{m}^*_y\right)^2}\,.$$

У цьому разі параметри лінії регресії Y на X $f(x) = M_X[Y]$ можуть бути визначені за методом найменших квадратів, зміст якого викладений у п. 10.12. Якщо приймається друга альтернатива, тобто що регресія Y на X (X на Y) більш відповідає нелінійній регресії, *то тіснота стохастичної залежності випадкових величин X та Y оцінюється за статистичною оцінкою кореляційного відношення*

$$\tilde{\eta}^*_{y/x} = 1 - \frac{\tilde{\sigma}^{*\,2}_{y/x}}{\tilde{\sigma}^{*2}_y}, \tag{11.41}$$

де $\tilde{\sigma}^{*\,2}_{y/x} = \tilde{D}^*_X[Y]$ – статистична оцінка умовної дисперсії випадкової величини Y, яка розраховується за виразом

$$\tilde{D}^*_x\,[Y] = \sum_{j=1}^{n}\left[y_i - \tilde{m}^*_{y/x}\right]^2 P^*_j\left({}^{Y=y_i}/_{X=x_i}\right);$$

$$\tilde{m}^*_{y/x} = \sum_{j=1}^{n} y_i\, P^*_j\left({}^{Y=y_i}/_{X=x_i}\right);$$

$\tilde{\sigma}^{*\,2}_y$ – статистична оцінка безумовної дисперсії випадкової величини Y. Із (11.41) видно, що $\tilde{\eta}^*_{y/x}$ змінюється в межах від 0 до 1, воно дорівнює 1 тоді й тільки тоді, коли $\tilde{\sigma}^{*\,2}_{y/x} = 0$, тобто коли існує звичайна функціональна залежність між випадковими величинами X та Y. Статистична оцінка кореляційного відношення дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли $\tilde{\sigma}^{*2}_{y/x} = \tilde{\sigma}^{*2}_{y}$, тобто коли випадкові величини є некорельованими, хоча, як відзначалось в п. 3.3, вони можуть бути залежними.

Нелінійна регресія Y на X як деяка нелінійна функція $f(x)$ може бути визначена, якщо вигляд нелінійної функції $f(x)$ дослідник приймає виходячи зі своїх суб'єктивних міркувань, а значення параметрів $f(x)$ отримується за методом найменших квадратів.

Розглянутий вище кореляційний аналіз прийнято називати *парною кореляцією*. Оскільки мета кореляційного аналізу полягає у виявленні наявності стохастичної залежності між випадковими величинами X і Y та в оцінці її тісноти, яка подається регресіями Y на X чи X на Y, то доцільно розглядати кореляційний та регресійний аналізи одночасно.

Запитання для самостійної перевірки знань

1. Виходячи з яких міркувань висувається статистична гіпотеза?
2. У чому полягає зміст гіпотези щодо закону розподілу випадкової величини?
3. У чому полягає зміст гіпотези щодо вигляду закону розподілу випадкової величини?
4. У чому полягає зміст гіпотези однорідності статистичних даних?
5. У чому полягає зміст гіпотези незалежності?
6. У чому полягає зміст гіпотези випадковості?
7. Який зміст має рівень значущості?
8. З яких міркувань визначається статистика критерію?
9. У чому полягають переваги та недоліки критерію О. М. Колмогорова?
10. У чому полягає критерій χ^2 перевірки гіпотези щодо закону розподілу?
11. У чому полягає критерій згоди Смирнова щодо перевірки гіпотези однорідності?
12. Які відхилення враховують статистики χ^2 перевірки гіпотез щодо закону розподілу випадкової величини, однорідності та незалежності?
13. У чому полягає зміст дисперсіонного аналізу?
14. У чому полягає зміст кореляційного та регресійного аналізу?

П І С Л Я М О В А

Підручник призначений для забезпечення відзначених у передмові навчальних дисциплін за відповідними напрямами підготовки фахівців на підтримку виконання індивідуальних планів ад'юнктів та спошукачів наукових ступенів. Виходячи з цього, зміст підручника не охоплює викладання багатьох питань теорій випадкових процесів та математичної статистики. Викладання питань теорії випадкових процесів за необхідності можна знайти, наприклад, у [1, 4, 6, 12], а питання теорії математичної статистики в [1, 7, 9, 11].

Теорія ймовірностей, подана в підручнику, в достатньому обсязі охоплює питання розгляду та практичного застосування об'єктивної теорії ймовірностей, яка відповідає об'єктивному погляду на масові та випадкові явища природи; для ознайомлення з елементами суб'єктивної теорії ймовірностей можна рекомендувати [7].

Д О Д А Т К И

Додаток 1

ВІДОМОСТІ З КОМБІНАТОРИКИ

Під комбінаторикою розуміють розділ математики, в якому розглядається формування множин різних комбінацій елементів і виявлення співвідношень розрахунку кількості таких комбінацій.

Розміщеннями називаються такі комбінації з m елементів по n, які містять по n елементів з m (n < m) та відрізняються одна від одної, або самими елементами, або порядком їх запису.

Кількість розміщень з *n* елементів по *m* визначається зі співвідношення вигляду

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)...[m-(n-1)]. \qquad (Д.1.1)$$

Задача Д.1.1. Скільки можна подати цілих чисел, кожне із яких визначалось би трьома різними значущими числами?

Розв'язання. Такі комбінації є розміщенням з $m = 9$ елементів по $n = 3$, тобто $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$

Перестановками називаються такі комбінації з m елементів по m, які складаються з m елементів та відрізняються одна від одної тільки порядком запису таких елементів.

Кількість перестановок з *m* елементів визначається з такого виразу:

$$A_m^n = P_m = m(m-1)(m-2)...\cdot 1 = 1 \cdot 2 ... (m-1)m = m! \qquad (Д.1.2)$$

Задача Д.1.2. Скільки дев'ятизначних чисел можна скласти цифрами від 1 до 9?

Розв'язання. Такі комбінації є перестановками, тому що кожне дев'ятизначне число відрізняється від іншого тільки порядком запису чисел від 1 до 9.

Тому

$$P_9 = 9! = 362\ 880.$$

Сполученнями називаються такі комбінації з m елементів по n, які відрізняються одна від одної тільки елементами.

Кількість сполучень з *m* елементів по *n* визначається таким виразом:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]}{n!} =$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)](m-n)!}{n!\,(m-n)!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}. \qquad (Д.1.3)$$

Нехай $n = m - n$, тоді

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!\left[m(m-n)\right]!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!},$$

тобто

$$C_m^n = C_m^{m-n}\,. \qquad (Д.1.4)$$

Із (Д.1.3) та (Д.1.2) випливає, що

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}\,. \qquad (Д.1.5)$$

Кількість розміщень n елементів по r чарунках розраховується виразом

$$N = r^n\,. \qquad (Д.1.6)$$

Кількість розміщень n елементів по r чарунках за умови, що в i-ту чарунку поміститься рівно n_i елементів, визначається з виразу

$$N = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} n_i}\,. \qquad (Д.1.7)$$

Кількість розміщень n елементів по r чарунках за умови, що всі чарунки будуть заповнені, визначається з виразу

$$N = C_{n-1}^{r-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!\left[(n-1)-(r-1)\right]!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}\,. \qquad (Д.1.8)$$

Додаток 2

ЗАКОНИ РОЗПОДІЛІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Дискретні розподіли

№ з/п	Найменування розподілу	Випадкова величина X	Ряд розподілу	Твірна функція $\varphi(z)$	Характеристична функція $q(t)$	Математичне сподівання m_x	Дисперсія D_x
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Рівномірний	Число, яке вибране навмання з перших n чисел натурального ряду	$P\{X=k\}=\frac{1}{n}$, $k=1,2,\ldots,n$	$\frac{z(1-z^n)}{n(1-z)}$		$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
2	Біноміальний	Кількість появ події при n випробуваннях з рівноможливими результатами	$P\{X=k\}=$ $=C_n^k P^k q^{n-k}$, $k=0,1,2,\ldots,n$	$(Pz+q)^n$	$(Pe^{it}+q)^n$	nP	nPq

Продовження дод. 2

1	2	3	4	5	6	7	8
3	Узагальнений біноміальний	Кількість появ події при n випробуваннях з різноможливими результатами	$P\{X=k\}=P_{n,k}$, $k=0,1,2,\dots,n$	$\prod_{j=1}^{n}\left(zP_i+q_i\right)= \sum_{k=1}^{n} z_k P_{k,n}$	$\prod_{k=1}^{n}\left(P_k e^{it}+q_k\right)$	$\sum_{j=1}^{n} P_j$	$\sum_{j=1}^{n} P_j q_j$
4	Пуассона	Кількість появ події	$P\{X=k\}=\frac{a^k}{k!}e$ $k=0,\ 1,\ 2,\ \dots,n$	$e^{a(z-1)}$	$e^{a(e^{it}-1)}$	a	a
5	Геометричний	Кількість невдалих дослідів до першої появи події	$P\{X=k\}= =q^k P$, $k=0,1,2,\dots$	$\frac{P}{1-qz}$	$\frac{P}{1-qe^{it}}$	$\frac{q}{P}$	$\frac{q}{P^2}$
			$P\{X=k\}=q^k P$, $k \le n-1$ та $P\{X=k\}=q^k$, $k=0,1,2,\dots n$	$\frac{P\left[1-(qz)^n\right]}{1-qz}+ +(qz)^n$		$\frac{q}{P}\left(1-q^n\right)$	$\frac{q}{P^2}-\frac{q^{n+1}}{P}\times \times\left(2n+1+\frac{q^{n+1}}{P}\right)$

<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">Геометричний зі зсувом на одиницю</td><td rowspan="2">Кількість дослідів до першої появи події включно</td><td>$P\{X=k\}=q^{k-1}P,$
$k=1,2,\ldots$</td><td>$\dfrac{Pz}{1-qz}$</td><td rowspan="2">$\dfrac{Pe^{it}}{1-qe^{it}}$</td><td>$\dfrac{1}{P}$</td><td rowspan="2">$\dfrac{q}{P^2}$</td></tr>
<tr><td>$P\{X=k\}=q^{k-1}P,$
$k\le n-1$ та
$P\{X=k\}=q^{k-1},$
$k=1,2,\ldots n$</td><td>$\dfrac{qz-qP^{n-1}z^n}{1-Pz}$</td><td>$\dfrac{1-P^n}{q}$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Паскаля</td><td>Кількість дослідів до появи події m разів</td><td>$P\{X=k\}=$
$=C_{k-1}^{m-1}P^m q^{k-m},$
$k=m,m+1,\ \ldots$</td><td>$\dfrac{(Pz)^m}{(1-qz)^m}$</td><td></td><td>$\dfrac{m}{P}$</td><td>$\dfrac{mq}{P^2}$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Гіпер-геометричний</td><td>Кількість елементів з ознакою B у вибірці обсягу n із сукупності обсягу N</td><td>$P\{X=k\}=$
$=\left(\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\right),$
$k=0,1,\ldots,\min(M,n)$</td><td>$\sum_{m=0}^{M} Y\cdot z^m\ ,$
де
$Y=\dfrac{C_M^k\, C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}=$</td><td></td><td>$\dfrac{Mn}{N}=nP,$
де $P=\dfrac{M}{N}$</td><td>$\dfrac{Mn(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}=$
$=nPq\dfrac{N-n}{N-1}$</td></tr>
</table>

Продовження дод. 2

1	2	3	4	5	6	7	8
9	Поліноміальний	Кількість появ однієї з взаємо-виключних випадкових подій $A_j,\ j=\overline{1,k}$ при повторних незалежних дослідах	$P\{X=k\}=$ $=\frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_n!}\cdot$ $\cdot P_1^{k_1}P_2^{k_2}\dots P_k^{k_n}$, *де* $0\le x_i<1, i=\overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n}P_i=1.$ $0,-\infty<x_i<0,$ $n<x_i<\infty.$		$g(t_1,t_2,\ \dots,t_n)=$ $=\left(P_1e^{it_1}+\dots+\right.$ $\left.+P_ke^{it_k}\right)^n$	$M[X_i]=nP_i$	$D[X_i]\ =\ nP_i q_i$
10	Логарифмічний		$P\{X=k\}=$ $=-\frac{1}{\ln P}\cdot\frac{(1-P)^k}{k},$ $k=1,2,\ \dots$	$\frac{\ln(1-qz)}{\ln P}$	$\frac{\ln(1-qe^{it})}{\ln P}$	$-\frac{q}{P\ln P}$	$-\frac{q}{P^2\ln P}\left[1+\frac{q}{\ln P}\right]$

Неперервні розподіли

№ з/ п	Найменування розподілу	Область можливих значень і випадкової величини	Щільність розподілу $f(x)$	Функція розподілу $F(x)$	Характеристична функція $q(t)$	Математичне сподівання m_x	Дисперсія D_x
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Рівномірний	a, b	$\frac{1}{b-a}$	$\begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \\ 1, & x > b \end{cases}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
2	Експоненціальний	$0, \infty$	$\lambda e^{-\lambda x}, \ \lambda>0$	$1-e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{1-\frac{it}{\lambda}}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
3	Нормальний	$-\infty, \infty$	$\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)$	$e^{itm_x-\frac{t^2\sigma_x^2}{2}}$	m_x	σ_x^2

Продовження дод. 2

1	2	3	4	5	6	7	8
4	Усіче-ний нор-мальний		$\begin{cases} \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2c^2}\right], \\ \qquad x_1 < x \le x_2; \\ 0, -\infty < x \le x_1, x_2 < x < \infty \end{cases}$ $c = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int\limits_0^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{a^2}{2}}du - \int\limits_0^{\frac{x_1-a}{\sigma}} e^{-\frac{a^2}{2}}du\right]\right\}^{-1}$			$a+B\sigma$ $B=c\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times$ $\times\left\{\exp\left[-\frac{(x_1-a)^2}{2c^2}\right]-\exp\left[-\frac{(x_2-a)^2}{2c^2}\right]\right\}$	$c^2\left\{1-B^2-A\times\right.$ $\times\left[\frac{x_2-a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\times\right.$ $\times e^{-\frac{(x_1-a)^2}{2a^2}} -$ $-\frac{x_1-a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\times$ $\left.\left.\times e^{-\frac{(x_2-a)^2}{2a^2}}\right]\right\}$

Продовження дод. 2

1	2	3	4	5	6	7	8
5	Логариф-мічно-нормаль-ний		$\begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(lnx-a)^2}{2c^2}\right], \\ 0<x<\infty; \\ 0, \ -\infty<x<0 \end{cases}$			$\exp\left(a+\frac{c^4}{2}\right)$	$e^{z+\sigma^4}\left(c^{\sigma^4}-1\right)$
6	Релея	$0,\infty$	$\frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$	$1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$	$1+iat\sqrt{\frac{\pi}{2}}W\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)$	$a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$a\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}$
7	Уза-гальн-ення Ре-лея (Рай-са)		$\begin{cases} \frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2+a^2}{2c^2}}J_0\left(\frac{ax}{c^2}\right), \\ 0<x<\infty; \\ 0, \quad -\infty<x\le 0 \end{cases}$			При $a>>\sigma$ $a\left(1+\frac{\sigma^2}{2a^2}\right)$	При $a>>\sigma$ $\sigma^2\left(1-\frac{\sigma^2}{4a^2}\right)$
8	Вейбула		$\begin{cases} m\beta x^{m-1}\exp\left(-\beta x^m\right), \\ 0<x<\infty; \\ 0, \ -\infty<x\le 0. \end{cases}$			$\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)\beta^{-\frac{1}{m}}$	$\beta^{-\frac{2}{m}}\left\{\frac{2}{m}\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)-\frac{1}{m^2}\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]\right\}$

Продовження дод. 2

1	2	3	4	5	6	7	8
9	Ерланга		$\begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1}}{(a-1)!} e^{-\beta x}, \\ \qquad 0 < x < \infty; \\ 0, \quad -\infty < x < 0 \end{cases}$			$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$
10	Показни-ково-степене-вий		$\begin{cases} \dfrac{x^m}{m!} e^{-x}, \quad 0 < x < \infty; \\ 0, \quad -\infty < x \le 0 \end{cases}$			$m+1$	$m+1$
11	Коші (аркта-нгенс)	$-\infty,\infty$	$\dfrac{a}{\pi\left(x^2+a^2\right)}$	$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}{\pi}$	$e^{-a\lvert t\rvert}$		
12	Аркси-нуса	$-a;a$	$\dfrac{a}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$	$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}$	$J_0(at)$	0	$\dfrac{a^2}{2}$
13	Максвелла	$0,\infty$	$\dfrac{2x^2}{a^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$	$\Phi\left(\dfrac{x}{a}\right)-\dfrac{2x}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$	$\left(1-a^2t^2\right)\cdot$ $\cdot W\left(\dfrac{at}{\sqrt{2}}\right)+$ $+iat\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$	$\dfrac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{\pi}}$	$\dfrac{3\pi-8}{\pi}a^2$

Закінчення дод. 2

1	2	3	4	5	6	7	8
14	Пірсона		$\begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(a+1)} x^{a} e^{-\frac{x}{\beta}}, \\ \quad 0 < x < \infty; \\ 0, \quad -\infty < x \le 0. \end{cases}$			$a+1$	$(a+1)\beta^{2}$
15	Гамма-розподіл		$\begin{cases} \dfrac{a^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-ax}, \\ \quad 0 < x < \infty; \\ 0, \quad -\infty < x \le 0. \end{cases}$			$\dfrac{\lambda}{a}$	$\dfrac{\lambda}{a^{2}}$
16	χ і-квадрат		$\begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \\ \quad 0 < x < \infty; \\ 0, \quad -\infty < x \le 0. \end{cases}$			k	$2k$

Додаток 3

ДЕЯКІ ПОСТІЙНІ ВЕЛИЧИНИ ТА ІНТЕГРАЛИ

π	3,142	$\frac{1}{\pi}$	0,318	$M'=\log_e 10$	2,303	$M=\log_{10} e$	0,434
2π	6,283	$\frac{1}{2\pi}$	0,159	$\log_e \pi$	1,145	$\log_{10} \pi$	0,497
$\frac{\pi}{2}$	1,571	$\frac{2}{\pi}$	0,637	$\sqrt{2}$	1,414	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,707
π^2	9,870	$\frac{1}{\pi^2}$	0,101	ρ	0,477	$\frac{1}{\rho}$	2,097
$\sqrt{\pi}$	1,772	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	0,564	ρ^2	0,228	$\frac{1}{\rho^2}$	4,396
$\sqrt{2\pi}$	2,507	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	0,399	$\rho\sqrt{2}$	0,675	$\frac{1}{\rho\sqrt{2}}$	1,483
$\frac{2}{\sqrt{\pi}}$	1,128	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0,886	$\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}$	0,269	$\frac{\sqrt{\pi}}{\rho}$	3,716
$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	1,253	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	0,798	$\frac{2\rho}{\sqrt{\pi}}$	0,538	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\rho}$	1,858
e	2,718	$\frac{1}{e}$	0,368	$\frac{\rho^2}{\pi}$	$0{,}724\cdot 10^{-1}$	$\frac{\pi}{\rho^2}$	13,811
e^2	7,389	$\frac{1}{e^2}$	0,135	$\rho\sqrt{\pi}$	0,845	$\frac{1}{\rho\sqrt{\pi}}$	1,183
$\sqrt{e}$	1,649	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	0,607	Радіан	57°, 230	1°	$0{,}175\cdot 10^{-1}$

$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-c^2x^2}dx = 0$
$\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$	$\int_{0}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1$	$\int_{0}^{\infty} xe^{-c^2x^2}dx = \frac{1}{2c^2}$
$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$	$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-c^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2c^3}$
$\int_{0}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$	$\int_{0}^{\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\int_{0}^{\infty} x^2e^{-c^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4c^3}$

Додаток 4

ФУНКЦІЯ ГАУССА $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,398 9	0,398 9	0,398 9	0,398 8	0,398 6	0,398 4	0,398 2	0,398 0	0,397 7	0,397 3
0,1	397 0	396 5	396 1	395 6	395 1	394 5	393 9	393 2	392 5	391 8
0,2	391 0	390 2	389 4	388 5	387 6	386 7	385 7	384 7	383 6	382 5
0,3	381 4	380 2	379 0	377 8	376 5	375 2	373 9	372 6	371 2	369 7
0,4	368 3	366 8	365 3	363 7	362 1	360 5	358 9	357 2	355 5	353 8
0,5	352 1	350 3	348 5	346 7	344 8	342 9	341 0	339 1	337 2	335 2
0,6	333 2	331 2	329 2	327 1	325 1	323 0	320 9	318 7	316 6	314 4
0,7	312 3	310 1	307 9	305 6	303 4	301 1	298 9	296 6	294 3	292 0
0,8	289 7	287 4	285 0	282 7	280 3	278 0	275 6	273 2	270 9	268 5
0,9	266 1	263 7	261 3	258 1	256 5	254 1	251 6	249 2	246 8	244 4
1,0	242 0	239 6	237 1	234 7	232 3	229 9	227 5	225 1	222 7	220 3
1,1	217 9	215 5	213 1	210 7	208 3	205 9	203 6	201 2	198 9	196 5
1,2	194 2	191 9	189 5	187 2	184 9	182 6	180 4	178 1	175 8	173 6
1,3	171 4	169 1	166 9	164 7	162 6	160 4	158 2	156 1	153 9	151 8
1,4	149 7	147 6	145 6	143 5	141 5	139 4	137 4	135 4	133 4	131 5
1,5	129 5	127 6	125 7	123 8	121 9	120 0	118 2	116 3	114 5	112 7
1,6	110 9	109 2	107 4	105 7	104 0	102 3	100 6	098 9	097 3	095 7
1,7	094 0	092 5	090 9	089 3	087 8	086 3	084 8	083 3	081 8	080 4
1,8	079 0	077 5	076 1	074 8	073 4	072 1	070 7	069 4	068 1	066 9
1,9	065 6	064 4	063 2	062 0	060 8	059 6	058 4	057 3	056 2	055 1
2,0	054 0	052 9	051 9	050 8	049 8	048 8	047 8	046 8	045 9	044 9
2,1	044 0	043 1	042 2	041 3	040 4	039 6	038 7	037 9	037 1	036 3
2,2	035 5	034 7	033 9	033 2	032 5	031 3	031 0	030 3	029 7	029 0
2,3	028 3	027 7	027 0	026 4	025 8	025 2	024 6	024 1	023 5	022 9
2,4	022 4	021 9	021 3	020 8	020 3	019 8	019 4	018 9	018 4	018 0
2,5	017 5	017 1	016 7	016 3	015 8	015 4	015 1	014 7	014 3	013 9
2,6	013 6	013 2	012 9	012 6	012 2	011 9	011 6	011 3	011 0	010 7
2,7	010 4	010 1	009 9	009 6	009 3	009 1	008 8	008 6	008 4	008 1
2,8	007 9	007 7	007 5	007 3	007 1	006 9	006 7	006 5	006 3	006 1
2,9	006 0	005 8	005 6	005 5	005 3	005 1	005 0	004 8	004 7	004 6
3,0	004 4	004 3	004 2	004 0	003 9	003 8	003 7	003 6	003 5	003 4
3,1	003 3	003 2	003 1	003 0	002 9	002 8	002 7	002 6	002 5	002 5
3,2	002 4	002 3	002 2	002 2	002 1	002 0	002 0	001 9	001 8	001 8
3,3	001 7	001 7	001 6	001 6	001 5	001 5	001 4	001 4	001 3	001 3
3,4	001 2	001 2	001 2	001 1	001 1	001 0	001 0	001 0	000 9	000 9
3,5	000 9	000 8	000 8	000 8	000 8	000 7	000 7	000 7	000 7	000 6
3,6	000 6	000 6	000 6	000 5	000 5	000 5	000 5	000 5	000 5	000 4
3,7	000 4	000 4	000 4	000 4	000 4	000 4	000 3	000 3	000 3	000 3
3,8	000 3	000 3	000 3	000 3	000 3	000 2	000 2	000 2	000 2	000 2
3,9	000 2	000 2	000 2	000 2	000 2	000 2	000 2	000 2	000 1	000 1

Додаток 5

ФУНКЦІЯ ЛАПЛАСА $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000 0	004 0	008 0	012 0	016 0	019 9	023 9	027 9	031 9	035 9
0,1	039 8	013 8	047 8	051 7	055 7	050 6	063 6	067 5	071 4	075 3
0,2	079 3	083 2	087 1	091 0	094 8	098 7	102 6	106 4	110 3	114 1
0,3	117 9	121 7	125 5	129 3	133 1	136 8	140 6	144 3	148 0	151 7
0,4	155 4	159 1	162 8	166 4	170 0	173 6	177 2	180 8	184 4	187 9
0,5	191 5	195 0	198 5	201 9	205 4	208 8	212 3	215 7	219 0	222 4
0,6	225 7	229 1	232 4	235 7	238 9	242 2	245 4	248 6	251 7	251 9
0,7	258 0	261 1	264 2	267 3	270 3	273 4	276 4	279 4	282 3	285 2
0,8	288 1	291 0	293 9	296 7	299 5	302 3	305 1	307 8	310 6	313 3
0,9	315 9	318 6	321 2	323 8	326 4	328 9	331 5	334 0	336 5	338 9
1,0	341 3	343 7	346 1	348 5	350 8	353 1	355 4	357 7	359 9	362 1
1,1	364 3	366 5	368 6	370 8	372 9	374 9	377 0	379 0	381 0	383 0
1,2	384 9	386 9	388 8	390 7	392 5	394 4	396 2	398 0	399 7	401 5
1,3	403 2	404 9	406 6	408 2	409 9	411 5	413 1	414 7	416 2	417 7
1,4	419 2	420 7	422 2	423 6	425 1	426 5	427 9	429 2	430 6	431 9
1,5	433 2	434 5	435 7	437 0	438 2	439 4	440 6	441 8	442 9	444 1
1,6	445 2	446 3	447 4	448 4	449 5	450 5	451 5	452 5	453 5	454 5
1,7	455 4	456 4	457 3	458 2	459 1	459 9	460 8	461 6	462 5	463 3
1,8	464 1	464 9	465 6	466 4	467 1	467 8	468 6	469 3	469 9	470 6
1,9	471 3	471 9	472 6	473 2	473 8	474 4	475 0	475 6	476 1	476 7
2,0	477 2	477 8	478 3	478 8	479 3	479 8	480 3	480 8	481 2	481 7
2,1	482 1	482 6	483 0	483 4	483 8	484 2	484 6	485 0	485 4	485 7
2,2	486 1	486 4	486 8	487 1	487 5	487 8	488 1	488 4	488 7	489 0
2,3	489 3	489 6	489 8	490 1	490 4	490 6	490 9	491 1	491 3	491 6
2,4	491 8	492 0	492 2	492 5	492 7	492 9	493 1	493 2	493 4	493 6
2,5	493 8	494 0	494 1	494 3	494 5	494 6	494 8	494 9	495 1	495 2
2,6	495 3	495 5	495 6	495 7	495 9	496 0	496 1	496 2	496 3	496 4
2,7	496 5	496 6	496 7	496 8	496 9	497 0	497 1	497 2	497 3	497 4
2,8	497 4	497 5	497 6	497 7	497 7	497 8	497 9	497 9	498 0	498 1
2,9	498 1	498 2	498 2	498 3	498 4	498 4	498 5	498 5	498 6	498 6
3,0	498 6	498 7	498 7	498 8	498 8	498 9	498 9	498 9	499 0	499 0
3,1	499 0	499 1	499 1	499 1	499 2	499 2	499 2	499 2	499 3	499 3
3,2	499 3	499 3	499 4	499 4	499 4	499 4	499 4	499 5	499 5	499 5
3,3	499 5	499 5	499 5	499 6	499 6	499 6	499 6	499 6	499 6	499 7
3,4	499 7	499 7	499 7	499 7	499 7	499 7	499 7	499 7	499 7	499 8
3,5	499 8	499 8	499 8	499 8	499 8	499 8	499 8	499 8	499 8	499 8
3,6	499 8	499 8	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9
3,7	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9
3,8	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9	499 9
3,9	500 0	500 0	500 0	500 0	500 0	500 0	500 0	500 0	500 0	500 0

Додаток 6

ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,000,0	0,60	0,548 8	1,20	0,301 2	1,80	0,165 3	2,40	0,090 7
02	0,980 2	62	537 9	22	295 2	82	162 0	42	088 9
04	960 8	64	527 3	24	289 4	84	158 8	44	087 2
06	941 8	66	516 9	26	283 7	86	155 7	46	085 4
08	923 1	68	506 6	28	278 0	88	152 6	48	083 7
0,10	904 8	0,70	496 6	1,30	272 5	1,90	149 6	2,50	082 1
12	886 9	72	486 8	32	267 1	92	146 6	52	080 5
14	869 4	74	477 1	34	261 8	94	143 7	54	078 9
16	852 1	76	467 7	36	256 7	96	140 9	56	077 3
18	835 3	78	458 4	38	251 6	98	138 1	58	075 8
0,20	818 7	0,80	449 3	1,40	246 6	2,00	135 3	2,60	074 3
22	802 5	82	440 4	42	241 7	02	132 7	62	072 8
24	786 6	84	431 7	44	236 9	04	130 0	64	071 4
26	771 1	86	423 2	46	232 2	06	127 5	66	070 0
28	755 8	88	414 8	48	227 6	08	124 9	68	068 6
0,30	740 8	0,90	406 6	1,50	223 1	2,10	122 5	2,70	067 2
32	726 1	92	398 5	52	218 7	12	120 0	72	065 6
34	711 8	94	390 6	54	214 4	14	117 7	74	064 6
36	697 7	96	382 9	56	210 1	16	115 3	76	063 3
38	683 9	98	375 3	58	206 0	18	113 0	78	062 0
0,40	670 3	1,00	367 9	1,60	201 9	2,20	110 8	2,80	060 8
42	657 0	02	360 6	62	197 9	22	108 6	82	059 6
44	644 0	04	353 5	64	194 0	24	106 5	84	058 4
46	631 3	06	346 5	66	190 1	26	104 4	86	057 3
48	618 8	08	339 6	68	186 4	28	102 3	88	056 1
0,50	606 5	1,10	332 9	1,70	182 7	2,30	100 3	2,90	055 0
52	594 5	12	326 3	72	179 1	32	098 3	92	053 9
54	582 7	14	319 8	74	175 5	34	096 3	94	052 9
56	571 2	16	313 5	76	172 0	36	094 4	96	051 8
58	559 9	18	307 3	78	168 6	38	092 6	98	050 8

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
3,00	0,049 8	3,60	0,027 3	4,20	0,015 0	4,80	0,008 2	7,0	0,000 9
02	048 8	62	026 8	22	014 7	82	008 1	1	000 8
04	047 8	64	026 3	24	014 4	84	007 9	2	000 7
06	046 9	66	025 7	26	014 1	86	007 8	3	000 7
08	046 0	68	025 2	28	013 8	88	007 6	4	000 6
3,10	045 1	3,70	024 7	4,30	013 6	4,90	007 4	5	000 6
12	044 2	72	024 2	32	013 3	92	007 3	6	000 5
14	043 3	74	023 8	34	013 0	94	007 2	7	000 5
16	042 4	76	023 3	36	012 8	96	007 0	8	000 4
18	041 6	78	022 8	38	012 5	98	006 9	9	000 4
3,20	040 8	3,80	022 4	4,40	012 3	5,00	006 7	8,0	000 3
22	040 0	82	021 9	42	012 0	5,1	006 1	1	000 3
24	039 2	84	021 5	44	011 8	2	005 5	2	000 3
26	038 4	86	021 1	46	011 6	3	005 0	3	000 2
28	037 6	88	020 7	48	011 3	4	004 5	4	000 2
3,30	036 9	3,90	020 2	4,50	011 1	5	004 1	5	000 2
32	036 2	92	019 8	52	010 9	6	003 7	6	000 2
34	035 4	94	019 5	54	010 7	7	003 4	7	000 2
36	034 7	96	019 1	56	010 5	8	003 0	8	000 2
38	034 1	98	018 7	58	010 3	9	002 7	9	000 1
3,40	033 4	4,00	018 3	4,60	010 1	6,0	002 5	9,0	000 1
42	032 7	02	018 0	62	009 9	1	002 2	1	000 1
44	032 1	04	017 6	64	009 7	2	002 0	2	000 1
46	031 4	06	017 2	66	009 5	3	001 8	3	000 1
48	030 8	08	016 9	68	009 3	4	001 7	4	000 1
3,50	030 2	4,10	016 6	4,70	009 1	5	001 5	5	000 1
52	029 6	12	016 2	72	008 9	6	001 4	6	000 1
54	029 0	14	015 9	74	008 7	7	001 2	7	000 1
56	028 4	16	015 6	76	008 6	8	001 1	8	000 1
58	027 9	18	015 3	78	008 4	9	001 0	9	000 1

Додаток 7

РОЗПОДІЛ ПУАССОНА $P(m,a)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}$

m \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,904 8	0,818 7	0,740 8	0,670 3	0,606 5
1	090 5	163 8	222 2	268 1	303 3
2	004 5	016 4	033 3	053 6	075 8
3	000 2	001 9	003 3	007 2	012 6
4		000 1	000 2	000 7	001 6
5				000 1	000 2

m \ a	0,6	0,7	0,8	0,9	
0	0,548 8	0,496 6	0,449 3	0,406 6	–
1	329 3	347 6	359 5	365 9	–
2	098 8	121 7	143 8	164 7	–
3	019 8	028 4	038 3	049 4	–
4	003 0	005 0	007 7	011 1	–
5	000 4	000 7	001 2	002 0	–
6		000 1	000 2	000 3	

m \ a	1	2	3	4	5
0	0,367 9	0,135 3	0,049 8	0,018 3	0,006 7
1	367 9	270 7	149 4	073 3	033 7
2	183 9	270 7	224 0	146 5	084 2
3	061 3	180 4	224 0	195 4	140 4
4	015 3	090 2	168 0	195 4	175 5
5	003 1	036 1	100 8	156 3	175 5
6	000 5	012 0	050 4	104 2	146 2
7	000 1	003 7	021 6	059 5	104 4
8		000 9	008 1	0,029 8	0,065 3
9		000 2	002 7	013 2	036 3
10			000 8	005 3	018 1
11			000 2	001 9	008 2
12			000 1	000 6	003 4
13				000 2	001 3
14				000 1	000 5
15					000 2

Закінчення дод. 7

m \ a	6	7	8	9	10
0	0,002 5	0,000 9	0,000 3	0,000 1	0,000 0
1	014 9	006 4	002 7	001 1	000 5
2	044 6	022 3	010 7	005 0	002 3
3	089 2	052 1	028 6	015 0	007 6
4	133 9	091 2	057 2	033 7	018 9
5	160 6	127 7	091 6	060 7	037 8
6	160 6	149 0	122 1	091 1	063 1
7	137 7	149 0	139 6	117 1	090 1
8	103 3	130 4	139 6	131 8	112 6
9	068 8	101 4	124 1	131 8	125 1
10	041 3	071 0	099 3	118 6	125 1
11	022 5	045 2	072 2	097 0	113 7
12	012 6	026 3	048 1	072 8	094 8
13	005 2	014 2	029 6	050 4	072 9
14	002 2	007 1	016 9	032 4	052 1
15	000 9	003 3	009 0	019 4	034 7
16	000 3	001 4	004 5	010 9	021 7
17	000 1	000 6	002 1	005 8	012 8
18	–	000 2	000 9	002 9	007 1
19	–	000 1	000 4	001 4	003 7
20	–	–	000 2	000 6	001 9
21	–	–	000 1	000 3	000 9

РОЗПОДІЛ СТЬЮДЕНТА $S(t, n)$
ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ $t_{p,n} = t_в$

$$\int_{-\infty}^{t_{p,n}} S(t,n)dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{(n-1)p}} \int_{-\infty}^{t_в} \left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dt$$

n \ P	0,9	0,95	0,98	0,99
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
12	1,782	2,179	2,681	3,055
14	1,761	2,145	2,625	2,977
16	1,746	2,120	2,584	2,921
18	1,734	2,101	2,552	2,878
20	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,717	2,074	2,508	2,819
24	1,711	2,064	2,492	2,797
26	1,706	2,056	2,479	2,779
28	1,701	2,048	2,467	2,763
30	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

Додаток 9

РОЗПОДІЛ $\chi^2(n)$

Квантилі розподілу $P = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \displaystyle\int_0^{\chi^2_{p,n}} \left(\chi^2\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi^2$

n \ P	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95	0,999	0,999
1	0,016	0,148	0,455	1,07	2,71	3,84	6,63	10,8
2	0,211	0,713	1,39	2,41	4,61	5,99	9,21	13,8
3	0,584	1,42	2,37	3,67	6,25	7,82	11,3	16,3
4	1,06	2,20	3,36	4,88	7,78	9,49	13,3	18,5
5	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	15,1	20,5
6	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	16,8	22,5
7	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	18,5	24,3
8	3,49	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	20,1	26,1
9	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	21,7	27,9
10	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	23,2	29,6
11	5,58	8,15	10,3	12,9	17,3	19,7	24,7	31,3
12	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	26,2	32,9
13	7,04	9,93	12,3	15,1	19,8	22,4	27,7	34,5
14	7,79	10,08	13,3	16,2	21,1	23,7	29,1	36,1
15	8,55	11,7	14,3	17,3	22,3	25,0	30,6	37,7
16	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	32,0	39,3
17	10,09	13,5	16,3	19,5	24,8	27,6	33,4	40,8
18	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	34,8	42,3
19	11,7	15,4	18,3	21,7	27,2	30,1	36,2	43,8
20	12,4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	37,6	45,3
21	13,2	17,2	20,3	23,9	29,6	32,7	38,9	46,8
22	14,0	18,1	21,3	24,9	30,8	33,9	40,3	48,3
23	14,8	19,0	22,3	26,0	32,0	35,2	41,6	49,7
24	15,7	19,9	23,3	27,1	33,2	36,4	43,0	51,2
25	16,5	20,9	24,3	28,2	34,3	37,7	44,3	52,6
26	17,3	21,8	25,3	29,2	35,6	38,9	45,6	54,1
27	18,1	22,7	26,3	30,3	36,7	40,1	47,0	55,5
28	18,9	23,6	27,3	31,4	37,9	41,3	48,3	56,9
29	19,8	24,6	28,3	32,5	39,1	42,6	49,6	58,3
30	20,6	25,5	29,3	33,5	40,3	43,8	50,9	59,7

КРИТЕРІЙ КОЛМОГОРОВА

Значення функції $\lambda_p : P(Д_n = \sup\limits_x |F_n(x) - F(x)| > \lambda_p)$

n \ P	0,10	0,05	0,01	n \ P	0,10	0,05	0,01
1	0,950	0,975	0,995	19	0,271	0,301	0,361
2	776	842	929	20	265	294	352
3	636	708	829	25	238	264	317
4	565	624	734	30	218	242	290
5	509	563	669	35	202	224	269
6	468	519	617	40	189	210	252
7	436	483	576	45	179	198	238
8	410	454	542	50	170	188	226
9	387	430	513	55	162	180	216
10	369	409	489	60	155	172	207
11	352	391	468	65	149	166	199
12	338	375	449	70	144	160	192
13	325	361	432	75	139	154	185
14	314	349	418	80	135	150	179
15	304	338	404	85	131	145	174
16	295	327	392	90	127	141	169
17	286	318	381	95	124	137	165
18	279	309	371	100	121	134	161

Додаток 11

НИЖНІ z_1 І ВЕРХНІ z_2 ГРАНИЦІ ДОВІРЧОГО ІНТЕРВАЛУ $z_1\sigma < \sigma < z_2\sigma$

α / $n-1$	Довірчі ймовірності									
	0,999		0,99		0,98		0,95		0,90	
	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1		z_1	z_2
2	0,287		0,356		0,338	79,750	0,446	31,623	0,510	16,013
3	0,363	44,721	0,434	14,142	0,466	10,000	0,521	6,287	0,578	4,406
4	0,411	14,003	0,483	8,468	0,514	5,110	0,566	3,727	0,620	3,008
5	0,447	7,906	0,519	4,394	0,549	3,671	0,599	2,875	0,649	2,429
6	0,476	5,625	0,546	3,484	0,576	3,004	0,624	2,453	0,672	2,090
7	0,499	4,477	0,569	2,979	0,597	2,623	0,644	2,202	0,690	1,916
8	0,519	3,799	0,588	2,660	0,616	2,435	0,661	2,035	0,705	1,797
9	0,536	3,356	0,604	2,440	0,631	2,204	0,675	1,916	0,718	1,711
10	0,551	3,043	0,618	2,274	0,644	2,120	0,688	1,826	0,729	1,645
15	0,606	2,279	0,669	1,853	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
20	0,643	1,967	0,702	1,666	0,725	1,587	0,760	1,460	0,794	1,370
25	0,670	1,795	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
30	0,691	1,684	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,826	1,280
40	0,722	1,548	0,772	1,397	0,790	1,349	0,819	1,284	0,845	1,232
50	0,745	1,466	0,791	1,341	0,809	1,301	0,835	1,246	0,859	1,202
60	0,763	1,411	0,806	1,303	0,823	1,268	0,848	1,220	0,870	1,180
70	0,777	1,370	0,818	1,274	0,834	1,243	0,857	1,200	0,879	1,164
80	0,789	1,339	0,828	1,252	0,843	1,224	0,865	1,184	0,885	1,152
90	0,799	1,314	0,837	1,235	0,851	1,209	0,872	1,172	0,891	1,142
100	0,807	1,294	0,844	1,220	0,858	1,196	0,878	1,162	0,896	1,134
200	0,856	1,193	0,885	1,147	0,895	1,131	0,911	1,109	0,921	1,102

Додаток 12

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ F ФІШЕРА – СНЕДЕКОРА

(ν_1 – кількість степенів свободи більшої дисперсії, ν_2 – кількість степенів свободи меншої дисперсії)

Рівень значущості $\alpha = 0{,}01$												
ν_1	ν_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,70
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45
Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$												
ν_2	ν_2											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	9,78	9,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,99	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,45	4,7	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Додаток 13

ВІДПОВІДІ НА ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

До глави 1

1. Теорія ймовірностей як наука виявляє закономірності масових випадкових явищ природи.

2. Так, зміна хоча б однієї умови з усієї їх сукупності, яка визначає зміст досліду, приводить до виникнення іншого досліду.

3. Якщо при проведенні досліду наслідок, який може статися, не може бути передбаченим, то такий наслідок є випадковим та він становить сутність випадкової події.

10. $AB+\overline{A}B=B\left(A+\overline{A}\right)=B\cdot U=B$;

$$\overline{\overline{A}+B}+AB=\overline{\overline{A}}\,\overline{B}+AB=A\overline{B}+AB=A\left(\overline{B}+B\right)=AU=A.$$

11. Імовірність випадкової події $P(A)$ слід розуміти як чисельну міру об'єктивної можливості події *A*, яка може статися в досліді при його повторенні необмежену кількість разів.

13. $P(A+B+C+D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-P(AB)-$

$-P(AC)-P(AD)-P(BC)-P(BD)-P(CD)+P(ABC)+$

$+P(ABD)+P(ACD)+P(BCD)-P(ABCD)$;

$$P(A+B+C+D)=1-P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)P\left(\overline{C}\right)P\left(\overline{D}\right).$$

14. Класичний спосіб визначення ймовірностей випадкової події застосовується тоді, коли в досліді спостерігається скінченна множина несумісних та рівноймовірних елементарних випадкових подій.

16. Розрахунки за формулою Байєса дозволяють визначити найбільшу ймовірність умовної випадкової події, яка полягає в тому, що сталася гіпотеза H_i (наприклад сталася відмова *i*-го блока технічного приладу військового призначення за умови, що подія "прилад відмовив" (подія *A*) відбулася). Удосконалення працездатності приладу можливе перш за все шляхом удосконалення *i*-го блока.

До глави 2

2. Можливі значення дискретної випадкової величини складають дискретну скінченну, або нескінченну, але розрахункову множину.

4. Закон розподілу дискретної випадкової величини може бути наведений рядом розподілу, багатогранником розподілу та функцією розподілу.

6. Випадкові події $A_i, i = \overline{1,n}$, які відповідають тому, що випадкова дискретна величина X прийме своє можливе значення x_i, тобто події $A_i = \{X = x_i\}, i = \overline{1,n}$, складають повну групу подій, оскільки вони попарно несумісні, тобто $A_i A_j = V;\ i, j = \overline{1,n}, i \neq j$, та в досліді одна з цих подій обов'язково станеться, тобто $\sum_{i=1}^{n} A_i = U$.

9. Так, початковий момент першого порядку є математичним сподіванням випадкової величини, тобто $\alpha_1 = M[X]$, а центральний момент другого порядку є дисперсією випадкової величини, тобто $\mu_2 = D[X]$.

11. Математичне сподівання випадкової величини за своїм фізичним змістом є таким числом, відносно якого групуються всі можливі значення випадкової величини. Дисперсія випадкової величини за своїм фізичним змістом характеризує розсіювання можливих значень випадкової величини відносно її математичного сподівання. Для будь-якого зразка озброєння чим менше дисперсія, тим він є більш доцільним з точки зору ураження цілей цим зразком озброєння.

12. Розв'язання будь-якої задачі, яка відповідає опису природного явища, яке є випадковим і масовим, можливе тільки за наявності закону розподілу відповідної випадкової величини, яка при цьому введена до розгляду.

13. Судження "розглядається схема Бернуллі" відповідає такому змісту: розглядається повторення досліду з незалежними та рівноймовірними наслідками.

14. Природне явище, яке є випадковим та масовим, відповідає спостереженню повторення досліду з незалежними та рівноймовірними наслідками, тому випадкова величина X – кількість появ сприятливого наслідку при повторенні досліду – підпорядкована біноміальному закону розподілу і для визначення ймовірності відповідної випадкової події слід використовувати формулу Бернуллі.

Якщо природне явище відповідає спостереженню повторення дослідів з незалежними та рівноймовірними наслідками, то випадкова величина X – кількість появи сприятливих наслідків при повторенні досліду –

підпорядкована узагальненому біноміальному закону розподілу і для визначення ймовірності відповідної випадкової події слід користуватися твірною функцією цього закону розподілу.

Якщо природне явище відповідає схемі Бернуллі та наслідки є малоймовірними, тобто ймовірність сприятливої події, яка відповідає наслідку в досліді, має порядок $P(A)=\frac{1}{n}$, де n – кількість повторень досліду, то випадкова величина зазначеного вище змісту підпорядкована закону розподілу Пуассона.

Якщо природне явище відповідає спостереженню проведення досліду, який передбачає виявлення першої появи сприятливого наслідку (сприятливої випадкової події), то випадкова величина X – кількість проведених випробувань до першої появи сприятливої випадкової події (наприклад, кількість випробувань елементів на працездатність до виявлення першого непрацездатного елемента, або кількість проведених пострілів до першого влучення) – підпорядкована геометричному закону розподілу.

Якщо природне явище відповідає спостереженню випадкової величини, можливі значення якої слід розглядати як числа, вибрані навмання з натурального ряду чисел, то така випадкова величина підпорядковується рівномірному дискретному закону розподілу.

Якщо природне явище відповідає спостереженню випадкової величини, можливі значення якої заповнюють інтервал (a,b) та щільність ймовірностей якої є сталою $c=\frac{1}{b-a}$ на цьому інтервалі, то така випадкова величина підпорядковується рівномірному неперервному закону розподілу.

Якщо природне явище відповідає виявленню часу працездатності будь-якого виробу, елементна база якого являє собою радіоелементи чи електроелементи, то випадкова величина T – час безвідмовної роботи виробу – підпорядкована експоненціальному закону розподілу.

Якщо природне явище відповідає виявленню похибок при будь-якому вимірюванні значень величин, то випадкова величина X – похибка вимірювання – підпорядкована нормальному закону розподілу.

15. Узагальненням експоненціального закону розподілу є закон розподілу Вейбулла.

16. При розгляді випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу, "правило $3c$ ", має такий зміст: подія, яка полягає в тому, що випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання на величину, що не перевищує $3c$, є практично достовірною, оскільки $P\left(\left|X-m_x\right|<3\sigma\right)=0,997$.

До глави 3

2. Функцією розподілу двовимірної випадкової величини є така функція двох змінних, що чисельно відповідає ймовірності події, полягає в тому, що випадкова точка $\{X, Y\}$ належить напівнескінченній двовимірній області D з вершиною в точці (x, y), тобто $F(x, y) = P(\{X, Y\} \in D)$.

3. Так, якщо D – будь-яка двовимірна область, то $P(\{X, Y\} \in D_1) = \iint\limits_{(D_1)} f(x, y)\, dxdy$, де $f(x, y)$ – закон розподілу двовимірної випадкової величини, який наведений щільністю ймовірностей.

4. Математичні сподівання $M[X]$ та $M[Y]$ двовимірної випадкової величини $\{X, Y\}$ є координатами точки на площині, відносно якої групуються всі її можливі значення $(x_1, y_1); (x_2, y_2); ...; (x_i, y_i); ...; (x_n, y_n)$.

Середні квадратичні відхилення σ_x, σ_y характеризують розсіювання можливих значень двовимірної випадкової величини в напрямку координатних осей.

5. Еліпс розсіювання – це еліпс, центр якого збігається з точкою (m_X, m_Y), а напівосі є кратними середнім квадратичним відхиленням, тобто $a = \lambda\sigma_x$; $b = \lambda\sigma_y$. Якщо $\lambda = 3$, то такий еліпс називають повним еліпсом розсіювання і тоді $P(\{X, Y\} \in D_{\text{е.р}}) = 0{,}997$.

6. Ні. Для системи двох випадкових величин $\{X, Y\}$, яка підпорядкована будь-якому закону розподілу, рівність нулю кореляційного моменту не є підставою для прийняття рішення щодо незалежності випадкових величин X та Y. Але є виняток. Якщо система двох випадкових величин підпорядкована нормальному закону розподілу, то з некорельованості випадкових величин $(R_{XY} = 0)$ випливає їх незалежність.

7. Поняття незалежності випадкових величин не відповідає поняттю їх корельованості. Залежність чи незалежність випадкових величин визначається на рівні закону розподілу системи випадкових величин будь-якої розмірності, а корельованість чи некорельованість випадкових величин визначається на рівні числових характеристик. Кореляційний момент двох випадкових величин R_{XY} – це одна з числових характеристик. Якщо випадкові величини X, Y є незалежними, то вони є й некорельованими, а якщо випадкові величини некорельовані, то вони можуть бути залежними.

8. Кореляційна матриця системи n випадкових величин на головній діагоналі містить дисперсії випадкових величин та семитрична відносно головної діагоналі, тому що $R_{X_u, X_\vartheta} = R_{X_\vartheta, X_u}$.

9. Упевненість в тому, що кореляційний момент двох нормованих випадкових величин $\widehat{X} = \dfrac{X - m_x}{\sigma_x}$, $\widehat{Y} = \dfrac{Y - m_y}{\sigma_y}$ відповідає коефіцієнту кореляції r_{xy} випадкових величин X та Y випливає з такого.

Маємо

$$M\left[\widehat{X}\right] = M\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right] = \frac{1}{\sigma_x} M\left[X - m_x\right] = \frac{1}{\sigma_x}\left[M\left[X - m_x\right]\right] = 0;$$

$$M\left[\widehat{Y}\right] = 0.$$

Тоді

$$R_{\widehat{X},\widehat{Y}} = M\left[\left(\widehat{X} - M\left[\widehat{X}\right]\right)\left(\widehat{Y} - M\left[\widehat{Y}\right]\right)\right] = M\left[\widehat{X},\widehat{Y}\right] = M\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x}, \frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} M\left[\left(X - m_x\right)\left(Y - m_y\right)\right] = \frac{R_{X,Y}}{\sigma_x \sigma_y} = r_{x,y},$$

тобто $R_{\widehat{X},\widehat{Y}} = r_{x,y}$.

До глави 4

1. При розгляді невипадкової функції випадкових величин за наявності закону розподілу випадкових величин може бути визначений закон розподілу невипадкової функції випадкових величин. Знання закону розподілу дозволяє розв'язати будь-яку задачу щодо визначення ймовірності випадкової події, зміст якої пов'язаний з фізикою масового випадкового явища природи, опис якого подається у вигляді невипадкової функції випадкових аргументів.

2. Ні. Визначення закону розподілу невипадкової функції випадкових аргументів можливе за наявності невипадкової функції випадкових

аргументів і закону розподілу системи випадкових аргументів (випадкових величин).

3. Якщо розглядається невипадкова функція випадкових аргументів, що описує природне явище, яке є масовим та випадковим, то за неявності тільки числових характеристик випадкових аргументів може бути розглянута тільки задача, яка пов'язана з визначенням числових характеристик невипадкової функції випадкових аргументів.

До глави 5

7. У відповідності до означення характеристичної функції випадкової величини її вираз, який пов'язує характеристичну функцію та щільність ймовірностей випадкової величини, є перетворенням Фур'є. А обернене перетворення Фур'є дозволяє визначити щільність ймовірностей випадкової величини за наявності характеристичної функції випадкової величини.

8. Виходячи з властивостей характеристичної функції, а саме якщо $Y = aX + b$, то $q_y(t) = e^{itb} q_x(at)$ та якщо випадкові величини X_k є незалежними та $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$, то $q_y(t) = \prod_{k=1}^{n} q_{x_k}(t)$, маємо

$$q_y(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{itb} \cdot e^{im_{x_k} a_k t - \frac{\sigma_{x_k}^2 (a_k t)^2}{2}} = e^{itb} \cdot e^{\sum_{k=1}^{n} \left(im_{x_k} a_k t - \frac{\sigma_{x_k}^2 (a_k t)^2}{2} \right)} =$$

$$= e^{itb + it \sum_{k=1}^{n} a_k m_{x_k} - \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_{x_k}^2} = e^{it \left(\sum_{k=1}^{n} a_k m_{x_k} + b \right) - \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_{x_k}^2} .$$

9. Якщо $Y = aX + b$, то $q_y(t) = e^{itb} q_x(at)$, що відповідає властивості характеристичної функції випадкової величини. Маємо $Y = \frac{X - m_x}{\sigma_x} = \frac{1}{\sigma_x} X - \frac{m_x}{\sigma_x}$ та $q_x(t) = e^{im_x t - \frac{\sigma_x^2 t^2}{2}}$, тоді

$$q_y(t) = e^{-it\frac{m_x}{\sigma_x}} \cdot e^{im_x\frac{t}{\sigma_x} - \frac{\sigma_x^2 \frac{t^2}{\sigma_x^2}}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

10. Відомо, що якщо випадкова величина X – кількість сприятливих наслідків при n незалежних та рівноймовірних дослідах, то вона підпорядковується біноміальному закону розподілу, характеристичною функцією якого є $q_x(t) = \left[1 + P\left(e^{it} - 1\right)\right]^n$, де $P = P(A)$ – імовірність сприятливого наслідку в досліді. Закон розподілу Пуассона має вигляд $P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, де λ – параметр закону, який є математичним сподіванням X, а характеристична функція закону Пуассона має вигляд $q_x(t) = e^{\lambda\left(e^{it} - 1\right)}$.

У відповідності до змісту завдання маємо

$$\lim_{n\to\infty} q_x(t) = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{\lambda}{n}\left(e^{it} - 1\right)\right]^n = e^{\lambda\left(e^{it} - 1\right)},$$

тобто при переході до границі при $n - \propto$ маємо характеристичну функцію закону розподілу Пуассона, а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n,m} = \lim\limits_{n\to\infty} C_n^m p^m q^{n-m} = P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$.

Це підтверджує відзначений в главі 2 висновок, що для випадку “рідких наслідків” закон Пуассона є граничним законом розподілу для біноміального закону розподілу.

До глави 6

1. Фізичний зміст закону великих чисел полягає в тому, що за достатньо великої кількості дослідів наслідок окремого досліду практично не впливає на середній результат.

2. Граничні теореми П. Л. Чебишева, А. А. Маркова, Я. Бенуллі, Пуассона, Муавра – Лапласа є формалізованими поданнями закону великих чисел.

3. Практична значущість нерівності П. Л. Чебишева в тому, що вона дозволяє оцінити ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина належить (або не належить) інтервалу, симетричному відносно математичного сподівання, без значення її закону розподілу, а лише за наявності її дисперсії. Обмеженість використання нерівності П. Л. Чебишева полягає в тому, що така оцінка зазначеної вище ймовірності є достатньо грубою.

4. Локальна та інтегральна теореми Муавра – Лапласа відповідають нескінченному повторенню дослідів з незалежними та рівноймовірними наслідками.

5. Практична значущість локальної теореми Муавра – Лапласа полягає в тому, що вона дозволяє "обійти" розрахункові труднощі при визначенні кількості сполучень C_n^m при великих *n* та *m*.

7. Завдання спрямоване на планування будь-яких випробувань на прикладі визначення кількості випробувань з метою виявлення події, яка полягає в появі орла при підкиданні монети.

За інтегральною теоремою Муавра – Лапласа маємо

$$P\left(\left|P^*(A)-P(A)\right|<\varepsilon\right)\cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

де $P^*(A)$ – частота події А;

$P(A) = P$ – імовірність події A, $q = 1 - P$;

$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ – функція Лапласа.

Тоді

$$P\left(\left|P^*(A)-P(A)\right|<0{,}01\right)\cong 2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{n}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)\geq 0{,}99;$$

$$\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{n}{0{,}25}}\right)\geq 0{,}495;\ 0{,}01\sqrt{\frac{n}{0{,}25}}\geq 2{,}58;$$

$$\frac{n}{0{,}25}\geq(258)^2;\ n\geq 0{,}25(258)^2=16\ 641.$$

8. За інтегральною теоремою Муавра – Лапласа маємо

$$P\left(\left|P^*(A)-P(A)\right|<0{,}01\right)\cong 2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{n}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)\geq 0{,}95\,;$$

$$\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{n}{0{,}25}}\right)\geq 0{,}475\,;\ 0{,}01\sqrt{\frac{n}{0{,}25}}\geq 1{,}96\,;\ n\geq 0{,}25\left(\frac{1{,}96}{0{,}01}\right)^2=9\ 604\,.$$

А також якщо $\varepsilon=0{,}001$, то $n\geq 0{,}25\left(\frac{1{,}96}{0{,}001}\right)^2=960\ 400$.

Якщо вимоги до ε зменшити на порядок, то кількість випробувань необхідно збільшити на 950 796.

9. Уведемо до розгляду випадкову величину X_i – суму виграшу гравця при i-му підкиданні монети.

Ряд розподілу випадкової величини X_i має вигляд, наведений в таблиці, де m – можливе значення X_i – відповідає кількості появ сприятливої події, а відповідні ймовірності визначаються за формулою Бернуллі.

Таблиця

$x_i^{(m)}$	0	–1	2	–3	4
$P\left(X_i=x_i^{(m)}\right)$	$P_{4,0}$	$P_{4,1}$	$P_{4,2}$	$P_{4,3}$	$P_{4,4}$

Якщо випадкова величина X – сума виграшу гравця в грі, яка передбачає n підкидань монети, то

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i\,.$$

Тоді $M[X]=M\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}M[X_i]=0$, бо

$$M[X_i]=\sum_{m=1}^{5}x_i^{(m)}P\left(X_i=x_i^{(m)}\right)=0\cdot C_4^0\,0{,}5^0\cdot 0{,}5^4+$$

$$+(-1)\cdot C_4^1\,0{,}5^1\cdot 0{,}5^3+2\cdot C_4^2\,0{,}5^2\cdot 0{,}5^2+(-3)\cdot C_4^3\,0{,}5^3\cdot 0{,}5^1+$$

$$+4\cdot C_4^4\,0{,}5^4\cdot 0{,}5^0=0.$$

Отже, для гравця така гра є невинною.

До глави 7

1. Випадкова функція $X(t)$ – така змінна, яка при кожному значенні $t=t_k$ є випадковою величиною $X(t_k)$. Якщо параметру t надати n значень $\{t_i\}$, $i=\overline{1,n}$, то випадковій функції $X(t)$ слід поставити у відповідність систему випадкових величин $\{X_i\}$, $i=\overline{1,n}$. Аргумент t є неперервним, а це означає, що $X(t)$ буде відповідати система нескінченної кількості випадкових величин; визначення закону розподілу такої системи нескінченної кількості випадкових величин не має сенсу.

Як закон розподілу розглядають одновимірний закон розподілу, який відповідає будь-якому значенню параметра t, тобто $F(x,t)=P[X(t)<x]$ – одновимірна функція розподілу $X(t)$, а також двовимірний закон розподілу, який відповідає будь-яким двом значенням параметра t, тобто $F(x_1,x_2;t_1,t_2)=P[X(t_1)<x_1;X(t_2)<x_2]$ – двовимірна функція розподілу випадкової функції $X(t)$.

2. Особливості опису одновимірних та двовимірних законів розподілу стаціонарних випадкових функцій випливають з означення стаціонарних $X(t)$, яке стверджує, що $X(t)$ є стаціонарною, якщо її ймовірнісні властивості не залежать від вибору початку зміни параметра t. Тому двовимірна щільність ймовірностей стаціонарної $X(t)$ є функцією від t_1-t_2, а саме $f(x_1,x_2;t_1,t_2)=f(x_1,x_2;t_1-t_2)$.

3. Однією з характеристик випадкової функції є кореляційна функція $R_X(t_1,t_2)$, яка характеризує стохастичну залежність $X(t)$ між її двома перерізами $X(t_1)$ та $X(t_2)$.

4. При розгляді лінійного оператора слід розглядати такі дії з характеристиками випадкової функції: визначення суми та добутку невипадкової та випадкової функцій, суми двох випадкових функцій $X(t)+Y(t)$, визначення похідної та інтеграла від $X(t)$.

5. Сутність канонічного розвинення випадкової функції $X(t)$ полягає в тому, що $X(t)$ подається як сума елементарних випадкових функцій, кожна з яких визначається як добуток випадкової величини та невипадкової функції.

6. Спектральний розгляд стаціонарної випадкової функції на скінченному проміжку часу передбачає подання $X(t)$ у вигляді гармонічних коливань різних частот, де амплітуда цих коливань – випадкові величини. При цьому визначається дисперсія випадкової функції як дискретний спектр дисперсій за частотами. При спектральному розгляді стаціонарної випадкової функції визначається спектральна щільність стаціонарної випадкової функції (спектральна щільність дисперсії).

7. Основний зміст спектральної щільності як характеристики стаціонарного випадкового процесу полягає в тому, що вона описує частотний склад стаціонарного випадкового процесу.

8. Якщо стаціонарна випадкова функція $X(t)$ має скінченні математичне сподівання та дисперсію, а також її кореляційна функція є нескінченно малою, то вона має властивість ергодичності, що означає, що множина її реалізацій може бути подана однією достатньо довгою реалізацією. На практиці це означає, що статистичні оцінки математичного сподівання та кореляційної функції можуть бути визначені лише за наявності однієї реалізації $X(t)$.

До глави 8

3. Так, можна. За означенням потік Ерланга *k*-го порядку є таким потоком, який формується з найпростішого потоку подій шляхом збереження кожної *k*-ї події. Якщо $k = 1$, то маємо, потік Ерланга першого порядку, а це і є найпростіший потік подій.

4. Заміна станів функціонування марковського випадкового процесу з дискретними станами та дискретним часом визначається заявкою (подією), яка надійшла на систему для її обслуговування з потоку заявок (подій) у дискретний момент часу, та заявкою (подією), яка надійшла на систему з потоку обслуговування.

5. Так. Розмічений граф станів функціонування марковського випадкового процесу з дискретними станами та неперервним часом для багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою дозволяє скласти систему диференціальних рівнянь Колмогорова для визначення ймовірностей функціонування системи в будь-якому функціональному стані.

6. Процес функціонування будь-якої технічної системи військового призначення визначається як сталий процес, якщо час функціонування такої

системи при виконанні нею завдань у відповідності до призначення не менший від часу постійного функціонування цієї технічної системи. Прикладом такої технічної системи може бути радіолокаційна станція. Випадковий процес, який описує її функціонування, є сталим.

7. Для визначення ефективності функціонування системи масового обслуговування з очікуванням користуються такими показниками: математичне сподівання кількості заявок у черзі; математичне сподівання кількості заявок, що перебувають на обслуговуванні; математичне сподівання кількості заявок, що пов'язані із системою; математичне сподівання часу очікування обслуговування для заявки, яка перебуває в черзі; математичне сподівання часу перебування заявки в системі.

До глави 9

1. Для будь-якого природного масового випадкового явища можна визначити перелік значень параметра, який розглядається. Такий перелік значень параметра можна розглядати як скінченну чи нескінченну множину. Прикладом може бути значення температури повітря в зазначений час та в зазначеному місці деякої території. Дослід ставить природа, а дослідник тільки спостерігає. Такий перелік значень параметра складає генеральну сукупність. Суть вибіркового методу полягає в тому, що з генеральної сукупності значень параметра навмання вибирається скінченна підмножина цих значень. Отриманий результат обробки цих спостережень, тобто статистичні оцінки закону розподілу відповідної випадкової величини чи статистичні оцінки числових характеристик цієї випадкової величини, переносять (розповсюджують) на всю генеральну сукупність значень параметра.

2. Загальна ознака об'єкта визначається у відповідності до його призначення, а основна ознака – у відповідності до конкретного параметра функціонування (чи опису) об'єкта; значення такого параметра спостерігаються при повторенні дослідів.

3. При плануванні експерименту (досліду) можуть розглядатись задачі: визначення кількості спостережень, за якої забезпечується заданий рівень ймовірності виконання випадкової події, яка полягає в тому, що прийнята до розгляду ймовірнісна характеристика випадкової величини буде належати заданому інтервалу; за прийнятою кількостю спостережень визначити інтервал, якому буде належати ймовірнісна характеристика випадкової величини при заданому рівні ймовірності такого результату спостереження; при заданій кількості спостережень та заданому інтервалі, якому буде належати ймовірнісна характеристика випадкової величини, визначити ймовірність такого результату спостережень.

4. Зміст опрацювання результатів спостережень при початковій їх обробці полягає в такому: у визначенні найменшого та найбільшого значень результатів спостережень; у визначенні розмаху спостережень; у визначенні статистичних моди та медіани випадкової величини, результати спостережень для якої складають множину її можливих значень.

5. При побудові гістограми частот, виходячи з того, що гістограма частот є статистичним аналогом щільності ймовірностей випадкової величини, дослідник отримує інформацію, яка дозволяє лише висунути гіпотезу відносно вигляду закону розподілу випадкової величини, для якої результати спостережень розглядаються як її можливі значення.

До глави 10

1. Вимоги до статистичних оцінок параметрів законів розподілу випадкових величин (змістовності, незміщеності та ефективності) складені на основі граничних теорем теорії ймовірностей та фізичного тлумачення змісту параметрів законів розподілу.

2. Суть методу максимуму правдоподібності статистичної оцінки параметрів законів розподілу базується на властивості щільності ймовірності системи n випадкових величин $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$, яка підпорядкована n-вимірному нормальному закону розподілу, а саме на властивості, яка полягає в тому, що функція щільності $f\left(x_1, x_2, .., x_i, .., x_n\right)$ досягає максимуму в n-вимірній точці з координатами $\{M\left[X_i\right]\}, i=\overline{1,n}$.

3. Імовірність події, яка полягає в тому, що статистична оцінка параметра закону розподілу відхиляється від дійсного значення цього параметра на величину, яка не перевищує $\varepsilon > 0$, визначається як довірча ймовірність, а її зміст випливає з такого геометричного тлумачення. Довірча ймовірність – це ймовірність події, яка полягає в тому, що випадковий інтервал $\left(a^* - \varepsilon; a^* + \varepsilon\right)$, де a^* – статистична оцінка параметра $a, \varepsilon > 0$, накриває невипадкову точку *a* на числовій прямій.

4. Рівень довірчої ймовірності приймається достатньо високим, а саме $P\left(\left|a^* - a\right| < \varepsilon\right) = \beta = 0,85 \div 0,99$. Прийняття такого високого значення β випливає з міркувань щодо високої довіри до отримання результату визначення довірчого інтервалу $\left(a^* - \varepsilon; a^* + \varepsilon\right)$.

5. Для n-вимірної системи випадкових величин при практичному їх застосуванні використовуються статистичні оцінки математичних сподівань та дисперсій випадкових величин $m^*_{x_i}, \left(\sigma^*_{x_i}\right)^2$, а також статистичні оцінки

кореляційних моментів усіх пар випадкових величин, які входять до системи, $R^{*}_{X_v, X_u}$ $; v, u = \overline{1, n}$; $v \neq u$.

6. Зміст методичного підходу до статистичного оцінювання параметрів законів розподілу полягає в тому, що статистична оцінка параметрів визначається за результатами випадкової вибірки значення параметра з їх генеральної сукупності.

7. Метод найменших квадратів згладжування результатів вимірювань ґрунтується на принципі, який полягає в тому, що функціональна залежність вимірювальних параметрів $y = f(x)$ визначається дослідником з його суб'єктивних міркувань щодо фізичного змісту взаємної залежності параметрів, які вимірюються.

8. Так. Якщо графік статистичної оцінки кореляційної функції випадкового процесу збігається з графіком кореляційної функції випадкового процесу, який досліджується, то є підстави стверджувати, що цей випадковий процес є стаціонарним.

До глави 11

1. Статистична гіпотеза висувається дослідником виходячи з його особистих міркувань щодо закону розподілу випадкової величини, який визначається, або на підставі результатів обробки попередніх спостережень масового випадкового явища природи при його переконаності в тому, що фізичний зміст явищ збігається.

2. Гіпотеза щодо закону розподілу визначає, що статистична функція розподілу збігається з функцією розподілу, яка передбачається.

3. Гіпотеза щодо виду закону розподілу визначає, що статистична функція розподілу відповідає функції розподілу класу (множині) функцій розподілу випадкової величини. Якщо невідомі параметри функції розподілу, яка передбачається, то мова йде тільки про вид закону розподілу.

4. Статистичні дані є однорідними, якщо статистичні функції розподілу, отримані при обробці даних для окремих серій випробувань, погоджуються з однією й тією ж теоретичною функцією розподілу, яка висувається.

5. Гіпотеза незалежності полягає в тому, що добуток статистичних функцій розподілу двох випадкових величин, які складають двовимірну систему випадкових величин, погоджується з теоретичною функцією розподілу двовимірної системи випадкових величин, яка висувається.

6. Гіпотеза випадковості передбачає перевірку того, що компоненти n-вимірної випадкової величини є незалежними та мають один і той же закон розподілу.

7. Рівень значущості, який приймається при перевірці статистичних гіпотез та який є квантилем випадкової статистики критерію, має зміст імовірності похибки, яку допускає дослідник у випадку, коли він відхиляє вірну гіпотезу (похибка першого роду).

8. Статистика критерію визначається з міркувань врахування відхилень статистичних даних від даних, які відповідають висунутій гіпотезі.

9. Критерій О. М. Колмогорова застосовується для визначення погодженості статистичної функції розподілу з теоретичною функцією розподілу, яка розглядається у відповідності до гіпотези, що висувається. Переваги критерію О. М. Колмогорова полягають в такому: він може використовуватись за достатньо малої кількості спостережень $(n \geq 20)$; закон розподілу статистики критерію О. М. Колмогорова не залежить від виду теоретичної функції розподілу, яка розглядається у відповідності до гіпотези. Недоліком критерію О. М. Колмогорова є те, що він може бути застосованим для неперервних теоретичних функцій розподілу, які висуваються за гіпотезою, і те, що він потребує знання функції розподілу прийнятого закону розподілу, а не функції розподілу виду закону розподілу, що означає необхідність знання параметрів закону розподілу, який висувається для розгляду узгодженості.

10. Критерій згоди χ^2 може бути прийнятий при перевірці узгодженості статистичної функції розподілу з теоретичними функціями розподілу як дискретних, так і неперервних випадкових величин.

11. Зміст критерію згоди Смирнова щодо перевірки гіпотези однорідності полягає в тому, що він дозволяє перевірити гіпотезу однорідності генеральної сукупності вимірювань за двома випадковими вибірками у разі, коли приймається посилка щодо неперервних теоретичних законів розподілу для кожної вибірки, які збігаються та відповідають незалежним випадковим величинам.

12. Статистика критерію χ^2 перевірки гіпотези щодо закону розподілу випадкової величини враховує відхилення вибіркових даних від відповідних середніх гіпотетичних. Статистики критерію χ^2 перевірки гіпотези однорідності та незалежності враховують відхилення двох вибіркових даних від відповідних їм двох середніх гіпотетичних.

13. Зміст дисперсійного аналізу полягає в тому, що він дозволяє виявити вплив будь-якого окремого фактора на мінливість будь-якої ознаки, значення яких можуть бути отримані в досліді.

14. Зміст кореляційного та регресійного аналізу полягає у визначенні наявності стохастичного зв’язку та в оцінці тісноти цього зв’язку між випадковими величинами, а також у визначенні наявності функціонального

зв'язку між випадковими величинами, які складають двовимірну систему випадкових величин.

Визначення змісту функціональних залежностей, яким відповідають умовні математичні сподівання випадкових величин X та Y, також включаються до змісту регресивного аналізу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1954. – 411 с.
2. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2000. – 354 с.
3. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 2000. – 364 с.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т. – М.: Мир, 1984.
5. Боровков А. А. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1972. – 287 с.
6. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей и случайных процессов. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1992. – 395 с.
7. Гроот М. Д. Оптимальные статистические решения. – М.: Мир, 1974. – 491 с.
8. Колемаев В. А., Староверов О. В., Турундаевский В. Б. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1991. – 400 с.
9. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Математическая статистика.– М.: Высшая школа, 1984. – 248 с.
10. Ганин М. П., Свешников А. А. Теория вероятностей и ее применения для решения задач ВМФ. – Л.: Морская академия, 1968. – 658 с.
11. Боровков А. А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. – М.: Наука, 1984. – 472 с.
12. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 367 с.
13. Бильчук В. М., Петров В. А. Прикладная математика: учебн. пособие. – Харьков: ХВВКИУ РВ, 1986. – 336 с.
14. Більчук В. М. Спеціальні розділи теорії ймовірностей та математичної статистики: посібник. – Х.: ХНУР, 2008. – 226 с.
15. Бугір М. К. Теорія ймовірностей та математична статистика: посібник. – Тернопіль: Підручники, посібники, 1984. – 527 с.
16. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей. – К.: Вища школа, 2000. – 193 с.
17. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1967. – 495 с.
18. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Высшая школа, 1988 – 439 с.
19. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1999. – 479 с.

20. Справочник по теории вероятностей и математической статистики/ Под ред. В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбина. – М.: Наука , 1985. – 640 с.

21. Бильчук В. М., Евстифеев Д. И., Лямец В. И., Матвеев И. А. Теория вероятностей, математическая статистика и надежность: Сборник задач. – Харьков: ХВВКУ, 1978. – 198 с.

22. Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові процеси: збірник задач/ за ред. В. М.Більчука. – Х.: ХУПС, 2007. –249 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК