Осуществлен сбор наиболее интересного материала для преподавания дисциплины «Математическое моделирование и прогнозирование международных отношений», где описаны приемы социальных, экономических и политических систем, анализ математических моделей и алгоритмов их решения; применение математических моделей социального, экономического, политического развития государств и их взаимодействия на мировой арене для моделирования и прогнозирование международных отношений; использование персональных компьютеров для математического моделирования и прогнозирования. Собран материал для самостоятельной работы студентов, лекции, лабораторные работы и задания для контроля знаний. Сборник предназначен для преподавателей и студентов уровня магистратуры.

Родилась 05.08.1969 г. в пгт. Клевань Ровенского района в семье преподавателей математики. 1986-1991 гг. студентка НУ «Львовская политехника» специальности прикладная математика. 15 лет научно-преподавательского стажа. Живу в г. Львов. Имею двух дочерей и зятя.

978-3-659-79691-3

Моделирование международных отношений

Мельник

Татьяна Мельник

Моделирование международных отношений. Часть 2

Сборник материалов методического обеспечения дисциплины. Лекции. Задания для контроля знаний. Лабораторные работы

LAP LAMBERT Academic Publishing

Татьяна Мельник

Моделирование международных отношений. Часть 2

Татьяна Мельник

Моделирование международных отношений. Часть 2

Сборник материалов методического обеспечения дисциплины. Лекции. Задания для контроля знаний. Лабораторные работы

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.
Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу http://dnb.d-nb.de.
Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:
LAP LAMBERT Academic Publishing
ist ein Imprint der / является торговой маркой
OmniScriptum GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия
Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Напечатано: см. последнюю страницу
ISBN: 978-3-659-79691-3

СОДЕРЖАНИЕ

Лекция. Формальные модели социальных процессов. Клеточное моделирование.

План

1. Модели процессов самоорганизации.
2. Реализация моделей клеточных автоматов на ЭВМ.
3. Приложения клеточных моделей.

1. Модели процессов самоорганизации.

В данной главе читатель познакомится с тем, как строить реалистические модели социальных процессов и, главное, как их можно без особых усилий реализовать с помощью обычных электронных таблиц (в данном случае Excel). После этого процесс исследования модели сводится к изучению последовательности картинок, получаемых нажатием одной кнопки.

Клеточными автоматами принято называть сети из элементов, меняющих свое состояние в дискретные моменты времени [3]. Чаще всего рассматриваются двумерные клеточные автоматы, элементом которых является один квадрат (например, на листе бумаги в клетку). Каждый автомат или клетка может находиться в конечном числе состояний, в простейшем случае в двух — черное или белое, жизнь или смерть, 1 или О. Время в модели задается дискретным множеством тактов (t = 1, 2, 3,...). Система клеточных автоматов, как правило, функционирует в некотором замкнутом пространстве (например, в квадратной решетке 1Ох 10 или 10Ох 100). Состояние автомата в момент t + 1 определяется его состоянием и состоянием его ближайших соседей в предыдущий момент t.

В моделях клеточных автоматов среда обычно предполагается однородной, т.е. правило изменения состояний для всех клеток одинаковы. Если это правило не зависит от случайных факторов, то автомат называется детерминированным, если зависит — то стохастическим.

Рассматриваются также клеточные автоматы с памятью. В этом случае состояние элемента в момент t + 1 зависит от состояния системы в моменты t и t - 1 (таким образом учитывается эффект запаздывания).

Одним из наиболее важных понятий теории клеточных автоматов является понятие окрестности, т.е. множества клеток, которые считаются "соседними" с данной клеткой. На рисунке приведены два наиболее распространенных типа окрестности автомата, расположенного в заштрихованной клетке.

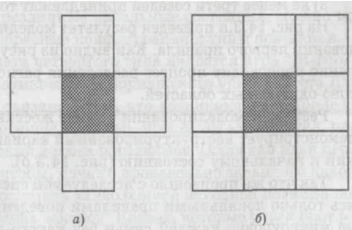


Рис.14.1. Окрестности фон Неймана (а) и Мура (б)

Для того чтобы дальнейшее изложение не показалось читателю чересчур абстрактным, приведем пример моделирования процесса расовой сегрегации [9].

Предположим, что исследуемый регион может быть представлен решеткой 16x13, где каждая клетка соответствует одному дому. Предположим также, что каждый дом может быть занят белой (о) или черной (х) семьей, либо остаться пустым. В данной модели у каждого клеточного автомата есть три возможных состояния, а общее число состояний модели составит примерно 10".

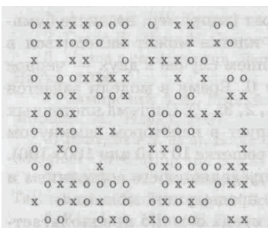


Рис. 14.2. Начальная структура расселения

В рассматриваемом примере предполагается, что каждая расовая группа предпочитает иметь определенный процент соседей с тем же цветом кожи. Если это условие не выполняется, то семья перебирается в ближайший дом, где процентный состав соседей является приемлемым. Считается, что разумный выбор можно сделать, если в данном поселении 25-30% домов не заселены. Начальная структура расселения приведена на рис. 14.2. В [9] рассматривались два правила поведения жителей, оценивающих процент приемлемых соседей (использовалась окрестность Мура):

1) не менее половины соседних домов должны быть заселены представителями той же расы;

2) не менее трети соседей принадлежат той же расе.

На рисунке приведен результат моделирования при использовании первого правила. Как видно из рисунка, в модели постепенно происходит процесс разделения региона на несколько ра-сово-однородных областей.

Результат моделирования с менее жестким вторым правилом демонстрирует неструктурированный вариант расселения, близкий к начальному состоянию.

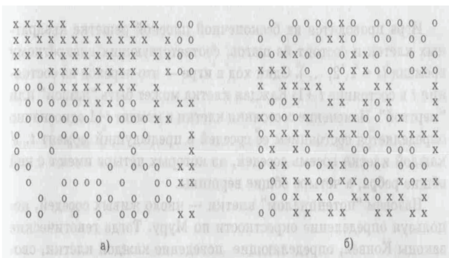


Рис. 14.3. Эволюция системы расселения

Так что же произошло с исследуемой системой? Руководствуясь только локальными правилами поведения (1), задаваемыми на микроуровне каждой семьи без какого-либо централизованного руководства и сговора, процесс переселения стихийно самоорганизовался, и в результате спонтанно родилась достаточно четкая структура расселения. Приведенный чрезвычайно упрощенный пример показывает, что клеточное моделирование дает в руки исследователя мощный инструмент для изучения процессов социальной самоорганизации. Анализ поведения клеточных автоматов показал, что их эволюция во многом аналогична динамике сложных нелинейных систем, рассмотренных ранее. Выделяют четыре основных класса автоматов [3]:

1. Независимо от начального состояния за конечное число шагов происходит переход к однородному состоянию — все автоматы оказываются в состоянии покоя.

2. В процессе эволюции автомат приходит к локализованным стационарным или периодическим решениям.

3. Картины активности системы автоматов являются апериодическими — никогда не повторяются. Можно сказать, что автоматы демонстрируют хаотическое поведение.

4. Динамика автоматов существенно зависит от начального состояния. Подбирая различные начальные состояния, можно получать самые разнообразные конфигурации и типы поведения.

Примером автомата четвертого типа является игра "Жизнь", изобретенная математиком из Кембриджского университета Дж. Конвеем. Название связано с тем, что возникающие в процессе игры ситуации аналогичны реальным процессам зарождения, развития и гибели колоний живых организмов. Основная идея игры заключается в том, чтобы, начав с произвольно заданного исходного положения, проследить за эволюцией исходной позиции под действием "генетических законов" Конвея, которые управляют рождением, гибелью и выживанием "организмов".

Игра проводится на бесконечной плоской решетке квадратных клеток и состоит из шагов, соответствующих дискретному времени (t = 1, 2, ...). Один ход в игре — это переход из состояния t в состояние t +1. Каждая клетка может быть "живой" или "мертвой". Изменение состояния клетки в момент t+l однозначно определяется состоянием ее соседей в предыдущий момент t. У каждой клетки восемь соседей, из которых четыре имеют с ней общие ребра, а четыре общие вершины.

Назовем "потенциалом" клетки — число живых соседей, используя определение окрестности по Муру. Тогда генетические законы Конвея, определяющие поведение каждой клетки, сводятся к следующим правилам:

– если потенциал равен 2, то состояние клетки не меняется;
– если потенциал равен 3, то клетка в следующий период будет живой независимо от текущего состояния;
– при остальных значениях потенциала (О, 1, 4, 5, 6, 7) клетка в следующий период будет мертва.

Таким образом, если у клетки более трех живых соседей, то она погибает от перенаселенности. Клетка погибает от одиночества, если жива только одна соседняя клетка или все соседние клетки мертвы. Выживает и переходит в следующее поколение клетка, имеющая двух или трех живых соседей.

Имея под рукой лист бумаги в клетку, читатель может убедиться, что любая начальная популяция претерпевает необычные и неожиданные изменения. Некоторые первоначальные колонии организмов постепенно вымирают, однако большинство исходных конфигураций либо переходит в стационарные структуры, не зависящие от времени, либо наступает колебательный режим.

Читатель может также легко убедиться, что конфигурации, изображенные на рисунке а, погибают на втором ходу, тогда как три конфигурации на рисунке, б являются стационарными (эти конфигурации имеют названия: левая —"блок", центральная —"бадья", правая — "змея").

Рис. 14.4. Конфигурация игры "Жизнь"

После первых публикаций в популярных изданиях М. Гарднера, посвященных игре "Жизнь", произошел взрыв энтузиазма среди пользователей ЭВМ. Затраты машинного времени на исследование различных вариантов игры составили миллионы долларов. Были выявлены многочисленные замечательные конфигурации, одна из которых, называемая "планер" (глайдер), приведена на рисунке. Через каждые четыре шага планер повторяет себя, смещаясь на одну клетку вниз и вправо, т.е. движется по диагонали. Найдены конфигурации, которые могут двигаться по прямой. В 1970 г. обнаружена конфигурация "катапульта", которая через каждые 30 шагов повторяет себя и "выстреливает" планер.

В процессе исследований выяснилось, что с помощью игры "Жизнь" можно не только изучать процессы эволюции, но и моделировать основные компоненты современных ЭВМ, исследовать прообразы параллельно работающих ЭВМ, решать задачи распознавания образов.

Данная ветвь синергетики относится к теории коллективного поведения автоматов [3], но все-таки наибольший интерес исследователей привлекают проблемы самоорганизации в биологических системах, формализованных на языке динамических систем.

Игра "Жизнь" была популярна в 70—80-е годы, а в 90-е годы появилось новое популярное развлечение — игра "Ант" (термит), изобретенная американским математиком К.Лангтоном [6]. Клеточный автомат в этой игре может иметь два состояния — черное и белое. Игра происходит на поле из квадратных клеток, которые в начальном состоянии все имеют белый цвет.

Ант стартует с центральной клетки в некотором выбранном направлении, например на Восток, переходит на соседний квадрат и смотрит: если этот квадрат черный, то

Ант красит его в белый цвет, а сам поворачивает налево на 90°. Если квадрат окажется белым, то Ант делает его черным и поворачивает направо на 90° и т.д.

Оказывается этот примитивный автомат демонстрирует очень сложное поведение. Пройдя приблизительно 500 шагов, он возвращается в центральную клетку, оставляя после себя ряд симметричных орнаментов. Но после примерно 10 000 шагов картина становится весьма хаотичной. Ант неожиданно начинает строить магистраль — повторяя цикл из 104 шагов, он формирует диагональ, идущую на юго-запад. Интересно, что поведение автомата остается таким же, если в начальном положении имеется много черных квадратов.

2. Реализация моделей клеточных автоматов на ЭВМ

Чтобы убедить читателя в том, что, используя возможности электронных таблиц Excel, любой начинающий пользователь может заниматься клеточным моделированием, рассмотрим одну из реализаций игры "Жизнь".

Клетки в исходной таблице Excel слишком велики для нашей задачи. Поэтому придадим им вид небольших квадратов. В качестве примера возьмем игровое поле 5x5, хотя увеличение размера в несколько раз не требует никаких усилий. Отведем для игры клетки B2 : F6.

Если клетка жива, то в ячейку запишем 1, если мертва, то О. Зададим произвольное начальное состояние. Далее нам понадобятся две вспомогательные таблицы. В ячейках H2 : L6 будет храниться "потенциал" клеток. Для вычисления потенциала клетки B2 введем в ячейку H2 следующую формулу:

= СУММ(A1 : C3) - B2

В данном случае подсчитывается число живых клеток в окрестности клетки B2 (окрестность по Муру). Закончив ввод этой формулы нажатием клавиши Enter, установим курсор на правый нижний угол клетки H2 и размножим формулу сначала до ячейки L2, а затем вниз, заполнив всю таблицу H2 : L6. (Обратите внимание на то, как следует учитывать состояние клеток, граничных с таблицей B2 : F6. В данном случае они остаются пустыми, но возможны и более сложные формы задания граничных условий.)

Сложнее всего задать правило поведения клеточного автомата. Запишем в ячейку BlO правило поведения автомата B2, используя логические функции:

= ЕСЛИ (ИЛИ (H2 >3; H2 <2); O; ЕСЛИ (H2 = 3; 1;

ЕСЛИ(H2 = 2;B2;-1)))

Первое ЕСЛИ в (14.2) означает, что клетка будет мертва при потенциале H2 = O, 1, 4, 5, 6, 7; второе ЕСЛИ — что при потенциале 3 клетка будет живой, третье ЕСЛИ — что при потенциале 2 состояние автомата в клетке B2 не меняется. Наконец, выражение (-1) означает, что при невыполнении всех предыдущих условий в ячейку BlO будет записано значение (-1). (Заметим, что в данном случае этот вариант невозможен.)

Запись логической функции требует аккуратности. Однако следует учесть, что для освоения Excel необходимо умение работать с логическими функциями.

Функция записывается только в одну ячейку BlO, далее она размножается вправо до ячейки FlO, а затем вниз, заполняя всю таблицу B10:F14. Таким образом, если в таблице B2:F6 мы имеем состояние системы в момент t, то в таблице B10:F14 вычисляется состояние системы в следующий момент t + 1. Теперь необходимо скопировать таблицу B10:F14 в таблицу B2:F6. Делается это следующим образом.

Шаг 1. Выделяем таблицу BlO: F14.

Шаг 2. В меню "Правка" выбираем команду "Копировать".

Шаг 3. Устанавливаем курсор в ячейку B2.

Шаг 4. В меню "Правка" выбираем команду "Специальная вставка". В раскрывшейся дополнительной вкладке следует из первого столбца "Вставить" выбрать строку "Значения" и нажать кнопку OK. В итоге в таблице B2:F6 появится картинка нового состояния системы.

Процедуру копирования можно существенно ускорить, если подготовить соответствующий макрос. Делается это очень просто. В Excel 2000 в меню "Сервис" выбираем "Макрос", а затем команду "Начать запись". В раскрывшейся вкладке можно дать имя макросу либо оставить предлагаемый вариант "Макрос 1". Назначаем макросу клавишу быстрого вызова, например Ctrl + е. Нажимаем OK. Появится таблица Excel, и на экране возникнет кнопка "Остановить макрос". Выполним указанные выше операции (шаги 1-4) и нажмем кнопку "Остановить". Запись макроса будет закончена.

Теперь переход к следующему временному такту будет происходить после каждого нажатия комбинации клавиш Ctrl + ей можно спокойно наблюдать за эволюцией системы.

Столь подробное описание процесса построения модели дано лишь с той целью, чтобы читатель немного освоил электронные таблицы и понял, насколько легко могут быть построены значительно более сложные и реалистичные модели.

Ясно, что легко усложнить формулу расчета потенциала, изменить окрестность, ввести в расчет случайные факторы. Учет географических особенностей региона может заставить вас отказаться от простой квадратной решетки. В ней могут появиться дырки, а граница вполне может быть извилистой. Совершенно необязательна унификация правил поведения автоматов. Например, вы можете для центральных клеток задать одни правила, а для периферийных — другие.

3. Приложения клеточных моделей

Модель электорального процесса. В цикле работ Т.Брауна рассматривается ряд контекстуальных моделей электорального процесса. Он считает, что избирательные предпочтения индивида определяются установками его ближайшего окружения [8]. В одной из моделей предполагается, что индивид принимает решение голосовать в момент t + 1 за республиканцев или демократов в соответствии с правилом простого большинства. Учитываются взгляды индивида и четырех его ближайших соседей в момент t (окрестность фон Неймана). Если из пяти человек трое или больше поддерживают демократов, то индивид также голосует за демократов. Если большинство составляют республиканцы, то индивид и в этом случае разделяет точку зрения большинства.

В данном случае клеточный автомат имеет два состояния: 1 — голосование за республиканцев; О — голосование за демократов. Нетрудно заметить, что указанная модель может быть реализована на ЭВМ даже проще, чем рассмотренная выше игра "Жизнь".

Браун и его коллеги проводили вычислительные эксперименты на решетке 128 х 128, при этом начальное распределение задавалось случайным образом. Модель исследовалась на большом временном горизонте — до 20 000 тактов. Оказалось, что партийная борьба приводит к очень сложным конфигурациям, существенно зависящим от исходного распределения. По мнению Брауна, данная модель относится к четвертому классу клеточных автоматов, так же как и игра "Жизнь". Однако детального исследования модели пока не проводилось и нахождение замечательных конфигураций в политической "Жизни", таких как "блок", "змея", "катапульта", еще впереди.

Рассмотрим обобщение модели Т.Брауна на случай, когда учитываются взгляды индивида и восьми его ближайших соседей (окрестность Мура). Если из девяти человек пятеро или больше поддерживают демократов, то индивид также голосует за демократов. Если большинство составляют республиканцы, то индивид и в этом случае разделяет точку зрения большинства.

Покажем, что данная модель может быть реализована на ЭВМ с помощью электронных таблиц даже проще, чем игра "Жизнь". Придадим клеткам исходной таблицы Excel вид небольших квадратов (с помощью форматирования). Отведем для модели поле 10 х 10 (клетки B2: К11) и зададим в нем начальное состояние.

Перейдем на лист 2 и введем в ячейку B2 формулу:

=ЕСЛИ (СУММ (Лист 1!A1 :C3) > 4; 1; 0)

Данная логическая функция вычисляет "потенциал" ячейки B2 — в нашем случае число сторонников республиканцев. Если это число больше 4, то ячейке B2 присваивается 1 (автомат голосует за республиканцев), в противном случае присваивается 0 (голосование за демократов).

Размножим эту формулу на все ячейки B2:K11. Получим новое состояние системы, скопируем его и вставим с помощью команды "Специальная вставка" только "значения" в те же ячейки на листе 1. Запишем процедуру копирования в виде макроса. (Первым шагом при записи макроса должен быть переход с листа 1 на лист 2.) Назначим макросу клавиши быстрого вызова, например Ctrl+e. Теперь переход к следующему временному такту будет происходить после каждого нажатия этой комбинации клавиш [4].

Отметим, что для длительного прогона модели не требуется много раз нажимать кнопки. Достаточно одного нажатия. В Excel 2000 для выхода в режим редактирования макроса следует в меню "Сервис" выбрать команду "Макрос", затем "Макросы..." и "Изменить". На экране вы увидите подпрограмму. Интересно, что вы составили эту программу сами. Точнее, это сделал автоматически Excel, пока вы формировали макрос. Вставим в этот макрос цикл следующим образом. После первой строки (Sub Макрос) вставьте строку For i = 1 To 100, а перед последней строкой (End Sub) вставьте строку Next i. Теперь одно нажатие клавиш Ctrl + e заставит модель проделать 100 шагов.

Изложенный подход основан на методологии иконологичес-кого моделирования. Отметим, что в данном случае возможности моделирования существенно расширяются за счет использования макросов. Умение слегка скорректировать текст макроса, вставляя операторы цикла и условного перехода, дает возможность пользователю самостоятельно строить сложные компьютерные модели, не прибегая к помощи программистов.

Модели диффузии инноваций. Индийские ученые предложили следующую модель клеточных автоматов [7]. Каждый индивид соответствует одной клетке, которая может находиться в двух состояниях: 1 — новинка принята; O — новинка пока еще не принята. Предполагается, что автомат, приняв новинку один раз, остается ей верен до конца.

Автомат принимает решение о принятии новинки, ориентируясь на мнение ближайших соседей (используется окрестность Мура). Пусть в окрестности данной клетки имеется т сторонников новинки. Генерируется случайное число р — вероятность принятия новинки. Если рт > г, где г — фиксированное пороговое значение, то автомат принимает нововведение, в противном случае новинка пока отвергается.

Авторы модели полагают, что вероятность принятия новинки со временем должна уменьшаться, так как степень новизны постепенно снижается.

Моделирование проводилось на решетке 10Ох 100. Эволюция системы рассматривалась на временном горизонте в 100 тактов, если вероятность принятия новинки р = 0,1, и 130 тактов при р = 0,05. Для каждого случая осуществлялось 50 прогонов модели. Проводилось также исследование влияния на поведение модели начального распределения сторонников новшества.

Для каждого временного такта t подсчитывалось число автоматов, принявших инновацию (п$_{(}$). Приводимые авторами графики функции п$_{(}$ показывают хорошую степень совпадения с моделью Фишера — Прея (см. § 9.2).

По мнению индийских ученых, клеточное моделирование позволяет строить значительно более реалистические модели рынка, чем традиционные подходы к исследованию диффузии инноваций. Главное достоинство этого подхода заключается в возможности эмпирической оценки фактора р — вероятности принятия новинки. Для этого можно использовать данные социологических опросов и материалы фокус-групп. Другое преимущество предлагаемого подхода заключается в возможности получения оценок необходимого числа сторонников и их пространственного распределения в начальный момент кампании.

Исследования последних лет показывают, что многие физические и информационные процессы прекрасно описываются кле-точно-автоматными моделями. Оказалось, что если к клетке приделать часы, то можно получить новые многообещающие формы представления процессов, протекающих в живой и неживой природе [1]. Очевидно, что, снабдив клетку даже примитивным искусственным интеллектом, можно исследовать более глубокие слои социальной реальности. Весьма перспективным направлением исследований является клеточное моделирование процессов кооперации и конкуренции с использованием для принятия решений моделей теории игр.

Читателю может показаться, что в данной главе рассматриваются разрозненные, ничем не связанные модели из различных областей науки, практики и сферы развлечений. Однако более внимательное отношение к рассматриваемым процессам показывает, что они все тесно взаимосвязаны. Игра становится Жизнью, Жизнь уже стала Маркетингом, Маркетинг становится Искусством (может быть единственным). И все эти процессы можно и нужно моделировать.

Задачи и упражнения

1. Рассмотрите различные определения понятия "окрестность клетки". Какие еще модификации "окрестности" целесообразно исследовать?
2. Позволяет ли клеточное моделирование исследовать географические особенности региона?
3. Можно ли применить клеточное моделирование для анализа коммуникативных процессов?
4. Реализуйте на ЭВМ модель электорального поведения Брауна. Используйте в своей модели различные виды окрестностей. Как это повлияет на поведение модели?
5. Бесконечно расширяет возможности клеточного моделирования использование цвета. Дж.Касти полагает, что

с помощью клеточных автоматов можно анализировать творчество художников. В работе [9] он рассматривает картину известного голландского абстракциониста Пита Мондриана "Шахматная доска. Яркие цвета". Картина представляет

6. 271
7. собой, по мнению Касти, прямоугольную решетку из 256 клеток, раскрашенных в восемь цветов. Касти формулирует следующие задачи:
8. а) можно ли построить клеточный автомат, который бы из любой начальной конфигурации строил картину Мондриана?
9. б) можно ли построить "фильтр", позволяющий различать индивидуальные стили художников?
10. Для освоения нюансов маркетинга целесообразно поиграть в следующую игру. Сконструируйте клеточную модель конкуренции на рынке двух (или более) новых продуктов. Каждому продукту должна соответствовать своя цифра (лучше свой цвет). Начиная со случайной исходной позиции два игрока наблюдают за процессами диффузии. Каждый пятый такт игроки могут вмешиваться в естественный ход процесса, добавляя по одному стороннику новинок.
11. Выработайте оптимальную маркетинговую стратегию.

Литература

1. Веркович С.Я. Клеточные автоматы как модель реальности. М.: МГУ, 1993.

2. Варшавский В.И., Поспелов Д.А. Оркестр играет без дирижера. М.: Наука, 1984.
3. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990.
4. Плотинский Ю.М. Иконологическое моделирование — новый инструмент социологов//Социологические исследования. 2000. М 5. С. 116-122.
5. Тоффоли Т., Марголус Н. Машины клеточных автоматов. М.: Мир, 1991.
6. Artificial Life / C.Langton et al. (eds.) N.Y.: Addison-Wesley, 1992.
7. Bhargava et al. A Stochastic Cellular Automata. Model of Innovation Diffusion //Technological Forecasting and Social Change. 1993. Vol. 44. № 1. P. 87-97.
8. Brown T.A. Nonlinear Politics // Chaos Theory in the Social Sciences / Eds. L.D.Kiel, E.Elliot. Ann Arbor.: The Univ. Of Michigan Press. 1996. P. 119-137.
9. Casti J.L. Searching for Certainty. N.Y.: W.Morrow, 1990.

Лекция. Формальные модели социальных процессов. Модели принятия решений.

План

1. Теоретико-игровые модели конфликтных ситуаций.
2. Модель эволюции кооперации.

1. Теоретико-игровые модели конфликтных ситуаций

Центральной проблемой когнитологии — выбором индивидом наиболее эффективных, оптимальных альтернатив занимается теория принятия решений, которая первоначально считалась ветвью исследования операций, а сейчас рассматривается как область системного анализа. Наиболее продвинутой частью теории являются задачи с единственным критерием эффективности. Значительно сложнее обстоит дело, если в задаче имеется несколько критериев эффективности. Но наиболее сложные проблемы возникают в том случае, если в принятии решений участвуют несколько сторон, каждая из которых имеет собственные критерии выбора предпочтительных решений, причем эти критерии могут полностью или частично противоречить друг другу. Именно такие модели конфликта критериев рассматривает теория игр.

По числу приложений в социальных науках явно лидирует модель, называемая по традиции "Дилемма заключенного". Рассматривается проблемная ситуация, в которую вовлечены только два участника — А и В (два индивида, индивид и система или две социальные системы). Игра состоит в том, что каждый участник выбирает одну из двух альтернатив:

C — сотрудничество, кооперация, солидарность, учет общих интересов, разрешение конфликта, альтруистическое поведение;

D — отказ от сотрудничества, усиление конфронтации, обман, нарушение принятых норм, правил, обязательств, эгоистическое поведение.

Результаты игры определяются с помощью следующей таблицы выигрышей (платежной матрицы).

В данном примере, если оба игрока выберут стратегию кооперации С, то получаемый каждым выигрыш задается в клетке 1. В клетках содержатся по два числа. Первое число — это выигрыш первого игрока (А), второе число — выигрыш второго игрока (В). Проигрыш игрока задается отрицательным числом.

		Игрок В	
		C	D
Игрок А	C	1 3;3	2 0;5
	D	3 5;0	4 1;1

В зависимости от соотношения чисел в таблице выигрышей каждый игрок пытается определить наиболее рациональную линию поведения. В рассматриваемом примере оба игрока знают, что выбор стратегии кооперации С дает любому из них три единицы выигрыша, допустим 3 руб. Если оба откажутся от кооперации С, обманут (альтернатива D), то получат только по 1 руб. В клетке 2 содержится исход игры в случае, когда игрок А выбирает сотрудничество, а игрок В — обман. Тогда игрок А не получает ничего, а игрок В выигрывает 5 руб. В клетке 3 описан противоположный исход. Если игрок А решается на обман, а игрок В выбирает сотрудничество, то выигрыш первого составляет 5 руб., а второй не получает ничего.

В теории игр для данных исходов приняты стандартные обозначения R, T, S, P, где R — награда за взаимное сотрудничество, Т — цена "предательства", S — плата неудачнику, а Р — наказание за обоюдный обман. В нашем примере и = 3, Т = 5, S = O, Р=I.

С точки зрения коллективных интересов лучшим является вариант взаимного сотрудничества (С,С), который приносит в сумме 6 руб., что значительно лучше, чем вариант взаимного обмана (D,D), позволяющий получить в сумме только 2 руб. Однако попытка взглянуть на ситуацию с точки зрения индивидуальной рациональности приводит к другому результату. Игрок А, просчитывая ситуацию в уме, видит, что выбор альтернативы С в худшем случае дает только ноль, если В обманет его ожидания и выберет альтернативу D. Предполагая, что игрок В выбирает альтернативы с равной вероятностью 0,5, игрок А может получить в среднем 1,5 руб.

Продолжая рассуждение, игрок A оценивает последствия выбора им альтернативы D. С одной стороны, имеется соблазн поживиться за счет партнера и получить максимальный выигрыш — 5 руб. С другой стороны, в худшем случае игрок A получает 1 руб., в среднем же 3 руб., т.е. по обоим показателям альтернатива D выглядит предпочтительнее, чем C. Со своей стороны, игрок B рассуждает аналогичным образом, что в результате приводит к выбору неэффективного с коллективной точки зрения решения (D, D).

Таким образом, в голове индивида A формируются как бы две когнитивные модели ситуации — одна модель отражает его собственные интересы, другая — коллективные, т.е. интересы системы в целом*. Конфликт между моделями создает когнитивный диссонанс [8], разрешение которого в данном случае зависит только от соотношения параметров R, T, P, S. Стратегическая структура игры "Дилемма заключенного" сохраняется при условии, что $T > R > P > S$.

Среди приложений теории игр важное место занимает модель "Петухи" (Chicken game). Ее стратегическая структура определяется соотношением $T > R > S > P$. Своим названием игра обязана забавам лихачей-водителей. Два водителя мчатся навстречу друг другу. Проигравшим считается тот, кто первым струсит и свернет в сторону.

С помощью этой модели политологи исследуют развитие Карибского кризиса 1962 г., вызванного размещением советских ракет на Кубе. Предположим, что каждая из сторон (СССР и США) имеет только две альтернативы действий, а таблица выигрышей выглядит следующим образом:

		СССР	
		Y_2	S_2
США	Y_1	1;1	–10;10
	S_1	10;–10	–100;–100

После размещения на Кубе советских ракет и введения США морской блокады у сторон есть две основные альтернативы — переговоры и поиск взаимоприемлемых компромиссов (вариант Y_1) либо твердое отстаивание своих позиций с неизбежной эскалацией конфликта (вариант S_1). Если США выберут альтернативу S_1 (в данном случае планировалась бомбардировка ракетных площадок на Кубе), то в случае ухода СССР побеждает США — вариант (S_1; Y_2). Если же СССР продолжает следовать твердой линии, то неизбежен вариант (S_1JS_2), т.е. в данном случае — ядерная война, в которой обе стороны теряют не только лицо, но и все остальное. При принятия США мягкой, компромиссной стратегии Y_1 и твердого отстаивания СССР своей позиции имеет место вариант (Y_1; S_2) — побеждает СССР.

Попробуйте самостоятельно проанализировать наиболее разумные стратегии поведения сторон в этой ситуации. Следует заметить, что в таких играх нередко побеждают игроки, имеющие репутацию не рациональных, а бесшабашных, готовых на любой риск головорезов.

Важные черты переговорного процесса моделирует игра "Семейный спор" [4]. Предположим, что муж с женой выбирают, как провести воскресный вечер — пойти на футбол или в театр. Муж предпочитает футбол, а жена театр, но проведение вечера врозь не нравится обоим. Таблица выигрышей в таком случае может выглядеть следующим образом:

		ЖЕНА	
		Футбол	Театр
МУЖ	Футбол	2;1	0;0
	Театр	−1;−1	1;2

Из таблицы видно, что варианты раздельного отдыха следует отбросить. Но совместные походы на футбол или в театр приносят одинаковую коллективную полезность. Какой же вариант следует предпочесть? Лучше всего пойти куда-нибудь вместе, чтобы был доволен один, а в следующий раз удовлетворить желание другого члена семьи.

Таким образом, выход из этой конфликтной ситуации легко найти, если перейти от статического рассмотрения проблемы к динамике. Попробуем применить этот прием к анализу "Дилеммы заключенного".

2. Модель эволюции кооперации

Рассмотрим модель "Дилеммы заключенного" в динамике, предполагая, что социальное взаимодействие носит не разовый характер, а может неоднократно повторяться в будущем. В так называемой итеративной дилемме заключенного предполагается, что стороны, принимая решения, учитывают опыт прошлых взаимодействий и прогнозируют возможное поведение партнеров в будущем. При этом таблица выигрышей остается неизменной.

		Игрок B	
		C	D
Игрок A	C	1 3;3	2 0;5
	D	3 5;0	4 1;1

Исследованию этой модели посвящена книга Р. Аксельрода "Эволюция кооперации" [5], центральной проблемой которой является выявление и анализ механизмов, формирующих кооперативное поведение среди эгоистических индивидов без какого-либо принуждения или указаний свыше. Ясно, что кооперативные механизмы возникают только при определенных условиях. При мерами являются взаимодействие государств на международной арене, компромиссы, достигаемые сторонниками противоборствующих партий в парламенте, соблюдение неписаных правил поведения в бизнесе и т.д.

Анализ дилеммы заключенного, проведенный, показал, что следование принципам индивидуальной рациональности заставляет "разумных" игроков отказываться от кооперации, выбирая вариант (D; D). Что же меняется, если с данным партнером социальные взаимодействия могут повторяться? Допустим, стороны знают, что игра повторится ровно десять раз. Казалось бы, целесообразно перейти к взаимному сотрудничеству (вариант C; C), приносящему существенно больший выигрыш. Однако игрок А считает иначе. Он думает, что партнер В будет все время выбирать кооперацию и решает попытаться выиграть, обманывая в последней, десятой игре. Также рассуждает игрок В. Понимая, что оба в последней игре выберут альтернативу D, игроки, обдумывая свою стратегию в девятой игре, приходят к тому же выводу и т.д. Таким образом, рациональной вновь оказывается стратегия D — отказ от сотрудничества. Каждому из игроков эта стратегия принесет по 10 руб., тогда как сотрудничество дало бы каждому по 30 руб. Противоречие между индивидуальной и коллективной рациональностью сохранилось.

Ситуация коренным образом меняется, если игроки не знают, когда закончится игра. Какой же стратегии целесообразно придерживаться в данном случае?

Дать теоретически обоснованный ответ на этот вопрос довольно трудно, и Аксельрод предложил своим коллегам выявить лучшую стратегию в честном спортивном соревновании. Ведущие специалисты, занимающиеся этой проблематикой,— психологи, экономисты, математики, социологи — прислали Аксельроду свои варианты стратегии данной игры, реализованные в виде компьютерных программ. В турнире участвовали 63 программы. Каждая пара программ проводила друг с другом серии по 200 игр. Точное число игр авторам программ не сообщалось.

Присланные программы содержали как простые стратегии, так и весьма изощренные, использующие методы прогнозирования и искусственного интеллекта. Победителем объявлялась программа, набравшая в турнире больше всего очков. Удивительно, что чемпионом оказалась самая короткая программа, присланная А. Рапопортом, реализующая самую простую стратегию "Зуб за зуб" (TIT FOR TAT, сокращенно TFT).

Стратегия TFT на первом ходу выбирает кооперацию, а затем просто повторяет ходы партнера. Если он в предыдущей игре выбрал обман (D), то TFT также выбирает обман. Если партнер в предыдущей игре предпочел кооперацию (C), то TFT также считает необходимым его поддержать.

Стратегия "Зуб за зуб" была хорошо известна еще в древние времена. Ей соответствует "золотое правило" Конфуция и нравственные императивы многих религий. Исследования показывают, что в эволюционном плане именно такая стратегия оказывается наиболее эффективной, постепенно обучая социум механизмам кооперации*.

Отметим, что эволюционно эффективная стратегия не обязательно побеждает в каждом поединке с другими стратегиями. Более того, очевидно, что стратегия обмана, отказа от сотрудничества в каждой игре в принципе не может проиграть ни одного поединка. Но и очков эта стратегия приносит немного. Особенность турнира состоит в том, что лучше проиграть поединок со счетом 500:600, чем выиграть со счетом 200:100 очков. В этом случае понятно, что победить в турнире может стратегия, проигравшая абсолютно все личные поединки; это произойдет, если другие стратегии, встречаясь между собой, наберут относительно немного очков.

Аксельрод считает, что из результатов турнира следуют правила житейской мудрости:

– не будь завистлив;
– не обманывай первым;
– проявляй взаимность и в сотрудничестве и в обмане;
– не будь слишком умным.

Отношение к социальному взаимодействию, как к игре с нулевой суммой (сколько один выиграл, столько другой проиграл) является достаточно распространенным стереотипом. Однако в реальной жизни часто встречаются ситуации, в которых следование эгоистическим стратегиям неэффективно, что и доказывает исследование модели "Дилемма заключенного" для двух партнеров. Еще более интересные ситуации возникают при участии в играх п лиц.

В июне 1983г. Д.Хофстадтер озадачил читателей журнала "Scientific American", предложив им сыграть в игру с призовым фондом 1 млн (10^6) долларов. Участники игры должны были прислать в редакцию журнала открытку с указанием какого-либо одного числа. Победителем будет тот, кто пришлет открытку с наибольшим числом. Игра "Наибольшее число" имеет очень любопытное правило награждения: победитель, назвавший наибольшее число N, получает выигрыш, равный, 10^6 /N. Остальные же участники не получают ничего. Если победителей будет двое, то выигрыш делится пополам. Таким образом, выигрыш вычисляется по следующей формуле: P/Nm, где P—призовой фонд, N—наибольшее названное число, т—число участников, выбравших число N.

В игре приняло участие около 1000 читателей. Почти все прислали открытку с числом 1. Если бы так поступили все, то выигрыш каждого составил бы примерно 1000 долларов. Однако более предприимчивый читатель рассуждал иначе. Он считал, что большинство пришлют числа 1, 2, может быть, 3 и поставил в открытке число 10, рассчитывая получить 100 000 долларов, оставив остальных с носом. Но таких предприимчивых оказалось довольно много. Более того, 33 человека прислали число 10^6 , надеясь получить хотя бы 1 доллар. Однако несколько энтузиастов прислали числа порядка 10^{100} , сделав выигрыш исчезающе малым.

Моделям игр с участием п лиц посвящена обширная литература, в которой исследуются механизмы кооперирования, образования коалиций, процессы самоорганизации [1, 3, 6, 8]. В этих моделях исследуются условия возникновения социального порядка в условиях, когда участники не имеют полной информации о предпочтениях друг друга.

Задачи и упражнения

1. Постройте теоретико-игровые модели наиболее крупных конфликтов последних лет.
2. Постройте модель взаимодействия социальной системы и индивида.
3. Предположим, что на одном сегменте рынка действуют две конкурирующие фирмы. Каждая фирма может выбрать одну из двух альтернатив: C — разработать и внедрить инновацию; D — имитировать продукт, созданный другой фирмой (см. гл. 9). В данной модели предполагается, что имитация приносит больший доход, так как фирма не несет затрат, связанных с разработкой и внедрением инновации. Рассмотрим игру со следующей таблицей выигрышей [9]:
4.

		Фирма B	
		C	D
Фирма A	C	1) 1;1	2) 1;2
	D	3) 2;1	4) 0;0

5. Какие стратегии в этой модели являются рациональными?
6. Сформулируйте определение эволюционно эффективной стратегии.

7. Авторы [7] присвоили имена некоторым стратегиям, разработанным для итеративной дилеммы заключенного: Сталина — стратегии постоянного отказа от сотрудничества, Ганди — стратегии постоянного сотрудничества, альтруизма, независимо от поведения партнера. Каким стратегиям можно присвоить имена Макиавелли, Чингисхана, Наполеона, современных политиков?
8. Проверьте сплоченность своей студенческой группы с помощью игры "Наибольшее число". Как поведут себя участники, если игру повторить несколько раз?

Литература

1. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов и кибернетиков. М., 1985.
2. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
3. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
4. Саати Т.Л. Математические модели конфликтных ситуаций. М., 1977.
5. Axelrod R. The Evolution of Cooperation, N.Y.: Basic Books, 1984.
6. Handbook of Game Theory with Economic Application. L., 1992.

7. Krains D., Krains V. Pavlov and Prisoner's Dilemma//Theory and decision. 1989. Vol. 26. № 1. P. 47—79.
8. Rapoport A. Decision Theory and Decision Behaviour. Normative and Descriptive Approach. Dordrecht: Kluer Acad. Publ. 1989.
9. Rasmusen E. Games and Information. Cambridge: Blackwell, 1994.

Виртуальное послесловие

По мнению Ю.Хабермаса, социальная эволюция состоит в развитии когнитивных способностей человека. Предлагаемые в последних главах методы компьютерного моделирования позволяют исследователю создавать искусственные социальные миры, изучать с их помощью реальные социальные процессы, существенно расширяя свои когнитивные возможности.

Ясно, что компьютеры с помощью программных комплексов искусственного интеллекта могут распознавать информацию, принимать решения, и, следовательно, рассматриваться как когнитивные системы. Но для социальной теории главная проблема заключается в том, что в результате взаимодействия человеческого и искусственного интеллектов рождается качественно новая, виртуальная реальность, причем изменения носят глобальный характер.

Глобальная информатизация общества, развитие компьютерных сетей приводит к тому, что многие виды бизнеса, сферы обслуживания, формы досуга все активнее перемещаются в виртуальное пространство. Появляются не только новые формы общения, но и новые искусственные объекты, с которыми люди могут общаться, устанавливать прочные социальные связи. Отметим, что установление виртуальных связей не требует мощных компьютеров и сложных программ искусственного интеллекта — достаточно компьютерных игр типа тамагочи.

В Интернете появляется все больше виртуальных клубов по интересам. Заметим, что, играя в таком клубе в шахматы или преферанс, вы на самом деле не знаете, кто является вашим партнером — человек или программа.

Происходят изменения в трудовой этике. На Западе во многих фирмах сотрудники, приходя на работу, даже не здороваются с коллегами — все общение осуществляется только по компьютерной сети.

Возможности посещения виртуальных магазинов и музеев, общение с интересными собеседниками, живущими в разных городах и странах, уже сегодня заставляет многих энтузиастов проводить львиную долю свободного времени за компьютером. В скором времени каждый человек получит возможность в течение своей жизни прожить несколько виртуальных жизней с последующей виртуальной реинкарнацией и виртуальным бессмертием.

Колонизация виртуального пространства ставит перед социологами задачи анализа виртуальных систем — социальных об-щностей, состоящих из людей и компьютерных устройств, обладающих искусственным интеллектом. К наиболее актуальным социальным проблемам виртуализации социальных отношений следует отнести:

– определение норм, правил поведения в виртуальном мире;
– анализ влияния виртуальных социальных процессов на обычную, повседневную жизнь индивида.

Установление научно обоснованных норм и правил функционирования виртуальных систем позволит существенно снизить риск появления негативных непредвиденных последствий кардинальных перемен, свидетелем которых становится современное человечество.

К числу безусловных достижений глобальной информатизации общества, несомненно, относится кардинальнее расширение возможностей доступа к мировой сокровищнице знаний. Известно, что финансовые трудности значительно сокращают поступление зарубежной научной литературы в отечественные биб-лиотеки. Однако развитие Интернета, создание полнотекстовых электронных баз журнальных статей частично ликвидируют последствия кризиса.

Действительно, многие научные библиотеки страны обеспечивают своих читателей доступом к электронным версиям журналов известных зарубежных научных издательств (адрес в Интернете: www.ehbrary.ru). Ряд научных библиотек дает возможность читателям пользоваться ресурсами баз EBSCO и ProQuest, содержащими большое количество журналов по социальным наукам. Любой пользователь Интернета может читать статьи в электронных социологических журналах. По состоянию на начало 2001 г. в Интернете издавалось более 40 журналов по различным областям социологии'*.

Используя поисковые возможности Интернета, уже сегодня можно найти огромное количество информации по любой проблеме. Но это только начало. В ближайшем будущем наступит эра информационного коммунизма, когда каждый сможет получить любую информацию в соответствии со своими потребностями и ввести во всемирную сеть новые данные в соответствии со своими возможностями.

Однако у грядущего информационного изобилия могут быть неочевидные негативные последствия. Действительно, через 5-7 лет в ответ на запрос по любой социологической проблеме Интернет выдаст километры книжных и журнальных текстов. Успешная борьба с грядущим информационным потопом возможна только в случае своевременного осознания социологическим сообществом необходимости кардинального переструктурирования всего социологического знания, и даже радикального изменения социологического дискурса. Одним из перспективных направлений реформирования социологической теории является развитие модельного подхода к структурированию социологических знаний.

2.2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭКОНОМИКО-ПОЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕЖДУНАРОДНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Лекция. Математическое моделирование некоторых экономико-политических аспектов международных отношений

План

1. Производственные функции.
2. Модель экономического роста Солоу.
3. Взаимосвязи между макроэкономическими счетами

1. Производственные функции

Производственная функция (рус. производственная функция, англ. production function, нем. Betriebsfunktion f) — зависимость конечного выхода продукции или ее стоимости от использования разных факторов производства, конкретных видов ресурсов и затрат, представленная в математической форме.

Как правило, применяют простые функции с одной или несколькими переменными — линейную, квадратичную, степенную, гиперболическую и т.п..

Основной вид производственной функции:

$Q = f(K, L)$ где Q - объем производства; K - объем капитала; L - объем работы

Понятие производственной функции (ВФ) возникло учитывая потребность отразить зависимость между объемом продукции, которая вырабатывается, и компонентами затрат ресурсов (работы и капитала). Американский экономист П. Дуглас заметил, что соотношение доходов от работы и капитала в национальном доходе США почти не изменяется со временем. Этот вывод подтвердили дальнейшие эмпирические исследования для разных стран мира.

Описывая производственную подсистему экономики с помощью ПФ, эту подсистему рассматривают как «черный сундучок», на вход которой подаются ресурсы X1, X2, …, Xn, а на выходе имеем годовые объемы разнообразной готовой продукции Y1, Y2, ..., Yk. Как факторы производства на макроуровне большей частью рассматривают производственные фонды K (капитал) и работу L, а как результаты производства — валовой выпуск продукции (ВВП или НД) Y.

Под техническим прогрессом в данной модели подразумевается вся совокупность качественных изменений труда и капитала. Таким образом, показатель технического прогресса является показателем времени. Технический прогресс называется нейтральным, так как вон одинаково влияет на все задействованные для выпуска продукции ресурсы.

Условия модели

1. При отсутствии одного из факторов выпуск является нулевым.

2. Предельные продуктивности факторов являются положительными.

3. При увеличении объемов ресурсов выпуск возрастает.

4. При увеличении объемов ресурсов предельная производительность уменьшается.

5. При неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск также неограниченно увеличивается.

6. Норма сбережения капитала (инвестиции) является постоянной.

7. Норма выбывания капитала является постоянной.

8. Производственная функция обладает постоянной отдачей вот масштаба (единичным эффектом масштаба).

Модель Солоу учитывает влияние трех факторов:

– капиталовооружения ($k=K/L$);
– рост населения (ΔL);
– технологического прогресса (Т. П.).

За моделью Р. Солоу существует стойкий уровень капиталовооружения (k^*), который определяет экономическую динамику $s/\sigma=k^*/f(k^*)$

s – норма сбережений , σ- норма амортизации , k^* - стойкий уровень капиталовооружения , $f(k^*)$ – производительность работы устойчивого уровня капиталовооружения

Источниками экономического роста за Солоу есть рост капиталовооружения (k), что зависит от роста нормы сбережений (s).

Но рост нормы сбережений не может быть постоянным, поскольку сбережение (S) ограничивают потребление (C).

Солоу сформулировал «золотое правило» (при определении нормы сбережений критерием должна быть максимизация благосостояния общества, т.е. как можно больше потребление), которое выполняется при условии, который предельный продукт капитала (MPK) равняется его убытию (амортизации — σ): MPK=σ

б) Рост населения (t - темп роста населения) влияет на экономический рост через динамику капиталовооружения:

$\Delta K = I/L - (\sigma + t)*k$

где I/L - инвестиции на один работающего;

σ - норма амортизации;

t - темп роста населения;

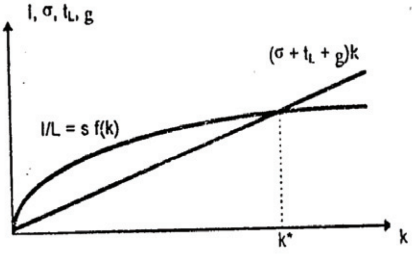
k - капиталовооружение.

в) Технологический прогресс является источником постоянного роста как производительности работы (y), так и общего продукта (Y).

Если эффективность производства (E) под влиянием технологического прогресса изменяется с темпом (g), то производительность работы изменяется с тем же темпом, а общий объем производства возрастает с темпом t+g:

$Y=(t+g)y_0L$

y_0 — базовая производительность работы.



Модель экономического роста Р. Солоу изображенная на графику

k - капиталовооружение единицы работы с постоянной эффективностью;

k* - стойкое состояние капиталовооружения, за который σk = I, т.е. величина капитала, что выбывает (σk), равняется капиталу, который инвестируется (I = s f(k));

σ - норма амортизации;

t — темп роста населения;

g - темп роста эффективности производства под влиянием технологического прогресса

Несколько лет позднее выяснилось, что выводы из модели Гаррода - Домара могут быть очень неудачными. Теории роста были предоставлены новые направления Роберта Солоу. Солоу родился в Бруклини (Нью-Йорк) 1924 года. В 1947 г. закончил Гарвард, а в 1951 г. получил звание доктора философии. Его диссертация была об "Случайных процессах", что является следствием неровности доходов, а распределение доходов оставалось темой его жизни. В 1950 г. Солоу посев должность профессора статистики на факультете Масачусетского института технологий. Через четыре года он стал профессором экономики. В 1957 и 1977 гг. его назначили на должность профессора института. Солоу был энтузиастом и добрым преподавателем, что воодушевлял многих будущих научный работников. Он развернул сотрудничество с П. Семуелсоном. В администрации Кеннеди Р. Солоу работал главным экономистом в совете экономических советников и в комиссии по поддержке прибыльных программ при президенте Джонсоне.

В конце 70-х лет XX ст. Солоу был президентом Федерального Резервного Банка в Бостоне. На протяжении нескольких лет он получал много званий, а также наград, включая медаль Американской Экономической Ассоциации, несколько почетных званий и наконец, 1987 года - Нобелевскую премию. Солоу работал в сфере экономики (макроэкономики). Он не строил экономических моделей, а лишь использовал подход П. Семуелсона для снижения проблем в нескольких главных связках, которые рассматриваются в микроэкономике. Как и другие выдающиеся экономисты его поколения, он не опубликовал многочисленных книжек, поэтому его слава покоится на нескольких исключительных работах. После ранних работ о мультипликатор и линейные проблемы Солоу занялся проблемой экономического роста. Вместе с Семуелсоном (1953 г.) он показал, что закрытая система Ньюмена, с постоянным возвращением к начальному состоянию и заменимыми факторами, имеет уникальную структуру и редчайший и стабильный уровень роста.

Его работа "Взнос в теорию экономического роста" сделала шаг к открытой системе. Солоу заметил, что свойство бритвы с двумя лезвиями на модели Гаррода - Домара имеет склонность чередоваться с безработицей и избыточной занятостью и может быть обусловлена соотношениям К/Х быстрее, чем естественными изменениями в экономике.

Если факторы не могут быть использованы лишь в фиксированной пропорции, то очень удивительно, чему некоторые не могут найти работу. Поэтому Солоу предложил разрешить взаимозаменяемость факторов. Он припускал, что работа возрастает не стабильно (п), и что накопление капитала является постоянным частным прибыли:

К - с - У.

Фиксированное соотношение К к Х было заменено линейной функцией Y = F(K, L), что разрешило замену капитала и работы для одинакового объема производства. Солоу не был первым, кто обратился к такой модели роста. В 1942 г. Ян Тинберсен использовал функцию производства как краеугольный камень сложного анализа процессов роста. Однако его исследование не предрасположили ничьего внимания. Частично это было обусловлено тем, что его публикация появилась в немецком журнале во время войны. К этому еще следует прибавить, что, развивая новую методологию, он не обошел отягощающего математического расчета. В дальнейшем его главным интересом был не сбалансированный рост, а лишь разные типы несбалансированного роста.

Джеймс Тобин впервые обобщил модель Гаррода - Домара, разрешив замену факторов. Одновременно он прибавил спрос на реальную денежную наличность, который удовлетворяется деньгами, уплаченными в виде дефляции или безналичных платежей. Тому шлях экономического роста стал зависимым от монетарных факторов. Солоу удалось выразить интенсивность капитала через k = K/L. Объем производства можно записать так:

Y = LF(k, l) = Lf(k),

а изменение k:

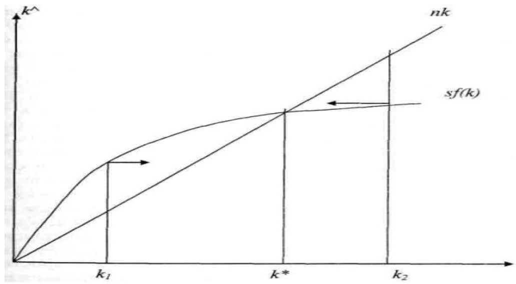
$$k\hat{} = sf(k) - nk$$

или

$$\frac{k\hat{}}{k} = \frac{K\hat{}}{K} - \frac{L\hat{}}{L} = \frac{sY}{K} - n = s\frac{L}{K}f(k) - n,$$

- это и есть главное уравнение Солоу.

Изменение интенсивности капитала за определенное время является разностью сбережений, умноженной на единицу капитала после того, как дополнительные работники приступают к работе с дополнительным капиталом. Если sf(k) = пk, интенсивность капитала остается неизменной, экономика возрастает без изменения ее структуры. Это есть путь к сбалансированному росту. Стабильность этого пути лучше всего испытывается на графике, который построил Солоу.



Луч пк указывает, сколько должен сэкономить среднестатистический работник на каждой единице интенсивности капитала, чтобы обеспечить своих детей готовым капиталом. Кривая sf(k) показывает, сколько накоплений он экономит на каждой единице интенсивности капитала. Изменение интенсивности капитала измеряется вертикальной линией между этими двумя хромыми. Если экономика есть в точке $к_1$ это изменение положительное, поэтому экономика двигается по правую сторону к дальнейшему к. Если экономика - в точке $к_2$, изменение отрицательное, экономика двигается по левую сторону. В обеих случаях экономика будет сводиться к точке к*, которая отображает путь сбалансированного роста. Этот путь стабильный и здесь нет лезвия бритвы.

В модели Солоу уровень сбалансированного роста не зависит от сбережений. Склонность к сбережениям определяет интенсивность капитала, а также реальная прибыль. Но уровень роста зависит лишь от населения и технологии. Все эти исследования, которые основывались на модели Гаррода - Домара, имели целью усилить продолжительный рост там, где только начались временные импульсы. Однако, или будут эти импульсы длиться несколько лет, или десятилетия - остается под вопросом. Солоу также модифицировал и дополнил свою главную модель с помощью альтернативной функции производства, в которую включил фактор цен, технологические изменения, изменение уровня сбережений, предложение работы и налогообложение. Наконец эта его работа стала наибольшей работой из анализа в теории роста. Она также сделала взнос в доктрину методологии, предоставив производственным функциям заменимые факторы, хотя Вальрас и написал свою важнейшую работу в сроках фиксированных коэффициентов. К сожалению, этот блестящий экономический взнос был неправильно трактован как флаг отдельной школы экономистов. Производственная функция стала предметом раздора между левыми и правыми кейнсианцами. Работа Солоу инициировала быстрое развитие теории роста в разных направлениях, в которые он внес много интересного. Солоу заметил, что уровень сбережения с разными уровнями производства на единицу капитала приводит к необходимости выбора оптимального пути роста.

Другие исследования касались ограниченных природных ресурсов. В 1956 г. предложенная модель, в которой было возможным рост всех факторов, а результат оставался постоянным. Это было сделано в неоклассическом духе. Теорию продвинули вперед от нисходящих результатов Малтуса и Рикардо. Однако функция производства с нисходящим результатом есть достаточной для согласования ее с классическими традициями. В сочетании с эндогенным ростом населения (в зависимости от уровня зарплаты) и эндогенных сбережений (в зависимости от уровня процентной ставки) теория роста превратилась на современную версию "канонической классической модели". Итак, односекторная модель была расширена к двухсекторной через объединение современной теории роста с марксистской традицией репродукции на расширенной основе.

Технические изменения поставили дальнейший вопрос о размере, к которому исторический рост дохода на душу населения вызвано накоплениям капитала и технического прогресса. Экономисты приходили к выводу, которая насколько главная часть роста приписывается к техническому прогрессу, настолько склонность к накоплению капитала уменьшается.

Классическую позицию представил Шумпетер, что настаивал на важности технических изменений, что наконец было горячо поддержано. Потом появилась мысль, что взнос капитала недооценен. Технический прогресс преимущественно воплощенный оборудование - так считал Николас Кальдор и др. Но его разработка требует внедрения нового оборудования, в то время как существующее оборудование рассчитано на старые технологии.

Чтобы развить этот фактор, Солоу исследовал модели, в которых оборудование разных старых марок работало на разных технологиях.

Ранние работы Солоу из экономического роста основывались на производственных функциях Кобба - Дугласа, что привело к экспериментам с разными классами функций, которые были не такими ограничивающими и разрешали изменения в частных факторов. Результат опубликовали Арроу, Ченери и Минхас 1961 года и назвали его "функция с неизменно эластичной заменой".

Внимание Солоу была направлена на границе экономического роста. Он решил исследовать следствия исчерпания ресурсов, что используются для экономического роста. Развивая тему Гаррода - Готелинса, он изобрел критерий для оптимального уровня исчерпаемости ресурсов. Он также открыл междугенерационное равенство ресурсного использования в русле принципа Джона Роуна, за которым: неизвестно какое поколение беднее - настоящее или будущее. Он отобразил разрешенную границу использования ресурсов ранними поколениями, что должных идти в ногу с накоплением репродуктивного капитала.

Хотя эта работа по экономическому росту сделала Солоу неоклассиком, он оставался кейнсианским макроэкономистом. Вместе с Семуелсоном он рекомендовал кривую Филипса как основной инструмент макроэкономической политики; вместе с Аленом Плиндером предложил долгосрочную динамику монетарной и фискальной политики в кейнсианской модели с ограниченным правительственным бюджетом. Процесс, вызванный продолжительными изменениями в предложениях денег или эмиссиях облигаций, является результатом финансирования дефицита бюджета. Выводы такие: процессы купли на открытом рынке могут быть сокращены и в стабильной экономике финансирование затрат с помощью облигаций имеют более сильное и продолжительное влияние на производство, чем затраты, финансированное эмиссией. Эти предложения, на первый взгляд, парадоксальные, были более провокативными, чем эффективными, но на бумаге был создан еще один аспект для посткейнсианских дебатов.

Солоу был замечательным ученым с талантом объединения прозрачного синтеза с инструкцией. Его работа "Линейное программирование и экономанализ", написанная вместе с Дорфманом и Семуелсоном, стала классическим введением в новые и сложные области. В цикле лекций "Теория капитала и уровень возвратности" ученый утверждал, что экономическая теория не обязательно нуждается в таком факторе производства, как капитал. "Теория роста" является синтетическим освещением обьекта, о котором впервые упоминалось 1956 года. Золотое правило независимо друг от друга открыли шесть авторов. Это был заметный случай кратного открытия. Кратность не была случайностью. Солоу довел, что экономика может идти путем сбалансированного роста, если интенсивность роста капитала отвечает уровню сбережения. Чем больше сбережений, тем высшая интенсивность капитала в сбалансированном росте и большее производство на душу населения. Это обусловило вопрос, или увеличение производства на душу населения всегда желательная вещь. Теория требовала ответа; ее было не тяжело найти. Поэтому й не удивительно, что несколько ученых одновременно дали ответ почти сразу после выхода работы Солоу. Но спора относительно концептуализации проблемы точились несколько лет. Первым ответ на этот вопрос опубликовал Эдмонд Феякс, молодой профессор с Эли, есть правило: "веди себя с другими так, как бы ты хотел, чтобы совершили с тобой". Это правило ученый назвал золотым правилом накопления капитала. Он считал, что каждое поколение должно инвестировать ради других поколений такую часть прибыли, которую бы оно хотело, чтобы у него заинвестировало предыдущее поколение. Вияснилось, что уровень процента равняется уровню экономического роста. Это условие стало стандартной формой золотого правила.

Даже к опубликованию "басни для исследователей роста" это правило пришло к главе и другим. Жак де Срусо применил его 1959 года, а опубликовал - 1961 года. Тревор Сван представил это правило 1960 года на конференции Международной экономической ассоциации. К этому же выводу дошли также Джеймс Миде, Карл Кристиан фон Вайцзекер, Джон Робинсон, Девид Чамперновне, что описали это правило в журнале "Review of Economic Studies". Для получения выгоды из золотого правила Фелнс подытожил, что экономику надо принудить идти путем сбалансированного роста с уровнем роста, установленного населением (и, наверное, технологиями).

Предположим, в какой-либо момент волшебная фея пообещала оборудовать экономику необходимым капиталом. При условии, что соотношение капитал/работа, достигнутое таким образом, должно поддерживаться на собственных сбережениях экономики. Это же стоит вопрос, которого объема капитала должна требовать экономика? Если капитал будет огромным, то производство капитала на душу населения будет значительным, но большинство его должно быть сэкономлено, оставляя малое частное для потребления. Если капитал небольшая, почти вся прибыль будет потреблена. Поэтому должна быть величина капитала, для которой бы потребление на душу населения было максимальным. Если начальный капитал свободный, то это вероятно для достижения. Критерием максимального потребления есть интуиция. Прирост капитала на душу населения dk увеличивает производство к f(k)dk. Эти символы отвечают символам предыдущей модели. Одновременно сбережения, что нужны для поддержки капитала, возрастают к ndk. Рост к есть более желательным, так как f (к) (п и максимум потребления) достигается при f (к) = г. Предельное производство капитала должно равнять уровню экономического роста. Результат простой и вытекает из четкой оптимальности. В сбалансированном росте есть главное равенство Солоу пк = = sf(k). На душу населения потребления (производство без сбережений) запишем:

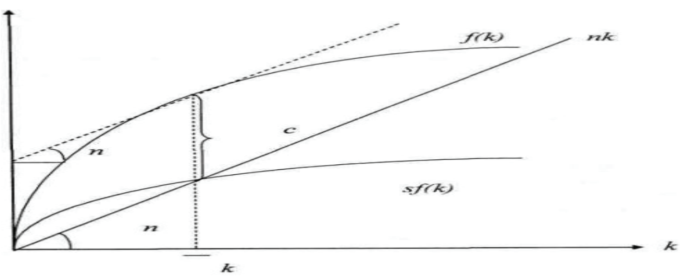
c = f(k) - sf(k) = f(k) - пк

Его максимизируем к: f (к) = п

Эффект быстрого роста потребления может быть вызван изменением уравнения,

$$\frac{dc}{dn} = [f'(k) - n]\frac{dk}{dn} - k = -k\pi 0$$

Быстрый рост ведет к увеличению сбережений и согласовывает с низким постоянным государственным потреблением. Жертва в потреблении есть прямо пропорциональная интенсивности производства капитала. Эта оптимизация изображена на рис. 16.



Расстояние между кривой и необходимым накоплением капитала пк достигает максимума там, где f(k) должны быть таким, что sf(k) пересекает кривую пк в точке оптимальной интенсивности капитала К. Золотое правило связывает функции производства и технологии при заданном уравне роста. Все другие аспекты несущественные, хотя правило может быть связано с ними. Предельное производство капитала равняется уровню процента. Золотое правило говорит, что потребление есть максимальным тогда, когда уровень процента отвечает уровню роста: и = г.

Эту формулу предложил где Срусо 1961 года, а Вайцзекер, Робинсон, Чамперновне, Алаис - 1962 года. Поэтому быстро возрастающие экономики характеризуются высоким уровнем процента. А статическая экономика будет максимизировать свое потребление, поддерживая свой капитал на насыщенном уровне, держа при этом уровень процента на нуле.

Кажется, будто представления, что процент есть существенным динамическим феноменом, подтвердилось. На самом деле взгляды на это явление не являются единодушными. Например, Шумпетер утверждал, что процент обусловлен технологическими нововведениями; при неизменных технологиях он должен исчезнуть. Это возражает золотое правило, так как уровень процента положительный даже при отсутствии нововведений. Тогда главное уравнение Солоу можно записать так:

$$f'(k)\frac{k}{f(k)} = \frac{nk}{f(k)} = \frac{sf(k)}{f(k)} = s$$

Золотое правило предусматривает, что уровень сбережений равняется эластичности производства, которое зависит от капитала, а также уровень сбережений отвечает уровню прибыли. Все прибыли должны быть сэкономлены, но этого не достаточно, чтобы вывести экономику на уровень достаточного потребления, так как нет гарантий, что вначале она имела нужный объем капитала.

В двофакторной модели зарплаты w является остатком от производства после того, как капитал был оплачен предельным продуктом. Используя золотое правило из предыдущих уравнений, можно вывести:

$w = f(k) - f2(k)k = f(k) - nk = C.$

На пути максимального потребления зарплаты проедаются. В общем, приведенные уравнения нам ничего не говорят о раз мере сбережений, прибыли, зарплат, потребление между разными слоями общества. Эти же самые люди могут зарабатывать и зарплаты, и прибыли, а индивидуальные сбережения не обязательно корреспондируют с индивидуальной прибылью от капитала. Для примера можно вспомнить двоклассовое Кальдорианское общество, в котором работники получают только зарплаты, а капиталисты - лишь прибыли. Отсюда золотое правило твердит, что работники не экономят, а капиталисты не потребляют.

Золотое правило привлекало экономистов тем, что оно отобразило критерий для оценки экономического состояния. Это было достигнуто радикальными упрощениями. Их природа может быть лучше всего оцененная, если поставить проблему оптимального накопления капитала в общем виде. Френк Релезей (1928 г.) впервые сделал расчеты разных вариаций, которые бы обеспечили оптимальный путь сбережений. Ключом было соответствующее взвешивание будущего потребления с современным потреблением. Его модель была спланирована для неизменного населения с фиксированным уровнем потребления.

Особенностью было то, что проблема для возрастающего населения с неограниченными нуждами не подвергалась моделированию до 1961 г. Понятно, что оптимальный путь начинается из любого стартового капитала с ограничением сбалансированного роста, избегая нужды взвешивания современного против будущего потребления, обеспечило радикальные упрощения, которое привело к ощутимым результатам.

Золотое правило предусмотрело некоторые практические направления. В реальной жизни нет волшебной феи, которая бы приносила подарок в виде капитала.

Если унаследованный капитал меньший, чем предусматривает золотое правило, его сначала надо будет наращивать за счет сбережений, иначе экономика должна наращивать потребление. В обеих случаях оптимизация требует уравновешения современного потребления с будущим. Даже несмотря на все ограничения, золотое правило стало большим вкладом в теорию; оно привлекло внимание к новому типу отношений между процентом и ростом. В классической модели роста с ограниченной тенденцией к спаду прибылей имеет место стагнация и затухающие мотивы к сбережениям.

В теории капитала, в ее массовой парадигме, процент повязан с уровнем, на котором растут деревья. В модели общего эквилибриуму Джона фон Ньюмена равенство уровня роста и уровня процента является результатом дуалистических проблем максимизации предыдущего и минимизации дальнейшего в модели со сменным ростом и без любой оптимизации потребления. В модели Солоу построенное по-разному то же самое равенство превратилось на условие для максимального постоянного потребления при заданном уровне роста. Итак, процент и рост связаны между собой, будто чудом.

Золотое правило стало вершиной развития теории роста, который сделал взнос в основу теории экономики. Предпринимательские нововведения Шумпетера, двойное лезвие ножа Гаррода, саморегулирующий мотор роста Солоу, золотое правило Фелнса все это важные предусмотрения относительно реальной экономики. После золотого правила теория перешла к рукам математиков и развила дальше.

3. Взаимосвязи между макроэкономическими счетами

Для разработки финансовых программ используется система макроэкономических счетов, которая характеризует сферу национального дохода и совокупных затрат, финансовых потоков и запасов. Эти счета дают необходимую информацию для анализа эффективности функционирования экономики и выбора соответствующей политики корректирования. Они составляют каркас макроэкономической модели, которая разрешает определить логическую структуру любой финансовой программы, обеспечивают возможность последовательного контроля прогнозов и пакетов политических программ. Взаимосвязи между счетами показывают, что превышение расходов над доходами в любом из секторов экономики должно компенсироваться за счет сбережений в других секторах, а чрезмерные затраты в экономике в целом возможные лишь в случае соответствующего внешнего финансирования.

Статистические данные — это информационная база для оценки и прогнозов экономической ситуации. Их, возможно, распределить на четыре отдельные, но взаимосвязанные блоки: счета национального дохода и продукта, платежный баланс, статистика государственных финансов (государственный бюджет), счета денежной сферы. Несмотря на те, что каждая группа счетов характеризует разные стороны экономики, все они базируются на одних концепциях и составляют единую систему.

Макроэкономические счета представляют собой обобщенная запись экономических операций. Экономическая операция имеет место тогда, когда происходит передача права собственности на реальные или финансовые активы, или одна экономическая единица делает услуги другой. В большинстве случаев экономические операции представляют собой обмен: товары и услуги могут обмениваться на финансовые активы или одни финансовые активы могут обмениваться на другие. В некоторых случаях товары, услуги и финансовые активу передаются без обмена.

Две стороны каждой экономической операции рассматриваются как потоки. Показатели потоков является мерой экономической деятельности за единицу времени (год, квартал, месяц). Показатели «запасов» отображают результаты экономической деятельности на определенный момент времени (например, на конец года).

Потоки, как правило, делятся на две категории: финансовые и нефинансовые, или реальные, потоки. Последние рассматриваются как операции в процессе производства или приобретение товаров и услуг (потоки товаров, услуг, доходов и односторонних трансфертов).

Финансовые потоки отображают изменения в финансовых активах и пассивах, все изменения доходов и затрат экономических субъектов (домашних хозяйств, предприятий, государственных организаций). Для любого субъекта или сектору экономики баланс нефинансовых операций должен равнять (с учетом статистики ошибок) изменениям в его финансовых активах и пассивах.

В счетах национального дохода и платежного баланса операции учитываются по принципу начисления, т.е. на момент возникновения обязательств. Статистика государственных финансов, наоборот, учитывает операции на основе кассового принципа, т.е. когда делается выплата за некоторым обязательством (выполнение обязательств). Поскольку статистика денежной сферы базируется на балансовых счетах, которые строятся соответственно правилам учета, который приемлемо для частных предприятий, то и она в целом составляется по принципу начислений.

Счета национального дохода и продукта

В основе счетов национального дохода и продукта лежит тождественность произведенного и распределенного продукта. Предложение товаров и услуг в некотором году может быть представленная как сумма продукта, произведенного в стране, и импорте. Распределение этого объема предложения рассматривается как сумма совокупных затрат резидентов страны на потребление и инвестиции и экспорт:

$Y + IM = C + I + X$, (1)

где Y — внутреннее производство; IM — импорт; C — потребительские затраты домашних хозяйств, предприятий, государства; I — валовые инвестиции домашних хозяйств, предприятий, государства; X — экспорт.

Превращая эту тождественность, получаем:

$И = C + I + (X – IM)$. (2)

Объем выпуска Y может иметь разные определения. Разность между ВВП (валовым внутренним продуктом) и ВНД (валовым национальным доходом) составляют чистые первичные доходы из-за границы (YF). ВНД можно определить как ВВП плюс платежи из-за границы резидентов этой страны за услуги факторов производства, которые являются собственностью, но находятся вне границ этой страны, минус платежи иностранцам за услуги их факторов производства, которые находятся на территории этой страны.

Определение объема производства в уравнениях (1), (2) связано с тем, что включается у понятие экспорта X и импорта IM. Если Y — это валовой внутренний продукт (ВВП), то экспорт и импорт включает товары и нефакторные услуги. Если до обеих сторон уравнения (2) прибавить первичные доходы из-за границы YF, то получаем выражение для валового национального дохода, т.е.:

$ВНД = Y + YF = C + I + (X – IM + YF)$. (3)

Если для обеих частей уравнения (3) прибавить чистые трансферты из-за границы (TRF), то получаем показатель валового национального имеющегося дохода (GNDI):

GNDI = Y + YF + TRF = C + I + (X – IM + YF + TRF). (4)

Выражение в дужках в правой части уравнения (4) включает экспорт и импорт товаров, всех услуг (факторных и нефакторных) и чистые трансферты из-за границы. Это выражение отвечает широкому определению текущих операций платежного баланса (CAB).

Три определения объема выпуска и соответствующие им определение счета текущих операций показаны в таблице.

Таблица. СЧЕТА НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА И ПРОДУКТА И СЧЕТ ТЕКУЩИХ ОПЕРАЦИЙ ПЛАТЕЖНОГО БАЛАНСА

Концепция национальных счетов	Определение счета текущих операций
Валовой внутренний продукт	Экспорт и импорт товаров и нефакторных услуг
Валовой национальный доход	Экспорт и импорт товаров и услуг
Валовой национальный имеющийся доход	Экспорт и импорт товаров и услуг и односторонних трансфертов

Уравнение (2),(3),(4) показывают, что независимо от того, какое определение объема выпуска используется, любое нарушение внешнего баланса должно отображаться на внутреннем балансе, где затраты резидентов на отечественные и импортные товары и услуги - это сумма потребительских и инвестиционных затрат, которую часто называют абсорбцией. Превращая уравнение (4), имеем:

GNDI – A = X – IM = YF + TRF = CAB, (5)

где A — затраты резидентов на товары и услуги внутреннего производства и импорт, т.е. С + И.

Нарушение внутреннего баланса может быть представлено как нарушение равенства инвестиций и сбережений.

Валовые сбережения могут быть представлены как часть GNDI, что не использованная на потребление:

S = GNDI – C. (6)

Подставляя уравнение (6) в уравнение (4), получаем:

S – I = X – IM + YF + TRF = CAB. (7)

Уравнение (7) и (5) - тождественности. Уравнение (7) показывает, что, например, превышение инвестиций над сбережениями найдет отображение в дефиците счета текущих операций.

Можно переписать уравнение (7), показав взнос каждого сектору экономики в совокупных сбережениях. Выделение государственного сектору имеет целью подчеркнуть, что чистые сбережения государства, которые широко обсуждаются общественностью, находятся под контролем органов государственного управления, тогда как на чистые сбережения частного сектору государство может влиять лишь опосредованно, с помощью инструментов экономической политики. Уравнение (7) для секторов имеет такой вид:

$(Sp – Ip) + (Sg – Ig) = X – IM + YF + TRF = CAB,$ (8)

где Sp, Ip — валовые сбережения и валовые инвестиции частного сектору; Sg, Ig — валовые сбережения и валовые инвестиции государства.

В таком случае дефицит за счет текущих операций означает, что или частные сбережения меньше, чем инвестиции частного сектору, или сбережение государственного сектору меньшие за инвестиции этого сектору, или и то и другое.

Баланс текущих операций, который имеет противоположный знак, можно рассматривать как внешние сбережения, которые могут быть использованы для финансирования разности между внутренними сбережениями и инвестициями.

Платежный баланс

Платежный баланс включает счет текущих операций, т.е. запись операций резидентов этой страны с иностранцами по поводу обмена товарами, услугами и односторонними трансфертами, и счет капитала, где приведенные изменения чистых иностранных активов резидентов этой страны, связанные с такими экономическими операциями, как внешние заимствования или платежи за счет погашения ссуд, прямые инвестиции, движение краткосрочного капитала и т.п..

В платежном балансе используется система двойной записи, когда каждая операция отображается как в кредите, так и дебете.

В статьях кредита показываются:

- экспортные потоки ресурсов;
- финансовые потоки, которые отображают или сокращение иностранных активов в экономике, или увеличение иностранных (внешних) пассивов.

К статьям дебета принадлежат:

- реальные потоки ресурсов, которые представляют импорт;
- финансовые потоки, которые отображают или увеличение активов, или сокращение пассивов.

Поскольку статьи кредита принято записывать с положительным знаком, а дебет с отрицательным, и каждая операция отображается как в кредите, так и дебете, то сумма всех статей должны равнять нулю (сложности учета приводят к необходимости включения балансирующей статьи - «чистые ошибки и пропускания»).

Для того чтобы получить информацию относительно дефицита или профициту платежного баланса и принять меры относительно его корректирования, подытоживаются все внешние операции и проводится граница, которая отделяет эту группу операций от других статей. Существуют разные подходы к определению вопроса, которые операции оставлять над границей, а которые - под, т.е., где проводить эту границу. Как правило, под последней оставляют изменения в краткосрочных активах и пассивах органов денежного регулирования, т.е. изменения чистых официальных иностранных резервов. Соответствующие позиции и коммерческих банков и других экономических единиц, если они подвергаются влиянию и эффективно контролируются центральными органами, также могут записываться под границей при определении общего баланса.

Необходимо помнить, что платежный баланс показывает изменения величины резервов как потока, тогда как в денежном виде продемонстрированный запас чистых иностранных активов.

Тождественность платежного баланса может быть записана таким образом:

DR = CAB + DFI, (9)

где DR — изменения чистых официальных международных резервов органов денежного регулирования; DFI — изменения чистой внешней задолженности резидентов, которая не включается в официальные резервы.

Уравнение (9) показывает роль платежного баланса как ограничения потребительских ресурсов в экономике. Дефицит счета текущих операций равняется превышению внутренних затрат над доходами.

Счета налогово-бюджетной сферы

Государственный сектор включает учреждения и организации, которые реализуют общественные цели путем предоставления нерыночных услуг и трансфертов, которые финансируются за счет налогообложения других секторов экономики.

Государственный сектор - это:

- центральное правительство;

- правительство административно-териториальных единиц на уровне областей;
- местные органы управления.

Фонды социального обеспечения также включаются в государственный сектор.

Государственные финансовые институты входят в финансовый сектор, но не к государственному. Нефинансовые государственные предприятия, которые вырабатывают и реализуют товары и услуги, также не включаются в государственный сектор.

Операции, которые осуществляются государственными органами, влияют на рост производства, инфляцию, состояние платежного баланса.

По определению, сумма всех видов бюджетных поступлений (доходов) должна равнять сумме всех видов расходов. В табл. 7.2 представлено основные агрегованные статьи государственного бюджета.

Таблица. ГОСУДАРСТВЕННЫЕ ФИНАНСЫ

Поступление	Расходы
А. Текущие доходы	Д. Текущие расходы
Б. Капитальные доходы	Э. Капитальные расходы
В. Гранты	Ж. Чистое кредитование
Г. Финансирование	
• внешнее	

• внутреннее	

Общий дефицит или профицит определяются как разность между суммарными доходами и грантами (А + Б + В) и общим объемом расходов и чистым кредитованием (Д + Е + Ж). Поскольку налоги и другие доходы вбирают покупательную способность частного (негосударственного) сектору, а государственные затраты увеличивают совокупный спрос, общий дефицит может быть показателем фискальной экспансии, а профицит, наоборот, может указывать на фискальное сжатие.

Разность между текущими доходами и текущими расходами является мерой сбережений государственного сектора. Высокий уровень государственных сбережений иногда может быть интерпретирован как положительное явление, которое оказывает содействие экономическому развитию, поскольку это дает возможность увеличивать капиталовложение.

Операции государственного сектору в счетах национального дохода и продукта могут быть непосредственно связанные со статистикой государственных финансов. Например, государственное потребление может быть получено со статистики государственных финансов путем печали текущих затрат на товары и услуги, включая заработную плату. Однако существуют и отличия в трактовке государственного потребления в счетах национального дохода и продукта и указанными статьями статистики государственных финансов (например, национальные счета строятся по принципу начисления, а статистика государственных финансов - по кассовому принципу).

Государственное накопление капитала по определению счетов национального дохода и продукта равняется сумме приобретенного нового и существующего основного капитала, за вычитанием проданных активов, плюс пополнения запасов. Определение реального накопления капитала в статистике государственных финансов будет отличаться от соответствующего определения в национальных счетах, например на величину продажи активов вследствие приватизации государственных предприятий. Эта величина будет отображаться как капитальный доход в статистике государственных финансов.

Влияние общего дефицита или излишка на совокупный спрос зависит от способа финансирования баланса органов государственного управления. Статьи финансирования отображают операции с финансовыми активами государства, которые проводятся с целью управления ликвидностью, но не с целью проведения государственной политики.

Внешнее финансирование определяется как чистое финансирование. Так, оно включает новые ссуды, полученные от нерезидентов, за исключением амортизационных платежей за существующим долгом. Каждая операция за внешним финансированием имеет корреспондирующую статью в счету капитала платежного баланса.

Внутренние источники финансирования, как правило, делятся на банковские и небанковские. Данные о банковском финансировании, т.е. о кредитах банковской системы, могут быть полученные из «Денежного обзора». Банковское финансирование, по определению, должны равнять изменению (расширению) кредита банковской системы государства за вычитанием изменения размеров депозитов органов государственного управления. Небанковское финансирование включает продажа государственных долговых обязательств (облигации и другие ценные бумаги) небанковскому сектору экономики. Информация об этих операциях поступает из источников государственной статистики.

Существует связь между балансом доходов и расходов государства и счетом текущих операций:

$(Sp – Ip) + (Sg – Ig) = CAB.$

Если государственные сбережения определяются как

$Sg = T – Cg,$

где T — налоги; Cg — государственное потребление, то уравнение (8) можно представить в следующем виде:

$(Sp – Ip) + (T – Sg – Ig) = CAB;$

$(Sp – Ip) + (T – G) = CAB$

или

$(Sp – Ip) + (G – T) = – CAB.$

Последнее уравнение демонстрирует, что сальдо счета текущих операций (с обратным знаком) отвечает балансу инвестиций-сбережений частного сектору и общему дефицита государственного бюджета.

Сокращение бюджетного дефицита есть одной из целей программ корректирования. Особое внимание уделяют финансированию дефицита с учетом ограничений на государственное заимствование в банковской системе и частным кредитам государственному сектору из-за границы.

В последние годы в программах корректирования усиливается акцент на влиянии мероприятий фискальной политики на совокупное предложение, что требует более докладного анализа структуры налогов и государственных расходов.

Счета денежной сферы

Данные статистики денежной сферы бывают, как правило, представленные на трех уровнях:

1. Активы и пассивы органов денежно-кредитного регулирования (как правило, это Национальный банк).

2. Активы и пассивы коммерческих банков.

3. Денежный обзор.

Последний представляет собой консолидированный баланс банковской системы и не включает межбанковские операции.

Денежный обзор показывает, что пассивы (обязательство) банковской системы - это предложение денег, что состоит из денежной наличности в обращении, депозитов по требованию и других депозитов подобного типа, а также квази-денег, т.е.

суммы чистых иностранных активов и чистого внутреннего кредита банковской системы:

$$M = NFA + DC,$$

где M — обязательство банковской системы (предложение денег); NFA — чистые иностранные активы банковской системы, включая официальные международные резервы R; DC — чистый внутренний кредит банковской системы, включая другие статьи.

Для каждой операции банковской системы с иностранными активами должен быть соответствующая запись в платежном балансе, который отображает изменения или под границей, или над границей в счету движения капитала. Так, изменения в чистых иностранных активах банковской системы должны равнять:

1) изменению чистых официальных международных резервов, что отображается в балансе официальных расчетов под границей;

2) изменению чистых иностранных активов банковской системы, которые не включаются в официальные резервы, которые отображаются в счету капитала.

Как свидетельствует денежный обзор, изменения в предложении денег воссоздают изменения чистых иностранных активов или внутреннего кредита. Для стран, которые осуществляют программы корректирования, возможной целью может быть некоторое состояние платежного баланса, а потому для этих стран будет иметь важное значение комбинация внешних и внутренних факторов, которые влияют на предложение денег. У открытой экономики с фиксированным валютным курсом предложение денег есть экзогенной сменной, что подвергается влиянию излишка или дефицита платежного баланса. Через это программы корректирования, как правило, принимают как промежуточную цель объем внутреннего кредита, а не предложение денег.

Связь инструментов кредитно-денежного регулирования с платежным балансом, целевыми показателями экономического роста и инфляции может включать такие этапы:

- прогнозирование спроса на деньги соответственно целевым показателям роста и инфляции;
- установление ценовых значений для чистых иностранных активов, которые отвечают прогнозам состояния платежного баланса;
- определение максимального уровня внутреннего кредита согласно уже заданному спросу на деньги и ценовыми показателями платежного баланса (NFA);
- раздел внутреннего кредита между правительством (при заданном уровне кредитования) и частным сектором;
- количественная оценка инструментов денежной политики, которая отвечает необходимому уровню внутреннего кредита и предложения денег.

Денежные потоки

Счета основных секторов экономики возможно свести к единой таблице, которая показывает затраты каждого сектору экономики и его финансирование с помощью потоков займов и кредитов между секторами, а также между страной и другими странами мира.

Баланс нефинансовых операций каждого сектору, который определяется как разность между сбережениями и инвестициями сектора, в принципе должны равнять изменению в его финансовых активах и пассивах, связанных с финансовыми операциями этого сектору с другими секторами экономики и другими странами мира.

Таблица. ХАРАКТЕРИСТИКА ФИНАНСОВЫХ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ СЕКТОРАМИ ЭКОНОМИКИ

Показатели	Частный сектор	Центральное правительство	Банковская система	Иностранные государства
Баланс нефинансовых операций	Sp – Ip)	(Sg – Ig)		(–CAB)
Баланс секторов		?		?
Финансовые балансы				
Деньги и квази-деньги			?	

Банковский кредит частному сектору	?		?	
Банковский кредит правительства		?	?	
Чистые иностранные активы			?	?
Внешние займы правительства		?		?
Внешние займы частного сектору	?			?
Внутренние небанковские займы правительства	?	?		

При составлении таблиц строят такое предположения:

1) сальдо нефинансовых операций банковской системы равняется нулю, а нефинансовые операции этого сектору включаются в операции частного сектору;

2) дефицит внешнего сектору отображается со знаком «+», а излишек - знаком «-»;

3) для финансовых потоков увеличения активов отображается со знаком «-» («использование фондов»), а рост пассивов - со знаком «+» («источник фондов»), и наоборот.

Цифры первой строки баланса нефинансовых операций отвечают компонентам такого уравнения:

$(Sp – Ip) + (Sg – Ig) – CAB = 0.$

Другие строки таблицы (кроме первого) показывают основные финансовые инструменты, что используются для межсекторного финансирования

Лекция. Математическое моделирование некоторых экономико-политических аспектов международных отношений

План

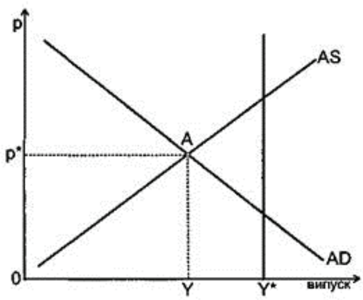
1. Равновесие совокупного спроса и совокупного предложения. Фактические и плановые затраты. "Кейнсианский крест".
2. Периодичность.
3. Волны Кондратьева

1. Равновесие совокупного спроса и совокупного предложения. Фактические и плановые затраты. "Кейнсианский крест"

Классическая экономическая теория выходит из двух основных положений. Во-первых, утверждается, что едва ли возможная ситуация, за которой уровень совокупных затрат Y=C+I+G будет недостаточным для закупки продукции, произведенной при условиях полной занятости ресурсов (т.е., едва ли возможная ситуация, когда $AD \neq AS$). Во-вторых, даже если такая ситуация возникнет, то немедленно изменятся заработная плата, цены и рыночная процентная ставка, и сразу за сокращением совокупного спроса состоится спад производства, что и стабилизирует ситуацию. Важно, что денежный рынок всегда Гарантирует равенство инвестиций и сбережений и, соответственно, полную занятость ресурсов.

Возможное лишь "добровольное" безработица в пределах естественного его уровня. Это означает, что в точке равновесия AD и AS объем производства Y всегда равняется потенциальному В*.

Кейнсианская экономическая теория опровергает существование такого механизма саморегулирования. На основе эмпирических данных, полученных в период "большой



Мал. 5.4. Невідповідність між рівноважним та потенційно можливим обсягом виробництва.

депрессии", Д. Кейнсу удалось довести, что полная занятость в нерегулированной экономике может возникнуть лишь случайно. Равновесие спроса и предложения (рис. 5.4), как правило, не совпадает с полной занятостью ресурсов: в точке А устанавливается равенство AD=AS, тем не менее равновесный объем производства Y<Y*.

Одной из причин такого расхождения есть несоответствие планов инвестиций и сбережений, которые осуществляются разными экономическими агентами из разных мотивов.

Мотивы сбережений домохозяйств:

- приобретение ценных вещей;
- обеспечение в старосте;

- страхование от непредвиденных обстоятельств (болезнь, несчастный случай и т.п.);
- обеспечение детей в будущем. Мотивы инвестиций фирм:
- максимизация нормы чистой прибыли;
- процентная ставка - плата за приобретение денежного капитала для инвестирования, которая учитывается при разработке планов инвестиций.

В соответствии с классической экономической теорией, основным фактором, который определяет динамику инвестиций и сбережений, есть процентная ставка: если она повышается, то домохозяйства начинают относительно больше сохранять и меньше потреблять из каждой дополнительной единицы дохода. Рост сбережений домохозяйств ведет к уменьшению цены кредита, что обеспечивает увеличение инвестиций.

В соответствии с кейнсианской экономической теорией, не пруда процента, а величина используемого дохода домохозяйств является основным фактором, который определяет динамику потребления и сбережений. При этом экономится та часть дохода, которая остается после осуществления всех потребительских затрат. Влияние процентной ставки есть второстепенным, поскольку она сыграет довольно незначительную роль относительно определения объемов потребления и сбережений. В тот же время динамика инвестиций определяется, прежде всего, динамикой процентных ставок, которая находит отображение в соответствующих функциях потребления, сбережений и инвестиций.

Расхождение планов инвестиций и сбережений предопределяет колебание фактического объема производства вокруг потенциального, а также несоответствие между фактическим уровнем безработицы и величиной NAIRU. Этим колебанием оказывает содействие и низкая эластичность заработной платы и цен относительно их сокращения. Поэтому циклическая безработица, которой имеет принудительный, а не добровольный характер, есть, за Кейнсом, экономической закономерностью. Для того чтобы избегнуть значительных потерь от спада производства, необходимо проводить активную государственную политику по стабилизации совокупного спроса, которую кейнсианцы предлагают осуществлять с помощью изменений величин государственных затрат, налогов и денежного предложения.

Как же нужно проводить стабилизацию совокупного спроса? С этим вопросом нам поможет разобраться кейнсианская модель равновесия. Эта модель называется также " 45-градусная модель", "модель доходы - затраты" или "кейнсианский крест".

Совокупный спрос (AD) в модели представлены плановыми затратами - суммой, которую домохозяйства, фирмы и государство намерены потратить на куплю товаров и оплату услуг (обозначается буквой E):

$E=C+I+G$.

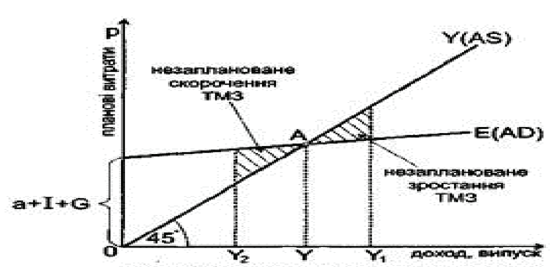
Совокупное предложение (AS) представленная фактическими затратами, Y.

Фактические (реальные) затраты отличаются от плановых тогда, когда фирмы вынуждены осуществлять незапланированные инвестиции в товарно-материальные запасы (ТМЗ) в условиях неожидаемых изменений в уровне продаж, т.е.:

- Фактические инвестиции.
- Плановые инвестиции.
- Незапланированные инвестиции в ТМЗ

Следует подчеркнуть, что и плану, и фактические затраты в кейнсианськой модели равновесия является функцией от дохода и не зависят от уровня цен, который остается фиксированным. Кроме этого, в модели пропущены амортизационные затраты и косвенные налоги на бизнес, а потому будем считать, что ВВП=ЧВП=НД.

Функция плановых затрат, E=C+I+G, графически изображается как функция потребления, C=a+b-(Y-T), "смещенная" вверх на величину I+G. Очевидно, что линия плановых затрат пересечет линию фактических затрат в какой-то точке А, где



Мал. 5.5. Кейнсіанська модель рівноваги.

реальные и плановые затраты равняют одно одному (Y=E). Приведенный график получил название кейнсиганского креста.

На линии $Y=Y$ всегда уместно равенство фактических инвестиций и сбережений. В точке А, где доход равняется плановым затратам, достигается равенство между плановыми и фактическими инвестициями и сбережениями, т.е. устанавливается макроэкономическое равновесие.

Если фактический объем производства Y1превышает равновесный Y, то это означает, что покупатели покупают товаров меньше, чем фирмы вырабатывают, т.е. AD<AS. Нереализованная продукция набирает формы товарно-материальных запасов (ТМЗ), которые возрастают. Такое увеличение запасов принуждает фирмы сокращать производство и занятость, которая в результате уменьшает ВВП. Постепенно Y1 уменьшается к уровню/т.е. доход и плановые затраты выравниваются. Таким образом, достигается равновесие между совокупным спросом и совокупным предложением (AD=AS).

Наоборот, если фактический выпуск Y2 меньший за равновесный уровень Y, то это означает, что фирмы вырабатывают меньше, чем покупатели готу приобрести, т.е. AD>AS. Повышенный спрос удовлетворяется за счет незапланованного сокращение запасов фирм, которые создает стимулы к увеличению занятости и выпуска. В результате ВВП постепенно возрастает от уровня Г2к уровню Y, и снова достигается равновесие: AD=AS

2. Периодичность

Периодичность — это повторяемость (цикличность) явления через определенные промежутки времени. Смену дня и ночи, времён года, фаз Луны мы видим в повседневной жизни. Свет, звук, тепло, радиоволны, переменный электрический ток представляют собой колебательные, периодические процессы. Основой химии является Периодическая система элементов Д. И. Менделеева. Биоритмам посвящены многочисленные монографии и Интернет-проекты (Glass, Хронобиология).

Цикличность или периодичность имеют разные способы представления повторяемого во времени процесса - в виде окружности (цикличность) либо в виде линии колебаний (периодичность).

Экономические и исторические циклы

Обнаружены 3-4 (циклы Китчина), 7—11 (циклы Жюгляра), 20—25 (циклы Кузнеца), 47—60 (циклы Кондратьева), 150—300 1000-и летние периодичности в экономическом развитии общества (Яковец, Анатомия).

Описаны волны демократизации и отката вот неё в США и Европе (Хантингтон, Самюэль Филлипс), российские реформы и контрреформы, начиная с 1801 года и кончая современностью, периодичность во внутренней и внешней политике США (Пантин).

Хорошо известны природные и экологические, демографические, технологические, экономические и социально-политические циклы, периодичности в науке, культуре и образовании (Яковец, Циклические, Атлас, Петухов).

Предложено значительное число математических моделей, описывающих социально-демографические циклы в истории сложных аграрных обществ (с периодичностью порядка 90-100 лет для исламского Ближнего Востока и порядка 150—200 лет для остального мира), т.н. «вековые циклы» (Нефёдов, Турчин, Коротаев, Малков).

Терминология и геометрия

Чтобы не делать ошибочных противопоставлений, полезно разобраться в геометрических основах терминов, употребляемых для описания периодичности. Так, циклы (окружности) и волны (синусоиды) являются эквивалентными описаниями, характеризуют одно и то же, просто они даны в разных системах координат. В полярной системе координат независимая переменная (например, время) характеризуется углом и получается окружность, в прямоугольной (Декартовой) системе — независимая переменная задаётся величиной отрезка на горизонтальной осы и получается синусоида (волны одинаковой высоты). Это были описания изменений без развития.

Если имеет место развитие, то окружность превращается в развёртывающуюся спираль, а в синусоиды постоянно увеличивается амплитуда (увеличивается высота волны). Именно эти (эквивалентные) геометрические образы имеются в виде при современном употреблении терминов «цикл» и «волна». Принципиальным недодостатком обоих отображений является невозможность показать разрывы и скачки (кризисы). Когда они имеют место, становится очевидной необходимость применения функции тангенса или, лучше, дробных функций (см. ниже). Именно такими уравнениями удалось описать Периодический закон Д. И. Менделеева

Все ранее рассмотренные кривые являются функциями одной переменной и лежат в плоскости. При анализе на качественном уровне часто вместо плоской спирали безосновательно изображается трехмерная, хотя речь идет в зависимости вот одного или вот неопределенного количества параметров.

Составление уравнений

Для описания периодических процессов часто применяются уравнения на основе косинуса (электротехника, радиотехника). Периодическая функция, если она не имеет разрывов, может быть представленная суммой набора разнотипных синусоид (преобразование Фурье). Однако в сложных случаях, в частности, при процессах развития, в соответствии с диалектикой и синергетикой, как правило, происходят разрывы и скачки.

Для описания периодичности особенно полезны дробные функции, которые получаются из любой исходной функции путём отбрасывания целой части от мечений зависимого переменного. Так, для простейшего варианта в = {x} (фигурные скобки означают это отбрасывание), если x = 0,0 0,1 0,2...0…0,5…1,01,11,2…1,5…2,02,12,2…2,5…3,0,

это y = 0,0 0,1 0,2...0…0,5…0,00,10,2…0,5…0,00,10,2…0,5…0,0

Такие функции позволяют с высокой точностью характеризовать самые разные (с разрывами и без них) периодические закономерности. Это достигается благодаря многообразию исходных функций; некоторые примеры приведены на рисунке 1 (Именитов). Для подбора уравнения годятся обычные компьютерные программы для обработки экспериментальных данных.

3. Волны Кондратьева

Русский ученый М. Д. Кондратьев, продолжая исследование в области кризисных явлений в экономике капиталистических стран, еще в 20-те года XX ст. выдвинул концепцию больших циклов хозяйственной конъюнктуры, которые со временем достали название «длинные волны» Кондратьева [54, 80].

С целью обоснования больших циклов М. Д. Кондратьев проанализировал большой фактический материал. Были изученные статистические данные четырех ведущих капиталистических стран — Англии, Франции, Германии, США за период 100—140 лет и исследованное большое количество статистических показателей таких, как:

- динамика цен;
- заработное жалованье;

– процент на капитал;

– внешнеторговое обращение;

– производство основных видов продукции промышленности и др.

Проведенные исследования дали возможность проявить наличие цикличности их волн в пределах 50-60 лет. Цикл имеет 4 фазы: S две — возведение; две — упадка. За оценкой М. Кондратьева, периоды больших циклов из конца XVIII ст. были такими.

Таблиця 2.1

ПЕРІОДИ ВЕЛИКИХ ХВИЛЬ

Хвиля	Фази	
	піднесення	занепаду
I	З кінця 80-х — початку 90-х до 1810—1817 рр.	З 1810—1817 рр. до 1844—1851 рр.
II	З 1844—1851 рр. до 1870—1875 рр.	З 1870—1875 рр. до 1890—1896 рр.
III	З 1890—1896 рр. до 1914—1920 рр.	З 1914—1920 рр.

ГКондратьев определил, что перед и в начале возведения волны каждого большого цикла возникают глубокие изменения в экономической жизни общества, что оказываются в значительных изменениях техники, производства, возникновении новых рынков сбыта. Так, в развитии первой волны возведения (конец XVIII ст.) определяющими были изобретения в текстильной промышленности и производстве чугуна. Рост в период второй волны (середина XIX ст.) было обусловлено, прежде всего, строительство железных дорог, развитием морского транспорта, а третья волна возведения (начало XX ст.) связана с открытием электричества, радио и др. Кроме того, подмечено, что на стадии «возведение» волны сопровождаются нестабильностью в обществе — политическими неурядицами, забастовками, революциями, стадия «упадка» волны характеризуется активизацией инновационной деятельности, оживлением в создании новых рабочих мест, новых областей производства, изменением технологической парадигмы, которая приводит к преодолению кризиса.

Г. Кондратьев довел, что есть три типа «волн» — короткие (приблизительно 3 года), средние (15 лет) и длинные (60 лет) и все они влияют на экономическую конъюнктуру. При построении системы регулирования экономики необходимо учитывать фактор времени и следить за развитием кризисных явлений, который дает возможность с меньшими затратами восстановить равновесие, заменить одну парадигму на другую. Инновационные процессы следует связывать с разными факторами конъюнктуры — с равновесомой «первого порядка» — спрос и предложение; «второго порядка» — переливание капитала в новое оборудование, машины, модернизацию производства; «третьего порядка» — касается изменения производственной структуры, сырьевой базы, источников энергии, квалификации и условий работы рабочих и т.п.. Отклонение от первого типа равновесия приводит к коротким волнам, второму типу — к средним волнам, третий — к длинным волнам.

Таким образом, основной закономерностью больших циклов М. Кондратьев считал научно-технические изобретения, открытие, изменения технологического уклада, которые влияют на социально-экономическую жизнь общества, образование новых рынков, новых стран и т.п..

Г. Кондратьев ввел понятие «техническая революция как тягловая сила» цикла, разработал теорию «инновационных» пакетов и показал, что нововведения распределяются во времени неравномерно и появляются группами. Изменения в технике обусловлены спросом производства, созданием таких условий, за которые применения изобретений становится возможным и необходимым. Войны и революции не падают с неба, а является следствием созданных экономических, социальных и политических обстоятельств, которые порождают очередной цикл, а каждая следующая фаза длинного цикла является результатом кумулятивных процессов предыдущей фазы.

На рисунках показана периодичность возникновения нововведений с 1740 г. до сих пор и механизм цикла.

В наше время теория «длинных волн» дает возможность многим аналитикам считать, что закончилась четвертая волна, а 80-криза х лет воспринимать как осуществленный факт, который подтверждает цикличность развития.

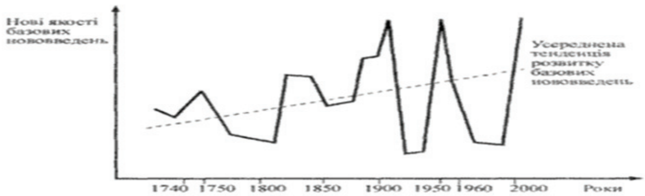


Рис. 2.4. Періодичність появи радикальних нововведень з 1740 р. до 2000 р.

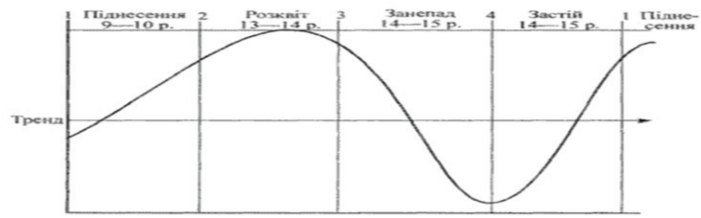


Рис. 2.5. Механізм циклу

Траекторию равновесия экономического роста (тренд) определяют два основных показателя: скорость обновления производственных фондов и эффективность нововведений.

Феномен цикла — это периодичность повторения характерных социоэкономических и технологических ситуаций через определенные отрезки времени.

Средние циклы нанизываются на длинные волны. Г. Кондратьев в книге «Длинные волны конъюнктуры» [80] подчеркивает, что волнообразное движение представляет собой процесс отклонения от состояния равновесия, к которому стремится экономика. Периодически это равновесие поднимается и возникает необходимость создания нового запаса «основных капитальных благ», которые бы отвечали возникающему способу производства. Такое обновление проходит не плавно, а толчками. Как уже отмечалось, решающую роль при этом сыграют научно-технические изобретения, открытия, научно-технические революции.

Следует заметить, что все больше исследователей поддерживают волновую, циклическую концепцию развития экономики. Так, американский исследователь Маркетти (Marchetti, 1982), проанализировав появление изобретений и нововведений за последние 200 лет, сделал вывод, что они появляются волнами и имеют определенную конфигурацию и частоту: вслед за волнами изобретений с определенным временным лагом возникают волны нововведений [67, с 32, 33]. Сопоставление и анализ трех волн дали ему основания к выводу, которая временная дистанция между центральными точками каждой волны остается постоянной и равняется 55 годам для нововведений и 63 — для изобретений, которая отвечает периодичности длинных волн, открытых М. Д. Кондратьевым.

Современные экономические методы сделали возможным выделение 1380 видов циклов [80], что касаются экономики. Тем не менее лишь три из них имеют практическое и теоретическое значения. Это — циклы материальных-товарно-материальных запасов Дж. Китчина (с периодом до 3 лет); циклы инвестиций в оборудование и оборудование К. Жугляра (период 7-11 лет); строительные циклы С. Кузнеца (период 18-22 года).

На мысль многих исследователей [67] экономической 80-кризиса х лет, мир переживает завершение цикла роста, поскольку нововведения, которые породили этот цикл, достигли стадии зрелости. Возникли новые проблемы, в частности такие: быстрое уменьшение запасов минерального и энергетического сырья; истощение культурного слоя земли; накопление отходов и токсичных продуктов жизнедеятельности; перегрев атмосферы, изменение воздушных потоков; потеря способности окружающей среды (природы) к воспроизведению и саморегуляции. Рождается новая эпоха, переход к которой означает непрерывность непрерывности или период кризиса, что может быть фатальным как для фирм, что не смогут адаптироваться к новым условиям, так и для общества в целом.

Фазы изобретений и нововведений имеют тенденцию к ускорению, которое особенно наглядно видно на примере некоторых важных изобретений, которые реализовались на протяжении последних 250 лет (рис. 2.6) и волновой динамики больших циклов (рис. 2.7). Чем ближе к нашему времени, тем более сокращается разрыв между изобретением и его воплощением в производство [23, 62].

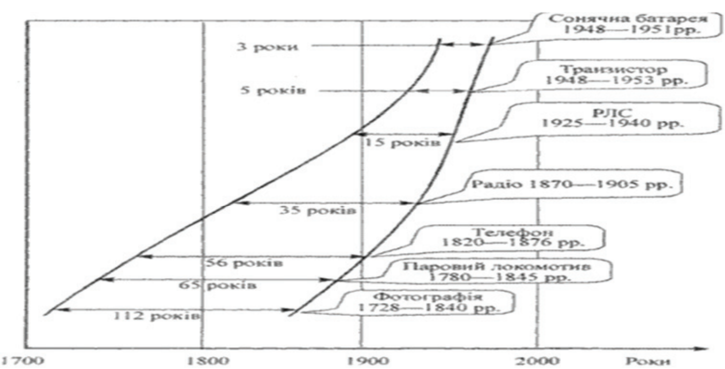


Рис. 2.6. Часовий цикл винаходів та втілення їх у виробництво

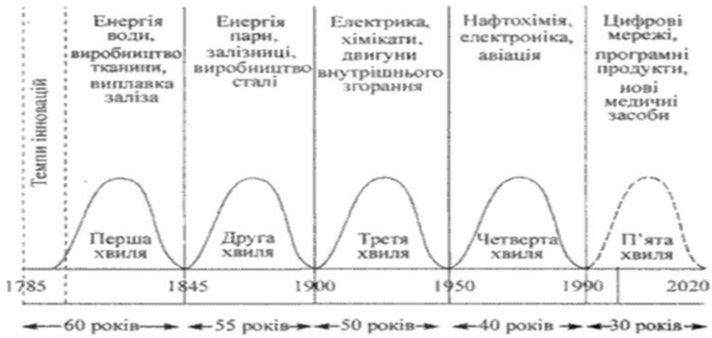


Рис. 2.7. Прискорення циклічного розвитку

Мировой опыт подтверждает, что продолжительное развитие производства в долгосрочном периоде зависит не столько от ресурсных возможностей, сколько от инновационного характера производства в конкретной среде.

Привлеченные сегодня в производство работа и капитал изменяют свое качество и производительность на базе новых технологий, которые дает возможность резко повысить уровень конкурентоспособности фирм на мировых рынках. Вследствие диффузии нововведений рынки возрастают быстрее, чем ожидалось по прогнозу в 90-середине х лет (средний рост мировой экономики составляет 3 %). Кризисные явления последних лет удавалось преодолевать за счет поддержки высокоразвитыми странами высоких темпов увеличения совокупного мирового спроса. Тем не менее, рыночная экономика накапливает депрессивные компоненты вследствие перенасыщения рынка товарами.

Большинство экономистов-аналитиков [12, 17, 31] придут к выводу, что выход из кризиса будет связан с возникновением новой волны нововведений, которая даст продолжительный стимул следующему периоду роста, который ныне оказывается в:

– бушующем развитии науки, которая начинает новые технологии;
– преобразовании сельского хозяйства в науку и капиталоемкую область;
– развития сферы услуг;
– индустриализации стран, которые развиваются;
– тенденции к децентрализации модели жизнь населения, моделирование производственного процесса и принятие решений;
– изменениях окружающей среды и необходимости его защиты;
– возникновении новых концепций организационного развития

2.3 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЙ

Лекция. Механизм регулирования и управление конфликтными ситуациями

План

1. Способы урегулирования и урегулирование конфликтов.
2. Управление социальными конфликтами.
3. Социальные конфликты в современной Украине.

1. Способы урегулирования и решения конфликтов

Управлению конфликтом должна предшествовать стадия его диагностики, т.е. определение основных составляющих конфликта, причин, которые его породили. При проведении диагностики конфликта достаточно сложным есть выявления субъектов конфликта, их нужд, которые затронули, интересов, опасений, причин конфликтного взаимодействия.

Для выявления причин конфликта, возможно, использовать метод картографии конфликта, суть которого заключается в графическом отображении составляющих конфликта, в последовательном анализе поведения участников конфликтного взаимодействия, в формулировании основной проблемы, нужд и опасений участников, способов устранения причин, которые привели к конфликту. Этот метод разработан Х. Корнелиусом и Ш. Фейром. Картография конфликта состоит из нескольких этапов. Первый этап картографии конфликта - фиксирование конфликтной проблемы. На первом этапе проблема описывается в общих чертах, определяется предмет конфликта. Если, например, речь идет о несогласовании в работе, о том, что кто-то работает хуже за другие, то проблему можно отобразить как "распределение нагрузки". Если конфликт возник из-за отсутствия доверия между лицом и группой, то проблему можно выразить как "взаимоотношения". На данном этапе важно определить самую природу конфликта и неважно, что это не полностью отображает суть проблемы. Не следует определять проблему в форме двоякого выбора противоположностей "так или нет", нужно оставить возможность нахождения новых и оригинальных решений.

Второй этап - определение главных участников конфликта. Участие в конфликте может быть разной. Соответственно этому выделяют таких участников:

– оппонент - участник конфликта, который считает свои интересы несогласованными с интересами другого;
– противник - оппонент, что стремится реализовать свои интересы за счет нейтрализации интересов другого;
– агрессор - противник, что обнаруживает агрессивность, старается притворить другому зло;
– посредник-участник - его задачи помочь ликвидировать конфликт;
– арбитр - участник, цель которого проанализировать конфликт и дать рекомендации относительно его ликвидации;

– враг-противник - его цель - уничтожить противника (физически или морально, социально).

Кроме этого есть еще те, кто сочувствует, и те, кто осуждает действию определенной стороны в данном конфликте. На втором этапе оказываются главные участники (субъекты) конфликта. В список можно внести отдельных лиц или целые команды, отделы, группы, организации. Привлеченных в конфликт людей, которые имеют общие интересы в конфликте, можно объединить у группы.

Третий этап в составлении карты конфликта - выяснение того, в чем заключаются интересы и в чем опасение каждого участника конфликта. Третий этап припускает перечень основных нужд и опасений, связанных с этой потребностью, всех основных участников конфликтного взаимодействия. Необходимо выяснить мотивы поведения, которые стоят за позициями участников в данном вопросе. Поступки людей определяются их желаниями, нуждами, мотивами, которые необходимо определить. Интересы и опасения участника конфликта конкретизируются в его позиции. В основном виде позиция - это ответ на вопрос - "Чего я хочу?".

Графическое отображение нужд и опасений расширяет возможности и создает условия для более широкого круга решений, возможных после окончания всего процесса картографии.

Таким образом, процесс анализа конфликта состоит из таких этапов:

1) определение проблемы;

2) определение главных участников;

3) уточнение интересов и опасений каждого участника;

4) уточнение конфликтной ситуации;

5) уточнение возможных позиций каждого участника;

6) анализ позиции с точки зрения скрытых за ней опасений и интересов;

7) сравнительный анализ конфликтной ситуации и позиций участников с ориентацией на изготовление альтернативных решений.

Если составляется карта конфликта между двумя сотрудниками в организации, то в карту можно включить этих работников, а специалистов, которые остались, объединить в одну группу, или выделить отдельно еще и начальника данного подраздела.

Применение метода картографии конфликта разрешает проявить участников конфликта, из них определить субъектов этого конфликтного взаимодействия, представить предмет конфликта (взаемоотношения в отделе), нужды и опасение всех участников.

Важное значение в анализе конфликта имеет выяснение опасений ("отрицательных интересов"). По мере вхождения в конфликт опасения доминируют над "положительными" интересами, вызывая отрицательные эмоции и тем самым искривляя представление о действительности, конфликтной ситуации.

Участие в конфликтных ситуациях достаточно часто сопровождается усилением стрессовых станов человека. Конфликт являются сложными взаемоотношение между оппонентами, окрашенные сильными эмоциональными переживаниями. Вместе с тем неадекватное восприятие ситуации, которая происходит через стрессовый стан одного из ее участников, достаточно часто приводит к конфликтам.

Конфликтная ситуация может существовать на протяжении лет и не всегда сопровождается сильными переживаниями, но конфликт как активное противодействие субъектов отстаивания своих интересов, вызывает резкие отрицательные эмоции.

Понятие "стресс" означает стан индивида, который возникает как ответ на разнообразные экстремальные действия внешней среды.

В последнее время на Западе появилось и широко обсуждается такое понятие как "психологическое насилие", т.е. насилие над психикой человека в результате того, что его принуждают делать то, что он не хочет (работать не там, где интересно; выполнять не ту работу; делать то, что нужное работодателю). Жертвами психологического насилия может стать любой индивид. Ныне разрабатываются методы борьбы с этим явлением.

Существует много факторов, которые вызывают стрессы (организационные, позаорганизационные, личные факторы). Организационные факторы определяются позицией индивида в организации, в частности, отсутствием работы соответственно квалификации; плохими взаемоотношение с окружающими; отсутствием перспектив роста, наличием конкуренции на рабочих местах и т.п.

Организационными факторами могут быть:

– недостаточная нагрузка сотрудника, при которой работнику не представляется возможности продемонстрировать свою квалификацию в полной мере;
– недостаточно ясное понимание работником своей роли и места в производственном процессе, коллективе. Такая ситуация вызвана отсутствием четко установленных прав и обязанностей специалиста, неясностью задачи, отсутствием перспектив роста;
– необходимость одновременного выполнения разнородных задач, не связанных между собой и одинаково срочных. Данная причина характерная для руководителей среднего звена в организации при отсутствии размежевания функций между подразделами и уровнями управления;
– отторгнутость работников от участия в управлении организацией, принятии решений по дальнейшему развитию деятельности организации в период резкого изменения направлений ее активности.

Такое положение характерное для значительного количества больших отечественных предприятий, где не налаженная система управления персоналом и рядовые сотрудники оторваны от процесса изготовления решений. На фирмах Запада существуют целые программы привлечения персонала у дела фирмы и разработки стратегических решений, особенно при необходимости увеличения объема производства или улучшение качества изделий, которые выпускаются; изменение задач нанимаемого работника при переходе на работу в частные структуры, осознание этим работником своей основной задачи - увеличение прибыли владельца этой фирмы.

Позаорганизационные факторы вызывают возникновение стрессов в результате действия следующих обстоятельств:

– отсутствие работы или продолжительного ее поиска;
– конкуренция на рынке работы;
– кризисный стан экономики страны и региона, в частности;
– семейные трудности.

Личные факторы, которые вызывают стрессовые станы, формируются под влиянием нереализованных нужд лица, эмоциональной нестойкости, заниженной или завышенной самооценки и др.

Для определения найрациональнейшего способа действия на человека в стане стрессовой ситуации необходимо иметь представления о динамике развития внутреннего напряжения у человека. Управление стрессами есть способами приспосабливания лица к стрессовой ситуации. Существуют несколько уровней управления стрессами.

В результате изменений в политике, структуре производства, изготовлению четких требований к сотрудникам, оценке их деятельности, количество стрессов уменьшается. В некоторых организациях, преимущественно в зарубежных компаниях и в отдельных отечественных банковских структурах проводят коммуникативные тренинги для развития коммуникативной культуры сотрудников, обучение навыкам сбрасывания напряжения, выездные игровые тренинги с целью снятия напряжения в коллективах, укрепление связей между сотрудниками. Они помогают человеку ощущать себя лучше, расслабиться, восстановить свои силы. Подобные программы существуют и применяются на уровне всей организации, особенно много их разработано последними годами на предприятиях стран Западной Европы и США.

Например, в Швеции закон 1991 года о "Производственной среде" делает авансы трудящихся менять свою рабочую обстановку, приспосабливать ее к себе, а администрации предлагается во всем им помогать. В этих странах профессиональный стресс рассматривается в контексте общей обстановки на фирме и в обществе. Относится задача уменьшения стресса за счет лучшей организации работы, изменения характера работы, установление реальных плановых задач, улучшение личных взаемоотношений в организациях, создание небольших рабочих групп. Американские компании все чаще сталкиваются с требованиями о выплате компенсаций за "профессиональный" стресс и удовлетворяют эти требования. Если в 1983 году у всех судебных исков, предъявленных фирмам, 15 % затрагивали плату за профессиональный риск, то в 1993 году эта величина составила уже 40 %, а удовлетворяются эти иски вдвое чаще, чем иски по физическому убытку здоровью.

2. Управление социальными конфликтами

Определенных условий нуждается в не только возникновение, но и успешное решение конфликта. Намного легче предупредить конфликт, чем его решить. Но если конфликт возник, необходимо сделать все для его быстрого решения.

Условия решения конфликта	• своевременная и точная диагностика причин возникновения конфликта, в ходе которой оказываются объективно существующие противоречия, интересы, цели сторон. На основании такого анализа определяется так называемая "деловая зона конфликта"; • взаимная заинтересованность сторон у преодоление существующих между ними противоречий. Это возможно лишь при условии признания интересов каждой из сторон, преодоление недоверия одна до одной; • общий поиск путей преодоления конфликтов

Решение конфликта - это полное или частичное устранения причин, которые его порождают, или изменение целей и поведения участников конфликта.

Решение конфликтов есть главной, тем не менее, не единой составляющей процесса управления конфликтами, что включает в себя мероприятия и стратегии не только преодоление, а и предупреждение конфликтов.

Управление конфликтами - это целенаправленное влияние соответствующих государственных органов, общественных организаций на характер отношений между социальными субъектами с целью:

- избежание их конфликтного взаимодействия,
- устранение или минимизации причин вероятных конфликтов,
- а в случае их возникновения - корректирование поведения участников конфликта в направлении поиска взаимоприемлемых путей его конструктивного решения.

Разработка технологий управления социальными конфликтами, регулирование конфликтных отношений в обществе есть одной из центральных проблем современной социологии конфликта. Такие технологии опираются на использование апробированных практикой научно обоснованных методов решения конфликтов.

Методы решения конфликтов	• метод избежания конфликта; • метод переговоров; • метод использования посредничества; • метод третьего рассмотрения

Метод избежания конфликта разрешает выиграть время, мобилизовать ресурсы, объективно оценить ситуацию, скорректировать свои целые, однако не отстраняет причины, а, ведь - ї вероятности возникновения конфликта в будущем.

Метод переговоров разрешает избегнуть насильнических методов, снять остроту конфликта, понять аргументацию оппонента, объективно оценить реальное соотношение сил и условия примирения. Переговоры разрешают рассмотреть альтернативные ситуации, прийти к взаимопониманию, открыть путь к сотрудничеству.

Метод использования посредничества. Практика доказывает, что удачно подобранный посредник может быстро урегулировать конфликт там, где без его участия согласие было бы невозможным. Метод третейского рассмотрения предусматривает, что анализ конфликта осуществляется в четком соответствии нормам закона, в том числе, и международного права.

Использование указанных методов, или их объединение разрешает участникам конфликта успешно реализовать ту или другую стратегию выхода из конфликта.

Апробация указанных методов и стратегий решения конфликтов на практике разрешила ученым сформулировать также принципы поведения субъектов конфликта.

Профилактика конфликтов - совокупность направлений, средств и
методов управления социальными организациями, которые уменьшают
вероятность возникновения конфликтов.

Стартегії виходу з конфлікту

- ***компроміс*** *— часткове досягнення своїх інтересів конфліктуючими сторонами на основі взаємних поступок, відмови від окремих вимог і претензій, часткового визнання вимог і претензій протилежної сторони;*
- ***співробітництво*** *— конструктивне розв'язання проблеми конфлікту на основі взаємного корегування його суб'єктами своїх цілей, позицій, узгодження інтересів;*
- ***домінування*** *— задоволення інтересів однієї з конфліктуючих сторін за рахунок іншої шляхом нав'язування їй вигідного для першої сторони рішення;*
- ***пристосування*** *— вимушена або добровільна відмова від боротьби однієї з конфліктуючих сторін за умов усвідомлення своєї неправоти, необхідності збереження добрих стосунків з опонентом або сильної залежності від нього*

Основні напрями діяльності з профілактики конфліктів

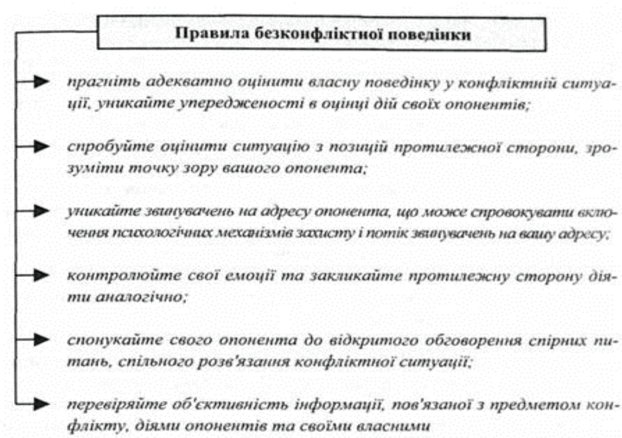
- *оптимізацію організаційно-управлінських умов створення та функціонування організацій як можливих причин виникнення конфліктів;*
- *корегування поведінки членів організації у відповідності з загальноприйнятими в організації нормами та правилами;*
- *створення сприятливого соціально-психологічного клімату*

Принципи поведінки суб'єктів конфлікту

- *предметом переговорів мають бути лише питання, що безпосередньо стосуються змісту конфлікту;*
- *усі учасники переговорів повинні демонструвати схильність до досягнення консенсусу;*
- *у процесі переговорів сторони повинні прагнути до зняття психологічної напруги;*
- *сторони мають демонструвати взаємоповагу та належний рівень культури спілкування;*
- *на переговорах їх учасники повинні прагнути до створення атмосфери публічного обміну думками, відкрито і аргументовано аналізуючи позиції один одного*

Важной составляющей предотвращения конфликтов есть "обучения" сотрудникам организации правилам бесконфликтного поведения, соблюдение которых разрешит уменьшить риск возникновения и углубление конфликтов в организации по субъективной причине.

Важной проблемой управления конфликтами есть их институализация - формирование в обществе стойкого комплекса формальных и неформальных правил, принципов, норм регулирования конфликтных отношений, которые признаются субъектами социального взаимодействия. Наличие институционных механизмов, которые обеспечивают проведение консультаций, переговоров, привлечение третьей стороны, поиск взаимоприемлемых решений, изучение возможных альтернатив и т.п. является ручательством мирного, ненасильственного урегулирования конфликтов.



Рядом с закреплением в общественном сознании определенных правил и норм конфликтного поведения, институциализация конфликтов также предусматривает:

– закрепление на ментальном уровне образа конфликта как нормального, а не патологического явления, его своеобразная легитимация в общественном сознании;
– признание альтернативности социальных позиций - политических, социально-экономических, духовно-идеологических, социокультурных, национально-этнических, религиозных и т.п.;
– распространение общепризнанных правил, норм конфликтного поведения не только на действии субъектов конфликтов, а и их закрепление в политико-правовой культуре общества, государства;

– наличие или формирования специальных институтов регулирования социальных конфликтов;
– существование конституционных подходов к управлению социальными конфликтами.

Значительную роль в предупреждении и преодолении конфликтов сыграют также социологические методы их изучения, которые разрешают своевременно диагностировать, всесторонне анализировать и прогнозировать развитие конфликтов. К таким методам, в частности, принадлежат:

– метод системно-структурного анализа, с помощью которого определяются содержательные и пространственно-временные параметры конфликта, выясняются его структурные элементы и характер связей между ними, устанавливается их иерархия;
– метод системно-функционального анализа, который разрешает зафиксировать внешние проявления конфликта в обществе, его влияние на макро- и микросреда;
– методы конкретных социологических исследований, в частности, метод измерения, с помощью которого осуществляется регулярное измерение социальной напряженности и ее диагностика, методы сбора и анализа социологической информации, которые разрешают обобщить и систематизировать социальные факты о развитии конфликта и поведении конфликтующих сторон и прочие

3. Социальные конфликты в современной Украине

Начатый провозглашениям независимости Украины процесс демократизации и перехода к рыночным отношениям, которые предусматривают "свободную игру" разнообразных социальных и индивидуальных интересов и стремлений, резко усилил действие конфликтогенных факторов во всех сферах жизни украинского общества. Практический опыт последнего десятилетия XX ст. ярко демонстрирует значительное обострение борьбы за власть, статус и ресурсы, права и сферы влияния разнообразнейший социальных субъектов от властных структур центрального и регионального уровня к трудовым коллективам, профсоюзам, политическим партиям и общественным движениям, национальным и религиозным сообществам, социальным группам и отдельным личностям. Противоборство конфликтующих сторон приобретает разнообразные формы - от трудовых споров, забастовок к массовым акциям социального протеста с требованиями изменения существующей системы власти, которые сопровождаются внутренними прищепами социальных сообществ, движений, социальных институтов.

Ведущей тенденцией развития социальных процессов в современной Украине есть нарастания дезинтеграции традиционных социальных структур и связей и постепенное формирование качественно нового типа интеграции дифференциации общества. Вследствие глубоких экономических и социальных преобразований от 90-начала х гг. XX ст. существенно изменилась социальная структура украинского общества, формируются его новые социальные группы, в частности, владельцев и предпринимателей.

Значительно укрепились и такие группы, как номенклатурная бюрократия, представители "теневого" бизнеса, финансовая олигархия. Вместе с тем, интенсивно происходит маргинализация общества и "декомпозиция" его социальной структуры. Усиливается расхождение между ее элементами в характере работы, размерах доходов, равные образования и т.п.. Вследствие этого возрастает социальная неровность, которая является главным источником реальных и вероятных социальных конфликтов.

За всего разнообразие факторов, которые влияют на степень конфликтности в обществе, главную роль сыграют противоречие между тремя главными общественными структурами и внутри них. Речь идет о власти (законодательную, исполнительную и судебную), предпринимательство (государственное, коллективное, частное, спекулятивное, мафиозное, компрадорское) и производителей материальных и духовных благ (интеллигенция, служащем, рабочие и крестьяне, фермеры, студенчество и др.). Противоречие между ними усиливаются, некоторые из них приобретают форму социальных антагонизмов. Антагонистического характера, в частности, приобрело противоречие между приверженцами и неприятелями центральной исполнительной власти, которое особенно ярко оказалось во время так называемого "кассетного скандала", парламентских выборов 2002 года, когда "партия власти", в сущности, оказалась аутсайдером парламентских гонок. Этот антагонизм охватил все уровни социального организма - классы, социальные группы, социальные институты, общество в целом.

Усиливается конфликт новорожденного класса буржуазии с другими классами и социальными группами, который разворачивается вокруг распределения кредитов, механизмов приватизации, налогового законодательства. Нарастают забастовки шахтеров, работников бюджетной сферы, организованные выступления трудящихся в протест против невыплаты заработной платы, задолженностей из пенсий, повышение цен на товары и коммунальные услуги. Участились акции трудящихся, связанные с отстаиванием своего права собственности на имущество предприятий. Рядом с экономическими требованиями трудящиеся все чаще предъявляют политические требования изменения существующей системы власти, отставки правительства, переизбрание президента Украины.

Вообще трудовые конфликты являются реакцией на перекосы в экономической и социальной политике правительства и связанные с перераспределением собственности и становлением рыночных отношений, которые неизбежно приводят к поляризации социальных групп.

Большинство социально-политических конфликтов возникают по поводу перераспределения власти, доминирование тех или других политико-бизнесовых групп, стремлением расширения ими сферы своего влияния. Здесь доминируют конфликты между разными ветвями власти (в частности, законодательной и исполнительной), конфликты между политическими партиями и блоками (как, например, нынешний конфликт между провладным блоком "За единую Украину" и оппозиционными политическими силами, представленными блоком "Наша Украина", Социалистической и Коммунистической партиями Украины и блоком Юлии Тимошенко), конфликты между центральной и региональной властью.

Существенную роль в современной украинской действительности сыграют такую разновидность политических конфликтов, как конфликты по поводу выбора стратегии и главных векторов общественного развития, в частности, между приверженцами либеральной и социально-ориентированной стратегии, европейской интеграции и пророссийской ориентации, вхождение Украины в НАТО и сохранение внеблокового статуса украинского государства и т.п.. Решение таких конфликтов возможно лишь при условиях достижения широкого общественного консенсуса путем проведения публичных дискуссий, открытого обсуждения в средствах массовой информации, проведение референдумов из наиболее острых проблем общественного развития.

Особенностью современной ситуации в Украине есть то, что значительная часть конфликтов, причины которых находятся вне политики, приобретает политическую окраску вследствие спекулятивного использования политическими партиями и движениями исторических, социокультурных, духовных проблем настоящего в своих узкопартийных интересах. Это, в частности, касается проблемы двуязычия в Украине, оценки отдельных исторических событий и личностей, междуконфесийных взаимоотношений.

План семинарского занятия

(2 ч.)

1. Сущность конфликта, его виды и функции в обществе.
2. Сравнительный анализ основных социологических концепций конфликта.
3. Стратегии выхода из конфликтов и условия применения основных методов их решение.

Темы рефератов, докладов и контрольных работ

1. Развитие социологии конфликта в Украине.

2. Особенности производственных конфликтов и способы их преодоления.

3. Условия ненасильственного решения межгосударственных конфликтов.

Дополнительная литература из темы

1. Конфликты в обществе: диагностика и профилактика: в 3-х частях. - Киев-Черновцы, 1995.
2. Паниш Н. Готовность населения к социальному протесту //Политологические чтения. - 1992. -№2.
3. Пирен М.И. Дентология конфликтов и управление. - К, 2001.
4. Пирен М.И. Основы конфликтологии. -К, 1997.
5. Пирен М.И. Конфликт и управленческие роли. Социально-психологический анализ. - К., 2000.

6. Пижес Ж. П. Конфликты и общественное мнение // СОЦИС. - 1991. - № 7,10.
7. Платонов Ю. Л. Социальные конфликты на производстве // СОЦИС. - 1991. - МП.
8. Преторнус Райнет Теория конфликтов //Полис - 1991. - №5.
9. Скотт Д. Г. Конфликты и пути их преодоления. - К., 1991.
10. Социология конфликта // Социология. Учебник для студентов высших учебных заведений / За ред. В. Г. Городяненка. - К, 2002.
11. Социальный конфликт: современные исследования. - Г., 1991.
12. Фромм 3. Анатомия человеческой деструктивности. - М" 1994.
13. Фишер Р., Юри У. Путь к согласию или переговоры без поражения. - М, 1990.

Лекция. Антагонистические игры

Теория исследования операций

Определение. Теория игр - теория принятия решений в условиях конфликта и/или неопределенности.

Первым мотивом развития теории игр было исследование салонных игр. Это в значительной степени повлияло на ее терминологию. Со временем область приложений сильно расширилась, а терминология сохранилась. Заугощаю она несет ненужную эмоциональную нагрузку. (Вот одного уважаемого академика мнет приходилось слышать такое возражение: «Что же такое, решения у вас принимают уважаемые люди, государственные деятели, а вы их называете игроками»). Нужно понимать, что в этих случаях слова из обыденной жизни используются как математические термины, и только так их следует понимать. Объясним смысл использованных в предыдущем определении слов.

Термин теория первоначально появился в орфической философии и означал «страстное и сочувственное созерцание» (См. Рассел Б. История западной философии. Новосибирск, Издательство НГУ. 1977. С. 47-48). Так мы его и будем понимать в дальнейшем.

Под конфликтом мы будем понимать всякую ситуацию, когда решения принимаются несколькими субъектами, имеющими, вообще говоря, не совпадающие интересы. Частным (вырожденным) случаем конфликта является ситуация, когда два субъекта преследуют прямо противоположные цели. На практике вон встречается довольно редко. Особое внимание к нему объясняется тем, что исследование антагонистических игр часто появляется как вспомогательный этап при решении более сложных задач.

Цели всех субъектов конфликта могут даже совпадать, что не делает его тривиальным. Достаточно вспомнить ситуацию из известного рассказа Н. Носовая, герои которого должны были встретиться, находясь на разных концах длинного эскалатора. Отсутствие информации в действиях партнера делает эту задачу непростой.

Подчеркнем, что теория игр изучает принятие рациональных решений, что подразумевает наличие в субъектов определенных целей.

На мой взгляд, иногда это обстоятельство даже преувеличивают. Так, например, в монографии Н. Н. Воробьева [3] подчеркивается, что теория игр занимается нормативным аспектом принятия решений, то есть тем как нужно, как правильно принимать решения. С этих позиций многие конструкции первой книги по теории игр [4] выглядят как минимум странно. Все становится на место если рассматривать приведенные там модели как дескриптивные, то есть описывающие, как решения принимаются на практике.

Кроме того, в теории игр важно наличие в субъектов возможностей влиять на ситуацию. Так, например, разыгрывание права подачи перед началом волейбольного матча с помощью подбрасывания монетки не является игрой в нашем понимании. По того же причине не являются предметом теории игр некоторые карточные игры (вспомним «Пиковую даму» А.С. Пушкина или «Тамбовскую казначейшу» М.Ю. Лермонтова.) В английском языке для этих игр имеется отдельный термин gambling (в отличие вот game). В русском языке слово всего одно.

Под неопределенностью понимается наличие факторов, выбор которых не контролирует рассматриваемый субъект, но которые, тем не менее, влияют на достижение им поставленных целей. Неопределенность может возникать по нескольким причинам. Укажем некоторые из их.

Неопределенность может возникать просто из-за недостатка информации в каких-то параметрах, которые уже фиксированы, объективного (неточное знание законов природы), или субъективного (незнание расписания электричек).

Для нас наиболее интересен случай, когда неопределенность возникает в результате наличия возможностей делать свой выбор в разумного противника (партнера).

Еще один случай, который будет обсуждаться в курсе, возникает когда субъект, принимающий решения не может четко сформулировать свою цель. Эту ситуацию удобно формализовать вводя некоторый неопределенный фактор.

Особый класс задач возникает, когда неопределенный фактор является случайным, и принимающему решение известно его вероятностное распределение.

Некоторые дисциплины имеют с теорией игр похожий предмет исследования, так что иногда даже трудно провести между ими границу. Проведем несколько определений, заимствованных, преимущественно из «Математической энциклопедии».

Теория исследования операций. Исследование операций - построение, разработка и приложения математических моделей принятия оптимальных решений.

В теории исследования операций основной акцент делается на методологии построения моделей. Теория игр больше занимается математическим исследованием уже построенных моделей.

Системный анализ – дисциплина, занимающаяся проблемами принятия решений в условиях, когда выбор альтернативы требует анализа сложной информации различной физической природы.

Этот термин разными специалистами понимается по-разному. Часто системный анализ понимают как философское направление, раздел гносеологии. Это же относится и к следующему термину.

Кибернетика – наука об управлении, связи и переработке информации (буквально: искусство управления рулем)

Теория автоматического управления – наука в методах определения законов управления какими либо объектами, допускающих реализацию с помощью технических средств автоматики.

По сравнению с теорией игр теория автоматического управления занимается более детальным изучением более конкретных и соответственно более частных моделей.

Исторически теория игр начала развиваться одновременно с теорией вероятностей в работах П. Ферма и Б. Паскаля. В настоящее время эти дисциплины разошлись достаточно далеко, хотя кое-что общее в решаемых ими задачах осталось.

Определение. Операция - совокупность действий, мероприятий, направленных на достижение некоторой цели.

Определение. Совокупность тех лиц или автоматов, которые стремятся в данной операции к поставленной цели, называется оперирующей стороной.

Для нас будет важно выбелить в операции еще одного субъекта - исследователя операции.

Принцип Гермейера. Исследователь операции входит в оперирующую сторону и проводит исследование в его интересах.

Организация совместной деятельности оперирующей стороны и исследователя операции представляет собой особую задачу, являющуюся предметом теории исследования операций. Правда, должен заметить, что математических моделей такого рода я не встречал.

В случае, когда оперирующая сторона представляет собой организацию, этот тезис стоит уточнит: исследование должно проводится в интересах руководителя организации.

Нарушение этого принципа часто приводит к плохим результатам. Мнет пришлось принимать участие в созданиии автоматизированной системы управления специализированными сельскохозяйственными предприятиями. Разработка системы была начата с автоматизации работы операторов, печатающих первичные платежные документы. Выигрыш вот такой автоматизации оказался незначительным, а затраты - большими. По этой причине работы были досрочно свернуты.

По того же причине представляется имело перспективной разработка теоретико-игровых моделей с целью продажи результатов исследований на открытом рынке. Учесть в при такой работе цели оперирующей стороны достаточно проблематично.

Определение. Модель операции в нормальной форме $<U,A,g>$, где U – множество стратегий оперирующей стороны, A – множество неопределенных факторов, $g:U\times A\to$ □ – критерий оперирующей стороны.

В данной модели принятие решений понимается как выбор одного элемента из множества. Эта точка зрения имеет свои недостатки. Известны примеры (колумбово яйцо, гордиев узел и т.д.) когда сложность задачи определяется именно тем, что множество стратегий заранее не фиксировано. Такие ситуации встречаются в жизни довольно часто, но они останутся за пределами данного курса, поскольку мнет не известны способы их формализации.

Нормальная форма операции предполагает, что стратегия рассматривается как некий элементарный объект. На практике этот объект может быть довольно сложным. Например, управляя самополетом с помощью автопилота, мы должны задать всю программу полета и способы компенсации отклонений вот заданнойпрограммы. Такой (теоретико-множественный) подход удобен при первоначальном анализе решаемой задачи. Это же относится к неопределенному фактора.

Цель операции в данной модели задается как стремление к максимизации значения функции g. Это также оставляет вне рассмотрения многие важные случаи.

Например, психологам известна ситуации, когда один и тот же человек, имея выбор между пирогом с яблоками и пирогом с вишней, уверенно выбирает пирог с яблоками; выбирая между пирогом с вишней и пирогом с черникой отдает предпочтение пирогу с вишней; а при выборе между пирогом с яблоками и пирогом с черникой предпочитает пирог с черникой. Понятно, что такое предпочтение не может быть описано с помощью функции выигрыша.

Другой пример. Часто случается, что оперирующая сторона не отдает предпочтения одному из двух решений просто в силу того, что разница между ими слишком незначительна. Иногда пары таких «равноценных» решений можно выстроить в длинную цепочку, на концах которой будут находится существенно неравноценные решения. Здесь тоже предложенный способ формализации не годится.

Тем не менее, мы будем пользоваться им на протяжении всего курса, так как в рассматриваемых нами общих моделях отказ вот него приводит к появлению очень больших дополнительных трудностей, немного добавляя к области применимости рассматриваемых моделей.

Второй принцип Гермейера. В каждой модели операции должен быть только один критерий.

В данном курсе появятся так называемые «многокритериальные» задачи. Там речь будет идти в не полностью формализованных задачах и общих подходах к их формализации.

Третий принцип Гермейера. Исследователь операций должен быть осторожен.

Математически это означает, что исследователь операций должен искать управление u, максимизирующее значение функции $\min\limits_{\alpha \in A} g(u, \alpha)$.

Отметим, что формально предположение об осторожности эквивалентно предположению в том, что неопределенный фактор выбирается исходя из целей, прямо противоположных целям оперирующей стороны. Это иногда удобно использовать при анализе конкретных моделей. Кстати, по однои из версий (Г. Анфилов. Игра и мания. - «Знание - сила», 1972, № 9) именно так возникли первобытные религии: первобытные люди были осторожны к природным неопределенностям, и считали что неопределенные параметры выбираются целенаправленно; затем они персонифицировали обладателей этих целей и получили богов Солнца, дождя и т.п.

То же рекомендации мы получим, если примем справедливость закона Мерфи, согласно которому из всех допустимых возможностей в жизни реализуется наихудшая (например, бутерброд падает маслом вниз).

Нетрудно видеть, что если $A \subset B$, то $\max\limits_{u \in U} \min\limits_{\alpha \in A} g(u,\alpha) \geq \max\limits_{u \in U} \min\limits_{\alpha \in B} g(u,\alpha)$. Отсюда вытекает

Четвертый принцип Гермейера. Исследователь операции должен учитывать всю информацию, которая будет в оперирующей стороны в момент принятия решения.

Особенно важно, что оперирующая сторона в момент принятия решений может знать больше, чем исследователь операции во время проведения исследования. Тогда последнему придется в соответствии с четвертым принципом искать решение в виде функции некоторых параметров. Это во многих случаях усложняет изучаемые модели. Тем не менее с таким усложнением приходится мирится.

Часто случается так, что максимальный гарантированный результат не удовлетворяет оперирующую сторону. В этом случае имеется две возможности. Можно потратит время, силы и деньги на проведение дополнительных исследований с целью сужения множества неопределенных факторов. А можно сузить его «волевым порядком». Но справедлив

Пятый принцип Гермейера. Сужать множество неопределенных факторов может оперирующая сторона, но не исследователь операций.

Рассказывают, что в советские времена иногда издавались примерно такие приказы: «Считать угол отклонения гороскопа нормально распределенной случайной величиной». Приказ подписывали несколько заместителей министров: министра авиационной промышленности, министра обороны, министра гражданской авиации и т.д. Разумеется, такой приказ не может повлиять на средства гороскопа. Просто таким образом оперирующая сторона сужает множество неопределенных факторов (множество возможных законов распределения) и берет на себя ответственность за такое сужение.

Антагонистическая игра в нормальной форме

Определение. Антагонистической игрой в нормальной форме называется набор $\langle U,V,g \rangle$, где U и V – множества, а функция $g:U\times V\to\mathbb{R}$. Элементы множеств U и V интерпретируются как стратегии (управления) первого и второго игроков соответственно. Цель первого игрока описывается как стремление к увеличению значения функции выигрыша g, а цель второго игрока – как стремление к его уменьшению.

Пример (игра Орел-Решка). Играют два игрока. Первый кладет на стол монету так, чтобы противник не видел, какой стороной вверх она положена. Второй пытается угадать, кокой стороной вверх она положена, и в случае, если это ему удается, вон получает монету. В противном случае монета достается первому игроку.

Построим модель данной конфликтной ситуации. Множество управлений первого игрока состоит из двух элементов: U={Положит орлом вверх, Положит решкой вверх}. Множество управлений второго игрока также содержит два элемента: V={назвать «Орел», назвать «Решка»}. Функцию выигрыша удобно задать таблицей:

	Назвать "Орел"	Назвать "Решка"
Положить орлом вверх	–1	1
Положить решкой вверх	1	–1

Поскольку названия стратегий часто не играют ролы, игру можно задать сокращенной матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вообще, если множества управлений игроков конечны, функции выигрыша часто задают с помощью такой матрицы, а игру называют матричной. При этом принимается соглашение, что первый игрок выбирает срока, второй - столбец, а на пересечении выбранных сроки и столбца содержится выигрыш первого игрока.

Таким образом, игра «Орел-Решка» формализуется матричной игрой с матрицей 2×2.

Максимальный гарантированный результат

Взглянем на антагонистическую игру с позиции первого игрока. Его максимальный гарантированный результат равен

$\sup\limits_{u\in U}\inf\limits_{v\in V} g(u,v)$, то есть первый игрок может гарантированного получить именно такой выигрыш, но не больший.

Если мы поменяем точку зрения, и посмотрим на тот же конфликт с позиций второго игрока, то увидим, что вон может гарантировать, что его выигрыш будет не больше, чем $\inf\limits_{v\in V}\sup\limits_{u\in U} g(u,v)$.

Лемма. Для любой функции g:U×V→ выполняется неравенство $\inf\limits_{v\in V}\sup\limits_{u\in U} g(u,v) \geq \sup\limits_{u\in U}\inf\limits_{v\in V} g(u,v)$.

Доказательство. Очевидно, для любых управлений u и v выполняются неравенства

$$\inf_{v\in V} g(u,v) \leq g(u,v) \leq \sup_{u\in U} g(u,v)$$

или

$$\inf_{v\in V} g(u,v) \leq \sup_{u\in U} g(u,v).$$

Правая часть вот u не зависит, поэтому в силу произвольности u выполняется неравенство

$$\sup_{u\in U}\inf_{v\in V} g(u,v) \leq \sup_{u\in U} g(u,v)$$

Левая часть последнего неравенства – это просто число, значит, в силу произвольности v, имеет место неравенство $\inf\limits_{v\in V}\sup\limits_{u\in U} g(u,v) \geq \sup\limits_{u\in U}\inf\limits_{v\in V} g(u,v)$, что и требовалось доказать.

- Пример: каре

Пример. В описанной выше игре «Орел-Решка» максимальный гарантированный результат первого игрока равен -1, а максимальный гарантированный результат второго игрока равен 1.

Седловые точки

Анализ предыдущего примера показывает, что при правильной игре обоих игроков первый игрок получит не меньше -1, и не больше 1. В данном случае вывод абсолютно банален. И ничего большего для анализа этого примера теория игр, да, видимо, и никакая другая теория, дать не может.

Другой крайний случай особенно важен, так как в нем исход игры может быть однозначно определен теоретически. Его изучением мы и займемся.

Определение 1. Игра <U,V,g> имеет седловую точку, если существуют число p и стратегии $u_0 \in U$ и $v_0 \in V$ такие, что $\max_{u\in U} g(u,v_0) = \min_{v\in V} g(u_0,v) = p$. Число p называют ценой игры, а пара (u_0,v_0) – седловой точкой.

Определение 2. Игра <U,V,g> имеет седловую точку, если $\min_{v\in V}\max_{u\in U} g(u,v) = \max_{u\in U}\min_{v\in V} g(u,v)$. Если u_0 реализует максимум в правой части равенства, а v_0 реализует минимум в левой части, то пара (u_0,v_0) называют седловой точкой, а общее значение левой и правой частей – ценой игры.

Лемма. Определения 1 и 2 эквивалентны.

Доказательство. Пусть выполнено определение 1. Из равенства $\max_{u\in U} g(u,v_0) = p$ следует, что $\min_{v\in V}\max_{u\in U} g(u,v_0) \le p$, а из равенства $\min_{v\in V} g(u_0,v) = p$ получается неравенство $\max_{u\in U}\min_{v\in V} g(u_0,v) \ge p$, то есть $\min_{v\in V}\max_{u\in U} g(u,v) \le \max_{u\in U}\min_{v\in V} g(u,v)$. В силу предыдущей леммы выполняется и обратное неравенство, а значит, на самом деле имеет место равенство $\min_{v\in V}\max_{u\in U} g(u,v) = \max_{u\in U}\min_{v\in V} g(u,v)$.

Пусть выполнено определение 2. Обозначим $\min_{v\in V}\max_{u\in U} g(u,v) = \max_{u\in U}\min_{v\in V} g(u,v) = p$. По определению точки u_0 имеем $\min_{v\in V} g(u_0,v) = p$, а из определения точки v_0 получаем $\max_{u\in U} g(u,v_0) = p$. Лемма доказанная.

Сделаем терминологическое замечание. Термин «седловая точка» используется и в некоторых областях анализа, например, в теории особенностей. Там этот термин имеет другое, более широкое значение.

Пример. Пусть в игре <U,V,g> множества стратегий U=V=[–1,1], а функция выигрыша задается равенством g(u,v)=uv.

В данном случае

$$\operatorname{Arg}\max_{u\in U} g(u,v) = \begin{cases} 1, \text{ если } v > 0, \\ [-1,1], \text{ если } v = 0, \\ -1, \text{ если } v < 0, \end{cases}$$

$$\operatorname{Arg}\min_{u\in U} g(u,v) = \begin{cases} -1, \text{ если } u > 0, \\ [-1,1], \text{ если } v = 0, \\ 1, \text{ если } v < 0. \end{cases}$$

Графики этих точечно множественных отображений пересекаются в единственной точке (0,0). Она и является седловой. Цена игры в данном случае равна нулю.

Пример. Пусть в игре <U,V,g> множества стратегий U=V=[–1,1], а функция выигрыша задается равенством g(u,v)=(u–v)^2.

В данном случае

$$\operatorname{Arg}\max_{u\in U} g(u,v)=\begin{cases} 1, \text{ если } v<0,\\ \{-1,1\}, \text{ если } v=0,\\ -1, \text{ если } v>0, \end{cases} \quad \operatorname{Arg}\min_{v\in V} g(u,v)=u\ .$$

Графики этих точечно множественных отображений не пересекаются, значит в данной игре седловой точки нет.

Выпуклые игры.

Определение. Если U и V – компактные выпуклые подмножества конечномерных евклидовых пространств, а функция g:U×V→ непрерывна, вогнута по u при любом фиксированном v и выпукла по v при любом фиксированном u, то игра Г=<U,V,g> называется выпуклой.

Терема (С. Какутани, 1941). В выпуклой игре существует седловая точка.

Доказательство. Рассмотрим сначала «типичный» частный случай, когда функция g строго вогнута по u при любом фиксированном v и строго выпукла по v при любом фиксированном u. Тогда при каждом v максимум $\max\limits_{v\in V} g(u,v)$ достигается в единственной точке, то есть корректно определена функция $f_1(v)=\arg\max\limits_{u\in U} g(u,v)$. Аналогично, единственным образом определена функция $f_2(u)=\arg\min\limits_{v\in V} g(u,v)$. В силу следствия из леммы в замкнутом графике (см. лекцию 1) обь эти функции непрерывны.

Рассмотрим отображение $F(u,v)=(f_1(v),f_2(u))$. Оно непрерывно и отображает выпуклый компакт U×V в себя. В силу теоремы Брауэра это отображение имеет неподвижную точку, то есть существует решение (u_0,v_0) системы уравнений

$$\begin{cases} u = \arg\max\limits_{u\in U} g(u,v), \\ v = \arg\min\limits_{v\in V} g(u,v). \end{cases}$$

Но тогда

$$\begin{cases} g(u_0,v_0) = \max\limits_{u\in U} g(u,v_0), \\ g(u_0,v_0) = \min\limits_{v\in V} g(u,v), \end{cases}$$

это есть (u_0,v_0) – седловая точка.

Вернемся к рассмотрению общего случая. Наряда с игрой Г рассмотрим игру $Г_ε$=<U,V,$g_ε$>, где функция $g_ε$ определена равенством $g_\varepsilon(u,v) = g(u,v) - \varepsilon\|u\|^2 + \varepsilon\|v\|^2$. При любом ε>0, функция $g_ε$ непрерывна, строго вогнута по u при любом фиксированном v и строго выпукла по v при любом фиксированном u. Как только что доказано, в игре $Г_ε$ существует седловая точка ($u_ε$,$v_ε$).

Произвольным образом зададим сходящуюся к нулю последовательность положительных чисел ε(1), ε(2),…,ε(n)… Рассмотрим последовательность игр $\Gamma_{\varepsilon(1)},\Gamma_{\varepsilon(2)},...,\Gamma_{\varepsilon(n)},...$ и соответствующую последовательность седловых точек $\left(u_{\varepsilon(1)},v_{\varepsilon(1)}\right),\left(u_{\varepsilon(2)},v_{\varepsilon(2)}\right),...,\left(u_{\varepsilon(n)},v_{\varepsilon(n)}\right),...$ В силу компактности множества U×V эта последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, можно считать, что самая последовательность $\left(u_{\varepsilon(1)},v_{\varepsilon(1)}\right),\left(u_{\varepsilon(2)},v_{\varepsilon(2)}\right),...,\left(u_{\varepsilon(n)},v_{\varepsilon(n)}\right),...$ сходится к некоторой точке (u_0,v_0).

Покажем, что (u_0,v_0) есть седловая точка в игре Г. Пусть u и v – произвольные управления первого и второго игроков соответственно. Так как $\left(u_{\varepsilon(n)}, v_{\varepsilon(n)}\right)$ – седловая точка в игре $\Gamma_{\varepsilon(n)}$, то для дорогого n выполняются неравенства

$$\begin{cases} g(u,v_{\varepsilon(n)}) - \varepsilon(n)\|u\|^2 + \varepsilon(n)\|v_{\varepsilon(n)}\|^2 \le g(u_{\varepsilon(n)},v_{\varepsilon(n)}) - \varepsilon(n)\|u_{\varepsilon(n)}\|^2 + \varepsilon(n)\|v_{\varepsilon(n)}\|^2, \\ g(u_{\varepsilon(n)},v) - \varepsilon(n)\|u_{\varepsilon(n)}\|^2 + \varepsilon(n)\|v\|^2 \ge g(u_{\varepsilon(n)},v_{\varepsilon(n)}) - \varepsilon(n)\|u_{\varepsilon(n)}\|^2 + \varepsilon(n)\|v_{\varepsilon(n)}\|^2. \end{cases}$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $n\to\infty$, получим

$$\begin{cases} g(u,v_0) \le g(u_0,v_0), \\ g(u_0,v) \ge g(u_0,v_0), \end{cases}$$

что в силу произвольности u и v завершает доказательство теоремы

Пример. Вычислить $\min\limits_{v\in V}\max\limits_{u\in U} g(u,v)$ и $\max\limits_{u\in U}\min\limits_{v\in V} g(u,v)$, где U=V=[0,1] и $g(u,v)=-u^2+v^3+uv^{2-4}v$.

Решение. Вычислим $\min\limits_{v\in V}\max\limits_{u\in U} g(u,v)$. Преобразуем

$g(u,v)=-u^2+v^3+uv^{2-4}v=-(u^2-uv^2+v^{4/4})+$ $v^{4/4}+v^{3-4}v=-(u-v^{2/2})^2+v^{4/4}+v^{3-4}v$.

Теперь видно, что $\max\limits_{u\in U} g(u,v) = \dfrac{v^4}{4} + v^3 - 4v$ и достигается при $u=v^{2/2}$. Остается найти максимум функции $v^{4/4}+v^{3-4}v$ на отрезке [0,1]. Ее производная

$v^3+3v^{2-4}=(v^3-v^2)+4(v^{2-1})=(v-1)(v^2+4v+4)= (v-1)(v+2)^2$

на этом отрезке имеет единственный корень v=1. Поэтому

$$\min_{v\in V}\max_{u\in U} g(u,v) = \min_{v\in V}\left(\frac{v^4}{4}+v^3-4v\right) = \min\left(0,\frac{1}{4}+1-4\right) = -2\frac{3}{4}.$$

Попытка аналогичным образом вычислить $\max_{u\in U}\min_{v\in V} g(u,v)$ наталкивается на серьезные аналитические трудности. Поэтому целесообразно заметить, что рассматриваемая игра – выпуклая, и значит $\min_{v\in V}\max_{u\in U} g(u,v) = \max_{u\in U}\min_{v\in V} g(u,v)$.

Преобразования игр

Лемма. Если a – положительное, а b – произвольное число, то множества седловых точек в играх <U,V,g> и <U,V,ag+b> совпадают.

Доказательство. Данная лемма - частный случай следующей.

Лемма. Если f – возрастающая функция, то множества седловых точек в играх <U,V,g> и <U,V,f∘g> совпадают.

Доказательство. Пусть (u_0,v_0) – седловая точка в игре <U,V,g>. Это значит, что для любых u и v выполняются неравенства $g(u,v_0)\le g(u_0,v_0)\le g(u_0,v)$. В силу монотонности функции f отсюда следуют неравенства $f(g(u,v_0))\le f(g(u_0,v_0))\le f(g(u_0,v))$. В силу произвольности u и v это означает, что (u_0,v_0) – седловая точка в игре <U,V,f∘g>.

Обратно, пусть (u_0,v_0) – седловая точка в игре <U,V,f∘g>. Тогда для любых u и v выполняются неравенства $f(g(u,v_0))\le f(g(u_0,v_0))\le f(g(u_0,v))$. И снова с помощью монотонности функции f получаем неравенства $g(u,v_0)\le g(u_0,v_0)\le g(u_0,v)$, откуда следует, что (u_0,v_0) – седловая точка в игре <U,V,g>.

Можно сформулировать и доказать множество подобных результатов. Все они очень просты, но бывают полезны при исследовании конкретных игр.

Пример (игра Чет-Нечет). Каждый из двух игроков называет целое число. Если сумма названных чисел оказывается четной, первый игрок выигрывает 1, в противном случае 1 выигрывает второй игрок.

В соответствующей модели $U = V = \mathbb{Z}$, а функция выигрыша задается условием $g(u,v) = \begin{cases} 1, \text{ если } u+v - \text{ четно,} \\ -1 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

В очевидном смысле игра эквивалентна игре Орел-Решка. Последняя имеет конечные множества стратегий, а потому ее исследование проще.

Определение. Антагонистическая игра называется симметрической, если U=V и g(u,v)=–g(v,u).

Лемма. Значение симметрической игры равно нулю (если оно существует).

Доказательство. Преобразуем с учетом симметрии игры:

$$p = \sup_{u\in U} \inf_{v\in V} g(u,v) = \sup_{u\in U} \inf_{v\in V} \left[-g(v,u)\right] = -\inf_{u\in U} \sup_{v\in V} g(v,u) = -\inf_{v\in v} \sup_{u\in U} g(u,v) = -p$$

.Отсюда и следует, что p=0.

Пример. Рассмотрим следующую популярную салонную игру. Двое играющих показывают одновременно одну из трех комбинаций пальцев: сжатый кулак, два пальца, открытую ладонь (символизирующие камень, ножницы и бумагу соответственно). Камень выигрывает в ножниц, ножницы - в бумаги, а бумага - в камня.

Данная игра адекватно описывается матричной игрой с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выясним, существует ли в данной игре седловая точка.

Непосредственно видно, что игра симметрична, поэтому в силу доказанной леммы ее значение, если оно существует, равно нулю. Поэтому седловыми могут быть только точки (1,1), (2,2), (3,3) (указаны номера срок и столбцов соответственно).

Очевидно, матрица игры не изменится, если циклически переставит ее сроки и точно так же переставит столбцы. Поэтому если одна из указанных точек является седловой, то и две другие тоже будут седловыми.

Но так как множество седловых точек является «прямоугольным», все точки данной игры будут седловыми.

Но это ведет к противоречию, так как значения выигрышей во всех Седловых точках равны цене игры. Значит, ни однои седловой точки в данной игре нет. Этим и обусловлена ее популярность.

Геометрические свойства седловых точек

Лемма. Если (u_1,v_1) и (u_2,v_2) – седловые точки некоторой игры, то (u_1,v_2) и (u_2,v_1) – тоже седловые точки этой игры.

Доказательство. Так как (u_1,v_1) – седловая точка, выполняются неравенства $g(u_2,v_1)\le g(u_1,v_1)\le g(u_1,v_2)$, а так как (u_2,v_2) – седловая точка, имеем $g(u_1,v_2)\le g(u_2,v_2)\le g(u_2,v_1)$. Сравнивая, получим $g(u_2,v_1)\le g(u_1,v_1)\le g(u_1,v_2) \le g(u_2,v_2)\le g(u_2,v_1)$.

Значит, на самом деле все эти неравенства обращаются в равенства: $g(u_2,v_1)=g(u_1,v_1)=g(u_1,v_2)=g(u_2,v_2)=g(u_2,v_1)$.

Но тогда $\max\limits_{u\in U} g(u,v_1)=g(u_1,v_1)=g(u_2,v_1)$ и $\min\limits_{v\in V} g(u_2,v)=g(u_2,v_2)=g(u_2,v_1)$, то есть точка (u_2,v_1) – седловая. Аналогично доказывается, что и точка (u_1,v_2) является седловой.

Следствие. Пусть S_1 – множество таких точек $u_0\in U$, для которых найдется такое $v_0\in V$, что точка (u_0,v_0) является седловой. Пусть S_2 – множество таких точек $v_0\in V$, для которых найдется такое $u_0\in U$, что точка (u_0,v_0) является седловой. Тогда множество седловых точек равно декартовы произведению $S_1\times S_2$.

Лемма. Если U и V – компактные множества, а функция $g:U\times V\to\mathbb{R}$ непрерывна, то множество седловых точек игры $<U,V,g>$ замкнуто.

Доказательство. Пусть точки $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\ldots,(u_n,v_n)$– седловые, и последовательность $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\ldots,(u_n,v_n)$ сходится к точке (u_0,v_0). Тогда для любых $u\in U$, $v\in V$ и n выполняются неравенства

$$g(u,v_n)\le g(u_n,v_n)\le g(u_n,v).$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $n\to\infty$ и пользуясь непрерывностью функции f, получим

$$g(u,v_0)\le g(u_0,v_0)\le g(u_0,v),$$

что в силу произвольности u и v означает, что (u_0,v_0) – седловая точка.

Итак, предел любой последовательности седловых точек является седловой точкой. Значит, множество седловых точек замкнуто.

Лемма. Множество седловых точек выпуклой игры выпукло

Доказательство. Пусть (u_0,v_0). Тогда в обозначениях следствия к первой лемме данного раздела $S_1 = \operatorname{Arg}\max_{u\in U} g(u,v_0),\ S_2 = \operatorname{Arg}\min_{v\in V} g(u_0,v)$. Множество точек максимума вогнутой функции выпукло, значит выпукло множество S_1. Аналогично, множество точек минимума выпуклой функции выпукло, значит выпукло множество S_2. Но тогда выпукло и их произведение.

Лемма. (Независимость вот посторонних альтернатив) Если (u_0,v_0) – седловая точка в игре <U,V,g>, а множество W содержит v_0, а само содержится в V, то ситуация (u_0,v_0) является седловой точкой в игре <U,W,g>.

Доказательство. По определению седловой точки $g(u_0,v_0) = \min_{v\in V} g(u_0,v) \le \min_{v\in W} g(u_0,v)$, а по определению минимума $g(u_0,v_0) \ge \min_{v\in W} g(u_0,v)$. Значит на самом деле $g(u_0,v_0) = \min_{v\in W} g(u_0,v)$. Равенство $g(u_0,v_0) = \max_{u\in U} g(u,v_0)$ непосредственно следует из определения седловой точки.

Модель боевых действий

Пусть в войне принимают участие две стороны. Нападающая сторона имеет n боевых единиц, а защищающаяся –

m. Нападающая сторона может прорвать линию обороны противника в k точках. Одна боевая единица обороняющейся стороны может уничтожить к p_i боевых единиц противника, если она расположена в i-ом пункте обороны, так что если в i-ый пункт обороны нападающая сторона направит u_i боевых единиц, а обороняющаяся сторона выделит для его обороны v_i единиц, то оборону пройдет $\max\{u_i - p_i v_i, 0\}$ единиц. Выигрыш нападающей стороны определяется суммарным числом прорвавшихся боевых единиц, а цели обороняющейся стороны прямо противоположны.

Таким образом, имеем антагонистическую игру, в которой

$$U = \left\{ u = \left(u_1, ..., u_k\right) \in \mathbb{R}^k : u_i \geq 0,\ i = 1, ..., k,\ \sum_{i=1}^{k} u_i = n \right\},$$

$$V = \left\{ v = \left(v_1, ..., v_k\right) \in \mathbb{R}^k : v_i \geq 0,\ i = 1, ..., k,\ \sum_{i=1}^{k} v_i = m \right\},$$

$$g(u, v) = \sum_{i=1}^{k} \max\left\{u_i - p_i v_i, 0\right\}.$$

Найдем максимальный гарантированный результат нападающей стороны. Преждет всего, найдем стратегии, доставляющие $\min_{v \in V} g(u, v)$. Понятно, что если для некоторого i выполняется неравенство $u_i > p_i v_i$, и для некоторого второго j имеем $p_j < p_i$ и $v_j > 0$, то выигрыш обороняющейся стороны может быть улучшен за счет переброски некоторых боевых единиц из j-го пункта обороны в i-ый. Поэтому оптимальная стратегия обороняющейся стороны строится следующим образом. Находим пункт обороны с наибольшим значением p_i и выделяем туда средства обороны в количестве $\frac{u_i}{p_i}$. Затем находим следующий по величине p_i пункт обороны и выделяем для него средства ровно в таком количестве, чтобы уничтожить все средства противника в этом пункте. И так далее к тех пор, пока не кончатся пункты обороны или пока не будут исчерпаны ресурсы обороняющейся стороны.

Очевидно, что при такой логике действия противника наступающая сторона только выиграет, если перебросит свои средства из пункта с большим значением p_i в пункт с меньшим значением этой величины. Значит, в оптимальной стратегии все средства нападения должны быть сосредоточены в одном пункте i, для которого значение p_i минимально. При этом в том же пункте будут сосредоточены и все ресурсы обороняющейся стороны, а выигрыш нападающих составит $\max\{n - p_i m, 0\}$.

Посчитаем теперь максимальный гарантированный результат обороняющейся стороны. Очевидно, что если для двух пунктов обороны выполняются условия $v_i>0$, $u_i<p_i v_i$, $v_j>0$, $u_j<p_j v_j$, то наступающая сторона только выиграет, если перебросит свои средства из пункта с большим p_i в пункт с меньшим значением этой величины. Кроме того, нападающая сторона не проиграет, если перебросит свои средства из всех вторых пунктов в такой пункт, где $u_i>p_i v_i$. Значит, нападающей стороне выгодно сосредоточить все свои средства в одном пункте. Если в этом пункте будет сосредоточено v_i единиц противника, то выигрыш нападающей стороны составит $\max\{n - p_i v_i, 0\}$. Теперь понятно, что свои силы нападающая сторона должна сосредоточить в том пункте, где величина $p_i v_i$ минимальна.

При таком поведении противника, обороняющаяся сторона должна максимизировать величину $\min\limits_{1 \le i \le k} p_i v_i$ по $v \in V$. Непосредственно проверяется, что при этом должны выполняться условия $p_i v_i = c$, где c – некоторая константа, определяемая условием $\sum\limits_{i=1}^{k} v_i = m$. Отсюда находим $v_i = \dfrac{m}{p_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{1}{p_j}}$.

Таким образом, максимальный гарантированный результат обороны равен $n - \dfrac{m}{\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{p_i}}$. Понятно, что при нетривиальных значениях параметров седловая точка в данной игре отсутствует.

Примеры

– Доказательство теоремы Какутани без теоремы Брауэра (Васин-Морозов)
– Двойная нормаль (Боннезен Фенхель стр. 63) - минимаксы - собственные числа (Глазман - Любич) - теория Люстерника-Шнирельмана.
– Минимаксная характеристика замечательных точек в треугольнике.
– Седловые точки в игре $g(u,v) = A\sin u + B\sin v + C\sin(u+v) + D\cos(u+v)$ – в задачи
– Игра как отображение из □ в алгебру множеств

Задачи

1. Докажите, что игра с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ имеет седловую точку тогда и только тогда, когда отрезок числовой прямой с концами a и d имеет, по крайней мэр, одну общую точку с отрезком, ограниченным точками b и c. Выполняется ли в данном случае «принцип хрупкости хорошего»?

2. Докажите, что игра с матрицей $\begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{c_1+d_1} & \frac{a_1+b_2}{c_1+d_2} \\ \frac{a_2+b_1}{c_2+d_1} & \frac{a_2+b_2}{c_2+d_2} \end{pmatrix}$ имеет седловую точку.

3. Докажите, что если каждая 2×2 подматрица матрицы A имеет седловую точку, то матрица A также имеет седловую точку.

4. Докажите, что игра с матрицей $A=(a_{ij})$ имеет цену в чистых стратегиях и найдите соответствующую седловую точку, если $a_{ij}=\frac{a_i+b_j}{c_i+d_j}$, где a_i,b_j – произвольные числа, c_i, d_j – положительные числа.

5. Докажите, что игра $\langle U,V,g\rangle$ с функцией выигрыша $g(u,v)=\frac{a(u)+b(v)}{c(u)+d(v)}$ имеет седловую точку, если a и c – функции непрерывные на компакте U, а b и d – функции непрерывные на компакте V, и, кроме того, c и d положительны.

6. Докажите, что если множества U и V компактны, а функция g непрерывна, и если для любых $u_1,u_2\in U$, $v_1,v_2\in V$ игра

<$\{u_1,u_2\}$,$\{v_1,v_2\}$,g> имеет седловую точку, то и игра <U,V,g> имеет седловую точку.

7. Докажите, что если каждая подматрица матрицы A имеет седловую точку, что и самая матрица A имеет седловую точку.

8. Верно ли, что если матрица имеет седловую точку, то каждая ее подматрица имеет седловую точку.

9. Пусть заданная антагонистическая игра с m×l матрицей выигрыша A все элементы которой попарно различны. Докажите, что если существуют k,n>1 такие, что каждая k×n подматрица, получающаяся отбрасыванием m–k срок и l–n столбцов, имеет седловую точку, то и игра с матрицей A имеет седловую точку.

10. Приведите пример, показывающий, что в предыдущей задаче условие попарного различия всех элементов матрицы существенно.

11. Пусть A – невырожденная n×n матрица. Докажите, что если каждая подматрица размера n×(n–1) имеет седловую точку, то матрица A также имеет седловую точку.

12. Докажите, что для любых действительных чисел a,b,c,d игра с матрицей $\begin{pmatrix} a & b & a & b \\ c & d & d & c \\ a & d & a & \frac{a+b+c+d}{4} \\ c & b & \frac{a+b+c+d}{4} & c \end{pmatrix}$ имеет

цену p, которая удовлетворяет неравенствам $\max\{\min\{a,b\},\min\{c,d\}\}\le p\le \max\{\min\{a,c\},\min\{b,d\}\}$

13. Докажите, что игра с матрицей $A=(a_{ij})$ имеет цену в чистых стратегиях и найдите соответствующую седловую точку, если

А) $a_{ij}=i-j$;

Б) $a_{ij}=f(i)+g(j)$;

В) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ a & d \\ c & b \end{pmatrix}$, a,b,c,d – произвольные числа;

Г) $A=\begin{pmatrix} a & e & a & e & a & e & a & e \\ b & f & b & f & f & b & f & b \\ c & g & g & c & c & g & g & c \end{pmatrix}$, a,b,c,d,e,f,g – произвольные числа

Е) m=n и для любых i,j,k имеет место тождество $a_{ij}+a_{jk}+a_{ki}=0$.

14. Показать, что каждая из двух матриц $A=\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$ имеет седловую точку. Существует ли такое значение x, при котором выполняется соотношение

А) $p(A+B)<p(A)+p(B)$;

Б) $p(A+B)>p(A)+p(B)$;

В) $p(A+B)=p(A)+p(B)$,

где p(A) – цена игра с матрицей A?

15. Существует ли седловая точка в игре <U,V,g>, где U=V=[0,1], $g(u,v)=\dfrac{1}{1+2(u-v)^2}$?

16. Найдите $\min\limits_{v\in V}\max\limits_{u\in U} g(u,v)$ и $\max\limits_{u\in U}\min\limits_{v\in V} g(u,v)$, если

А) U=V=[0,1], $g(u,v)=2u^{2-3}uv+2v^2$;

Б) U=[–2,3], V=[–1,2], $g(u,v)=–u^2+4uv–5v^2+3u-2v$;

В) U=V=[0,1], $g(u,v)=4uv^{2-2}u^2–v$;

Г) U=[π,2π], V=[π/2,3π/2], g(u,v)=ucosv–sinu;

17. Пусть U=V=[0,1] и $g(u,v)=uv-\dfrac{1}{3}u-\dfrac{1}{2}v$. Докажите, что цена игры равна $\dfrac{1}{6}$, а $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$ – седловая точка.

18. Пусть U=V=[0,1]. Докажите, что при любых α,β,γ игра <U,V,g> с функцией выигрыша g(u,v)=uv–αu–βv+γ имеет седловую точку.

19. Пусть U=V=[0,1]. При каких α,β,γ игра <U,V,g> с функцией выигрыша g(u,v)=uv–αu–βv+γ имеет седловую точку внутри квадрата U×V?

20. Пусть U=V=[0,1] и игра <U,V,g> имеет седловую точку (u_0,v_0), ледащую внутри квадрата U×V. Докажите, что тогда $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0)=\dfrac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0)=0$.

21. Пусть A_1 и A_2 – две положительно определенные p×p матрицы, B – произвольная матрица и, наконец, a_1,a_2 – p-мерные векторы. Рассмотрим антагонистическую игру, в которой U=V= $\mathbb{R}^p$, $g(u,v)=–(A_1u,u)/2+(Bu,v)+(A_2v,v)+(a_1,u)+(a_2,v)$. Докажите, что эта игра имеет единственную седловую точку, и найдите ее.

22. Пусть $a_1,\ldots,a_n$–положительные числа, а $U=\{(u_1,\ldots,u_n)$: $u_1+\ldots+u_n=1$, $u_1\geq 0,\ldots,u_n\geq 0\}$... Найдите $\max\limits_{u\in U}\min\limits_{1\leq i\leq n} a_i u_i$.

23. Пусть $a_1,\ldots,a_n$–положительные числа, а $U=\{(u_1,\ldots,u_n)$: $u_1+\ldots+u_n=1$, $u_1\geq 0,\ldots,u_n\geq 0\}$, $V=\{(v_1,\ldots,v_n)$: $v_1+\ldots+v_n=1$, $v_1\geq 0,\ldots,v_n\geq 0\}$, $g(u,v)=\sum\limits_{i=1}^{n}\max\left[u_i-a_i v_i,0\right]$... Найдите $\min\limits_{v\in V}\max\limits_{u\in U} g(u,v)$ и $\max\limits_{u\in U}\min\limits_{v\in V} g(u,v)$.

24. Пусть $U=V=[0,1]$, $g(u,v)=\begin{cases} p(u), \text{ если } v\leq u, \\ 1-q(v), \text{ если } u<v, \end{cases}$, где p и q убывающие непрерывные функции отображающие отрезок [0,1] на себя. Существует ли в этой игре седловая точка?

25. Пусть p и q – непрерывные возрастающие функции, отображающие отрезок [0,1] на себя, U=V=[0,1], и $g(u,v)=\begin{cases} 2p(u)-1, \text{ если } u<v, \\ p(u)-q(v), \text{ если } u=v, \\ 1-2q(v), \text{ если } u>v. \end{cases}$ Докажите, что в игре <U,V,g> нет седловой точки.

26. Игрок 1 выбирает системы u из m точек отрезка [–1,1]. Одновременно игрок 2 выбирает систему v из n точек того же отрезка Функция выигрыша имеет вид $g(u,v)=\frac{1}{2}\left(\max\limits_{i=1,\ldots,m}\min\limits_{j=i,\ldots,n}\left|u_i-v_j\right|+\max\limits_{j=1,\ldots,n}\min\limits_{i=i,\ldots,m}\left|u_i-v_j\right|\right)$. Найдите цену игры.

27. Игрок А выбирает три точки A, B, C на окружности, а игрок Б выбирает точку X в круге, ограниченном этой окружностью. Цель игрока А состоит в максимизации суммы длин AX+BX+CX. Существует ли в этой игре седловая точка?

28. Пусть U=V=[0,1], $g(u,v)=\begin{cases} 10uv-5u-v, \text{ если } u\neq 0.1, \\ -v, \text{ если } u=0.1. \end{cases}$

Найдите цену игры и ε-оптимальные стратегии игроков. Существует ли в этой игре седловая точка?

29. Пусть U=V=[0,1], f и h – определенные на U×V функции и

$$g(u,v)=\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^4-\left(u-\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot\left[1+\left(v-\frac{1}{3}\right)f(u,v)\right]+\left[\left(v-\frac{1}{3}\right)^2-\left(v-\frac{1}{3}\right)^3\right]\cdot\left[1+\left(u-\frac{1}{2}\right)h(u,v)\right]$$

Докажите, что игра <U,V,g> имеет седловую точку. (Указание. См. задачу (*))

30. Показать, что игра <U,V,g> с функцией выигрыша $g(u,v)=\dfrac{f(u,v)}{h(u,v)}$ имеет седловую точку, если U и V – выпуклые компакты, функция f вогнута по u, выпукла по v и положительна, а функция h выпукла по u, вогнута по v и положительна.

31. Рассмотрим семейство игр с фиксированными множествами стратегий U и V и непрерывными функциями выигрыша. Снабдим это семейство метрикой, определив расстояние между играми Γ_1=<U,V,g_1> и Γ_2=<U,V,g_2> условием $\rho(\Gamma_1,\Gamma_2)=\max\limits_{(u,v)\in U\times V}\left|g_1(u,v)-g_2(u,v)\right|$. Докажите, что множество игр, имеющих седловую точку, замкнуто.

32. Докажите, что всякую непрерывную функцию можно представит как разность двух выпуклых.

Лекция. Смешанные расширения

Теория антагонистических игр получается завершенной, если в игры существует седловая точка. А что делать, если таковая отсутствует? В математике традиционно в таких случаях вводят в рассмотрение некие идеальные объекты. Такими являются, например, мнимые и иррациональные числа. Такими же идеальными объектами являются смешанные стратегии. Но в отличие вот классических разделов математики, в теории игр, имея в виде ее прикладную направленность, хотелось бы иметь интерпретацию вводимых конструкций. Такая интерпретация может быть различной в различных ситуациях.

Начнем с мотивировки вводимых ниже конструкций. Приведем цитату из рассказа Э.А. По[1] (1809–1849).

«Мнет знаком восьмилетний мальчуган, чья способность угадывать в игре «чет и нечет» снискала ему всеобщее восхищение. Это очень простая игра: один из играющих сжимает в кулаке несколько камешков и спрашивает во второго, четное ли их количество вон держит, или нечетное. Если второй играющий угадывает правильно, то вон выигрывает камешек, если же неправильно, то проигрывает камешек. Мальчик, в котором я упомянул, обыграл всех своих школьных товарищей. Разумеется, вон строил свои догадки на каких-то принципах, и эти последние заключались лишь в том, что вон внимательно следил за своим противником и правильно оценивал степень его

[1] См. По Э.А. Похищенное письмо //Собрание сочинений в двух томах. Т. 2. Воронеж, «Полиграф». 1995. С.142–143.

хитрости. Например, его заведомо глупый противник поднимает кулак и спрашивает: «Чет или нечет?». Наш школьник отвечает «нечет» и проигрывает. Однако в следующей попытке вон выигрывает, потому что говорит себя: «Этот дурак взял в прошлый раз четное количество камешков и, конечно, думает, что отлично схитрит, если теперь возьмет нечетное количество. Поэтому я опять скажу - нечет!» Вон говорит «нечет и выигрывает. С противником чуть поумнее вон рассуждал бы так: «Этот мальчик заметил, что я сейчас сказал «нечет», и теперь сначала захочет изменить число камешков на нечетное, но здесь же спохватится, что это слишком просто, и оставит их количество прежним. Поэтому я скажу «чет!» Вон говорит «чет!» и выигрывает. Вот ход рассуждений маленького мальчика, которого его товарищи окрестили счастливчиком».

- Всего только - ответил я,- умение полностью отождествить свой интеллект с интеллектом противника.

- Вот именно,- сказал Дюпен.- А когда я спросил в мальчика, каким способом вон достигает столь полного отождествления, обеспечивающего ему постоянный успех, вон ответил следующее: «Когда я хочу узнать, насколько умен, или глуп, или добр, или зол вот этот мальчик или в чем вон сейчас думает, я стараюсь придать своему лицу точно такое же выражение, которое вижу на его лицо, а потом жду, чтобы узнать, какие мысли или чувства возникнут в меня в соответствии с этим выражением».

Отсюда видно, что если в действиях рассматриваемого игрока (оперирующей стороны) будет присутствовать некая логика, то нельзя исключать, что противник, спустя некоторое время, разгадает ее и начнет выигрывать в каждом розыгрыше. Поэтому осторожный игрок должен озаботиться тем, чтобы такая логика отсутствовала. Один из способов добиться этого - сделать выбор своего управления случайным.

В классической монографии [3] строится сильно агрегированная макроэкономическая модель, в которой под игроком понимается множество субъектов, занимающих в данной экономической системе примерно одинаковое место. Каждый из их самостоятельно может принимать решение в выборе управлении из одинаковых множеств. При этом исследователя интересуют не выборы, сделанные отдельными субъектами, а их общим влиянием на экономику, которое определяется количеством (долей) субъектов, выбравших то или иное управление. Формально это можно описать, как выбор одним игроком некоторой вероятностной меры на множестве управлений. В данном случае использование смешанных стратегий следует рассматривать ни как рекомендацию по рациональному действию игроку, а как описание того, что происходит на самом деле[2] .

Еще один пример. По правилам проведения американского аукциона, инвестор может выставить одновременно несколько

---

[2] По видимому, авторы [3] не рассматривали свою теорию, как нормативную, то есть как теорию предназначенную для поиска рациональных способов принятия решений. Об этом говорит, например, тот факт, что в монографии отсутствуют модели боевых действий, хотя писалась она в разгар Второй мировой войны.

заявок на покупку финансовых активов по различным ценам. При этом естественно считать, что его выигрыш будет равен сумме выигрышей вот всех выставленных заявок. В таком случае задача будет формально совпадать с такой постановкой, когда инвестор выставляет только одну заявку, но случайным образом, и при этом ориентируется на математическое ожидание выигрыша. С задачей во второй постановке иногда психологически проще работать.

Определение. Смешанной стратегией первого (второго) игрока в игре <U,V,g> называется вероятностная мэра на множестве U (V).

Определение. Смешанным расширением игры <U,V,g> называется игра $\left\langle \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{g} \right\rangle$, где $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ – множества всех смешанных стратегий первого и второго игроков соответственно, а критерий $\tilde{g}$ определяется как математическое ожидание выигрыша в исходной игре, при условии, что соответствующие случайные величины независимы.

Когда нужно избежать путаницы, стратегии в исходной игре <U,V,g> называют чистыми.

Каждую чистую стратегию u можно отождествить с «сингулярной» смешанной стратегией определив отображение $c : U \to \tilde{U}$ следующим условием: $c(u)(W) = \begin{cases} 1, \text{ если } u \in W, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

Аналогичным образом определяется отображение $d : V \to \tilde{V}$. При этом «выигрыши сохраняются», то есть $\tilde{g}(c(u), d(v)) = g(u, v)$ для всех u и v. Это дает моральное право использовать слово «расширение».

Интересно отметить, что понятие смешанного расширения появилось в работе Э.Бореля, датированной 1921 г., то есть намного позднее того, как был написан рассказ Эдгара По.

Матричные игры

Теорию смешанных расширений мы разовьем лишь для игр с конечными множествами стратегий. Аналогичные результаты могут быть получены в гораздо более общих предположениях, но их изложение требует знаемый теории меры, выходящих за рамки стандартных курсов математики. Нас же будут интересовать некоторые концептуальные аспекты, которые на примере конечных игр понятны даже лучше.

Кроме того, по-видимому, практическое значение имеют лишь то игры, которые могут быть аппроксимированы играми с конечными множествами управлений. Поэтому один из естественных путей развития теории состоит в том, чтобы построить смешанные расширения для конечных игр, а затем осуществить предельный переход. Первую часть этой программы мы и осуществим.

Если множества U={1,…,k}и V={1,…,m}конечны, то функцию выигрыша удобно задавать с помощью матрицы $G = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{k1} & \dots & g_{km} \end{pmatrix}$. Поэтому игры с конечными множествами стратегий часто называют матричными. В таком случае можно считать, что $\tilde{U} = \left\{ \left(\hat{u}_1, ..., \hat{u}_k \right) \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^{k} \hat{u}_i = 1, \hat{u}_1 \geq 0, ..., \hat{u}_k \geq 0 \right\}$,

$\tilde{V} = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ ... \\ \hat{v}_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} \hat{v}_i = 1, \hat{v}_1 \geq 0, ..., \hat{v}_k \geq 0 \right\}$, и тогда $\tilde{g}(\hat{u}, \hat{v}) = \hat{u} G \hat{v}$.

Теорема (фон Нейман, 1926). Всякая матричная игра имеет седловую точку в смешанных стратегиях.

Доказательство. Множества $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ представляют собой выпуклые подмножества (симплексы) конечномерных евклидовых пространств. Функция $\tilde{g}$ линейна по каждой из переменных, значит, она непрерывна и одновременно и выпукла и вогнута, как по u, так и по v. Таким образом, игра $\left\langle \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{g} \right\rangle$ удовлетворяет всем условиями теоремы Какутани в существовании седловой точки в выпуклой игре.

Понятий важность концепции смешанного расширения в принятии решений помогает следующий эксперимент[3] . На заре развития вычислительной техники был сконструирован специализированный компьютер для игры у «орла» и «решку» (его полная электрическая схема умещается на книжной странице стандартного формата). В эксперименте этот компьютер сыграл против посетителей и сотрудников Bell Telephone Laboratories 9795 партий, из которых выиграл 5218 (т.е. несколько больше 53%). Компьютер пользовался при этом датчиком случайных числе, поэтому такой перевес мог бы быть

[3] См. Hagelbarger D.W. SEER, a sequence extrapolating robot, Trans. IRE, EC-5, №1 (1956),1–7 (Русский перевод Хагельсбаргер Д.У. СИИР – автомат, экстраполирующий последовательности //Кибернетический сборник. Вып.1. М.: ИЛ, 1960. С. 275–289.

и случайным, но вероятность этого составляет около 10^{-10}. Это есть человек оказывается беспомощным даже перед примитивным компьютером, если пользуется своей логикой. Отсюда - необходимость рандомизации.

Кстати, разумеется, стратегия данного компьютера не является оптимальной. При правильной игре против него вероятность выигрыша составляет 60%.

Свойства смешанных расширений

Обозначим g_i i-ую срока матрицы G, а g^j – ее j-ый столбец.

Лемма. Цена игры $\langle \hat{U}, \hat{V}, \hat{g} \rangle$ равна каждому из чисел $\max\limits_{\hat{u}\in\hat{U}} \min\limits_{1\le j\le m} \hat{u} g^j$ или $\min\limits_{\hat{v}\in\hat{V}} \max\limits_{1\le i\le k} g_i \hat{v}$.

Доказательство. Минимум линейной функции на выпуклом многограннике (симплексе) непременно достигается в однои из его вершин. Поэтому $\min\limits_{\hat{v}\in\hat{V}} \hat{u} G \hat{v} = \min\limits_{1\le j\le m} \hat{u} g^j$ и, следовательно, $\max\limits_{\hat{u}\in\hat{U}} \min\limits_{\hat{v}\in\hat{V}} \hat{u} G \hat{v} = \max\limits_{\hat{u}\in\hat{U}} \min\limits_{1\le j\le m} \hat{u} g^j$. Вторая часть утверждения доказывается аналогично.

Лемма. Если p – цена игры $\langle \hat{U}, \hat{V}, \hat{g} \rangle$, то $\max\limits_{u\in U} \min\limits_{v\in V} g(u,v) \le p \le \min\limits_{v\in V} \max\limits_{u\in U} g(u,v)$.

Доказательство. Согласно предыдущей лемме $p = \max\limits_{\hat{u}\in\hat{U}} \min\limits_{1\le j\le m} \hat{u} g^j = \max\limits_{\hat{u}\in\hat{U}} \min\limits_{v\in V} \hat{g}(\hat{u}, d(v))$. Но множество $\{c(u)\colon u\in U\}$ есть подмножество множества $\hat{U}$, поэтому $p = \max\limits_{\hat{u}\in\hat{U}} \min\limits_{v\in V} \hat{g}(\hat{u}, d(v)) \ge \max\limits_{\hat{u}\in c(U)} \min\limits_{v\in V} \hat{g}(\hat{u}, d(v)) = \max\limits_{u\in U} \min\limits_{v\in V} \hat{g}(c(u), d(v))$.

Воспользовавшись равенством $\tilde{g}(c(u),d(v))=g(u,v)$, получим левое неравенство. Правое доказывается аналогично.

Лемма. Если (u_0,v_0) – седловая точка в игре <U,V,g>, то ($c(u_0)$,$d(u_0)$) будет седловой точкой в игре $\left\langle \tilde{U},\tilde{V},\tilde{g}\right\rangle$.

Доказательство. Пусть $\hat{u}=\left(\hat{u}_1,...,\hat{u}_k\right)$ – произвольная смешанная стратегия первого игрока. Так как (u_0,v_0) – седловая точка, выполняются неравенства $g(u,v_0)\le g(u_0,v_0)$. Домножая эти неравенства на соответствующие вероятности, и суммируя, получим $\sum_{i=1}^{k}\hat{u}_i g(i,v_0)\le\sum_{i=1}^{k}\hat{u}_i g(u_0,v_0)=g(u_0,v_0)\sum_{i=1}^{k}\hat{u}_i=g(u_0,v_0)$ или $\tilde{g}(\hat{u},d(v_0))\le\tilde{g}(c(u_0),d(v_0))$. Аналогично доказывается неравенство $\tilde{g}(c(u_0),d(v_0))\le\tilde{g}(c(u_0),\hat{v})$.

Сведение к задаче линейного программирования

Задача вычисления $\max_{\hat{u}\in\tilde{U}}\min_{1\le j\le m}\hat{u}g^j$ очевидно эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$t\to\max$,

$t\le\hat{u}g^1,...,t\le\hat{u}g^1$,

$\hat{u}_1\ge 0,...,\hat{u}_k\ge 0$.

$\sum_{i=1}^{k}\hat{u}_i=1$,

Эту задачу можно еще немного упростить. Введем новые переменные $x_1=\frac{\hat{u}_1}{t},...,x_k=\frac{\hat{u}_k}{t}$. Тогда задача перепишется в виде

$t\to\max$,

$x_1g^1\ge 1,\ldots,x_kg^k\ge 1$,

$x_1 \geq 0, \ldots, x_k \geq 0$.....

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \frac{1}{t},$$

Используя последнее равенство, переменную t можно вовсе исключить, переписал задачу в виде

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \to \min,$$

$x_1 g^1 \geq 1, \ldots, x_k g^k \geq 1,$

$x_1 \geq 0, \ldots, x_k \geq 0$.....

Если проделать аналогичную процедуру с выражением $\min_{\hat{v} \in \hat{V}} \max_{1 \leq i \leq k} g_i \hat{v}$, получится задача, двойственная к предыдущей.

Замечание. Решение любой задачи линейного программирования, в свою очередь, может быть сведено к поиску седловой точки некоторой игры.

Лемма. Множество оптимальных смешанных стратегий в матричной игре представляет собой выпуклый компактный многогранник.

Доказательство следует из того, что указанными свойствами обладает решение задачи линейного программирования.

Доминирование

Определение. Бинарным отношением на множестве A называется всякое подмножество R декартова произведения $A \times A$.

Часто вместо $(a,b) \in R$ пишут aRb.

Определение. Отношение R называется рефлексивным, если aRa для дорогого a.

Определение. Отношение R называется транзитивным, если из aRb и bRc следует aRc.

Определение. Отношение R называется антисимметричным, если из aRb и bRa следует, что a=b.

Определение. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называют отношением частичного порядка.

Определение. Стратегия u_1 первого игрока слабо доминирует его же стратегию u_2, если $g(u_1,v) \geq g(u_2,v)$ для дорогого v. Стратегия v_1 первого игрока слабо доминирует его стратегию v_2, если $g(u_1,v) \leq g(u_2,v)$ для дорогого u.

Определение. Стратегия u_1 первого игрока сильно доминирует его же стратегию u_2, если $g(u_1,v) > g(u_2,v)$ для дорогого v. Стратегия v_1 первого игрока сильно доминирует его стратегию v_2, если $g(u_1,v) < g(u_2,v)$ для дорогого u.

Лемма. Если стратегия i в матричной игре слабо доминируется стратегией какой-то другой стратегией, то найдется такая оптимальная смешанная стратегия $\hat{u} = \left(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k\right)$, что $\hat{u}_i$=0.

Доказательство. Пусть чистая стратегия 1 слабо доминирует стратегию i, и пусть $\left(\hat{w}, \hat{v}\right)$ – седловая точка в смешанном расширении данной игры. Тогда $g(\hat{u}', \hat{v}) \leq g(\hat{w}, \hat{v}) \leq g(\hat{w}, \hat{v}')$ для любых стратегий $\hat{u}'$ и $\hat{v}'$. Определим стратегию $\hat{u} = \left(\hat{u}_1, ..., \hat{u}_k\right)$, положил $\hat{u}_i = 0, \hat{u}_l = \tilde{w}_l + \tilde{w}_i$ и $\hat{u}_j = \tilde{w}_j$ для всех остальных j. Из условия слабого доминирования следует, что $\tilde{g}(\hat{u}, \hat{v}') \geq \tilde{g}(\tilde{w}, \hat{v}')$ для всех $\hat{v}'$. Отсюда $\min\limits_{\hat{v}' \in \tilde{V}} \tilde{g}(\hat{u}, \hat{v}') \geq \min\limits_{\hat{v}' \in \tilde{V}} \tilde{g}(\tilde{w}, \hat{v}') = \max\limits_{\hat{u}' \in \tilde{U}} \min\limits_{\hat{v}' \in \tilde{V}} \tilde{g}(\hat{u}', \hat{v}')$, то есть на самом деле $\min\limits_{\hat{v}' \in \tilde{V}} \tilde{g}(\hat{u}, \hat{v}') = \max\limits_{\hat{u}' \in \tilde{U}} \min\limits_{\hat{v}' \in \tilde{V}} \tilde{g}(\hat{u}', \hat{v}')$, то есть $\hat{u}$ – тоже оптимальная стратегия первого игрока, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается

Лемма. Если стратегия i в матричной игре сильно доминируется стратегией какой-то другой стратегией, то для любой оптимальной смешанной стратегии $\hat{u} = \left(\hat{u}_1, ..., \hat{u}_k\right)$ имеет место равенство $\hat{u}_i$=0.

Аналогичные леммы справедливы и для стратегий второго игрока. Подобные утверждения справедливы и в том случае, когда одна из стратегий слабо (сильно) доминируется линейной комбинацией нескольких вторых

Лемма. Пусть $\hat{u} = \left(\hat{u}_1, ..., \hat{u}_k\right)$ – оптимальная стратегия первого игрока, причем $\hat{u}_i > 0, \hat{u}_l > 0$. Тогда $g_i \hat{v} = g_l \hat{v}$ для любой оптимальной стратегии $\hat{v}$ второго игрока.

Доказательство. По условию одна из точек максимума линейной функции $F(\hat{u}) = \hat{u}(G\hat{v})$ на симплексе $\tilde{U} = \left\{\left(\hat{u}_1, ..., \hat{u}_k\right) \in \mathbb{R}^k : \sum\limits_{i=1}^{k} \hat{u}_i = 1, \hat{u}_1 \geq 0, ..., \hat{u}_k \geq 0\right\}$ лежит внутри грани, содержащей i-ю и l-ю вершины. Значит, эта функция постоянна на всеи этой граны и, в частности, принимает равные значения в этих двух вершинах.

Пример. Рассмотрим модель розыгрыша одного очка в волейбольной партии. В нулевом приближении игра выглядит следующим образом. Связующий принимающей команды имеет три стратегии: отдать ремень доигровщику, отдать ремень центральному нападающему, или отдать ремень диагональному игроку. Центральный блокирующий подающей команды имеет тоже три стратегии: помочь ставит блок против доигровщика, ставит блок в центре или помочь ставит блок против диагонального противника. При этом скорость второй передачи такова, что принять свое решение блокирующий должен одновременно со связующим. Выигрышем принимающей стороны можно считать шансы (вероятность) нападающего выиграть очко на данном блоке. Эти шансы естественно зависят вот класса игроков, их физической готовности и т.д. Но естественно предположить, что эти шансы тем выше, чем меньше блокирующих выпрыгивают перед нападающим, получившим мяч.

Таким образом, логика игры примерно и же, что и в играх Орел-решка или Камень-Ножницы-Бумага: Блокирующий должен угадать выбор связующего, а тот в свою очередь - постараться запутать противника. Нетрудно понятий, что седловой точки в чистых стратегиях в этой игре нет. Отсюда естественно возникает идея использования смешанных стратегий.

В этой связи интересно проанализировать ситуацию, сложившуюся в полуфинальной игре женских сборных России и Бразилии на олимпиаде в Афинах. Сборная Бразилии по ходу матча выигрывала 2:1 по партиям и 24:19 в четвертой партии, но в результате проиграла. Общественное мнение Бразилии обвинило в проигрыше доигровщицу команды, не забившую несколько решающих мячей в четвертой партии. А по статистике она за весь матч набрала 35 очков, то есть нападала гораздо чаще и успешнее своих подруг. Предыдущая лемма показывает, что связующая сборной Бразилии выбрала явным образом не оптимальную стратегию, чем и воспользовались блокирующие сборной России.

Примеры

Пример. Рассмотрим игру с матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Очевидно, строка (2,3) слабо доминируется строкой $\frac{1}{3}(7,1)+\frac{2}{3}(1,4)$[4]. Следовательно, первая строка входит в оптимальную смешанную стратегию первого игрока с нулевой вероятностью. Поэтому решение задачи сводится к исследованию игры с матрицей $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Любая смешанная стратегия первого игрока может быть записанная в виде (q,1–q), где q – некоторое число,

---

[4] А при достаточно малых ε сильно доминируется строкой $\left(\frac{1}{3}-\varepsilon\right)(7,1)+\left(\frac{2}{3}+\varepsilon\right)(1,4)$.

принадлежащее отрезку [0,1]. Поэтому нужно вычислить $\max\limits_{0\le q\le 1}\min\left\{7q+(1-q),q+4(1-q)\right\}$. Максимум, очевидно, может достигаться либо на концах отрезка, либо в точке $q=\frac{1}{3}$ пересечения графиков функций $7q+(1-q)$ и $q+4(1-q)$. На концах отрезка $\min\left\{7q+(1-q),q+4(1-q)\right\}=1$, а в точке $q=\frac{1}{3}$ это выражение принимает значение 3. Значит, цена игры равна 3, а оптимальная смешанная стратегия первого игрока есть $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Аналогично находится оптимальная стратегия $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$[5] второго игрока в редуцированной игре.

Возвращаясь к рассмотрению исходной игры делаем вывод, что оптимальная стратегия первого игрока есть $\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Пример. Рассмотрим известную игру «камень–ножницы–бумага». Она описывается матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Цена игры легко находится из соображений симметрии. В самом деле,

$$\max_{\hat u\in\tilde U}\min_{\hat v\in\tilde V}\tilde g(\hat u,\hat v)=\max_{\hat u\in\tilde U}\min_{\hat v\in\tilde V}\left[-\tilde g(\hat v,\hat u)\right]=-\min_{\hat u\in\tilde U}\max_{\hat v\in\tilde V}\tilde g(\hat v,\hat u)=-\min_{\hat v\in\tilde V}\max_{\hat u\in\tilde U}\tilde g(\hat u,\hat v)=-\max_{\hat v\in\tilde V}\min_{\hat u\in\tilde U}\tilde g(\hat u,\hat v)$$

(последнее равенство верно, так как в матричной игре всегда существует седловая точка). Значит, $\max\limits_{\hat u\in\tilde U}\min\limits_{\hat v\in\tilde V}\tilde g(\hat u,\hat v)=0$.

[5] То, что она в данном случае совпала с оптимальной стратегией первого игрока – случайность. Полезно подумать, чем это обусловлено.

Оптимальные стратегии также находятся из соображений симметрии. В самом деле, если $\left(\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{u}_3\right)$ – оптимальная стратегия, то и стратегии $\left(\hat{u}_2,\hat{u}_3,\hat{u}_1\right)$ и $\left(\hat{u}_3,\hat{u}_1,\hat{u}_2\right)$ будут оптимальными. Но тогда в силу последней леммы оптимальной будет и стратегия $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Более тонкий анализ показывает, что оптимальная стратегия в этой игре одна. Действительно, Пусть $\left(\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{u}_3\right)$ – произвольная оптимальная стратегия первого игрока. Вместе со стратегией $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ второго игрока она образует седловую точку. Но в стратегию $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ входят все три чистые стратегии, поэтому при фиксированной стратегии $\left(\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{u}_3\right)$ выбор всех трех столбцов одинаково выгоден второму игроку. Поэтому, $\hat{u}_2-\hat{u}_3=\hat{u}_3-\hat{u}_1=\hat{u}_1-\hat{u}_2$. Вместе с условием нормировки $\hat{u}_1+\hat{u}_2+\hat{u}_3=1$ получаем невырожденную систему уравнений, имеющую единственное решение $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Пример (фон Нейман, 1953). Полицейский ищет гангстера, который может прятаться в одном из n баров. Вероятность задержания гангстера, если вон находится в баре с номером i, равна a_i. Естественно, полицейский стремится максимизировать эту вероятность.

Данная ситуация описывается матрицей, в которой на диагонали стоят числа a_i, а остальные элементы равны нулю.

Найдем оптимальные стратегии в этой игре. В данном случае $\hat{g}(\hat{u},\hat{v}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{u}_i \hat{v}_i$. Поэтому $\max_{\hat{u}\in\hat{U}} \min_{1\le j\le m} \hat{u}g^j = \max_{\hat{u}\in\hat{U}} \min_{1\le j\le m} a_j \hat{u}_j$. Последний максимум достигается, если только все числа $a_i\hat{u}_i$ равны между собой. Таким образом, получаем систему уравнений $\begin{cases} a_1\hat{u}_1 = p, \\ \ldots \\ a_n\hat{u}_n = p, \\ \hat{u}_1 + \ldots + \hat{u}_n = 1, \end{cases}$

из n+1 уравнения с n+1 неизвестным. Откуда $p = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}}$,

$$\hat{u}_i = \frac{1}{a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}}.$$

Аналогично находится оптимальная стратегия преступника

$$\hat{v}_i = \frac{1}{a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}}.$$

Интересно отметить, что стратегия сыщика на первый взгляд кажется несколько неожиданной: с большей вероятностью надо выбирать бар, где преступника труднее поймать.

Из рассмотрения этого примера следует, что оптимальные стратегии в смешанном расширении, вообще говоря, меняются при монотонных преобразованиях функции выигрыша в исходной игре. В самом деле, если мы увеличим наибольшее из чисел a_i, то оптимальные стратегии обоих игроков изменятся. Но такому изменению соответствует монотонное преобразование функции $\breve{g}(\hat{u},\hat{v})=\sum_{i=1}^{n} a_i \hat{u}_i \hat{v}_i$. При аффинных преобразованиях функции выигрыша оптимальность стратегий сохраняется (см. задачи ниже). Это позволяет оценить область применимости концепции смешанного расширения.

Замечание. Данная игра использовалась фон Нейманом для решения следующей задачи оптимального назначения: имеется n рабочих, n видов работ и набор вещественных чисел a_{ij}, характеризующих производительность i-го рабочего на работе вида j. На какую работу следует определить каждого рабочего[6] , чтобы добиться максимума общей производительности?

Пример. Пусть оперирующая сторона умеет производить два типа танков A и B, а ее вероятный противник - тоже два типа C и D. При этом известно, что 70% встреч AC выигрывает A, 60% встреч CBвыигрывает C, 85% встреч BDвыигрывает B, а 65% встреч DA выигрывает D. Рассматривается вопрос в том, какой тип танков ставит на вооружение?

Очевидно, ситуация описывается матричной игрой с матрицей $\begin{pmatrix} 70 & 35 \\ 40 & 85 \end{pmatrix}$. Непосредственная проверка показывает, что седловой точки в этой игре нет. Оптимальная смешанная стратегия оперирующей стороны (0.375, 0.625), то есть 37.5% стоящих на вооружении танков должны иметь тип A, а остальные - тип B.

[6] по одному на каждую работу

Использование в данном случае смешанного расширения представляется оправданным, поскольку заранее неизвестно, какие танцы будут участвовать в дуэлях в предстоящей войне. Если предположить их встречи равновероятными, то выбранное решение будет максимизировать математическое ожидание выигранных дуэлей.

- «Орел-решка» - иррациональность + динамика - сдвиги на торе - эргодичность - дискретный вариант - существование седловой точки?
- Две игры Бореля в фон Неймана.
- В мак-кинси3.
- В мак-кинси - сетевые игры

Задачи

1. Рассмотрите семейство антагонистических игр 2×2: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

   Докажите, что оно разбивается на два подмножества:

А) Если пересечение [a,d] и [b,c] не пусто, то игра имеет седловую точку в чистых стратегиях.

Б) В противном случае существует единственная седловая точка в смешанных стратегиях, причем соответствующие оптимальные стратегии вполне смешанные, а цена игры определяется формулой $p = \dfrac{ad - bc}{a + d - b - c}$.

2. Приведите пример, показывающий, что выполнение равенств $\tilde{g}(\hat{v}_0, \hat{u}_0) = \min\limits_{\hat{u} \in \tilde{U}} \max\limits_{\hat{v} \in \tilde{V}} \tilde{g}(\hat{v}, \hat{u}) = \max\limits_{\hat{v} \in \tilde{V}} \min\limits_{\hat{u} \in \tilde{U}} \tilde{g}(\hat{u}, \hat{v})$ не является

достаточным условием того, что $(\hat{v}_0, \hat{u}_0)$ есть седловая точка игры $\langle \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{g} \rangle$.

3. Приведите примеры таких матриц A и B, что

А) p(A+B)<p(A)+p(B);

Б) p(A+B)>p(A)+p(B);

В) p(A+B)=p(A)+p(B),

где p(A) – цена игра с матрицей A?

4. Все элементы матрицы неотрицательны, причем каждый столбец содержит, по крайней мэр, один положительный элемент. Докажите, что цена игры с этой матрицей положительна.

5. Верно ли утверждение предыдущей задачи, если вместо предположения в столбцах считать, что каждая строка содержит один положительный элемент?

6. Докажите, что цена игры, матрица которой состоит из рациональных чисел, рационально.

7. Докажите, что цена матричной игры есть неубывающая функция элементов матрицы.

8. Докажите, что если умножит все элементы матрицы на одно и то же положительное число, то оптимальные смешанные стратегии останутся темы же, а цена игры умножится на то же число.

9. Докажите, что если увеличить все элементы матрицы на одно и то же число, то оптимальные смешанные стратегии останутся темы же, а цена игры увеличится на то же число.

10. Докажите, что p(–A)=–p(A^T), где A^T – матрица, транспонированная к A.
11. Пусть A – квадратная кососимметрическая матрица, то есть $A=-A^T$, где A^T – матрица, транспонированная к A. Докажите, что в смешанном расширении соответствующей матричной игры существует по крайней мэр одна седловая точка $\left(\hat{u},\hat{v}\right)$ такая, что $\hat{u}=\hat{v}$.
12. Может ли строка матрицы игры, в которой все элементы не превосходят значения игры, а некоторые меньше этого значения, входит с ненулевой вероятностью

А) в некоторую оптимальную стратегию первого игрока?

Б) в любую оптимальную стратегию первого игрока?

13. Может ли строка матрицы игры, сильно доминируемая некоторой выпуклой комбинацией вторых срок, входит с ненулевой вероятностью в некоторую оптимальную стратегию первого игрока?
14. Может ли строка матрицы игры, слабо доминируемая некоторой выпуклой комбинацией вторых срок, входит с ненулевой вероятностью в любую оптимальную стратегию первого игрока?
15. Следует ли из того, что i-я компонента любой оптимальной стратегии первого игрока равна нулю, доминирование i-ой сроки матрицы некоторой выпуклой комбинацией вторых срок?
16. Используя понятие доминирования, найдите оптимальные стратегии в следующих матричных играх:

А) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ Б) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Д) $\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Е) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Ж) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ С) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, И)

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

17. Используя графический метод, найдите цены и оптимальные смешанные стратегии в играх с матрицами

А) $\begin{pmatrix} 19 & 15 & 17 & 16 \\ 0 & 20 & 15 & 5 \end{pmatrix}$, Б) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$, В) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

18. Найдите цены и оптимальные смешанные стратегии в играх с матрицами

А) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 5 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$, Б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, В) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Г) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & -6 & 19 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -5 & -2 & 16 & -35 \end{pmatrix}$,

Д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 14 & 7 & -1 \end{pmatrix}$, Е) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Ж) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

19. Покажите, что игра с матрицей $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, где a>b>c>0 имеет единственную седловую точку. Найдите ее и цену игры. Каково будет решение, если a>b>c и c<0?

20. Рассмотрим игру с матрицей $\begin{pmatrix} c & c & c \\ c & 3 & 4 \\ c & 5 & 1 \end{pmatrix}$. При каких значениях c множество оптимальных стратегий первого игрока будет бесконечным? Покажите, что цена игры равна c при всех c.

21. Докажите, что игра с матрицей $\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ имеет единственную седловую точку.

22. Данная матричная игра с матрицей (a_{ij}) для которой $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i = j, \\ -1 \text{в противном случае.} \end{cases}$ Найдите значение игры в смешанных стратегиях и оптимальные стратегии.

23. Найдите седловую точку в игре с матрицей (a_{ij}), если $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если } i = j, \\ b_i, \text{в противном случае,} \end{cases}$ причем $b_i>0$ при всех i.

24. Найдите цену и оптимальные смешанные стратегии игры с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

25. Матрица порядка m×m называется латинским квадратом, если каждая ее с трока и каждый столбец содержат все

целые числа вот 1 к m. Докажите, что игра m×m, матрица которой есть латинский квадрат, имеет цену $\frac{m+1}{2}$.

26. Игрок 1 выбирает одну из n ячеек и прячется в неи. Игрок 2 ищет игрока 1 путем проверки однои из ячеек. Если игрок прячется в i-ой ячейке, а игрок 2 проверяет j-ю ячейку, то выигрыш игрока 1 равен $|i-j|$. Игра антагонистическая.

А) при n=3 найти седловую точку и цену игры.

Б) Найти седловую точку и цену игры в общем случае.

27. Условия аналогичны предыдущей задаче, но в случае, если i не равно j игрок 2 платит игроку 1 штраф в размере $c_j>0$, а в случае обнаружения игрока 1 в ячейке i игрок 2 получает сумму r_i. Вероятность обнаружить игрока 1 в ячейке j, при условии, что i=j, равна $\alpha_j \in (0,1)$.

А) Построить матрицу игры.

Б) При n=3, $r_i=i$, $\alpha_i=1/2i$, $c_i=i$ найти седловые точки и цену игры.

В) Пусть $c_1 \le \min\{c_2,\ldots,c_n\}, \alpha_n r_n \le c_n - c_1$... Докажите, что c_1 – цена игры, а (n,1) – седловая точка в чистых стратегиях.

Г) ???Пусть $v = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\alpha_i r_i} - 1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i r_i}}$ – цена игры, а векторы с компонентами

$\dfrac{c_i - v}{\alpha_i r_i}$ и $\dfrac{1}{\alpha_i r_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j r_j}}$ определяют седловую точку в смешанных стратегиях.

28. Докажите, что если для всех меченный i и j выполняется неравенство

$a_{i-1,j}-2a_{i,j}+a_{i+1,j}\geq 0$, то в игре с матрицей (a_{ij}) в первого игрока есть оптимальная стратегия, в которой все элементы, кроме, быть может, первого и последнего, нулевые.

29. Докажите, что если для всех меченный i и j выполняется неравенство

    $a_{i,j-1-2}a_{i,j}+a_{i,j+1}\geq 0$, то в игре с матрицей (a_{ij}) для каждого игрока существует оптимальная стратегия, спектр которой содержит не более двух точек.

30. Докажите, что если для всех меченный i и j выполняется неравенство

    $a_{i-1,j}-2a_{i,j}+a_{i+1,j}\leq 0$, то в игре с матрицей (a_{ij}) для каждого игрока существует оптимальная стратегия, спектр которой содержит не более двух точек.

31. Отождествим матрицу игры размера $k\times n$ с точкой kn–мерного евклидова пространства. Пусть отображение F ставит в соответствие каждой точке пространства множество седловых точек в игре с соответствующей матрицей. Докажите, то отображение F замкнуто. Является ли оно полунепрерывным снизу?

32. Отождествим матрицу игры размера $k\times n$ с точкой kn–мерного евклидова пространства. Докажите, что цена матричной игры в смешанных стратегиях есть непрерывная функция этой точки.

33. Отождествим матрицу игры размера $k\times n$ с точкой kn–мерного евклидова пространства. Докажите, что существует открытое всюду плотное множество (в этом пространстве,

такое, что любая игра, соответствующая точкам этого множества имеет единственную седловую точку в смешанных стратегиях.

34. Установите связь между оптимальными стратегиями игры с матрицей А и оптимальными стратегиями симметричной игры с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & A & -I & I \\ -A^T & 0 & I & -I \\ I & -I & 0 & 0 \\ -I & I & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Литература

1. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. Г.: Наука, 1985.
2. Мак Кинси Дж. Введение в теорию игр. Г.: Физматлит, 1960.

Лекция. Игровой смысл множителей Лагранжа

Множители Лагранжа

Рассмотрим задачу математического программирования

$f(x)\to\max$,

$g_i(x)\geq 0,\ i=1,\ldots,m$,

$h_j(x)=0,\ j=1,\ldots,k$,

$x\in X\subset \mathbb{R}^n$.....

Эта символическая запись может подразумевать как минимум три различные постановки задачи:

а) Найти оптимальное значение критерия (слабая постановка);

б) Найти хотя бы одно оптимальное значение управления x (задача частного выбора);

в) Найти все оптимальные значения управления (задача полного выбора).

В прикладных задачах возникают все три постановки. И, разумеется, каждая из их требует особого подхода. К сожалению, для решения задачи в слабой постановке не разработано сколько-нибудь общих методов решения. В задаче частного выбора обычно можно ограничиться использованием достаточных условий оптимальности. В задачах полного выбора приходится прибегать к помощи необходимых условий.

Работоспособные достаточные условия экстремума получаются легко и без дополнительных предположений. Для получения необходимых условий требуются дополнительные ограничения на сложность рассматриваемых функций и множества X. Наиболее часто используются два способа такого ограничения.

а) предполагается гладкость всех рассматриваемых функций;

б) предполагается выпуклость рассматриваемых функций.

Первый случай был исследован еще Эйлером и Лагранжем. Второй был выделен только во второй половине XX века.

Отметим, что в первом случае ограничения на сложность носят локальный характер, и, соответственно, получаются необходимые условия локальной оптимальности. Во втором случае дополнительные условия глобальны, и удается получить необходимые условия глобального максимума. Впрочем, разница этих двух случаев не столь большая, поскольку при исследовании первого из их, гладкие функции приближаются линейными (а значит, выпуклыми).

На практике обычно ограничиваются поиском приближенного решения. К сожалению, в задаче максимизации легко получить нижние оценки оптимального значения критерия, но гораздо труднее получить нетривиальные верхние оценки, и соответственно оценить качество наидневного приближенного решения. Впрочем, часто можно ограничиться нахождением просто «хорошего» решения, которое удовлетворяет запросы оперирующей стороны.

Введем обозначения $U=\{x\in X:\ g_i(x)\geq 0,\ i=1,\ldots,m,\ h_j(x)=0,\ j=1,\ldots,k,\}$, $V=\{(\lambda^1,\ldots,\lambda^m,\mu^1,\ldots,\mu^k)\in \mathbb{R}^{m+k}:\ \lambda^i\geq 0,\ i=1,\ldots,m\}$[7]... Определим функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda,\mu)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda^i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu^j h_j(x).$$

Теорема. Если в игре $<X,V,L>$ существует седловая точка, и x_* – оптимальная стратегия первого игрока в этой игре, то x_* является решением рассматриваемой задачи математического программирования.

Доказательство. Пусть (λ_*,μ_*) – оптимальная стратегия второго игрока в данной игре.

Преждет всего, заметим, что имеют место равенства $h_j(x_*)=0$, $j=1,\ldots,k$, так как в противном случае второй игрок мог бы уменьшать значение критерия к бесконечности, что противоречит существованию седловой точки в рассматриваемой игре. По тем же причинам справедливы неравенства $g_i(x_*)\geq 0$, $i=1,\ldots,m$... Более того, если для какого то i имеет место строгое неравенство $g_i(x_*)>0$, то соответствующая компонента λ_*^i равна нулю, то есть выполняются условия дополняющей нежесткости $\lambda_*^i g_i(x_*)=0,\ i=1,\ldots,m$.

Таким образом, $L(x_*,\lambda_*,\mu_*)=f(x_*)$. Для всякого $x\in U$ выполняются условия

$$L(x,\lambda_*,\mu_*)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_*^i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_*^j h_j(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_*^i g_i(x)\geq f(x).$$

[7] Мнемоническое правило: знак множителя Лагранжа λ^i выбирается так, что соответствующее слагаемое в функции Лагранжа имеет смысл штрафа за нарушение ограничения.

Из определения седловой точки следует, что $L(x_*,\lambda_*,\mu_*)\geq L(x,\lambda_*,\mu_*)$ для дорогого $x\in U$.

Сравнивая два последних неравенства, получим $f(x_*)\geq f(x)$, что в силу произвольности x означает, что x_* – точка максимума функции f на множестве U, что и требовалось доказать.

Теорема Куна-Такера

Рассмотрим задачу математического программирования

$f(x)\rightarrow\max$,

$g_i(x)\geq 0$, $i=1,\ldots,m$, (P)

$x\in X\subset\mathbb{R}^n$...

где $f,g_1,\ldots,g_m$–вогнутые непрерывные функции, а $X\subset\mathbb{R}^n$ – выпуклое компактное множество.

Обозначим $L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda^i g_i(x)$.

Теорема. Пусть x_* – решение задачи (P) и пусть существует точка x_0 для которой

$g_i(x_0)>0$ для всех $i=1,\ldots,m$... (S)

Тогда существуют неотрицательные числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$для которых

$L(x,\lambda_*)\leq L(x_*,\lambda_*)\leq L(x_*,\lambda)$ (L)

для всех $x\in X$ и $\lambda=(\lambda^1,\ldots,\lambda^m)\in\mathbb{R}^m$и

$\lambda_*^i g_i(x_*)=0$ для всех $i=1,\ldots,m$... (N)

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру <X,Y,F>, где X – множество стратегий максимизирующего игрока, $Y=\{(\mu^0,\mu^1,...,\mu^m):\mu^i\geq 0, i=0,...,m, \sum_{i=0}^{m}\mu^i=1\}$ – множество стратегий второго игрока, а критерий определен условием $F(x,\mu)=\sum_{i=0}^{m}\mu^i g_i(x)$, где $g_0(x)=f(x)-f(x_*)$.

По теореме в существовании седловой точки в выпуклой игре существуют $x_\#\in X$, $\mu_*\in Y$ такие, что

$$F(x,\mu_*)\leq F(x_\#,\mu_*)\leq F(x_\#,\mu) \qquad (M_\#)$$

для всех $x\in X$, $\mu\in Y$.

Если $g_i(x)<0$ для некоторого i, то выбрав $\mu\in Y$ так, что $\mu^i=1$, второй игрок может обеспечить условие $F(x,\mu)<0$. Если же условия $g_i(x)\geq 0$ выполняются для всех i=1,…,m, это $g_0(x)\leq 0$ по определению точки x_* и, выбрав $\mu\in Y$ так, что $\mu^0=1$, второй игрок обеспечит выполнение неравенства $F(x,\mu)\leq 0$. Таким образом, для дорогого $x\in X$ имеем

$$\min_{\mu\in Y}F(x,\mu)\leq 0$$

и, следовательно,

$$\max_{x\in X}\min_{\mu\in Y}F(x,\mu)\leq 0$$

Но выбор стратегии x_* обеспечивает первому игроку неотрицательный выигрыш не завысим вот действий соперника, значит на самом деле

$$\max_{x\in X}\min_{\mu\in Y}F(x,\mu)=\min_{\mu\in Y}\max_{x\in X}F(x,\mu)=0,$$

а x_* является оптимальной стратегией первого игрока.

Но в антагонистической игре оптимальные стратегии взаимозаменяемы, поэтому из условия ($M_{\#}$) следует условие:

$F(x,\mu_*) \le F(x_*,\mu_*) \le F(x_*,\mu)$ (M)

для всех $x \in X$, $\mu \in Y$.

Покажем, что $\mu_*^0 > 0$. В самом деле, если допустит противное, то $F(x_0,\mu_*) > 0 = F(x_*,\mu_*)$, что противоречит условию (M).

В силу линейности условие $\mu_*^i > 0$ может выполняться только для тех i, для которых $g_i(x_*) = \min\limits_{i=0,1,\dots,m} g_i(x_*)$. Но $g_0(x_*) \le 0$, а для $i=1,\dots,m$ имеем $g_i(x_*) \ge 0$. Значит,

$\mu_*^i g_i(x_*) = 0$ для всех $i=1,\dots,m$... (T)

С учетом того, что $F(x_*,\mu_*)=0$ условие (M) может быть переписано в виде

$F(x,\mu_*) \le 0 \le F(x_*,\mu)$ (M_0)

Покажем, что тогда выполняется условие

$L(x,\lambda_*) - f(x_*) \le 0 \le L(x_*,\lambda) - f(x_*)$ (L_0)

где $\lambda_*^i = \dfrac{\mu_*^i}{\mu_*^0}$, а $x \in X$ и $\lambda = (\lambda^1,\dots,\lambda^m) \in \mathbb{R}^m$ произвольны.

В самом деле, если $L(x,\lambda_*) - f(x_*) > 0$, то умножил это неравенство на положительное число μ_*^0 получим $F(x,\mu_*) > 0$, что противоречит (M_0).

Если же $L(x_*,\lambda)-f(x_*)<0$ для некоторого $\lambda=(\lambda^1,\ldots,\lambda^m)\in\mathbb{R}_+^m$, это имеем $f(x_*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda^i g_i(x_*)-f(x_*)<0$. Поделив это неравенство на положительное число $1+\sum_{i=1}^{m}\lambda^i$ и обозначив $\mu^0=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{m}\lambda^i}, \mu^i=\frac{\lambda^i}{1+\sum_{i=1}^{m}\lambda^i}, i=1,...,m$, получим $F(x_*,\mu)<0$, причем $(\mu^0,\mu^1,\ldots,\mu^m)\in Y$, что вновь противоречит (M_0).

Условие (N) следует из условия (T) и определения чисел λ^i.

Теорема доказана.

Условие компактности множества X может быть ослаблено. А именно, пусть выполняются все предположения предыдущей теоремы, кроме одного: множество X будем считать замкнутым, но не обязательно ограниченным. Тогда справедливая

Теорема. Пусть x_* – решение задачи (P) и пусть существует точка x_0 для которой

$g_i(x_0)>0$ для всех $i=1,\ldots,m$... (S)

Тогда существуют неотрицательные числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$для которых

$L(x,\lambda_*)\le L(x_*,\lambda_*)\le L(x_*,\lambda)$ (L)

для всех $x\in X$ и $\lambda=(\lambda^1,\ldots,\lambda^m)\in\mathbb{R}_+^m$и

$\lambda_*^i g_i(x_*)=0$ для всех $i=1,\ldots,m$... (N)

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру <X_N,Y,F>, где $X_N=\{x\in X: |x-x_*|\le N\}$. Рассуждая, как и выше убедимся, что для каждого N существует μ_N для которого

$F(x,\mu_N)\le F(x_*,\mu_N)=0\le F(x_*,\mu)$

для всех $x\in X_N$, $\mu\in Y$ и

$\mu_N^i g_i(x_*)=0$ для всех i=1,…,m...

Пусть N, принимая натуральные значения стремится к бесконечности. Так как Y компактно, не ограничивая общности, можем считать, что при этом $\mu_N\to\mu_*$. Переходя к пределу получим, что

$F(x,\mu_*)\le F(x_*,\mu_*)=0\le F(x_*,\mu)$

для всех $x\in X$, $\mu\in Y$ и

$\mu_*^i g_i(x_*)=0$ для всех i=1,…,m...

Доказательство завершается дословным повторением рассуждений из доказательства предыдущей теоремы.

Аналогичным образом можно избавиться и вот условия замкнутости множества X.

- Возмущение задачи оптимизации - устойчивость - множители Лагранжа

Модель распределения дефицитного ресурса

Данная модель была предложена О.В. Кононенко для поиска оптимальных способов распределения воды между сельскохозяйственными предприятиями в средней Азии (а бассейнах рек Аму-Дарья и Сыр-Дарья.)

Пусть имеется n сельскохозяйственных предприятий, которые выпускают m видов сельскохозяйственной продукции. Обозначим v_{ij} – затраты дефицитного ресурса (воды) на выпуск i-м предприятием j-го вида продукции, p_{ij} – выпуск i-м предприятием j-го вида продукции. Величины v_{ij} являются управлениями оперирующей стороны. Дефицитность означает, что выбранные управления должны удовлетворять неравенствам

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_{ij} \le V ,$$

где V – некоторая заданная константа (параметр модели).

Сделаем следующие предположения.

Гипотеза 1. Выпуск продукции p_{ij} зависит только вот количества выделенного ресурса, то есть $p_{ij}=f_{ij}(v_{ij})$.

Гипотеза 2. Функции f_{ij} монотонно возрастают.

Гипотеза 3. Функции f_{ij} строго вогнуты.

Гипотеза 4. Функции f_{ij} дифференцируемы.

Гипотеза 5. Цель оперирующей стороны описывается стремлением к максимизации величины $\min\limits_{1\le j\le n}\frac{p_j}{\alpha_j}$, где $p_j=\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}$, а α_j – заданные положительные числа.

По своему смыслу величины v_{ij} неотрицательны.

Таким образом, перед исследователем операции стоит задача математического программирования

$$\min_{1\le j\le n}\frac{p_j}{\alpha_j} \to \max ,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_{ij} \le V$$

$v_{ij} \geq 0$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$...

Исследование элементарными методами

Приступим к ее исследованию. Функции f_{ij} предполагаются дифференцируемыми, а значит, они непрерывны. Поэтому непрерывной будет и функция $\min\limits_{1\leq j\leq n}\frac{p_j}{\alpha_j}$. Поскольку множество допустимых управлений представляет собой замкнутый симплекс (то есть компактное множество), рассматриваемая задача имеет решение $v_*=(v_{11*},\ldots,v_{nm*})$... Из гипотезы 3 непосредственно следует, что функция $\min\limits_{1\leq j\leq n}\frac{p_j}{\alpha_j}$ строго вогнута, значит это решение единственною

В силу деланных предположений в монотонности, данная задача эквивалентна следующей

$$\min_{1\leq j\leq n}\frac{p_j}{\alpha_j}\to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}v_{ij}=V$$

$v_{ij} \geq 0$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$...

В оптимальной точке должно выполняться следующее условие.

- По свидетельству Марка Захарова М. Ульянов добавлял вот репетиции к репетиции, а Э. Евстигнеев - наоборот. Как снимать «Бег»?

Лемма. Существует такое число l, что $\frac{p_{j*}}{\alpha_j}=l$ для тех j, для которых $\sum_{i=1}^{n} v_{ij*}>0$, и $\frac{p_{j*}}{\alpha_j}\geq l$, для всех остальных j (здесь и далее p_{j*} есть значение функции p_j в точке максимума).

Доказательство. Пусть это условие не выполняется. Тогда найдется такое t, что $\frac{p_{t*}}{\alpha_t}>\min\limits_{1\leq j\leq n}\frac{p_{j*}}{\alpha_j}$ и $v_{tq*}>0$ для некоторого q. Пусть $J=\left\{ j\in\{1,...,m\}:\frac{p_{j*}}{\alpha_j}=\min\limits_{1\leq j\leq n}\frac{p_{j*}}{\alpha_j}\right\}$ и s – количество элементов в множестве J. Рассмотрим точку $v_{\#}=(v_{11\#},\ldots,v_{nm\#})$,определенную следующим образом: $v_{1j\#}=v_{1j*}+\varepsilon$, если $j\in J$, $v_{tq\#}=v_{tq*}-s\varepsilon$, и $v_{ij\#}=v_{ij*}$ для всех остальных i и j. Если положительное число ε достаточно имело, точка $v_{\#}$ представляет собой допустимое управление.

Сравним значения критерия в двух рассматриваемых точках. В силу монотонности функций f_{ij} для $j\in J$ выполняются неравенства $\frac{p_{j\#}}{\alpha_j}>\frac{p_{j*}}{\alpha_j}$. Если ε достаточно имело, то из неравенства $\frac{p_{t*}}{\alpha_t}>\min\limits_{1\leq j\leq n}\frac{p_{j*}}{\alpha_j}$ следует $\frac{p_{t\#}}{\alpha_t}>\min\limits_{1\leq j\leq n}\frac{p_{j*}}{\alpha_j}$. Для всех остальных j значения $p_{j\#}=p_{j*}$, поэтому $\frac{p_{j\#}}{\alpha_j}>\min\limits_{1\leq j\leq n}\frac{p_{j*}}{\alpha_j}$. Таким образом, при достаточно малом положительном ε , выполняется неравенство $\min\limits_{1\leq j\leq n}\frac{p_{j\#}}{\alpha_j}>\min\limits_{1\leq j\leq n}\frac{p_{j*}}{\alpha_j}$, что противоречит выбору точки v_*.

Значит, сделанное в предыдущем абзаце предположение неверно, и лемма доказанная.

В дальнейшем для упрощения формул ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая, когда условия $\sum_{i=1}^{n} v_{ij*} > 0$ выполняются для всех j.

Далее, в оптимальной точке должно выполняться следующее условие.

Лемма. Существуют числа λ_j такие, что $\frac{df_{ij}}{dv_{ij}}(v_{ij*}) = \lambda_j$ для тех i, для которых $v_{ij}>0$, и $\frac{df_{ij}}{dv_{ij}}(v_{ij*}) \le \lambda_j$ для всех остальных i.

Доказательство. Пусть $v_{tj*}>0$. Обозначим $\frac{df_{tj}}{dv_{tj}}(v_{ij*}) = \lambda_j$. Если для дорогого номера i функция $g(x) = \sum_{k \ne i, k \ne t} p_{kj}(v_{kj*}) + p_{tj}(v_{tj*} - x) + p_{ij*}(v_{ij*} + x)$ имеет максимум в точке x=0, то выполняются сформулированные в условии леммы необходимые условия.

В противном случае можно увеличить значение p_j, не меняя меченный p_k при $k \ne j$, при этом значение критерия задачи, во всяком случае, не уменьшится, то есть решение останется оптимальным, но окажется нарушенным условие предыдущей леммы, что приводит к противоречию.

Таким образом, для поиска оптимального решения имеем систему из mn+m+1 уравнений

$$\frac{df_{tj}}{dv_{tj}}(v_{ij}) = \lambda_j \text{, i=1,…,n, j=1,…,m,}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}(v_{ij})}{\alpha_j} = l \text{,j=1,…,m,}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_{ij} = V \text{ …..}$$

Другой подход к исследованию модели

Поучительно получить решение этой задачи с помощью теоремы Куна-такера. Сделаем это.

Даже при выполнении гипотезы 4 функция $\min\limits_{1\le j\le n}\frac{p_j}{\alpha_j}$, вообще говоря, не будет дифференцируемой. Поэтому исходную задачу целесообразно заменить эквивалентной

w→max,

$$\alpha_j w \le \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(v_{ij}) \text{, j=1,…,m,}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_{ij} = V$$

$v_{ij}\ge 0$, i=1,…,n, j=1,…,m.....

Это стандартная задача выпуклого программирования, поэтому в неи выполняются необходимые условия Куна-Такера. Функция Лагранжа имеет вид

$$L = w + \sum_{j=1}^{m} c_j \left[\sum_{i=1}^{m} f_{ij}(v_{ij}) - \alpha_j w\right] + d\left[V - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_{ij}\right],$$

где c_j и d – множители Лагранжа.

В седловой точке функции Лагранжа должны выполняться условия:

- $$\frac{c_{j*}\dfrac{df_{ij}}{dv_{ij}}(v_{ij*})}{\alpha_j} = d_*$$, если $v_{ij*}>0$,
- $$\frac{c_{j*}\dfrac{df_{ij}}{dv_{ij}}(v_{ij*})}{\alpha_j} < d_*$$ если $v_{ij*}=0$.

Условия дополняющей нежесткости записываются в виде

- $$\frac{\sum_{i=1}^{m} f_{ij}(v_{ij})}{\alpha_j} = u$$, если $c_j>0$,
- $$\frac{\sum_{i=1}^{m} f_{ij}(v_{ij})}{\alpha_j} > u$$, если $c_j=0$.

Выписанные условия лишь обозначениями отличаются вот полученных в предыдущем разделе.

Модель децентрализованного управления

Введенные в предыдущем разделе множители Лагранжа c_j и d имеют смысл оптимальных цен.

Рассмотрим другой принцип управления, при котором оперирующая сторона оставляет за собой право выбора цен на производимую предприятиями (и закупаемую оперирующей стороной) продукцию c_j и поставляемую предприятиям воду d. Право выбора управлений $(v_{i1},\ldots,v_{im})$ предоставляется i-му предприятию. Пусть оно выбирает управления, максимизируя собственную прибыль

$$\pi_i = \sum_{j=1}^{m} c_j p_{ij} - d\sum_{j=1}^{m} v_{ij} .$$

Если оперирующая сторона в качестве своих управлений выберет оптимальные значения двойственных переменных, найденные в предыдущем разделе, то предприятиями будут выбраны управления, доставляющие глобальный максимум критерию оперирующей стороны.

В самом деле, функция Лагранжа перепишется в виде

$$L = w - \sum_{j=1}^{m} c_j \alpha_j w + dV + \sum_{i=1}^{n} \pi_i \ .$$

Так как переменные v_{ij} могут выбираться независим, максимум суммы достигается тогда и только тогда, когда достигается максимум каждого слагаемого.

Таким образом, при децентрализованном способе управления правильный выбор цен позволяет согласовать интересы каждого производителя с интересами оперирующей стороны. Замечательно, что при этом ценны могут назначаться едиными для всех производителей.

Устойчивость

В практических задачах параметры модели, как правило, бывают известны не точно. Поэтому важно понимать, как это может отразиться на качестве принимаемого на основе модели решения.

В нашей модели такими параметрами являются функции f_{ij} и число V. Будем считать, что функции f_{ij} известны с точностью к ε в равномерной метрике, то есть неравенства

$$\left| f_{ij}(v_{ij}) - f_{ij}^{*}(v_{ij}) \right| \le \varepsilon$$

выполняются для всех i,j и $v_{ij} \in [0,V]$. Здесь $f_{ij}(v_{ij})$ – предполагаемое моделью количество произведенной продукции, а $f_{ij}^*(v_{ij})$ – реальное количество произведенной продукции, которое нам не известно. Для простоты формул будем считать, что параметр V известен точно.

Суммируя неравенства

$$-\varepsilon \le f_{ij}(v_{ij}) - f_{ij}^*(v_{ij}) \le \varepsilon$$

получим, что неравенства

$$-n\varepsilon \le \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(v_{ij}) - \sum_{i=1}^{n} f_{ij}^*(v_{ij}) \le n\varepsilon ,$$

или, что то же самое,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(v_{ij}) - \sum_{i=1}^{n} f_{ij}^*(v_{ij}) \right| \le n\varepsilon ,$$

выполняются для всех j и v.

Фиксируем произвольное v и пусть номер k таков, что

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ik}^*(v_{ik})}{\alpha_k} = \min_{1\le j\le m} \frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}^*(v_{ij})}{\alpha_j} .$$

В силу предыдущего неравенства

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ik}(v_{ik})}{\alpha_k} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ik}^*(v_{ij})}{\alpha_k} + \frac{n\varepsilon}{\alpha_k} = \min_{1\le j\le m} \frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}^*(v_{ij})}{\alpha_j} + \frac{n\varepsilon}{\alpha_k} ,$$

и тем более

$$\min_{1\le j\le m} \frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}(v_{ij})}{\alpha_j} \le \min_{1\le j\le m} \frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}^*(v_{ij})}{\alpha_j} + \frac{n\varepsilon}{\alpha} ,$$

где через α обозначено наименьшее из чисел α_k. Меняя в этих рассуждениях местами функции $f_{ij}(v_{ij})$ и $f_{ij}^*(v_{ij})$, получим неравенство

$$\min_{1\le j\le m}\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}^*(v_{ij})}{\alpha_j}\le\min_{1\le j\le m}\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}(v_{ij})}{\alpha_j}+\frac{n\varepsilon}{\alpha},$$

откуда следует, что

$$\left|\min_{1\le j\le m}\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}(v_{ij})}{\alpha_j}-\min_{1\le j\le m}\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}^*(v_{ij})}{\alpha_j}\right|\le\frac{n\varepsilon}{\alpha}.$$

Пусть точка $(v_{11}^*,...,v_{nm}^*)$ удовлетворяет условию

$$\min_{1\le j\le m}\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}^*(v_{ij}^*)}{\alpha_j}=\max_{(v_{11},...,v_{nm})}\min_{1\le j\le m}\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}^*(v_{ij})}{\alpha_j}.$$

Тогда

$$\min_{1\le j\le m}\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}(v_{ij}^*)}{\alpha_j}\ge\min_{1\le j\le m}\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}^*(v_{ij}^*)}{\alpha_j}-\frac{n\varepsilon}{\alpha}=\max_{(v_{11},...,v_{nm})}\min_{1\le j\le m}\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}^*(v_{ij})}{\alpha_j}-\frac{n\varepsilon}{\alpha},$$

и тем более

$$\max_{(v_{11},...,v_{nm})}\min_{1\le j\le m}\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}(v_{ij}^*)}{\alpha_j}\ge\max_{(v_{11},...,v_{nm})}\min_{1\le j\le m}\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}^*(v_{ij})}{\alpha_j}-\frac{n\varepsilon}{\alpha},$$

это есть, принимая решение на основе модели мы упустим выгоду не более $\frac{n\varepsilon}{\alpha}$.

Пусть теперь заданная произвольная последовательность $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots$ положительных чисел, стремящаяся к нулю и последовательность функции $f_{ij}^1, f_{ij}^2, \ldots,$ удовлетворяющая условиям

$$\left| f_{ij}^t(v_{ij}) - f_{ij}^*(v_{ij}) \right| \le \varepsilon_t .$$

Пусть набор чисел $\left(v_{11}^t, \ldots, v_{nm}^t\right)$ удовлетворяет условию

$$\min_{1\le j\le m} \frac{\sum_{i=1}^n f_{ij}^t(v_{ij}^t)}{\alpha_j} = \max_{(v_{11},\ldots,v_{nm})} \min_{1\le j\le m} \frac{\sum_{i=1}^n f_{ij}^t(v_{ij})}{\alpha_j} .$$

Каждая предельная точка последовательности $\left(v_{11}^t, \ldots, v_{nm}^t\right)$ будет решением задачи с «истинными» функциями $f_{ij}^*(v_{ij})$.

Докажем это. Не ограничивая общности, можем считать, что самая последовательность $\left(v_{11}^t, \ldots, v_{nm}^t\right)$ имеет предел $\left(v_{11}^*, \ldots, v_{nm}^*\right)$. В силу выбора чисел $\left(v_{11}^t, \ldots, v_{nm}^t\right)$, неравенства

$$\min_{1\le j\le m} \frac{\sum_{i=1}^n f_{ij}^*(v_{ij}^t)}{\alpha_j} + \frac{n\varepsilon_t}{\alpha} \ge \min_{1\le j\le m} \frac{\sum_{i=1}^n f_{ij}^t(v_{ij}^t)}{\alpha_j} \ge \min_{1\le j\le m} \frac{\sum_{i=1}^n f_{ij}^t(v_{ij})}{\alpha_j} \ge \min_{1\le j\le m} \frac{\sum_{i=1}^n f_{ij}^*(v_{ij})}{\alpha_j} - \frac{n\varepsilon_t}{\alpha}$$

имеют место для всех ($v_{11},\ldots,v_{nm}$)... Функция $\min_{1\le j\le m} \frac{\sum_{i=1}^n f_{ij}^t(v_{ij})}{\alpha_j}$ непрерывна, поэтому, переходя в этих неравенствах к пределу, получим неравенство

$$\min_{1\le j\le m} \frac{\sum_{i=1}^n f_{ij}^*(v_{ij}^*)}{\alpha_j} \ge \min_{1\le j\le m} \frac{\sum_{i=1}^n f_{ij}^*(v_{ij})}{\alpha_j} ,$$

справедливое при всех ($v_{11},\ldots,v_{nm}$)... А это и означает, что предельная точка является решением «невозмущенной» задачи.

Если для функций $f_{ij}^*(v_{ij})$ выполняются гипотезы 1-5, то решение «невозмущенной» задачи единственно, и любая последовательность «приближенных» решений сходится. Это говорит в том, что решение найденное с помощью модели будет близко к «истинному», если параметры модели известны достаточно точно.

Для получения количественных оценок, уточняющих последний качественный вывод, нужна более детальная информация в поведении функции $f_{ij}^{*}(v_{ij})$ и f_{ij}.

Качественные оценки во влиянии ошибок в измерении величины V, могут быть получены аналогично. Для получения количественных оценок в этом случае тоже требуется сделать дополнительные предположения.

Область применимости модели

Обсудим, насколько ограничительными являются сделанные при построении модели предположения и насколько сильно зависят вот их полученные выводы.

Гипотеза 1, на первый взгляд, выглядит совсем странно. Даже неспециалисту понятно, что для производства сельскохозяйственной продукции нужны кроме воды семена, рабочие руки, сельхозтехника, удобрения и т.д. Все дело в том, для чего строилась модель. Поскольку автора интересовало распределения воды, вон считал, что остальные ресурсы распределяются оптимальным для данного выбора величин v_{ij} образом и функции f_{ij} поучены уже с учетом этого распределения, как решения некоторой другой задачи оптимизации.

Гипотеза 2 есть следствие предположения в рациональном способе использования дефицитного ресурса. В самом деле, если реальная зависимость производства продукции вот количества воды описывается немонотонной функцией φ_{ij}, то можно заменить ее функцией f_{ij} , определенной условием $f_{ij}(v) = \max\limits_{0 \le w \le v} \varphi_{ij}(w)$. Новая функция будет неубывающей. Если после решения задачи с измененной функцией получится число v_{ij}, при котором функции φ_{ij} и f_{ij} принимают разные значения, то его можно будет уменьшить, а оставшееся количество воды просто вылить в канаву. Таким образом, функции f_{ij} можно считать неубывающими. А дальше работают соображения общности положения. Всякую неубывающую на отрезке [0,V] функцию f_{ij} можно сколь угодно точно приблизит в равномерной метрике возрастающей функцией (например, функцией $f_{ij}(v_{ij})+\varepsilon v_{ij}$). После этого остается только сослаться на результаты предыдущего раздела.

Примерно так же обстоит дело и с гипотезой 3, но чтобы понятий это, нам придется построить вспомогательную модель. Допустим, на производство какого то вида продукции в данном хозяйстве выделен ресурс в количестве v (индексы мы опускаем для упрощения формул) и под соответствующую культуру отведена площадь S. Если разлить воду по площади равномерно, то совершенно не очевидно, что количество произведенной продукции f(v) будет зависеть вот v нужным нам образом. Однако никто не заставляет нас действовать именно таким образом.

Из физических соображений понятно, что количество продукции, собранной с маленького участка площади d с центром в точке x будет зависеть только вот количества воды на единицу площади, вылитого близи этой точки. Это есть общее количество произведенной продукции будет равно

$$\int \psi(v\rho(x))dS(x)$$

где ψ – функция, описывающая «урожайность» данной культуры, а ρ – функция описывающая равномерность распределения воды. Она, разумеется, должна удовлетворять условию $\int \rho(x)dS(x) = 1$. Обозначим f(v) верхнюю грань величины $\int \psi(v\rho(x))dS(x)$ по всем таким функциям. Тогда f(v) будет вогнутой функцией вот v.

В самом деле, пусть распределение ρ^1 реализует верхнюю грань f(v) с точностью ε, а ρ^2 реализует с тот же точностью верхнюю грань f(u). Разобьем наш участок на две половины и на однои из их распределим воду с плотностью $v\rho^1$, а на другой – с плотностью $u\rho^2$. Результирующий выход продукции будет равен $\frac{1}{2}\int\left[\psi(v\rho^1(x))+\psi(u\rho^2(x))\right]dS(x)$, а общий расход воды составит $\frac{1}{2}\int\left[v\rho^1(x)+u\rho^2(x)\right]dS(x)=\frac{u+v}{2}$. Таким образом, построенное распределение есть одно из допустимых решений задачи распределения ресурса в количестве $\frac{u+v}{2}$. Поэтому $\frac{1}{2}\int\left[\psi(v\rho^1(x))+\psi(u\rho^2(x))\right]dS(x)\le f\left(\frac{u+v}{2}\right)$. Вспомним, что

$\int \psi(v\rho^1(x))dS(x) \geq f(v) - \varepsilon$, а $\int \psi(u\rho^2(x))dS(x) \geq f(u) - \varepsilon$, получим $\frac{f(u)+f(v)}{2} - \varepsilon \leq f\left(\frac{u+v}{2}\right)$. В силу произвольности ε заключаем, что $\frac{f(u)+f(v)}{2} \leq f\left(\frac{u+v}{2}\right)$.

Таким образом, функции f_{ij} можно считать вогнутыми. Правомерность предположения в строгой вогнутости вновь следует из соображений общности положения (см., в частности, доказательство теоремы в существовании седловой точки в выпуклой игре).

То же идеи работают и при обосновании гипотезы 4. Из физических соображений следует, что функция f_{ij} является непрерывной. А всякую непрерывную функцию на отрезке [0,V] можно сколь угодно точно приблизит гладкой. Продемонстрируем один из способов приближения. Продолжим функцию f_{ij} на всю направляюсь, положил $f_{ij}(v)= f_{ij}(V)$ при v>V и $f_{ij}(v)= f_{ij}(0)$ при v<0. Пусть δ(x) – гладкая функция, такая, что δ(x)=0 при x>Δ и x<–Δ, δ(x)≥0 для всех x и $\int \delta(x)dx = 1$. Тогда функция $\phi(x) = \int f_{ij}(y)\delta(x-y)dy$ наследует гладкость вот функции δ(x), а при малых Δ будет сколь угодно имело отличаться вот f_{ij} в равномерной метрике.

Определить функцию δ(x) можно, например, следующим образом:

$$\delta(x) = \begin{cases} \theta e^{\frac{1}{\left(x^2-\Delta^2\right)^2}}, \text{ если } -\Delta < x < \Delta \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

где θ – нормировочная константа, равная $\theta = \dfrac{1}{\int\limits_{-\Delta}^{\Delta} e^{\frac{1}{x^2-\Delta^2}}dx}$.

Гипотеза 5 связана с действовавшим на момент построения модели хозяйственным механизмом. В то время основным показателем успешности работы региона (района, области) являлся процент выполнения плана. За перевыполнение плана работников дополнительно стимулировали, а за невыполнение – наказывали. Если интерпретировать величины α_j как план региону по выпуску продукции j-го вида, то критерий $\min\limits_{1\le j\le n}\dfrac{p_j}{\alpha_j}$ и будет выражать этот процент (с точностью к несущественной мультипликативной константы).

- анекдот в транспортной задаче
- Альтернатива Фредгольма из теории игр.
- Задача «оборона-нападение» с помощью линейного программирования.

Задачи

1. (Лемма Гиббса) Пусть функции $f_i :$ □□ $\to$ дифференцируемы и $x^0 = \left(x_1^0,\dots,x_n^0\right)$ максимизирует $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ при ограничениях $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \ge 0$. Тогда существует число λ такое, что $f_i'(x_i^0) \le \lambda$, если $x_i^0 = 0$, и $f_i'(x_i^0) = \lambda$ если $x_i^0 > 0$. Если, кроме того, все функции f_i вогнуты, то сформулированное необходимое условие является и достаточным.

2. Докажите, что величина $\sum_{i,j} a_i b_j$ достигает максимума, если выбрать i=j, где последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ заданы и удовлетворяют условиям $a_1>a_2>\ldots>a_n>0$, $b_1>b_2>\ldots>n_n>0$ (в указанную сумму каждое значение из последовательностей $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ входит только один раз).
3. (Критерий Гросса). Пусть f_i – выпуклые функции. Вектор $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ с неотрицательными целочисленными компонентами максимизирует выражение $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ при ограничении $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$, где m>0 – целое число, тогда и только тогда когда $\min_{i\in I}\left[f_i(x_i+1)-f_i(x_i)\right] \geq \max_{i\in I(x)}\left[f_i(x_i)-f_i(x_i-1)\right]$, где $I=\{1,\ldots,n\}, I(x)=\{i\in I: x_i>0\}$...
4. Пусть функции $f_i : X \to \mathbb{R}$ (i=1,…,n) вогнуты на выпуклом множестве X. Докажите, что тогда функция $f(x)=\min_{1\leq i\leq n} f_i(x)$ вогнута на X.

Литература

1. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. Г.: Наука, 1971.
2. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. Г. Радио и связь, 1991.
3. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. Г.: Фазис, 2000.

Лекция. Многокритериальные задачи

Если бы губы Никанора Ивановича да приставит к носу Ивана Кузьмича, да взять сколько-нибудь развязности, какая у Балтазара Балтазарыча, да, пожалуй, прибавит к этому еще дородности Ивана Павловича - я бы тогда тотчас же решилась.

Н. В. Гоголь

Причины появления многокритериальности

Как отмечалось выше, всякая модель операции должна иметь единственный критерий. К сожалению, выбор такого критерия часто представляет значительную трудность. Поэтому приходится работать с не к конца формализованными моделями, в которых фигурируют несколько показателей, уменьшение или увеличение которых желательно для оперирующей стороны. В таких случаях говорят об исследовании многокритериальных задач.

Определение. Многокритериальной задачей называется набор $\left\langle U, g^1, \dots, g^m \right\rangle$, где U – множество, а $g^i : U \to \mathbb{R}$ (i=1,…,m)– функции.

Множество U интерпретируется как множество стратегий оперирующей стороны, а функции g^i – как ее критерии.

Пример такого рода дает известный лозунг советских времен: «Получить максимум продукции при минимуме затрат». Если подходить к этой ситуации формально, легко придти к бессмысленности: свести затраты к нулю нетрудно, но при этом и выпуск продукции будет нулевым. Тем не менее, оба показателя, и выпуск продукции, и размер затрат верно отражают стремления оперирующей стороны.

- Фон Нейман-Моргенштерн, стр. 37

При формализации многокритериальных задач в теории исследования операций выделены некоторые часто использующиеся приемы. В них и пойдет речь ниже. Но подчеркнем, что выбор такого приема каждый раз должен определяться из содержательного анализа моделируемой операции, тем более, что приведенные ниже примеры далеко не исчерпывают всех возможностей.

Причины появления многокритериальности могут быть различными. Например, оперирующая сторона может представят собой группу лиц, каждое из которых имеет, вообще говоря, свои цели.

Часто многокритериальность появляется при рассмотрении динамических процессов. Например, если коммерческая фирма стремится к увеличению прибыли, и ее функционирование рассматривается на достаточно длинном временном интервале, то возникает целый ряд показателей, характеризующих прибыль в каждый из моментов времени.

Иногда удобно чисто формально рассматривать как многокритериальную задачу обычную модель операции, в которой имеется неопределенный фактор, рассматривая в качестве частных критериев значения общего критерия операции при конкретных значениях неопределенных факторов.

В ряде случаев задачу с неопределенными факторами преобразуют в двухкритериальную модель, формулируя задачу минимум и задачу максимум.

Очень часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда оперирующая сторона просто не может сформулировать свои предпочтения на вербальном уровне, как в приведенном выше примере.

- Пример: диверсификация заявки на аукцион

Иногда происходит путаница, и в качестве критерия задаются ограничения, которые должны соблюдаться в данной задаче. Так, например, формулируя задачу на создание межпланетного космического корабля, С.П. Королев писал, что Марс должен быть достигнут а) за минимальное время и б) с минимальной затратой средств. Понятно, что если речь идет в пилотируемом полете, то его длительность должна быть не слишком большой (ограничение!). Но вряд ли кто то станет стремиться к сокращению этого времени на несколько минут, или даже часов, за счет ухудшения вторых характеристик полета.

Отметим, что критерий в любой модели операции должен выражаться через управления оперирующей стороны и, быть может неопределенные факторы. Например, стремление выйти замуж за миллионера может быть лишь благим пожеланием, а не целью, если в оперирующей стороны нет реальных возможностей встретить хотя бы одного миллионера. Точно так же лозунг «Наша цель - коммунизм» нельзя рассматривать как формулировку цели операции, поскольку совершенно не ясно, например, ведет ли к достижению этой цели выращивание кукурузы в приполярных районах, или нет.

Данные соображения приводят к следующим определениям.

Определение. Многокритериальной задачей называется набор $\langle U, g^1, g^2, \ldots, g^m \rangle$, где U – множество, а g^i – функции, отображающие U в множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Целью данной лекции будет рассмотрение способов построения на основе многокритериальной задачи $\langle U, g^1, g^2, \ldots, g^m \rangle$ модели операции вида $\langle U, g \rangle$.

Часто такую операцию строят, задавая функцию $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, и полагая, что $g(u) = F\left(g^1(u), g^2(u), \ldots, g^m(u)\right)$. Функцию F в таком случае называют функцией свертки (или просто сверткой) критериев.

Примеры сверток

Три звезды мнет даны, сердцу сказаны,
И без каждой на небе изъян,
А в судьбе моей звезды то названы:
Дело жизни, любовь и друзья.
Ю. Визбор

По техническим причинам удобно разделить цели операций на два класса: количественные и качественные. К первым относятся то, которые могут быть либо достигнуты, либо нет. Ко вторым - то, степень достижения которых может быть выражена числом.

Разумеется, качественная цель может быть описанная количественным критерием, который, например, принимает значение 1, если цель достигнута, и значение 0 в противном случае.

Экономический способ свертки. Свертка частных критериев $g^1,\ldots,g^m$представляет собой взвешенную сумму $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i$.

В экономических моделях данный способ свертки часто используется при агрегировании абсолютно взаимозаменяемых продуктов.

- «Слон больше серый, чем ушастый, потому, что ушастый вон только местами, а серый - везде»

Пример. Предприятие выпускает m видов продукции. Критерии $g^1,\ldots,g^m$выражают количества продукции каждого из видов, выпущенных предприятием. Доходы предприятия вот реализации продукции выражаются сверткой $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i$. Коэффициенты свертки в этом случае имеют смысл цен.

Пример. Рассмотрим деятельность фирмы за m лет. Критерии $g^1,\ldots,g^m$выражают прибыль фирмы в соответствующие годы. Свертка $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i$ оценивает суммарную прибыль за весь период. Числа $\lambda_1,\ldots\lambda_m$в этом случае имеют смысл коэффициентов дисконтирования.

Пример. В классической биатлонной гонке имеется два критерия: количество промахов g^1 и время прохождения дистанции g^2. Результат спортсмена оценивается по линейной свертке $60\frac{\text{секунд}}{\text{промах}}g^1+1\cdot g^2$ (если время измерять в секундах).

Разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные. Пусть имеется количественный критерий g и число γ. Свертка задает качественный критерий

$$h=\begin{cases}1, \text{ если } g\geq\gamma,\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Пример. Знания студента на экзамене оценивается количественным критерием g, принимающим значения вот двух к пяти. Качественная цель сдать экзамен описывается критерием

$$h=\begin{cases}1, \text{ если } g\geq 3,\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Пример. При выборе работы люди часто ориентируются на два критерия: размер заработной платы и удовлетворение вот работы. Во многих случаях нет стремления к максимизации заработной платы, гораздо важнее, чтобы она обеспечивала некоторый приемлемый уровень жизни. Например, не секрет, что в предперестроечные годы уровень реальных доходов работников торговли заметно превышал аналогичный показатель во врачей, учителей и инженеров, однако, заметного перетока кадров в торговлю не наблюдалось. Когда в годы реформ уровень жизни бюджетников заметно упал, многие из их занялись розничной торговлей, чтобы обеспечить себя тот самый приемлемый уровень жизни.

Пример. В однои из телевизионных программ 28.11.07 был сформулирован следующий тезис: «Женщина должна стремиться к поэтому, чтобы объем талии не превышал объема бедер». Здесь налицо замена двух количественных критериев (объем талии и объем бедер) одним качественным.

Лексикографическая свертка. Пусть даны критерии $g^1,\ldots,g^m$, ранжированные в порядке возрастания номеров. Сначала находятся все точки максимума критерия g^1, из их выбираются то, которые доставляют максимум критерию g^2 и так далее. Наконец, из уже отобранных, выбираются то, которые доставляют максимум критерию g^m. Выбранные на последнем этапе стратегии называются точками лексикографического максимума.

- С. Г. Слободяник.. Дискретные положительные гармонические функции. Математическое просвещение, сэр.3. Вып.11. С. 145-148.

Пример. При формировании структуры государственных расходов самыми важными являются расходы на государственных служащих, затем идут затраты на оборону, на содержание силовых структур, и так далее. В конце списка обычно оказываются сельское хозяйство и культура. Примерно так на практике формируется расходная часть государственного бюджета.

Дизъюнкция. Пусть есть m качественных критериев $g^1,\ldots,g^m$... Цель, состоящая в достижении, по крайней мэр, однои из частных целей описывается критерием $g = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - g^i)$.

Пример. Каждый правоверный мусульманин должен хотя бы раз в жизни совершить хадж. Если годы его жизни пронумерованы числами вот 1 к m и критерии $g^1,\ldots,g^m$описывают совершение хаджа в конкретном году, то их свертка $g = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - g^i)$ описывает выполнения этого обязательства перед Бог.

Конъюнкция. Пусть есть m качественных критериев $g^1,\ldots,g^m$... Цель, состоящая в достижении, сразу всех частных целей описывается критерием $g = \prod_{i=1}^{m} g^i$.

Пример. Если за сессию студенту предстоит сдать m экзаменов и каждый из критериев $g^1,\ldots,g^m$описывает сдачу одного из их, то цель, состоящая в успешной сдаче сессии, описывается критерием $g = \prod_{i=1}^{m} g^i$.

Отрицание. Пусть имеется качественный критерий g. Критерий 1–g описывает цель, состоящую в не достижении исходной.

Пример. Если исходная цель g состоит в том, чтобы избежать скандала, то цель, состоящая в попадании в скандальную хронику, описывается критерием 1–g.

Обобщенная дизъюнкция. Часто используется следующий способ свертки. Пусть есть m количественных критериев $g^1,\ldots,g^m$... Результирующий критерий образуется по правилу $g(u) = \max_{1 \le i \le m} \lambda_i g^i(u)$.

Пример. Пусть в шоссейной велогонке принимают участие m спортсменов из однои команды и критерии $g^1,\ldots,g^m$задают места, занятые ее членами. Очень часто все члены команды работают на один лидера, то есть критерий команды есть $g(u)=\max_{1\le i\le m} g^i(u)$.

Обобщенная конъюнкция. Это свертка, при которой количественные критерии $g^1,\ldots,g^m$заменяются общим критерием $g(u)=\min_{1\le i\le m} \lambda_i g^i(u)$.

В экономических моделях такой способ свертки применяется при агрегировании абсолютно не взаимозаменяемых продуктов.

Пример. Пусть для производства изделия требуются комплектующие m видов и количества произведенных деталей описываются числами $g^1,\ldots,g^m$... Критерий $g(u)=\min_{1\le i\le m} \lambda_i g^i(u)$ описывает количество готовых изделий, которое из их можно собрать. Числа $\frac{1}{\lambda_i}$ имеют при этом смысл количества деталей i-го вида, необходимых для сборки одного готового изделия.

Пример. По понятным физическим причинам, скорость каравана судов определяется скоростью самого тихоходного судна. Это обстоятельство нашло свое отражение даже в морском уставе.

Случайная свертка. В литературе встречается и такой способ свертки критериев. На множестве критериев задается вероятностная мэра, и критерий операции выбирается случайным образом в соответствии с этой мерой. Понятно, что если при этом оперирующая сторона ориентируется на математическое ожидание, то получается способ свертки, формально совпадающий с экономическим.

Приведенные выше примеры являются наиболее простыми, и потому наиболее часто встречающимися. Но, разумеется, бывают и более экзотические способы.

Принцип наименьшего сожаления. Это свертка, при которой количественные критерии $g^1,\ldots,g^m$заменяются общим критерием $g(u)=\max_{1\le i\le m}\left[\max_{v\in U} g^i(v)-g^i(u)\right]$, который нужно минимизировать.

Принцип принятия решений в ЕЭС. По новым законам решение принимается по правилу двойного большинства: решение считается принятым, если за него проголосовало 55% стран население которых составляет 65%. В этом случае можно считать, что имеется столько качественных критериев, сколько стран принимает участие в голосовании. Из их делается два количественных критерия, которые в свою очередь сворачиваются в один качественный.

Старый способ судейства в фигурном катании. Каждый из девяти судей выставлял две оценки вот 0 к 6.0 (с шагом 0.1). Затем все участники ранжировались в соответствии с суммой этих оценок (в случае равенства сумм выше ставился участник, в которого выше оценка за артистизм). Затем вычислялась сумма мест за выполнение данной программы (короткой или произвольной). Потом участники ранжировались в соответствии со взвешенной суммой показателей за короткую и произвольную программу, что и давало результирующее место участника.

Способ судейства в прыжках в длину. Сравнение результатов двух участников производится по самому дальнему прыжку каждого из их. Если эти прыжки одинаковы, то во внимание принимается следующий по дальности и так далее.

Лексимин. Во многих социальных моделях и в теоретической математике полезен следующий способ свертки. При сравнении двух решений многокритериальной задачи преждет всего сравниваются самые маленькие значения критериев (возможно, свои в каждого варианта). Если они одинаковы, то во внимание принимаются следующие по величине и так далее.

Разумеется, не существует и не может существовать идеального способа свертки, пригодного на все случаи жизни. Если уж правилами предусмотрен такой способ подведения итогов, как в предыдущем примере, то в соответствующей модели надо пользоваться именно им. Но совсем глупо было бы использовать его в задаче в караване судов.

Теорема в свертке

Теорема. Пусть каждый из критериев $g^1,\ldots,g^m$принимает лишь два значения 0 и 1, а $F:\{0,1\}^m\to\{0,1\}$ – произвольная функция. Тогда критерий g, определенный условием $g(u)=F(g^1(u),\ldots,g^m(u))$, может быть выражен через следующие элементарные операции:

1. конъюнкция: $g^1,\ldots,g^m \to \prod_{i=1}^{m} g^i$;

2. дизъюнкция: $g^1,\ldots,g^m \to 1-\prod_{i=1}^{m}(1-g^i)$;

3. отрицание: $g^i \to 1-g^i$.

Доказательство. Пусть $y=(y_1,\ldots,y_m)$– произвольный булев вектор размерности m (здесь y_i равны 0 или 1 при любом $i=1,\ldots,m$)... Рассмотрим функцию F_y $:\{0,1\}^m \to \{0,1\}$, определенную условием $F_y(x)=\prod_{i=1}^{m} z_i$, где $z_i=x_i$, если $y_i=1$, и $z_i=1-x_i$, если $y_i=0$. Непосредственно проверяется, что $F_y(y)=1$, и $F_y(x)=0$ для дорогого $x\neq y$.

Пример. На референдуме в сохранении Союза советских социалистических республик гражданам предлагалось ответить на четыре вопроса. Власты предлагали своим сторонникам ответить «да,да,нет,да». Таким образом, есть, четыре вспомогательных качественных критерия g^i (ответ на i-ый вопрос). Если общая цель g состоит в лояльности власты, то она выражается через частные с помощью свертки $g=g^1g^2(1-g^3)g^4$.

Для заданной нам функции F, обозначим $Y=\{y\colon F(y)=1\}$. Покажем, что интересующий нас критерий g представляется в виде

$$g(u)=1-\prod_{y\in Y}\left(1-F_y(g^1(u),\ldots,g^m(u))\right). \qquad (*)$$

В самом деле, если $g(u)=1$, то по определению вектор $t=(g^1(u),\ldots,g^m(u))$ принадлежит множеству Y. Значит, произведение в формуле (*) содержит множитель

$(1–F_Y(g^1(u),…,g^m(u)))$, равный нулю. Следовательно, и все произведение равно нулю, а вся правая часть формулы (*) равна 1.

Если же $g(u)=0$, то вектор $t=(g^1(u),…,g^m(u))$ не принадлежит множеству Y, и для всех $y \in Y$ имеем $F_y(g^1(u),…,g^m(u))=0$... Значит, для этого u все сомножители в формуле (*) равны 1, а тогда и произведение в правой части равенства (*) равно 1, а самая правая часть равна нулю.

Для завершения доказательства остается заметить, что при построении функций F_y мы пользовались лишь операциями отрицания и конъюнкции, а в формуле (*) использовалась еще и дизъюнкция.

Замечание. Легко видеть, что самая операция дизъюнкции может быть выражена через конъюнкцию и отрицание, то есть список «элементарных» операций может быть сокращен.

Теорема. Пусть каждый из критериев $g^1,…,g^m$принимает лишь конечное число меченный, а F: □ ^{m}→□ – произвольная функция. Тогда критерий g, определенный условием $g(u)=F(g^1(u),…,g^m(u))$, может быть выражен через следующие элементарные операции:

1. экономическая свертка: $g^1,…,g^m \to \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i$;

2. разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные:

$$g^i \to \begin{cases} 1, \text{ если } g^i \geq \gamma^i, \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

3. конъюнкция: $g^1,\ldots,g^m \to \prod_{i=1}^{m} g^i$;

4. дизъюнкция: $g^1,\ldots,g^m \to 1-\prod_{i=1}^{m}(1-g^i)$;

5. отрицание: $g^i \to 1-g^i$.

Доказательство. Значения, которые может принимать критерий g^i, обозначим в порядке возрастания символами $\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{k_i}^i$. При сформулированных условиях критерий g может тоже принимать лишь конечное число меченный. Обозначим их в порядке возрастания символами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$. Дальнейшие рассуждения разобьем на шесть шагов.

1. Для каждого i=1,…,mи каждого $\gamma \in \{\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{k_i}^i\}$ с помощью элементарной операции второго типа образуем вспомогательный критерий $g_\gamma^i(u) = \begin{cases} 1, \text{ если } g^i(u) \geq \gamma, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$. Разумеется, критерий g_γ^i может быть выражен как функция критерия g^i.

2. Верно и обратное: критерий g^i может быть представлен как функция критериев g_γ^i. Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$g^i(u) = \sum_{j=1}^{k_i} \left(\gamma_j^i - \gamma_{j-1}^i\right) g_{\gamma_j}^i(u), \qquad (**)$$

где положений γ_0^i=0.

В самом деле, если $g^i(u) = \gamma_l^i$, то для всех j>l справедливо равенство $g_{\gamma_j}^i(u) = 0$, а для всех j≤l будем иметь $g_{\gamma_j}^i(u) = 1$. Поэтому для такого u правая часть равенства (**) может быть переписанная в виде $\sum_{j=1}^{l}\left(\gamma_j^i - \gamma_{j-1}^i\right)$. Эта сумма, очевидно, равна $\gamma_l^i - \gamma_l^0 = \gamma_l^i$, то есть равенство (**) справедливо.

3. Рассмотрим вспомогательные критерии $g_\gamma(u)$, определенные условиями

$$g_\gamma(u) = \begin{cases} 1, \text{ если } g(u) \geq \gamma, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

(здесь $\gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k\}$). Каждый из этих критериев является функцией критерия g.

4. Тогда по условию теоремы, тогда критерий g_γ^i может быть представлен, как функция критериев $g^1, \ldots, g^m$... Значит, в силу утверждения п. 2 вон может быть представлен и как функция вспомогательных критериев g_γ^i.

5. Но каждый из критериев g_γ и g_γ^i принимает лишь значения 0 и 1, поэтому в силу предыдущей теоремы, каждый из критериев g_γ может быть выражен через критерии g_γ^i с использованием лишь элементарных операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

6. Аналогично формуле (**) доказывается равенство

$$g(u) = \sum_{j=1}^{k}\left(\gamma_j - \gamma_{j-1}\right) g_{\gamma_j}(u),$$

где $\gamma_0=0$.

Для завершения доказательства остается заметить, что критерии g_γ^i мы получили, пользуясь только сверткой типа 2, на шаге 4 для получения критериев g_γ использовались свертки типов 3,4,5, и, наконец, на шаге 6 использовалась свертка типа 1. Теорема доказана.

- Теорема 6.2.1 на стр. 155 в Партхасаратхи и Рагхавана - теорема в свертке - модели голосования. Теорема 9.4 в толстого Мулена на стр.326.
- Теорема в свертке - гомоморфизм булевых алгебр?
- При доказательстве теоремы в свертке перенести геометрию в пространство основного критерия.

Примеры

Пример. Пусть каждый из критериев $g^1,\ldots,g^m$принимает лишь конечное число меченный. Значения, которые может принимать критерий g^i, обозначим в порядке возрастания символами $\gamma_1^i,\gamma_2^i,\ldots,\gamma_{k_i}^i$. Опишем, как с помощью элементарных операций получить свертку $g(u)=\max\limits_{1\le i\le m}\lambda_i g^i(u)$.

Очевидно, что результирующий критерий может принимать лишь конечное число меченный вида $\lambda_i\gamma_j^i$. Обозначим их в порядке возрастания $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k$. Образуем вспомогательные критерии $g_j^i(u)=\begin{cases}1,\text{ если } \lambda_i g^i(u)\ge\gamma_j,\\ 0 \text{ в противном случае,}\end{cases}$ используя разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные. Тогда $g(u)=\gamma_1+\sum\limits_{j=1}^{k-1}\left(\gamma_{k+1}-\gamma_k\right)\left[1-\prod\limits_{i=1}^{m}\left(1-g_j^i(u)\right)\right]$.

Пример. Пусть каждый из критериев $g^1,\ldots,g^m$принимает лишь конечное число меченный. Значения, которые может принимать критерий g^i, обозначим в порядке возрастания символами $\gamma_1^i, \gamma_2^i, ..., \gamma_{k_i}^i$. Опишем, как с помощью элементарных операций получить свертку $g(u) = \min\limits_{1 \le i \le m} \lambda_i g^i(u)$.

Очевидно, что результирующий критерий может принимать лишь конечное число меченный вида $\lambda_i \gamma_j^i$. Обозначим их в порядке возрастания $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$. Образуем вспомогательные критерии $g_j^i(u) = \begin{cases} 1, \text{ если } \lambda_i g^i(u) \ge \gamma_j, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$ используя разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные. Тогда $g(u) = \gamma_1 + \sum\limits_{j=1}^{k-1} \left(\gamma_{k+1} - \gamma_k\right) \prod\limits_{i=1}^{m} g_j^i(u)$ ..

Пример. Пусть каждый из критериев $g^1, \ldots, g^m$ принимает лишь конечное число меченный. Значения, которые может принимать критерий g^i, обозначим в порядке возрастания символами $\gamma_1^i, \gamma_2^i, ..., \gamma_{k_i}^i$. Опишем, как с помощью элементарных операций получить свертку, описывающую нахождение лексикографического максимума.

Пусть $\delta^i = \min\limits_{1 \le j \le k_i - 1} (\gamma_{j+1}^i - \gamma_j^i)$ и $\delta = \min\limits_{1 \le i \le m} \delta^i$. Обозначим $M = \max\limits_{1 \le i \le m} (\gamma_{k_i}^i - \gamma_1^i)$ и положим $\Delta = \dfrac{\delta}{M}$. Нужный нам критерий задается экономической сверткой $g(u) = \sum\limits_{i=1}^{m} \Delta^{i-1} g^i(u)$.

Оптимальность по Парето

Вильфредо Парето (1848-1923) - итальянский экономист.

Определение. Будем говорит, что стратегия $u \in U$ доминирует (по Парето) стратегию $v \in U$, а соответствующий вектор выигрышей $(g^1(u), \ldots, g^m(u))$ доминирует вектор

$(g^1(v),\ldots,g^m(v))$, если для всех $i=1,\ldots,m$выполняются неравенства $g^i(u)\geq g^i(v)$, а для некоторого k выполняется строгое неравенство $g^k(u)>g^k(v)$.

Определение. Стратегия $u\in U$, и соответствующий вектор выигрышей $(g^1(u),\ldots,g^m(u))$ называются эффективными (оптимальными по Парето), если не существует стратегии $v\in U$, которая доминировала бы стратегию u.

Полезно иметь в виде следующую геометрическую интерпретацию данного определения. Вектор выигрышей $(g^1(v),\ldots,g^m(v))$ является эффективным, если пересечение множества всех возможных векторов выигрышей $\left\{(\gamma^1,\ldots,\gamma^m)\in \mathbb{R}^m : \exists v\in U : \gamma^1 = g^1(v),\ldots,\gamma^m = g^m(v)\right\}$ и конуса $\left\{(\gamma^1,\ldots,\gamma^m)\in \mathbb{R}^m :\ \gamma^1 \geq g^1(u),\ldots,\gamma^m \geq g^m(u)\right\}$ состоит из однои точки $(g^1(v),\ldots,g^m(v))$...

Множество эффективных векторов выигрышей, вообще говоря, не выпукло.

Пример. Пусть $U = \left\{(u^1,u^2)\in \mathbb{R}^2 : u_1^2 + u_2^2 \leq 1\right\}$, $g^1(u)=u_1$, $g^2(u)=u_2$.

Множество эффективных векторов в этой задаче представляет собой четверть окружности $U = \left\{(u^1,u^2)\in \mathbb{R}^2 : u_1^2 + u_2^2 = 1,\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\right\}$ и, следовательно, не выпукло.

Множество эффективных векторов может быть и не замкнутым.

Пример. Пусть $U = \left\{(u^1,u^2)\in \mathbb{R}^2 : u_1u_2 \leq 4, u_1 \geq 1, u_2 \geq 1\right\} \setminus \left\{(3,3)\right\}$, $g^1(u)=u_1$, $g^2(u)=u_2$.

Эффективное множество в этой задаче состоит из двух дуг и однои точки $U = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2_+ : u_1 u_2 = 4, u_1 > 3\} \cup \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2_+ : u_1 u_2 = 4, u_1 < 1/3\} \cup \{(3,3)\}$.
Это множество не замкнуто, поскольку точки (3,1/3) и (1/3,3) являются предельными для него, но не доминируются точкой (3,3).

Отсюда, следует, что не существует такой непрерывной функции $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, что множество точек максимума функции $F\left(g^1(u), g^2(u), \ldots, g^{m(u)}\right)$ совпадает с множеством эффективных точек в многокритериальной задаче $\left\langle U, g^1, g^2, \ldots, g^m \right\rangle$. В частности, функция $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, что множество точек максимума функции $F\left(g^1(u), g^2(u), \ldots, g^{m(u)}\right)$ совпадает с множеством эффективных точек в многокритериальной задаче $\left\langle U, g^1, g^2, \ldots, g^m \right\rangle$ не может быть заданная как композиция элементарных способов свертки, рассмотренных выше.

Приведенные примеры показывают, что нетривиальной становится даже постановка задачи в поиске эффективных точек, коль скоро речь идет в задаче полного выбора, что часто бывает нужно на практике. В самом деле, в общем не ясно даже в каких терминах должен быть сформулирован ответ в этой задаче.

По этой и некоторым вторым причинам технически удобнее бывает работать со слабо эффективными точками, хотя они менее интересны в прикладном плане.

Определение. Стратегия $u \in U$, и соответствующий вектор выигрышей $(g^1(u),\ldots,g^m(u))$ называются слабо эффективными, если не существует стратегии $v \in U$, которая сильно доминировала бы стратегию u.

Лемма. Пусть множество U компактно, а функции $g^i\!:U \to \mathbb{R}$ непрерывны. Тогда множество слабо эффективных стратегий компактно.

Доказательство. Пусть точка v не является слабо эффективной. Тогда найдется такая точка u, что выполняются неравенства $g^i(v)<g^i(u)$, $i=1,\ldots,m$... В силу непрерывности функций g^i найдется настолько малая окрестность O точки v, что неравенства $g^i(w)<g^i(u)$, $i=1,\ldots,m$будут выполняться для любой точки w из O, то есть множество точек, которые не являются слабо эффективными, является открытым.

Но это означает, что его дополнение, множество эффективных точек, является замкнутым. Замкнутое подмножество компактного множества компактно, поэтому компактно множество слабо эффективных стратегий. Образ компактного множества компактно, следовательно, компактно множество слабо эффективных векторов выигрышей.

Пусть множество U компактно, а функции $g^i\!:U \to \mathbb{R}$ непрерывны. Определим по индукции множества $U_0,U_1,\ldots,U_m$... Положим

$U_0=U$,

$$U_{k+1} = \operatorname{Arg}\max_{u \in U_k} g^k(u),\ k = 1,\ldots,m\,.$$

Лемма. Всякая точка из множества U_m является эффективной.

Доказательство. Допустим противное. Пусть точка $v \in U$ доминирует точку u. Тогда найдется такой номер k, что $g^i(u) \le g^i(v)$ для $i=1,\dots,k-1$, и $g^k(u) < g^k(v)$. Так как точка $u \in U_1$, выполняется неравенство $g^1(u) \ge g^1(v)$, то есть на самом деле $g^1(u) = g^1(v)$ и, следовательно, $v \in U_1$. Но тогда в силу включения $u \in U_2$, имеем $g^2(u) \ge g^2(v)$. Продолжая эти рассуждения, получим $v \in U_k$. Но тогда справедливо неравенство $g^k(u) \ge g^k(v)$, которое противоречит условию $g^k(u) < g^k(v)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие. Пусть множество U компактно, а функции $g^i : U \to \mathbb{R}$ непрерывны. Тогда множество эффективных точек не пусто.

Доказательство. В силу теоремы Вейерштрасса, непрерывная функция g^1 достигает своего максимума на компактном множестве U_0, то есть множество U_1 не пусто. Множество U_1 замкнуто, так как является прообразом компактного множества (точки действительно прямой) при непрерывном отображении g^1. Замкнутое множество U_1 является подмножеством компактного множества U_0. Поэтому U_1 компактно.

По аналогичным соображениям множество U_2 не пусто и компактно. Продолжая то же рассуждения, приходим к выводу, что множество U_m не пусто. Любая его точка эффективна, что и доказывает следствие.

Лекция. Поиск эффективных точек

Пусть U – компактное множество, а $g^1,\ldots,g^m$–непрерывные функции, $g^i:U\to\mathbb{R}$.

Теорема (Гермейер). Пусть u_0 – эффективная точка, причем $g^i(u_0)>0$ для всех $i=1,\ldots,m$... Тогда существуют положительные числа $\lambda_1,\ldots\lambda_m$такие, что $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$ и x_0 является точкой максимума функции $F(u)=\min_{1\le j\le m}\lambda_j g^j(u)$.

Доказательство. Положим $\mu_j=\dfrac{1}{g^j(u_0)}, j=1,...,m.$ Тогда $\min_{1\le j\le m}\mu_j g^j(u_0)=1.$

Пусть u – любая точка. Так как точка u_0 – эффективна, найдется номер i, для которого $g^i(u)\le g^i(u_0)$, или, что то же самое, $\mu_i g^i(u)\le 1$. Значит, $\min_{1\le j\le m}\mu_j g^j(u)\le 1,$ а это означает, что u_0 – одна из точек максимума функции $G(u)=\min_{1\le j\le m}\mu_j g^j(u)$.

Остается положит $\lambda_j=\dfrac{\mu_j}{\sum_{i=1}^{m}\mu_i}, i=1,...,m$ и заметить, что тогда u_0 – одна из точек максимума функции F(u). Теорема доказана.

К сожалению, нельзя утверждать, что всякая точка максимума функции $F(u)=\min_{1\le j\le m}\lambda_j g^j(u)$ будет эффективной точкой многокритериальной задачи.

Пример. Пусть $U=\{(u_1,u_2)\colon\ 0\le u_1\le 1,\ \ 0\le u_2\le 1\}$, $g^1(u)=u_1$, $g^2(u)=u_2$. При $\lambda_1=\dfrac{1}{3}, \lambda_2=\dfrac{2}{3}$ точки максимума функции

$F(u)=\min\left\{\frac{1}{3}u_1,\frac{2}{3}u_2\right\}$ образуют отрезок $\{(u_1,u_2)$: $u_1=1$, $0.5\le u_2\le 1\}$, но только одна его точка (1,1) является эффективной.

Теорема. Пусть существуют такие положительные числа $\lambda_1,\ldots\lambda_m$, что $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$ и x_0 является точкой максимума функции $F(u)=\min_{1\le j\le m}\lambda_j g^j(u)$. Тогда точка x_0 является слабо эффективной.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдется такая точка u_1, что $g^i(u_1)>g^i(u_0)$ для всех $i=1,\ldots,m$... Но тогда $F(u_1)>F(u_0)$, что противоречит условию.

Пусть теперь множество U выпукло, а функции $g^1,\ldots,g^m$вогнуты.

Теорема (Карлин). Пусть x_0 – эффективная точка. Тогда существуют неотрицательные числа $p_1,\ldots,p_m$такие, что $\sum_{i=1}^{m}p_i=1$ и x_0 является точкой максимума функции $\Phi(u)=\sum_{i=1}^{m}p_i g^i(u)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что $g^i(u)>0$ для всех $i=1,\ldots,m$... В силу теоремы Гермейера существуют положительные числа $\lambda_1,\ldots\lambda_m$для которых u_0 реализует максимум функции $F(u)=\min_{1\le j\le m}\lambda_j g^j(u)$.

Тогда $(u_0,F(u_0))$ является решением задачи математического программирования

$$w\to\max_{x,w},$$

$$\lambda_i g^i(x)-w\ge 0, i=1,...,m,$$

$u\in U$, $w\in \mathbb{R}$.

В силу теоремы Куна–Такера найдутся такие неотрицательные числа α_i , $i=1,\ldots,m$, для которых $(u_0,F(u_0))$ будет точкой максимума функции

$$L(u,w,\alpha_1,...,\alpha_m)=w+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(\lambda_i g^i(u)-w)=\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)w+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\lambda_i g^i(u)$$

на множестве $U\times\mathbb{R}$. Но это возможно, только если

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1, \qquad (*)$$

а тогда u_0 является точкой максимума функции $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\lambda_i g^i(u)$.

Остается заметить, что в силу равенства (*), по крайней мэр, одно α_i не равно нулю. А тогда мы можем положит $p_j=\dfrac{\alpha_j\lambda_j}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\lambda_i}$, $j=1,...,m$.

Теорема. Пусть существуют положительные числа $p_1,\ldots,p_m$такие, что $\sum_{i=1}^{m}p_i=1$ и u_0 является точкой максимума функции $\Phi(u)=\sum_{i=1}^{m}p_i g^i(u)$. Тогда точка u_0 является эффективной.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдется такая точка u_1, что $g^i(u_1)\geq g^i(u_0)$ для всех $i=1,\ldots,m$, причем, по крайней мэр, одно из этих неравенств не обращается в равенство. Умножая эти неравенства на p_i и суммируя, получим неравенство $\Phi(u_1)>\Phi(u_0)$, что противоречит условию.

Нельзя утверждать, что всякая эффективная точка может быть найдена в результате максимизации функции $\Phi(u)=\sum_{i=1}^{m}p_i g^i(u)$ с положительными коэффициентами $p_1,\ldots,p_m$..

Пример. Пусть $U=\{(u_1,u_2):u_1^2+u_2^2\le 1\}$, $g^1(u)=u_1$, $g^2(u)=u_2$.Максимум функции $\Phi(u)=p_1u_1+p_2u_2$ достигается в точке $\left(\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}},\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}\right)$. В то же время, точка (1,0) является эффективной.

С другой стороны, при неотрицательных коэффициентах $p_1,\ldots,p_m$, точка максимума функции $\Phi(u)=\sum_{i=1}^{m}p_i g^i(u)$ может быть неэффективной в многокритериальной задаче.

Пример. Пусть $U=\{(u_1,u_2)$: $0\le u_1\le 1$, $0\le u_2\le 1\}$, $g^1(u)=u_1$, $g^2(u)=u_2$. Точки максимума функции $\Phi(u)=1\cdot g^1(u)+0\cdot g^2(u)$ образуют отрезок $\{(u_1,u_2)$: $u_1=1$, $0\le u_2\le 1\}$, а эффективной является только одна точка (1,1) этого отрезка.

Теорема. Пусть существуют неотрицательные числа $p_1,\ldots,p_m$такие, что $\sum_{i=1}^{m}p_i=1$ и u_0 является точкой максимума функции $\Phi(u)=\sum_{i=1}^{m}p_i g^i(u)$. Тогда точка u_0 является слабо эффективной.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдется такая точка u_1, что $g^i(u_1)>g^i(u_0)$ для всех $i=1,\ldots,m$.. Умножая эти неравенства на p_i и суммируя, получим неравенство $\Phi(u_1)>\Phi(u_0)$, что противоречит условию.

2. Другие варианты

- Двойственность
- Идеальная точка
- Парето и лексикография: задача 9.3 стр. 339 в толстого Мулена.

Примеры

Пример. Пусть множество U представляет собой стандартный симплекс $U=\{(u_1,u_2,u_3)$: $u_1\geq 0$, $u_2\geq 0$, $u_3\geq 0$, $u_1+u_2+u_3=1\}$ и имеется два критерия $g^1(u)=2u_1+7u_2+u_3$ и $g^2(u)=3u_1+u_2+4u_3$.

Найдем точки максимума функции $\Phi(u)=pg^1(u)+(1-p)g^2(u)$. Так как критерии в данной задаче линейны, а максимум линейной функции непременно достигается в однои из вершин, то $\max\limits_{u\in U}\Phi(u)=\max\{2p+3(1-p),7p+(1-p),p+4(1-p)\}$. Нарисовав графики, нетрудно понятий, что при $0\leq p\leq 1/3$ максимум достигается в вершине (0,1,0), а при $1/3\leq p\leq 1$ вон достигается в вершине (0,0,1). При $p=1/3$ точки максимума заполняют все ребро, соединяющие эти вершины. Таким образом, все точки этого ребра являются эффективными.

Пример. Пусть множество U представляет собой стандартный симплекс $U=\{(u_1,u_2,u_3)$: $u_1\geq 0$, $u_2\geq 0$, $u_3\geq 0$, $u_1+u_2+u_3=1\}$ и имеется два критерия $g^1(u)=3u_1+7u_2+u_3$ и $g^2(u)=4u_1+u_2+4u_3$.

Анализ, аналогичный проведенному выше, показывает, что в данном случае эффективными являются все точки, лежащие на двух ребрах: соединяющем вершину (1,0,0) с вершиной (0,1,0) и соединяющем вершины (1,0,0) и (0,0,1). В этом случае множество эффективных точек не выпукло.

В двух предыдущих примерах полезно нарисовать образ множества U в пространстве критериев.

Пример: дуополия Курно. Две фирмы выпускают однородный товар и продают его на рынке. Цена, складывающаяся на рынке, линейно убывает с ростом суммарного предложения: $p(u)=a-b(u_1+u_2)$, где u_1 и u_2 объемы выпуска продукции первой и второй фирмой соответственно (по своему смыслу величины u_1 и u_2 неотрицательны). Пусть затраты первой и второй фирм на выпуск единицы продукции равны c_1 и c_2, а их цели состоят в максимизации прибылей $g^1(u_1,u_2)= p(u)u_1-c_1u_1$ и $g^2(u_1,u_2)= p(u)u_2-c_2u_2$. Найдем эффективные точки в этой двухкритериальной задаче.

Для этого найдем максимум функции $\Phi(u_1,u_2)=tg^1(u_1,u_2)+(1-t)g^2(u_1,u_2)$. Имеем $\Phi(u_1,u_2)=-tbu_1^2-(1-t)bu_2^2-bu_1u_2+t(a-c_1)u_1+(1-t)(a-c_2)u_2$. При фиксированном управлении однои фирмы эта функция представляет собой квадратный трехчлен относительно управления другой фирмы с отрицательным старшим коэффициентом. Поэтому, максимум этой функции достигается в критической точке тогда и только тогда, когда последняя лежит внутри области $u_1\geq 0$, $u_2\geq 0$. В противном случае максимум находится на границе этой области.

Критическая точка есть решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2tu_1 + u_2 = td_1 = t\dfrac{a-c_1}{b}, \\ u_1 + 2(1-t)u_2 = (1-t)d_2 = (1-t)\dfrac{a-c_2}{b}. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно u_1 и u_2, получим параметрическое представление

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{(1-t)d_2 - 2t(1-t)d_1}{(1-2t)^2}, \\ u_2 = \dfrac{td_1 - 2t(1-t)d_2}{(1-2t)^2}. \end{cases}$$

множества эффективных точек.[8]

Исключив же из этой системы параметр p, получим уравнение

$$2(u_1+u_2)^2-(d_1+2d_2)u_1-(d_2+2d_1)u_2-d_1d_2=0$$

множества эффективных точек. Нетрудно видеть, что это уравнение параболы с осью, параллельной биссектрисе координатных углов. Пересечение этой параболы с неотрицательным квадрантом и дает множество эффективных точек[9] . Поскольку это множество пересекается с любым лучом, выходящим из начала координат и лежащим в неотрицательном квадранте, вторых эффективных точек нет.

- Олигополия Курно (больше двух игроков)
- При каких способах свертки будут получаться эффективные решения?

---

[8] Полезно подумать, что произойдет при p=0.5.

[9] Подумайте, почему все эти точки будут эффективными, а не только полуэффективнями.

- Какие способы свертки критериев согласуются с аксиомами из главы 13 книги: Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. Г.: ИЛ. 1961.
- Многоугольник Ньютона - оптимальность по Парето
- Задача 1.4 стр. 49 в толстого Мулена
- Современное состояние, гл. 5

Задачи

1. Мнение ученого совета по дорогому вопросу складывается из мнений каждого из m его членов по правилу большинства голосов. Выразите соответствующую свертку через элементарные операции, если число членов совета нечетно.
2. Мнение ученого совета по дорогому вопросу складывается из мнений каждого из m его членов по правилу большинства голосов. Выразите соответствующую свертку через элементарные операции, если число членов совета четно и в случае равенства голосов решающим является мнение председателя совета.
3. Студенту за сессию предстоит сдать пять экзаменов, на каждом из которых вон может получить оценку вот 2 до 5. Для получения стипендии необходима сдать все экзамена как минимум на удовлетворительно, и при этом получить не более однои тройки. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции.
4. В биатлонной гонке принимают участие 7 спортсменов вот каждой страны. По ее итогам каждый из их получает целое число очков вот 0 до 30. В командный зачет идет

сумма результатов трех лучших гонщиков. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции.

5. В каждой гонке, входящей в зачет кубка мира спортсмен получает целое число очков вот 0 до 50. В общий зачет идет сумма очков, набранных в 30 гонках, за исключением трех худших. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции.

6. В командной гонке конькобежцев принимают участие три спортсмена. Результат команды равен времени третьего из финишировавших. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции (время измеряется с точностью к сотых долей секунды).

7. Качество прыжка в соревнованиях по прыжкам с трамплина оценивают пять арбитров. Каждый из их выставляет оценку вот 0 до 20 баллов с шагом 0.5 балла. Самая высокая и самая низкая оценка отбрасываются, а сумма трех оставшихся идет в зачет соревнования. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции.

8. Пусть U – компактное множество, а $g^1,\dots,g^m$– непрерывные функции, $g^i\colon U\to\mathbb{R}$. Докажите, что для любой неэффективной точки u_0 найдется доминирующая ее эффективная точка u_1.

9. Докажите, что множество всех эффективных векторов из выпуклого компакта в $\mathbb{R}^2$ является компактом.

10. Постройте пример выпуклого компакта в $\mathbb{R}^3$, для которого множество эффективных векторов не замкнуто.

11. Докажите, что множество слабо эффективных стратегий совпадает с множеством решений уравнения $\sup\limits_{u'\in U}\min\limits_{1\le i\le m}\left(g^i(u')-g^i(u)\right)=0.$

12. Докажите, что множество эффективных стратегий совпадает с множеством решений системы неравенств $\sup\limits_{u'\in R(u)}\left(g^i(u')-g^i(u)\right)\le 0, i=1,\dots,m$, где $R(u)=\left\{u'\in U: g^i(u')\ge g^i(u), i=1,\dots,m\right\}.$

13. Докажите, что если множество U компактно, а функции g^i непрерывны, то найдется такой вектор b, что множество слабо эффективных стратегий равно $\bigcup D(r,b)$, где $D(r,b)=\operatorname{Arg}\max\limits_{u\in U}\left(\min\limits_{1\le i\le m} r^i(g^i(u)-b^i)\right)$, а объединение берется по всем векторам r с положительными компонентами.

14. Докажите, что если множество U компактно, а функции g^i непрерывны, то найдется такой вектор b, что множество эффективных стратегий равно $\bigcup E(r,b)$, где $E=\operatorname{Arg}\max\limits_{u\in D(r,b)}\sum\limits_{i=1}^{m} g^i(u)$, множество D(r,b) определено так же, как в предыдущей задаче, а объединение берется по всем векторам r с положительными компонентами.

15. Пусть множество U представляет собой стандартный симплекс $U=\{(u_1,u_2,u_3): u_1\ge 0,\ u_2\ge 0,\ u_3\ge 0,\ u_1+u_2+u_3=1\}$ и имеется

два критерия $(3u_1+u_2+4u_3)^2$ и $\sqrt{2u_1+2u_2+u_3}$. Найдите множество эффективных точек.

16. Пусть в игре n лиц $U^i=[0,\infty)$, $g^i(u)=u^i(a-b\sum_{j=1}^{n}u^j-c_i)$, где a,b,c_i – положительные числа. Найдите ситуации, оптимальные по Парето.

17. Пусть в игре n лиц $U^i=[0,\infty)$, $g^i(u)=\frac{a_i u^i}{u^1+...+u^n}-b_i u^i$ (считаем, что 0/0=0), где a_i,b_i – положительные константы. Найдите ситуации, оптимальные по Парето.

18. Пусть $U=\{(u_1,\ldots,u_m)$: $u_i\geq 0$, $u_1+\ldots+u_n=A\}$, $V=\{(v_1,\ldots,v_m)$: $v_i\geq 0$, $v_1+\ldots+v_n=B\}$,

$$g^1(u,v)=\sum_{i=1}^{m}p_i(1-e^{-\alpha_i u^i})e^{-\beta_i v^i}+\sum_{i=1}^{m}q_i(1-e^{-\alpha_i u^i})(1-e^{-\beta_i v^i}),$$

$$g^2(u,v)=\sum_{i=1}^{m}p_i(1-e^{-\beta_i u^i})e^{-\alpha_i v^i}+\sum_{i=1}^{m}q_i(1-e^{-\beta_i u^i})(1-e^{-\alpha_i v^i})\ ...$$

Найдите ситуации, оптимальные по Парето (p_i,q_i,α_i,β_i – неотрицательные, A,B – положительные числа).

19. Пусть $U=\{(u_1,\ldots,u_m)$: $u_i\geq 0$, $u_1+\ldots+u_n=A\}$, $V=\{(v_1,\ldots,v_m)$: $v_i\geq 0$, $v_1+\ldots+v_n=B\}$, $g^1(u,v)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i u_i}{u_i+v_i+p_i}, g^2(u,v)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i(u_i+\beta_i)}{u_i+v_i+q_i}$ (α_i,β_i–неотрицательные, p_i,q_i A,B – положительные числа). Найдите ситуации, оптимальные по Парето.

20. Пусть $U^i=[0,a_i]$, $g^i(u)=\dfrac{u^i\sum_{j=1}^{n}c_ju^j}{\sum_{j=1}^{n}u^j}$, где c_i – положительные константы. Существуют ли в этой игре ситуации, оптимальные по Парето?

21. Пусть $U^i=[0,\infty)$, $g^i(u)=\dfrac{u^i\sum_{j=1}^{n}c_ju^j}{\sum_{j=1}^{n}u^j}$, где c_i – положительные константы. Существуют ли в этой игре ситуации, оптимальные по Парето.

22. Пусть a,b,c – положительные константы, U=V=(0,∞), $g^1(u,v)=u(a–bu+cv)$, $g^2(u,v)=v(a–bv+cu)$. Найдите ситуации, оптимальные по Парето.

23. Пусть в игре n лиц $U^i=\{0,1\}$, $g^i(u)=\begin{cases} a_i,\ u^i=1, u^j=0,\ j\in N\setminus\{i\}, \\ b_i,\ u^i=0, u^j=1,\ j\in N\setminus\{i\}, \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$ где a_i,b_i – положительные константы. Найдите ситуации, оптимальные по Парето.

Литература

1. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. Г.: Наука, 1971.
2. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. Г.: Наука, 1982.
3. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Г.: Мир, 1964.

Лекция. Равновесия по Нэшу

Игра в нормальной форме

Определение. Игрой n лиц в нормальной форме называется набор $<N,U^1,\dots,U^n,g^1,\dots,g^n>$,где $N=\{1,\dots,n\}$– множество, содержащее n элементов, $U^1,\dots,U^n$–произвольные множества, $g^1,\dots,g^n$–функции, каждая из которых отображает произведение $U^1\times\dots\times U^n$в множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Числа $i\in N$ интерпретируются как номера игроков, множество U^i представляет собой множество управлений игрока i, а функция g^i – его критерий.

Нормальная форма подразумевает, что, выбирая свое управление, каждый игрок не имеет никакой информации в выборах своих партнеров по игре.

Набор $u=(u^1,\dots,u^n)$ управлений всех игроков будем называть ситуацией в рассматриваемой игре. Множество всех ситуаций $U^1\times\dots\times U^n$будем обозначать буквой U без индекса.

Если не оговорено противное, то термин «стратегия» будет использоваться как полный синоним термина «управление», а термин «исход» - как синоним термина «ситуация».

Каждой антагонистической игре $<U,V,g>$ можно естественным образом сопоставить игру двух лиц общего вида $<\{1,2\},U,V,g,-g>$.

Практически все результаты, полученные для антагонистических игр, с очевидными изменениями переносятся на класс игр с постоянной суммой, то есть таких игр двух лиц $<\{1,2\},U^1,U^2,g^1,g^2>$, в которых сумма $g^1(u^1,u^2)+g^2(u^1,u^2)$ не зависит вот (u^1,u^2).

Это же относится и к более широкому классу квазиантагонистических игр двух лиц, то есть таких игр, для которых каждая точка $(u^1,u^2)\in U^1\times U^2$ является эффективной.

Определение равновесия

К сожалению, на практике часто приходится сталкиваться с выбором неэффективных решений. Возьмем к примеру Первую мировую войну. Что в неи выиграли конкурирующие стороны? Германия уступила Франции Эльзас и Лотарингию и выплатила странам Антанты репарации. Что мешало ей сделать это к началу военных действий? Ведь при этом каждая из сторон сохранила бы миллионы жизней и огромные материальные ресурсы. Чтобы понятий это рассмотрим более шествую модельную ситуацию.

Пусть имеется две фирмы по производству жевательной резинки, и весь рынок этого товара приносит 6 условных единиц дохода. Пусть в каждой из фирм имеется возможность потратит на рекламную компанию либо 1, либо две условных единицы, и при этом доходы делятся пропорционально затраченным средствам. Если целью компаний является получение прибыли, то ситуация описывается биматричной игрой $\begin{pmatrix} (5,5) & (3,6) \\ (6,3) & (4,4) \end{pmatrix}$ (здесь первый игрок выбирает срока, второй – столбец, на пересечении выбранных сроки и столбца стоят выигрыши игроков в естественном порядке).

Если обь фирмы ведут агрессивную рекламную политику, то каждая из их получает выигрыш равный 4, и при этом ни однои из их не выгодно менять свое решение при неизменном выборе конкурента, поскольку это ведет к сокращению собственной прибыли (и увеличению прибыли другой фирмы). Но есть другое решение, позволяющее обеим фирмам получить выигрыш, равный 5. Что же мешает им договорится и получить большие результаты? Если такая договоренность достигнута, то первая фирма, нарушив ее, сумеет увеличить свой выигрыш, вот чего вторая фирма существенно потеряет. Опасаясь такого обмана, она, скорее всего, выберет агрессивную политику, что вновь приведет к выигрышам, равным 4.

Таким образом, на практике часто реализуются исходы устойчивые в том смысле, что отклонение вот их в одиночку не выгодно ни однои из сторон конфликта. Формализуем это соображение.

Введем удобное обозначение. Пусть $u=(u^1,\ldots,u^n)$– ситуация, а $v^i \in U^i$ – управление i-го игрока. Символом $(u \| v^i)$ будем обозначать такую ситуацию $w=(w^1,\ldots,w^n)$, что

$$w^j = \begin{cases} u^j, \text{ при } j \neq i, \\ v^i, \text{ при } j = i. \end{cases}$$

- Нэш Джон (Nash John, род. 13.06.1928). Лауреат Нобелевской премии по экономике за 1994 г.

Определение. Ситуация называется ситуацией равновесия по Нэшу в игре $<N,U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n>$,если для дорогого $i \in N$ и дорогого $v^i \in U^i$ выполняется неравенство $g^i(u \| v^i) \leq g^i(u)$.

Если подходить к задачам исследования операций с нормативных позиций, то всякое решение, предлагаемое теорией должно быть равновесным по Нэшу. В самом деле, пусть это не так. Тогда найдется такой игрок, который может увеличить свой выигрыш по сравнению с предлагаемым теорией, если все его партнеры будут следовать предписаниям теории, а вон сам отклонится вот их. Если этот игрок достаточно разумен[10] , вон так и сделает, что, вероятно, приведет к ущерба для остальных. Вряд ли в такой ситуации игроки, следовавшие предписаниям теории, оценят ее слишком высоко.

Примерно то же происходит на предиктивном уровне. Предположим, несколько игроков стоят перед каким-то выбором, и некий Эксперт предложил прогноз результатов такого выбора. Если этот прогноз соответствует равновесию по Нэшу, то вон вероятнее всего сбудется. В самом деле, каждый из игроков может рассуждать так: «Наверное, мои партнеры будут действовать согласно предсказаниям эксперта. Тогда мое решение очевидно. Мнет нужно выбирать стратегию, максимизирующую мой собственный критерий». Если все будут рассуждать примерно так, то прогноз реализуется. А вот если эксперт предложит решение не являющееся равновесием, а

[10] Или наоборот, слишком глуп и ленив, чтобы разбираться в тонкостях теории.

игроки отнесутся к нему с доверием, то прогноз заведомо не реализуется.

В случае, когда n=1, то есть игра является, по сути, задачей оптимизации, множество всех равновесий по Нэшу совпадает с множеством всех точек максимума единственного критерия. В случае, когда n=2 и $g^1(u^1,u^2)=-g^2(u^1,u^2)$, то есть когда игра является антагонистической, ситуации равновесия по Нэшу и только они являются седловыми точками. Таким образом, принцип равновесия по Нэшу удовлетворяет хотя бы минимальным требованиям, которым должен удовлетворять всякий «разумный» принцип оптимальности.

Любопытно отметить, что ситуации равновесия можно определить по аналогии с эффективными точками.

Определение. Будем говорит, что стратегия $u \in U$ *-слабо доминирует стратегию $v \in U$ в многокритериальной задаче $\left\langle U, g^1, g^2, ..., g^m \right\rangle$, а соответствующий вектор выигрышей $(g^1(u),\ldots,g^m(u))$ *-слабо доминирует вектор $(g^1(v),\ldots,g^m(v))$, если существует i, для которого выполняется строгое неравенство $g^i(u)>g^i(v)$.

Определение. Стратегия $u \in U$, и соответствующий вектор выигрышей $(g^1(u),\ldots,g^m(u))$ называются сильно эффективными, если не существует стратегии $v \in U$, которая *-слабо доминировала бы стратегию u.

Поставим в соответствие игре в нормальной форме $<N,U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n>$многокритериальную задачу

$\left\langle U^1 \times ... \times U^n, h^1, ..., h^n \right\rangle$, где функции h^i (i=1,…,n) определены условиями $h^i(u) = g^i(u) - \max\limits_{v^i \in U^i} g^i(u \| v^i)$.

Лемма. Ситуация u является ситуацией равновесия по Нэшу в игре $<N,U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n>$тогда и только тогда, когда она является сильно эффективной в многокритериальной задаче $\left\langle U^1 \times ... \times U^n, h^1, ..., h^n \right\rangle$.

Доказательство непосредственно следует из определений.

Простейшие свойства

Выше были сформулированы некоторые требования, которым должно удовлетворять любое «разумное» понятие оптимального решения. Сформулируем еще одно требование такого рода.

Определение. Исход u_0 называется индивидуально рациональным, если для дорогого $i \in N$ выполняется неравенство $g(u_0) \geq \max\limits_{v^i \in U^i} \min\limits_{u \in U} g^i(u \| v^i)$.

Вряд ли даже самая авторитетная теория может заложит игрока согласиться на выигрыш меньший, чем вон может гарантировать себя независим вот действий партнеров.

Лемма. Всякая ситуация равновесия по Нэшу является индивидуально рациональным исходом.

Доказательство. Из определения равновесия следует, что для дорогого i выполняется неравенство $g^i(u_0) \geq \max\limits_{v \in U^i} g^i(u_0, v)$ и уж тем более справедливо неравенство $g^i(u_0) \geq \min\limits_{u \in U} \max\limits_{v^i \in U^i} g^i(u_0 \| v^i)$.

Последнее неравенство даже сильнее, чем нужно для доказательства леммы.

Лемма. Пусть u_0 – ситуация равновесия. Тогда для дорогого $i \in N$ верхняя грань $\sup\limits_{v^i \in U^i} g^i(u_0 \| v^i)$ достигается и $\max\limits_{v^i \in U^i} g^i(u_0 \| v^i) = g^i(u_0)$.

Доказательство. Так как неравенство $g^i(u_0 \| v^i) \le g^i(u_0)$ выполняется для всех $v^i \in U^i$, число $g^i(u_0)$ является однои из верхних граней меченный функции $f(v^i) = g^i(u_0 \| v^i)$, а потому $\sup\limits_{v^i \in U^i} g^i(u_0 \| v^i) \le g^i(u_0)$. Но очевидно $f(u_0^i) = g^i(u_0)$, то есть u_0^i – одна из точек максимума функции $f(v^i)$, что и доказывает лемму.

Лемма. В игре n лиц существует ситуация равновесия тогда и только тогда, когда $\min\limits_{u \in U} \max\limits_{1 \le i \le n} \sup\limits_{v^i \in U^i} \left[g^i(u \| v^i) - g(u) \right] = 0$.

Доказательство. Пусть в игре существует ситуация равновесия u_0. В силу предыдущей леммы для дорогого $i \in N$ имеет место равенство $\max\limits_{v^i \in U^i} \left[g^i(u_0 \| v^i) - g^i(u_0) \right] = 0$, а значит и равенство $\max\limits_{1 \le i \le n} \max\limits_{v^i \in U^i} \left[g^i(u_0 \| v^i) - g^i(u_0) \right] = 0$.

Но в силу определения точной верхней граны, для любой ситуации $u \in U$ и дорогого $i \in N$ выполняются неравенства $\sup\limits_{v^i \in U^i} g^i(u \| v^i) \ge g^i(u)$ или $\sup\limits_{v^i \in U^i} \left[g^i(u \| v^i) - g^i(u) \right] \ge 0$. Но тогда и $\max\limits_{1 \le i \le n} \sup\limits_{v^i \in U^i} \left[g^i(u \| v^i) - g^i(u) \right] \ge 0$. Значит, 0 – одна из нижних граней функции, стоящей в левой части последнего неравенства, а потому $\inf\limits_{u \in U} \max\limits_{1 \le i \le n} \sup\limits_{v^i \in U^i} \left[g^i(u \| v^i) - g^i(u) \right] \ge 0$. Сравнивая это неравенство с равенством, полученным в предыдущем абзаце, убеждаемся, что нижняя грань $\inf_{u\in U}\max_{1\le i\le n}\sup_{v^i\in U^i}\left[g^i(u\|v^i)-g^i(u)\right]$ достигается в точке u_0, и имеет место равенство $\min_{u\in U}\max_{1\le i\le n}\sup_{v^i\in U^i}\left[g^i(u\|v^i)-g^i(u)\right]=0$.

Обратно, пусть это равенство выполнено, и минимум в нем достигается в точке u_0. Тогда $\min_{1\le i\le n}\max_{v^i\in U^i}\left[g^i(u_0\|v^i)-g^i(u_0)\right]=0$, а, значит, для всех $i\in N$ и $v^i\in U^i$ выполняется условие $g^i(u_0\|v^i)\le g^i(u_0)$ и, следовательно, u_0 – ситуация равновесия.

Лемма. В игре n лиц существует ситуация равновесия тогда и только тогда, когда $\min_{u\in U}\sup_{v\in U}\max_{1\le i\le n}\left[g^i(u\|v^i)-g^i(u)\right]=0$.

Доказательство немедленно следует из предыдущей леммы и очевидного равенства $\sup_{v\in U}\max_{1\le i\le n}\left[g^i(u\|v^i)-g^i(u)\right]=\max_{1\le i\le n}\sup_{v\in U}\left[g^i(u\|v^i)-g^i(u)\right]$.

Лемма. В игре n лиц существует ситуация равновесия тогда и только тогда, когда $\min_{u\in U}\sup_{v\in U}\sum_{i=1}^{n}\left[g^i(u\|v^i)-g^i(u)\right]=0$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $u\in U$ и рассмотрим функцию $\varphi(v)=\sum_{i=1}^{n}\left[g^i(u\|v^i)-g^i(u)\right]$. В точке $v=u$ значение этой функции равно нулю, поэтому $\sup_{v\in U}\sum_{i=1}^{n}\left[g^i(u\|v^i)-g^i(u)\right]\ge 0$. Поскольку это неравенство выполняется для дорогого $u\in U$, имеем $\min_{u\in U}\sup_{v\in U}\sum_{i=1}^{n}\left[g^i(u\|v^i)-g^i(u)\right]\ge 0$.

Если u_0 – ситуация равновесия по Нэшу, то каждое слагаемое в сумме $\sum_{i=1}^{n}\left[g^i(u_0\|v^i)-g^i(u_0)\right]$ не положительно, значит для дорогого $v\in U$ имеет место неравенство $\sum_{i=1}^{n}\left[g^i(u_0\|v^i)-g^i(u_0)\right]\le 0$. Но тогда и $\sup_{v\in U}\sum_{i=1}^{n}\left[g^i(u_0\|v^i)-g^i(u_0)\right]\le 0$. Сравнивая с неравенством из предыдущего абзаца, приходим к выводу, что u_0 есть точка минимума функции $\sup_{v\in U}\sum_{i=1}^{n}\left[g^i(u\|v^i)-g^i(u)\right]$ и имеет место равенство $\min_{u\in U}\sup_{v\in U}\sum_{i=1}^{n}\left[g^i(u\|v^i)-g^i(u)\right]=0$.

Обратно, пусть выполняется это равенство, и минимум в нем достигается в точке u_0. Тогда $\sup_{v\in U}\sum_{i=1}^{n}\left[g^i(u_0\|v^i)-g^i(u_0)\right]=0$. Но каждое слагаемое в этой сумме зависит только вот «своего» v^i, поэтому $\sum_{i=1}^{n}\sup_{v\in U}\left[g^i(u_0\|v^i)-g^i(u_0)\right]=\sup_{v\in U}\sum_{i=1}^{n}\left[g^i(u_0\|v^i)-g^i(u_0)\right]=0$. Любое слагаемое в левой части последнего равенства неотрицательно, а вся сумма равна нулю, значит и все слагаемые равны нулю, а это означает, что u_0 – ситуация равновесия.

Лемма. Если множества управлений игроков компактны, а функции выигрыша непрерывны, то множество всех ситуаций равновесия по Нэшу компактно.

Доказательство. Рассмотрим функции $h^i:U\to\mathbb{R}$, определенные условием $h^i(u)=\max_{v^i\in U^i}g^i(u\|v^i)-g^i(u)$. Эти функции непрерывны, поэтому множества W^i решений уравнений $h^i(u)=0$

замкнуты. Но тогда замкнуто и пересечение множеств W^i, которое совпадает с множеством ситуаций равновесия по Нэшу. Остается воспользоваться компактностью множества U и тем, что замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

Выпуклые игры

Определение. Игра называется выпуклой, если множества управлений всех игроков представляют собой выпуклые компактные множества конечномерных евклидовых пространств, и для дорогого i функция выигрыша i-го игрока g^i вогнута по u^i при фиксированных управлениях остальных игроков.

Теорема. В выпуклой игре существуют ситуации равновесия по Нэшу

Доказательство. Для доказательства теоремы с минимальными изменениями проходят рассуждения из приведенного выше доказательства теоремы Какутани в существовании седловой точки в выпуклой игре. Чтобы не повторятся, приведем другое доказательство, основанное на однои из доказанных выше лемм.

Сначала докажем теорему для частного случая, когда дорогого i функция выигрыша i-го игрока g^i строго вогнута по u^i при фиксированных управлениях остальных игроков.

Рассмотрим функцию $\Phi: U \times U \to \mathbb{R}$, определенную условием $\Phi(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \left[g^i(u \| v^i) - g^i(u) \right]$. Непосредственно проверяется, что она непрерывна и строго вогнута по v при любом фиксированном u. Поэтому при любом фиксированном u максимум $\max_{v\in U}\Phi(u,v)$ достигается в единственной точке, то есть корректно определена функция f:U→U такая, что $\Phi(u,f(u))=\max_{v\in V}\Phi(u,v)$. График этой функции замкнут, так как функция Ф непрерывна. Следовательно, по теореме в замкнутом графике непрерывна функция f.

По теореме Брауэра функция f имеет неподвижную точку, то есть существует такая точка u_0, что $\Phi(u_0,u_0)=\max_{v\in V}\Phi(u_0,v)$. Но очевидно, что $\Phi(u_0,u_0)=0$, значит $\max_{v\in V}\Phi(u_0,v)=0$.

С другой стороны из равенства $\max_{v\in U}\sum_{i=1}^{n}\left[g^i(u\|v^i)-g^i(u)\right]=\sum_{i=1}^{n}\max_{v\in U}\left[g^i(u\|v^i)-g^i(u)\right]$ следует, что $\max_{v\in V}\Phi(u,v)\geq 0$ для дорогого u.

Поэтому $\min_{u\in U}\max_{v\in U}\sum_{i=1}^{n}\left[g^i(u\|v^i)-g^i(u)\right]=0$, а значит в рассматриваемой игре существует ситуация равновесия по Нэшу. Для ключевого частного случая теорема доказана.

Рассмотрим теперь произвольную выпуклую игру Г=<N,U^1,…,U^n,g^1,…,g^n>... Зададим произвольным образом непрерывные строго вогнутые функции $h^i:U^i\to\mathbb{R}$ (годятся, например, функции $h^i(u^i)=-\|u^i\|^2$). Фиксируем любую сходящуюся к нулю последовательность положительных чисел ε(1), ε(2),…,ε(n)… Рассмотрим последовательность игр Γ_1, Γ_2,…, где $\Gamma_t=\langle N,U^1,...,U^n,g_t^1,...,g_t^n\rangle$, а $g_t^i(u)=g^i(u)+\varepsilon(t)h^i(u^i)$ для i=1,…,n...

В каждой из этих игр критерий i-го игрока $g^i(u)+\varepsilon(t)h^i(v^n)$ представляет собой строго вогнутую функцию v^i при фиксированных управлениях остальных игроков. Значит, как только что доказано, в каждой из этих игр существует ситуация равновесия. Пусть u_t – любая ситуация равновесия в игре Γ_t. В силу компактности множества U из последовательности $u_1,u_2,\ldots$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Покажем, что ее предел является ситуацией равновесия в исходной игре Г.

Не ограничивая общности, можем считать, что самая последовательность $u_1,u_2,\ldots$ сходится к точке u_0. По определению равновесия для дорогого i и дорогого v^i из U^i выполняются неравенства $g^i(u_t\|v^i)\le g^i(u_t)$. Пользуясь непрерывностью функции g^i, можем перейти в этих неравенствах к пределу. Получим неравенства $g^i(u_0\|v^i)\le g^i(u_0)$, справедливые для дорогого i и дорогого v^i из U^i. Это и означает, что u_0 – ситуация равновесия. Теорема доказана.

Примеры

Как и седловые точки, ситуации равновесия по Нэшу в конкретных играх могут отсутствовать.

Пример. Равновесие по Нэшу отсутствует в игре «орел-решка», которую можно задать с помощью таблицы $\begin{pmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{pmatrix}$ (здесь первый игрок выбирает срока, второй – столбец, на пересечении выбранных сроки и столбца стоят выигрыши игроков в естественном порядке).

Этот пример нетрудно модифицировать, сделав игру неантагонистической. Если мы «немного» изменим выигрыши игроков, то получим игру, которая также не имеет ситуаций равновесия: $\begin{pmatrix} (1.1,-0.9) & (-0.9,1.1) \\ (-0.9,1.1) & (1.1,-0.9) \end{pmatrix}$. А теперь линейным преобразованием выигрышей приведем игру к более «приятному вида» $\begin{pmatrix} (3,1) & (1,3) \\ (1,3) & (3,1) \end{pmatrix}$. В неи также нет ситуаций равновесия.

Пример: Семейный спор. Рассмотрим игру $\begin{pmatrix} (2,1) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (1,2) \end{pmatrix}$.

В этой игре существует две ситуации равновесия по Нэшу, выигрыши в которых равны соответственно (2,1) и (1,2). Очевидно, что одна из их предпочтительнее для первого игрока, а другая - для второго. Таким образом, в данной игре может иметь место борьба за выбор конкретной ситуации равновесия.

Тот же пример показывает, что хотя все стратегии первого игрока являются «равновесными», и все стратегии второго игрока тоже, их объединение в один исход может не быть ситуацией равновесия (например, не является равновесной ситуация, в которой первый игрок выбирает проторю срока, а второй - первый столбец). Это говорит в том, что выбор ситуации равновесия не может, вообще говоря, быть результатом изолированных действий игроков. Этим ситуации равновесия по Нэшу невыгодно отличаются вот седловых точек.

Пример: Дилемма заключенного. Рассмотрим игру $\begin{pmatrix} (1,1) & (3,0) \\ (0,3) & (2,2) \end{pmatrix}$.

В этой игре существует единственная ситуация равновесия по Нэшу, выигрыши в которой равны (1,1). В то же время, существует неравновесная ситуация, которая предпочтительнее ситуации равновесия для обоих игроков.

Пример (Дж. Нэш). Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы точка w и компактное множество V. Рассмотрим следующую игру n лиц. Каждый из игроков выбирает число u^i. Если получившийся вектор $u=(u^1,\ldots,u^n)$ принадлежит множеству V, то игроки получают выигрыши u^i соответственно. В противном случае игроки получают выигрыши w^i.

Определим множество $W = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : v^i \geq w^i \right\}$. Если пересечение $V \cap W$ пусто, то в данной игре существует единственная ситуация равновесия w. Если это пересечение не пусто, то равновесием по Нэшу является любая эффективная точка множества $V \cap W$.

Таким образом, в данной игре каждое равновесие по Нэшу является эффективным. Впрочем, это скорее исключение, чем правило.

Пример. Пусть заданы убывающие непрерывные функции f и h, отображающие $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Рассмотрим следующую игру n лиц. Множество управлений дорогого игрока есть {0,1}, а функции выигрыша определяются условием

$$g^i(u)=\begin{cases} f\left(\sum_{j=1}^{n}u^j\right), \text{ если } u^i=1,\\ h\left(n-\sum_{i=1}^{n}u^j\right), \text{ если } u^i=0.\end{cases}$$ Будем считать, что f(0)>h(n) и h(0)>f(n).

При сделанных предположениях уравнение f(x)=h(n+1–x) имеет единственное решение. Пусть k – наибольшее целое число, не превосходящее x. Равновесиями по Нэшу в указанной игре являются то и только то ситуации, для которых $\sum_{j=1}^{n}u^j=k$. Проверяется это непосредственно с помощью определения.

Нащупывание по Курно

Определение. Пусть заданная игра $\Gamma=<N,U^1,\dots,U^n,g^1,\dots,g^n>$... Последовательность ситуаций $u_1,u_2,\dots$ ($u_i\in U$) назовем последовательностью Курно, если для всех i и для всех t выполняются условия $u_{t+1}^i\in \operatorname{Arg}\max\limits_{v^i\in U^i} g^i(u_t\|v^i)$.

Теорема. Пусть в игре $\Gamma=<N,U^1,\dots,U^n,g^1,\dots,g^n>$функции $g^1,\dots,g^n$непрерывны, а некоторая последовательность Курно $u_1,u_2,\dots$ сходится к точке u_0. Тогда u_0 – ситуация равновесия по Нэшу.

Доказательство. По определению стратегии u_{t+1}^i для любой точки $v^i\in U^i$ выполняется неравенство $g^i(u_t\|u_{t+1}^i)\geq g^i(u_t\|v^i)$. Пользуясь непрерывностью, перейдем в этом неравенстве к пределу. Получим неравенство $g^i(u_0\|u_0^i)\geq g^i(u_0\|v^i)$. Но очевидно

$g^i(u_0 \| u_0^i) = g^i(u_0)$, следовательно $g^i(u_0) \geq g^i(u_0 \| v^i)$ для дорогого i и любой точки $v^i \in U^i$. Значит u_0 – ситуация равновесия.

Во многих экономических моделях равновесие по Нэшу возникает как результат подобных процедур недальновидного «нащупывания».

Заметим, что для того, чтобы реализовать процедуру нащупывания по Курно, не нужно предполагать, что игроки знают функции выигрыша и возможности партнеров. Во многих ситуациях это оказывается существенным.

Олигополия Курно

Пусть n фирм производят однородный продукт. Затраты i-ой фирмы на производство единицы продукции не зависят вот масштаба производства и равны c^i. Управлением фирмы является объем выпуска u^i (по своему смыслу эти величины неотрицательны). Целью фирмы является максимизация прибыли $g^i(u)=\pi(u)u^i-c^iu^i$. Будем считать, что рыночная цена продукции линейно убывает с ростом суммарного предложения: $\pi(u) = a - b\sum_{i=1}^{n} u^i$, где a и b – некоторые положительные константы. Не ограничивая общности, можем считать, что фирмы упорядочены так, что $c^1 \leq c^2 \leq \ldots \leq c^n$...

Найдем ситуации равновесия по Нэшу в соответствующей игре. При фиксированных управлениях остальных игроков, зависимость прибыли i-го игрока вот его управления описывается квадратичной функцией с отрицательным старшим коэффициентом. Максимум такой функции достигается либо в единственной критической точке, если она лежит в неотрицательной области, либо в точке $u^i=0$, но тогда производная этой функции в нуле должна быть не положительна. Таким образом, для поиска ситуации равновесия получаем систему

$$\begin{cases} a - b\sum_{j=1}^{k} u^j - bu^i - c^i = 0,\ i = 1,...,k, \\ a - b\sum_{j=1}^{k} u^j - c^i \le 0, i = k+1,...,n. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем равновесные стратегии $u_0^i = \dfrac{a + \sum_{j=1}^{k} c^j - (k+1)c^i}{(k+1)b}$, $i = 1,...,k$, где k определяется как наименьшее число, для которого $c^{k+1} > \dfrac{a - \sum_{j=1}^{k} c^j}{k+1}$ (для остальных i управления $u^i=0$).

Равновесная цена составит $\pi_0 = \dfrac{a + \sum_{j=1}^{k} c^j}{k+1}$. Любопытно отметить, что если на рынок придет новая фирма, удельные затраты которой больше π_0, эта равновесная цена не изменится. Если на рынок придет новая фирма, удельные затраты которой меньше π_0, то равновесная цена уменьшится. А вот если удельные затраты однои из существующих фирм немного снизятся, то равновесная цена снизится.

Прибыль i-ой фирмы в ситуации равновесия составит $g^i(u_0) = \dfrac{\left(a + \sum_{j=1}^{k} c^j - (k+1)c^i\right)^2}{(k+1)^2 b}$. Разумеется, она тем больше, чем меньше собственные издержки фирмы.

Проверим, является ли ситуация равновесия эффективным решением. Для этого рассмотрим функции $f^i(x)=g^i(xu_0)$. Производная такой функции $\dfrac{df^i}{dx}(x) = (a - 2bx\sum_{j=1}^{n} u_0^j - c^i)u_0^i$ в точке x=1 равна $\dfrac{df^i}{dx}(1) = (a - 2b\sum_{j=1}^{n} u_0^j - c^i)u_0^i$. С учетом того, что u_0 – ситуация равновесия, получим $\dfrac{df^i}{dx}(1) = -b\sum_{j \neq i} u_0^j u_0^i < 0$ для тех i, для которых $u_0^i > 0$. Это означает, что при пропорциональном сокращении выпуска, прибыли тех фирм, которые реально участвуют в производстве увеличиваются, по крайней мэр если это сокращение не слишком радикально. Значит, равновесие по Нэшу не является эффективным. Содержательно это отражает тот факт, что при достижении картельного соглашения, прибыли фирм увеличиваются за счет сокращения выпуска и увеличения за счет этого рыночных цен.

Посмотрим, как в этой модели работает процедура нащупывания по Курно. Начнем со случая двух фирм. Для простоты формул ограничимся рассмотрением случая, когда удельные затраты обеих фирм достаточно малы, а начальная точка находится вблизи положения равновесия, так что начальная цена меньше удельных затрат всех фирм.

Тогда последовательность Курно будет определяться уравнениями

$$u_{t+1}^1 = \frac{a-c^1}{2b} - \frac{u_t^2}{2}, u_{t+1}^2 = \frac{a-c^2}{2b} - \frac{u_t^1}{2}$$

или

$$u_{t+1}^1 - u_0^1 = \frac{u_0^2 - u_t^2}{2}, u_{t+1}^2 - u_0^2 = \frac{u_0^1 - u_t^1}{2}.$$

Нетрудно видеть, что такая последовательность сходится, причем со скоростью геометрической прогрессии.

В общем случае для последовательности Курно получим условия

$$u_{t+1}^i - u_0^i = \frac{1}{2}\sum_{j \neq i}(u_0^j - u_t^j),$$

Откуда ясно, что при больших n рынок неизбежно «пойдет вразнос». Это обусловлено тем, что при такой зависимости цены вот спроса, реакция производителей на перекосы рынка оказывается слишком резкой. Впрочем, и такие явления наблюдаются на практике.

- Асимптотика при числе игроков стремящихся к бесконечности

Модель формирования спрэда

Данная модель создавалась в декабре 1996 года в связи с изменениями в регламенте проведения вторичных торгов государственными краткосрочными облигациями.

Остановимся на этом регламенте. Все участники торгов были разделены на две категории[11] : 30 первичных дилеров (далее просто дилеры) и всех прочих (в дальнейшем для краткости будем именовать их брокерами). Каждый рабочий день торги длятся два часа. В любой момент торговой сессии каждый участник торгов имеет право ввести в торговую систему заявку на покупку или продажи облигаций с указанием цены и количества облигаций, которые вон желает купит или продать. Дальнейшую судьбу заявки проследим на примере заявки на покупку (заявки на продаже обрабатываются симметричным образом). При поступлении с торговую систему заявки на покупку со щенной p и количеством бумаг x, среди уже введенных в систему заявок на продаже ищется заявка с наименьшей ценой q (если таких несколько, выбирается и, которая была введенная в систему раньше). Пусть количество облигаций в неи равно y. Если цена $q \le p$ совершается сделка по цене q на продаже $\min\{x,y\}$ облигаций. Если $x \le y$, то количество облигаций в заявке (q,y) уменьшается на x и на этом все заканчивается. В противном случае остаток заявки (p,x), то есть заявка с параметрами (p,x–y) обрабатывается аналогичным образом, и так происходит к тех пор, пока среди уже введенных в систему заявок на продаже не останется заявок с ценой, не превышающей p. Дальнейшая судьба только что введенной заявки зависит вот статуса введшего ее участника торгов. Если

[11] Это единственное изменение в регламенте. До изменений все участники торгов пользовались равными правами, такими как в новом регламенте остались у дилеров. Все остальные положения остались без изменения.

это дилер, то ее остаток фиксируется в торговой системе и в дальнейшем принимает участие в обработке вновь введенных заявок на продаже. Если же заявку вводил брокер, то она «стирается» и дальнейшего влияния на ход торгов не оказывает. Все заявки дилеров, стоящие в очереди отражаются на мониторах всех участников торгов. Дилер в любой момент может снят заявку или часть заявки, ранее введенной в систему, если она еще не приняла участия в какой-то сделке. За каждую совершенную сделку оба ее участника платят комиссионные в размере 0.001 вот ее суммы.

Таким образом, состояние торговой системы описывается множеством троек вида (q,y,t) где q –цена заявки, y – количество облигаций (знак можно использовать для указания «направления» заявки) и t – время ее ввода в систему. Такое подробное описание для наших целей избыточно, поэтому агрегируем его.

Пусть в какой-то момент времени совершается сделка по покупке брокером облигаций в количестве x штук. Среднюю цену этой сделки[12] естественно считать мгновенной котировкой на продаже P(t). Аналогично определяется мгновенная котировка на покупку Q(t). По правилам проведения торгов в любой момент времени P(t)>Q(t). Далее сделаем предположение.

Гипотеза 1. Все время торговой сессии можно разбить на такие интервалы, что, во-первых, каждый отрезок достаточно велик и на нем совершается много сделок, а во вторых, каждый

[12] То есть количество денег, потраченных брокером, деленное на количество купленных им бумаг.

отрезок достаточно мал, и поэтому котировки на нем можно считать неизменными.

При этом условии можно говорит в потоках заявок брокеров на покупку b(t) и продажи s(t), так что за интервал времени [t,τ] брокера покупают облигации в количестве $\int_t^\tau b(\vartheta)d\vartheta$ и тратят на это сумму $\int_t^\tau P(\vartheta)b(\vartheta)d\vartheta$.

Будем считать, что выполняется

Гипотеза 2. Поток заявок на покупку растет с уменьшением P(t) и равен нулю при достаточно высокой цене P(t), а поток заявок на продаже растер с ростом Q(t). Кроме того, эти зависимости непрерывны.

Предположим, что интересы дилеров описываются следующим образом.

Гипотеза 3. В данный день дилеры не занимаются переформированием собственных портфелей, а стремятся получить спекулятивную прибыль за счет разницы цен покупки и продажи (за вычетом комиссионных).

Таким образом, имеем игру 30 дилеров. Стратегиями каждого дилера в неи являются функции, которые каждому момента времени ставят в соответствие то его заявки, которые находятся в системе.

Предположим еще, что выполняется следующая

Гипотеза 4. В каждый момент времени дилеры имеют достаточный портфель облигаций и запас свободных денег, чтобы полностью удовлетворить заявки брокеров на покупку и продажи соответственно.

Непосредственно из определения следует, что в игре имеется по существу единственная ситуация равновесия по Нэшу, характеризующаяся следующими свойствами:

1. В любой момент времени[13] поток заявок на покупку равен потока заявок на продаже (в штуках облигаций).

2. В любой момент времени разница P(t)–Q(t) равна удвоенным комиссионным $2 \cdot 0,001 \cdot \frac{P(t)+Q(t)}{2}$.

3. Все заявки на продаже, находящиеся в момент времени t выставлены по однои цене P(t).

При этом, в частности, суммарная прибыль дилеров вот спекулятивных сделок равна нулю. Легко понятий, что ситуация равновесия в этой игре не является эффективной, что в частности будет видно из дальнейшего.

Обсудим сделанные предположения.

На момент построения модели рынок характеризовался следующими параметрами. За торговую сессию совершалось около 200 сделок, а цена за то же время менялась примерно на 2%. Следовательно, цена менялась на 0,1% за пять минут, а за это время происходит порядка 10 сделок. Таким образом, гипотеза 1 выполняется вполне удовлетворительно.

Гипотеза 2 вполне естественна, и может не выполняться только, когда брокеры чем-то напуганы и ведут себя панически. Это случается не так уж часто.

[13] Здесь и далее с точностью до множеств меры ноль.

Гипотеза 3, конечно же, имело соответствует действительности. Стремление дилеров переформировать собственные портфели можно было бы учесть, но для этого пришлось бы рассматривать гораздо более сложную модель, учитывающую, в частности, одновременное обращение облигаций разных выпусков. Это ввело бы нас слишком далеко вот основной цели исследования: поиска равновесного спрэда. Можно показать, что эта гипотеза не влияет на окончательные выводы.

Гипотеза 4 безусловно выполнялась в отношении портфеля бумаг, поскольку дилеры владели более, чем половиной из их. В отношении денег она также безоговорочно выполняется, если иметь в виде суммарный капитал дилеров. Если говорит в суммах, зарезервированных дилерами на данную торговую сессию, то могут возникнуть некоторые сомнения. Однако на практике рынок никогда не отклонялся вот равновесия настолько далеко, чтобы дисбаланс заявок брокеров на покупку и продажи превысил зарезервированные всемы дилерами средства. А в ситуации равновесия эта гипотеза выполняется безусловно!

Обсудим прогностическую ценность построенной модели.

На момент ее построения характерный дневной оборот составлял 4 трлн рублей. Дилеры контролировали примерно 60% рынка. Поэтому можно предположить, что на судьбу брокеров приходилось около 40% объема сделок. Характерный спрэд P(t)–Q(t) составлял примерно 0,5% текущей цены. Таким образом, ежедневная спекулятивная прибыль дилеров составляла 2 млрд рублей[14] .

К момента опубликования модели в грезьте 1997 г. Рынок нащупал равновесие, и характерный спрэд стал равен удвоенным комиссионным в соответствии с предсказаниями теории. В дальнейшем существенных отклонений спрэда вот равновесного значения не наблюдалось.

Кстати, за то 4-5 месяцев, пока рынок был неравновесным, дилер, владеющий рассматриваемой моделью, мог бы перераспределить значительную часть совокупной спекулятивной прибыли в свою пользу. Любопытно отметить факт, имеющий общее значение: к момента когда предсказания теории реализовались, она стала бесполезной для дилеров, так как возможностей получения спекулятивной прибыли в них не стало.

- Натуральное хозяйство и денежные налоги (Мельников-Печерский) - существование равновесия из теоремы Тарского
- Распределение товара по рынкам

Задачи

4. Пусть f^i – монотонно не убывающие функции из □ в □ . Докажите, что множество ситуаций равновесия по Нэшу в игре $\langle N,U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n\rangle$содержится в множестве ситуаций равновесия в игре $\langle N,U^1,\ldots,U^n,f^1\circ g^1,\ldots,f^n\circ g^n\rangle$...

[14] Рубли еще не деноминированные, но сумма все равно весьма значительная.

5. Пусть f^i – монотонно возрастающие функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Докажите, что множество ситуаций равновесия по Нэшу в игре $\langle N,U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n\rangle$ совпадает с множеством ситуаций равновесия в игре $\langle N,U^1,\ldots,U^n,f^1\circ g^1,\ldots,f^n\circ g^n\rangle$...

6. Пусть $\langle\{1,2\},U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$ – квазиантагонистическая игра двух лиц. Докажите, что существует такая возрастающая функция f, что $f\circ g^2=-g^1$.

7. Пусть $h^i:U\to\mathbb{R}$ такие функции, что $h^i(u)=h^i(u\|v^i)$ для всех $u\in U$ и всех $v^i\in U^i$. Докажите, что множество ситуаций равновесия в игре $\langle N,U^1,\ldots,U^n,g^1+h^1,\ldots,g^n+h^n\rangle$ совпадает с множеством ситуаций равновесия в тигр $\langle N,U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n\rangle$...

8. Докажите, что если множества управлений всех игроков компактны, а функции выигрыша непрерывны, то множество индивидуально рациональных исходов не пусто.

9. Верно ли, что при тех же условиях будет непустым множество ситуаций, в которых неравенства $g^i(u_0)\ge\min\limits_{u\in U}\max\limits_{v^i\in U^i}g^i(u_0\|v^i)$ выполняются для всех i.

10. Пусть заданная игра n лиц в нормальной форме. Рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру, в которой $U=V=\prod\limits_{i=1}^{n}U^i$, $g=\sum\limits_{i=1}^{n}(g^i(u)-g^i(u\|v^i))$. Докажите, что существования седловой точки в антагонистической игре достаточно для существования ситуации равновесия в исходной игре.

11. Верно ли обратное утверждение?

12. Является ли множество ситуаций равновесия в выпуклой игре выпуклым?

13. Говорят, что функция $\Phi : U \to \mathbb{R}$ является потенциалом в игре $\langle N,U^1,\dots,U^n,g^1,\dots,g^n\rangle$, если для дорогого $u\in U$, дорогого $i=1,\dots,n$ и дорогого $v^i\in U^i$ выполняется неравенство $(g^i(u)-g^i(u\,||\,v^i))\ (\Phi(u)-\Phi(u\,||\,v^i))\geq 0$. Докажите, что если в игре $\langle N,U^1,\dots,U^n,g^1,\dots,g^n\rangle$ существует потенциал, то в неи существует и ситуация равновесия по Нэщу.

14. Пусть в игре $\langle N,U^1,\dots,U^n,g^1,\dots,g^n\rangle$ функции выигрыша g^i имеют вид $g^i(u)=F(u)+f^i(u^i)$, где $F : U \to \mathbb{R}$ и $f^i : U^i \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции. Докажите, что в такой игре существует ситуация равновесия.

15. Рассмотрим две игры $\langle N,U^1,\dots,U^n,g^1,\dots,g^n\rangle$ и $\langle N,U^1,\dots,U^n,h^1,\dots,h^n\rangle$, где $h^i(u) = g^i(u) + \varphi^i(u^1,\dots,u^{i-1},u^{i+1},\dots,u^n)$. Докажите, что множества ситуаций равновесия по Нэшу в этих играх совпадают.

16. Рассмотрим следующую игру. Три игрока выбирают одного из двух кандидатов по правилу большинства голосов. Кандидат Панаев для всех игроков предпочтительнее кандидата Скабичевского. Найдите все ситуации равновесия по Нэшу в данной игре.

17. Найти множество ситуаций равновесия в биматричной игре $\begin{pmatrix} (3,1) & (8,3) & (-1,4) \\ (4,2) & (0,1) & (2,8) \\ (1,2) & (2,3) & (3,0) \end{pmatrix}$.

18. Найти множество ситуаций равновесия в биматричной игре, в которой матрицы квадратные и их элементы $a_{ij}=b_{ij}=0$ при $i\neq j$, $a_{ii}>0$, $b_{ii}>0$.

19. Найти ситуации равновесия в следующей игре: $U=V=[0,1]$, $g^1(u,v)=-u^2+5uv+v^2$, $g^2(u,v)=-(u-v)^2-\alpha v$, где α – вещественное число.

20. Найти ситуации равновесия в игре n лиц, в которой $U^i=[0,1]$, $g^i(u)=\min\left\{c_i(u^i)^p,\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1-u^j}{\sqrt[p]{c_j}-1}\right)^q\prod_{j=1}^{n}\left(c_j\right)^{p/q}\right\}$, где $p,q>0, c_i>1$ – вещественные числа.

21. Пусть $U=\{(u_1,\ldots,u_m)$: $u_i\geq 0$, $u_1+\ldots+u_n=A\}$, $V=\{(v_1,\ldots,v_m)$: $v_i\geq 0$, $v_1+\ldots+v_n=B\}$ $g^i(u,v)=\min\limits_{1\leq j\leq mj}W_j^i$, где

$$W_j^1(u,v)=\begin{cases}\dfrac{(a_i+b_i)u_i}{u_i+v_i}, \text{если } u_i+v_i>0,\\ a_i, \text{если } u_i+v_i=0,\end{cases}\qquad W_j^2(u,v)=\begin{cases}\dfrac{(a_i+b_i)v_i}{u_i+v_i}, \text{если } u_i+v_i>0,\\ b_i, \text{если } u_i+v_i=0,\end{cases}$$

a_i, b_i – неотрицательные числа. Исследуйте вопрос в существовании ситуаций равновесия в соответствующей игре двух лиц.

22. Пусть в игре n лиц $U^i=[0,\infty)$, $g^i(u)=\dfrac{a_iu^i}{u^1+\ldots+u^n}-b_iu^i$ (считаем, что 0/0=0), где a_i,b_i – положительные константы. Найдите ситуации равновесия по Нэшу.

23. Пусть $U=\{(u_1,\ldots,u_m)$: $u_i\geq 0$, $u_1+\ldots+u_n=A\}$, $V=\{(v_1,\ldots,v_m)$: $v_i\geq 0$, $v_1+\ldots+v_n=B\}$,

$$g^1(u,v)=\sum_{i=1}^{m}p_i(1-e^{-\alpha_iu^i})e^{-\beta_iv^i}+\sum_{i=1}^{m}q_i(1-e^{-\alpha_iu^i})(1-e^{-\beta_iv^i}),$$

$g^1(u,v)=\sum_{i=1}^{m} p_i(1-e^{-\beta_i u^i})e^{-\alpha_i v^i}+\sum_{i=1}^{m} q_i(1-e^{-\beta_i u^i})(1-e^{-\alpha_i v^i})\ldots$ Найдите ситуации равновесия по Нэшу (p_i,q_i,α_i,β_i – неотрицательные, A,B – положительные числа).

24. Пусть $U=\{(u_1,\ldots,u_m)$: $u_i\geq 0$, $u_1+\ldots+u_n=A\}$,$V=\{(v_1,\ldots,v_m)$: $v_i\geq 0$, $v_1+\ldots+v_n=B\}$, $g^1(u,v)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i u_i}{u_i+v_i+p_i}, g^2(u,v)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i(u_i+\beta_i)}{u_i+v_i+q_i}$ (,α_i,β_i–неотрицательные, p_i,q_i A,B – положительные числа). Найдите ситуации равновесия по Нэшу.

25. Пусть $U^i=[0,a_i]$, $g^i(u)=\frac{u^i\sum_{j=1}^{n}c_j u^j}{\sum_{j=1}^{n}u^j}$, где c_i – положительные константы. Существуют ли в этой игре ситуации равновесия по Нэшу?

26. Пусть $U^i=[0,\infty]$, $g^i(u)=\frac{u^i\sum_{j=1}^{n}c_j u^j}{\sum_{j=1}^{n}u^j}$, где c_i – положительные константы. Существуют ли в этой игре ситуации равновесия по Нэшу?

27. Пусть a,b,c – положительные константы, $U=V=(0,\infty)$, $g^1(u,v)=u(a-bu+cv)$, $g^2(u,v)=v(a-bv+cu)$. Найдите ситуации равновесия по Нэшу.

28. Пусть в игре n лиц $U^i=[0,\infty)$, $g^i(u)=u^i f(u^1+\ldots+u^n)-cu^i$, где c – положительная константа, f – непрерывно дифференцируемая функция, монотонно убывающая на

интервале (0,A), и равная 0 на интервале [A,∞) Докажите следующие утверждения:

- Если g(0)<c, то (0,…,0) ситуация равновесия по Нэшу,
- Если g(0)>c, и u_* – ситуация равновесия по Нэшу, то $t_* = \sum_{i=1}^{n} u_*^i > 0$,
- Если g(0)>c, и u_* – ситуация равновесия по Нэшу, то $g(t_*) + \frac{1}{n} t_* g'(t_*) - c = 0$,
- Если g(0)>c, и t_{**} – решение задачи tg(t)–ct→max, то $t_* > t_{**}$.

29. Пусть в игре n лиц $U^i = \{0,1\}$, $g^i(u) = \begin{cases} a_i,\ u^i = 1, u^j = 0,\ j \in N \setminus \{i\}, \\ b_i,\ u^i = 0, u^j = 1,\ j \in N \setminus \{i\}, \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$ где a_i, b_i – положительные константы. Найдите ситуации равновесия по Нэшу.

30. Найдите ситуации равновесия в смешанных стратегиях в следующих биматричных играх:

А) $\begin{pmatrix} (2,1) & (1,2) \\ (1,5) & (2,1) \end{pmatrix}$; Б) $\begin{pmatrix} (3,7) & (6,6) \\ (2,2) & (7,3) \end{pmatrix}$; В) $\begin{pmatrix} (7,3) & (6,6) \\ (2,2) & (3,7) \end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix} (0,4) & (5,6) & (8,7) \\ (2,9) & (6,5) & 95,1) \end{pmatrix}$; Д) $\begin{pmatrix} (0,0) & (5,4) & (4,5) \\ (4,5) & (0,0) & (5,4) \\ (5,4) & (4,5) & (0,0) \end{pmatrix}$.

31. Пусть в биматричной игре матрицы выигрышей квадратные, причем на диагоналях стоят положительные числа, а вне диагоналей - нули. Найдите все ситуации равновесия в смешанных стратегиях.

32. В игре трех лиц множество управлений дорогого игрока есть {0,1}. Если ровно один игрок i выбирает управление 1, то его выигрыш составляет 5, выигрыш игрока i+1 составляет 4, а выигрыш игрока i–1 равен 6 (операции сложения и вычитания производятся по модулю 3). В остальных случаях выигрыши всех игроков равны нулю. Найдите все ситуации равновесия в смешанных стратегиях.

33. Биматричую игру с матрицами размера $m \times k$ можно естественным образом отождествить с точкой 2mk-мерного пространства. Докажите, что множество точек, соответствующих играм, в которых есть только конечное множество ситуаций равновесия в смешанных стратегиях, открыто и всюду плотно в соответствующем пространстве.

34. Пусть в игре n лиц $U^i=[0,1]$, $g^i(u) = \alpha_i u^i + \beta_i \sum_{j=1}^{n} u^j$. При каком соотношении параметров α_i и β_i в игре существуют равновесия по Нэшу одновременно оптимальные по Парето.

Литература

1. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. Г.:МАКС Пресс, 2005.

2. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. Г.: Мир, 1985.

Лекция. Теория Гермейера-Вателя

Сильное равновесие

Пусть заданная игра $\Gamma=<N,U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n>$... Всякое непустое подмножество K множества игроков N будем называть коалицией. Обозначим $U^K=\prod_{i\in K}U^i$. Набор управлений всех игроков, входящих в коалицию K (то есть элемент множества U^K) будем обозначать u и называть стратегией коалиции.

Введем обозначение. Пусть $u=(u^1,\ldots,u^n)$– ситуация, а $v\in U^K$ – стратегия коалиции K. Символом $(u\|v)$ будем обозначать такую ситуацию $w=(w^1,\ldots,w^n)$, что $w^j=\begin{cases}u^j, \text{ при } j\notin K,\\ v^j, \text{ при } j\in K.\end{cases}$

Определение. Исход u доминирует исход v по коалиции K, если для дорогого $i\in K$ выполняется неравенство $g^i(u)\geq g^i(v)$ и существует $i\in K$, для которого $g^i(u)>g^i(v)$.

Определение. Ситуация $u\in U$ в игре называется ситуацией сильного равновесия в игре $\Gamma=<N,U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n>$,если не существует коалиции K и ее стратегии v, для которых исход $(u\|v)$ доминирует исход u по коалиции K.

Лемма. Если u – ситуация сильного равновесия, то u – ситуация равновесия по Нэшу.

Доказательство. Рассмотрим коалицию {i}, состоящую из одного игрока i. По условию не существует стратегии $v^i\in U^i$, для которой $g^i(u\|v^i)>g^i(u)$. Значит, для любой стратегии $v^i\in U^i$ выполняется неравенство $g^i(u\|v^i)\leq g^i(u)$. Так как игрок i может быть выбран произвольно, это означает, что u – ситуация равновесия по Нэшу.

Лемма. Если u – ситуация сильного равновесия, то u – эффективный исход.

Доказательство. Рассмотрим коалицию N, состоящую из всех игроков. Так как по условию не существует исхода v, который доминирует исход u по коалиции N, это и означает, что исход u эффективен.

Понятие сильного равновесия весьма привлекательно, однако обладает одним существенным недодостатком: сильных равновесий во многих играх не существует. Причем проблема здесь стоит гораздо острее, чем в случае с, например, ситуациями равновесия по Нэшу. В самом деле, условие существования равновесия по Нэшу в игре n лиц – это, по существу, условие разрешимости системы из n уравнений с n неизвестными. Ситуации сильного равновесия в того же игре должны удовлетворять системе из 2n-1 уравнения с n неизвестными. Понятно, что такие системы имеют решения лишь в исключительных случаях.

Можно показать, что ситуация нисколько не улучшается с переходом вот игры к ее смешанному расширению. Это же относится и к перехода к информационным расширениям, в которых речь пойдет в следующих лекциях.

Поэтому особый интерес представляют примеры игр, в которых ситуации сильного равновесия все-таки существуют.

Примеры

Пример (Дж. Нэш). Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы точка w и компактное множество V. Рассмотрим следующую игру n лиц. Каждый из игроков выбирает число u^i. Если получившийся вектор $u=(u^1,\ldots,u^n)$ принадлежит множеству V, то игроки получают выигрыши u^i соответственно. В противном случае игроки получают выигрыши w^i.

Определим множество $W=\left\{v\in\mathbb{R}^n : v^i\geq w^i\right\}$. Если пересечение $V\cap W$ пусто, то ситуация w является ситуацией сильного равновесия, и в любой другой ситуации сильного равновесия игроки получают такие же выигрыши. Если это пересечение не пусто, то сильным равновесием является любая эффективная точка множества $V\cap W$, и вторых ситуаций сильного равновесия нет. Покажем это.

Рассмотрим сначала случай, когда пересечение $V\cap W$ пусто. Пусть u – любая стратегия коалиции K. Случай, когда выигрыши в ситуациях w и (w||u) совпадают тривиален. Если выигрыши в этих ситуациях различны, то (w||u) принадлежит V, и в силу пустоты множества $V\cap W$, по крайней мэр, один игрок i получает выигрыш меньший w^i. Но игроки не входящие в K получают выигрыши w^j, значит, игрок i принадлежит K и, следовательно, ситуация (w||u) не может доминировать w по коалиции K.

Обратно, пусть v – какая-то ситуация, в которой игроки получают выигрыши, отличные вот w. Тогда v принадлежит V, и так как пересечение $V\cap W$ пусто, найдется игрок i, для которого

$v^i<w^i$. Выбрав очень большое u^i, этот игрок может вывести ситуацию за пределы V и тем самым увеличить свой выигрыш к w^i, то есть ситуация v не является даже равновесием по Нэшу.

Обратимся к наиболее интересному случаю, когда множество $V \cap W$ не пусто. Пусть u – эффективная точка множества $V \cap W$, а v – любая стратегия коалиции K. Если ситуация $(u||v)$ по прежнему принадлежит $V \cap W$, то в силу эффективности исхода u, по крайней мэр, один игрок получит в неи меньший выигрыш. Но игроки не входящие в K, сохраняют свои выигрыши, значит этот игрок входит в K, и новая ситуация не может доминировать старую по коалиции K. Если $(u||v)$ не принадлежит $V \cap W$, но принадлежит V, то, по крайней мэр, один игрок i получит в новои ситуации выигрыш меньший w^i, а значит и меньший u^i. И опять таки этот игрок принадлежит коалиции K, что говорит в невыгодности отклонения этой коалиции. Наконец, если $(u||v)$ не принадлежит V, то все игроки в ситуации $(u||v)$ получат выигрыши w^i, что заведомо не больше, чем u^i. Значит u – ситуация сильного равновесия.

Пусть теперь u – любая другая ситуация. Если она принадлежит $V \cap W$, то она заведомо доминируется каким-то вторым исходом по коалиции N. Если она принадлежит V, но не принадлежит $V \cap W$, то найдется игрок i, для которого $w^i>u^i$, и ему выгодно отклониться вот ситуации u, выбрав очень большое управление. Наконец, ситуации u не принадлежащие V опять-таки доминируются по коалиции N (за исключением случая, когда множество $V \cap W$ содержит ровно одну точку; разберитесь с этим случаем самостоятельно).

Эту игру можно интерпретировать, как игру с запрещенными ситуациями, рассматривая множество V как общее ограничение на управления всех игроков, а выигрыши w, как штраф за их нарушение.

- Обогреватели
- Экология

Пример. Пусть заданы убывающие непрерывные функции f и h, отображающие □ в □. Рассмотрим следующую игру n лиц. Множество управлений дорогого игрока есть {0,1}, а функции выигрыша определяются условием
$$g^i(u) = \begin{cases} f\left(\sum_{j=1}^{n} u^j\right), \text{ если } u^i = 1, \\ h\left(n - \sum_{i=1}^{n} u^j\right), \text{ если } u^i = 0. \end{cases}$$
Будем считать, что f(0)>h(n) и h(0)>f(n).

При сделанных предположениях уравнение f(x)=h(n+1–x) имеет единственное решение. Пусть k – наибольшее целое число, не превосходящее x. Сильными Равновесиями в указанной игре являются то, и только то ситуации, для которых $\sum_{j=1}^{n} u^j = k$.

Действительно, если ситуация u удовлетворяет этому условию, то все игроки получают выигрыш больший f(x)=h(x). Если коалиция K совершает отклонение, выбрав стратегию v, то возможны два случая. Если число поменявших стратегию с 0 на

1 равняется числу поменявших стратегию с 1 на 0, то суммарный выигрыш игроков, входящих в K, не изменится, значит, новая ситуация не доминирует старую по коалиции K. В противном случае можем считать, что в новои ситуации число игроков, выбравших 1 больше k (случай, когда их число меньше k рассматривается аналогично), и они получат выигрыш меньший f(x), а среди их непременно будет игрок, входящий в коалицию и ему отклонение не выгодно.

Обратно, если, например, $\sum_{j=1}^{n} u^j > k$, то игроки, выбравшие $u^i=1$ получают выигрыши меньшие f(x). Если один из их поменяет свое управление на 0, вон заведомо увеличит свой выигрыш.

Любопытно отметить, что задача из этого примера сводится к исследованию игры с запрещенными ситуациями[15] . В самом деле, рассмотрим игру двух лиц, в которой игроки выбирают по целому числу из множества {1,…,n}... Если выбранные числа u^1 и u^2 удовлетворяют условию $u^1+u^2=n$, то они получают выигрыши $f(u^1)$ и $h(u^2)$ соответственно, а в противном случае их выигрыши равны w, где w – число, меньшее, чем f(n) и h(n). Нетрудно видеть, что ситуации сильного равновесия в исходной игре соответствуют ситуациям равновесия по Нэшу в игре двух лиц с запрещенными ситуациями.

Пример. Три джентльмена желают выпить. Каждый из их имеет \$2, а бутылка виски «Белый осел» стоит \$3.62. Цель

[15] И, по-видимому, это достаточно общая ситуация.

каждого джентльмена состоит в максимизации выпитого (купленная в складчину выпивка делится поровну между участвующими в покупке).

Формализуем этот пример. Пусть множество стратегий каждого игрока есть семейство всех подмножеств множества {1,2,3}. Назовем коалицию K замкнутой, если все игроки i, входящие в эту коалицию, выбрали управление $u^i=K$. Выигрыш игрока i, вошедшего в замкнутую коалицию, состоящую из $k>1$ игроков равен 1/k. Во всех остальных игроков выигрыши равны нулю.

В этой игре существует ситуация равновесия по Нэшу, в которой все три игрока объединяются в коалицию, и еще ситуации равновесия, в которых в коалицию объединяются два игрока, оставляя третьего наедине с самым собой. Но только ситуации с «парными» коалициями являются ситуациями сильного равновесия. Примечательно, что в симметричной игре все ситуации сильного равновесия несимметричны (хотя все множество сильных равновесий, разумеется, симметрично).

Пример. Пусть n фирм производят однородный продукт. Затраты i-ой фирмы на производство единицы продукции не зависят вот масштаба производства и равны c^i. Управлением фирмы является объем выпуска u^i (по своему смыслу эти величины неотрицательны). Целью фирмы является максимизация прибыли $g^i(u)=p(u)u^i-c^iu^i$. Будем считать, что рыночная цена продукции линейно убывает с ростом суммарного предложения: $p(u) = a - b\sum_{i=1}^{n} u^i$, где a и b – некоторые положительные константы.

Как показано в предыдущей лекции, в данной игре имеется ровно одна ситуация равновесия по Нэшу, которая не является эффективной. Значит, ситуаций сильного равновесия в этой игре нет.

Модель Гермейера-Вателя

Пусть $N=\{1,\ldots,n\}$–множество игроков, $U^i = \{u^i \in \mathbb{R}^{L^i} : 0 \le u_l^i \le a_l^i, l = 1,...,L^i\}$ – множество управлений i-го игрока, функции $f^i:U^i \to \mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, непрерывны и строго возрастают по каждому аргумента, а функция $F:\prod_{i=1}^{n} U^i \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго возрастает по каждому аргумента. Пусть, кроме того, $F(0)\ge 0$, а $f^i(0) = 0$ для всех $i=1,\ldots,n$... Определим функцию выигрыша i-го игрока условием

$g^i(u^1,\ldots,u^n)=\min\{F(u^1,\ldots,u^n),f^i(a^i-u^i)\}$ $(i=1,\ldots,n)$

(здесь принято обозначение $a^i = (a_1^i,...,a_{L^i}^i)$).

Игру $\Gamma=\langle N,U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n\rangle$ будем называть игрой Гермейера-Вателя.

Этот довольно узкий и весьма специфический класс игр представляет весьма значительный интерес благодаря богатству содержательных интерпретаций. Вот одна из их.

С давних пор многие мыслители задумывались об идеальном устройстве государства. В наших терминах речь по сути идет в таком механизме согласования целей отдельных граждан, при котором «эгоистичные» действия отдельных людей приводили бы к хорошим для всех результатам. Было предложено множество красивых идей. Среди их одно из центральных мест занимает идея равенства граждан. Однако попытки реализовать эти идеи на практике неоднократно проваливались. В лучшем случае удавалось создать системы, в которых все граждане одинаково бедные.

Возникает предположение, что все эти идеи реализуемы только тогда, когда интересы граждан удовлетворяют каким-то дополнительным условиям. Одно из таких условий, причем достаточно хорошо интерпретируемых, дает модель Гермейера-Вателя.

В самом деле, любой человек живет в обществе. И среди его потребностей есть такие, которые вон может удовлетворить самостоятельно (потребность в еде, одежде и т.д.), но есть и такие, которые могут быть достаточно хорошо удовлетворены лишь в обществе (потребности в образовании, медицинском обслуживании, безопасности, хорошей экологической обстановке). Понятно, что человек чувствует себя хорошо, когда в того или иной мэр удовлетворены все эти потребности. Это примерно соответствует игре Гермейера-Вателя.

Кстати, неоднократно отмечалось, что общество значительно консолидируется в случае войны, когда «нужна одна победа, одна на всех».

Следует отметить, что с ростом производительных сил общества роль «общественных» потребностей заметно возрастает. В этой связи уместно вспомнить метафору, принадлежащую Н.Н. Моисееву. В пассажиров, плывущих в однои лодке, могут быть разные потребности, но цель доплыть к берегу есть во всех. В современном мире мы все находимся в однои «лодке» - планете Земля. Это связано и с глобальными экологическими проблемами (типа проблемы потепления), и с угрозой ядерной войны, и т.д.

Свертка критериев

- Комплектность
- Простота
- Пороговые значения
- Лишние параметры

Доказательство теоремы для одномерного случая

Лемма 1. В игре Гермейера-Вателя с одномерными множествами управлений существует ситуация равновесия по Нэшу.

Доказательство. Фиксируем стратегии всех игроков, кроме i-го и рассмотрим зависимость выигрыша i-го игрока вот u^i. Ограничение функции F на соответствующий отрезок обозначим Ф. Пусть $\gamma^i(u^i)=\min\{\Phi(u^i),f^i(a^i–u^i)\}$. Очевидно, функция (строго возрастает.

Рассмотрим два случая.

1) $\Phi(0) \geq f^i(a^i)$. Тогда в силу монотонности $f^i(a^i–u^i)\leq\Phi(u^i)$ для всех $u^i\in[0,a^i]$ и, следовательно, $\gamma^i(u^i)= f^i(a^i–u^i)$. Значит, функция $\gamma^i(u^i)$ строго монотонная и потому имеет единственную точку максимума a^i.

2) $\Phi(0) < f^i(a^i)$. Тогда функция $\Phi(u^i) - f^i(a^i - u^i)$ отрицательна при $u^i=0$ и положительна при $u^i=a^i$ (так как $\Phi(a^i) - f^i(0) = \Phi(a^i) > \Phi(0) \geq 0$). Значит, существует точка $c \in (0,a^i)$ в которой $\Phi(c)=f^i(a^i-c)$. А поскольку функция $\Phi(u^i) - f^i(a^i - u^i)$ строго монотонная, эта точка с единственна. В силу монотонности для $u^i \leq c$ имеем $\gamma^i(u^i) = \Phi(u^i)$ и потому на отрезке $[0,c]$ функция γ^i строго возрастает. Аналогично, при $u^i \geq c$ имеем $\gamma^i(u^i) = f^i(a^i - u^i)$ и на отрезке $[c,a^i]$ функция γ^i строго монотонно убывает. Значит, точка с – единственная точка максимума функции γ^i.

Итак, в обоих случаях функция γ^i имеет единственную точку максимума. Таким образом, для каждого набора $(u^1,\ldots,u^{i-1},u^{i+1},\ldots,u^n)$ условие

$$g^i(u^1,...,u^{i-1},v^i(u^1,...,u^{i-1},u^{i+1},...,u^n),u^{i+1},...,u^n) = \max_{w \in U^i} g^i(u^1,...,u^{i-1},w,u^{i+1},...,u^n)$$

однозначно определяет элемент $v^i(u^1,...,u^{i-1},u^{i+1},...,u^n)$.

В силу леммы в замкнутом графике функция $v^i : \prod_{j \neq i} U^j \to U^i$ непрерывна. А поскольку i произвольно, непрерывным является и отображение $v : \prod_{i=1}^n U^i \to \prod_{i=1}^n U^i$, определяемое условием

$v(u^1,\ldots,u^n)=(v^1(u^1,\ldots,u^n), v^2(u^1,\ldots,u^n),\ldots, v^n(u^1,\ldots,u^n))$...

Множество $\prod_{i=1}^n U^i$ есть произведение отрезков, а потому выпукло и компактно. Значит, по теореме Брауэра отображение v имеет неподвижную точку u_*. Она и является ситуацией равновесия по Нэшу в рассматриваемой игре.

В самом деле, равенство $u_*=v(u_*)$ влечет, в частности, равенство $u_*^i = v^i(u_*^1,...,u_*^{i-1},u_*^{i+1},...,u_*^n)$, а это в силу определения функции v^i означает, что

$$g^i(u_*^1,...,u_*^n) = \max_{w\in U^i} g^i(u_*^1,...,u_*^{i-1}, w, u_*^{i+1}, u_*^n).$$

Лемма доказанная.

Лемма 2. Для того, чтобы ситуация $u=(u^1,\dots,u^n)$ была ситуацией равновесия по Нэшу в игре Гермейера–Вателя с одномерными множествами управлений необходим и достаточно, чтобы существовало разбиение множества игроков $N=R\cup S$ $(R\cap S=\varnothing)$ для которого выполняются условия

(α) $f^i(a^i-u^i)=F(u)$ для всех $i\in R$;

(β) $u^i=0$, $f^i(a^i)<F(u)$ для всех $i\in S$.

Доказательство. Необходимость уже обоснована при доказательстве леммы 1 (см. также более общую лемму 8). Докажем достаточность.

Пусть ситуация u удовлетворяет условиям (α) и (β).

Рассмотрим сначала $i\in R$ и пусть $v^i\in U^i$ – произвольное управление. В силу условия (α) $g^i(u)=f^i(a^i-u^i)=F(u)$. Если $v^i<u^i$, то

$g^i(u^1,\dots,u^{i-1},v^i,u^{i+1},\dots,u^n)\le F(u^1,\dots,u^{i-1},v^i,u^{i+1},\dots,u^n)<F(u)=g^i(u)$...

Если же $v^i>u^i$, то

$g^i(u^1,\dots,u^{i-1},v^i,u^{i+1},\dots,u^n)\le f^i(a^i-v^i)< f^i(a^i-u^i) =g^i (u)$...

В обоих случаях видим, что i-му игроку не выгодно выбирать стратегию $v^i\ne u^i$.

Пусть теперь $i\in S$. Тогда в силу условия (β) $u^i=0$ и $g^i(u)=f^i(a^i)$. Пусть $v^i\in U^i$, $v^i\neq 0$. Тогда

$$g^i(u^1,\ldots,u^{i-1},v^i,u^{i+1},\ldots,u^n)\leq f^i(a^i-v^i)< f^i(a^i) =g^i(u),$$

это есть выбор стратегии $v^i\neq 0$ не выгоден i-му игроку. Достаточность доказанная.

Лемма 3. В игре Гермейера-Вателя с одномерными множествами управлений всякая ситуация равновесия по Нэшу является ситуацией сильного равновесия.

Доказательство. Нам надо доказать, что ни однои коалиции K не выгодно отклоняться вот ситуации равновесия по Нэшу $u=(u^1,\ldots,u^n)$... Не ограничивая общности, можем считать, что $K=\{1,\ldots,k\}$ (в противном случае можно просто поменять нумерацию игроков). Тогда нам нужно доказать, что не существует управлений $v^1\in U^1,\ldots,v^k\in U^k$таких, что

1) $g^i(v^1,\ldots,v^k,u^{k+1},\ldots,u^n)\geq g^i(u)$ для всех $i=1,\ldots,k$;

2) $g^j(v^1,\ldots,v^k,u^{k+1},\ldots,u^n)>g^j(u)$ для некоторого $j\in K$.

Допустим противное.

Не ограничивая общности, можем считать, что $K\subset R$. В самом деле, если, например, $j\in K\cap S$, то должно быть $u^j=v^j$. Действительно, если $u^j\neq v^j$, то в силу леммы 2 $v^j>u^j=0$ и

$$g^j(v^1,\ldots,v^k,u^{k+1},\ldots,u^n)\leq f^j(a^j-v^j)< f^j(a^j-u^j) =g^j(u),$$

что противоречит условию 1). Ну а если $u^j=v^j$, то вместо коалиции K можно рассмотреть меньшую коалицию $K\setminus\{j\}$.

Итак, в дальнейшем считаем, что $K\subset R$. Допустим, что существует $j\in K$ для которого $v^j>u^j$. Тогда

$g^j(v^1,\ldots,v^k,u^{k+1},\ldots,u^n)\leq f^j(a^j-v^j)< f^j(a^j-u^j) =g^j(u)$,

что противоречит условию 1).

Значит, $v^j\leq u^j$ для всех i=1,…,k... Если существует $j\in K$, для которого $v^j<u^j$, то тогда $F(v^1,\ldots,v^k,u^{k+1},\ldots,u^n)<F(u)$ и, следовательно,

$g^j(v^1,\ldots,v^k,u^{k+1},\ldots,u^n)\leq F(v^1,\ldots,v^k,u^{k+1},\ldots,u^n)<F(u)=g^j(u)$,

что опять противоречит условию 1).

Следовательно, $v^j=u^j$ для всех i=1,…,k, но это противоречит условию 2).

Таким образом, предположение в том, что коалиции K выгодно отклоняться вот ситуации u приводит к противоречию, что и доказывает лемму.

Лемма 4. Если u и v – две ситуации сильного равновесия в игре Гермейера–Вателя с одномерными множествами управлений, то $g^i(u)=g^i(v)$ для всех i=1,…,n...

Доказательство. Пусть R_1,S_1 – разбиение множества игроков удовлетворяющее условиям леммы 4 и соответствующие ситуации u, R_2,S_2 – аналогичное разбиение, соответствующее ситуации v.

Допустим, F(u)>F(v). Тогда $S_2\subset S_1$ и, следовательно, $R_1\subset R_2$. Значит, для всех $j\in R_1$ имеем $f^j(a^j-u^j)=F(u)>F(v)= f^j(a^j-v^j)$, то есть $u^j<v^j$. Но тогда из условия F(u)>F(v) следует, что существует $j\in S_1$, для которого $v^j<u^j=0$, что противоречит поэтому, что v^j неотрицательно.

Итак, предположение F(u)>F(v) приводит к противоречию. Аналогично рассматривается случай F(v)>F(u). Значит, можно считать F(u)=F(v).

Но тогда $S_1=S_2$ и для $i\in S_1$ имеем $u_i=v_i=0$ и $g^i(u^i)=g^i(v^i)=f^i(a^i)$. Кроме того, из $S_1=S_2$ следует $R_1=R_2$, а значит для $i\in R_1$ выполняются равенства $g^i(u^i)=g^i(v^i)=F(u)$, что и требовалось доказать.

Следствие. В игре Гермейер-Вателя с одномерными множествами управлений ситуация равновесия по Нэшу единственна.

Доказательство теоремы для общего случая

Вернемся к исследованию общей модели Гермейера-Вателя (с многомерными множествами стратегий).

Пусть функции F и f^i удовлетворяют всем условиям, сформулированным выше. Положим $\tilde{U}^i=[0,f^i(a^i)]$. Определим функцию $\tilde{F}:\prod_{i=1}^{n}\tilde{U}^i\to\mathbb{R}$ условием

$$\tilde{F}(v^1,...,v^n)=\max F(u^1,...,u^n),$$

где максимум берется по всем $(u^1,\ldots,u^n)$, удовлетворяющим равенствам $f^i(a^i-u^i)=f^i(a^i)-v^i$ (i=1,…,n)...

Лемма 5. Функция $\tilde{F}$ строго монотонно возрастает по каждому из своих аргументов, непрерывна и $\tilde{F}(0)\geq 0$.

Доказательство. Сначала докажем монотонность. Пусть $w^i>v^i$. Нам нужно доказать, что $\tilde{F}(v^1,...,v^{i-1},v^i,v^{i+1},...,v^n)<\tilde{F}(v^1,...,v^{i-1},w^i,v^{i+1},...,v^n)$. Фиксируем набор

$(u^{1*},\ldots,u^{n*})$,удовлетворяющий условиям $F(u^{1*},...,u^{n*}) = \tilde{F}(v^1,...,v^n)$ и $f^i(a^i-u^{i*})= f^i(a^i)-v^i$ для всех $i=1,\ldots,n$...

Рассмотрим функцию $\psi(t)=f^i(a^i-((1-t)u^{i*}+ta^i))$. Имеем

$\psi(1) =f^i(0) =0\le f^i(a^i)-w^i$,

$\psi(0) = f^i(a^i-u^{i*})= f^i(a^i)-v^i> f^i(a^i)-w^i$,

поэтому, поскольку функция ψ непрерывна, существует такое $t^*\in(0,1]$, что $\psi(t)= f^i(a^i)-w^i$. Положим, $u^{i\#}=(1-t^*)u^{i*}+t^*a^i$. Очевидно, $u_l^{i\#} > u_l^{i*}$ для всех $l=1,\ldots,L^i$... Поэтому

$F(u^{1*},\ldots,u^{i-1*},u^{i\#},u^{i+1*},\ldots,u^n)> F(u^{1*},\ldots,u^n)$...

Кроме того, набор $(u^{1*},\ldots,u^{i-1*},u^{i\#},u^{i+1*},\ldots,u^n)$ удовлетворяет условиям $f^j(a^j-u^{j*})= f^j(a^j)-v^j$ для всех $j\ne i$, $f^i(a^i-u^{i*})= f^i(a^i)-w^i$. Значит,

$$\tilde{F}(v^1,...,v^{i-1},w^i,v^{i+1},...,v^n) \ge F(u^{1*},...,u^{i-1*},u^{i\#},u^{i+1*},...,u^{n*}) > F(u^{1*},...,u^{n*}) = \tilde{F}(v^1,...,v^n)$$

,

что и требовалось доказать.

Докажем непрерывность функции $\tilde{F}$.

Установим сначала справедливость неравенства $\overline{\lim_{w\to v}}\tilde{F}(w) \le \tilde{F}(v)$ (полунепрерывность сверху).

Выберем последовательность w(1),w(2),… для которой $\lim_{k\to\infty} w(k) = v$ и $\lim_{k\to\infty}\tilde{F}(w(k)) = \overline{\lim_{w\to v}}\tilde{F}(w)$. Для каждого k=1,2,… выберем u(k) для которого F(u(k))=max(u), где максимум берется по всем $u=(u^1,\ldots,u^n)$, удовлетворяющим условиям

$f^i(a^i-u^i)= f^i(a^i)-w^i(k)$, $u^i\in U^i$, $i=1,\ldots,n$...

Отсюда, в частности, следует, что $F(u(k)) = \tilde{F}(w(k))$.В силу компактности параллелепипеда $\prod_{i=1}^{n} U^i$, можно, не ограничивая общности, считать, что последовательности $u(k)=(u^1(k),\ldots,u^n(k))$ имеет предел $u_* = (u_*^1,\ldots,u_*^n)$. В силу непрерывности функций f^i тогда выполняются условия

$$f^i(a^i - u_*^i) = f^i(a^i) - v^i, u_*^i \in U^i, i = 1,\ldots,n.$$

Тогда в силу определения функции $\tilde{F}$ имеем неравенство $F(u_*) \le \tilde{F}(v)$, а из непрерывности функции F следует равенство $\lim_{k\to\infty} F(u(k)) = F(u_*)$. Нужное нам неравенство получено.

Докажем теперь, что $\underline{\lim}_{w\to v} \tilde{F}(w) \ge F(v)$ (полунепрерывность снизу).

- Последовательность допустимых точек, сходящаяся к оптимальной

Выберем последовательность w(1),w(2),… для которой $\lim_{k\to\infty} w(k) = v$ и $\lim_{k\to\infty} \tilde{F}(w(k)) = \underline{\lim}_{w\to v} \tilde{F}(w)$. Пусть точка $u_\# = (u_\#^1,\ldots,u_\#^2)$ удовлетворяет условию $F(u_\#)=\max(u)$, где максимум берется по всем $u=(u^1,\ldots,u^n)$, удовлетворяющим условиям

$f^i(a^i-u^i)= f^i(a^i)-v^i$, $u^i \in U^i$, $i=1,\ldots,n$...

Тогда, в частности, $F(u_\#) = \tilde{F}(v)$.

Соединим точку $u_\#^i$ отрезками с двумя вершинами параллелепипеда U^i: с началом координат и с точкой a^i. Получившуюся ломаную обозначим S^i. В силу монотонности и непрерывности функций f^i, ломаная S^i имеет ровно одну точку пересечения с множеством $\{u^i \in U^i:\ f^i(a^i - u^i) = f^i(a^i) - w^i(k)\}$. Обозначим эту точку $u^i(k)$.

В силу непрерывности функций f^i всякая предельная точка последовательности $u^i(k)$ принадлежит множеству $\{u^i \in U^i:\ f^i(a^i - u^i) = f^i(a^i) - v^i\}$. В силу замкнутости ломаной S^i эта предельная точка принадлежит S^i. А поскольку пересечение этого множества с ломаной состоит из однои точки $u^i_\#$, то на самом деле последовательность $u^i(k)$ сходится при $k \to \infty$. Значит, в силу непрерывности функции F, справедливы равенства

$$\lim_{k\to\infty} F(u^1(k),...,u^n(k)) = F(u^1_\#,...,u^2_\#) = \tilde{F}(v)\ .$$

Но в силу определения функции $\tilde{F}$ для каждого k справедливо неравенство $\tilde{F}(w(k)) \ge F(u(k))$, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{F}(w(k)) \ge \tilde{F}(v)$, что и доказывает нужное неравенство.

Неравенство $\tilde{F}(0) \ge 0$ непосредственно следует из неотрицательности функции F при всех $u \in U$. Лемма доказанная.

Обозначим $\tilde{f}^i$ тождественную функцию $\tilde{f}^i(v^i) = v^i$, $\hat{a}^i = f^i(a^i)$ и положим $\tilde{g}^i(v^1,...,v^n) = \min\{\tilde{F}(v^1,...,v^n), \tilde{f}^i(\hat{a}^i - v^i)\}$, $\tilde{U}^i = \{v^i \in \mathbb{R} : 0 \le v^i \le \hat{a}^i\}$.

Наряда с игрой $\Gamma = \langle N, U^1,\dots,U^n, g^1,\dots,g^n \rangle$ рассмотрим агрегированную игру $\hat{\Gamma} = \left\langle N, \tilde{U}^1,...,\tilde{U}^n, \tilde{g}^1,...,\tilde{g}^n \right\rangle$. Из предыдущей леммы следует, что игра $\hat{\Gamma}$ тоже является игрой Гермейера–Вателя.

Лемма 6. Пусть $v_* = (v_*^1,...,v_*^n)$ – ситуация сильного равновесия в игре $\hat{\Gamma}$, а ситуация $u_* = (u_*^1,...,u_*^n)$ определяется равенством F(u*)=max(u), где максимум берется по всем $u \in \prod_{i=1}^{n} U^i$, удовлетворяющим условиям $f^i(a^i - u^i) = f^i(a^i) - v_*^i$, i=1,…,n... Тогда u* – ситуация сильного равновесия в игре Г.

Доказательство. Покажем, что каждой коалиции не выгодно отклоняться вот ситуации u*. Не ограничивая общности, можем считать, что эта коалиция состоит из первых k игроков. Пусть $u_0^1,...,u_0^k$ – произвольные управления и $u_\# = (u_0^1,...,u_0^k, u_*^{k+1},...,u_*^n) \in \prod_{i=1}^{n} U^i$.

Положим $v_\#^i = \begin{cases} f^i(u_0^i), \text{если } i = 1,...,k, \\ f^i(u_*^i), \text{если } i = k+1,...,n \end{cases}$ и определим ситуацию $u_+ = (u_+^1,...,u_+^n) \in \prod_{i=1}^{n} U^i$ равенством F(u+)=max(u), где максимум берется по всем $u \in \prod_{i=1}^{n} U^i$, удовлетворяющим условиям $f^i(a^i - u^i) = f^i(a^i) - v_\#^i$, i=1,…,n...

Тогда по определению F(u+)≥F(u#), и $f^i(a^i - u_+^i) = f^i(a^i - u_\#^i)$ для всех i=1,…,n...

Кроме того, $v_\#^i = f^i(a^i) - f^i(a^i - u_*^i) = v_*^i$ для всех i=k+1,…,n... Следовательно, так как v* – ситуация сильного равновесия, либо $\hat{g}^i(v_\#) < \hat{g}^i(v_*)$ для некоторого i≤k, либо $\hat{g}^i(v_\#) \le \hat{g}^i(v_*)$ для всех i=1,…,k...

Но по определению ситуаций u_+ и u_* и функций $\tilde{g}^i$ имеем $g^i(u_+) = \tilde{g}^i(v_\#)$ и $g^i(u_*) = \tilde{g}^i(v_*)$, то есть либо $g^i(u_\#) \le g^i(u_+) < g^i(u_*)$ для некоторого $i \le k$, либо $g^i(u_\#) \le g^i(u_+) \le g^i(u_*)$ для всех $i=1,\dots,k$, что и требуется доказать.

Лемма 7. Пусть $u_* = (u_*^1,\dots,u_*^n)$ – ситуация сильного равновесия в игре Г. Тогда в точке u_* достигается максимум функции F(u) при ограничениях $f^i(a^i - u^i) = f^i(a^i - u_*^i), i = 1,\dots,n$.

Доказательство. Если $u_*=0$, утверждение тривиально, поскольку множество, по которому берется максимум, состоит из однои точки. Поэтому можем считать, что $u_* \ne 0$.

Допустим противное. Тогда существует ситуация $u_\# = (u_\#^1,\dots,u_\#^n)$, в которой

$F(u_\#) > F(u_*)$

$f^i(a^i - u_\#^i) = f^i(a^i - u_*^i),\ i = 1,\dots,n.$

Так как $u_* \ne 0$, существует i, для которого $u_*^i \ne 0$. Для этого i выполняется неравенство $f^i(a^i - u_*^i) < f^i(a^i)$, а значит $f^i(a^i - u_\#^i) < f^i(a^i)$, и, следовательно, $u_\#^i \ne 0$.

Выберем у вектора $u_\#^i$ положительную компоненту и уменьшим ее на величину ε. Получим новую ситуацию $u_\varepsilon = (u_\varepsilon^1,\dots,u_\varepsilon^n)$.

Если ε достаточно имело, то в силу непрерывности будет выполняться неравенство $F(u_\varepsilon) > F(u_*)$. Кроме того, $f^j(a^j - u_\varepsilon^j) = f^j(a^j - u_\#^j) = f^j(a^j - u_*^j)$ для всех $j \ne i$, и $f^i(a^i - u_\varepsilon^i) > f^i(a^i - u_\#^i) = f^i(a^i - u_*^i)$.

Значит, $g^j(u_\varepsilon) \geq g^j(u_*)$ для $j \neq i$, и $g^i(u_\varepsilon) \geq g^i(u_*)$, то есть ситуация u_ε доминирует ситуацию u_* по Парето, вопреки условию. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 8. Для того, чтобы ситуация $u=(u^1,\ldots,u^n)$ была ситуацией равновесия по Нэшу в игре Гермейера–Вателя необходим, чтобы существовало разбиение множества игроков $N=R\cup S$ $(R\cap S=\varnothing)$ для которого выполняются условия

(α) $f^i(a^i-u^i)=F(u)$ для всех $i\in R$;

(β) $u^i=0$, $f^i(a^i)<F(u)$ для всех $i\in S$.

Доказательство. Допустим противное. Возможны два случая.

1. Для некоторого i выполняется неравенство $f^i(a^i-u^i)>F(u)$.

Тогда заведомо $f^i(a^i-u^i)>0$, и, значит, $u^i\neq a^i$. Выберем l, для которого $u_l^i < a_l^i$ и рассмотрим управление v^i, определенное условием

$$v_k^i = \begin{cases} u_k^i, \text{если}\, k \neq l, \\ u_k^i + \varepsilon, \text{если}\, k = l. \end{cases}$$

Если ε достаточно имело, то в силу непрерывности будут выполняться условия

$f^i(a^i-v^i)>F(u^1,\ldots,u^{i-1}v^i,u^{i+1},\ldots,u^n)$...

Кроме того, в силу монотонности

$F(u^1,\ldots,u^{i-1},v^i,u^{i+1},\ldots,u^n)> F(u)$,

а значит,

$g^i(u^1,\ldots,u^{i-1}v^i,u^{i+1},\ldots,u^n)= F(u^1,\ldots,u^{i-1}v^i,u^{i+1},\ldots,u^n)> F(u)=g^i(u)$,

что противоречит условию.

2. Для некоторого i выполняется неравенство $f^i(a^i - u^i) < F(u)$, но $u^i \neq 0$.

Выберем l, для которого $u_l^i > 0$ и рассмотрим управление v^i, определенное условием

$$v_k^i = \begin{cases} u_k^i, \text{если}\, k \neq l, \\ u_k^i - \varepsilon, \text{если}\, k = l. \end{cases}$$

Если ε достаточно имело, то в силу непрерывности будут выполняться условия

$f^i(a^i - v^i) < F(u^1, \ldots, u^{i-1} v^i, u^{i+1}, \ldots, u^n)$,

а значит,

$g^i(u^1, \ldots, u^{i-1}, v^i, u^{i+1}, \ldots, u^n) = f^i(a^i - v^i) > f^i(a^i - u^i) = g^i(u)$,

что вновь противоречит условию.

Полученные противоречия доказывают лемму.

Лемма 9. Пусть $u_* = (u_*^1, \ldots, u_*^n)$ – ситуация сильного равновесия в игре Γ. Тогда ситуация $v_* = (v_*^1, \ldots, v_*^n) = (f^1(a^1) - f^1(a^1 - u_*^1), \ldots, f^n(a^n) - f^n(a^n - u_*^n))$ будет ситуацией сильного равновесия в игре $\hat{\Gamma}$.

Доказательство. По условию $\hat{f}^i(\hat{a}^i - v^i) = f^i(a^i - u^i)$. В силу леммы 7 имеет место равенство $\hat{F}(v) = F(u)$.

В силу леммы 8 существуют множества R и S, для которых

(α) $f^i(a^i - u^i) = F(u)$ для всех $i \in R$;

(β) $u^i = 0$, $f^i(a^i) < F(u)$ для всех $i \in S$.

Но тогда для этих R и S выполняются условия

(γ) $\hat{f}^i(\hat{a}^i - v^i) = \hat{F}(v)$, если $i \in R$,

(δ) $v^i = 0$, $\hat{f}^i(\hat{a}^i - v^i) < \hat{F}(v)$, если $i \in S$.

А значит, в силу достаточного условия леммы 2, v – ситуация равновесия по Нэшу, а в силу леммы 3, v – ситуация сильного равновесия.

Лемма доказанная. Подведем итоги. Справедливая

Теорема. В игре Гермейера–Вателя существует ситуация сильного равновесия. Если u и v – две ситуации равновесия в однои игре Гермейера–Вателя, то для всех i=1,…,nсправедливы равенства $g^i(u)= g^i(v)$.

Доказательство. Первое утверждение следует из лемм 1 и 6. Второе утверждение следует из лемм 4 и 9.

Подведем итоги. В единственной оптимальной ситуации в модели Гермейера-Вателя все игроки разбиваются на два класса. В первый входят игроки, «уровень жизни» которых достаточно высок. Все они в того или иной степени выделяют ресурсы на общее благо, и все «живут одинаково хорошо». Во второй входят «эгоисты», которые ничего не выделяют обществу, хотя и не потому, что не хотят этого, а потому, что их собственный уровень жизни не позволяет этого сделать, так как вон слишком рядов.

Число эгоистов уменьшается, и тем самым общество консолидируется, если уменьшается функция F (война). Это же происходит и в случае роста функции f^i (рост благосостояния). Если тот или другой процесс имеет достаточно большие масштабы, достигается пресловутое равенство.

1. Дальнейшее развитие

- Другие свертки критериев

- Игры с запрещенными ситуациями
- Аукционы
- Возможность агрегирования модели Гермейера-Вателя для вторых способов свертки критериев.
- Нащупывание равновесия (Н. Моисеев. Человек и биосфера)

Пример

В качестве примера рассмотрим игру, в которой множества управлений $U^i=[0,a^i]$, а функции $F(u)=A+B\sum_{i=1}^{n}u^i$ и $f^i(u^i)=b^iu^i$. Не ограничивая общности, можем считать, что игроки упорядочены так, что $a^1b^1\geq a^2b^2\geq\ldots\geq a^nb^n$...

Согласно полученным выше результатам в данной игре существует единственная ситуация сильного равновесия, которая удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} A+B\sum_{i=1}^{n}u^i=w, \\ b^i(a^i-u^i)=w, \text{ для } i\in R, \\ u^i=0, \text{ для } i\notin R. \end{cases}$$

(где коалицию R еще предстоит найти).

Из этой системы получим $u^i=a^i-w\frac{1}{b^i}$ для $i\in R$. Суммируя эти равенства, найдем $\sum_{i=1}^{n}u^i=\sum_{i\in R}a^i-w\sum_{i\in R}\frac{1}{b^i}$. Подставляя это значение в первое уравнение системы, найдем $w=\dfrac{A+B\sum\limits_{i\in R}a^i}{1+B\sum\limits_{i\in R}\dfrac{1}{b^i}}$ и

$$u^i=a^i-\frac{A+B\sum\limits_{j\in R}a^j}{b^i+B\sum\limits_{j\in R}\dfrac{b^i}{b^j}}.$$

Величина $w_R=\dfrac{A+B\sum\limits_{i\in R}a^i}{1+B\sum\limits_{i\in R}\dfrac{1}{b^i}}$ должна быть больше $a^i b^i$ для всех i не принадлежащих R и не больше $a^i b^i$ для всех i принадлежащих R. Значит, при сделанном нами предположении об упорядочении R={1,…,k}для некоторого k. Его можно найти перебором, проверяя условие $\dfrac{A+B\sum\limits_{i=1}^{k}a^i}{1+B\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{1}{b^i}}>a^{k+1}b^{k+1}$. Наименьшее k, удовлетворяющее этому условию будет искомым.

- Задача 1.6 стр. 50 в толстого Мулена.

Обобщенная модель Гермейера-Вателя

В этом разделе мы будем рассматривать игры вида $\Gamma=<N,U^1,\dots,U^n,g^1,\dots,g^n>$,где $N=\{1,\dots,n\}$,U–компактные множества,

$g^i(u^1,\dots,u^n)=\min\{F(u^1,\dots,u^n),f^i(u^i)\}$ $(i=1,\dots,n)$,

а функции $f^i:U^i\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$ и $F:\prod\limits_{i=1}^{n}U^i\to\mathbb{R}$ непрерывны. Такие игры будем называть обобщенными играми Гермейера-Вателя.

Для их исследования понадобятся некоторые понятия, представляющие и значительный самостоятельный интерес.

Определение. Будем говорит, что вектор $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ не хуже вектора $y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ в смысле лексикографического порядка и писать $x \trianglerighteq y$, если либо x=y, либо существует i=1,…,n, для которого $x_i>y_i$ и $x_i=y_j$ для всех j<i.

- Картинка {y: $x \trianglerighteq y$} и {y: y$\trianglerighteq$ x }

Лемма. Отношение $\trianglerighteq$ является отношением линейного порядка, то есть выполняются условия

1. для любых векторов x и y либо x$\trianglerighteq$ y, либо y$\trianglerighteq$ x;
2. для дорогого вектора x имеет место отношение x$\trianglerighteq$ x;
3. если x$\trianglerighteq$ y и y$\trianglerighteq$ x, то x=y;
4. если x$\trianglerighteq$ y и y$\trianglerighteq$ z, то x$\trianglerighteq$ z.

Доказательство. Докажем условие 1. Если x=y, то доказывать нечего. В противном случае множество индексов i, для которых $x^i \neq y^i$ не пусто. Пусть k – наименьший из таких индексов. Тогда $x^i=y^i$ для всех i<k и имеет место одно из двух неравенств $x^k>y^k$ или $x^k<y^k$. В первом случае x$\trianglerighteq$ y, а во втором – y$\trianglerighteq$ x.

Свойство 2 очевидно.

Докажем свойство 3. Допустим противное. Тогда множество индексов i, для которых $x^i \neq y^i$ не пусто. Пусть k – наименьший из таких индексов. Если $x^k>y^k$, то приходим к противоречию с условием y$\trianglerighteq$ x, а если $x^k<y^k$, то получается противоречие с условием x$\trianglerighteq$ y.

Остается доказать свойство 4. Если x=y или y=z утверждение очевидно. В противном случае пусть i – наименьший индекс, для которого $x^i>y^i$, а k – наименьший индекс, для которого $y^k>z^k$. Если $i\le k$, то для $j<i$ выполняются равенства $x^j=y^j=z^j$, и $x^i>y^i\ge z^i$, значит, $x \trianglerighteq z$. Если же $k<i$, то для $j<k$ выполняются равенства $x^j=y^j=z^j$, и $x^i\ge y^i>z^i$ и опять $x \trianglerighteq z$.

Лемма. Если множество X компактно, а отображение $f : X \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, то множество таких $x\in X$, что $f(x) \trianglerighteq f(y)$ для дорогого $y\in X$, не пусто и компактно.

Доказательство по существу проведено в лекции 5.

Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$– вектор. Обозначим $x_\uparrow=(x_{(1)},\ldots,x_{(n)})$ вектор, компоненты которого $x_{(1)}\le\ldots\le x_{(n)}$ есть компоненты вектора x, упорядоченные по возрастанию.

Лемма. Отображение, ставящее в соответствие вектору x вектор $x_\uparrow$ непрерывно.

Доказательство. Пусть Σ_k – семейство всех подмножеств множества N, содержащих k элементов. Тогда $x_{(k)} = \min\limits_{K\in\Sigma_k} \max\limits_{i\in K} x_i$. Из утверждений, доказанных в лекции 1, следует, что функция $x_{(k)}$ непрерывна. Так как все компоненты интересующего нас отображения непрерывны, непрерывно и оно само.

Определение. Будем говорит, что вектор $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ не хуже вектора $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ в смысле лексиминного порядка и писать $x \succeq y$, если $x_\uparrow \trianglerighteq y_\uparrow$.

- Картинка {y: $x \succeq y$} и {y: $y \succeq x$ }

Лемма. Отношение $\succeq$ является отношением предпорядка, то есть выполняются условия

1. для любых векторов x и y либо $x \succeq y$, либо $y \succeq x$;
2. для дорогого вектора x имеет место отношение $x \succeq x$;
3. если $x \succeq y$ и $y \succeq z$, то $x \succeq z$.

Кроме того, выполняется условие

4. если $x \succeq y$ и $y \succeq x$, то $x_{\uparrow} = y_{\uparrow}$.

Доказательство легко получается из первой леммы данного раздела.

Обозначим $\operatorname{Lex}\max\limits_{z \in X} f(x)$ множество всех таких $x \in X$, что $f(x) \succeq f(y)$ для дорогого $y \in X$.

Лемма. Если множество X компактно, а отображение $f: X \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, то множество $\operatorname{Lex}\max\limits_{z \in X} f(z)$ не пусто и компактно.

Доказательство. Отображение $x \to (f^{(1)}(x), \ldots, f^{(n)}(x))$ непрерывно как суперпозиция непрерывных отображений. Тогда существует x, для которого отношение $(f^{(1)}(x), \ldots f^{(n)}(x)) \trianglerighteq (f^{(1)}(y), \ldots, f^{(n)}(y))$ выполняется для всех y. Очевидно, $x \in \operatorname{Lex}\max\limits_{z \in X} f(z)$. Множество $\operatorname{Lex}\max\limits_{z \in X} f(z)$ замкнуто как прообраз точки при непрерывном отображении $x \to (f^{(1)}(x), \ldots, f^{(n)}(x))$, а, следовательно, компактно.

Лемма. Если x и y принадлежат множеству $\operatorname{Lex}\max\limits_{z \in X} f(z)$, то $(f(x))_{\uparrow} = (f(y))_{\uparrow}$.

Лемма. Если $x \in \operatorname{Lex} \max\limits_{z \in X} f(x)$, то x – эффективная стратегия.

Доказательство. Достаточно заметить, что если x доминирует по Парето y, то f(x) □ f(y).

Теперь мы в состоянии провести простое доказательство следующей теоремы.

Теорема. В обобщенной игре Гермейера-Вателя существует ситуация равновесия по Нэшу.

Доказательство. Обозначим $g(u)=(g^{(1)}(u),\ldots,g^{(n)}(u))$... Как доказано выше, множество $\operatorname{Lex} \max\limits_{u \in U} g(u)$ не пусто. Покажем, что всякая ситуация $u \in \operatorname{Lex} \max\limits_{w \in U} g(w)$ является ситуацией равновесия.

Допустим противное. Тогда найдется игрок $i \in N$ и стратегия $v^i \in U^i$, для которых выполняется неравенство $g^i(u||v^i) > g^i(u)$. Возможны два случая.

1) $f^i(u^i) < F(u)$. Тогда $g^i(u) = f^i(u^i) < g^i(u||v^i) \leq F(u||v^i)$. Следовательно, для всех $j \neq i$, для которых $g^j(u) \leq g^i(u)$, выполняются условия $g^j(u) = f^j(u) \leq F(u||v^i)$, а значит $g^j(u||v^i) = g^j(u)$. Но тогда получается противоречие с условием $u \in \operatorname{Lex} \max\limits_{w \in U} g(w)$.

2) $f^i(u^i) \geq F(u)$. Тогда $g^i(u) = F(u)$ и по предположению $F(u||v^i) \geq g^i(u||v^i) > g^i(u) = F(u)$. Значит, для всех j выполняются неравенства $g^j(u||v^i) \geq g^j(u)$, что вновь противоречит условию $u \in \operatorname{Lex} \max\limits_{w \in U} g(w)$.

Полученные противоречия доказывают теорему.

Задачи.

1. Пусть в игре $\Gamma=\langle N,U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n\rangle$множества U^i компактны, а функции g^i непрерывны. Будет ли компактным множество ситуаций сильного равновесия?

2. Ослабим требования к игре Гермейера–Вателя, полагая, что функции F и f^i лишь неубывающие. Докажите, что и в такой игре существуют равновесия по Нэшу.

3. Будет ли верно аналогичное утверждение для ситуаций сильного равновесия?

4. Пусть функции F и g непрерывны на произведении компактов X и Y и $N(x)=\{y\in Y:\ g(x,y)\geq 0\}$. Докажите, что функция $f(x)=\min\limits_{y\in N(x)} F(x,y)$ полунепрерывна снизу на X.

5. Можно ли в условиях предыдущей задачи утверждать, что функция f непрерывна.

6. Пусть функции F и g непрерывны на произведении компактов X и Y и $N(x)=\{y\in Y:\ g(x,y)\geq 0\}$ и $M(x)=\{y\in Y:\ g(x,y)>0\}$. Докажите, что если для дорогого $x\in X$ замыкание множества M(x) совпадает с N(x), то функция $f(x)=\min\limits_{y\in N(x)} F(x,y)$ непрерывна снизу на X.

7. Докажите, что условие, сформулированное в лемме 8 является достаточным условием сильного равновесия.

8. Найти ситуации сильного равновесия в играх Гермейера-Вателя с одномерными множествами управлений и критериями, заданными условиями

А) $F = 1 + \sum x_i, f_i = b^i \sqrt{a_i - x_i}$

Б) $F = 1 + \sum x_i, f_i = b^i \left(a_i - x_i\right)^2$

В) $F = \ln\left(1 + \sum x_i,\right) f_i = \ln\left(1 + \frac{a_i - x_i}{b_i}\right)$

Г) $F = 1 + \sum x_i, f_i = \ln\left(1 + \frac{a_i - x_i}{b_i}\right)$ На компьютере

Литература

1. Гермейер Ю.Б., Ватель И.А. Игры с иерархическим вектором интересов // Техническая кибернетика. 1974. № 3. С. 54-69.

2. Ватель И.А. Ядро в игре многих лиц с личными и общественными критериями // Автоматика и телемеханика. 1980. №1.

3. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. Г.: Наука. 1981.

4. Моисеев Н.Н, Александрова В.В., Тарко А.М. Человек и Биосфера. Г.: Наука. 1985.

5. Кукушкин Н.С., Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р., Моисеев Н.Н. Устоичивые компромиссы в играх со структурированными функциями выигрыша // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 25. 1985. № 12. С.1761-1776.

Лекция. Информационные расширения

Во многих конфликтных ситуациях большое, если не решающее значение имеет информация в действиях противников, которой располагает тот или иной игрок.

Согласно однои из теорий даже происхождение человека связано с этим обстоятельством. Согласно этой теории, все началось с того, что из-за изменений климата тропические леса постепенно превратились в лесостепь. В результате этого человекообразным обезьянам, населявшим эти районы, стало «выгодно» перемещаться на двух ногах: скорость перемещения вот этого, конечно, падала, но зато количество полезной информации оказывалось гораздо больше. Второй фактор перевесил первый. В результате руки освободились для труда, а труд создал из обезьяны человека.

Еще один пример. Во времена Наполеона полки щеголяли яркими разноцветными мундирами, поскольку полководцам было важно во время боя знать, где находится и или иная их часть. По мэр совершенствования стрелкового оружия, увеличения масштабов боевых действий и совершенствования средств связи появилась необходимость и возможность скрывать эту информацию вот противника. И войска переоделись в камуфляжную форму.

Если игрок принимает свое решение, имея информацию в выборах противников, значит, вон принимает решение позже их.

В то же время, нормальная форма игры[16] предполагает, что решения принимаются одновременно. Чтобы найти пути выхода из этой коллизии рассмотрим простейший пример.

Обратимся к игре «Орел-решка», задаваемой матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Предположим, что первый игрок, принимая свое решение, уже знает выбор противника. Несложный анализ показывает, что его возможности при этом значительно расширяются. В данном случае нетрудно заранее, еще не зная решения второго игрока, предложить оптимальный план действия первого игрока. По сути это означает, что мы можем выбрать такой план одновременно со вторым игроком.

Список подобных планов в данном случае не слишком велик:

1. всегда выбирать «орел»;
2. всегда выбирать решку;
3. принимать то же решение, что и противник;
4. принимать решение противоположное, принятому противнику.

Из этих четырех возможностей нам и предстоит сделать выбор. Но для этого нужно оценить результаты такого выбора. Что произойдет, например, если первый игрок выберет свой план номер 3, а второй игрок выберет «орел». Тогда первый игрок, в соответствии со своим планом и с выбором противника, должен будет сказать «орел», и образуется ситуация

[16] а это единственный класс моделей который нами уже изучен

(«орел»,«орел») в исходной игре. Выигрыш первого игрока в этой ситуации составит -1. Аналогичные рассуждения проходят и во вторых случаях.

Таким образом, приходим к новои игре, задаваемой матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Обратим внимание на то, что она содержит подматрицу, равную матрице исходной игры.

Эти рассуждения приводят к следующему способа моделирования процесса принятия решений в случае наличия информационных обменов. Для каждого из игроков должен быть задан список планов действий в зависимости вот получаемой информации. Далее, коль скоро каждый из игроков зафиксировал такой план, должен быть указан способ, позволяющий определить, какие же «физические» управления будут выбраны игроками в соответствии с этими планами. Наконец, выигрыши всех игроков должны зависеть только вот этих «физических» управлений. Разумеется, никто не может запретить какому-то игроку вовсе отказаться вот использования информации и выбирать во всех случаях одно и то же «физическое» управление. Эти соображения и нашли отражение в следующем определении.

Определение. Говорят, что игра ${}_*\Gamma=\langle N,{}_*U^1,\ldots,{}_*U^n,{}_*g^1,\ldots,{}_*g^n\rangle$является к.вазиинформационным расширением игры $\Gamma=\langle N,U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n\rangle$,если задан набор

$<\pi,c^1,\dots,c^n>$функций $\pi:{}_*U^1\times\dots\times{}_*U^n\to U^1\times\dots\times U^n$и $c^i:U^i\to{}_*U^i$, удовлетворяющий следующим двум аксиомам:

а) ${}_*g^i({}_*u^1,\dots,{}_*u^n)=g^i(\pi({}_*u^1,\dots,{}_*u^n))$ для дорогого $i\in N$;

б) $\pi^i({}_*u|c^i(u^i))=u^i$ для всех $i\in N$, ${}_*u\in{}_*U^1\times\dots\times{}_*U^n$, $u^i\in U^i$ (здесь π^i обозначает композицию отображения π с проекцией декартова произведения $U^1\times\dots\times U^n$на сомножитель U^i.)

В дальнейшем элементы множества U^i будем называть управлениями i-го игрока, элементы множества ${}_*U^i$ – его стратегиями, элементы множества $U= U^1\times\dots\times U^n$–исходом игры ${}_*\Gamma$, а элементы множества ${}_*U={}_*U^1\times\dots\times{}_*U^n$–ситуацией в этой игре.

- Аксиоматический метод и принятие решений

Определение. Квазиинформационное расширение, в котором стратегии каждого игрока проинтерпретированы, как способы реагировать на определенную информацию в поведении партнеров, называется информационным расширением.

- Обсуждение: само информационное расширение может быть точно не известным. Пример: разведчик

Примеры

Введем обозначения. Если X и Y – два множества, то $\Phi(X,Y)$ будет обозначать множество всех функции $\varphi:X\to Y$. Если $\varphi:X\to Y$, то $\varphi(X)=\{y\in Y: y=\varphi(x), x\in X\}$.

Определение. Пусть $i\in N$. Метарасширением Ховарда ранга 1 называется игра ${}_i\Gamma=<N,{}_i{}^1,\dots,{}_iU^n,{}_ig^1,\dots,{}_ig^n>$с отображениями $<\pi,c^1,\dots,c^n>$,определенные следующим образом.

Множества ${}_iU^j=U^i$ при $j\neq i$ и ${}_iU^i=\Phi\left(\prod_{j\neq i}U^j,U^i\right)$, отображение π определено равенством $\pi({}_iu^1,\dots,{}_iu^n)=({}_iu^1,\dots,{}_iu^{i-1},{}_iu^i({}_iu^1,\dots,{}_iu^{i-1},{}_iu^{i+1},\dots,{}_iu^n),{}_iu^{i+1},\dots,{}_iu^n)$, $c^j:U^j\rightarrow{}_iU^j$ есть тождественные отображения при $j\neq i$, $c^i:u^i\rightarrow{}_iU^i$ ставит в соответствие элементу $u^i\in U^i$ функцию ${}_iu^i\in\Phi\left(\prod_{j\neq i}U^j,U^i\right)$ тождественно равную u^i, а функции ${}_ig^1,\dots,{}_ig^n$ определены условиями ${}_ig^i({}_iu^1,\dots,{}_iu^n)=g^i(\pi({}_iu^1,\dots,{}_iu^n))$...

Непосредственно проверяется, что ${}_i\Gamma$ – квазиинформационное расширение игры Г. Более того, можно считать, что все игроки, кроме i-го выбирают свои управления одновременно, не имея информации в действиях партнеров, а i-ый игрок делает свой выбор после их, имея полную информацию в принятых остальными игроками решениях. Это дает необходимую интерпретацию и позволяет говорит, что метарасширение ранга 1 является информационным расширением.

Пример. Пусть $\Gamma=\langle\{1,2\},U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$ – игра двух лиц, ${}_1\Gamma=\langle\{1,2\},{}_1U^1,{}_1U^2,{}_1g^1,{}_1g^2\rangle$ – ее метарасширение ранга 1. Рассмотрим игру ${}_*\Gamma=\langle\{1,2\},{}_*U^1,{}_*U^2,{}_*g^1,{}_*g^2\rangle$, в которой ${}_*U^2={}_1U^2$, ${}_*U^1$ есть подмножество множества ${}_*U^1$, содержащее $c^1(U^1)$, а функции ${}_*g^1$ и ${}_*g^2$ являются ограничениями функций ${}_1g^1$ и ${}_1g^2$ на соответствующее подмножество.

Игра ${}_*\Gamma$ является квазиинформационным расширением игры Г. В качестве c^1 и c^2 можно взять то же функции, что и в определении метарасширения, а в качестве π – ограничение проекции для метарасширения на соответствующее подмножество.

Пожалуй, можно утверждать, что такое квазиинформационное расширение, вообще говоря, не является информационным. В самом деле, пусть ${}_*U^1$ содержит кроме элементов $c^1(U^1)$ еще только одну функцию ${}_1u_1^1(u^2)=\begin{cases} u_0^1, \text{ если } u^2=u_0^2, \\ u_1^1 \text{ в противном случае,}\end{cases}$ где u_0^1 и u_1^1 – произвольные несовпадающие элементы множества U^1, а u_0^2 – элемент множества U^2. Наличие этой функции позволяет говорит, что, принимая свое решение, первый игрок знает, выбрал ли его партнер управление u_0^2 или нет. А в таком случае вон может принять другое решение, например, выбрав функцию ${}_1u_2^1(u^2)=\begin{cases} u_1^1, \text{ если } u^2=u_0^2, \\ u_0^1 \text{ в противном случае,}\end{cases}$ но это запрещается «правилами игры».

Пример. Пусть заданная игра ${}_*\Gamma=\langle N,{}_*U^1,\ldots,{}_*U^n,{}_*g^1,\ldots,{}_*g^n\rangle$... Упорядочим игроков каким-то образом, например, по возрастанию номеров. Положим ${}_*U^1=U^1$ и ${}_*U^i=\Phi\left(\prod_{j=1}^{i-1}U^j,U^i\right)$ для $i=2,\ldots,n$... Проекцию π определим покомпонентно, положил $\pi^1({}_*u^1,\ldots,u^n)={}_*u^1$, и $\pi^i({}_*u^1,\ldots,u^n)={}_*u^i(\pi^1({}_*u^1,\ldots,u^n),\ldots,\ \pi^{i-1}({}_*u^1,\ldots,u^n))$ для $i=2,\ldots,n$... Пусть отображение c^1 тождественное, а отображение c^i ставит в соответствие элементу u^i функцию из

$\prod_{j=1}^{i-1} U^j$ в U^i, тождественно равную u^i (для всех $i=2,\ldots,n$)... Функции выигрыша определяются условиями $_*g^i(_*u^1,\ldots,_*u^n)=g^i(\pi(_*u^1,\ldots,_*u^n))$ для дорогого $i\in N$. Непосредственно проверяется, что таким образом определено квазиинформационное расширение.

Оно описывает следующую ситуацию. Игроки принимают свои решения по очереди, причем каждый из игроков, делая свой выбор, уже знает, какие управления выбрали все игроки, сделавшие свой выбор к него.

Пример (игра с блефом). Пусть $\Gamma=<\{1,2\},U^1,U^2,g^1,g^2>$ – игра двух лиц. Рассмотрим ее информационное расширение $_*\Gamma=<\{1,2\},_*U^1,_*U^2,_*g^1,_*g^2>$, определенное следующим образом. Положим $_*U^2=U^2\times U^2$, $_*U^1=\Phi(U^2, U^1)$, отображение c^1 ставит в соответствие элементу u^1 из U^1 функцию из U^2 в U^1, тождественно равную u^1, отображение c^2 ставит в соответствие элементу u^2 пара (u^2,u^2) , а проекция π определяется условием $\pi(_*u^1,(v,w))=(_*u^1(w),v)$. Функции выигрыша определены условиями $_*g^i(_*u^1,_*u^2)=g^i(\pi(_*u^1,_*u^2))$.

Непосредственно проверяется, что таким образом действительно определено квазиинформационное расширение. Его интерпретация состоит в следующем. Второй игрок сообщает партнеру в своем выборе. Однако его сообщение не обязано быть истинным. Первый игрок, не имея другой информации, выбирает свое управление в зависимости вот полученного сообщения.

Пример. Пусть $\Gamma=\langle\{1,2\},U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$ – игра двух лиц. Рассмотрим ее информационное расширение $_*\Gamma=\langle\{1,2\},{}_*U^1,{}_*U^2,{}_*g^1,{}_*g^2\rangle$, определенное следующим образом. Положим $_*U^2=U^2\times\{0,1\}$, $_*U^1=\Phi(U^2,U^1)\times U^1$. Пусть оператор d ставит в соответствие элементу u^1 из U^1 функцию из $\Phi(U^2,U^1)$, тождественно равную u^1. Определим вложение c^1, положил $c^1(u^1)=(d(u^1),u^1)$. Вложение c^2 определим условием $c^2(u^2)=(u^2,0)$, Проекцию π зададим условием $\pi((\tilde{u},u),(v,l))=\begin{cases}(\tilde{u}(v),v), \text{ если } l=1,\\ (u,v), \text{ если } l=0.\end{cases}$

Функции выигрыша определим условиями $_*g^i({}_*u^1,{}_*u^2)=g^i(\pi({}_*u^1,{}_*u^2))$.

Непосредственно проверяется, что таким образом действительно определено квазиинформационное расширение. Приведем его интерпретацию. Второй игрок, выбирает свое управление и решает, сообщить ли в сделанном выборе партнеру. Если вон решает сделать сообщение, то оно должно быть истинным. Первый игрок, если вон получает сообщение, реагирует на него, а в противном случае принимает решение самостоятельно.

Пример. Пусть заданы игра $\Gamma=\langle N,U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n\rangle$,множество W и отображение $P:\prod_{j\neq i}U^j\to W$. Определим квазиинформационное расширение $_*\Gamma=\langle N,{}_*U^1,\ldots,{}_*U^n,{}_*g^1,\ldots,{}_*g^n\rangle$следующим образом. Положим $_*U^j=U^j$ при $j\neq i$ и $_*U^i=\Phi(W,U^i)$. Пусть c^j есть тождественные отображения U^j и U^j при $j\neq i$, и отображение c^i ставит в соответствие элементу u^i из U^i функцию из $\Phi(W,U^i)$, тождественно равную u^i. Проекцию π определим условием $\pi({}_*u^1,\ldots,{}_*u^n)=({}_*u^1,\ldots,{}_*u^{i-1},{}_*u^i(P({}_*u^1,\ldots,{}_*u^{i-1},{}_*u^{i+1},\ldots,{}_*u^n)),{}_*u^{i+1},\ldots,{}_*u^n)$... Функции выигрыша определим условием ${}_*g^i({}_*u^1,\ldots,{}_*u^n)=g^i(\pi({}_*u^1,\ldots,{}_*u^n))$ для дорогого $i\in N$.

Таким образом, определено информационное расширение, в котором все игроки, кроме i-го делают выбор, не имея информации в решениях партнеров. Игрок i принимает свое решение, имея агрегированную (неполную) информацию в выборах остальных игроков. Отображение P задает способ агрегирование, а W есть множество сообщений, которые может в принципе получить i-ый игрок.

Пример. Пусть $\Gamma=<\{1,2\},U^1,U^2,g^1,g^2>$ – игра двух лиц. Рассмотрим ее квазиинформационное расширение ${}_*\Gamma=<\{1,2\},{}_*U^1,{}_*U^2,{}_*g^1,{}_*g^2>$, определенное следующим образом. Пусть ${}_*U^2$ – семейство всех непустых подмножеств множества U^2, а ${}_*U^1$ – множество всех функций из ${}_*U^2$ в $U^1\times U^2$, удовлетворяющих условию: если ${}_*u^1(W)=(u^1,u^2)$, то $u^2\in W$. Проекцию π определим условием $\pi({}_*u^1,{}_*u^2)={}_*u^1({}_*u^2)$. Пусть отображение c^2 ставит в соответствие элементу u^2 множество $\{u^2\}$, Зафиксируем функцию $\iota:{}_*U^2\to U^2$, удовлетворяющую условию $\iota(W)\in W$ для всех $W\in{}_*U^2$. Определим отображение c^1, положил $c^1(u^1)=(\tilde{u}^1,\iota)$, где $\tilde{u}^1$ – функция ${}_*U^2$ в U^1, тождественно равная u^1. Функции выигрыша определим условиями ${}_*g^i({}_*u^1,{}_*u^2)=g^i(\pi({}_*u^1,{}_*u^2))$.

Содержательный смысл приведенных конструкций следующий. Второй игрок выбирает множество $W \subset U^2$ и предоставляет право выбора из него своему партнеру. Первый игрок, зная решение второго, выбирает свое управление u^1 и управление второго игрока из указанного ему подмножества. По-видимому, построенное расширение нельзя считать информационным, поскольку кроме обмена информацией здесь происходит перераспределение полномочий между игроками. Тем не менее, данное расширение описывает интересную в содержательном плане ситуацию.

В определении данного квазиинформационного расширения присутствует произвольно выбранная функция ι. Меняя эту функцию, можно построить много различных игр. Непосредственно проверяется, что из любых двух построенных таким образом игр одна является квазиинформационным расширением другой. В этом смысле все такие расширения эквивалентны. Из дальнейшего будет видно, что наиболее важные свойства эквивалентных игр одинаковы.

- Шумная дуэль - квазиинформационное расширение бесшумной дуэли?
- Теория Галуа?

Простейшие свойства

Лемма. Любая игра Г является своим квазиинформационным расширением.

Доказательство. В качестве отображений π и c^i годятся тождественные отображения. Аксиомы квазиинформационного расширения проверяются без труда.

Лемма. Если отображения $<\pi,c^1,\ldots,c^n>$задают квазиинформационное расширение $_*\Gamma$ игры Γ, а отображения $\left\langle \pi_*, c_*^1,\ldots,c_*^n \right\rangle$ задают квазиинформационное расширение $_\#\Gamma$ игры $_*\Gamma$, то $_\#\Gamma$ – квазиинформационное расширение Γ.

Доказательство. В качестве соответствующих функций годится набор $\left\langle \pi\circ\pi_*, c_*^1\circ c^1,\ldots c_*^n\circ c^n \right\rangle$. Необходимые свойства проверяются непосредственно.

Определение. Игра Γ_* называется метарасширением Ховарда игры Γ ранга k, если существуют такие игры $\Gamma_0,\ldots,\Gamma_k$ и номера $i_t\in N$, что $\Gamma_0=\Gamma$, $\Gamma_k=\Gamma_*$, и для дорогого t=1,…kигра Γ_t является метарасширением игры Γ_{t-1} ранга 1, то есть $\Gamma_t = {}_{i_t}\Gamma_{t-1}$.

В силу предыдущей леммы метарасширение Ховарда дорогого ранга является квазиинформационным расширением. Ассоциативность композиции функций позволяет обозначать метарасширение игры Γ ранга k символом ${}_{i_k i_{k-1}\ldots i_2 i_1}\Gamma$.

Антагонистические игры

Лемма. Если $\Gamma=<\{1,2\},U^1,U^2,g,-g>$ – антагонистическая игра, а отображения $<\pi,c^1,c^2>$ задают ее квазиинформационное расширение $_*\Gamma=<\{1,2\},{}_*U^1,{}_*U^2,{}_*g,-{}_*g>$, то $\sup\limits_{_*u^1\in{}_*U^1}\inf\limits_{_*u^2\in{}_*U^2}{}_*g({}_*u^1,{}_*u^2)\ge\sup\limits_{u^1\in U^1}\inf\limits_{u^2\in U^2}g(u^1,u)$ и

$\inf\limits_{_*u^2\in{}_*U^2}\sup\limits_{_*u^1\in{}_*U^1}{}_*g({}_*u^1,{}_*u^2)\le\inf\limits_{u^2\in U^2}\sup\limits_{u^1\in U^1}g(u^1,u)$.

Доказательство. Докажем первое неравенство. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и любое управление $u^1 \in U^1$. Выберем ${}_*u^2 \in {}_*U^2$ так, что ${}_*g(c^1(u^1), {}_*u^2) \leq \inf\limits_{{}_*v^2 \in {}_*U^2} {}_*g(c^1(u^1), {}_*v^2) + \varepsilon$. Пусть $\pi(c^1(u^1), {}_*u^2) = (u^1, u^2)$. Тогда

$$ {}_*g(c^1(u^1), c^2(u^2)) = g(u^1, u^2) = {}_*g(c^1(u^1), {}_*u^2)) \leq \inf_{{}_*v^2 \in {}_*U^2} {}_*g(c^1(u^1), {}_*v^2)) + \varepsilon $$

и тем более $\inf\limits_{u^2 \in U^2} {}_*g(c^1(u^1), c^2(u^2)) \leq \inf\limits_{{}_*v^2 \in {}_*U^2} {}_*g(c^1(u^1), {}_*v^2)) + \varepsilon$. В силу произвольности ε отсюда следует, что $\inf\limits_{u^2 \in U^2} {}_*g(c^1(u^1), c^2(u^2)) \leq \inf\limits_{{}_*v^2 \in {}_*U^2} {}_*g(c^1(u^1), {}_*v^2))$. Но $c^2(U^2) \subset {}_*U^2$, поэтому $\inf\limits_{u^2 \in U^2} {}_*g(c^1(u^1), c^2(u^2)) = \inf\limits_{{}_*v^2 \in c^2(U^2)} {}_*g(c^1(u^1), {}_*v^2) \geq \inf\limits_{{}_*v^2 \in {}_*U^2} {}_*g(c^1(u^1), {}_*v^2)$, то есть на самом деле $\inf\limits_{u^2 \in U^2} {}_*g(c^1(u^1), c^2(u^2)) = \inf\limits_{{}_*v^2 \in {}_*U^2} {}_*g(c^1(u^1), {}_*v^2))$ для всех $u^1 \in U^1$. Следовательно,

$$ \sup_{u^1 \in U^1} \inf_{u^2 \in U^2} g(u^1, u^2) = \sup_{u^1 \in U^1} \inf_{u^2 \in U^2} {}_*g(c^1(u^1), c^2(u^2)) = \sup_{u^1 \in U^1} \inf_{{}_*v^2 \in {}_*U^2} {}_*g(c^1(u^1), {}_*v^2)) $$

Но

$$ \sup_{u^1 \in U^1} \inf_{{}_*v^2 \in {}_*U^2} {}_*g(c^1(u^1), {}_*v^2)) = \sup_{{}_*u^1 \in c^1(U^1)} \inf_{{}_*v^2 \in {}_*U^2} {}_*g({}_*u^1, {}_*v^2)) \leq \sup_{{}_*u^1 \in {}_*U^1} \inf_{{}_*v^2 \in {}_*U^2} {}_*g({}_*u^1, {}_*v^2)) $$

, так как $c^1(U^1) \subset {}_*U^1$, откуда и следует нужное неравенство.

Второе неравенство доказывается аналогично.

Следствие. Если в игре Γ существует седловая точка, то и в любом ее квазиинформационном расширении существует седловая точка.

Лемма. Пусть $\Gamma = \langle \{1,2\}, U^1, U^2, g, -g \rangle$ – антагонистическая игра, в которой множества U^1 и U^2 компактны, а функция g непрерывна, и пусть ${}_1\Gamma = \langle \{1,2\}, {}_1U^1, {}_1U^2, {}_1g, -{}_1g \rangle$ – ее метарасширение Ховарда ранга 1. Тогда

$$\max_{{}_1u^1\in{}_1U^1}\ \inf_{{}_1u^2\in{}_1U^2}\ {}_1g({}_1u^1,{}_1u^2)=\min_{{}_1u^2\in{}_1U^2}\ \sup_{{}_1u^1\in{}_1U^1}\ {}_1g({}_1u^1,{}_1u^2)=\min_{u^2\in U^2}\max_{u^1\in U^1} g(u^1,u^2)\,.$$

Доказательство. Пусть функция ${}_1u_0^1\in{}_1U^1$ определяется условием $g({}_1u_0^1(v),v)=\max\limits_{w\in U^1} g(w,v)$ для дорогого $v\in U^2$, а элемент ${}_1u_0^2\in{}_1U^2=U^2$ удовлетворяет равенству $\max\limits_{w\in U^1} g(w,{}_1u_0^2)=\min\limits_{v\in U^2}\max\limits_{w\in U^1} g(w,v)$. Тогда

$${}_1g({}_1u_0^1,{}_1u_0^2)=g({}_1u_0^1({}_1u_0^2),{}_1u_0^2)=\max_{w\in U^1} g(w,{}_1u_0^2)=\min_{v\in U^2}\max_{w\in U^1} g(w,v)\,.$$

В силу определения функции ${}_1u_0^1$, для дорогого ${}_1u^2\in{}_1U^2$ имеем

$${}_1g({}_1u_0^1,{}_1u^2)=g({}_1u_0^1({}_1u^2),{}_1u^2)=\max_{w\in U^1} g(w,{}_1u_0^2)\ge\min_{v\in U^2}\max_{w\in U^1} g(w,v)={}_1g({}_1u_0^1,{}_1u_0^2)$$

.

А по определению элемента ${}_1u_0^2$, для любой функции ${}_1u^1\in{}_1U^1$ выполняются условия

$${}_1g({}_1u^1,{}_1u_0^2)=g({}_1u^1({}_1u_0^2),{}_1u_0^2)\le\max_{w\in U^1} g(w,{}_1u_0^2)=\min_{v\in U^2}\max_{w\in U^1} g(w,v)={}_1g({}_1u_0^1,{}_1u_0^2)$$

.

Таким образом, для любых ${}_1u^1\in{}_1U^1$ и ${}_1u^2\in{}_1U^2$ справедливы неравенства

$${}_1g({}_1u^1,{}_1u_0^2)\le{}_1g({}_1u_0^1,{}_1u_0^2)\le{}_1g({}_1u_0^1,{}_1u^2)\,,$$

это есть $({}_1u_0^1,{}_1u_0^2)$ – седловая точка в игре ${}_1\Gamma$ и цена этой игры равна $\min\limits_{u^2\in U^2}\max\limits_{u^1\in U^1} g(u^1,u^2)$.

Пример. Рассмотрим игру двух лиц Γ=<{1,2},U^1,U^2,g,–g>, в которой $U^1=U^2=[-1,1]$ а $g(u^1,u^2)=(u^1-u^2)^2$. Непосредственным вычислением проверяется, что $\min\limits_{u^2\in U^2}\max\limits_{u^1\in U^1} g(u^1,u^2)=1$ и $\max\limits_{u^1\in U^1}\min\limits_{u^2\in U^2} g(u^1,u^2)=0$.

В ее метарасширении ${}_1\Gamma$ существует седловая точка $({}_1u_0^1, {}_1u_0^2)$, определяемая условиями ${}_1u_0^2 = 0$ и ${}_1u_0^1(v) = \begin{cases} 1, \text{ если } v \le 0, \\ -1, \text{ если } v > 0. \end{cases}$

Цена игры ${}_1\Gamma$ равна 1.

Рассмотрим теперь квазиинформационное расширение ${}_*\Gamma$=<{1,2},${}_*U^1$,${}_*U^2$,${}_*g$,$-{}_*g$> игры Г, определенное следующим образом. ${}_*U^2=U^2$, ${}_*U^1$ есть множество всех непрерывных функций из U^2 в U^1, проекция π определяется условием $\pi({}_*u^1,{}_*u^2)=({}_*u^1({}_*u^2),{}_*u^2)$, c^2 – тождественное отображение, а отображение c^1 ставит в соответствие элементу u^1 функцию из U^2 в U^1, тожественно равную u^1. Функции выигрыша определяются аксиомой квазиинформационного расширения.

Для любой стратегии из ${}_*U^1$ в силу теоремы в промежуточном значении (или теоремы Брауэра), найдется ${}_*u^2$, для которого ${}_*u^1({}_*u^2)={}_*u^2$. Такой выбор второго игрока обеспечивает ему выигрыш равный 0. Поэтому $\sup\limits_{{}_*u^1 \in {}_*U^1} \inf\limits_{{}_*u^2 \in {}_*U^2} {}_*g({}_*u^1, {}_*u^2) = 0 < 1 = \inf\limits_{{}_*u^2 \in {}_*U^2} \sup\limits_{{}_*u^1 \in {}_*U^1} {}_*g({}_*u^1, {}_*u^2)$. Это есть в этом расширении седловой точки не существует.

Не известно общих методов вычисления минимаксов для квазиинформационных расширений с непрерывными функциям-стратегиями. Справедливости совета следует отметить, что такого рода квазиинформационные расширения не имеют ясной содержательной интерпретации, а потому не слишком интересны.

Равновесия по Нэшу

Лемма. Пусть ${}_*u_0 = ({}_*u_0^1, ..., {}_*u_0^n)$ – ситуация равновесия в квазиинформационном расширении ${}_*\Gamma$=<N,${}_*U^1$,…,${}_*U^n$,${}_*g^1$,…,${}_*g^n$>игры Γ=<N,U^1,…,U^n,g^1,…,g^n>... Тогда для дорогого i=1,…,nсправедливы неравенства ${}_*g^i({}_*u_0) \ge \sup_{v^i \in U^i} \inf_{u \in U} g^i(u \| v^i)$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда число $\varepsilon = \sup_{v^i \in U^i} \inf_{u \in U} g^i(u \| v^i) - {}_*g^i({}_*u_0)$ будет положительным. Выберем w^i так, чтобы $\inf_{u \in U} g^i(u \| w^i) > \sup_{v^i \in U^i} \inf_{u \in U} g^i(u \| v^i) - \varepsilon$ и рассмотрим выигрыш i-го игрока в ситуации $({}_*u_0 \| c^i(w^i))$. Пусть $\pi({}_*u_0 \| c^i(w^i)) = (u^1, …, u^{i-1}, w^i, u^{i+1}, …, u^n)$ (проекция имеет именно такой вид в силу второй аксиомы из определения квазиинформационного расширения). Тогда

$$
\begin{aligned}
{}_*g^i({}_*u_0 \| w^i) = {}_*g^i(\pi({}_*u_0 \| w^i)) = g^i(u^1, ..., u^{i-1}, w^i, u^{i+1}, ..., u^n) = g^i(u \| w^i) \ge \inf_{u \in U} g^i(u \| w^i) > \\
> \sup_{v^i \in U^i} \inf_{u \in U} g^i(u \| w^i) - \varepsilon = {}_*g^i({}_*u_0),
\end{aligned}
$$

что противоречит поэтому, что ${}_*u_0$ – ситуация равновесия.

Обозначим NE(Γ) множество всех ситуаций равновесия в игре Γ.

Лемма. Пусть ${}_*\Gamma$=<N,${}_*U^1$,…,${}_*U^n$,${}_*g^1$,…,${}_*g^n$>– квазиинформационное расширение игры Γ=<N,U^1,…,U^n,g^1,…,g^n>... Тогда NE(Γ)⊂π(NE(${}_*\Gamma$)).

Доказательство. Пусть u_0 – ситуация равновесия в игре Γ, ${}_*u_0 = (c^1(u^1), …, c^n(u^n))$... В силу определения квазиинформационного расширения $\pi({}_*u_0)= u_0$, поэтому достаточно доказать, что ${}_*u_0$ – ситуация равновесия в игре ${}_*Г$.

Докажем это. Пусть ${}_*v^i$ – любая стратегия i-го игрока в игре ${}_*Г$. В силу второй аксиомы квазиинформационного расширения, проекция $\pi({}_*u_0 \| {}_*v^i)$ имеет вид $(u_0 \| v^i)$, где v^i – какая то стратегия i-го игрока в игре Г. Тогда ${}_*g^i({}_*u_0)=g^i(\pi({}_*u_0))=g^i(u_0)\geq g^i(u_0 \| v^i)=g^i(\pi({}_*u_0 \| {}_*v^i))={}_*g^i({}_*u_0 \| {}_*v^i)$ (неравенство выполняется потому, что u_0 – ситуация равновесия). Поскольку игрок i и его стратегия ${}_*v^i$ выбирались произвольно, отсюда следует, что ${}_*u_0$ – ситуация равновесия в игре ${}_*Г$. Лемма доказанная.

Определение. Пусть даны игра Г и ее квазиинформационное расширение ${}_*Г$. Будем говорит, что исход u игры Г является равновесным в ее расширении ${}_*Г$, если существует такая ситуация равновесия ${}_*u$ в игре ${}_*Г$, что $\pi({}_*u)=u$.

Первая лемма данного раздела по существу утверждает, что всякий равновесный исход игры Г является индивидуально рациональным. Верно и обратное.

Лемма. Если u_0 – индивидуально рациональный исход в игре Г, то существует такое квазиинформационное расширение ${}_*Г$ этой игры, в котором исход u_0 будет равновесным.

Доказательство. Построим соответствующее квазиинформационное расширение. Определим функции $u_j^i : U^j \to U^i$ условиями $g^j(u_j^1(u^j),\ldots,u_j^{j-1}(u^j),u^j,u_j^{j+1}(u^j),\ldots,u_j^n(u^j)) = \min_{v\in U} g^j(v \| u^j)$. Для каждого

$i=1,\dots,n$выберем $\omega^i\notin U^i$ и положим ${}_*U^i=U^i\cup\{\omega^i\}$. Пусть c^i – каноническое вложение U^i в ${}_*U^i$. Определим проекцию π следующим образом. Положим $\pi(\omega^1,\dots,\omega^n)=u_0$, $\pi(\omega^1,...,\omega^{j-1},u^j,\omega^{j+1},...,\omega^n)=(u_j^1(u^j),...,u_j^{j-1}(u^j),u^j,u_j^{j+1}(u^j),...,u_j^n(u^j))$ для $u^j\neq\omega^j$. Для остальных ситуаций определим проекцию π произвольно, лишь бы выполнялась вторая аксиома из определения квазиинформационного расширения. Функции выигрыша в игре ${}_*\Gamma$ определим равенствами ${}_*g^i({}_*u^1,\dots,{}_*u^n)=g^i(\pi({}_*u^1,\dots,{}_*u^n))$...

Покажем, что ситуация $(\omega^1,\dots,\omega^n)$ является ситуацией равновесия в игре ${}_*\Gamma$. Допустим, j-ый игрок отклонится вот этой ситуации, выбрав стратегию $u^j\neq\omega^j$. Тогда его выигрыш составит

$$\begin{aligned}{}_*g^j(\omega^1,...,\omega^{j-1},u^j,\omega^{j+1},...,\omega^n)&=g^j(\pi(\omega^1,...,\omega^{j-1},u^j,\omega^{j+1},...,\omega^n))=\\&=g^j(u_j^1(u^j),...,u_j^{j-1}(u^j),u^j,u_j^{j+1}(u^j),...,u_j^n(u^j))=\\&=\min_{v\in U}g^j(v\|u^j)\le\max_{u^j\in U^j}\min_{v\in U}g^j(v\|u^j)\le g^j(u_0)={}_*g^j(\omega^1,...,\omega^n),\end{aligned}$$

это есть вон только теряет при отклонении. Так как игрок и его стратегия выбирались произвольно, это и означает, что ситуация $(\omega^1,\dots,\omega^n)$ является ситуацией равновесия. Лемма доказанная.

Заметим, что построенное квазиинформационное расширение не является информационным.

Слегка изменяя ту же идею можно построить такое квазиинформационное расширение произвольной игры, в котором стразу все индивидуально рациональные исходы будут равновесными.

Равновесия в метарасширениях

Теорема. Если в игре двух лиц Г=<{1,2},U^1,U^2,g^1,g^2> множества управлений всех игроков компактны, а функции выигрыша непрерывны, то в ее метарасширении ${}_1\Gamma$ ранга 1 существует ситуация равновесия по Нэшу.

Доказательство. Пусть функция ${}_1u_a^1 \in \Phi(U^2, U^1)$ определяется условием $g^1({}_1u_a^1(v), v) = \max_{u \in U^1} g^1(u, v)$ для дорогого $v \in U^2$. Рассмотрим множество $E = \left\{(u^1, u^2) \in U^1 \times U^2 : g^1(u^1, u^2) = \max_{v^1 \in U^1} g^1(v^1, u^2),\ u^2 \in U^2\right\}$. Это множество замкнуто, так как задается уравнением, в котором левая и правая части суть непрерывные функции. А так как оно принадлежит компактному множеству $U^1 \times U^2$, оно и компактно. Значит, существует такой исход $\left(u_0^1, u_0^2\right)$, что $g^2(u_0^2, u_0^2) = \max_{(u^1, u^2) \in E} g^2(u^1, u^2)$. Определим функцию ${}_1u_0^1 \in \Phi(U^2, U^1)$ условием

$$
{}_1u_0^1(u^2) = \begin{cases} u_0^1, \text{ если } u^2 = u_0^2, \\ {}_1u_a^1, \text{ если } u^2 \neq u_0^2. \end{cases}
$$

Ситуация $\left({}_1u_0^1, u_0^2\right)$ является ситуацией равновесия по Нэшу в игре ${}_1\Gamma$. В самом деле, по определению функции ${}_1u_0^1$ выполняется условие ${}_1g^1({}_1u_0^1, u_0^2) = g^1({}_1u_a^1(u_0^2), u_0^2) = g^1(u_0^1, u_0^2) = \max_{u \in U^1} g^1(u, u_0^2)$, так как $\left(u_0^1, u_0^2\right)$ принадлежит множеству E. Значит, для любой стратегии ${}_1u^1$ выполняется неравенство ${}_1g^1({}_1u^1, u_0^2) = g^1({}_1u^1(u_0^2), u_0^2) \le \max_{u^1 \in U^1} g^1(u^1, u_0^2) = {}_1g^1({}_1u_0^1, u_0^2)$. С другой стороны, функция выбрана так, что $({}_0u_0^1(u^2), u^2) \in E$ для дорогого

$u^2 \in U^2$, поэтому ${}_1g^2({}_1u_0^1, u^2) = g^2({}_1u_0^1(u^2), u^2) \le \max\limits_{(u^1,u^2)\in E} g^2(u^1,u^2) = g^2(u_0^1,u_0^2) = {}_1g^2({}_1u_0^1,u_0^2)$, что и требовалось доказать.

Теорема. Пусть в игре двух лиц $\Gamma=<\{1,2\},U^1,U^2,g^1,g^2>$ множества управлений всех игроков компактны, а функции выигрыша непрерывны. Исход $\left(u_0^1,u_0^2\right)$ является равновесным в метарасширении ${}_1\Gamma$ этой игры, тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия: $\max\limits_{u^2\in U^2}\min\limits_{u^1\in U^1} g^2(u^1,u^1) \le g^2(u_0^1,u_0^2)$, $\max\limits_{u^1\in U^1} g^1(u^1,u_0^2) = g^1(u_0^1,u_0^2)$.

Доказательство. Обозначим

$$P\left(u_0^1,u_0^2\right)=\left\{\left({}_1u^1,{}_1u^2\right)\in {}_1U^1\times{}_1U^2 : \pi\left({}_1u^1,{}_1u^2\right)=\left(u_0^1,u_0^2\right)\right\}.$$

Очевидно $P\left(u_0^1,u_0^2\right)=\left\{\left({}_1u^1,{}_1u^2\right)\in {}_1U^1\times{}_1U^2 : {}_1u^1(u_0^1)=u_0^2, {}_1u^2=u_0^2\right\}$

Ситуация $\left({}_1u^1,{}_1u^2\right)$ является ситуацией равновесия по Нэшу в игре ${}_1\Gamma$ тогда и только тогда, когда для дорогого i=1,2 выполняются равенства ${}_1g^i({}_1u^1,{}_1u^2) = \max\limits_{{}_1v^i\in{}_1U^1} {}_1g^i(({}_1u^1,{}_1u^2)\|{}_1v^i)$ или $\max\limits_{{}_1v^i\in{}_1U^1}\left[{}_1g^i(({}_1u^1,{}_1u^2)\|{}_1v^i) - {}_1g^i({}_1u^1,{}_1u^2)\right]=0$. Исход $\left(u_0^1,u_0^2\right)$ является равновесным тогда и только тогда, когда для дорогого i=1,2 справедливы неравенства $\min\limits_{({}_1u^1,{}_1u^2)\in P(u_0^1,u_0^2)}\max\limits_{{}_1v^i\in{}_1U^1}\left[{}_1g^i(({}_1u^1,{}_1u^2)\|{}_1v^i) - {}_1g^i({}_1u^1,{}_1u^2)\right]\le 0$ или $\min\limits_{({}_1u^1,{}_1u^2)\in P(u_0^1,u_0^2)}\max\limits_{{}_1v^i\in{}_1U^1}\left[{}_1g^i(({}_1u^1,{}_1u^2)\|{}_1v^i) - g^i(u_0^1,u_0^2)\right]\le 0$.

Рассмотрим неравенство, соответствующее i=1. Выражение, стоящее в квадратных скобках не зависит вот ${}_1u^1$, поэтому его можно переписать в виде $\min\limits_{{}_1u^2=u_0^2}\max\limits_{{}_1v^i\in{}_1U^1}\left[{}_1g^1({}_1v^1,{}_1u^2)-g^i(u_0^1,u_0^2)\right]\le 0$, или с учетом определения функции ${}_1g^1$ в виде $\max\limits_{{}_1v^i\in{}_1U^1}\left[g^1({}_1v^1(u_0^2),u_0^2)-g^i(u_0^1,u_0^2)\right]\le 0$. Но очевидно $\max\limits_{{}_1v^i\in{}_1U^1}\left[g^1({}_1v^1(u_0^2),u_0^2)-g^i(u_0^1,u_0^2)\right]=\max\limits_{v^i\in U^1}\left[g^1(v^1,u_0^2)-g^i(u_0^1,u_0^2)\right]$, поэтому последнее неравенство равносильно условию $\max\limits_{v^i\in U^1}\left[g^1(v^1,u_0^2)-g^i(u_0^1,u_0^2)\right]\le 0$ или $\max\limits_{u^1\in U^1}g^1(u^1,u_0^2)\le g^1(u_0^1,u_0^2)$. Так как обратное неравенство выполняется всегда, последнее условие равносильно равенству $\max\limits_{u^1\in U^1}g^1(u^1,u_0^2)=g^1(u_0^1,u_0^2)$.

Рассмотрим неравенство соответствующее i=2. Выражение в квадратных скобках не зависит вот ${}_1u^2$, поэтому его можно переписать в виде $\min\limits_{{}_1u^1\in Q(u_0^1,u_0^2)}\max\limits_{{}_1v^2\in{}_1U^2}\left[{}_1g^2({}_1u^1,{}_1v^2)-g^2(u_0^1,u_0^2)\right]\le 0$, где $Q(u_0^1,u_0^2)=\left\{{}_1u_0^1\in\Phi(U^2,U^1):{}_1u_0^1(u_0^2)=u_0^1\right\}$. С учетом определения функции ${}_1g^2$ это неравенство переписывается в виде $\min\limits_{{}_1u^1\in Q(u_0^1,u_0^2)}\max\limits_{{}_1v^2\in{}_1U^2}\left[g^2({}_1u^1({}_1v^2),{}_1v^2)-g^2(u_0^1,u_0^2)\right]\le 0$. Так как при ${}_1v^2=u_0^2$ и ${}_1u^1\in Q(u_0^1,u_0^2)$ выражение в квадратных скобках равно нулю, последнее неравенство равносильно условию $\min\limits_{{}_1u^1\in Q(u_0^1,u_0^2)}\sup\limits_{{}_1v^2\in{}_1U^2\setminus\{u_0^2\}}\left[g^2({}_1u^1({}_1v^2),{}_1v^2)-g^2(u_0^1,u_0^2)\right]\le 0$ или $\min\limits_{{}_1u^1\in\Phi(U^2\setminus\{u_0^2\},U^1)}\sup\limits_{v^2\in U^2\setminus\{u_0^2\}}\left[g^2({}_1u^1(v^2),v^2)-g^2(u_0^1,u_0^2)\right]\le 0$.Но это неравенство можно переписать в виде $\sup\limits_{v^2\in U^2\setminus\{u_0^2\}}\min\limits_{u^1\in,U^1}\left[g^2(u^1,v^2)-g^2(u_0^1,u_0^2)\right]\le 0$. Это условие эквивалентно неравенству $\max\limits_{v^2\in U^2}\min\limits_{u^1\in,U^1}\left[g^2(u^1,v^2)-g^2(u_0^1,u_0^2)\right]\le 0$, так как очевидно

$\min\limits_{u^1 \in, U^1} \left[g^2(u^1, u_0^2) - g^2(u_0^1, u_0^2) \right] \le 0$. Остается вынести константу $g^2(u_0^1, u_0^2)$ из под знаков минимума и максимума. Теорема доказана.

Из приведенного доказательства видно, что функция, реализующая минимум $\min\limits_{{}_1u^1 \in Q(u_0^1, u_0^2)} \max\limits_{{}_1v^2 \in {}_1U^2} \left[{}_1g^2({}_1u^1, {}_1v^2) - g^2(u_0^1, u_0^2) \right]$ имеет вид ${}_1u_0^1(u^2) = \begin{cases} u_0^1, \text{ если } u^2 = u_0^2, \\ u_p^1(u^2), \text{ если } u^2 \ne u_0^2, \end{cases}$ где функция u_p^1, определяемая условием $g^2(u_p^1(u^2), u^2) = \min\limits_{u^1 \in U^1} g^2(u^1, u^2)$ есть «стратегия наказания».

Обратим внимание на качественную структуру наидневного решения.

Партнеру предлагается некоторый вариант выбора, а за всякий иной выбор угрожает наказание. Подобная структура решений весьма часто встречается на практике. Читателю наверняка приходилось сталкиваться с подобными педагогическими приемами. Стандартные коммерческие контракты предполагают наличие некоторой согласованной программы действий, и санкций за нарушение обязательств. Этот список примеров легко продолжить.

Разумеется, «стратегия наказания» не обязательно должна реализовывать минимум функции выигрыша противника абсолютно точно. Несложный анализ проведенных выше рассуждений показывает, что стратегия будет оптимальной, если «стратегия наказания» обеспечит, что при отклонении вот согласованного исхода игрок получит выигрыш не превышающий того, который вон получает, будучи лояльным.

Это обстоятельство особенно важно ввиду того, что выбирая стратегию наказания, игрок «забывает» в собственных интересах, и, наказывая партнера, может наказать и самого себя. В этом случае важно, чтобы партнер поверил в угрозу, как в заключительной сцене повести Бориса Васильева «А вспаши здесь тихие...». Впрочем, это уже находится за рамками данной модели.

- Майерсона

Теорема. Пусть в игре двух лиц $\Gamma=<\{1,2\},U^1,U^2,g^1,g^2>$ множества управлений всех игроков компактны, а функции выигрыша непрерывны. Исход $\left(u_0^1,u_0^2\right)$ является равновесным в метарасширении ${}_{21}\Gamma$ этой игры, тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия: $\max\limits_{u^2\in U^2}\min\limits_{u^1\in U^1} g^2(u^1,u^1)\le g^2(u_0^1,u_0^2)$, $\min\limits_{u^2\in U^2}\max\limits_{u^1\in U^1} g^1(u^1,u^1)\le g^1(u_0^1,u_0^2)$.

Доказательство. Игра ${}_{21}\Gamma$ является квазиинформационным расширением игры ${}_1\Gamma$, поэтому, для любой ситуации равновесия $\left({}_{21}u_0^1,{}_{21}u_0^2\right)$ выполняются условия ${}_{21}g^1({}_{21}u_0^1,{}_{21}u_0^2)\ge \max\limits_{{}_1u^1\in{}_1U^1}\min\limits_{{}_1u^2\in{}_1U^2} {}_1g^1({}_1u^1,{}_1u^2)$ и ${}_{21}g^2({}_{21}u_0^1,{}_{21}u_0^2)\ge \max\limits_{{}_1u^2\in{}_1U^2}\min\limits_{{}_1u^1\in{}_1U^1} {}_1g^2({}_1u^1,{}_1u^2)$. Но

$$\max_{{}_1u^1\in{}_1U^1}\min_{{}_1u^2\in{}_1U^2} {}_1g^1({}_1u^1,{}_1u^2)=\max_{{}_1u^1\in\Phi(U^2,U^1)}\min_{u^2\in U^2} g^1({}_1u^1(u^2),u^2)=\min_{u^2\in U^2}\max_{u^1\in U^1} g^1({}_1u^1(u^2),u^2)$$

и $$\max_{{}_1u^2\in{}_1U^2}\min_{{}_1u^1\in{}_1U^1} {}_1g^2({}_1u^1,{}_1u^2)=\max_{u^2\in U^2}\min_{{}_1u^1\in\Phi(U^2,U^1)} g^2({}_1u^1(u^2),u^2)=\max_{u^2\in U^2}\min_{u^1\in U^1} g^2(u^1,u^2)$$

. Поэтому, если $\pi\left({}_{21}u_0^1,{}_{21}u_0^2\right)=\left(u_0^1,u_0^2\right)$, то выполняются неравенства $\max\limits_{u^2\in U^2}\min\limits_{u^1\in U^1} g^2(u^1,u^2)\le g^2(u_0^1,u_0^2)$, $\min\limits_{u^2\in U^2}\max\limits_{u^1\in U^1} g^1(u^1,u^2)\le g^1(u_0^1,u_0^2)$.

Необходимость доказанная.

Докажем достаточность. Найденная при доказательстве предыдущей теоремы интерпретация позволяет угадать структуру равновесных стратегий, порождающих данный исход $\left(u_0^1, u_0^2\right)$.

Определим функцию ${}_1u_p^1$ и элемент u_p^2 условиями $g^2(u_p^1(u^2), u^2) = \min\limits_{u^1 \in U^1} g^2(u^1, u^2)$ и $\max\limits_{u^1 \in U^1} g^1(u^1, u_p^2) = \min\limits_{u^2 \in U^2} \max\limits_{u^1 \in U^1} g^1(u^1, u^2)$. Пусть функция ${}_{21}u_0^1 \in \Phi(U^2, U^1)$ определяется условием ${}_{21}u_0^1(u^2) = \begin{cases} u_0^1, \text{ если } u^2 = u_0^2, \\ u_p^1(u^2), \text{ если } u^2 \neq u_0^2, \end{cases}$ а функционал ${}_{21}u_0^2 \in \Phi(\Phi(U^2, U^1), U^2)$ – условием ${}_{21}u_0^2({}_1u^1) = \begin{cases} u_0^2, \text{ если } {}_1u^1(u_0^2) = u_0^1, \\ u_p^2, \text{ если } {}_1u^1(u_0^2) \neq u_0^1. \end{cases}$

Очевидно, $\pi({}_{21}u_0^1, {}_{21}u_0^2) = (u_0^1, u_0^2)$. Покажем, что если исход $\left(u_0^1, u_0^2\right)$ удовлетворяет неравенствам $\max\limits_{u^2 \in U^2} \min\limits_{u^1 \in U^1} g^2(u^1, u^1) \leq g^2(u_0^1, u_0^2)$ и $\min\limits_{u^2 \in U^2} \max\limits_{u^1 \in U^1} g^1(u^1, u^1) \leq g^1(u_0^1, u_0^2)$, то $\left({}_{21}u_0^1, {}_{21}u_0^2\right)$ – ситуация равновесия. Если второй игрок выберет такую стратегию ${}_{21}u^2$, что ${}_{21}u^2({}_{21}u_0^1) = u_2^0$, то его выигрыш будет равен ${}_{21}g^2({}_{21}u_0^1, {}_{21}u^2) = {}_1g^2({}_{21}u_0^1, {}_{21}u({}_{21}u_0^1)) = {}_1g^2({}_{21}u_0^1, u_0^2) = g^2({}_{21}(u_0^2), u_0^2) = g^2(u_0^1, u_0^2)$. Если же вон выберет стратегию ${}_{21}u^2$ так, что ${}_{21}u^2({}_{21}u_0^1) = u^2 \neq u_2^0$, то

$$\begin{aligned}{}_{21}g^2({}_{21}u_0^1, {}_{21}u^2) &= {}_1g^2({}_{21}u_0^1, {}_{21}u({}_{21}u_0^1)) = {}_1g^2({}_{21}u_0^1, u^2) = g^2({}_{21}u^1(u^2), u_0^2) = g^2(u_p^1(u^2), u^2) = \\ &= \min_{u^1 \in U^1} g^2(u^1, u^2) \leq \max_{u^2 \in U^2} \min_{u^1 \in U^1} g^2(u^1, u^2) \leq g^2(u_0^1, u_0^2) = {}_{21}g^2({}_{21}u_0^1, {}_{21}u_0^2).\end{aligned}$$

В обоих случаях вон получит не больше, чем в ситуации $\left({}_{21}u_0^1, {}_{21}u_0^2\right)$, значит, ему отклоняться не выгодно.

Если первый игрок выберет стратегию ${}_{21}u^1$ так, что ${}_{21}u^1(u_0^2)=u_0^1$, то его выигрыш составит ${}_{21}g^1({}_{21}u^1,{}_{21}u_0^2)={}_1g^1({}_{21}u^1,{}_{21}u_0^2({}_{21}u^1))={}_1g^1({}_{21}u^1,u_0^2)=g^1({}_{21}u^1(u_0^2),u_0^2)=g^1(u_0^1,u_0^2)$. Если же вон выберет свою стратегию так, что ${}_{21}u^1(u_0^2)=u^1\neq u_0^1$, то

$${}_{21}g^1({}_{21}u_0^1,{}_{21}u^2)={}_1g^1({}_{21}u_0^1,{}_{21}u({}_{21}u_0^1))={}_1g^1({}_{21}u_0^1,u_p^2)=g^2({}_{21}u^1(u_p^2),u_p^2)\le\max_{u1\in U^1}g^2(u^1,u_p^2)=$$
$$=\min_{u^2\in U^2}\max_{u^1\in U^1}g^1(u^1,u^2)\le g^1(u_0^1,u_0^2)={}_{21}g^1({}_{21}u_0^1,{}_{21}u_0^2).$$

И в том и в другом случае вон получает не больше, чем в ситуации $\left({}_{21}u_0^1,{}_{21}u_0^2\right)$, поэтому и ему не выгодно отклоняться вот этой ситуации. Теорема доказана.

Следствие. Пусть в игре двух лиц $Г=<\{1,2\},U^1,U^2,g^1,g^2>$ множества управлений всех игроков компактны, а функции выигрыша непрерывны. Тогда в ее метарасширении ${}_{21}Г$ найдется ситуация равновесия по Нэшу, одновременно являющаяся эффективной.

Доказательство. В силу первой теоремы этого раздела, множество ситуаций равновесия в игре ${}_1Г$ не пусто, значит не пусто и множество ситуаций равновесия в игре ${}_{21}Г$. Но тогда не пусто и множество D исходов $\left(u_0^1,u_0^2\right)$, удовлетворяющих неравенствам $\max_{u^2\in U^2}\min_{u^1\in U^1}g^2(u^1,u^1)\le g^2(u_0^1,u_0^2)$ и $\min_{u^2\in U^2}\max_{u^1\in U^1}g^1(u^1,u^1)\le g^1(u_0^1,u_0^2)$.

Это множество исходов компактно, значит, в нем существует эффективный исход. Этот исход будет эффективным и на всем множестве $U^1\times U^2$. Действительно, допустим противное. Тогда найдется исход (u^1,u^2) из множества $U^1\times U^2$, который доминирует $\left(u_0^1, u_0^2\right)$. В силу выбора $\left(u_0^1, u_0^2\right)$, исход не может принадлежать множеству D. Но тогда нарушается одно из неравенств $\max_{u^2 \in U^2} \min_{u^1 \in U^1} g^2(u^1, u^1) \le g^2(u^1, u^2)$ или $\min_{u^2 \in U^2} \max_{u^1 \in U^1} g^1(u^1, u^1) \le g^1(u^1, u^2)$, а значит, либо $g^1\left(u_0^1, u_0^2\right) > g^1(u^1, u^2)$, либо $g^2\left(u_0^1, u_0^2\right) > g^2(u^1, u^2)$, что приводит к противоречию.

Но в силу последней теоремы существует ситуация равновесия в игре ${}_{21}\Gamma$, порождающая этот исход. Она и будет искомой.

- Равновесия в более сложных метарасширениях

Дуополия Курно

В качестве примера рассмотрим уже знакомую модель.

Две фирмы выпускают однородный товар и продают его на рынке. Цена, складывающаяся на рынке, линейно убывает с ростом суммарного предложения: $p=a-b(u_1+u_2)$, где u_1 и u_2 объемы выпуска продукции первой и второй фирмой соответственно (по своему смыслу величины u_1 и u_2 неотрицательны). Пусть затраты первой и второй фирм на выпуск единицы продукции равны c_1 и c_2, а их цели состоят в максимизации прибылей $g^1(u_1,u_2)=pu_1-c_1u_1$ и $g^2(u_1,u_2)=pu_2-c_2u_2$.

Обозначим соответствующую игру Г. Найдем ситуации равновесия по Нэшу в игре ${}_1\Gamma$.

При фиксированном u_2 график функции $g^1(u_1,u_2)$ представляет собой параболу «рогами вниз». Значит, максимум этой функции на неотрицательном луче достигается либо в точке $\frac{a-c_1-bv}{2b}$, если она принадлежит этому лучу, либо в точке

0. В силу первой теоремы предыдущего раздела, однои из равновесных стратегий первого игрока в игре ${}_1\Gamma$ будет функция

$$ {}_1u_{10} = \begin{cases} \dfrac{a-c_1-bu_2}{2b}, \text{ если } u_2 \le \dfrac{a-c_1}{b}, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases} $$

Найдем максимум функции

$$ g^1({}_1u_{10}(u_2),u_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(a-c_1-2c_2-bu_2)u_2, \text{ если } u_2 \le \dfrac{a-c_1}{b}, \\ (a-c_2-bu_2)u_2, \text{ в противном случае} \end{cases} $$

Если $a \le c_2$, то максимум обеих ветвей нашей функции достигается в нуле, и эта точка – единственная стратегия, которая вместе с функцией ${}_1u_{10}$ образует ситуацию равновесия.

Если $c_2 < a \le c_1 + 2c_2$ то максимум функции $g^1({}_1u_{10}(u_2),u_2)$ на отрезке $0 \le u_2 \le \dfrac{a-c_1}{b}$ равен нулю, и максимум на всем $u_2 \ge 0$ луче равен максимума на луче $u_2 \ge \dfrac{a-c_1}{b}$. Последний достигается в точке $u_{20} = \dfrac{a-c_2}{2b}$, если $a \le 2c_1 - c_2$, и в точке $u_{20} = \dfrac{a-c_1}{b}$, если $2c_1 - c_2 < a \le c_1 + 2c_2$.

Если $c_1 + 2c_2 \le a$, то максимум функции $g^1({}_1u_{10}(u_2),u_2)$ на отрезке $0 \le u_2 \le \dfrac{a-c_1}{b}$ достигается в точке $\dfrac{a-c_1-2c_2}{2b}$ и равен $\dfrac{(a-c_1-2c_2)^2}{8b}$, а максимум тот же функции на луче $u_2 \ge \dfrac{a-c_1}{b}$ достигается в точке $u_2 = \dfrac{a-c_1}{b}$ и равен $\dfrac{(c_1-c_2)(a-c_1)}{b}$. Несложная проверка показывает, что при условии $c_1+2c_2 \le a$ глобальный максимум достигается всегда в точке $u_{20} = \frac{a - c_1 - 2c_2}{2b}$.

Таким образом, первая теорема предыдущего раздела при любых значениях параметров позволяет найти одну ситуацию равновесия в игре $_1\Gamma$, который порождает исход, вообще говоря, отличный, вот равновесия в исходной игре Г.

Опишем все множество равновесных исходов в игре $_1\Gamma$. Выбор очень большого u^1 делает цену отрицательной, а значит, выигрыш второго игрока неположительным. Но $u_2=0$ гарантирует ему нулевой выигрыш, поэтому в нашем случае $\max\limits_{u^2 \in U^2} \min\limits_{u^1 \in U^1} g^2(u^1, u^1) = 0$. Поэтому равновесными будут все исходы (u_{10}, u_{20}), в которых $u_{10} = \begin{cases} \frac{a - c_1 - bu_{20}}{2b}, \text{ если } u_{20} \le \frac{a - c_1}{b}, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$ и $g^2(u_{10}, u_{20}) \ge 0$. Это есть равновесными будут исходы $\left(\frac{a - c_1 - bu_{20}}{2b}, u_{20} \right)$ при $u_{20} \le \frac{a - c_1 - 2c_2}{b}$ и исходы $(0, u_{20})$ при $\frac{a - c_1}{b} \le u_{20} \le \frac{a - c_2}{b}$.

Как мы видели выше, множество эффективных точек в данной игре представляет собой кусок параболы. А множество равновесных исходов - двухзвенную ломаную (или отрезок). Поэтому ясно, что эффективными могут быть только концы ломаной. Несложно проверить, что они действительно являются эффективными, так как доставляют глобальные максимумы выигрышей игроков.

Найдем теперь равновесные исходы в игре ${}_{21}\Gamma$. Выбор очень большого u_2 делает цену отрицательной, а выигрыш первого игрока неположительным. Но выбор u_1=0 гарантирует первому игроку нулевой выигрыш, значит $\min\limits_{u^2 \in U^2} \max\limits_{u^1 \in U^1} g^1(u^1, u^1) = 0$. Таким образом, в этой игре равновесными будут все исходы, в которых оба игрока получают неотрицательные выигрыши.

В частности, все эффективные исходы будут равновесными.

Задачи

1. Докажите, что если игра Г антагонистическая, то дорогое ее квазиинформационное расширение тоже игра антагонистическая.

2. Верно ли, что если $\Gamma=\langle\{1,2\},U^1,U^2,g,-g\rangle$ – антагонистическая игра, а отображения $\langle\pi,c^1,c^2\rangle$ задают ее квазиинформационное расширение ${}_*\Gamma=\langle N,{}_*U^1,{}_*U^2,{}_*g,-{}_*g\rangle$, то $\sup\limits_{{}_*u^1 \in {}_*U^1} \inf\limits_{{}_*u^2 \in {}_*U^2} {}_*g({}_*u^1, {}_*u^2) = \sup\limits_{{}_*u^1 \in {}_*U^1} \inf\limits_{u^2 \in U^2} {}_*g({}_*u^1, c^2(u^2))$.

3. Пусть в игре двух лиц $\Gamma=\langle\{1,2\},U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$ множества управлений всех игроков компактны, а функции выигрыша непрерывны. Положим ${}_1u_0^1(u^2) = \arg\max\limits_{u^1 \in U^1} g^1(u^1, u^2)$. Покажите, что верхняя грань $\sup\limits_{u^2 \in U^2} g^2({}_1u_0^1(u^2), u^2)$ может и не достигаться.

4. Пусть в игре двух лиц $\Gamma=\langle\{1,2\},U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$ множества управлений всех игроков компактны, а функции выигрыша непрерывны. Положим

$B(u^2)=\left\{u^1\in U^1 : g^1(u^1,u^2)=\max_{v^1\in U^1} g^1(v^1,u^2)\right\}$. Определим функцию ${}_1u_0^1$ условиями ${}_1u_0^1(u^2)\in B(u^2)$ и $g^2({}_1u_0^1(u^2),u^2)=\max_{v^1\in B(u^2)} g^2(v^1,u^2)$ для дорогого $u^2\in U^2$. Докажите, что существует точка u_0^2, в которой $g^2({}_1u_0^1(u_0^2),u_0^2)=\max_{u^2\in U^2} g^2({}_1u_0^1(u^2),u^2)$, и ситуация $\left({}_1u_0^1,u_0^2\right)$ является ситуацией равновесия по Нэшу в игре ${}_1\Gamma$.

5. Пусть $\Gamma=<\{1,2\},U^1,U^2,g,-g>$ – антагонистическая игра и пусть

${}_1\Gamma=<\{1,2\},{}_1U^1,{}_1U^2,{}_1g,-{}_1g>$ – ее метарасширение Ховарда ранга 1. Тогда

$$\sup_{{}_1u^1\in{}_1U^1}\inf_{{}_1u^2\in{}_1U^2} {}_1g({}_1u^1,{}_1u^2)=\inf_{{}_1u^2\in{}_1U^2}\sup_{{}_1u^1\in{}_1U^1} {}_1g({}_1u^1,{}_1u^2)=\inf_{u^2\in U^2}\sup_{u^1\in U^1} g(u^1,u^2).$$

6. Пусть U и V – выпуклые компакты, g – непрерывная функция, P – множество всех непрерывных функций $p:V\to U$, Q – множество всех непрерывных функций $p:U\to V$, а $g:U\times V\to$. Докажите, что

$$\sup_{u\in U}\inf_{v\in V} g(u,v)\le\sup_{p\in P}\inf_{v\in V} g(p(v),v)\le\inf_{q\in Q}\sup_{u\in U} g(u,q(u))\le\inf_{v\in V}\sup_{u\in U} g(u,v).$$

7. Можно ли в условиях предыдущей задачи отказаться вот условия выпуклости?

8. Пусть P – множество всех непрерывных функций $p:V\to U$, Q – множество всех непрерывных функций $p:U\to V$, а $g:U\times V\to$. Приведите пример, когда U=V=[0,1], g – непрерывная функция, но тем не менее

$$\sup_{u\in U}\inf_{v\in V} g(u,v)=\sup_{p\in P}\inf_{v\in V} g(p(v),v)<\inf_{q\in Q}\sup_{u\in U} g(u,q(u))=\inf_{v\in V}\sup_{u\in U} g(u,v).$$

9. Существует ли такая игра двух лиц Г, что ни одна ситуация равновесия в ее метарасширении первого ранга $_1\Gamma$ не является эффективной?

10. Существует ли такая игра двух лиц (, что ни в одном ее метарасширениии первого ранга нет эффективных ситуаций равновесия?

11. Пусть в игре трех лиц $\Gamma=<\{1,2,3\},U^1,U^2,U^3,g^1,g^2,g^3>$ множества U^i компактны, а функции g^i непрерывны. Рассмотрим информационное расширение этой игры, в котором $U^1=U^1, {}_*U^2=U^2$, $U^3=\{{}_*u^3\colon U^1\times U^2\to U^3\}$ (проекции определяются естественным образом). Всегда ли в такой игре существуют ситуации равновесия?

12. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что заданный исход является равновесным.

13. Пусть $\left({}_*u_0^1,(v_0,w_0)\right)$ – ситуация равновесия в игре с блефом. Докажите, что тогда блеф корректен, то есть $g^2({}_*u_0^1(w_0),v_0)=g^2({}_*u_0^1(w_0),w_0)$ и $g^1({}_*u_0^1(w_0),v_0)=g^2({}_*u_0^1(w_0),w_0)$.

14. Опишите все множество ситуаций равновесия в игре с блефом.

15. Получить условия существования равновесия в игре с добровольным сообщением информации.

16. Пусть Г – игра «олигополия Курно», а $_*\Gamma$ – ее информационное расширение, в котором все игроки, кроме n-го принимают свои решения одновременно, не зная выборов партнеров, а n-ый игрок принимает свое решение последним,

зная суммарный выпуск $u_1+\ldots+u_n$всех остальных игроков. Опишите все равновесные исходы в игре $_*\Gamma$.

17. Пусть Г – биматричная игра 2×2, причем все числа, образующие матрицы выигрыша попарно различны. Допустим, что в игре Г нет ситуаций равновесия по Нэшу. Докажите, что тогда в ее метарасширении $_1\Gamma$ существует ровно одна ситуация равновесия.

18. Пусть (- биматричная игра, причем все числа, образующие матрицы выигрыша попарно различны. Докажите, что тогда ситуация равновесия, находящаяся с помощью метода динамического программирования не доминируется никакой другой ситуацией равновесия.

Литература

1. Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. Г.: МГУ. 1984.

2. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. Г.: Радио и связь. 1991.

3. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. Г.: Мир, 1985.

Лекция. Динамические игры

Графы (терминология)

Определение. Графом называется пара (V,E), где V – конечное множество, а $E \subset S_2(V)$ (здесь $S_2(V)$ обозначает множество неупорядоченных пар элементов множества V). Элементы множества V называют вершинами графа, а элементы множества E – его ребрами. Если v – вершина, а e – ребро, и $v \in e$, то говорят, что вершина v и ребро e инцидентны. Если v и w – вершины и $\{v,w\} \in E$, то говорят, что вершины v и w – смежные.

- Матрицы смежности и инцидентности

Определение. Упорядоченный набор $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ вершин графа называется путем в граф, если вершины v_i и v_{i+1} смежны для дорогого $i=1,\ldots,n-1$... Говорят, что путь $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ соединяет вершины v_1 и v_n. Число $n-1$ называют длиной пути.

Определение. Говорят, что граф связен, если для любых двух вершин найдется соединяющий их путь.

Определение. Путь $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ называется простым, если вершины $v_1,v_2,\ldots,v_n$попарно различны.

Определение. Путь $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ называется циклом, если $v_1=v_n$.

Определение. Цикл $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ называется простым, если вершины $v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}$попарно различны.

Определение. Связный граф, не содержащий простых циклов положительной длины, называется деревом.

Лемма. Если в дереве заданы две вершины, то существует единственных простой путь соединяющий их.

Доказательство. Пусть v и w – две вершины дерева. Так как дерево – связный граф, существует соединяющий их путь. Пусть $(v=v_1,v_2,\ldots,v_n=w)$ кратчайший из таких путей. Тогда этот путь – простой. Действительно, если $v_i=v_j$ для некоторого i и некоторого j>i, то путь $(v_1,v_2,\ldots,v_i,v_{j+1},v_{j+2},\ldots,v_n)$ по-прежнему соединяет v и w и имеет меньшую длину, что противоречит выбору исходного пути. Существование доказано.

Докажем единственность. Пусть существуют два различных простых пути $(v=v_1,v_2,\ldots,v_n=w)$ и $(v=w_1,w_2,\ldots,w_k=w)$... Так как они различны, найдется вершина w_i, не принадлежащая пути $(v=v_1,v_2,\ldots,v_n=w)$... Пусть j – наименьший номер, такой, что все вершины $w_j,w_{j+1},\ldots,w_i$не принадлежат $(v=v_1,v_2,\ldots,v_n=w)$, а l – наибольший номер, такой, что все вершины $w_i,w_{i+1},\ldots,w_l$не принадлежат $(v=v_1,v_2,\ldots,v_n=w)$... Тогда вершины w_{i-1} и w_{l+1} принадлежат пути $(v=v_1,v_2,\ldots,v_n=w)$, это есть $w_{j-1}=v_p$ и $w_{l+1}=v_q$ для некоторых p и q. Если p<q, то путь $(v_p,w_j,\ldots,w_l,v_q,v_{q-1},\ldots,v_p)$ будет простым циклом, а если p>q, то простым циклом будет путь $(v_p,w_j,\ldots,w_l,v_q,v_{q+1},\ldots,v_p)$... В обоих случаях получается противоречие с определением дерева. Лемма доказана.

Определение. Семейство множеств $V_0,V_1,\ldots,V_n$называется разбиением множества V, если множества $V_0,V_1,\ldots,V_n$попарно не пересекаются, а их объединение равно V.

Определение. Пусть заданы два разбиения $V_0,V_1,\ldots,V_n$и $W_0,W_1,\ldots,W_k$множества V. Говорят, что разбиение

$V_0,V_1,\ldots,V_n$является утончением разбиения $W_0,W_1,\ldots,W_k$, если каждое из множеств $V_0,V_1,\ldots,V_n$содержится ровно в одном из множеств $W_0,W_1,\ldots,W_k$...

Определение. Пусть в дереве отмечена некоторая вершина o. Ребра, инцидентные вершине v и не принадлежащие простому пути, соединяющему v с o, называются альтернативами в вершине v. Все вершины дерева с отмеченной вершиной естественным образом разбиваются на классы в соответствии с количеством альтернатив в них. Это разбиение называется альтернативным. Вершины, в которых нет альтернатив, называются финальными.

Определение. Пара (φ,ψ), где φ – отображение, ставящее в соответствие различным вершинам графа различные точки плоскости, а ψ – отображение, ставящее в соответствие ребру (v_1,v_2) графа отрезок с концами $\varphi(v_1)$ и $\varphi(v_2)$, называется вложением графа в плоскость, если отрезки, соответствующие различным ребрам не имеют общих внутренних точек.

Лемма. Любое дерево может быть вложено в плоскость.

Доказательство. Расстоянием между вершинами дерева будем называть длину единственного простого пути, соединяющего их.

Произвольным образом выберем вершину v_0 дерева и отнесем ее классу V_0. Для $t \in \mathbb{N}$ отнесем к классу V_t то и только то вершины, которые находятся на расстоянии t. Все множество вершин разобьется на конечное число классов.

Введем на плоскости декартовы координаты и положим $\varphi(v_0)=(0,0)$.

Произвольным образом перенумеруем вершины $v_1,\ldots,v_l$множества V_1 и положим $\varphi(v_i)=(i,1)$.

Каждая вершина множества V_{t+1} смежна ровно с однои вершиной множества V_t. Считая, что вершины множества V_t уже перенумерованы, перенумеруем вершины множества V_{t+1} так, чтобы выполнялось неравенство $i<j$ всякий раз, когда $v_i\in V_{t+1}$, $v_j\in V_{t+1}$, $\{v_i,v_p\}\in E$, $\{v_j,v_q\}\in E$, $v_p\in V_t$, $v_q\in V_t$ и $p<q$. Положим $\varphi(v_j)=(j,t)$, если $v_j\in V_t$.

Построенное отображение удовлетворяет условиям леммы. Если $v_i\in V_{t+1}$, $v_p\in V_t$, $v_j\in V_{r+1}$, $v_q\in V_r$ и $t<r$, то отрезки $[\varphi(v_i),\varphi(v_p)]$ и $[\varphi(v_j),\varphi(v_q)]$ не пересекаются, так как лежат по разные стороны вот прямой $y=r$, а если $t=r$, то эти отрезки не пересекаются в силу выбора способа нумерации.

Игры в позиционной форме

Определение. Говорят, что заданная игра n лиц в позиционной форме, если заданы:

a) Вложенное в плоскость дерево, называемое деревом игры, с отмеченной вершиной v_0 и выделенным ребром, инцидентным этой вершине.

b) Разбиение множества вершин этого дерева на подмножества $V^0,V^1,\ldots,V^n$... Это разбиение называется разбиением по игрокам. Элементы множества V^0 называются позициями случая, а элементы множества V^i – личными позициями i-го игрока (i=1,…,n)...

c) Разбиение множества вершин дерева игры, являющееся утончением, как альтернативного разбиения, так и разбиения по игрокам. Элементы этого разбиения называются информационными множествами.

d) Вероятностное распределение $(p_1(I),p_2(I),\ldots,p_m(I))$ на множестве $\{1,\ldots m\}$для каждого информационного множества I, содержащегося в V^0, в вершинах которого имеется m альтернатив.

e) Упорядоченный набор из n чисел, называющихся выигрышами игроков для каждой финальной вершины.

Определение. Отмеченная вершина дерева игры называется начальной позицией игры. Вершины дерева, не являющиеся ни финальной, ни начальной, называются промежуточными позициями игры. Всякий простой путь, соединяющий начальную позицию игры с какой-нибудь финальной вершиной, называется партией в игре.

Считается, что в начальный момент времени игра находится в начальной позиции. При разыгрывании игры последовательно, шаг за шагом, реализуются шаги одного из двух типов.

a) Если игра находится в позиции v, принадлежащей множеству V^0, то находится реализация j случайной величины, заданной для информационного множества, содержащего вершину v. Находится j-я альтернатива в вершине v, считая против часовой стрелки вот единственного ребра, инцидентного вершине v и не являющегося альтернативой (если вершина v –

начальная, то отсчет начинается с отмеченного ребра). Далее берется вторая вершина w, инцидентная выбранной альтернативе, и считается, что игра перешла в позицию w.

b) Если игра находится в позиции v, принадлежащей V^i, то выбор альтернативы делает i-ый игрок. При этом вон не знает, в какой именно позиции находится игра, но знает информационное множество, которому эта позиция принадлежит. Следовательно, вон знает число альтернатив m в позиции v. Вон выбирает натуральное число $j \le m$. После этого находится j-я альтернатива в вершине v, считая против часовой стрелки вот единственного ребра, инцидентного вершине v и не являющегося альтернативой (если вершина v – начальная, то отсчет начинается с отмеченного ребра). Далее берется вторая вершина w, инцидентная выбранной альтернативе, и считается, что игра перешла в позицию w.

За конечное число таких шагов игра попадет в одну из финальных вершин v, в которой заданы числа $(h^1(v),h^2(v),\dots,h^n(v))$... Выигрыш игрока i составит $h^i(v)$.

Нормальная форма позиционной игры

Пусть заданная позиционная игра n лиц. Построим игру в нормальной форме Г следующим образом.

Множество игроков N в этой игре равно $\{1,2,\dots,n\}$...

Пусть $i \in N$ и $W=\{I_1,I_2,\dots,I_k\}$–семейство всех информационных множеств позиционной игры, содержащихся в множестве V^i. Будем считать, что U^i есть множество всех функций u^i, отображающих W в и удовлетворяющих следующему условию: число $u^i(I)$ не превосходит количества альтернатив в любой вершине из множества I.

Стратегия u^i задает вероятностное распределение $(p_1(v),p_2(v),\dots,p_m(v))$ на множестве всех альтернатив в вершине v по следующему правилу: $p_j(v)=\begin{cases}1,\text{ если } v\in I \text{ и } u^i(I)=j,\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$ В позициях случая также задается вероятностное распределение $(p_1(v),p_2(v),\dots,p_m(v))$ на множестве альтернатив условием $p_j(v)=p_j(I)$, если $j\in I$.

Для каждой финальной вершины w определен единственный путь $(v_0,v_1,\dots,v_k=w)$, соединяющий ее с начальной вершиной v_0 и числа q_t $(t=0,\dots,k-1)$, равные $p_j(v_t)$, где j номер альтернативы $\{v_t,v_{t+1}\}$ в вершине v_t. Положим $P(w)=\prod_{t=0}^{k} q_t$. Непосредственно проверяется, что величины P(w) задают вероятностное распределение на множестве финальных вершин. Таким образом, величины $h^i(w)$ можно считать случайными, причем распределения этих величин зависят вот стратегий всех игроков. Обозначим $g^i(u^1,u^2,\dots,u^n)$ математическое ожидание величины h^i при условии, что игроки выбрали стратегии $u^1,u^2,\dots,u^n$соответственно.

Определение. Построенная таким образом игра $\Gamma=\langle N,U^1,\dots,U^n,g^1,\dots,g^n\rangle$называется нормальной формой данной позиционной игры.

- Пример: Фан-тан

С помощью этой конструкции на класс позиционных игр переносятся понятия седловой точки, смешанной стратегии, равновесия по Нэшу и т.д.

С помощью позиционных игр удобно моделировать салонные игры (шахматы, шашки, нарды, покер, преферанс и т.д.), а также многие другие процессы, в которых принятие решений разворачивается во времени.

Определение. Позиционная игра n лиц называется игрой с полной информацией, если все ее информационные множества содержат ровно по одному элементу.

В играх с полной информацией информационные множества естественным образом отождествляются с позициями игры. В дальнейшем мы будем этим пользоваться для упрощения обозначений.

Шахматы, шашки и нарды являются играми с полной информацией, а покер и преферанс - нет.

Рассмотрим класс (позиционных игр, различающихся только информационным разбиением. Непосредственно устанавливаются следующие факты.

Лемма. В классе (существует ровно одна игра, в которой каждое информационное множество равно пересечению одного множества альтернативного разбиения и одного множества с разбиения по игрокам исходной игры. Любая игра класса (является квазиинформационным расширением этой игры.

Лемма. В классе (существует единственная игра с полной информацией. Она является квазиинформационным расширением любой игры класса (.

Лемма. Пусть заданы две игры класса (, причем информационное разбиение в первой из их является утончением информационного разбиения во второй. Тогда первая игра является квазиинформационным расширением второй.

- Потеря структуры при переход к нормальной форме

Совершенное равновесие в динамических играх

Теорема. Во всякой игре с полной информацией существует ситуация равновесия по Нэшу.

Доказательство. Для каждой вершины v дерева игры определим набор чисел $(h^1(v),h^2(v),\ldots,h^n(v))$ и для каждой нефинальной личной позиции v i-го игрока определим натуральное число $u^i(v)$ следующим образом.

Для всех финальных вершин дерева числа $(h^1(v),h^2(v),\ldots,h^n(v))$ уже определены. Далее действуем индуктивно.

Из множества вершин, в которых эти числа еще не определены, выбираем любую вершину v, расстояние вот которой к начальной вершины максимально. Тогда для всех альтернатив $\{v,w_1\},\{v,w_2\},\ldots,\{v,w_m\}$ числа $(h^1(w_j),h^2(w_j),\ldots,h^n(w_j))$ уже определены. Если v – это позиция случая, в которой заданы вероятности $(p_1(v),p_2(v),\ldots,p_m(v))$ выбора альтернатив

$\{v,w_1\},\{v,w_2\},\ldots,\{v,w_m\}$,это положим $h^i(v)=\sum_{j=1}^{m}p_j h^i(w_j)$. Если же v – личная позиция i-го игрока, то найдем j, для которого $h^i(w_j)=\max_{1\le l\le m}h^i(w_l)$, положим $u^i(v)=j$ и $h^k(v)=h^k(w_j)$ для всех $k=1,\ldots,n$...

За конечное число таких шагов числа $(h^1(v),h^2(v),\ldots,h^n(v))$ будут определены для всех вершин графа игры, а функция u^i будет определена для всех личных позиций i-го игрока.

Индукцией «с конца» доказывается, что $g^i(u)=g^i(u^1,\ldots,u^n)=h^i(v_0)$... Пусть теперь u_*^i – произвольная стратегия i-го игрока и $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$– порождаемая ситуацией $\left(u\| u_*^i\right)$ партия игры. Вновь индукцией «с конца» доказывается, что $h^i(v_k)\le h^i(v_l)$. Из неравенств $h^i(v_k)\le h^i(v_0)$ следует, что построенная ситуация u – ситуация равновесия. Теорема доказана.

Для всякой позиционной игры и любой вершины v ее дерева игры можно определить понятие подыгры с начальной вершиной v следующим образом.

Пусть v – произвольная вершина дерева игры и V(v) – это множество всех вершин w, для которых существует такой набор $(v=v_1,v_2,\ldots,v_k=w)$, что для всех $j=1,\ldots,k-1$ $\{v_k,v_{k+1}\}$есть альтернатива в вершине v_k. Очевидно, $V(v_0)=V$.

Дерево подыгры с вершиной v имеет множество вершин V(v). Его ребрами являются все ребра исходной игры, обь вершины которой принадлежат V(v). Разбиение по игрокам в подыгре есть $V^0\cap V(v),V^1\cap V(v),\ldots,V^n\cap V(v)$, а всякое информационное множество в подыгре имеет вид $V(v)\bigcap I$, где I – некоторое информационное множество в исходной игре. Выигрыши игроков $(h^1(w),h^2(w),\ldots,h^n(w))$ в любой финальной вершине w подыгры и вероятности $(p_1(w),\ldots,p_m(w))$ в любой позиции w случая в подыгре то же, что в исходной игре. Начальной позицией подыгры является вершина v, а отмеченным ребром – первая альтернатива в этой вершине, считая против часовой стрелки вот ребра, не являющегося альтернативой.

Непосредственно проверяется, что так определенная подыгра самая является позиционной игрой n лиц.

Понятие подыгры особенно естественно для игр с полной информацией.

Если u^i – любая стратегия в исходной игре, то ограничение функции u^i на множество $V^i\bigcap V(v)$ будет стратегией того же игрока в подыгре.

Определение. Ситуация u в позиционной игре называется ситуацией совершенного равновесия, если для любой вершины v дерева игры ограничения стратегий u^i образуют ситуацию равновесия по Нэшу в подыгре с начальной вершиной v.

Из доказательства предыдущей теоремы легко усмотреть, что построенная там ситуация равновесия по Нэшу является ситуацией совершенного равновесия.

Равновесие по Нэшу в позиционных играх

Я к тому упряма, что и себя, бедняжечку, не пожалею.

Э. Шварц

- Пример: существуют несовершенные равновесия по Нэшу. $1 \to \begin{cases} 2 \to \begin{cases} (1,2) \\ (0,0) \end{cases} \\ 2 \to \begin{cases} (2,1) \\ (0,0) \end{cases} \end{cases}$

Полное множество ситуаций равновесия по Нэшу в позиционной игре с полной информацией описывается конструкциями, приведенными ниже. Для простоты рассмотрим игры без случайных ходов (то есть игры, в которых $V^0=\varnothing$). В этом случае удобна следующая терминология.

Определение. Будем говорит, что в ситуации $(u^1,u^2,\ldots,u^n)$ реализуется партия $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$, если для дорогого $l=1,\ldots,k-1$пара $\{v_l,v_{l+1}\}$ есть $u^i(v_l)$-я альтернатива в позиции v_l, считая против часовой стрелки вот ребра, инцидентного вершине v_l и не являющегося альтернативой в этой вершине[17] (здесь i – игрок, личной позицией которого является вершина v_j).

Рекуррентным образом определим максимальный гарантированный результат i–го игрока $L^i(v)$ в вершине v, его осторожную стратегию u_i^i и стратегии наказания i-го игрока u_i^j (для $j\neq i$). Если v – финальная вершина, положим $L^i(v)=h^i(v)$. Если v – личная позиция i-го игрока, и для всех альтернатив $\{v,w_1\},\{v,w_2\},\ldots,\{v,w_m\}$в вершине v значения $L^i(w_l)$ уже определены, то найдем индекс l, для которого значение $L^i(w_l)$ максимально и положим $L^i(v)= L^i(w_l)$ и $u_i^i = l$. Если же v – личная позиция j-го ($j\neq i$) игрока, и для всех альтернатив

[17] или начиная с отмеченного ребра, если вершина v_l – начальная.

$\{v,w_1\},\{v,w_2\},\ldots,\{v,w_m\}$в вершине v значения $L^i(w_l)$ уже определены, то найдем индекс l, для которого значение $L^i(w_l)$ минимально и положим $L^i(v)= L^i(w_l)$ и $u_i^j = l$.

Теорема. Партия $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$ реализуется в некоторой ситуации равновесия по Нэшу в позиционной игре с полной информацией тогда и только тогда, когда для всех $l=1,\ldots,k-1$выполняются неравенства $h^i(v_k)\geq L^i(v_l)$, где i – это тот игрок, личной позицией которого является вершина v_l.

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Допустим противное. Пусть $u=(u^1,u^2,\ldots,u^n)$– ситуация равновесия, в которой реализуется партия $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$, и найдется личная позиция i-го игрока v_l, в которой выполняется неравенство $h^i(v_k)<L^i(v_l)$. Рассмотрим стратегию i-го игрока, определенную равенством $u_-^i(v)=\begin{cases} u^i(v), \text{ если } v\notin V(v_l), \\ u_i^i(v), \text{ если } v\in V(v_l), \end{cases}$ для всех его личных позиций v. В ситуации $(u\|u_-^i)$ реализуется партия $(v_0,v_1,\ldots,v_l,w_{l+1},\ldots,w_m)$... В силу определения стратегии u_i^i i-ый игрок получит в неи выигрыш $h^i(w_m)\geq L^i(v_l)$, что больше, чем выигрыш $h^i(v_k)$ в ситуации u. Получено противоречие с тем, что u – ситуация равновесия, и тем самым необходимость доказанная.

Докажем достаточность. Обозначим $\omega(v_l)$ – номер альтернативы $\{v_l,v_{l+1}\}$ в вершине v_l. Для любой вершины v дерева игры определен единственный путь $(w_0=v_0,w_1,\ldots,w_m=v)$, соединяющий ее с начальной вершиной. Пусть l – наибольший номер, при котором $v_l\in\{w_0,\ldots,w_m\}$и j – тот игрок, для которого вершина v_l является личной позицией. Положим $q(v)=j$ (величины $q(v)$ определены для всех позиций игры, не принадлежащих партии $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$)... Рассмотрим стратегию u^i, определенную равенствами $u^i(v)=\begin{cases}\omega(v_l), \text{ если } v=v_l,\\ u^i_j(v), \text{ если } q(v)=j\end{cases}$ для всех личных позиций v i-го игрока. Так определенная ситуация $u=(u^1,u^2,\ldots,u^n)$ будет ситуацией равновесия, в которой реализуется партия $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$...

Это, что партия $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$ действительно реализуется в построенной ситуации, устанавливается по индукции, исходя из определения стратегий $u^1,u^2,\ldots,u^n$...

Покажем, что ситуация u является ситуацией равновесия. Пусть u^i_- – произвольная стратегия i-го игрока и в ситуации $(u\|u^i_-)$ реализуется партия $(v_0,v_1,\ldots,v_l,w_{l+1},\ldots,w_m)$, в которой $w_{l+1}\neq v_{l+1}$. Тогда для всех $v\in V(v_{l+1})\cap V^j$ выполняются равенства $u^j(v)=u^i_j(v)$ и в силу определения стратегий u^j_i выигрыш $h^i(w_m)$ i-го игрока в ситуации $(u\|u^i_-)$ не может превышать величины $L^i(v_l)$, которая по условию не превосходит выигрыша $h^i(v_k)$ того же игрока в ситуации u. Теорема доказана.

Многошаговые игры

Лемма. Пусть $U_1,\ldots,U_T,V_1,\ldots,V_T$–компактные множества, а $g:\prod_{t=1}^{T}U_t\times\prod_{t=1}^{T}V_t\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция. Обозначим $\tilde{U}_t$ множество всех функций $\tilde{u}_t:\prod_{\tau=1}^{t-1}V_\tau\to U_t$. Тогда

$$\max_{(\tilde u_1,\tilde u_2,...,\tilde u_T)\in \tilde U_1\times\tilde U_2\times...\times\tilde U_T}\ \min_{(v_1,v_2,...,v_T)} g(\tilde u_1,\tilde u_2(v_1),...,\tilde u_t(v_1,...,v_{t-1}),...,\tilde u_T(v_1,...,v_{T-1}),v_1,...,v_T)=$$
$$=\max_{u_1}\min_{v_1}\max_{u_2}...\max_{u_T}\min_{v_T} g(u_1,...,u_T,v_1,...,v_T).$$

Доказательство. Очевидно

$$\max_{(\tilde u_1,\tilde u_2,...,\tilde u_T)\in \tilde U_1\times\tilde U_2\times...\times\tilde U_T}\ \min_{(v_1,v_2,...,v_T)\in V_1\times V_2\times...\times V_T} g(\tilde u_1,\tilde u_2(v_1),...,\tilde u_t(v_1,...,v_{t-1}),...,\tilde u_T(v_1,...,v_{T-1}),v_1,...,v_T)=$$
$$=\max_{(\tilde u_1,\tilde u_2,...,\tilde u_{T-1})\in \tilde U_1\times\tilde U_2\times...\times\tilde U_{T-1}}\ \max_{\tilde u_T\in\tilde U_T}\ \min_{(v_1,v_2,...,v_{T-1})}\ \min_{v_T\in V_T} g(\tilde u_1,\tilde u_2(v_1),...,\tilde u_t(v_1,...,v_{t-1}),...,\tilde u_T(v_1,...,v_{T-1}),v_1,...,v_T).$$

В силу результатов предыдущей лекции

$$\max_{(\tilde u_1,\tilde u_2,...,\tilde u_{T-1})\in \tilde U_1\times\tilde U_2\times...\times\tilde U_{T-1}}\ \max_{\tilde u_T\in\tilde U_T}\ \min_{(v_1,v_2,...,v_{T-1})\in V_1\times V_2\times...\times V_{T-1}}\ \min_{v_T\in V_T} g(\tilde u_1,\tilde u_2(v_1),...,\tilde u_t(v_1,...,v_{t-1}),...,\tilde u_T(v_1,...,v_{T-1}),v_1,...,v_T)=$$
$$=\max_{(\tilde u_1,\tilde u_2,...,\tilde u_{T-1})\in \tilde U_1\times\tilde U_2\times...\times\tilde U_{T-1}}\ \min_{(v_1,v_2,...,v_{T-1})}\ \max_{u_T\in U_T}\min_{v_T\in V_T} g(\tilde u_1,\tilde u_2(v_1),...,\tilde u_t(v_1,...,v_{t-1}),...,\tilde u_T(v_1,...,v_{T-1}),v_1,...,v_T).$$

Повторяя то же рассуждения, получим нужный результат.

Лемма. Пусть $U_1,\dots,U_T,V_1,\dots,V_T$–компактные множества, а $g:\prod_{t=1}^{T}U_t\times\prod_{t=1}^{T}V_t\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция. Обозначим $\tilde U_t$ множество всех функций $\tilde u_t:\prod_{\tau=1}^{t-1}V_\tau\to U_t$, $\tilde V_t$ – множество всех функций $\tilde v_t:\prod_{\tau=1}^{t}U_\tau\to V_t$. Тогда

$$\max_{(\tilde u_1,\tilde u_2,...,\tilde u_T)\in \tilde U_1\times\tilde U_2\times...\times\tilde U_T}\ \min_{(\tilde v_1,\tilde v_2,...,\tilde v_T)\in \tilde V_1\times\tilde V_2\times...\times\tilde V_T} g(\tilde u_1,\tilde u_2(v_1),...,\tilde u_t(v_1,...,v_{t-1}),...,\tilde u_T(v_1,...,v_{T-1}),v_1,...,v_T)=$$
$$=\max_{u_1}\min_{v_1}\max_{u_2}...\max_{u_T}\min_{v_T} g(u_1,...,u_T,v_1,...,v_T).$$

Доказательство аналогично предыдущему

Лемма. Пусть $U_1,\dots,U_T,V_1,\dots,V_T$–компактные множества, а $g:\prod_{t=1}^{T}U_t\times\prod_{t=1}^{T}V_t\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция. Обозначим $\tilde U_t$ множество всех функций $\tilde u_t:\prod_{\tau=1}^{t-1}V_\tau\to U_t$, и пусть $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_T$–вероятностные меры на $V_1,V_2,\dots,V_T$соответственно. Тогда

$$\max_{(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\dots,\tilde{u}_T)\in\tilde{U}_1\times\tilde{U}_2\times\dots\times\tilde{U}_T} \int\limits_{V_1\times V_2\times\dots\times V_T} g(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2(v_1),\dots,\tilde{u}_t(v_1,\dots,v_{t-1}),\dots$$

$$\dots,\tilde{u}_T(v_1,\dots,v_{T-1}),v_1,\dots,v_T)d\mu_1(v_1)d\mu_2(v_2)\dots d\mu_T(v_T)=$$

$$=\max_{u_1}\int\limits_{V_1} d\mu_1(v_1)\max_{u_2}\int\limits_{V_2} d\mu_2(v_2)\dots\max_{u_T}\int\limits_{V_T} d\mu_T(v_T)g(u_1,\dots,u_T,v_1,\dots,v_T).$$

Доказательство аналогично предыдущему.

Определение. Управляемой динамической системой называется набор $\left\langle x,X_0,X_1,\dots,X_{T+1},U_0^1,\dots,U_0^n,\dots,U_T^1,\dots,U_T^n,f_0,\dots,f_T,h^1,\dots,h^n\right\rangle$, где X_t – множества, называемые фазовыми пространствами, $x\in X_0$ – начальная фазовая точка, U_t^i – множества управлений, $f_t: X_t\times\prod_{i=1}^n U_t^i\to X_{t+1}$ – функции перепоходка, $h^i: X_{T+1}\to\mathbb{R}$ – терминальные критерии.

С каждой управляемой динамической системой можно связать несколько игр.

Определение. Игрой на классе программных стратегий, соответствующей управляемой динамической системе $\left\langle x,X_0,X_1,\dots,X_{T+1},U_0^1,\dots,U_0^n,\dots,U_T^1,\dots,U_T^n,f_0,\dots,f_T,h^1,\dots,h^n\right\rangle$ называется набор $\Gamma=\langle N,U^1,\dots,U^n,g^1,\dots,g^n\rangle$,в котором $N=\{1,\dots,n\}$, $U^i=\prod_{t=0}^T U_t^i$,а значения функций $g^i:\prod_{i=1}^n U^i\to\mathbb{R}$ вычисляются с помощью рекуррентных соотношений

$x_0=x$,

$x_{t+1}=f_t(x_t,u_t^1,\dots,u_t^n)$, $t=0,\dots,T$,

$g^i(u^1,\dots,u^n)=h^i(x_{T+1})$, $i=1,\dots,n$

(здесь $u^i=(u_0^i,...,u_T^i)$).

Определение. Игрой на классе позиционных стратегий, соответствующей управляемой динамической системе $\left\langle x,X_0,X_1,...,X_{T+1},U_0^1,...,U_0^n,...,U_T^1,...,U_T^n,f_0,...,f_T,h^1,...,h^n\right\rangle$ называется набор $_*\Gamma=\langle N,{}_*U^1,\dots,{}_*U^n,{}_*g^1,\dots,{}_*g^n\rangle$, в котором $N=\{1,\dots,n\}$, $_*U^i=\prod_{t=0}^{T}\Phi(X_t,U_t^i)$, а значения функций $_*g^i:\prod_{i=1}^{n}{}_*U^i\to\mathbb{R}$ вычисляются с помощью рекуррентных соотношений

$x_0=x$,

$u_t^i={}_*u_t^i(x_t)$, $t=0,\dots,T$,

$x_{t+1}=f_t(x_t,u_t^1,...,u_t^n)$, $t=0,\dots,T$,

$g^i(u^1,\dots,u^n)=h^i(x_{T+1})$, $i=1,\dots,n$

(здесь $_*u^i=({}_*u_0^i,...,{}_*u_T^i)$).

Справедливая

Лемма. Игра на классе позиционных стратегий является квазиинформационным расширением игры на классе программных стратегий, соответствующей тот же управляемой динамической системе.

Доказательство. Значения проекции $\pi({}_*u^1,...,{}_*u^n)=(u^1,...,u^n)$ определяются рекуррентными соотношениями

$x_0=x$,

$u_t^i={}_*u_t^i(x_t)$, $t=0,\dots,T$,

$x_{t+1}=f_t(x_t,u_t^1,...,u_t^n)$, $t=0,\dots,T$...

Вложения c^i определяются стандартным образом, после чего аксиомы квазиинформационного расширения проверяются по индукции.

Использовать специфику игр на классе программных стратегий в общем случае не удается. Для игр на классе позиционных стратегий решение многих задач упрощается. Например, рассмотрим антагонистическую игру $_*\Gamma=\{1,2\}, {}_*U^1, {}_*U^2, {}_*g^1, {}_*g^2=-{}_*g^1>$ на классе позиционных стратегий, соответствующую динамической управляемой системе $\left\langle x, X_0, X_1, ..., X_{T+1}, U_0^1, U_0^2, ..., U_T^1, U_T^2, f_0, ..., f_T, h^1, h^2=-h^1 \right\rangle$. Справедливая

Теорема. Пусть множества X_t и U_t^i компактны, а функции f_t и h^i непрерывны. Тогда максимальный гарантированный результат первого игрока $L=\max\limits_{{}_*u^1\in {}_*U^1}\min\limits_{{}_*u^2\in {}_*U^2} g^1({}_*u^1, {}_*u^2)$ может быть вычислен с помощью рекуррентных формул

$L_{T+1}(x_{T+1})=h^1(x_{T+1}),$

$L_t(x_t)=\max\limits_{u_t^1\in U_t^1}\min\limits_{u_t^2\in U_t^2} L_{t+1}(f_t(x_t,u_t^1,u_t^2))$, t=T,T–1,…,0,

$L=L_0(x)$...

Доказательство проводится индукцией «с конца».

Если множества U_t^i конечны, то соответствующие игры на классах программных и позиционных стратегий легко могут быть представлены как позиционные игры. Наличие этой связи позволяет, например, легко перенести на случай игр двух лиц на классе позиционных стратегий последнюю теорему из предыдущего раздела.

- Проклятие размерности

Принцип максимума

Пусть в динамической системе

$\left\langle x, X_0, X_1, ..., X_{T+1}, U_0^1, U_0^2, ..., U_T^1, U_T^2, f_0, ..., f_T, h^1, h^2 = -h^1 \right\rangle$

множества $X_0, X_1, ..., X_{T+1}, U_0^1, U_0^2, ..., U_T^1, U_T^2$ есть подмножества каких-то линейных пространств, а функции $f_0, ..., f_T, h^1$ линейны, то есть $f_t(x_t, u_t^1, ..., u_t^n) = A_t x_t + B_t u_t^1 + C_t u_t^2$, $h^1(x_{+1})=ex_{+1}$, где A_t, B_t, C_t – некоторые матрицы, а e – вектор подходящей размерности.

Определим векторы

$p_{+1}=e$,

$p_t=p_{t+1}A_t$, t=T,T–1,…,0...

Теорема. В игре на классе программных стратегий, соответствующей линейной динамической управляемой системе, существует седловая точка, которая определяется условиями $u_t^1 = \arg\max_{w_t^1 \in U_t^1} p_{t+1} B_t w_t^1$, $u_t^2 = \arg\min_{w_t^2 \in U_t^2} p_{t+1} C_t w_t^2$ для всех t=0,…,T...

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что

$$g^1(u^1, u^2) = p_0 x + \sum_{t=0}^{T} p_{t+1} B_t u_t^1 + \sum_{t=0}^{T} p_{t+1} C_t u_t^2 ,$$

откуда немедленно следует нужный результат.

Модель управления портфелем ГКО

В качестве примера использования идей динамического программирования рассмотрим модель управления портфелем государственных краткосрочных облигаций (ГКО). Эта модель строилась в 1993 г. в интересах коммерческого банка, выступающего рынке государственных облигаций в ролы инвестора.

ГКО являются дисконтными облигациями. Это означает, что эмитент, выпуская их в обращение, обязуется в определенный день выкупить их во владельца по заранее оговоренной цене (номиналу). Прибыль инвестора получается за счет разницы цены покупки или продажи. Каждый инвестор может в любой рабочий день между днем первичного размещения облигаций и днем погашения купит или продать облигации по сложившейся на рынке цене. При этом ему придется заплатит комиссионные в размере kx, где k – пруда комиссионных, а x – сумма сделки.

Одновременно на рынке обращаются облигации разных выпусков, отличающиеся сроками погашения. Соответственно встает задача в распределении инвестируемых средств между этими выпусками с тем, чтобы максимизировать прибыль.

Введем обозначения. Пусть инвестируется сумма денег на фиксированный срок вот t=0 к t=T. Выпуски ГКО обозначим числами i, изменяющимися вот 1 к n. Для упрощения формул как один из вы пусков ГКО будем рассматривать деньги, присвоив им номер 0. Количество облигаций i-го выпуска, находящихся в портфеле инвестора в в конце торговой сессии в день t обозначим x_t^i.

Сделаем следующие предположения.

Гипотеза 1. За рассматриваемый период список облигаций, находящихся в обращении не изменяется.

Гипотеза 2. На весь период инвестирования задан прогноз изменения цен, так что цена облигаций i-го выпуска в день t считается равной p_t^i (разумеется, цена денег в любой момент равна 1).

Гипотеза 3. Действия рассматриваемого инвестора не влияют на динамику цен.

Гипотеза 4. Все сделки в данный день производятся по однои и тот же цене.

Гипотеза 5. Портфель инвестора достаточно велик, поэтому можно пренебречь эффектами, связанными с целочисленностью количеств облигаций.

Гипотеза 6. Целью управления портфелем является максимизация стоимости портфеля в конечный момент времени $\sum_{i=0}^{n} p_T^i x_T^i$.

Гипотеза 7. Единственным ограничением при переформировании портфеля во время торговой сессии является баланс находящихся в распоряжении инвестора средств: $\sum_{i=0}^{n} p_t^i x_{t-1}^i = \sum_{i=0}^{n} p_t^i x_t^i + \sum_{i=1}^{n} k p_t^i \left| x_t^i - x_{t-1}^i \right|$.

Правомерность использования этих гипотез удобно будет обсудит несколько позже. А пока приступим к поиску оптимальной стратегии оперирующей стороны.

Начнем с рассмотрения случая, когда величиной комиссионных можно пренебречь (то есть положит k=0). Тогда стандартной индукцией с конца легко устанавливается, что в день t все имеющиеся в распоряжении средства инвестор должен вкладывать в бумаги i-го выпуска, где число i определяется условием $\frac{p_{t+1}^i}{p_t^i} = \max_{1 \le j \le n} \frac{p_{t+1}^j}{p_t^j}$ (если таких выпусков несколько, то оптимальным является любое распределение средств между этими выпусками).

Отсюда получаются следующие качественные выводы.

1. Если прогноз фиксирован, то оптимальная стратегия не зависит вот предыстории. (Разумеется, динамика цен в прошлом может использоваться при построении прогноза, но в силу гипотезы 3 на него не влияют действия рассматриваемого инвестора).

2. Оптимальная стратегия не зависит вот срока инвестирования средств.

3. Для принятия решения в момент времени t нужен прогноз только на следующий день (и не нужен прогноз на более длительный срок).

4. Для принятия решений можно пользоваться реальными ценами сегодняшней сессии, и использовать прогноз только на завтра.

5. Все средства можно вкладывать в облигации только одного выпуска, цена которого растет наиболее динамично.

Вернемся к рассмотрению общего случая.

Рекуррентным образом определим величины q_t^j, t=0,1,…,T, j=0,1,…,n... Положим $q_T^j = p_T^j$, $q_t^j = \max\left\{\max_{0 \le l \le n} \frac{1-k}{1+k} \cdot \frac{q_{t+1}^l}{p_t^l}, \frac{q_{t+1}^j}{p_t^j}\right\}$ для j>0 и $q_t^0 = \max\left\{\max_{0 \le l \le n} \frac{1}{1+k} \cdot \frac{q_{t+1}^l}{p_t^l}, \frac{q_{t+1}^0}{p_t^0}\right\}$.

Стандартной индукцией «с конца» проверяется, что оптимальные действия в момент времени t состоят в следующем. Если $\max\limits_{0\le l\le n}\frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{q_{t+1}^{l}}{p_{t}^{l}}\le\frac{q_{t+1}^{j}}{p_{t}^{j}}$, то с облигациями j-го выпуска никаких операций производить не следует. В противном случае все их нужно продать, а вырученные средства вложит в тот выпуск i, для которого $\frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{q_{t+1}^{i}}{p_{t}^{i}}=\max\limits_{0\le l\le n}\frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{q_{t+1}^{l}}{p_{t}^{l}}$.

Несложный анализ наидневного решения показывает, что выводы 1 и 4 остаются неизменными.

Вывод 5 несколько изменяется. Если в начальный момент времени портфель был диверсифицирован, то при не очень разбалансированном рынке диверсификация оптимального портфеля будет сохраняться, но все-таки будет тенденция к поэтому, что все средства, в конце концов, сосредоточатся в облигациях одного выпуска.

Выводы 2 и 3 изменятся следующим образом. Пусть номер i удовлетворяет условию $\frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{q_{t+1}^{i}}{p_{t}^{i}}=\max\limits_{0\le l\le n}\frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{q_{t+1}^{l}}{p_{t}^{l}}$ и пусть найдется такой момент времени τ (t<τ<T), что $\frac{q_{\tau+1}^{i}}{p_{\tau}^{i}}\le\max\limits_{0\le l\le n}\frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{q_{\tau+1}^{l}}{p_{\tau}^{l}}$. Тогда действия в момент времени t зависят только вот прогноза к момента времени τ и не зависят вот срока инвестирования T, если только T>τ.

Эти выводы особенно важны, поскольку, с однои стороны, наличие очень «длинного» прогноза является слишком сильным предположением. А с другой стороны, во многих интересных случаях срок инвестиций заранее не известен, хотя и не очень короток. По реальным наблюдениям срок τ–t обычно составлял порядка двух недель. Это почти полностью оправдывает принятие гипотезы 6, и позволяет значительно ослабит гипотезу 2.

Обсудим остальные предположения.

Вот гипотезы 1 можно избавиться чисто формальным трюком. Будем считать, что все облигации, которые находились в обращении в течение рассматриваемого периода, находились в обращении на протяжении всего этого периода. Но цена облигаций после погашения не меняется и равна цене в день погашения. А цена облигаций к момента их фактического выпуска в обращения постоянна и равна цене в день их выпуска. Тогда вложения в такие «фиктивные» бумаги столь же хороши, как вложения в «наличные», что позволяет в случае нужды скорректировать найденное оптимальное решение, не ухудшив его.

Рассматриваемый инвестор контролировал менее одного процента объема рынка, поэтому гипотеза 3 весьма правдоподобна. Тем более, что вывод 4 позволяет рассматривать только влияние сегодняшних действий инвестора на цены завтра и в последующие дни. Заметить такое влияние в реальности ни раза не удалось.

К гипотезе 4 можно сформулировать два возражения. Во-первых, цена покупки может отличаться вот цены продажи. На практике в момент написания модели характерные спрэды были невелики. Кроме того, имея прогноз величины спрэда[18] его можно учесть, не меняя структуры модели, а просто увеличив на соответствующую величину размер комиссионных k. Во-вторых, цены могут меняться в течение торговой сессии. Это возражение отчасти снимается выводом 4, а отчасти тем, что в нормальной ситуации колебания цен в течение одного дня бывали невелики по сравнению с доступной точностью построения прогноза.

Количество облигаций в портфеле рассматриваемого инвестора измерялось тысячами (подчас многими), поэтому гипотеза 5 вполне приемлема.

Гипотеза 7 оправдывается существующими правилами обращения облигаций.

Таким образом, наиболее существенным является ослабленный вариант гипотезы 2. Это предположение действительно важно. В частности, вот него зависит важный вывод 5.

Построенная модель, с однои стороны, показывает целесообразность декомпозиции задачи управления портфелем на две части: задачу построения прогноза и задачу принятия оперативных решений. А с другой стороны демонстрирует тот факт, что эти задачи не являются независимыми, и требования к построенному прогноза определяются процедурой принятия решений.

Чтобы понятий это, рассмотрим модельный пример. Пусть имеются облигации всего двух выпусков, текущие цены которых

[18] О построении такого прогноза говорилось в одной из предыдущих лекций.

равны 70 и 80. Срок инвестирования составляет один день, и имеется два прогноза цен на завтра. Согласно первому цены будут раны 80 и 90 соответственно, а согласно второму - 50 и 70. Пусть фактические завтрашние цены оказались равны 77 и 90. Какой из прогнозов лучше? Как ни странно, второй. Согласно ему средства следует инвестировать в облигации второго выпуска, что обеспечивает доходность 13,7%. А если пользоваться первым прогнозом, то следует инвестировать средства в облигации первого выпуска, что в реальности принесет всего 10% прибыли.

В выяснении подобных качественных особенностей рассматриваемой проблемы и заключалась основная цель построения данной, сугубо предварительной модели.

- Модель дележа в Льюса-Райфы стр. 465
- Задача в фальшивых монетах как позиционная игра

Задачи

1. Приведите пример игры с полной информацией, в которой выигрыши в ситуации совершенного равновесия доминируются выигрышами в какой-то другой ситуации равновесия по Нэшу.

2. Чем отличаются позиционные формы матричных игр $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

3. (Баше де Мезириак, 1612 г.) Двое называют поочередно целые числа вот 1 до 10 и выигрывает тот, кто

первый доведет до 100 сумму чисел, названных обоими игроками. Кто выигрывает при правильной игре? Найдите оптимальную стратегию.

4. Имеется 19 спичек. Двое играющих по очереди берут из их 1, 2 или три спички. Проигравшим считается тот, кто возьмет последнюю спичку. Доказать, что берущий спичку первым всегда может выиграть.

5. Каждой вершине куб поставлен в соответствие некоторое неотрицательное действительное число, причем сумма всех этих чисел равна 1. Первый выбирает любую грань куба, второй выбирает другую грань и, наконец, первый выбирает третью грань куба. При этом выбирать граны, параллельные уже выбранным нельзя. Докажите, что первый игрок может играть так, чтобы число, соответствующее общей вершине трех выбранных граней, не превосходило 1/6.

6. Коля и Петя делят 2n+1 орехов (n>2), причем каждый хочет получить возможно больше. Предлагается три способа дележа (каждый проходит в три этапа).

1-и этап: Петя делит все орехи на две части, в каждой не меньше двух орехов.

2-и этап: Коля делит каждую часть снова на две, в каждой не меньше одного ореха.

1-(и и 2-и этапы общие для всех трех способов)

3-и этап: при первом способе Коля берет себя большую и меньшую части; при втором способе Коля берет обь средние части; при третьем способе Коля берет либо большую и меньшую части, либо обь средние части, но за право выбора отдает Пете один орех.

Определите, какой способ самый выгодный для Когда, и какой наименее выгоден для него.

7. Имеется набор G из n шаров. Два игрока A и B играют в следующую игру: в первом раунде A делит G на два непустых набора, а B выбирает один из их. Во втором раунде A делит выбранный набор еще на два, а B выбирает один из их и т.д. Игра заканчивается, когда в выбранном игроком B набор только один пласт, при этом игрок A выигрывает, если число раундов нечетно, и проигрывает, если это число четно. Определите, кто выигрывает при правильной игре и укажите выигрышную стратегию, если

А) n=1994; Б) n – произвольное натуральное число.

8. Двое играют в такую игру. Один называет цифру, а другой выставляет ее по своему усмотрению вместо однои из звездочек в следующей разности: ****-****. Затем первый называет еще одну цифру и так далее 8 раз, пока все звездочки не заменятся на цифры. Тот, кто называет цифры, стремится к поэтому, чтобы разность получилась как можно больше, а второй - чтобы она стала как можно меньше. Докажите, что

а) второй может расставлять цифры так, чтобы получившаяся при этом разность стала бы не больше 4000 незавысим вот того, какие цифры назвал первый;

б) первый может называть цифры так, чтобы разность стала не меньше 4000независим вот того, куда расставляет эти цифры второй.

9. Даны две кучки спичек. Вначале в однои кучке m спичек, в другой – n спичек, m>n. Двое по очереди берут из кучки спички. За один ход игрок берет из однои кучки любое (отличное вот нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает игрок, взявший последнюю спичку в однои из кучек.

а) Докажите, что если m>2n, то игрок делающий первый ход может обеспечить себя выигрыш.

б) при каких α верно следующее утверждение: если m>αn, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себя выигрыш?

10. Данная система уравнений $\begin{cases} ...x + ...y = 1, \\ ...x + ...y = 2. \end{cases}$ Два игрока по очереди ставят вместо многоточий числа. Начинающий выигрывает, если получившаяся система не имеет решений, и проигрывает в противном случае. Кто выигрывает при правильной игре обеих сторон?

11. На окружности дано 25 точек. Двое по очереди проводят хорды с концами в этих точках так, чтобы хорды не пересекались. Проигрывает тот, кто не может провести хорду. Кто выигрывает при правильной игре - начинающий или его партнер?

12. На окружности дано 20 точек. Двое по очереди проводят хорды с концами в этих точках так, чтобы хорды не пересекались. Проигрывает тот, кто не может провести хорду. Кто выигрывает при правильной игре - начинающий или его партнер?

13. Двое по очереди закрашивают клетки таблицы 8(8. Одним ходом разрешается закрасит одну или несколько клеток, расположенных либо в однои строке, либо в одном столбце. Клетки, закрашенные ранее, закрашивать вторично запрещается. Проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер.

14. На доске написано $\frac{...x^2 + ...x + ...}{...x + ...} = 0$. Двое играющих по очереди записывают вместо многоточий произвольные числа. Начинающий выигрывает, если получившееся уравнение не имеет корней, и проигрывает в противном случае. Кто, начинающий или его партнер, имеет в этой игре выигрышную стратегию.

15. На столе лежат карточки, на которых написаны по разу все делители числа 2000, причем на каждой карточке написан ровно один делитель. Два игрока по очереди берут себя по однои карточке. Игра производится к тех пор, пока в одного из игроков число на однои из его выбранных карточек не будет делиться на число на другой из его карточек - этот игрок считается проигравшим. Кто из игроков - начинающий или его партнер - выигрывает при правильной игре обеих сторон.

16. Полем игры служит прямоугольный письмо бумаги, разграфленный на квадратные клетки так, что имеется 10 клеток в каждой строке и 11 клеток в каждом столбце. Двое играющих делают ходы по очереди. Ход заключается в зачеркивании прямоугольника, состоящего из двух клеток. Игра идет к тех пор, пока можно делать ход. Выигравшим считается тот, кто сделает последний ход. Доказать, что сделавший первый ход всегда может выиграть.

17. Двое играют на шахматной доске в следующую игру: первый ставит на доску короля и делает ход по обычным шахматным правилам, то есть передвигает короля на соседнюю клетку по вертикалы, или по горизонтали, или по диагонали. После этого игроки поочередно делают ходы королем, причем не разрешается ставит короля на клетки, где вон уже побывал. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает в этой игре?

18. Двое играющих по очереди красят клетки квадрата 8(8. За один ход игрок красит своим цветом одну клетку. Перекрашивать клетки нельзя. Первый стремится закрасит своим цветом квадрат 2(2. Может ли второй игрок помешать первому независим вот его игры?

19. Данная полоска клетчатой бумаги длиной в 100 клеток. Двое играющих по очереди красят клетки в черный цвет, причем первый всегда красит 4 подряд идущие клетки, а второй - три подряд идущие. Уже покрашенную клетку вторично раскрашивать нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать

очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре с обеих сторон?

20. На плоскости заданы 2N точек. Два игрока играют в следующую игру: каждый из их в свою очередь походка выбирает точку из еще не выбранных. После того, как все точки разобраны, каждый из игроков подсчитывает сумму попарных расстояний между N выбранными им точками. Побеждает тот игрок, в которого эта сумма меньше. Докажите, что при правильной игре, начинающий не проиграет. (Указание: работает «жадный» алгоритм).

21. На столе лежат карточки с числами 1,2,3,…,9 (каждая карточка в одном экземпляре). Петя и Коля по очереди (Петя первым) берут себя со стола по однои карточке. Выигрывает тот, у кого раньше наберется набор из трех карточек, сумма чисел на которых в точности равна 15. Кто может гарантировать себя выигрыш? (Ответ: никто. Указание: расположить карточки так: $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$).

22. Написано 20 чисел: 1, 2,..., 20. Двое играющих по очереди ставят перед этими числами знаки «+» или «-» (знак можно ставит перед любым свободным числом). Первый стремится к поэтому, чтобы полученная после расстановки всех 20 знаков сумма была как можно меньше по модулю. Какую наибольшую по модулю сумму может обеспечить себя второй?

23. Написан многочлен $x^{10}+*x^9+x^8+\ldots+*x^2+*x+1$... Двое играют в такую игру. Сначала первый заменяет любую из

звездочек некоторым числом, затем второй заменяет числом любую из оставшихся звездочек, затем снова первый заменяет одну из звездочек числом и т.д. (всего 9 ходов). Если в полученного многочлена не будет действительных корней, то выигрывает первый игрок, а если будет хотя бы один корень - выигрывает второй. Может ли второй игрок выиграть при любой игре первого?

24. Имеется куб и две краски: красная и зеленая. Двое играют в такую игру. Начинающий выбирает три ребра куба и красит их в красный цвет. Его партнер выбирает три ребра из тех, что еще не покрашены, и красит их в зеленый цвет. После этого три ребра в красный цвет красит начинающий, а затем 3 ребра в зеленый цвет - его партнер. Запрещается перекрашивать ребро в другой цвет или красит дважды одинаковой краской. Выигрывает тот, кто сумеет покрасит своей краской все ребра какой-нибудь граны. Верно ли, что начинающий при правильной игре обязательно выигрывает?

25. Два игрока по очереди выписывают на доске натуральные числа, не превосходящие p. Правилами игры запрещается писать на доске делители уже написанных чисел. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

а) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для p=10 и укажите ее.

б) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для p=1000.

26. Дан треугольник ABC площади 1. Первый игрок выбирает точку X на стороне AB, второй Y на стороне BC, затем первый Z на стороне AC. Цель первого – получить треугольник XYZ наибольшей площади, второго – наименьшей. Какую наибольшую площадь может обеспечить себя первый?

27. Подводная лодка по длинному прямолинейному канала преследует катер. Скорость движения лодки не больше 30 км/ч, катера - не больше 10 км/ч. По тактическим соображениям капитан подводной лодки может измерить расстояние к катеру только два раза. После первого замэра расстояние оказалось равным 20 км. Как капитан подводной лодки должен выбрать момент второго замэра и как должен вести подводную лодку, чтобы через время после первого замэра расстояние между катером и лодкой не превышало 2,5 км при любом способе движения катера?

28. Командир подводной лодки получил сообщение, что над лодкой находится опасная для всплытия зона, имеющая форму сильно вытянутого прямоугольника шириной h километров. Длина прямоугольника и его ориентация командиру неизвестны. Максимальный путь, которые еще может пройти лодка без всплытия чуть больше $\frac{4h}{\sqrt{3}}$ км. Какой путь должен выбрать командир, чтобы успеть всплыть в безопасном месте, если в его распоряжении имеются приборы, постоянно показывающие, свободна или нет поверхность над лодкой. Докажите, что ни при каком выборе формы пути длиной 2h км нельзя гарантировать безопасное всплытие.

29. Танкист знает, что орудия противника находятся в точках A и B и что обстрел начнется через время t. В исходный момент танк находится в точке C, дело вот перпендикуляра, проведенного через середину отрезка AB. Куда нужно вывести танк к началу обстрела, чтобы меньшее из расстояний вот танка к точек A и B было наибольшим? Скорость v передвижения танка постоянна. Как решение зависит вот положения точки C и вот v?

30. На равнине находятся два геодезиста A, B и геодезическая вышка C. Геодезистам надо как можно быстрее попасть у точки, образующие вместе с вышкой C какой-нибудь равносторонний треугольник. Скорости геодезистов одинаковы. Куда они должны двигаться? Серию задач об игры Гранды по мотивам брошюры Шеня

Литература

1. Кун Г.У. Позиционные игры и проблема информации. // Позиционные игры. Г.: Наука. 1967. С. 13-40.

2. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. Г.: Наука. 1970.

3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Э.А. Теория игр. Г.: Высшая школа. 1998.

Лекция. Иерархические игры

Иерархия

1. Теория игр и теория принятия решений.

- Модель - всегда для определенных целей.
- Пример: барометр и хронометр.
- Пример: Уником - Сбербанк.
- В построенной модели оперирующая сторона явным образом может не присутствовать.

2. Иерархические игры.

- Определение. Игра с иерархической структурой - модель конфликтной ситуацией при фиксированной последовательности ходов и обмена информацией участников. (Математическая энциклопедия, И. А. Ватель, Ф. И. Ерешко).
- Неэлементарная теория игр.
- Порядок ходов.
- «Игры с фиксированным порядком ходов».
- Личностный фактор. Мехлис.
- «Игры с непротивоположными интересами».
- Научная работа и пьянка.

3. Принцип максимального гарантированного результата

- Третий принцип Гермейера.
- Четвертый принцип Гермейера.
- Пример: осторожность - антагонизм - персонификация - религия.

- Пример: закон в монетизации льгот.
- Обобщенный принцип максимального гарантированного результата.

4. Синтез оптимальной структуры.

- Пример: план бухгалтерских счетов - фискальный.
- Пример: Институт комиссаров.
- Пример: Китай и Германия.
- Найти решение для оптимальной структуры проще.
- Сложность управления как второй критерий.

Принцип максимального гарантированного результата

- Право, боюсь я на первых-то порах, чтобы как-нибудь не понести убытку. Может быть, ты, отец мой, меня обманываешь, а они того... они больше как-нибудь стоят.

Н.В. Гоголь

На протяжении всеи лекции будут рассматриваться только игры двух лиц. Пусть $Г=\langle U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$ – такая игра. Везде далее будем предполагать, что первый игрок, в силу своего положения обладает правом первого походка, то есть первым выбирает свою стратегию u^1 и имеет право и обязан сообщить ее противнику. В таком случае второй игрок, принимая свое решение, решает обычную задачу оптимизации. Следовательно, его действия становятся предсказуемыми, и первый игрок, выбирая u^1, должен учитывать это.

В 60-конце х годов двадцатого века Ю.Б. Гермейер предложил следующий принцип оптимальности.

Определение. Множество рациональных ответов второго игрока на стратегию u[1] первого[19]

$$B(u^1)=\begin{cases}\{u^2\in U^2 : g^2(u^1,u^2)=\max\limits_{w\in V} g^2(u^1,w)\}, \text{если } \max\limits_{w\in V} g^2(u^1,w) \text{ достигается,}\\ \{u^2\in U^2 : g^2(u^1,u^2)\geq \sup\limits_{w\in V} g^2(u^1,w)-\delta\} \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

(Здесь δ заранее заданное и известное обоим игрокам положительное число).

- Г. Захаров характеризовал Кочкарева, как человека не думающего в последствиях своих действий.
- Гипотеза в точной реализации максимума

Определение. Максимальный гарантированный результат первого игрока $R(\Gamma)=\sup\limits_{u\in U^1}\inf\limits_{v\in B(u)} g^1(u,v)$.

Близкий по смыслу принцип оптимальности изучался в начале двадцатого века Г. фон Штакельбергом. Будем считать, что первому игроку известно в том, что его партнер благожелателен, то есть из равноценных для него стратегий выбирает ту, которая лучше для первого игрока. Тогда естественно следующее

Определение. Максимальный гарантированный результат первого игрока в игре с благожелательным противником $S(\Gamma)=\sup\limits_{u\in U^1}\sup\limits_{v\in B(u)} g^1(u,v)$.

Свойства максимального гарантированного результата

---

[19] В обозначении не учтена зависимость множества рациональных ответов от рассматриваемой игры, хотя в дальнейшем будут систематически рассматриваться пары игр. К какой именно игре относится данное множество всегда будет ясно из контекста, поэтому я позволяю себе некую вольность, дабы не перегружать формулы.

Без труда устанавливается справедливость следующих трех утверждений.

Лемма. Для любой игры Г. $R(\Gamma) \geq \sup\limits_{u \in U^1} \inf\limits_{v \in U^2} g^1(u,v)$

Лемма. Для дорогого ε>0 и любой стратегии u^1 первого игрока в множестве $B(u^1)$ найдется стратегия u^2, для которой $g^2(u^1,u^2) \geq \inf\limits_{u \in U^1} \sup\limits_{v \in U^2} g^2(u,v) - \varepsilon$. Если стратегия u^1 такова, что верхняя грань $\sup\limits_{v \in U^2} g^2(u^1,v)$ достигается, то для любой стратегии $u^2 \in B(u^1)$ выполняется неравенство $g^2(u^1,u^2) \geq \inf\limits_{u \in U^1} \sup\limits_{v \in U^2} g^2(u,v)$.

Лемма. Для любой игры Г справедливо неравенство $R(\Gamma) \geq S(\Gamma)$.

Теорема 1. Если $\langle {}_*\Gamma, \pi, c^1, c^2 \rangle$ – квазиинформационное расширение игры Г, то $R({}_*\Gamma) \geq R(\Gamma)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что при любом $u^1 \in U^1$ стратегия $c^1(u^1)$ гарантирует первому игроку в игре ${}_*\Gamma$ по крайней мэр такой же выигрыш, какой гарантирует стратегия u^1 в игре Г.

Рассмотрим произвольную стратегию u^1 в игре $\Gamma = \langle U^1, U^2, g^1, g^2 \rangle$ и стратегию $c^1(u^1)$ в игре ${}_*\Gamma = \left\langle {}_*U^1, {}_*U^2, {}_*g^1, {}_*g^2 \right\rangle$. Зафиксируем произвольное ε>0. Пусть стратегия $u^2 \in U^2$ выбрана так, что $g^2(u^1,u^2) \geq \sup\limits_{v \in U^2} g^2(u^1,v) - \varepsilon$. Тогда $\sup\limits_{{}_*v \in {}_*U^2} {}_*g^2(c^1(u^1)), {}_*v) \geq {}_*g^2(c^1(u^1)), c^2(u^2))) = g^2(u^1,u^2) \geq \sup\limits_{v \in U^2} g^2(u^1,v) - \varepsilon$. В силу произвольности ε отсюда следует, что $\sup\limits_{_*v\in_*U^2} {}_*g^2(c^1(u^1)),{}_*v) \ge \sup\limits_{v\in U^2} g^2(u^1,v)$.

Обратно, пусть стратегия ${}_*u^2$ удовлетворяет условию ${}_*g^2(c^1(u^1)),u_*^2) \ge \sup\limits_{_*v\in_*U^2} {}_*g^2(c^1(u^1)),{}_*v)-\varepsilon$ и $\pi(c^1(u^1),{}_*u^2)=(u^1,u^2)$. Тогда $\sup\limits_{v\in U^2} g^2(u^1,v) \ge g^2(u^1,u^2) = {}_*g^2(c^1(u^1),{}_*u^2) \ge \sup\limits_{_*v\in_*U} {}_*g^2(c^1(u^1),{}_*v)-\varepsilon$. Так как число ε может быть выбрано сколь угодно малым, получаем неравенство $\sup\limits_{v\in U^2} g^2(u^1,v) \ge \sup\limits_{_*v\in_*U^2} {}_*g^2(c^1(u^1),{}_*v)$.

Окончательно имеем $\sup\limits_{v\in U^2} g^2(u^1,v) = \sup\limits_{_*v\in_*U^2} {}_*g^2(c^1(u^1),{}_*v)$. С учетом этого равенства непосредственно проверяется, что если максимум $\max\limits_{v\in U^2} g^2(u^1,v)$ достигается в точке u^2, то есть $g^2(u^1,u^2)=\max\limits_{v\in U^2} g^2(u^1,v)$, то в точке $c^2(u^2)$ достигается максимум $\max\limits_{_*v\in_*U^2} {}_*g^2(c^1(u^1),{}_*v)$. И обратно, если в точке ${}_*u^2$ достигается максимум $\max\limits_{_*v\in_*U^2} {}_*g^2(c^1(u^1),{}_*v)$ и $\pi(c^1(u^1),{}_*u^2)=(u^1,u^2)$, то в точке u^2 достигается максимум $\max\limits_{v\in U^2} g^2(u^1,v)$.

Из полученных результатов следует, что если ${}_*u^2 \in B(c^1(u^1))$ и $\pi(c^1(u^1),u_*^2)=(u^1,u^2)$, то $u^2\in B(u^1)$, то есть $B(c^1(u^1))\subset c^2(B(u^1))$. Поэтому

$$\inf_{v_*\in B(c^1(u^1))} g_*^1(c^1(u^1),v_*) \ge \inf_{_*v\in c^2(B(u^1))} {}_*g^1(c^1(u^1),{}_*v) = \inf_{v\in B(u^1)} {}_*g^1(c^1(u^1),c^2(v)) = \inf_{v\in B(u^1)} g^1(u^1,v)$$
.

В силу произвольности u^1 имеем тогда

$$\sup_{{}_*u^1\in c^1(U^1)}\ \inf_{{}_*v\in B(c^1(u^1))} {}_*g^1({}_*u^1,{}_*v)=\sup_{u^1\in U^1}\ \inf_{{}_*v\in B(c^1(u^1))} {}_*g^1(c^1(u^1),{}_*v)\ge \sup_{u^1\in U^1}\ \inf_{v\in B(u^1)} g^1(u^1,v)$$

.

А поскольку очевидно $c^1(U^1)\subset {}_*U^1$, окончательно имеем $\sup_{{}_*u^1\in {}_*U^1}\ \inf_{{}_*v\in B({}_*u^1)} {}_*g^1({}_*u^1,{}_*v)\ge \sup_{u^1\in U^1}\ \inf_{v\in B(u^1)} g^1(u^1,v)$. Теорема доказана.

Игра Γ_1

Лемма. Пусть в игре $\Gamma=\langle U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$ множества U^1 и U^2 компактны, а функции g^1 и g^2 непрерывны. Обозначим $E'(u)=\{v\in U^2 : g^2(u,v)=\max_{w\in U^2} g^2(u,w)\}$. Тогда $R(\Gamma)=\sup_{u\in U^1}\min_{v\in E'(u)} g^1(u,v)$.

Доказательство. При сделанных предположениях верхняя грань $\sup_{v\in U^2} g^2(u^1,v)$ достигается при любой стратегии $u^1\in U^1$, поэтому всегда $B(u^1)=E'(u^1)$. Множество $E'(u^1)$ замкнуто, как прообраз замкнутого множества (точки). А так как оно содержится в компактном множестве U^1, оно само является компактным. Поэтому минимум $\min_{v\in E'(u)} g^1(u^1,v)$ достигается.

Верхняя грань $\sup_{u\in U^1}\min_{v\in E'(u)} g^1(u,v)$ может не достигаться даже в очень простых случаях.

Пример. Пусть $U^1=U^2=[0,1]$, $g^1(u^1,u^2)=u^1-u^2$, $g^2(u^1,u^2)=$ u^2 (u^1+u^{2-2}).

Значения функции выигрыша второго игрока всегда не положительны и равны нулю при $u^2=0$. Если первый игрок выберет стратегию $u^1<1$, то $u^2=0$ будет единственным рациональным ответом второго игрока, а значит первый игрок гарантированно получит выигрыш равный u^1. Это выигрыш может быть сделан сколь угодно близким к 1. А выигрыш равный 1 первый игрок может получить только в одном случае, когда u^1=1 и u^2=0. Но при u^1=1 во второго игрока имеется два рациональных ответа: u^2=0 и u^2=1. Поэтому с гарантией первый игрок может рассчитывать только на нулевой выигрыш.

- Максимин со связанными переменными
- Пример: назначение цен

Лемма. Пусть в игре $\Gamma=\langle U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$ множества U^1 и U^2 компактны, а функции g^1 и g^2 непрерывны. Тогда $S(\Gamma)=\max\limits_{u\in U^1}\max\limits_{v\in E'(u)} g^1(u,v)$.

Доказательство. При сделанных предположениях множество $H=\left\{(u^1,u^2): g^2(u^1,u^2)=\max\limits_{v\in U^2} g^2(u^1,v)\right\}$ замкнуто, так как задается уравнением, в левой и правой частях которого стоят непрерывные функции. А так как оно содержится в компактном множестве $U^1\times U^2$, множество H само компактно. Следовательно, в некоторой точке $\left(u_0^1,u_0^2\right)$ достигается максимум $\max\limits_{(u,v)\in H} g^1(u,v)$. Тогда u_0^1 – одна из оптимальных стратегий первого игрока.

Сложные иерархические системы

Принято считать, что иерархия предполагает наличие многоуровневой разветвленной структуры. В данной лекции мы ограничиваемся рассмотрением игр двух лиц. Такие модели принципиально проще моделей общего вида. Это важная, но не единственная причина такого выбора. Многие интересные в прикладном плане модели сводятся к рассматриваемому нами частному случаю с помощью декомпозиции или агрегирования. Приведем несколько примеров.

Пусть в рассматриваемой системе оперирующая сторона стоит ни на самом верхнем уровне иерархии, то есть имеется игрок, который стоит выше оперирующей стороны, и, соответственно, принимает свое решение раньше. Тогда, в случае, когда имеется всего два игрока, для оперирующей стороны задача принятия решения становится просто задачей оптимизации. В общем случае можно считать уже выбранные стратегии всех игроков, которые по рангу выше оперирующей стороны, параметрами игры. Поэтому, по крайней мэр, на уровне теоретического анализа можно ограничиться рассмотрением того случая, когда оперирующая сторона - это игрок самого верхнего уровня.

Весьма часто встречаются иерархические системы так называемого веерного типа. Пусть имеется игра $\Gamma=<\{1,2,\ldots,n\},U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n>$в которой игрок с номером 1 – это оперирующая сторона, а критерии всех стальных игроков имеют специальный вид: $g^i(u^1,u^2,\ldots,u^n)=h^i(u^1,u^i)$ для $i=2,\ldots,n$... Тогда по-прежнему оперирующая сторона может оценить множество наилучшего ответа i игрока на его стратегию u^1: $B^i(u^1) = \operatorname{Arg}\max\limits_{u^i \in U^i} h^i(u^1,u^i)$. Тогда его максимальный гарантированный результат равен $\max\limits_{u^1 \in U^1} \min\limits_{(u^2,\ldots,u^n) \in B(u^1)} g^1(u^1,u^2,\ldots,u^n)$, где $B(u^1) = \prod\limits_{i=2}^{n} B^i(u^1)$.

Рассмотрим игру двух лиц $\hat{\Gamma} = \left\langle \{1,2\}, \tilde{U}^1, \tilde{U}^2, \tilde{g}^1, \tilde{g}^2 \right\rangle$, в которой $\tilde{U}^1 = U^1, \tilde{U}^2 = \prod\limits_{i=2}^{n} U^i, \tilde{g}^1 = g^1, \tilde{g}^2 = \sum\limits_{i=2}^{n} g^i$. Непосредственно проверяется, что данные две модели эквивалентны в том смысле, что максимальный гарантированный результат первого игрока и его оптимальные стратегии совпадают в обеих моделях, а если $\hat{u}^2 = (u^2,...,u^n)$ – наилучший ответ второго игрока на оптимальную стратегию центра в агрегированной модели, то u^i – наилучшие ответы на ту же стратегию игроков в исходной модели и наоборот.

В общем случае необходимы некоторые дополнительные предположения во взаимодействии игроков между собой. Рассмотрим, например, двухуровневую иерархическую систему, в которой на верхнем уровне находится один игрок (оперирующая сторона), а остальные игроки равноправны и принимают свои решения, зная стратегию «центра». Во многих случаях оправданным является предположение в том, что игроки нижнего уровня стремятся к выбору равновесия по Нэшу.

Тогда максимальный гарантированный результат первого игрока равен $\max\limits_{u^1 \in U^1} \min\limits_{(u^1,...,u^n)\in B(u^1)} g^1(u^1,u^2,...,u^n)$, где $B(u^1)$ – множество всех ситуаций равновесия в игре $<\{2,\dots,n\},U^2,\dots,U^n,h^2,\dots,h^n>$,в которой функции выигрыша $h:\prod\limits_{i=2}^{n} U^i \to \mathbb{R}$ определены условиями $h^i(u^2,\dots,u^n)=g^i(u^1,u^2,\dots,u^n)$...

В шестой лекции было показано, что ситуации равновесия – это точки максимума функции $\min\limits_{2\le i\le n}\inf\limits_{v^i\in U^i}\left[g(u)-g^i(u\|v^i)\right]$ по $(u^2,\dots,u^n)$ при фиксированном u^1. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к исследованию иерархической игры двух лиц $\hat{\Gamma} = \left\langle \{1,2\}, \tilde{U}^1, \tilde{U}^2, \tilde{g}^1, \tilde{g}^2 \right\rangle$, в которой $\tilde{U}^1 = U^1, \tilde{U}^2 = \prod_{i=2}^{n} U^i, \tilde{g}^1 = g^1,\ \tilde{g}^2 = \min_{2\le i\le n} \inf_{v^i \in U^i} \left[g(u) - g^i(u \| v^i) \right]$.

- Трехуровневые системы.
- Ромбовидные системы.

Игра Γ_2

Найдем максимальный гарантированный результат первого игрока в метарасширении $_1\Gamma$ игры Γ=<U^1,U^2,g^1,g^2> с правом первого походка в игрока 1. По традиции эту модель называют игрой Γ_2.

Введем обозначения

$$L = \sup_{v\in U^2} \inf_{u\in U^1} g^2(u,v), \qquad D = \{(u,v) \in U^1 \times U^2 : g^2(u,v) > L\},$$

$$K = \sup_{(u,v)\in D} g^1(u,v), \qquad E = \{v \in U^2 : \inf_{u\in U^1} g^2(u,v) = \max_{w\in U^2} \inf_{u\in U^1} g^2(u,w)\},$$

$$M = \inf_{v\in E} \sup_{u\in U^1} g^1(u,v).$$

Будем считать, что игра Γ=<U^1,U^2,g^1,g^2> такова, что верхняя грань в определении величины L достигается, или, что то же самое, множество E не пусто. Этим условиям удовлетворяют, например, игры, в которых множества U^1 и U^2 компактны, а функции g^1 и g^2 непрерывны. Тогда справедливая

Теорема 2. Максимальный гарантированный результат центра в игре Γ_2 равен наибольшему из чисел K и M.

Доказательство. Докажем сначала, что $R(\Gamma_2) \ge \max\{K,M\}$.

Фиксируем произвольное ε>0. Выберем точку (u_0^1, u_0^2) из множества D, для которой выполняется неравенство

$g^1(u_0^1,u_0^2) > K-\varepsilon$ и определим функцию $u_p^1: U^2 \to U^1$ условием: для дорогого u^2 выполняется неравенство $g^2(u_p^1(u^2),u^2) < g^2(u_0^1,u_0^2)$. Такая функция существует. Например, для любой точки $\left(u_0^1,u_0^2\right)$ из множества D подходит функция $u_p^1(u^2) = \arg\min_{u\in U^1} g^2(u,u^2)$ (или, если этот минимум не достигается, функция при каждом u достаточно точно реализующая соответствующую нижнюю грпнь).

Пусть функция $u_r^1: U^2 \to U^1$ определяется условием

$$u_r^1(u^2) = \begin{cases} u_0^1, \text{ если } u^2 = u_0^2, \\ u_p^1(u^2), \text{ если } u^2 \neq u_0^2. \end{cases}$$

Оценим множество $B(u_r^1)$. В точке u_0^2 второй игрок получает выигрыш $g^2(u_r^1(u_0^2),u_0^2) = g^2(u_0^1,u_0^2)$. А в любой другой точке u^2 вон получит выигрыш $g^2(u_r^1(u^2),u^2) = g^2(u_p^1(u^2),u^2) < g^2(u_0^1,u_0^2)$. Поэтому $B(u_r^1) = \{u_0^2\}$, а значит $\inf_{v\in B(u_r^1)} g^1(u_r^1(v),v) = g^1(u_r^1(u_0^2),u_0^2) = g^1(u_0^1,u_0^2) > K-\varepsilon$ и тем более $\sup_{u_*\in\Phi(U^2,U^1)} \inf_{v\in B(u_r^1)} g^1(u_*(v),v) > K-\varepsilon$. В силу произвольности ε имеем отсюда $\sup_{u_*\in\Phi(U^2,U^1)} \inf_{v\in B(u_r^1)} g^1(u_*(v),v) \geq K$.

Таким образом, если K≥M, то неравенство R(Г$_2$)≥max{K,M} доказано. Остается рассмотреть случай, когда K<M.

В этом случае, если u^2∈E и стратегия u^1 удовлетворяет условию $g^1(u^1,u^2) > K$, то выполняется равенство $g^2(u^1,u^2) = \min_{u\in U^1} g^2(u,u^2) = L$. Действительно, предположим противное. Так как для дорогого $u^2 \in E$ выполняется неравенство $g^2(u^1,u^2) \geq L$, то наше предположение приводит к неравенству $g^2(u^1,u^2) > L$. А значит точка (u^1,u^2) принадлежит множеству D и выполняются неравенства $K \geq g^1(u^1,u^2)$, что противоречит неравенству $g^1(u^1,u^2) > K$.

- Картинка

Фиксируем положительное $\varepsilon < M - K$ и определим теперь стратегию u_a^1 условием $g^1(u_a^1(u^2),u^2) > \sup\limits_{u \in U^1} g^1(u,u^2) - \varepsilon$. Выберем стратегию u_q^1, удовлетворяющую условию: $g^2(u_q^1(u^2),u^2) < L$ для всех u^2 не принадлежащих множеству E. Рассмотрим стратегию

$$u_i^1(u^2) = \begin{cases} u_a^1(u^2), \text{ если } u^2 \in E, \\ u_q^1(u^2), \text{ если } u^2 \notin E. \end{cases}$$

Оценим множество $B(u_i^1)$. Если $u^2 \in E$, то второй игрок получает выигрыш $g^2(u_i^1(u^2),u^2) = g^2(u_a^1(u^2),u^2) = \min\limits_{u \in U^1} g^2(u,u^2) = L$. Если же $u^2 \notin E$, то $g^2(u_i^1(u^2),u^2) = g^2(u_q^1(u^2),u^2) < L$. Таким образом, $B(u_i^1) = E$. Следовательно,

$$\inf_{v \in B(u_i^1)} g^1(u_r^1(v),v) = \inf_{v \in E} g^1(u_r^1(v),v) = \inf_{v \in E} g^1(u_a^1(v),v) \geq \inf_{v \in E} \sup_{u \in U^1} g^1(u,v) - \varepsilon = M - \varepsilon$$

,

и тем более $\sup\limits_{u_* \in \Phi(U^2,U^1)} \inf\limits_{v \in B(u_r^1)} g^1(u_*(v),v) \geq M - \varepsilon$. Поскольку ε может выбрано произвольно малым, выполняется и неравенство $\sup\limits_{u_* \in \Phi(U^2,U^1)} \inf\limits_{v \in B(u_r^1)} g^1(u_*(v),v) \geq M$.

Обратное неравенство $R(\Gamma_2) \leq \max\{K,M\}$ непосредственно получается из утверждения теоремы 3.

- Пример: оптовые и розничные цены
- Неполное наказание
- Результат в Γ_2 лучше, чем в Γ_1
- В оптимальном расширении решение выглядит проще

Оптимальное расширение

Теорема 3. Если $_*\Gamma$ – произвольное расширение тот же игры Γ, то $R(_*\Gamma)\le\max\{K,M\}$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Выберем стратегию $_*u^1 \in {}_*U^1$ так, что $\inf\limits_{_*u^2\in B(_*u^1)} {}_*g^1(_*u^1, {}_*u^2) \ge \sup\limits_{_*u^1\in {}_*U^1} \inf\limits_{_*u^2\in B(_*u^1)} {}_*g^1(_*u^1, {}_*u^2) - \varepsilon = R(_*\Gamma) - \varepsilon$. Пусть $_*u^2 \in B(_*u^1)$.

Допустим сначала, что $_*g^2(_*u^1, {}_*u^2) > L$. Тогда $\pi(_*u^1, {}_*u^2) \in D$ и $_*g^1(_*u^1, {}_*u^2) = g^1(\pi(_*u^1, {}_*u^2)) \le K$ и, следовательно, $R(_*\Gamma)\le K+\varepsilon\le\max\{K,M\}+\varepsilon$.

Если же $_*g^2(_*u^1, {}_*u^2) \le L$, то для дорогого $u^2\in E$ имеем $_*g^2(_*u^1, c^2(u^2)) = g^2(\pi(_*u^1, c^2(u^2))) = g^2(u^1, u^2) \ge \min\limits_{u^1\in U^1} g^2(u^1,u^2) = \max\limits_{u^2\in U^2}\min\limits_{u^1\in U^1} g^2(u^1,u^2) = L$, а значит стратегия $c^2(u^2)$ принадлежит множеству рациональных ответов $B(_*u^1)$. А тогда

$$\inf_{_*u^2\in B(_*u^1)} {}_*g^1(_*u^1, {}_*u^2) \le \inf_{_*u^2\in c^2(E)} {}_*g^1(_*u^1, {}_*u^2) =$$
$$= \inf_{u^2\in E} {}_*g^1(\pi(_*u^1, c^2(u^2))) = \inf_{u^2\in E} g^1(u^1,u^2) \le \min_{u^2\in E}\max_{u^1\in U^1} g^1(u^1,u^2) = M$$

Таким образом, в этом случае $R(_*\Gamma)\le M+\varepsilon\le\max\{K,M\}+\varepsilon$.

Итак, в обоих случаях $R({}_*\Gamma)\le\max\{K,M\}+\varepsilon$. А так как число ε произвольно, отсюда следует неравенство $R(\Gamma_*)\le \max\{K,M\}$. Теорема доказана.

Игра Γ_3

Найдем максимальный гарантированный результат первого игрока в метарасширении ${}_{12}\Gamma$ игры $\Gamma=\langle U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$ с правом первого походка в игрока 1. По традиции эту модель называют игрой Γ_3.

- Второй игрок знает выбор первого
- Желание увеличить выигрыш

Пусть игра $\Gamma=\langle U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$ такова, что множества U^1 и U^2 компактны, а функции g^1 и g^2 непрерывны.

Введем обозначения

$$L' = \min_{u\in U^1}\max_{v\in U^2} g^2(u,v), \qquad D' = \{(u,v)\in U^1\times U^2 : g^2(u,v) > L'\},$$

$$K' = \sup_{(u,v)\in D'} g^1(u,v)\,, \qquad E'(u) = \{v\in U^2 : g^2(u,v) = \max_{w\in U^2} g^2(u,w)\},$$

$$M' = \sup_{u\in U^1}\min_{v\in E'(u)} g^1(u,v)\,.$$

Теорема 4. Максимальный гарантированный результат центра в игре Γ_3 равен наибольшему из чисел K' и M'.

Доказательство. Теорема может быть доказана тем же методом, которым был доказанная теорема 2. Мы приведем другое, более техническое доказательство, сводящее рассматриваемую задачу к уже решенной.

Рассмотрим квазиинформационное расширение $\langle\Gamma_*,\pi,c^1,c^2\rangle$ игры Γ, определенное условиями: ${}_2\Gamma = \left\langle {}_2U^1, {}_2U^2, {}_2g^1, {}_2g^2 \right\rangle$, ${}_2U^1 = U^1$, ${}_2U^2 = \Phi(U^1,U^2)$,

${}_2g^1({}_2u^1, {}_2u^2) = g^1({}_2u^1, {}_2u^1({}_2u^1))$, $\quad {}_2g^2({}_2u^1, {}_2u^2) = g^2({}_2u^1, {}_1u^2({}_2u^1))$, $\pi({}_2u^1, {}_2u^2) = ({}_2u^1, {}_2u^2({}_2u^1))$, $c^1({}_2u^1) = {}_2u^1$, а отображение c^2 ставит в соответствие элементу $u^2 \in U^2$ функцию ${}_2u^2 : U^1 \to U^2$, тождественно равную u^2. Покажем, что игра ${}_2\Gamma$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Определим функцию ${}_2u_a^2$ условием $g^2(u^1, {}_2u_a^2(u^1)) = \max\limits_{v \in U^2} g^2(u^1, v)$ для дорогого $u^1 \in U^1$. Тогда

$$\sup_{{}_2u^2 \in {}_2U^2} \inf_{{}_2u^1 \in {}_2U^1} {}_2g^2({}_2u^1, {}_2u^2) \geq \inf_{{}_2u^1 \in {}_2U^1} {}_2g^2({}_2u^1, {}_2u_a^2) =$$
$$= \inf_{u^1 \in U^1} g^2(u^1, {}_2u_a^2(u^1)) = \inf_{u^1 \in U^1} \max_{v \in U^2} g^2(u^1, v) = \min_{u \in U^1} \max_{v \in U^2} g^2(u, v).$$

С другой стороны, если u^1 удовлетворяет условию

$$\max_{v \in V} g^2(u^1, v) = \min_{u \in U} \max_{v \in V} g^2(u, v),$$

это

$$\inf_{{}_2u^1 \in {}_2U^1} \sup_{{}_2u^2 \in {}_2U^2} {}_2g^2({}_2u^1, {}_2u^2) \leq \sup_{{}_2u^2 \in {}_2U^2} {}_2g^2(c^1(u^1), {}_2u^2) = \sup_{{}_2u^2 \in {}_2U^2} g^2(u^1, {}_2u^2(u^1)) =$$
$$= \sup_{u^2 \in U^2} g^2(u^1, u^2) = \max_{v \in U^2} g^2(u^1, v) = \min_{u \in U^1} \max_{v \in U^2} g^2(u, v).$$

С учетом неравенства $\sup\limits_{{}_2u^2 \in {}_2U^2} \inf\limits_{{}_2u^1 \in {}_2U^1} {}_2g^2({}_2u^1, {}_2u^2) \leq \inf\limits_{{}_2u^1 \in {}_2U^1} \sup\limits_{{}_2u^2 \in {}_2U^2} {}_2g^2({}_2u^1, {}_2u^2)$, получим

$$\sup_{{}_2u^2 \in {}_2U^2} \inf_{{}_2u^1 \in {}_2U^1} {}_2g^1({}_2u^1, {}_2u^2) = \inf_{{}_2u^1 \in {}_2U^1} \sup_{{}_2u^2 \in {}_2U^2} {}_2g^2({}_2u^1, {}_2u^2) = \min_{u \in U^1} \max_{v \in U^2} g^2(u, v)$$
,

причем верхняя грань в левой части равенства достигается, например, на функции ${}_2u_a^2$.

Поэтому выполняются условия теоремы 2, и для вычисления максимального гарантированного результата первого игрока в игре Γ_* достаточно вычислить величины

$$_2L = \max_{_2v\in {}_2U^2} \inf_{_2u\in {}_2U^1} {}_2g^2({}_2u, {}_2v),$$

$$_2D = \{({}_2u, {}_2v) \in {}_2U^1 \times {}_1U^2 :_2 g^2({}_2u, {}_2v) > {}_2L\}, \qquad {}_2K = \sup_{({}_2u, {}_2v)\in D} {}_2g^1({}_2u, {}_2v),$$

$$_2E = \{{}_2v \in {}_2U^2 : \inf_{_2u\in {}_2U^1} {}_2g^2({}_2u, {}_2v) = \max_{_2w\in {}_2U^2} \inf_{_2u\in {}_2U^1} {}_2g^2({}_2u, {}_2w)\},$$

$$_2M = \inf_{_2v\in {}_2E} \sup_{_2u\in {}_2U^1} {}_2g^1({}_2u, {}_2v).$$

Только что доказано, что $_2L=L'$. Для вычисления величины $_2K$ нужно решить задачу оптимизации. Информированность в таких задачах никакой роли не играет. Формально это доказывается следующим образом.

Пусть (u,v) – произвольный элемент из D'. Тогда $_2g^2(c^1(u),c^2(v)) = g^2(u,v) > L' = {}_2L$, то есть $(c^1(u),c^2(v))$ принадлежит $_2D$, и поскольку $_2g^1(c^1(u),c^2(v)) = g^1(u,v)$, выполняется неравенство $K'\leq{}_2K$. Обратно, если $({}_2u, {}_2v) \in {}_2D$, то $g^2({}_2u, {}_2v({}_2u)) = {}_2g^2({}_2u, {}_2v) > {}_2L = L'$, а значит $({}_2u, {}_2v({}_2u)) \in D'$. Следовательно, так как $g^1({}_2u, {}_2v({}_2u)) = {}_2g^1({}_2u, {}_2v)$, приходим к неравенству $K'\geq{}_2K$. Окончательно имеем $K'={}_2K$.

Рассмотрим произвольную функцию u_*^2, определенную условием $_2u^2(u) \in \operatorname{Arg}\min_{v\in E'(u)} g^1(u,v)$ для дорогого $u\in U^1$. Непосредственно проверяется, что $_2u^2 \in {}_2E$. По определению $g^1(u,u_*^2(u)) = \min_{v\in E'(u)} g^1(u,v)$, а значит $\max_{u\in U^1} g^1(u, {}_2u^2(u)) = \max_{u\in U^1} \min_{v\in E'(u)} g^1(u,v) = M'$ и, следовательно

$$_2M = \inf_{_2v\in {}_2E} \sup_{_2u\in {}_2U^1} {}_2g^1({}_2u, {}_2v) = \inf_{_2v\in {}_2E} \sup_{u\in U^1} g^1(u, {}_2v(u)) \leq \max_{u\in U^1} g^1(u, {}_2u^2(u)) \leq M'.$$

В случае $K'\geq M'$ теорема 4 доказывается ссылкой на теорему 2, так как тогда ${}_2M\leq M'\leq K'={}_2K$ и, следовательно, $\max\{{}_2K,{}_2M\}={}_2K=K'=\max\{K',M'\}$.

Остается рассмотреть случай $K'<M'$. Выберем $u^1\in \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in U^1}\min\limits_{v\in E'(u)} g^1(u,v)$. Если $K'<M'$, то выбранный так элемент удовлетворяет условию $u^1\in \operatorname{Arg}\min\limits_{u\in U^1}\max\limits_{v\in U^2} g^2(u,v)$. Действительно, иначе для дорогого $v\in E(u^1)$ выполняется неравенство $g^2(u^1,v)>L'$, а значит пара (u^1,v) принадлежит D' и $g^1(u^1,v)<K'$, что противоречит неравенству $K'<M'$. Но тогда для любой функции ${}_2u^2\in {}_2E$ выполняется условие ${}_2u^2({}_2u^1)\in E'({}_2u^1)$ и значит $\inf\limits_{{}_2u^2\in E_*} g^1({}_2u^1,{}_2u^2({}_2u^1))\geq \min\limits_{v\in E'(u)} g^1({}_2u^1,v)=\max\limits_{u\in U^1}\min\limits_{v\in E'(u)} g^1(u,v)=M'$ и тем более ${}_2M=\inf\limits_{{}_2u^2\in {}_2E}\sup\limits_{{}_2u^1\in {}_2U^1} g^1({}_2u^1,{}_2u^2({}_2u^1))\geq \inf\limits_{{}_2u^2\in {}_2E} g^1({}_2u^1,{}_2u^2({}_2u^1))\geq M'$. Учитывая доказанное двумя абзацами выше неравенство ${}_2M\leq M'$, получаем равенство ${}_2M_*=M'$. И доказательство теоремы 4 завершается ссылкой на теорему 2.

Дальнейшие расширения

Лемма. Пусть игра $\Gamma=\langle U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$ такова, что множества U^1 и U^2 компактны, а функции g^1 и g^2 непрерывны. Тогда выполняются неравенства $R(\Gamma_1)\leq R(\Gamma_3)\leq R(\Gamma_2)$.

Доказательство. Первое неравенство следует из того, что игра Γ_3 является квазиинформационным расширением игры Γ. Второе непосредственно вытекает из теорем 2 и 3.

Лемма. Пусть игра $\Gamma=\langle U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$ такова, что множества U^1 и U^2 компактны, а функции g^1 и g^2 непрерывны, а ${}_*\Gamma$ –

произвольное квазиинформационное расширение игры ${}_1\Gamma$. Тогда $R({}_*\Gamma)=R(\Gamma_2)$.

Доказательство. Так как ${}_*\Gamma$ – квазиинформационное расширение игры ${}_1\Gamma$, выполняется неравенство $R({}_*\Gamma)\geq R(\Gamma_2)$. А в силу теорем 2 и 3 выполняется неравенство $R({}_*\Gamma)\leq R(\Gamma_2)$.

Лемма. Пусть игра $\Gamma=<U^1,U^2,g^1,g^2>$ такова, что множества U^1 и U^2 компактны, а функции g^1 и g^2 непрерывны, а ${}_*\Gamma$ – произвольное квазиинформационное расширение игры ${}_{12}\Gamma$. Тогда $R({}_*\Gamma)=R(\Gamma_3)$.

Доказательство. Так как ${}_*\Gamma$ – квазиинформационное расширение игры ${}_{12}\Gamma$, выполняется неравенство $R({}_*\Gamma)\geq R(\Gamma_3)$.

Так как ${}_*\Gamma$ – квазиинформационное расширение игры ${}_{12}\Gamma$, игра ${}_*\Gamma$ является также квазиинформационным расширением игры ${}_2\Gamma$. Значит, в силу теоремы 3 $R({}_*\Gamma)\leq R({}_1({}_2\Gamma))= R({}_{12}\Gamma)$.

Игры с агрегированной информацией

Пусть $\Gamma=<\{1,2\},U^1,U^2,g^1,g^2>$ – игра двух лиц, и $P:U^2\rightarrow W$ – некоторое отображение. Рассмотрим информационное расширение ${}_P\Gamma=<\{1,2\},{}_PU^1,{}_PU^2,{}_Pg^1,{}_Pg^2>$ игры Γ, определенное следующим образом. Положим ${}_PU^1=\Phi(W,U^1)$, ${}_PU^2=U^2$, $\pi({}_Pu^1,{}_Pu^2)=({}_Pu^1(P({}_Pu^2)),{}_Pu^2)$, функции выигрыша ${}_Pg^1$ и ${}_Pg^2$ определим в соответствии с определением квазиинформационного расширения, в качестве c^1 возьмем отображение, которое каждому $u^1\in U^1$ ставит в соответствие функцию из W в U^1, тождественно равную u^1, а в качестве c^2 – тождественное отображение.

Множество B($_P u^1$) рациональных ответов второго игрока на стратегию $_P u^1$ определим стандартным образом:

$$B({}_P u^1)=\begin{cases}\{u^2\in U^2 : g^2({}_P u^1(P(u^2)),u^2)=\max\limits_{w\in V} g^2({}_P u^1(P(w)),w)\},\ \text{если} \\ \max\limits_{w\in V} g^2({}_P u^1(P(w)),w)\ \text{достигается,} \\ \{u^2\in U^2 : g^2({}_P u^1(P(u^2)),u^2)\ge \sup\limits_{w\in V} g^2({}_P u(P(w)),w)-\delta({}_P u^1)\}\ \text{в противном случае}\end{cases}$$

(Здесь δ заранее заданная и известная обоим игрокам функция, принимающая положительные значения). Максимальный гарантированный результат первого игрока $R({}_P\Gamma)=\sup\limits_{{}_P u\in {}_P U^1}\ \inf\limits_{v\in B({}_P u^1)} g^1({}_P u^1(P(v)),v)$.

В дальнейшем будем предполагать, что множества U^1 и U^2 компактны, а функции g^1, g^2 и P непрерывны. Тогда, не ограничивая общности можно считать, что и множество W компактно, так как в противном случае можно перейти к его подмножеству
{P(v): $v\in U^2$}, которое компактно как образ компактного множества при непрерывном отображении.

Займемся поиском максимального гарантированного результата первого игрока в рассматриваемой игре. Введем обозначение: Q(w)={$v\in U^2$: P(v)=w}. Для дорогого $w\in W$ множество Q(w) замкнуто, как прообраз замкнутого множества (точки), а, следовательно, и компактно, поскольку содержится в компактном множестве U^2.

Определим множество $R(u,w)=Q(w)\bigcap B(u)$, где, как обычно, $B(u)=\left\{u^2\in U^2 : g^2(u,u^2)=\max\limits_{v\in U^2} g^2(u,u^2)\right\}$.

Рассмотрим игру $\Delta=<\{1,2\},U^1,W,h^1,h^2>$, функции выигрыша в которой определяются условиями $h^1(u,w)=\min\limits_{v\in R(u,w)} g^1(u,v)$, $h^2(u,w)=\max\limits_{v\in R(u,w)} g^2(u,v)$. Непосредственным сравнением определений устанавливается, что максимальные гарантированные результаты в рассматриваемом нами информационном расширении исходной игры Г и в стандартном метарасширении $_1\Delta$ игры Δ совпадают, так же как и множества оптимальных стратегий первого игрока.

Функция h^2 может не быть непрерывной. Однако при сделанных нами предположениях максимум в выражении $\max\limits_{w\in W}\inf\limits_{u\in U^1} h^2(u,w)$ достигается. Действительно, пусть последовательность $w_1,w_2,...$ точек из множества W такова, что $\lim\limits_{t\to\infty}\inf\limits_{u\in U^1} h^2(u,w_t)=\sup\limits_{w\in W}\inf\limits_{u\in U^1} h^2(u,w_t)$. В силу сделанного предположения в компактности множества W, можно, не ограничивая общности, считать, что эта последовательность сходится к точка w_0. Тогда достаточно доказать, что $\lim\limits_{t\to\infty}\inf\limits_{u\in U^1} h^2(u,w_t)\le\inf\limits_{u\in U^1} h^2(u,w_0)$. Допустим, что напротив $\lim\limits_{t\to\infty}\inf\limits_{u\in U^1} h^2(u,w_t)-\inf\limits_{u\in U^1} h^2(u,w_0)=2\delta>0$. Выберем $u_0\in U^1$ так, что $h(u_0,w_0)<\inf\limits_{u\in U^1} h(u,w_0)+\delta$. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty}\inf\limits_{u\in U^1} h^2(u,w_t)\ge\lim\limits_{t\to\infty} h^2(u_0,w_t)=\lim\limits_{t\to\infty}\max\limits_{v\in R(u_0,w_t)} g^2(u_0,v)$. В силу сделанных предположений в непрерывности и компактности каждое из множеств $Q(w_t)$ и $B(u_0)$ замкнуто, а значит, замкнуто и их пересечение $R(u_0,w_t)$. Так как это множество содержится в компактном множестве W, оно само компактно, а потому существует $v_t \in R(u_0,w_t)$, для которого $g^2(u_0,v_t) = \max\limits_{v \in R(u_0,w_t)} g^2(u_0,v)$. В силу компактности множества V можно, не умаляя общности, считать, что последовательность $v_1,v_2,\ldots$ сходится к некоторому $v_0 \in V$. В силу непрерывности отображения P, выполняется условие $v_0 \in Q(w_0)$, а в силу непрерывности функции g^2 имеет место включение $v_0 \in B(u_0)$. Значит, $v_0 \in R(u_0,w_0)$. Но тогда

$$\lim_{t\to\infty} \inf_{u \in U^1} h^2(u,w_t) \le \lim_{t\to\infty} h^2(u_0,w_t) = \lim_{t\to\infty} g^2(u_0,v_t) =$$
$$= g^2(u_0,v_0) \le \max_{v \in R(u_0,w_0)} g^2(u_0,v) = h^2(u_0,w_0) \le \inf_{U \in U^1} h^2(u,w_0) + \delta.$$

Получено противоречие.

Таким образом, при поиске максимального гарантированного результата в игре ${}_1\Delta$ можно воспользоваться полученными выше результатами. Конкретизируя их для игры специального вида, придем к следующему результата.

Теорема. Максимальный гарантированный результат первого игрока в игре ${}_P\Gamma$ равен наибольшему из чисел K и M, где

$L = \sup\limits_{w \in W} \inf\limits_{u \in U^1} \min\limits_{v \in Q(w)} g^1(u,v)$, $\qquad D = \{(u,v) \in U^1 \times U^2 : g^2(u,v) > L\}$,

$K = \sup\limits_{(u,v) \in D} g^1(u,v)$, $\qquad E = \{w \in W : \inf\limits_{u \in U^1} \sup\limits_{v \in Q(w)} g^2(u,v) = \max\limits_{w \in W} \inf\limits_{u \in U^1} \sup\limits_{v \in Q(w)} g^2(u,v)\}$,

$M = \inf\limits_{w \in E} \sup\limits_{u \in U^1} \inf\limits_{v \in Q(w)} g^1(u,v)$.

Игры с блефом

Пусть $\Gamma = \langle \{1,2\}, U^1, U^2, g^1, g^2 \rangle$ – игра двух лиц. Рассмотрим ее информационное расширение ${}_*\Gamma = \langle \{1,2\}, {}_*U^1, {}_*U^2, {}_*g^1, {}_*g^2 \rangle$, определенное следующим образом. Положим ${}_*U^2 = U^2 \times U^2$, ${}_*U^1 = \Phi(U^2, U^1)$, отображение c^1 ставит в соответствие элементу u^1 из U^1 функцию из U^2 в U^1, тождественно равную u^1, отображение c^2 ставит в соответствие элементу u^2 пара (u^2,u^2) , а проекция π определяется условием $\pi({}_*u^1,(v,w))=({}_*u^1(w),v)$. Функции выигрыша определены условиями ${}_*g^i({}_*u^1,{}_*u^2)=g^i(\pi({}_*u^1,{}_*u^2))$.

Рассмотрим еще игру $\Delta=<\{1,2\},U^1,U^2\times U^2,h^1,h^2>$ функции выигрыша в которой определяются условиями $h^i(u,v,w)=g^i(u,v)$ и ее информационное расширение ${}_P\Delta$, определенное так как в предыдущем разделе, где отображение P: $U^2\times U^2\to U^2$ определено равенством $P(v,w)=v$.

Непосредственно проверяется, что игры ${}_*\Gamma$ и ${}_P\Delta$ изоморфны в том смысле, что каждая из их является квазиинформационным расширением другой. Поэтому максимальные гарантированные результаты в них равны. И для поиска максимального гарантированного результата в игре ${}_*\Gamma$ можно использовать результаты, полученные в предыдущем разделе.

Нетрудно убедиться, что в данном случае вон равен максимальному гарантированному результата первого игрока в исходной игре Г. Таким образом, информация, которую первый игрок не может проверить, ничего не дает ему в смысле повышения гарантированного результата. В следующей лекции будет показано, что этот вывод существенно зависит вот того, что первому игроку точно известна функция выигрыша противника.

Разумеется, результаты данного раздела можно[20] получить непосредственно, не апеллируя к моделям с агрегированием информации. Полезно сделать это для упражнения.

Игры с добровольным обменом информацией

Пусть $\Gamma=\langle\{1,2\},U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$ – игра двух лиц. Рассмотрим ее информационное расширение $_*\Gamma=\langle\{1,2\},{}_*U^1,{}_*U^2,{}_*g^1,{}_*g^2\rangle$, определенное следующим образом. Положим $_*U^2=U^2\times\{0,1\}$, $_*U^1=\Phi(U^2,\ U^1)\times U^1$. Пусть оператор d ставит в соответствие элементу u^1 из U^1 функцию из $\Phi(U^2, U^1)$, тождественно равную u^1. Определим вложение c^1, положил $c^1(u^1)=(d(u^1),u^1)$. Вложение c^2 определим условием $c^2(u^2)=(u^2,0)$, Проекцию π зададим условием $\pi((\tilde{u},u),(v,l))=\begin{cases}(\tilde{u}(v),v), \text{ если } l=1,\\ (u,v), \text{ если } l=0.\end{cases}$ Функции выигрыша определим условиями $_*g^i({}_*u^1,{}_*u^2)=g^i(\pi({}_*u^1,{}_*u^2))$.

Теорема. Максимальный гарантированный результат $R(_*\Gamma)$ первого игрока в игре $_*\Gamma$ равен его максимальному гарантированному результата $R(\Gamma_3)$ в игре Γ_3.

Доказательство. Используем введенные выше обозначения.

Величина $M'=\max\limits_{u\in U^1}\min\limits_{v\in E'(u)} g^1(u,v)$ (где $E'(u)=\{v\in U^2 : g^2(u,v)=\max\limits_{w\in U^2} g^2(u,w)\}$) есть, по сути, максимальный гарантированный результат первого игрока в исходной игре Γ. А так как $_*\Gamma$ – ее квазиинформационное расширение, получаем неравенство $R(_*\Gamma)\geq M'$.

[20] И даже проще.

Фиксируем произвольное ε>0 и выберем в множестве $D' = \{(u,v) \in U^1 \times U^2 : g^2(u,v) > L'\}$ точку $(u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2)$, удовлетворяющую условию $g^1(u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2) \ge K' - \varepsilon$ (напомним, что $L' = \min\limits_{u \in U^1} \max\limits_{v \in U^2} g^2(u,v)$, $K' = \sup\limits_{(u,v) \in D'} g^1(u,v)$). Определим управление u_p^1 условием $\max\limits_{v \in U^2} g^2(u_p^1, v) = \min\limits_{u \in U^1} \max\limits_{v \in U^2} g^2(u_p^1, v)$ и функцию $\tilde{u} \in \Phi(U^2, U^1)$ условием

$$\tilde{u}(v) = \begin{cases} u_\varepsilon^1, \text{ если } v = u_\varepsilon^2, \\ u_p^1, \text{ если } v \ne u_\varepsilon^2 \end{cases}$$

Рассмотрим стратегию $(\tilde{u}\ , u_p^1\ )$ первого игрока. Если в ответ на нее второй игрок выберет стратегию $\left(u_\varepsilon^2, 1\right)$, то вон получит выигрыш $g^2(u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2) > L'$. В противном случае вон получит выигрыш $g^2(u_p^1, v) \le \max\limits_{v \in U^2} g^2(u_p^1, v) = \min\limits_{u \in U^1} \max\limits_{v \in U^2} g^2(u_p^1, v) = L'$. Поэтому множество рациональных ответов второго игрока на стратегию $(\tilde{u}\ , u_p^1\ )$ состоит из одного элемента $\left(u_\varepsilon^2, 1\right)$ и первый игрок гарантированно получает выигрыш $g^1(u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2) \ge K' - \varepsilon$.

Таким образом, $R({}_*\Gamma) \ge K' - \varepsilon$. А поскольку ε выбиралось произвольно, выполняется и неравенство $R({}_*\Gamma) \ge K'$. Итак, $R({}_*\Gamma) \ge R(\Gamma_3)$.

Пусть теперь ${}_*u^1 = (\tilde{u}\ , u)$ – произвольная стратегия первого игрока, а управление v удовлетворяет условию $g^2(u,v) = \max\limits_{w \in U^2} g^2(u,w)$. Тогда стратегия (v,0) гарантирует второму игроку выигрыш $g^2(u,v) = \max\limits_{w \in U^2} g^2(u,w) \ge L'$. Поэтому возможны два случая.

1. $\sup\limits_{{}_*u^2 \in {}_*U^2} {}_*g^2({}_*u^1, {}_*u^2) > L'$. В таком случае, по крайней мэр, для одного элемента ${}_*u^2$множества $B({}_*u^1)$ выполняется условие $\pi({}_*u^1,{}_*u^2)\in D'$, и первый игрок не может гарантированно получить выигрыш больший, чем K'.

2. $\sup\limits_{{}_*u^2 \in {}_*U^2} {}_*g^2({}_*u^1, {}_*u^2) = L'$. Тогда для дорогого элемента v множества E' стратегия (v,0) принадлежит $B({}_*u^1)$, и первый игрок не может гарантированно получить выигрыш больший, чем K'.

Итак, в обоих случаях $R({}_*\Gamma)\le R(\Gamma_3)$, что и требовалось доказать.

Последняя теорема доказывает, что в случае $K'> M'$, обмен информацией выгоден обоим игрокам.

Дуополия Курно

В качестве примера решения соответствующих задач рассмотрим уже знакомую модель.

Две фирмы выпускают однородный товар и продают его на рынке. Цена, складывающаяся на рынке, линейно убывает с ростом суммарного предложения: $p(u_1,u_2)=a–b(u_1+u_2)$, где u_1 и u_2 объемы выпуска продукции первой и второй фирмой соответственно (по своему смыслу величины u_1 и u_2 неотрицательны). Пусть затраты первой и второй фирм на выпуск единицы продукции равны c_1 и c_2, а их цели состоят в максимизации прибылей $g^1(u_1,u_2)= p(u_1,u_2)u_1–c_1u_1$ и $g^2(u_1,u_2)= p(u_1,u_2)u_2–c_2u_2$.

Сразу исключим из рассмотрения тривиальные случаи $a \le c_1$ или $a \le c_2$. В этих случаях однои из фирм выгодно совсем не выпускать продукцию, не завысим вот действий конкурентов. Поэтому существует точка, в которой достигаются максимумы критериев обоих игроков, и любой разумный[21] принцип оптимальности должен приводит к этой точке.

Рассмотрим сначала игру Γ_1. Соответствующая модель может быть проинтерпретирована, например, следующим образом. Фирмы производят пшеницу, и объем выпуска каждой фирмы линейно зависит вот посевных площадей. В силу климатических условий первая фирма производит сев раньше второй, и информация в засеянных площадях общедоступна.

Итак, пусть первая фирма произвела продукцию в объеме u_1 и это стало известно второй фирме. Найдем ее оптимальную реакцию. Для нее задача сводится к максимизации (по u_2) функции $(a-c_2-bu_1)u_2-bu_2^2$. Максимум достигается в точке $u_2=0$, если $a-c_2-bu_1\le 0$, и в точке $\frac{1}{2b}(a-c_2-bu_1)$ в противном случае.

Таким образом, в данном случае множество $B(u_1)$ рациональных ответов второго игрока при любой стратегии u_1 состоит из однои точки. Поэтому в рассматриваемой игре

$$f(u_1)=\min_{v\in B(u_1)} g^1(u_1,v)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[(a-2c_1+c_2)u_1-bu_1^2\right], \text{ если } u_1<\dfrac{a-c_2}{b},\\ (a-c_1)u_1-bu_1^2, \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Остается найти максимум этой (непрерывной!) функции. Характер решения зависит вот соотношения параметров задачи.

[21] А все рассматриваемые нами принципы оптимальности относятся к этой категории.

- Картинки

1. Если $c_2 > \frac{a+c_1}{2}$, то вершина параболы $\frac{1}{2}\left[(a-2c_1+c_2)u_1 - bu_1^2\right]$ лежит дело вот отрезка $\left[0, \frac{a-c_2}{b}\right]$, а потому максимум функции f(u_1) достигается на интервале $\left[\frac{a-c_2}{b}, +\infty\right)$. При таком сочетании параметров вершина $\frac{a-c_1}{2b}$ параболы $(a-c_1)u_1 - bu_1^2$ принадлежит указанному интервалу, а потому максимум достигается именно в этой точке. Таким образом, оптимальная стратегия первого игрока в этом случае есть $u_1 = \frac{a-c_1}{2b}$, а наилучший ответ второго игрока на эту стратегию – u_2=0. Максимальный гарантированный результат первого игрока при этом равен $\frac{(a-c_1)^2}{4b}$. Это - глобальный максимум выигрыша первого игрока.

Непосредственно проверяется, что это решение является равновесием по Нэшу и эффективной точкой.

2. Если $\frac{a+2c_1}{3} \le c_2 \le \frac{a+c_1}{2}$, то вершина параболы $\frac{1}{2}\left[(a-2c_1+c_2)u_1 - bu_1^2\right]$ лежит дело вот отрезка $\left[0, \frac{a-c_2}{b}\right]$, а вершина параболы $(a-c_1)u_1 - bu_1^2$ лежит слева вот интервала $\left[\frac{a-c_2}{b}, +\infty\right)$. Значит, максимум функции f(u_1) достигается в точке $u_1 = \frac{a-c_2}{b}$. Наилучший ответ на эту стратегию по-прежнему u_2=0, а

максимальный гарантированный результат первого игрока равен $\frac{(a-c_2)(c_2-c_1)}{b}$.

Теперь решение уже не является ни равновесием, ни эффективным.

3. Если $c_2 < \frac{a+2c_1}{3}$, то вершина параболы $\frac{1}{2}\left[(a-2c_1+c_2)u_1 - bu_1^2\right]$ лежит на отрезке $\left[0, \frac{a-c_2}{b}\right]$, а вершина параболы $(a-c_1)u_1 - bu_1^2$ лежит слева вот интервала $\left[\frac{a-c_2}{b}, +\infty\right)$. Значит, максимум функции f(u_1) достигается в вершине $u_1 = \frac{a-2c_1+c_2}{2b}$ параболы $\frac{1}{2}\left[(a-2c_1+c_2)u_1 - bu_1^2\right]$. Наилучший ответ второго игрока на эту стратегию есть $u_2 = \frac{a+2c_1-3c_2}{4b}$. Максимальный гарантированный результат первого игрока в этом случае равен $\frac{(a-2c_1+c_2)^2}{8b}$.

- Равновесность и эффективность?

Обратимся к игре Г$_2$. Проинтерпретирована эта модель может быть следующим образом. Пусть игрок 2 - это совокупность производителей какой-то продукции, например, тот же пшеницы, внутри страны, а игрок 1 - это фирма «Экспортхлеб», закупающая ту же продукцию за рубежом. Разумеется, закупки осуществляются уже после сбора урожая. Если «Экспортхлеб» имеет возможность заранее обнародовать свои планы по объемам закупок в зависимости вот количества продукции, произведенной внутри страны, то получается как раз интересующая нас модель.

Универсальной стратегией наказания второго игрока может быть любая стратегия $u_{1p} > \frac{a}{b}$. Осторожной стратегией второго игрока при этом будет $u_2=0$. Поскольку это наилучшая для первого игрока стратегия его партнера, в данном случае максимальный гарантированный результат первого игрока в игре Γ_2 в данном случае достигается, например, на стратегии $u_0^1(u_2) = \begin{cases} \frac{a-c_1}{2b}, \text{ если } u_2 = 0, \\ u_{1p} \text{ в противном случае.} \end{cases}$ Оптимальным ответом второго игрока, разумеется будет $u_2=0$.

Это решение является эффективным, поскольку доставляет глобальный максимум выигрышу первого игрока. По того же причине, оно будет равновесием по Нэшу в рассматриваемом информационном расширении. Равновесием по Нэшу в исходной игре данное решение будет лишь при достаточно высокой себестоимости продукции второй фирмы.

Рассмотрим игру Γ_3. Интерпретация данной модели может быть такой. Игрок 1 - это министерство сельского хозяйства, управляющее производством пшеницы внутри страны, а игрок 2 - это пресловутая фирма «Экспортхлеб», которая по-прежнему выбирает объем закупок за рубежом, зная объем производства внутри страны. Если министерство рассчитывает получить информацию в планах «Экспортхлеба», и оно имеет возможность сделать первый ход, то приходим к рассматриваемой модели.

Поскольку стратегия наказания $u_{1p} > \frac{a}{b}$ второго игрока может быть выбрана не зависящей вот его действий, стратегия $u_1^1(u_2) = \begin{cases} \frac{a-c_1}{2b}, \text{ если } u_2(u_1) \equiv 0, \\ u_{1p} \text{ в противном случае,} \end{cases}$ гарантирует первому игроку тот же выигрыш, что и в игре Γ_2.

- Лемма 1 из «Топологической постановки» - в задачи

Задачи

1. Может ли максимальный гарантированный результат в игре Γ_1 быть меньше, чем $\max\limits_{u \in U} \min\limits_{v \in V} g^1(u,v)$? А меньше, чем $\min\limits_{v \in V} \max\limits_{u \in U} g^1(u,v)$?

2. Пусть заданы игры $\Gamma = \langle \{1,2\}, U, V, g, h \rangle$ и $\Delta = \langle \{1,2\}, U, W, g, h \rangle$ и $V \subset W$. Докажите, что максимальный гарантированный результат первого игрока в игре (не превосходит аналогичного результата в игре (.

3. Пусть заданы игры $\Gamma = \langle \{1,2\}, U, V, g, h \rangle$ и $\Delta = \langle \{1,2\}, W, V, g, h \rangle$ и $V \subset W$. Докажите, что максимальный гарантированный результат первого игрока в игре (не меньше аналогичного результата в игре (.

4. Пусть игра Г антагонистическая. Чему равны максимальные гарантированные результаты в соответствующих играх Γ_1, Γ_2 и Γ_3.

5. Пусть $\Gamma = \langle \{1,2\}, U, V, g, h \rangle$. Предположим, что в игре $\Gamma = \langle \{1,2\}, U, V, -h, h \rangle$ существует седловая точка. Верно ли, что R($_1\Gamma$)=R($_{12}\Gamma$)?

6. Пусть в игре двух лиц Г существует и единственна ситуация равновесия по Нэшу. Докажите, что выигрыш первого игрока в этой ситуации не превосходит его максимального гарантированного результата в соответствующей игре Γ_1. Верно ли это утверждение без предположения в единственности ситуации равновесия.

7. Докажите, что если M′>K′ и $\min\limits_{v\in E'(u)} g^1(u,v) = \max\limits_{u\in U} \min\limits_{v\in E'(u)} g^1(u,v)$, то $\max\limits_{v\in V} g^2(u,v) = \min\limits_{u\in U} \max\limits_{v\in V} g^2(u,v)$.

8. Определить наибольшие гарантированные результаты и какие-либо оптимальные (или ε-оптимальные) результаты в играх Γ_2 и Γ_3, если $U^1=U^2=[0,1]$, $g^1(u^1,u^2)= u^1+u^2$, $g^1(u^1,u^2)= u^{1-2}u^2$.

9. Решите игры Γ_1, Γ_2, Γ_3, если выигрыши игроков задаются матрицами $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

10. Определить наибольшие гарантированные результаты и какие-либо оптимальные результаты в играх Γ_2 и

Γ_3, если функции выигрыша задаются матрицами $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

и $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

11. Пусть a,b>0, ac≥b, $U^1=[0,\infty)$, $U^2=[0,a)$, $g^1(u^1,u^2)=cu^2-u^1u^2$, $g^2(u^1,u^2)=u^1u^2-b\ln(a/(a-u^2))$. Найти оптимальную стратегию центра в игре Γ_1.

12. Пусть a,b>0, ac>b, $U^1=[0,\infty)$, $U^2=[0,a)$, $g^1(u^1,u^2)=cu^2-u^1$, $g^2(u^1,u^2)=u^1u^2-b\ln(a/(a-u^2))$. Найти оптимальную стратегию центра в игре Γ_1.

13. Решите игры Γ_1, Γ_2, Γ_3, если $U^1=U^2=[0,1]$, $g^1(u^1,u^2)=3u^{1/4}+u^{2/2}$, $g^1(u^1,u^2)=(u^1-u^2)^2$.

14. Пусть $U^1=\left\{u^1\in\square^m:\sum_{i=1}^m u_i^1=A,\ i=1,\ldots,m\right\}$, $U^2=\left\{u^1\in\square^m:\sum_{i=1}^m u_i^1=B, u_i^1\geq 0, i=1,\ldots,m\right\}$, $g^1(u^1,u^2)=\min_{1\leq i\leq m}W_i^1(u^1,u^2)$, $g^2(u^1,u^2)=\min_{1\leq i\leq m}W_i^2(u^1,u^2)$, где $W_i^1(u^1,u^2)=\begin{cases}\dfrac{u_i^1(a_1+b_i)}{u_i^1+u_i^2}, \text{ если } u_i^1+u_i^2>0,\\ a_i, \text{ если } u_i^1+u_i^2=0,\end{cases}$

$W_i^2(u^1,u^2)=\begin{cases}\dfrac{u_i^2(a_1+b_i)}{u_i^1+u_i^2}, \text{ если } u_i^1+u_i^2>0,\\ b_i, \text{ если } u_i^1+u_i^2=0.\end{cases}$ Решить игры Γ_1 и Γ_2, если известно, что $b_i<\min_{i\leq j\leq m}(a_i+b_j)\dfrac{B}{A+B}, i=1,\ldots,m.$ (Здесь a_i и b_i – неотрицательные параметры.)

15. Будем говорит, что в игре Γ_1 первый игрок использует блеф, если вместо сообщенной второму игроку стратегии v^1, вон выбирает стратегию u^1. Найти выражение для наибольшего гарантированного результата первого игрока в игре Γ_1 при использовании блефа, предполагая что функции g^1 и g^2 непрерывны, а множества U^1 и U^2 компактны.

16. Найти решение игры Γ_1 при использовании блефа первым игроком, если $U^1=U^2=[0,1]$, $g^1(u^1,u^2)=3u^1+2u^2$, $g^1(u^1,u^2)=(u^1-u^2)^2$.

17. Докажите, что максимальный гарантированный результат первого игрока в игре Γ_2 непрерывно зависит вот функции выигрыша первого игрока, если на множестве этих функций заданная равномерная метрическое свидетельство.

18. Докажите, что зависимость максимального гарантированный результат первого игрока в игре Γ_2 вот функции выигрыша второго игрока, вообще говоря, не является непрерывной, если на множестве этих функций заданная равномерная метрическое свидетельство.

19. Решите игры Γ_1, Γ_2, Γ_3 в условиях доброжелательности второго игрока, если выигрыши игроков задаются матрицами $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

20. Решите игры Γ_1, Γ_2, Γ_3 в условиях доброжелательности второго игрока, если $U^1=U^2=[0,1]$, $g^1(u^1,u^2)=3u^{1/4}+u^{2/2}$, $g^1(u^1,u^2)=(u^1-u^2)^2$.

21. Найдите максимальные гарантированные результаты первого игрока в играх $Г_2$ и $Г_3$ при условии доброжелательности второго игрока

22. Обязательно ли решение игры $Г_1$ будет эффективным?

23. В каком случае будет эффективным решение игры $Г_2$?

24. В каком случае будет эффективным решение игры $Г_3$?

- Игры с малыми побочными платежами

Литература

1. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. Г.: Наука. 1976.
2. Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. Г.: МГУ. 1984.
3. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. Г.: Радио и связь. 1982.

Лекция. Игры с неопределенными факторами

Информационная теория иерархических систем

- Уточнение модели операции
- Субъективное и объективное описания конфликта
- Целесообразность централизации: $\max\limits_{u\in U}\max\limits_{v\in V}\min\limits_{\alpha\in A} g(u,v,\alpha)$ и

$\max\limits_{u\in U}\min\limits_{\alpha\in A}\max\limits_{v\in B(u,\alpha)} g(u,v,\alpha)$, где $B(u,\alpha)=\mathrm{Arg}\max\limits_{v\in V} h(u,v,\alpha)$.

- Черниченко, Овечкин
- Разнообразие постановок задач
- Три подхода к формализации
- Задача синтеза оптимального информационного расширения

Параметрическая постановка

В общем случае, моделируя конфликт с двумя участниками, мы должны давать два субъективных описания, отражающих степень информированности каждой из сторон. Иногда удобно[22] вводит и объективное описание. В рассматриваемой нами модели оно будет представят собой обычную игру двух лиц в нормальной форме $\Gamma=\langle U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$.

С позиций первого игрока (оперирующей стороны) конфликт описывается следующим образом. Ему точно известны оба множества управлений U^1 и U^2, а также собственная функция выигрыша g^1. А функция выигрыша противника ему известна лишь с точностью к некоторого параметра, то есть известно некоторое множество A и функция

[22] Но совершенно не обязательно. В правильно построенной формальной модели принятия решений апелляций к объективному описанию быть не должно!

$h: U^1 \times U^2 \times A \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для некоторого $\alpha_0 \in A$ выполняется равенство $h(u^1,u^2,\alpha)=g(u^1,u^2)$. Само значение α_0 оперирующей стороне не известно.

Субъективное описание конфликта с точки зрения второго игрока будем считать следующим. Ему известны все «объективные» параметры конфликта, то есть множества U^1 и U^2 и функции g^1 и g^2. Кроме того, ему известна и степень информированности первого игрока, то есть множество A и функция h.

Опишем один из оптимальных способов обмена информацией между игроками. Первый игрок самостоятельно может узнать, какое управление выбрал его партнер. Кроме того, второй игрок обязан сообщить оперирующей стороне некоторое значение параметра $\tau \in A$. Это сообщение воспринимается первым игроком как сообщение об истинном значении параметра α_0, достоверность которого оперирующая сторона не в состоянии оценить, по крайней мэр, в момент принятия решений.

Теперь зададим принцип оптимальности оперирующей стороны. Будем считать, что первому игроку точно известно, что его противник осторожен и всегда ориентируется на наихудшее для него значение неопределенного фактора. Оперирующая сторона делает свой выбор первой, и сообщает в нем противнику частичную информацию, искусственно вводя некоторую неопределенность. При этом, зная в реакции на такое сообщение второго игрока, оперирующая сторона старается максимизировать свой гарантированный результат.

Формально все это описывается следующими конструкциями. Множество стратегий первого игрока $_*U^1=\Phi(U^2\times A\times A,U^1)\times A$. Множество стратегий второго игрока $_*U^2=U^2\times A$. Если первый игрок выбрал стратегию $_*u^1=(\tilde{u},\gamma)$, где $\tilde{u}\in\Phi(U^2\times A\times A,U^1)$ а $\gamma\in A$, а второй игрок выбрал стратегию $_*u^2=(v,\tau)$, где $v\in U^2$ а $\tau\in A$, то в игре реализуется ситуация $\pi({}_*u^1,{}_*u^2)=(\tilde{u}(v,\tau,\gamma),v)$ и игроки получают выигрыши $_*g^1({}_*u^1,{}_*u^2)=g^1(\tilde{u}(v,\tau,\gamma),v)$ и $_*g^2({}_*u^1,{}_*u^2)=g^2(\tilde{u}(v,\tau,\gamma),v)=h(\tilde{u}(v,\tau,\gamma),v,\alpha_0)$ соответственно. Таким образом, определена новая игра $_*\Gamma$ с неопределенным фактором.

Определим множество рациональных ответов $B({}_*u^1,\alpha)$ второго игрока на стратегию $_*u^1=(\tilde{u},\gamma)$ следующим образом[23]. Пусть $\delta:{}_*U^1\times A\to$ – функция, принимающая неотрицательные значения и удовлетворяющая условиям: $\sup\limits_{(w,\tau)\in U^2\times A}\inf\limits_{\gamma\in A}h(\tilde{u}(w,\tau,\gamma),w,\alpha)\geq\max\limits_{v\in U^2}\min\limits_{u\in U^1}h(u,v,\alpha)+\delta({}_*u^1,\alpha)$ для всех $_*u^1=(\tilde{u},\gamma)$, и $\delta({}_*u^1,\alpha)=0$, если верхняя грань $\sup\limits_{(w,\alpha)\in U^2\times A}\inf\limits_{\gamma\in A}h(\tilde{u}(w,\alpha,\gamma),w,\alpha)$ достигается[24]. Положим

$$B({}_*u^1,\alpha)=\left\{(v,\tau)\in U^2\times A:\inf_{\gamma\in A}h(\tilde{u}(v,\tau,\gamma),w,\alpha)=\max_{(w,\beta)\in U^2\times A}\inf_{\gamma\in A}h(\tilde{u}(w,\beta,\gamma),w,\alpha)\right\}$$

---

[23] Это множество описывает представления первого игрока о рациональных способах поведения партнера. Поэтому оно зависит от неизвестного оперирующей стороне параметра α. При этом учитывается, что второй игрок этот параметр знает.

[24] Мы считаем, что функция δ известна обоим игрокам, и является элементом их субъективных описаний конфликта. Однако из дальнейшего будет видно, что этот элемент не слишком существенный.

, если максимум в этом выражении достигается, и

$$B({}_*u^1,\alpha)=\left\{(v,\tau)\in U^2\times A:\inf_{\gamma\in A}h(\tilde{u}(v,\tau,\gamma),w,\alpha)>\max_{(w,\beta)\in U^2\times A}\inf_{\gamma\in A}h(\tilde{u}(w,\beta,\gamma),w,\alpha)-\delta({}_*u^1,\alpha)\right\}$$

в противном случае.

Гарантированный результат первого игрока равен $\inf\limits_{\alpha\in A}\inf\limits_{{}_*u^2\in B({}_*u^1,\alpha)}{}_*g^1({}_*u^1,{}_*u^2)$. Его оперирующая сторона стремится максимизировать.

- Нарушение принципа Гермейера!

Еще раз остановимся на содержательной интерпретации введенных конструкций. Оперирующая сторона первой выбирает свою стратегию ${}_*u^1=(\tilde{u},\gamma)$ и сообщает партнеру функцию $\tilde{u}$. Второй игрок, зная эту функцию, но не зная параметра γ максимизирует свой гарантированный результат. Ориентируясь на такое поведение партнера, первый игрок в свою очередь стремится максимизировать свой гарантированный выигрыш.

В дальнейшем будем считать, что множества U^1,U^2 и A компактны, а функции g^1 и h непрерывны.

Введем следующие обозначения

$$L(\alpha)=\max_{v\in U^2}\min_{u\in U^1}h(u,v,\alpha),\qquad D(\alpha)=\left\{(u,v)\in U^1\times U^2:h(u,v,\alpha)>L(\alpha)\right\},$$

$$K(\alpha)=\sup_{(u,v)\in D(\alpha)}g^1(u,v),\qquad E(\alpha)=\left\{v\in U^2:\min_{u\in U^1}h(u,v,\alpha)=\max_{w\in U^2}\min_{u\in U^1}h(u,w,\alpha)\right\},$$

$$M(\alpha)=\min_{v\in E(\alpha)}\max_{u\in U^1}g(u,v),\qquad \mathrm{A}_0=\left\{\alpha\in\mathrm{A}:K(\alpha)\geq M(\alpha)\right\},$$

$$\mathrm{A}_1=\left\{\alpha\in\mathrm{A}:K(\alpha)<M(\alpha)\right\},\ E=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}_1}E(\alpha).$$

(В силу определения $L(\alpha_0)=\max\limits_{v\in U^2}\min\limits_{u\in U^1}g^2(u,v)$.)

Замечание. Чтобы каждый раз не оговаривать особо вырожденные частные случаи, будем пользоваться следующим удобным соглашением: если X=∅, то $\sup\limits_{x\in X} f(x) = -\infty$ и аналогично $\inf\limits_{x\in X} f(x) = +\infty$. При этом символ ∞ означает просто очень большое число. В следующей теореме это число может быть выбрано равным $\max\left\{\max\limits_{(u,v)\in U^1\times U^2}\left|g^1(u,v)\right|, \max\limits_{(u,v,\alpha)\in U^1\times U^2\times A}\left|h(u,v,\alpha\right|\right\}+1$. Во вторых случаях смысл этого обозначения ясень из контекста.

Теорема. В сформулированных условиях максимальный гарантированный результат $R = \sup\limits_{{}_*u^1\in {}_*U^1}\ \inf\limits_{{}_*u^2\in B({}_*u^1)} {}_*g^1({}_*u^1, {}_*u^2)$ первого игрока равен $\inf\limits_{\alpha\in \mathrm{A}} \max\left\{K(\alpha), M(\alpha)\right\}$.

- Нерегулярность в параметрическом случае может пол типичной

Доказательство. Фиксируем произвольное число ε>0. Для каждого $\tau\in A_0$ фиксируем произвольное решение (u(τ),v(τ)) неравенства g(u,v)>K(τ)–ε, принадлежащее множеству D(τ). Положим H={v(τ): $\tau\in A_0$}. Определим также функции $u_P : U^2\times A \to \mathbb{R}$ и $u_M : U^2 \to \mathbb{R}$ условиями $u_P(v,\gamma) = \arg\min\limits_{u\in U} h(u,v,\gamma)$ и $u_M(v) = \arg\max\limits_{u\in U} g^1(u,v)$ соответственно.

Определим функцию

$$\tilde{u}_0(v,\tau,\gamma) = \begin{cases} u_K(\tau), \text{если}\, v = v_K(\tau), \\ u_M(v), \text{если}\, v\in E\setminus H, \text{или}\, v\in E\bigcap H, \text{но}\, v\neq v_K(\tau), \\ u_P(v,\gamma)\,\text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Покажем, что при любом γ пара ${}_*u_0^1 = (\tilde{u}_0, \gamma)$ гарантирует первому игроку получение выигрыша $\inf\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} \max \{K(\alpha), M(\alpha)\} - \varepsilon$.

Для этого оценим множество рациональных ответов второго игрока. Рассмотрим два случая.

Пусть сначала $\alpha_0 \in \mathrm{A}_0$. Если второй игрок выберет стратегию ${}_*u_0^2 = (v(\alpha_0), \alpha_0)$, то в ситуации $({}_*u_0^1, {}_*u_0^2)$ реализуется исход $(\tilde{u}_0(v_K(\alpha_0), \alpha_0, \gamma), v_K(\alpha_0)) = (u_K(\alpha_0), v_K(\alpha_0))$ и второй игрок получит выигрыш $g^2(u_K(\alpha_0), v_K(\alpha_0)) > L(\alpha_0)$. Значит, множество $B({}_*u_0^1, \alpha_0)$, во всяком случае, не пусто и для всякой стратегии ${}_*u^2 \in B({}_*u_0^1, \alpha_0)$ выполняется неравенство ${}_*g^2({}_*u_0^1, {}_*u^2) > L(\alpha_0)$. Для любой стратегии ${}_*u^2 = (v, \tau) \notin (E \cup H) \times A$ в ситуации $({}_*u_0^1, {}_*u^2)$ реализуется исход $(\tilde{u}_0(v, \tau, \gamma), v) = (u_P(v, \gamma), v)$, поэтому

$$\inf_{\gamma \in A} {}_*g^2({}_*u_0^1, {}_*u^2) = \inf_{\gamma \in A} g^2(u_P(v, \gamma), v) = \inf_{\gamma \in A} h(u_P(v, \gamma), v, \alpha_0) \leq$$
$$\leq h(u_P(v, \alpha_0), v, \alpha_0) = \min_{u \in U^1} h(u, v, \alpha_0) \leq \max_{v \in U^2} \min_{u \in U^1} h(u, v, \alpha_0) = L(\alpha_0)$$

и такая стратегия не может принадлежать множеству рациональных ответов $B({}_*u_0^1, \alpha_0)$.

Пусть теперь $\alpha_0 \in \mathrm{A}_1$. Если второй игрок выберет стратегию ${}_*u_0^2 = (v, \alpha_0)$ так, что $v \in E(\alpha_0)$, то не завысим вот действий противника вон обеспечит себя выигрыш ${}_*g^2({}_*u_0^1, {}_*u_0^2) = g^2(\tilde{u}_0(v, \gamma), v) \geq \min\limits_{u \in U^1} g^2(u, v) = \max\limits_{v \in U^2} \min\limits_{u \in U^1} g^2(u, v) = L(\alpha_0)$.

Поэтому множество $B({}_*u_0^1, \alpha_0)$, не пусто и для всякой стратегии ${}_*u^2 \in B({}_*u_0^1, \alpha_0)$ выполняется неравенство ${}_*g^2({}_*u_0^1, {}_*u^2) \geq L(\alpha_0)$. А для любой стратегии ${}_*u^2 = (v, \tau) \notin (E \cup H) \times A$ будем иметь

$$\inf_{\gamma\in A} {}_*g^2({}_*u_0^1, {}_*u^2) = \inf_{\gamma\in A} g^2(u_P(v,\gamma),v) = \inf_{\gamma\in A} h(u_P(v,\gamma),v,\alpha_0) \le$$
$$\le h(u_P(v,\alpha_0),v,\alpha_0) = \min_{u\in U^1} h(u,v,\alpha_0) < \max_{v\in U^2}\min_{u\in U^1} h(u,v,\alpha_0) = L(\alpha_0)$$

(строгое неравенство здесь выполняется потому, что $v\notin E(\alpha_0)$). Значит, такая стратегия опять не может принадлежать $B({}_*u_0^1,\alpha_0)$.

Итак, в любом случае множество $B({}_*u_0^1,\alpha_0)$ не пусто и содержится в множестве $(E\cup H)\times A$. Теперь можно оценить выигрыш, который гарантирует первому игроку применение стратегии ${}_*u_0^1 = (\tilde{u}_0,\gamma)$.

Имеем

$$\inf_{\alpha\in A}\inf_{{}_*u^2\in B({}_*u_0^1,\alpha)} {}_*g^1({}_*u_0^1, {}_*u^2) \ge \inf_{{}_*u^2\in(E\cup H)\times A} {}_*g^1({}_*u_0^1, {}_*u^2) = \inf_{(v,\delta)\in(E\cup H)\times A} g^1(\tilde{u}_0(v,\delta,\gamma),v) \ge$$
$$\ge \min\left\{\inf_{v\in E} g^1(u_M(v),v), \inf_{\alpha\in A_0} g^1(u_K(\alpha),v_K(\alpha))\right\}.$$

Теперь

$\inf_{v\in E} g^1(u_M(v),v) = \inf_{\alpha\in A_1}\inf_{v\in E(\alpha)} g^1(u_M(v),v) = \inf_{\alpha\in A_1}\inf_{v\in E(\alpha)}\max_{u\in U^1} g^1(u,v) = \inf_{\alpha\in A_1} M(\alpha)$. А $g^1(u(\alpha),v(\alpha))\ge K(\alpha)-\varepsilon$, поэтому $\inf_{\alpha\in A_0} g^1(u_K(\alpha),v_K(\alpha)) \ge \inf_{\alpha\in A_0} K(\alpha)-\varepsilon$. Следовательно,

$$\inf_{\alpha\in A}\inf_{{}_*u^2\in B({}_*u_0^1,\alpha)} {}_*g^1({}_*u_0^1, {}_*u^2) \ge \min\left\{\inf_{\alpha\in A_1} M(\alpha), \inf_{\alpha\in A_0} K(\alpha)-\varepsilon\right\} \ge \min\left\{\inf_{\alpha\in A_1} M(\alpha), \inf_{\alpha\in A_0} K(\alpha)\right\}-\varepsilon.$$

Тем более $\sup_{{}_*u^1\in{}_*U^1}\inf_{\alpha\in A}\inf_{{}_*u^2\in B({}_*u_0^1,\alpha)} {}_*g^1({}_*u^1, {}_*u^2) \ge \min\left\{\inf_{\alpha\in A_1} M(\alpha), \inf_{\alpha\in A_0} K(\alpha)\right\}-\varepsilon.$ А поскольку ε выбиралось произвольно, имеет место неравенство $\sup_{{}_*u^1\in{}_*U^1}\inf_{\alpha\in A}\inf_{{}_*u^2\in B({}_*u_0^1,\alpha)} {}_*g^1({}_*u^1, {}_*u^2) \ge \min\left\{\inf_{\alpha\in A_1} M(\alpha), \inf_{\alpha\in A_0} K(\alpha)\right\}.$ Остается заметить, что в силу определения множеств A_0 и A_1

выполняются равенства $\min\left\{\inf_{\alpha\in A_1} M(\alpha), \inf_{\alpha\in A_0} K(\alpha)\right\} = \min\left\{\inf_{\alpha\in A_1}\{K(\alpha), M(\alpha)\}, \inf_{\alpha\in A_0}\{K(\alpha), M(\alpha)\}\right\} = \inf_{\alpha\in A}\max\{K(\alpha), M(\alpha)\}$.

- Картинка

Для завершения доказательства достаточно доказать, что $\sup_{{}_*u^1\in {}_*U^1}\inf_{\alpha\in A}\inf_{{}_*u^2\in B({}_*u^1,\alpha)} {}_*g^1({}_*u^1, {}_*u^2) \le \inf_{\alpha\in A}\max\{K(\alpha), M(\alpha)\}$. Это вытекает из теоремы следующего раздела.

Оптимальное расширение

Стандартные определения без труда переносятся на случай игр с неопределенными факторами.

Определение. Игрой двух лиц в нормальной форме с неопределенным фактором называется набор Γ=<U^1,U^2,A,g^1,h>, где U^1 и U^2 – множества управлений первого и второго игроков соответственно, A – множество неопределенных факторов, $g^1 : U^1 \times U^2 \to \mathbb{R}$ – функция выигрыша первого игрока, а $h : U^1 \times U^2 \times A \to \mathbb{R}$ функция, описывающая представления первого игрока в целях второго.

Такая модель есть субъективное описание конфликта с позиций оперирующей стороны (первого игрока). Согласно пятому методологическому принципа Ю. Б. Гермейера в правильно построенной модели должно существовать такое α_0, что функция $g^2(u^1,u^2)=h(u^1,u^2,\alpha)$ описывает истинные цели второго игрока. Однако формально мы этого не требуем.

Определение. Говорят, что игра ${}_*\Gamma$=<${}_*U^1$,${}_*U^2$,A,${}_*g^1$,${}_*h$> является квазиинформационным расширением игры Γ=<U^1,U^2,A,g^1,h>, если задан набор <π,c^1,c^2> функций

$\pi: {}_*U^1 \times {}_*U^2 \to U^1 \times U^2$ и $c^i: U^i \to {}_*U^i$, удовлетворяющий следующим двум аксиомам:

а) ${}_*g^1({}_*u^1, {}_*u^2) = g^1(\pi({}_*u^1, {}_*u^2))$, ${}_*h({}_*u^1, {}_*u^2, \alpha) = h(\pi({}_*u^1, {}_*u^2), \alpha)$;

б) $\pi^i({}_*u | c^i(u^i)) = u^i$ для всех $i \in N$, ${}_*u \in {}_*U^1 \times {}_*U^2$, $u^i \in U^i$ (здесь π^i обозначает композицию отображения π с проекцией декартова произведения $U^1 \times U^2$ на сомножитель U^i.)

В игре $\Gamma = \langle U^1, U^2, A, g^1, h \rangle$ с неопределенным фактором определим множество рациональных ответов $B(u^1, \alpha)$ второго игрока на стратегию u^1 следующим образом. Пусть $\delta : U^1 \times A \to \mathbb{R}$ – функция, принимающая неотрицательные значения и удовлетворяющая условиям: $\sup\limits_{v \in U^2} h(u^1, v, \alpha) \geq \sup\limits_{v \in U^2} \inf\limits_{u \in U^1} h(u, v, \alpha) + \delta(u^1, \alpha)$ для всех u^1 и α и, кроме того, $\delta(u^1, \alpha) = 0$, если верхняя грань $\sup\limits_{v \in U^2} \inf\limits_{u \in U^1} h(u, v, \alpha)$ достигается. Положим $B(u^1, \alpha) = \left\{ u^2 \in U^2 : h(u^1, u^2, \alpha) = \max\limits_{v \in U^2} h(u^1, v, \alpha) \right\}$, если максимум в этом выражении достигается, и $B(u^1, \alpha) = \left\{ u^2 \in U^2 : h(u^1, u^2, \alpha) > \sup\limits_{v \in U^2} h(u^1, v, \alpha) - \delta(u^1, \alpha) \right\}$ в противном случае.

Гарантированный результат первого игрока равен $\inf\limits_{\alpha \in A} \inf\limits_{u^2 \in B(u^1, \alpha)} g^1(u^1, u^2)$. Его оперирующая сторона стремится максимизировать.

Теорема. В любом квазиинформационном расширении ${}_*\Gamma = \langle {}_*U^1, {}_*U^2, A, {}_*g^1, {}_*h \rangle$ рассматриваемой игры $\Gamma = \langle U^1, U^2, A, g^1, h \rangle$

первый игрок не может гарантированно получить результат больший, чем $\inf\limits_{\alpha\in A}\max\left\{K(\alpha),M(\alpha)\right\}$[25].

Доказательство. Нам нужно доказать, что $\sup\limits_{*u^1\in *U^1}\inf\limits_{\alpha\in A}\inf\limits_{*u^2\in B(*u^1,\alpha)} {}_*g^1(*u^1,*u^2)\le\inf\limits_{\alpha\in A}\max\left\{K(\alpha),M(\alpha)\right\}$. Мы докажем, что даже $\inf\limits_{\alpha\in A}\sup\limits_{*u^1\in *U^1}\inf\limits_{*u^2\in B(*u^1,\alpha)} {}_*g^1(*u^1,*u^2)\le\inf\limits_{\alpha\in A}\max\left\{K(\alpha),M(\alpha)\right\}$. По существу тем самым задача сводится к уже исследованному вопросу в максимальном гарантированном результате в играх без неопределенных факторов.

Вновь фиксируем произвольное число $\varepsilon>0$ и выберем α_1 так, что $\max\left\{K(\alpha_1),M(\alpha_1)\right\}\le\inf\limits_{\alpha\in A}\max\left\{K(\alpha),M(\alpha)\right\}+\varepsilon.$ Пусть ${}_*u^1$ – произвольная стратегия первого игрока. Определим v_1 условием $\min\limits_{u\in U^1}h(u,v_1,\alpha_1)=\max\limits_{v\in U^2}\min\limits_{u\in U^1}h(u,v,\alpha_1)$ и рассмотрим стратегию ${}_*u_1^2=c^2(v_1)$. Тогда ${}_*h(*u^1,c^2(v_1),\alpha_1)=h(u^1,v_1,\alpha_1)\ge\min\limits_{u\in U^1}h(u,v_1,\alpha_1)=\max\limits_{v\in U^2}\min\limits_{u\in U^1}h(u,v,\alpha_1)$. Возможны два случая.

Если ${}_*h(*u^1,c^2(v_1),\alpha_1)>\max\limits_{v\in U^2}\min\limits_{u\in U^1}h(u,v,\alpha_1)$, то найдется такая стратегия ${}_*u^2\in B(*u^1,\alpha_1)$, что $\pi(*u^1,*u^2)\in D(\alpha_1)$ и тогда ${}_*h(*u^1,*u^2,\alpha_1)\le K(\alpha_1)$.

Если же $h(\tilde{u}(v_1,\tau,\gamma),v_1,\alpha_1)=\max\limits_{v\in U^2}\min\limits_{u\in U^1}h(u,v,\alpha_1)$, то все множество $c^2(E(\alpha_1))$ содержится в $B(*u^1,\alpha_1)$. Поэтому

$$\inf_{*u^2\in B(*u^1,\alpha_1)} {}_*g^1(*u^1,*u^2)=\inf_{*u^2\in B(*u^1,\alpha_1)} g^1(\pi(*u^1,*u^2))\le\inf_{u^2\in E(\alpha_1)} g^1(\pi(*u^1,c^2(u^2)))=$$
$$=\inf_{u^2\in E(\alpha_1)} g^1(u^1,u^2)\le\sup_{u\in U^1}\inf_{v\in E(\alpha_1)} g^1(u,v)=M(\alpha_1).$$

[25] Здесь используются обозначения предыдущего раздела.

В любом случае

$$\inf_{{}_*u^2\in B({}_*u^1,\alpha_1)} {}_*g^1({}_*u^1,{}_*u^2)\le \max\{K(\alpha_1),M(\alpha_1)\}\le \inf_{\alpha\in A}\max\{K(\alpha),M(\alpha)\}+\varepsilon.$$

Так как ${}_*u^1$– любая стратегия, отсюда следует, что $\sup_{{}_*u^1\in {}_*U^1}\inf_{{}_*u^2\in B({}_*u^1,\alpha_1)} {}_*g^1({}_*u^1,{}_*u^2)\le \inf_{\alpha\in A}\max\{K(\alpha),M(\alpha)\}+\varepsilon,$ и уж тем более $\inf_{\alpha\in A}\sup_{{}_*u^1\in {}_*U^1}\inf_{{}_*u^2\in B({}_*u_0^1,\alpha)} {}_*g^1({}_*u^1,{}_*u^2)\le \inf_{\alpha\in A}\max\{K(\alpha),M(\alpha)\}+\varepsilon.$ Поскольку ε может быть выбрано сколь угодно малым, нужное неравенство, а с им и теорема доказаны.

Кодирование информации

В данном разделе будем предполагать, что рассматриваемая игра с неопределенным фактором удовлетворяет следующим двум дополнительным условиям:

а) множество неопределенных факторов А конечно;

б) множество управлений второго игрока U^2 не содержит изолированных точек.

Вернемся к доказательству первой теоремы данной лекции. Построенная там ε-оптимальная стратегия ${}_*u_0^1=(\tilde{u}_0,\gamma)$ содержит функцию $\tilde{u}_0(v,\tau,\gamma)$, которая, вообще говоря, существенно зависит вот второго аргумента τ. В самом деле, может случится, что для различных элементов τ_1 и τ_2 множества A_0 выполняется равенство $v(\tau_1) = v(\tau_2)$, но $u(\tau_1)\neq u(\tau_2)$. Тогда $\tilde{u}_0(v_K(\tau_1),\tau_1,\gamma)=u_K(\tau_1)\neq u_K(\tau_2)=\tilde{u}_0(v_K(\tau_2),\tau_2,\gamma)=\tilde{u}_0(v_K(\tau_1),\tau_2,\gamma)$.

Правда, при построении этой стратегии использовался некий произвол, который при выполнении условий а) и б) позволяет построить ε-оптимальную стратегию, которая вот этого аргумента зависеть не будет.

В самом деле, для каждого $\tau \in A_0$ множество $D(\tau)$ не пусто. Значит, множество $O(\tau,\varepsilon)=\{(u^1,u^2)\in U^1\times U^2\colon \ g^2(u^1,u^2)>L(\tau),\ g^1(u^1,u^2)>K(\tau)-\varepsilon\}$ открыто и содержит, по крайней мэр, одну точку $(u(\tau),w(\tau))$. В силу предположения б) найдется бесконечно много точек v таких, что пары $(u(\tau),v)$ будут принадлежать $O(\tau,\varepsilon)$. Поэтому, если множество A конечно, можно выбрать такие точки $v(\tau)$ $(\tau\in A_0)$, что $(u(\tau),v(\tau))\in D(\tau)$ для всех $\tau\in A_0$ и $v(\tau_1)\neq v(\tau_2)$ при $\tau_1\neq\tau_2$. Построенная с использованием этих пар функция $\tilde{u}_0(v,\tau,\gamma)$ будет обладать всемы свойствами, которые использовались при доказательстве первой теоремы данной лекции, но уже не будет зависеть вот аргумента τ. Таким образом, условие $\hat{u}_0(v,\gamma)=\tilde{u}_0(v,\tau,\gamma)$ корректно определяет функцию $\hat{u}_0 : U^1\times A\to U^1$.

Рассмотрим новое квазиинформационное расширение $\langle {}_{\#}\Gamma, {}_{\#}\pi, {}_{\#}c^1, {}_{\#}c^2\rangle$ исходной игры Γ, определенное следующим образом. Множество стратегий первого игрока ${}_*U^1=\Phi(U^1\times A,U^1)\times A$. Множество стратегий второго игрока ${}_*U^2=U^2$. Если первый игрок выбрал стратегию ${}_*u^1=(\hat{u},\gamma)$, где $\hat{u}\in\Phi(U^2\times A,U^1)$ а $\gamma\in A$, а второй игрок выбрал стратегию ${}_*u^2=v$, то в игре реализуется ситуация ${}_{\#}\pi({}_*u^1,{}_*u^2)=(\hat{u}(v,\gamma),v)$. Отображения ${}_{\#}c^1$, ${}_{\#}c^2$ и функции выигрыша в новои игре определяются стандартным образом.

Определенная во втором разделе игра ${}_*\Gamma$ является не только квазиинформационным расширением исходной игры Г, но и квазиинформационным расширением игры ${}_\#\Gamma$. Соответствующие отображения ${}_*\pi$, ${}_*c^1$ и ${}_*c^2$ строятся следующим образом. Фиксируем произвольный элемент τ_0 и положим ${}_*c^2(u^2)=(u^2,\tau_0)$. Отображение ${}_*c^1$ ставит в соответствие стратегии ${}_\#u^1=(\hat{u},\gamma)$, в которой $\hat{u}\in\Phi(U^2\times A,U^1)$ стратегию ${}_*u^1=(\tilde{u},\gamma)$, где функция $\tilde{u}\in\Phi(U^2\times A\times A,U^1)$ определена условием $\tilde{u}(v,\tau,\gamma)=\hat{u}(v,\gamma)$. Определим отображение $c{:}U^1\times U^2\rightarrow{}_\#U^1\times{}_\#U^2$ равенством $c(u^1,u^2)=(c^1(u^1),c^2(u^2))$ и положим ${}_*\pi({}_*u^1,{}_*u^2)=c(\pi({}_*u^1,{}_*u^2))$. Непосредственно проверяется, что все аксиомы определения квазиинформационного расширения выполнены.

Построенная в этом разделе ε-оптимальная стратегия ${}_*u^1$ в игре ${}_*\Gamma$ очевидно принадлежит множеству ${}_*c^1({}_\#U^1)$, то есть для некоторой стратегии ${}_\#u^1$ выполняется равенство ${}_*u^1={}_*c^1({}_\#u^1)$. А значит, стратегия ${}_\#u^1$ гарантирует первому игроку в игре ${}_\#\Gamma$ выигрыш никак не меньший того, который гарантирует стратегия ${}_*u^1$ в игре ${}_*\Gamma$.

Но расширение ${}_*u^1$ в игре ${}_*\Gamma$ – одно из наилучших с точки зрения первого игрока, значит, таким же является и расширение ${}_\#\Gamma$.

Рассуждения данного раздела могут быть практически без изменений проведены и при более общих предположениях, чем условия а) и б). А именно, достаточно потребовать, чтобы каждое открытое подмножество множества U^2 имело мощность большую или равную мощности множества A. Правда, при этом в качестве оптимальной стратегии мы, скорее всего, получим «дикую» функцию вроде тот, которая осуществляет взаимно однозначное соответствие между точками отрезка и точками квадрата. Понятно, что такие «стратегии» не имеют практического значения. Поэтому приходится признать, что в таком случае рассматриваемая нами модель перестает быть адекватной моделируемому конфликту. Этот факт выглядит довольно неожиданно.

Совсем отказаться вот предположений а) и б) нельзя, как показывает

- Дискуссия Пуанкаре-Ляпунов

Пример. Пусть $U^1=\{-1,1\}$, $U^2=\{0,1\}$, $A=\{-1,1\}$, $g^1(u^1,u^2)=|u^1|+u^2$, $h(u^1,u^2)=\alpha\ u^1u^2$ (параметр α не известен первому игроку).

Рассмотрим функцию $\tilde{u}_0^1(v,\tau,\gamma)=\tau$. Если первый игрок выберет стратегию ${}_*u_0^1=(\tilde{u}_0,\gamma)$ в игре ${}_*\Gamma$, а его партнер – стратегию $(1,\alpha)$, то второй игрок получит выигрыш равный 1. А при выборе стратегии $(0,\gamma)$ второй игрок заведомо получает нулевой выигрыш. Таким образом, любой рациональный ответ второго игрока на стратегию ${}_*u_0^1=(\tilde{u}_0,\gamma)$ имеет вид $(1,\gamma)$, и при этом первый игрок получает максимальный возможный выигрыш 2.

С другой стороны, при любой стратегии ${}_\#u^1=(\hat{u},\gamma)$ в игре ${}_\#\Gamma$ может оказаться, что $\alpha\hat{u}^1(1,\gamma)=-1$, и тогда второй игрок, чтобы избежать отрицательного выигрыша, вынужден будет выбрать стратегию $u^2=0$, а в этом случае первый игрок получит всего 1.

Децентрализация

Обсудим еще одну интересную интерпретацию идей, заложенных в доказательство первой теоремы данной лекции. Формально выбор параметра $\tau\in A$ является управлением второго игрока. Однако этот параметр не входит явным образом в функции выигрыша игроков. По сути, вон используется для выбора вторым игроком управления первого игрока, правда лишь из множества $\{u^1\in U^1 : \exists\beta\in A\ (u^1, v_K(\tau)) = (u_K(\beta), v_K\beta))\}$ и при условии, что вон сам выберет управление $u^2=v(\tau)$. Таким образом, первый игрок переваливает на плечи партнера все тяготы, связанные с переработкой информации в неопределенном фактор $\alpha\in A$, делегируя ему при этом часть своих полномочий по выбору управлений.

Все это может быть формализовано с помощью второго квазиинформационного[26] расширения, построенного следующим образом.

Пусть S(X) обозначает семейство всех подмножеств множества X. Положим ${}_*U^1=S(U^1\times U^2)\times\Phi(U^2\times A,U^1)\times A$, ${}_*U^2=U^1\times U^2$. Проекцию $\pi\ {}_*U^1\times{}_*U^2\to U^1\times U^2$ определим условием

$$\pi({}_*u^1, {}_*u^2) = \begin{cases} {}_*u^2, \text{ если } {}_*u^2\in W, \\ (\tilde{u}(v,\gamma), v) \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

[26] Которое уже не является информационным расширением!

где $_*u^1=(W,\tilde{u})$ – стратегия первого игрока, а $_*u^2=(u,v)$ – стратегия второго игрока. Для дорогого элемента $u^1\in U^1$ обозначим $d(u^1)$ функцию, принадлежащую классу $\Phi(U^2\times A,U^1)$ и тождественно равную u^1. Вложение $c^1:U^1\to {}_*U^1$ определим условием $c^1(u^1)=(\varnothing,d(u^1),\gamma_0)$, где γ_0 – некоторый фиксированный элемент множества A. Фиксируем произвольный элемент $\omega\in U^1$ и определим вложение $c^2:U^2\to {}_*U^2$ равенством $c^2(u^2)=(\omega,u^2)$. Функции выигрыша $_*g^1$ и $_*u^2$ зададим с помощью определения квазиинформационного расширения.

Содержательно эти конструкции интерпретируются следующим образом. Первый игрок предоставляет право своему партнеру выбрать произвольный исход из множества W. Если второй игрок действительно делает такой выбор, то вон становится окончательным. Если же вон выбирает исход (u^1,u^2) не принадлежащий W, то, зная выбранное вторым игроком управление u^2, первый игрок сам выбирает свое управление u^1.

Если мы стандартным образом определим множества рациональных ответов второго игрока на стратегию первого и максимальный гарантированный результат первого игрока, то получим задачу, вполне эквивалентную рассмотренной выше. В частности, легко сообразить, что ε-оптимальной будет в новом квазиинформационном расширении будет следующая стратегия первого игрока: $(\{(u(\tau),v(\tau)):\ \tau\in A_0\}\cup\{(u_M(v),v): v\in E\}$,u) (здесь используются обозначения первой теоремы).

Интервальная постановка

Рассмотрим еще одну интересную в прикладном плане постановку задачи. Фиксируем субъективное описание конфликта с точки зрения оперирующей стороны (первого игрока).

Ему точно известны оба множества управлений U^1 и U^2, а также собственная функция выигрыша g^1. А о критерий g^2 второго игрока ему известно лишь, что вон непрерывен и при всех $u^1 \in U^1$ и $u^2 \in U^2$ выполняется неравенство $f(u^1,u^2) \le g^2(u^1,u^2) \le h(u^1,u^2)$, где f и h – известные оперирующей стороне непрерывные функции.

Формально новая постановка вкладывается в рассмотренную ранее, если положит множество неопределенных факторов равным $A = \left\{ g \in \Phi(U^1 \times U^2, \mathbb{R}) : f(u^1,u^2) \le g(u^1,u^2) \le h(u^1,u^2) \right\}$. Однако в нетривиальных случаях множество А оказывается слишком сложным, чтобы найденное выше решение можно было считать конструктивным. К счастью, специфика рассматриваемой задачи позволяет найти другое решение, которое в вычислительном плане гораздо проще. Его поиску и будет посвящен данный раздел. Определение максимального гарантированного результата в данном случае конкретизируется следующим образом.

В предположении, что интересы второго игрока описываются функцией $g \in A$ определим множество рациональных ответов $B(u^1,g)$ второго игрока на стратегию u^1 следующим образом. Пусть $\delta : U^1 \times A \to \mathbb{R}$ – функция, принимающая неотрицательные значения и удовлетворяющая условиям: $\sup\limits_{v\in U^2} g(u^1,v) \ge \sup\limits_{v\in U^2}\inf\limits_{u\in U^1} g(u,v) - \delta(u^1,g)$ для всех u^1 и g и, кроме того, $\delta(u^1,g)=0$, если верхняя грань $\sup\limits_{v\in U^2}\inf\limits_{u\in U^1} g(u,v)$ достигается. Положим $B(u^1,g)=\left\{u^2\in U^2 : g(u^1,u^2)=\max\limits_{v\in U^2} g(u^1,v)\right\}$, если максимум в этом выражении достигается, и $B(u^1,g)=\left\{u^2\in U^2 : g(u^1,u^2) > \sup\limits_{v\in U^2} g(u^1,v)-\delta(u^1,g)\right\}$ в противном случае.

Гарантированный результат первого игрока равен $\inf\limits_{g\in A}\inf\limits_{u^2\in B(u^1,g)} g^1(u^1,u^2)$. Его оперирующая сторона стремится максимизировать.

Рассмотрим квазиинформационное расширение $_*\Gamma=\langle\{1,2\},{}_*U^1,{}_*U^2,{}_*g^1,{}_*g^2\rangle$ игры $\Gamma=\langle\{1,2\},U^1,U^2,g^1,g^2\rangle$, определенное следующим образом. Пусть $_*U^1$ – семейство всех точечно-множественных отображений, ставящих в соответствие элементу $u^2\in U^2$ непустое подмножество множества U^1, а $_*U^2$ – множество всех пар $(v,\tilde{v})$, где v – элемент множества U^2, а $\tilde{v}$ функция, ставящая в соответствие подмножеству W множества U^1 элемент $\tilde{v}(W)$ множества W. Проекцию π определим условием $\pi({}_*u^1,{}_*u^2)=\left(\tilde{v}({}_*u^1(v)),v\right)$, где $_*u^2=(v,\tilde{v})$. Пусть отображение c^1 ставит в соответствие элементу u^1 точечно-множественное отображение, тождественно равное $\{u^1\}$. Зафиксируем функцию ι отображающую семейство всех непустых подмножеств множества U^1 в множество U^1, удовлетворяющую условию $\iota(W)\in W$ для всех $W\subset U^1$. Определим отображение c^2, положил

$c^2(u^2)=(u^2,\iota)$. Функции выигрыша определим условиями $_*g^i(_*u^1,_*u^2)=g^i(\pi(_*u^1,_*u^2))$.

Содержательный смысл приведенных конструкций следующий. Первый игрок, зная выбранное партнером управление v, выбирает множество $W\subset U^1$ и предоставляет право окончательного выбора управления u^1 из него своему партнеру. Второй игрок, зная решение первого, выбирает управление u^1 первого игрока из указанного ему подмножества.

Пусть l – произвольное действительное число. Введем следующие обозначения.

$D(l)=\{(u^1,u^2)\in U^1\times U^2: f(u^1,u^2)\geq l\}$,

$$E(l)=\left\{u^2\in U^2:\min_{u\in U^1}h(u,u^2)\geq l\right\},$$

$$K(l)=\max_{(u^1,u^2)\in D(l)}g^1(u^1,u^2),\quad M(l)=\min_{u^2\in E(l)}\max_{u^1\in U^1}g^1(u^1,u^2).$$

Теорема. Максимальный гарантированный результат первого игрока в рассматриваемом квазиинформационном расширении $_*\Gamma=\langle\{1,2\},{_*U^1},{_*U^2},{_*g^1},{_*g^2}\rangle$ равен $\sup\limits_{l\in\mathbb{R}}\min\{K(l),M(l)\}$.

- Картинка

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\varepsilon>0$ и выберем число l_0 так, что $\min\{K(l_0),M(l_0)\}>\sup\limits_{l\in\mathbb{R}}\min\{K(l),M(l)\}-\varepsilon$. Сконструируем стратегию первого игрока, гарантирующую ему выигрыш $\min\{K(l_0),M(l_0)\}$.

Выберем точку (u_0^1,u_0^2) из множества $D(l_0)$, удовлетворяющую условию $g^1(u_0^1,u_0^2)=\max\limits_{(u^1,u^2)\in D(l_0)}g^1(u^1,u^2)$.

Определим абсолютно оптимальную стратегию $\tilde{u}_a : U^2 \to U^1$ первого игрока и стратегию наказания $\tilde{u}_p : U^2 \to U^1$ условиями $g^1(\tilde{u}_a(u^2), u^2) = \max_{u^1 \in U^1} g^1(u^1, u^2)$ для всех $u^2 \in U^2$ и $h(\tilde{u}_p(u^2), u^2) = \min_{u^1 \in U^1} h(u^1, u^2)$ для всех $u^2 \in U^2$ соответственно. Пусть функция $\tilde{u}_0 : U^2 \to U^1$ определяется условием

$$\tilde{u}_0(u^2) = \begin{cases} u_0^1, \text{ если } u^2 = u_0^2, \\ \tilde{u}_a(u^2), \text{ если } u^2 \in E(l_0) \text{ но } u^2 \neq u_0^2, \\ \tilde{u}_p(u^2) \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\Omega^0 = \{(u^1, u^2) \in U^1 \times U^2 : u^1 = \tilde{u}_0(u^2)\}$ – график этой функции, а Ω – его замыкание. Определим стратегию ${}_*u_0^1 \in {}_*U_0^1$ условием ${}_*u_0^1(u^2) = \{u^1 \in U^1 : (u^1, u^2) \in \Omega\}$.

Оценим множество $B({}_*u_0^1, g)$ рациональных ответов второго игрока на эту стратегию. Преждет всего, заметим, что множество Ω компактно, как замкнутое подмножество компактного множества $U^1 \times U^2$. Поэтому любая непрерывная функция g непременно достигает максимума на этом множестве. Выберем $(u_1^1, u_1^2) \in \Omega$ так, что $g(u_1^1, u_1^2) = \max_{(u^1, u^2) \in \Omega} g(u^1, u^2)$ и определим функцию $\tilde{v}_1$ условием

$$\tilde{v}_1(W) = \begin{cases} u_1^1, \text{ если } W = {}_*u_0^1(u_1^2), \\ \iota(W) \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пара ${}_*u_1^2 = (u_1^2, \tilde{v}_1)$ доставляет максимум $\max_{{}_*u^2 \in {}_*U^2} {}_*g({}_*u_0^1, {}_*u^2)$, так как ${}_*g({}_*u_0^1, {}_*u_1^2) = g(u_1^1, u_1^2)$, а для любой другой стратегии ${}_*u^2 \in {}_*U^2$ выполняется включение $\pi({}_*u_0^1, {}_*u^2) \in \Omega$ а значит и неравенство

$$\max_{{}_*u^2\in {}_*U^2} {}_*g({}_*u_0^1, {}_*u^2) = \max_{{}_*u^2\in {}_*U^2} g(\pi({}_*u_0^1, {}_*u^2)) \le \max_{(u^1,u^2)\in\Omega} g(u^1,u^2) = g(u_1^1,u_1^2) .$$

Поэтому $B({}_*u_0^1, g) = \left\{ {}_*u^2 \in {}_*U^2 : {}_*g({}_*u_0^1, {}_*u^2) = \max_{{}_*w\in {}_*U^2} g({}_*u_0^1, {}_*w) \right\}$ и ${}_*u_1^2 \in B({}_*u_0^1, g)$.

Далее, так как точка $\left(u_0^1, u_0^2\right)$ принадлежит множеству Ω имеем ${}_*g({}_*u_0^1, {}_*u_1^2) = g(u_1^1,u_1^2) = \max_{(u^1,u^2)\in\Omega} g(u^1,u^2) \ge g(u_0^1,u_0^2) \ge l_0$ (последнее неравенство следует из включения $\left(u_0^1, u_0^2\right) \in D(l_0)$).

Если ${}_*u^2 = (v,\tilde{v})$ – любая стратегия второго игрока, в которой $v \notin E(l_0) \bigcup \{u_0^2\}$, то ${}_*g({}_*u_0^1, {}_*u^2) = g(\tilde{u}_P(v), v) \le h(\tilde{u}_P(v), v) = \min_{u^1\in U^1} h(u^1, v) < \max_{u^2\in U^2} \min_{u^1\in U^1} h(u^1,v) = l_0$ (строгое неравенство выполняется так как $v \notin E(l_0)$), то есть такая стратегия ${}_*u^2 = (v,\tilde{v})$ не может принадлежать $B({}_*u_0^1, g)$.

Итак, если стратегия ${}_*u^2 = (v,\tilde{v})$ принадлежит $B({}_*u_0^1, g)$, то возможны два случая. Либо $v = u_0^2$ и $v \notin E(l_0)$. Тогда ${}_*g^1({}_*u_0^1, {}_*u^2) = g^1(\tilde{u}_0(v), v) = g^1(u_0^1, u_0^2) = K(l_0)$. Либо $v \in E(l_0)$, и тогда ${}_*g^1({}_*u_0^1, {}_*u^2) = g^1(\tilde{u}_0(v), v) = g^1(\tilde{u}_a(v), v) = \max_{u^1\in U^1} g^1(u^1, v) \ge \min_{v\in E(l_0)} \max_{u^1\in U^1} g^1(u^1,v) = M(l_0)$. В обоих случаях ${}_*g^1({}_*u_0^1, {}_*u^2) \ge \min\{K(l_0), M(l_0)\}$. В силу произвольности стратегии ${}_*u^2 = (v,\tilde{v})$, получаем неравенство $\inf_{{}_*u^2\in B({}_*u_0^1,g)} {}_*g^1({}_*u_0^1, {}_*u^2) \ge \min\{K(l_0), M(l_0)\} \ge \sup_{l\in\mathbb{R}} \min\{K(l), M(l)\} - \varepsilon$. А так как число ε произвольно, отсюда следует $\inf_{{}_*u^2\in B({}_*u_0^1,g)} {}_*g^1({}_*u_0^1, {}_*u^2) \ge \sup_{l\in\mathbb{R}} \min\{K(l), M(l)\}$. Все сказанное справедливо при любой функции $g \in A$, поэтому

$\inf\limits_{g\in A}\inf\limits_{{}_*u^2\in B({}_*u_0^1,g)} {}_*g^1({}_*u_0^1,{}_*u^2)\ge \sup\limits_{l\in\mathbb{R}}\min\{K(l),M(l)\}$ и тем более $\sup\limits_{{}_*u^1\in{}_*U^1}\inf\limits_{g\in A}\inf\limits_{{}_*u^2\in B({}_*u^1,g)} {}_*g^1({}_*u^1,{}_*u^2)\ge \sup\limits_{l\in\mathbb{R}}\min\{K(l),M(l)\}$.

Обратное неравенство $\sup\limits_{{}_*u^1\in{}_*U^1}\inf\limits_{g\in A}\inf\limits_{{}_*u^2\in B({}_*u^1,g)} {}_*g^1({}_*u^1,{}_*u^2)\le \sup\limits_{l\in\mathbb{R}}\min\{K(l),M(l)\}$ вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Пусть ${}_\#\Gamma=\langle\{1,2\},{}_\#U^1,{}_\#U^2,{}_\#g^1,{}_\#g^2\rangle$ – произвольное квазиинформационное расширение игры Г. Максимальный гарантированный результат первого игрока в игре ${}_\#\Gamma$ не превосходит величины $\sup\limits_{l\in\mathbb{R}}\min\left\{K(l),M(l)\right\}$.

Доказательство. Требуется доказать, что $\sup\limits_{{}_\#u^1\in{}_\#U^1}\inf\limits_{g\in A}\inf\limits_{{}_\#u^2\in B({}_\#u^1,g)} {}_\#g^1({}_\#u^1,{}_\#u^2)\le \sup\limits_{l\in\mathbb{R}}\min\{K(l),M(l)\}$. Пусть ${}_\#u_0^1$ – произвольная стратегия первого игрока, и $l_0=\sup\limits_{{}_\#u^2\in{}_\#U^2} {}_\#f({}_\#u_0^1,{}_\#u^2)=\sup\limits_{{}_\#u^2\in{}_\#U^2} f(\pi({}_\#u_0^1,{}_\#u^2))$. Очевидно, достаточно доказать, что $\inf\limits_{g\in A}\inf\limits_{{}_\#u^2\in B({}_\#u_0^1,g)} {}_\#g^1({}_\#u_0^1,{}_\#u^2)\le\min\{K(l_0),M(l_0)\}$. Доказательство разобьем на несколько шагов.

1. Докажем, что $\inf\limits_{{}_\#u^2\in B({}_\#u_0^1,f)} {}_\#g^1({}_\#u_0^1,{}_\#u^2)\le K(l_0)$.

- Картинка

Допустим противное. Тогда найдется такое δ>0, что для всех ${}_\#u^2\in B({}_\#u_0^1,f)$ выполняется неравенство ${}_\#g^1({}_\#u_0^1,{}_\#u^2)\ge K(l_0)+\delta$, или, что то же самое $g^1(\pi({}_\#u_0^1,{}_\#u^2))\ge K(l_0)+\delta$.

Множество $F=\{(u^1,u^2)\in U^1\times U^2:\ g^1(u^1,u^2)\ge K(l_0)+\delta\}$ задается нестрогим неравенством, в левой части которого стоит непрерывная функция. Поэтому оно замкнуто. Кроме того, оно содержится в компактном множестве $U^1 \times U^2$, следовательно, оно само компактно. Значит, непрерывная функция f достигает на нем своего максимума l_1 в некоторой точке $\left(u_0^1, u_0^2\right)$.

Величина $l_1 < l_0$. В самом деле, иначе $\left(u_0^1, u_0^2\right) \in D(l_0)$ и $g^1(u^1,u^2) \le K(l_0)$, что противоречит определению множества F.

Таким образом, мы получили, что для всех ${}_{\#}u^2 \in B({}_{\#}u_0^1, f)$ выполняется неравенство ${}_{\#}f({}_{\#}u_0^1, {}_{\#}u^2) \le l_1 < l_0$, что противоречит выбору величины l_0, так как по определению множества $B({}_{\#}u_0^1, f)$ имеет место равенство $l_0 = \sup\limits_{{}_{\#}u^2 \in {}_{\#}U^2} {}_{\#}f({}_{\#}u_0^1, {}_{\#}u^2) = \sup\limits_{{}_{\#}u^2 \in B({}_{\#}u_0^1, f)} {}_{\#}f({}_{\#}u_0^1, {}_{\#}u^2)$.

Определим функцию e условием

$$e(u^1,u^2) = \begin{cases} f(u^1,u^2), \text{ если } f(u^1,u^2) > l_0, \\ l_0, \text{ если } f(u^1,u^2) \le l_0 \le h(u^1,u^2), \\ h(u^1,u^2), \text{ если } h(u^1,u^2) < l_0. \end{cases}$$

Докажем, что $\inf\limits_{{}_{\#}u^2 \in B({}_{\#}u_0^1, e)} {}_{\#}g^1({}_{\#}u_0^1, {}_{\#}u^2) \le M(l_0)$.

В силу определения величины l_0 выполняется равенство $l_0 = \sup\limits_{{}_{\#}u^2 \in {}_{\#}U^2} {}_{\#}e({}_{\#}u_0^1, {}_{\#}u^2) = \sup\limits_{{}_{\#}u^2 \in {}_{\#}U^2} e(\pi({}_{\#}u_0^1, {}_{\#}u^2))$.

Выберем произвольный элемент $u_0^2 \in E(l_0)$. В силу предыдущего равенства ${}_{\#}e({}_{\#}u_0^1, c^2(u_0^2)) \le l_0$. А в силу определения множества $E(l_0)$ выполняются условия ${}_{\#}h({}_{\#}u_0^1, c^2(u_0^2)) = h(\pi({}_{\#}u_0^1, c^2(u_0^2))) = h(u^1, u_0^2) \ge \min\limits_{u^1 \in U^1} h(u^1, u_0^2) \ge l_0$, а значит и ${}_{\#}e({}_{\#}u_0^1, c^2(u_0^2)) = e(\pi({}_{\#}u_0^1, c^2(u_0^2))) \ge l_0$. Таким образом, ${}_{\#}e({}_{\#}u_0^1, c^2(u_0^2)) = l_0$.

Так как элемент $u_0^2 \in E(l_0)$ выбирался произвольно, имеем $c^2(E(l_0)) \subset B({}_{\#}u_0^1, e)$, а значит

$$\inf_{{}_{\#}u^2 \in B({}_{\#}u_0^1, e)} {}_{\#}e^1({}_{\#}u_0^1, {}_{\#}u^2) \le \inf_{u^2 \in E(l_0)} {}_{\#}e^1({}_{\#}u_0^1, c^2(u^2)) = \inf_{u^2 \in E(l_0)} e^1(\pi({}_{\#}u_0^1, c^2(u^2))) =$$
$$= \inf_{u^2 \in E(l_0)} e^1(u^1, u^2) \le \inf_{u^2 \in E(l_0)} \sup_{u^1 \in U^1} e^1(u^1, u^2) = M(l_0).$$

3. Подведем итоги. В силу результата первого шага, $\inf_{g \in A} \inf_{{}_{\#}u^2 \in B({}_{\#}u_0^1, g)} {}_{\#}g^1({}_{\#}u_0^1, {}_{\#}u^2) \le \inf_{{}_{\#}u^2 \in B({}_{\#}u_0^1, f)} {}_{\#}g^1({}_{\#}u_0^1, {}_{\#}u^2) \le K(l_0)$. А в силу результата второго шага $\inf_{g \in A} \inf_{{}_{\#}u^2 \in B({}_{\#}u_0^1, g)} {}_{\#}g^1({}_{\#}u_0^1, {}_{\#}u^2) \le \inf_{{}_{\#}u^2 \in B({}_{\#}u_0^1, e)} {}_{\#}g^1({}_{\#}u_0^1, {}_{\#}u^2) \le M(l_0)$. Поэтому, $\inf_{g \in A} \inf_{{}_{\#}u^2 \in B({}_{\#}u_0^1, g)} {}_{\#}g^1({}_{\#}u_0^1, {}_{\#}u^2) \le \min\{K(l_0), M(l_0)\}$, что и требовалось доказать.

Задачи

1. Приведите пример функций g:U×V→R и h:U×V×A→R, определенных на конечных множествах U, V и A, для которых $\max_{u \in U} \max_{v \in V} \min_{\alpha \in A} g(u,v) > \max_{u \in U} \min_{\alpha \in A} \max_{v \in B(u,\alpha)} g(u,v,\alpha)$, где $B(u,\alpha) = \operatorname{Arg}\max_{v \in V} h(u,v,\alpha)$.
2. Приведите пример функций g:U×V→R и h:U×V×A→R, определенных на конечных множествах U, V и A, для которых $\max_{u \in U} \max_{v \in V} \min_{\alpha \in A} g(u,v) < \max_{u \in U} \min_{\alpha \in A} \max_{v \in B(u,\alpha)} g(u,v,\alpha)$, где $B(u,\alpha) = \operatorname{Arg}\max_{v \in V} h(u,v,\alpha)$.

Литература

1. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. Г.: Наука. 1976.

Лекция. Стабильность на основе угроз

Сценарии предостережения

Рассмотрим игру n лиц <N,$U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n$>,где N={1,…,n}... На протяжении всеи лекции будем предполагать, что множества $U^1,\ldots,U^n$компактны, а функции выигрыша $g^1,\ldots,g^n$непрерывны.

Определение. Исход $u=(u^1,...,u^n)\in U=\prod_{i=1}^{n}U^i$ называется индивидуально рациональным, если для всех i∈N выполняются неравенства $g^i(u)\ge \max_{w^i\in U^i}\min_{v\in U} g^i(v\|w^i)$.

Лемма. Множество индивидуально рациональных исходов не пусто.

Доказательство. Определим стратегии u_0^i условиями $\min_{u\in U} g^i(u\|u_0^i)=\max_{v^i\in U^i}\min_{u\in U} g^i(u\|v^i)$. Тогда исход $u_0=(u_0^1,...,u_0^n)$ будет индивидуально рациональным. Действительно, для дорогого i∈N имеем $g^i(u_0)\ge \min_{u\in U} g^i(u\|u_0^i)=\max_{v^i\in U^i}\min_{u\in U} g^i(u\|v^i)$, что и требуется доказать.

Определение. Набор ($u^1,\ldots u^n,w_1,\ldots,w_n$), где $u^i\in U^i$ и $w_i=(w_i^1,...,w_i^{i-1},w_i^{i+1},...,w_i^n)\in \Phi(U^i,\prod_{j\ne i}U^j)=\prod_{j\ne i}\Phi(U^i,U^j)$ для всех i∈N, называется сценарием предостережения, если для всех i∈N и дорогого $v^i\in U^i$ выполняется неравенство

$$g^i(u^1,...,u^n)\ge g^i(w_i^1(v^i),...,w_i^{i-1}(v^i),v^i,w_i^{i+1}(v^i),...,w_i^n(v^i)),$$

и, кроме того, для всех j≠i справедливы равенства $w_i^j(u^i)=u^j$.

Лемма. Если $(u^1,\dots u^n,w_1,\dots,w_n)$ –сценарий предостережения, то исход $(u^1,\dots u^n)$ индивидуально рационален.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдется такое $i\in N$, что $g^i(u)<\max\limits_{w^i\in U^i}\min\limits_{v\in U} g^i(v\|w^i)$. Выберем v_0^i, удовлетворяющее условию $\min\limits_{v\in U} g^i(v\|v_0^i)=\max\limits_{w^i\in U^i}\min\limits_{v\in U} g^i(v\|w^i)$. Тогда

$$g^i(u^1,\dots,u^n)\ge g^i(w_i^i(v_0^i),\dots,w_i^{i-1}(v_0^i),v_0^i,w_i^{i+1}(v_0^i),\dots,w_i^n(v_0^i))\ge\min_{v\in U} g^i(v\|v_0^i)=$$
$$=\max_{w^i\in U^i}\min_{v\in U} g^i(v\|w^i)>g^i(u^1,\dots,u^n).$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма. Если исход $(u^1,\dots u^n)$ индивидуально рационален, то найдутся такие функции $w_i\in\Phi(U^i,\prod\limits_{j\ne i}U^j)$, что набор $(u^1,\dots u^n,w_1,\dots,w_n)$ будет сценарием предостережения.

Доказательство. Определим функции $\omega_i=(\omega_i^1,\dots,\omega_i^{i-1},\omega_i^{i+1},\dots,\omega_i^n)\in\Phi(U^i,\prod\limits_{j\ne i}U^j)$ условием $g^i(\omega_i^1(v^i),\dots,\omega_i^{i-1}(v^i),v^i,\omega_i^{i+1}(v^i),\dots,\omega_i^n(v^i))=\min\limits_{w\in U} g^i(w\|v^i)$ для всех $v^i\in U^i$.

Положим

$$w_i^j(v^i)=\begin{cases}u^j,\ \text{если } v^i=u^i,\\ \omega_i^j(v^i)\ \text{в противном случае,}\end{cases}$$

и. $w_i(v^i)=(w_i^1(v^i),\dots,w_i^{i-1}(v^i),w_i^{i+1}(v^i),\dots,w_i^n(v^i))$

Определенный таким образом набор $(u^1,\dots u^n,w_1,\dots,w_n)$ будет сценарием предостережения. В самом деле, так как исход $(u^1,\dots u^n)$ индивидуально рационален, для дорогого $v^i\ne u^i$ имеем

$$g^i(w_i^1(v^i),...,w_i^{i-1}(v^i),v^i,w_i^{i+1}(v^i),...,w_i^n(v^i))=g^i(\omega_i^1(v^i),...,\omega_i^{i-1}(v^i),v^i,\omega_i^{i+1}(v^i),...,\omega_i^n(v^i))=$$
$$=\min_{w\in U} g^i(w\|v^i)\le \max_{v^i\in U^i}\min_{w\in U} g^i(w\|v^i)\le g^i(u^1,...,u^n).$$

Если же $v^i=u^i$, то очевидно выполняются равенства $w_i^j(v^i)=u^j$, а значит и равенства $g^i(w_i^1(v^i),...,w_i^{i-1}(v^i),v^i,w_i^{i+1}(v^i),...,w_i^n(v^i))=g^i(u^1,...,u^n).$ Лемма доказанная.

Следствие. Множество сценариев предостережения не пусто.

Определение. Исход $(u^1,\dots u^n)$ называется дележом, если вон индивидуально рационален и эффективен.

Лемма. Множество дележей не пусто.

Доказательство. Множество индивидуально рациональных исходов замкнуто, так как оно задается системой нестрогих неравенств с непрерывными левыми частями. Поскольку множество всех исходов игры мы предполагаем компактным, всякое его замкнутое подмножество тоже компактно. Следовательно, в множестве индивидуально рациональных исходов найдется такой исход u, который не доминируется никаким вторым индивидуально рациональным исходом.

Тогда этот исход не может доминироваться никаким вторым исходом. Действительно, допустим противное. Тогда существует исход v, который доминирует u. В силу выбора исхода u, исход v не может быть индивидуально рациональным. Значит, найдется такое $i\in N$, что $g^i(v)<\max_{w^i\in U^i}\min_{\omega\in U} g^i(\omega\|w^i)\le g^i(u)$, что противоречит поэтому, что v доминирует u. Лемма доказанная.

- Повторяющаяся игра
- Необеспеченность информацией
- Осторожность по отношению наличия шпиона

α-ядро

Введем обозначение. Пусть $v^K \in \prod_{i \in K} U^i$ – стратегия коалиции K, а $w^{N\setminus K} \in \prod_{i \in N\setminus K} U^i$ – стратегия ее дополнения. Символом $(v^K \,|\, w^{N\setminus K})$ будем называть такой исход $\omega = (\omega^1, ..., \omega^n) \in \prod_{i \in N} U^i$ игры, что $\omega^i = \begin{cases} v^i, \text{если } i \in K, \\ w^i, \text{если } i \in N \setminus K. \end{cases}$

Определение. α-ядром игры Г называется множество $C_\alpha(\Gamma)$ таких исходов u игры, что для любой коалиции K и любой ее стратегии v найдется стратегия $w^{\setminus K}$ дополнительной коалиции N\K, удовлетворяющая условию: исход $(v \,|\, w^{\setminus K})$ не доминирует исход u по коалиции K.

Определение. Коалиционным сценарием предостережений называется исход u вместе с набором функций $\tilde{w}_K \in \Phi\left(\prod_{i \in K} U^i, \prod_{i \in N\setminus K} U^i\right)$ (K пробегает семейство всех подмножеств множества N), если выполняется условие: для любой коалиции K и любой ее стратегии v исход $\left(v^K \,|\, \tilde{w}_K(v^K)\right)$ не доминирует исход u по коалиции K.

Лемма. Исход u принадлежит α-ядру тогда и только тогда, когда найдется такой набор функций $\tilde{w}_K \in \Phi\left(\prod_{i \in K} U^i, \prod_{i \in N\setminus K} U^i\right)$, вместе с которыми вон образует коалиционный сценарий предостережений.

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть исход u принадлежит $C_\alpha(\Gamma)$. Тогда для любой коалиции K и любой ее стратегии v найдется такая стратегия $w^{\setminus K}$ дополнительной коалиции N\K, что исход $(v \mid w^{\setminus K})$ не доминирует исход u по коалиции K. Выберем любую такую стратегию и положим $\tilde{w}_K(v^K) = w^{N\setminus K}$. Тем самым определены нужные функции $\tilde{w}_K \in \Phi\left(\prod_{i\in K} U^i, \prod_{i\in N\setminus K} U^i\right)$.

Обратно, пусть исход u вместе с функциями $\tilde{w}_K \in \Phi\left(\prod_{i\in K} U^i, \prod_{i\in N\setminus K} U^i\right)$ образует коалиционный сценарий предостережений. Тогда для любой коалиции K и любой ее стратегии v исход $\left(v^K \middle| \tilde{w}_K(v^K)\right)$ не доминирует исход u по коалиции K, значит исход u принадлежит α-ядру.

Лемма. Если u – ситуация сильного равновесия в игре Г, то u принадлежит α-ядру этой игры.

Доказательство. Пусть K – произвольная коалиция, и $u^{\setminus K}$ – стратегия дополнительной коалиции N\K, все компоненты которой совпадают с соответствующими компонентами исхода u. Тогда, очевидно, $(u \| v) = (v \mid u^{\setminus K})$. В силу того, что u – ситуация сильного равновесия исход $(u \| v)$ не доминирует исход u по коалиции K, что и требовалось доказать.

Лемма. В игре двух лиц α-ядро и множество всех дележей совпадают.

Доказательство. Взял в определении α-ядра K=N получим, что исход принадлежащий α-ядру эффективен. Если же исход $u=(u^1,u^2)$ принадлежит α-ядру и коалиция K состоит из одного игрока i и v – произвольная стратегия этой коалиции, то взял соответствующую стратегию $w^{\backslash K}$ дополнительной коалиции, получим $g^i(u) \geq g^i(v^K \left| w^{N\backslash K}\right.) \geq \min\limits_{w \in U} g^i(v^K \| w)$. В силу произвольности v, получим отсюда $g^i(u) \geq \max\limits_{v^i \in U^i} \min\limits_{w \in U} g^i(w \| v^i)$, то есть исход u является индивидуально рациональным, а значит и дележом.

Обратно, пусть исход u является дележом. Так как вон по определению эффективен, определение α-ядра выполняется при K=N. Для коалиции K={1} и любой стратегии v^1 первого игрока выберем стратегию w^2 дополнительной коалиции {2} удовлетворяющую условию $g^1(v^1,w^2) = \min\limits_{\omega^2 \in U^2} g^1(v^1,\omega^2)$. Тогда в силу индивидуальной рациональности исхода u выполняются неравенства $g^1(v^1,w^2) = \min\limits_{\omega^2 \in U^2} g^1(v^1,\omega^2) \leq \max\limits_{\omega^1 \in U^1} \min\limits_{\omega^2 \in U^2} g^1(\omega^1,\omega^2) \leq g^1(u^1,u^2)$, то есть выполняется определение α-ядра при K={1}. Случай K={2} рассматривается аналогично. А так как вторых коалиций нет, исход u принадлежит $C_\alpha(\Gamma)$.

- (- и (-ядро как сильные равновесия в информационных расширениях.

β-ядро

Определение. β-ядром игры Γ называется множество $C_\beta(\Gamma)$ таких исходов u игры, что для любой коалиции K найдется такая стратегия $w^{\backslash K}$ дополнительной коалиции N\K, что для любой стратегии v коалиции K выполняется условие: исход (v|w$^{\backslash K}$) не доминирует исход u по коалиции K.

Лемма. Для любой игры Г выполняется включение $C_\beta(\Gamma) \subset C_\alpha(\Gamma)$.

Доказательство. Определения α-ядра и β-ядра отличаются лишь тем, что угроза w$^{\backslash K}$ во втором случае не может зависеть вот стратегии отклоняющейся коалиции. Поэтому β-ядро содержится в α-ядре.

Определение. Динамическим расширением игры Г называется игра $\overline{\Gamma} = \left\langle N, \overline{U}^1, ..., \overline{U}^n, \overline{g}^1, ..., \overline{g}^n \right\rangle$ в которой для дорогого i∈N множество $\overline{U}^i$ состоит из всех бесконечных последовательностей $\overline{u}^i = (u_1^i, u_2^i, ...)$, члены u_t^i которых принадлежат множеству U^i, а функция выигрыша $\overline{g}^i$ определена условием $\overline{g}^i(\overline{u}^1, ..., \overline{u}^n) = \underline{\lim}_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} g^i(u_t^1, ..., u_t^n)$.

- Среднее Чезаро

Рассмотрим следующее квазиинформационное расширение $_*\overline{\Gamma} = \left\langle N, {_*\overline{U}}^1, ..., {_*\overline{U}}^n, {_*\overline{g}}^1, ..., {_*\overline{g}}^n \right\rangle$ игры $\overline{\Gamma} = \left\langle N, \overline{U}^1, ..., \overline{U}^n, \overline{g}^1, ..., \overline{g}^n \right\rangle$. Множество $_*\overline{U}^i$ состоит из всевозможных наборов $_*\overline{u}^i = (\tilde{u}_1^i, \tilde{u}_2^i, ...)$ функций $\tilde{u}_t^i \in \Phi\left(\prod_{\tau=1}^{t-1} U, U^i\right)$ (для t=1 мы полагаем $\Phi\left(\prod_{\tau=1}^{t-1} U, U^i\right) = U^i$). Значение $(\overline{u}^1, ..., \overline{u}^n)$ проекции $\pi({_*\overline{u}}^1, ..., {_*\overline{u}}^n)$ задается системой равенств:

$u_1^i = {}_*u_1^i,\ i = 1,...,n,$

$u_t^i = \tilde{u}_t^i(u_1^1,...,u_1^n,u_2^1,...,u_2^n,...,u_{t-1}^1,...,u_{t-1}^n),\ i = 1,...,n,\ t = 2,3,...$

Вложения c^i определяются стандартным образом, а функции ${}_*\bar{g}^i$ – с помощью аксиомы квазиинформационного расширения.

Теорема. Если исход $u=(u^1,\ldots,u^n)$ принадлежит $C_\beta(\Gamma)$, то найдется ситуация $({}_*\bar{u}^1,...,{}_*\bar{u}^n)$ равновесия в по Нэшу в игре ${}_*\bar{\Gamma}$, для которой $\pi({}_*\bar{u}^1,...,{}_*\bar{u}^n) = (\bar{u}^1,....,\bar{u}^n)$ и $u_t^i = u^i$ для всех $i \in N$ и всех $t=1,2,\ldots$

Доказательство. Пусть исход $u=(u^1,\ldots,u^n)$ принадлежит $C_\beta(\Gamma)$. Построим ситуацию равновесия $({}_*\bar{u}^1,...,{}_*\bar{u}^n)$, для которой $\pi({}_*\bar{u}^1,...,{}_*\bar{u}^n) = (\bar{u}^1,....,\bar{u}^n)$ и $u_t^i = u^i$ для всех $i \in N$ и всех $t=1,2,\ldots$

Рассмотрим произвольную последовательность $(u_1,u_2,\ldots u_t)$ исходов игры Г. Определим функцию $\tau_t : \prod_{l=1}^{t-1} U \to \{1,2,...,t\}$ условиями:

А) если $u_l=u$ для всех $l=1,2,\ldots,t$, это $\tau_t(u_1,u_2,\ldots u_{t-1})=t$;

Б) в противном случае $\tau_t(u_1,u_2,\ldots u_{t-1})$ равно наименьшему из чисел l, для которых $u_l \neq u$.

Зададим функцию $I_t : \prod_{l=1}^{t-1} U \to N$ условиями

В) если $\tau_t(u_1,u_2,\ldots u_{t-1})=t$, это $I_t(u_1,u_2,\ldots u_{t-1})=\varnothing$;

Г) в противном случае $I_t(u_1,u_2,...,u_{t-1}) = \left\{ i \in N : u^i_{\tau_t(u_1,u_2,...,u_{t-1})} \neq u^i \right\}$.

Для каждой коалиции K фиксируем произвольную стратегию $w^{\setminus K}$ дополнительной коалиции, удовлетворяющую условию: для любой стратегии v коалиции K исход $(v|w^{\backslash K})$ не доминирует исход u по коалиции K (такая стратегия найдется, поскольку исход u принадлежит β-ядру). Для дорогого игрока i, входящего в коалицию N\K обозначим w_K^i соответствующую компоненту коалиционной стратегии $w^{\backslash K}$.

Определим стратегию ${}_*\overline{u}^i$ i-го игрока в игре ${}_*\overline{\Gamma}$ условиями:

$$\tilde{u}_t^i(u_1,u_2,...,u_{t-1}) = \begin{cases} u^i, \text{ если } I_t(u_1,u_2,...,u_{t-1}) = \varnothing, \\ w_K^i, \text{ если } I_t(u_1,u_2,...,u_{t-1}) = K \neq \varnothing. \end{cases}$$

Докажем, что так определенная ситуация ${}_*\overline{u} = ({}_*\overline{u}^1,...,{}_*\overline{u}^n)$ является ситуацией равновесия по Нэшу в игре ${}_*\overline{\Gamma}$. Пусть K={k} – произвольная одноэлементная коалиция, ${}_*\overline{v}^K$ – ее произвольная стратегия в игре ${}_*\overline{\Gamma}$ и $\pi({}_*\overline{u}\|{}_*\overline{v}^K) = (\overline{\omega}^1,...,\overline{\omega}^n)$.

По индукции проверяется, что в ситуации $\pi({}_*\overline{u}^1,...,{}_*\overline{u}^n) = (\overline{u}^1,....,\overline{u}^n)$, где $u_t^i = u^i$ для всех i∈N и всех t=1,2,… Поэтому в данной ситуации игроки получают выигрыши

$$\overline{g}^i(\overline{u}^1,...,\overline{u}^n) = \varliminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} g^i(u_t^1,...,u_t^n) = \varliminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} g^i(u^1,...,u^n) = \varliminf_{T\to\infty} g^i(u^1,...,u^n) = g^i(u^1,...,u^n)$$

.

Если для всех i∈N и всех t=1,2,… выполняются равенства $\omega_t^i = u^i$, то в ситуации $({}_*\overline{u}\|{}_*\overline{v}^K)$ все игроки получают такие же выигрыши, как и в ситуации ${}_*\overline{u} = ({}_*\overline{u}^1,...,{}_*\overline{u}^n)$, поэтому игроку из коалиции K не имеет смысла выбирать стратегию ${}_*\overline{v}^K$.

В противном случае найдется число ϑ, для которого $\omega_\vartheta^i \neq u^i$. Пусть θ – наименьшее из таких чисел. Тогда

$$\tau_t(\omega_1^1,...,\omega_1^n,\omega_2^1,...,\omega_2^n,...,\omega_{t-1}^1,...\omega_{t-1}^n)=\begin{cases} t, \text{ если } t<\theta, \\ \theta, \text{ если } t\ge\theta, \end{cases}$$

и

$$I_t(\omega_1^1,...,\omega_1^n,\omega_2^1,...,\omega_2^n,...,\omega_{t-1}^1,...\omega_{t-1}^n)=\begin{cases} \varnothing, \text{ если } t<\theta, \\ \{k\}, \text{ если } t\ge\theta. \end{cases}$$

Следовательно, $\tilde{u}_t^i(u_1,u_2,...,u_{t-1})=w_K^i$ и $g^k(\omega_t^1,...,\omega_t^n)\le g^k(u^1,...,u^n)$ для всех t>θ.

Поэтому

$$_*\bar{g}^k(_*\bar{u}\|_*\bar{v}^K)=\bar{g}^k(\pi(_*\bar{u}\|_*\bar{v}^K))=\bar{g}^k(\bar{\omega}^1,...,\bar{\omega}^n)=\underline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}g^k(\omega_t^1,...,\omega_t^n)=\underline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}g^k(\omega_t^1,...,\omega_t^n)=$$

$$=\underline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{\theta-1}g^k(\omega_t^1,...,\omega_t^n)+\sum_{t=\theta}^{T}g^k(\omega_t^1,...,\omega_t^n)\right)\le\underline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{\theta-1}\max_{v\in U}g^k(v)+\sum_{t=\theta}^{T}g^k(u)\right)=$$

$$=\underline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left((\theta-1)\max_{v\in U}g^k(v)+(T-\theta+1)g^k(u)\right)=\underline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(Tg^k(u)+(\theta-1)\left[\max_{v\in U}g^k(v)-g^k(u)\right]\right)=$$

$$=\underline{\lim}_{T\to\infty}\left\{g^k(u)+\frac{1}{T}\left((\theta-1)\left[\max_{v\in U}g^k(v)-g^k(u)\right]\right)\right\}=g^k(u).$$

И вновь коалиции K не выгодно отклоняться. Теорема доказана.

Теорема. Пусть множества U^i конечны. Если существует ситуация $(_*\bar{u}^1,...,_*\bar{u}^n)$ сильного равновесия в игре $_*\bar{\Gamma}$, для которой $\pi(_*\bar{u}^1,...,_*\bar{u}^n)=(\bar{u}^1,....,\bar{u}^n)$ и $u_t^i=u^i$ для всех i∈N и всех t=1,2,…, это исход $u=(u^1,…,u^n)$ принадлежит $C_\beta(\Gamma)$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдется такая коалиция K, что для любой стратегии $w^{\setminus K}$ дополнительной коалиции существует стратегия v коалиции K, удовлетворяющая условию: исход $(v|w^{\setminus K})$ доминирует исход u по коалиции K. Если исход $(v|w^{\setminus K})$ доминирует исход u по коалиции K, то выполняются неравенства $g^k(v^K \left| w^{N\backslash k}\right.) \geq g^k(u)$ для всех $k \in K$ и $\sum_{k\in K} g^k(v^K \left| w^{N\backslash k}\right.) - \sum_{k\in K} g^k(u) > 0$, и тем более $\max_{v^K \in V^K(w^{N\backslash K})} \left[\sum_{k\in K} g^k(v^K \left| w^{N\backslash k}\right.) - \sum_{k\in K} g^k(u) \right] > 0$, где $V^K(w^{N\backslash K}) = \left\{ v^K \in U^K : g^k(v^K \left| w^{N\backslash K}\right.) \geq g^K(u),\ k \in K \right\}$. Функция $\varphi(w^{N\backslash K}) = \max_{v^K \in V^K(w^{N\backslash K})} \left[\sum_{k\in K} g^k(v^K \left| w^{N\backslash k}\right.) - \sum_{k\in K} g^k(u) \right]$ достигает своего минимума на конечном множестве $U^{N\backslash K}$ в некоторой точке $w_0^{N\backslash K}$. В этой точке в частности $\max_{v^K \in V^K(w^{N\backslash K})} \left[\sum_{k\in K} g^k(v^K \left| w_0^{N\backslash K}\right.) - \sum_{k\in K} g^k(u) \right] = \delta > 0$, а значит

$$\min_{w^{N\backslash K} \in U^{N\backslash K}} \max_{v^K \in V^K(w^{N\backslash K})} \left[\sum_{k\in K} g^k(v^K \left| w^{N\backslash K}\right.) - \sum_{k\in K} g^k(u) \right] = \max_{v^K \in V^K(w^{N\backslash K})} \left[\sum_{k\in K} g^k(v^K \left| w_0^{N\backslash K}\right.) - \sum_{k\in K} g^k(u) \right] = \delta > 0$$
.

Поэтому для любой стратегии $w^{\backslash K}$ дополнительной коалиции существует стратегия $\tilde{v}^K(w^{N\backslash K})$ коалиции K, удовлетворяющая неравенствам $g^k(v^K \left| w^{N\backslash k}\right.) \geq g^k(u)$ для всех $k \in K$ и $\sum_{k\in K} g^k(\tilde{v}^K(w^{N\backslash K}) \left| w^{N\backslash K}\right.) \geq \sum_{k\in K} g^k(u) + \delta$, где $\delta > 0$.

Пусть $\bar{u}_*^i = (\tilde{u}_1^i, \tilde{u}_2^i, \ldots)$. По индукции построим стратегии $\bar{v}_*^k = (\tilde{v}_1^k, \tilde{v}_2^k, \ldots)$ игроков входящих в коалицию K. Положим $\tilde{v}_1^K = \tilde{v}^K(u^{N\backslash K})$ и $\omega_1 = \left(u^{N\backslash K} \left| \tilde{v}^K(u^{N\backslash K}) \right. \right)$. Далее, пусть $\tilde{v}_t^K(\omega_1, \ldots, \omega_{t-1}) = \tilde{v}^K(\tilde{u}_t^{N\backslash K}(\omega_1, \ldots, \omega_{t-1}))$ и $\omega_t = (\tilde{v}_t^K(\omega_1, \ldots, \omega_{t-1}) \left| \tilde{u}_t^{N\backslash K}(\omega_1, \ldots, \omega_{t-1}) \right.)$.

Как и при доказательстве предыдущей теоремы проверяется, что выигрыши игроков в ситуации $({}_*\bar{u}^1,...,{}_*\bar{u}^n)$ в игре ${}_*\bar{\Gamma}$ то же, что соответствующие выигрыши в ситуации u в игре Г.

Оценим суммарный выигрыш игроков, входящих в коалицию K, в ситуации $\left({}_*\bar{u}\middle\|{}_*\bar{v}^K\right)=\left({}_*\bar{u}^{N\setminus K}\middle|{}_*\bar{v}^K\right)$. По определению стратегии ${}_*\tilde{v}^K$ в любой момент времени t выбранные игроками управления образуют исход $\left(w^{N\setminus K}\middle|\tilde{v}^K(w^{N\setminus K})\right)$, где $w^{\setminus K}$ – какой-то элемент множества $U^{N\setminus K}$. Поэтому в любой момент времени выполняется неравенство $\sum_{k\in K} g^k(\omega_t)\ge\sum_{k\in K} g^k(u)+\delta$. А значит $\sum_{k\in K} {}_*\bar{g}^k\left({}_*\bar{u}\middle\|{}_*\bar{v}^K\right)\ge\sum_{k\in K} g^k(u)+\delta$.

Кроме того, в любой момент времени выполняются неравенства $g^k(\omega_t)\ge g^k(u),\ k\in K$. А это означает, что ситуация $\left({}_*\bar{u}\middle\|{}_*\bar{v}^K\right)$ доминирует ситуацию ${}_*\bar{u}$ по коалиции K, что противоречит условию.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассмотрим частный случай – игру двух лиц. Введем обозначения $\beta^1=\min_{u^2\in U^2}\max_{u^1\in U^1} g^1(u^1,u^2)$, $\beta^2=\min_{u^1\in U^1}\max_{u^2\in U^2} g^2(u^1,u^2)$.

Лемма. Исход u принадлежит $C_\beta(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда вон, во-первых, эффективен, и, во-вторых, выполняются неравенства $g^1(u)\ge\beta^1$ и $g^2(u)\ge\beta^{2.}$

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Если мы в определении β-ядра положим K=N, то придем к эффективности исхода u.

Докажем неравенство $g^1(u) \geq \beta^1$. Если w^2 – угроза отклонению коалиции, состоящей из первого игрока, существование которой гарантируется определением β-ядра, то для любой стратегии v^1 первого игрока выполняется неравенство $g^1(u) \geq g^1(v^1, w^2)$. В силу произвольности v^1, отсюда следует справедливость неравенства $g^1(u) \geq \max\limits_{v^1 \in U^1} g^1(v^1, w^2)$, и уж тем более – истинность неравенства $g^1(u) \geq \min\limits_{w^2 \in U^2} \max\limits_{v^1 \in U^1} g^1(v^1, w^2)$.

Неравенство $g^2(u) \geq \beta^2$ доказывается аналогично. Необходимость установленная.

Докажем достаточность. Выберем стратегии w^1 и w^2, удовлетворяющие условиям $\max\limits_{u^2 \in U^2} g^2(w^1, u^2) = \min\limits_{u^1 \in U^1} \max\limits_{u^2 \in U^2} g^2(u^1, u^2)$ и $\max\limits_{u^1 \in U^1} g^1(u^1, w^2) = \min\limits_{u^2 \in U^2} \max\limits_{u^1 \in U^1} g^1(u^1, u^2)$ соответственно. Тогда из неравенств $g^1(u) \geq \beta^1$ и $g^2(u) \geq \beta^2$ будут следовать неравенства $g^1(u) \geq g^1(v^1, w^2)$ и $g^1(u) \geq g^1(w^1, v^2)$, справедливые для любых стратегий v^1 и v^2. Остается рассмотреть коалицию K, состоящую из двух игроков. Для нее выполнение требования определения β-ядра следует из эффективности исхода u.

Множество $C_\beta(\Gamma)$ может оказаться пустым. Из последней леммы следует, что дело обстоит так, например, для антагонистических игр, не имеющих седловой точки. В этом случае естественным образом возникает борьба за право сделать свой выбор вторым, зная уже выбор противника.

γ-ядро

В этом и следующем разделе ограничимся рассмотрением игр двух лиц (n=2).

Определим множества $B^1(u^2)=\left\{u^1\in U^1: g^1(u^1,u^2)=\max\limits_{u\in U^1} g^1(u,u^2)\right\}$ и $B^2(u^1)=\left\{u^2\in U^2: g^2(u^1,u^2)=\max\limits_{v\in U^2} g^2(u^1,v)\right\}$ наилучших ответов первого и второго игроков соответственно на известные им стратегии противников.

Определение. γ-ядром игры Γ называется множество $C_\gamma(\Gamma)$ таких дележей $u_0=(u_0^1,u_0^2)$, что для дорогого $u^1\neq u_0^1$ $(u^1\in U^1)$ найдется $v\in B^2(u^1)$, для которого $g^1(u_0)\geq g^1(u^1,v)$, а для дорогого $u^2\neq u_0^2$ $(u^2\in U^2)$ найдется $w\in B^1(u^2)$, для которого $g^2(u_0)\geq g^2(w,u^2)$.

Пусть $\gamma^1=\sup\limits_{u^1\in U^1}\min\limits_{u^2\in B^2(u^1)} g^1(u^1,u^2)$ и $\gamma^2=\sup\limits_{u^2\in U^2}\min\limits_{u^1\in B^1(u^2)} g^1(u^1,u^2)$ – максимальные гарантированные результаты первого и второго игроков соответственно в предположении, что этот игрок обладает правом первого походка.

Лемма. Множество $C_\gamma(\Gamma)$ есть множество всех дележей u, для которых выполняются неравенства $g^1(u)\geq\gamma^1$ и $g^2(u)\geq\gamma^2$.

Доказательство. Пусть дележ $u_0=(u_0^1,u_0^2)$ принадлежит γ-ядру, u^1 – произвольная стратегия первого игрока и v – такая стратегия второго игрока, что $v\in B^2(u^1)$ и выполняется неравенство $g^1(u_0)\geq g^1(u^1,v)$. Тогда тем более выполняется неравенство $g^1(u_0)\geq\min\limits_{v\in B^2(u^1)} g^1(u^1,v)$. Это означает, что число $g^1(u_0)$

есть одна из верхних граней функции $\varphi(u^1)=\min\limits_{v\in B^2(u^1)} g^1(u^1,v)$. А значит, это число не может быть меньше точной верхней граны $\sup\limits_{u^1\in U^1}\varphi(u^1)=\sup\limits_{u^1\in U^1}\min\limits_{v\in B^2(u^1)} g^1(u^1,v)$ этой функции, то есть выполняется неравенство $g^1(u)\geq\gamma^{1.}$ Неравенство $g^2(u)\geq\gamma^2$ доказывается аналогично.

Пусть теперь для дележа $u_0=(u_0^1,u_0^2)$ не выполняется неравенство $g^1(u_0)\geq\gamma^{1.}$ Значит $g^1(u_0)<\sup\limits_{u^1\in U^1}\min\limits_{u^2\in B^2(u^1)} g^1(u^1,u^2)$. Тогда в силу определения точной верхней граны существует стратегия первого игрока v^1, для которой выполняется неравенство $g^1(u_0)<\min\limits_{u^2\in B^2(u^1)} g^1(v^1,u^2)$. Но тогда неравенство $g^1(u_0)<g^1(v^1,w^2)$ выполняется для всех $w^2\in B^2(u^1)$, и следовательно, исход u_0 не принадлежит γ-ядру. Аналогично доказывается, что исход u_0 не принадлежит γ-ядру, если не выполняется неравенство $g^2(u_0)\geq\gamma^{2.}$

Лемма доказанная.

Множество C_γ (Г) может оказаться пустым.

Пример. Рассмотрим биматричную игру с выигрышами $\begin{pmatrix}(-1,-1) & (1,0)\\ (0,1) & (-1,-1)\end{pmatrix}$.

Если игрок 1 обладает правом первого походка и выберет первую срока, то наилучшим ответом второго игрока станет выбор второго столбца. Тем самым первый игрок может гарантировать себя максимальный выигрыш, равный 1. Аналогично, если второй игрок обладает правом первого походка, то выбор первого столбца гарантирует ему выигрыш 1. Но ни одного исхода, для которого выигрыши обоих игроков были бы не меньше 1 в данной игре нет, то есть γ-ядро пусто.

Для игр с пустым γ-ядром возникает борьба за право первого походка.

Классификационная теорема

Если, как вы проницательно заметили, один из участников беседы не может предсказать ее, придется этому участнику взять всю беседу на себя.

Г.К. Честертон

Теорема. Множества $C_\beta(\Gamma)$ и $C_\gamma(\Gamma)$ не могут быть пусты одновременно.

Доказательство. Рассмотрим множество $D^1(\varepsilon)=\{u\in U: g^1(u)\geq\gamma^1-\varepsilon,\ g^2(u)\geq\beta^2\}$. Если $\varepsilon>0$, то множество $D^1(\varepsilon)$ не пусто. В самом деле, рассмотрим произвольный элемент $v^1\in U^1$, удовлетворяющий условию $\min\limits_{u^2\in B^2(u^1)} g^1(v^1,u^2)\geq \sup\limits_{u^1\in U^1}\min\limits_{u^2\in B^2(u^1)} g^1(u^1,u^2)-\varepsilon$ и любой элемент v^2 из множества $B^2(u^1)$. Тогда $g^1(v^1,v^2)\geq \min\limits_{u^2\in B^2(u^1)} g^1(v^1,u^2)\geq \sup\limits_{u^1\in U^1}\min\limits_{u^2\in B^2(u^1)} g^1(u^1,u^2)-\varepsilon$ и $g^2(v^1,v^2)=\max\limits_{u^2\in U^2} g^2(v^1,u^2)\geq \min\limits_{u^1\in U^1}\max\limits_{u^2\in U^2} g^2(u^1,u^2)$, то есть исход (v^1,v^2) принадлежит множеству $D^1(\varepsilon)$.

Множество $D^1(\varepsilon)$ замкнуто, так как задается системой двух нестрогих неравенств с непрерывными левыми частями. А так как оно принадлежит компактному множеству U, оно само является компактным. Кроме того, если $\delta>\varepsilon$, то $D^1(\varepsilon)\subset D^1(\delta)$.

Поэтому последовательность $D^1(1), D^1\left(\frac{1}{2}\right), ..., D^1\left(\frac{1}{k}\right), ...$ представляет собой последовательность вложенных компактных подмножеств множества U. Так как U компактно, пересечение $D^1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} D^1\left(\frac{1}{k}\right)$ не пусто.

Непосредственно проверяется, что $D^1=D^1(0) =\{u\in U: g^1(u)\geq\gamma^1, g^2(u)\geq\beta^2\}$. Из этого равенства видно, что множество D^1 тоже является компактным. Аналогично показывается, что множество $D^2=\{u\in U: g^2(u)\geq\gamma^2, g^1(u)\geq\beta^1\}$ не пусто и компактно.

Так как множество D^1 не пусто и компактно, в нем имеется, по крайней мэр, один эффективный исход v. Этот исход является эффективным на всем множестве U. Действительно, пусть u – произвольный исход из множества U. Если u принадлежит D^1, то вон не доминирует v по определению исхода v. Если же u не принадлежит D^1, то выполняется хотя бы одно из неравенств $g^1(u)<\gamma^1\leq g^1(v)$ или $g^2(u)<\beta^2\leq g^2(v)$ и исход u не может доминировать исход v.

Итак, пусть v – эффективный исход из множества D^1. Допустим, что множества $C_\beta(\Gamma)$ и $C_\gamma(\Gamma)$ пусты. В силу пустоты множества $C_\beta(\Gamma)$ для выбранного нами исхода v выполняется неравенство $g^1(v)<\beta^1$. А в силу пустоты $C_\gamma(\Gamma)$ имеет место неравенство $g^2(v)<\gamma^2$.

Возьмем теперь произвольный исход w из множества D^2. Тогда выполняются неравенства $g^2(w)\geq\gamma^2>g^2(v)$ и $g^1(w)\geq\beta^1>g^1(v)$, то есть исход w доминирует исход v, что противоречит выбору v. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема. Если оба множества $C_\beta(\Gamma)$ и $C_\gamma(\Gamma)$ не пусты, то не пусто и их пересечение.

Доказательство. Рассмотрим четыре случая.

а) Пусть $\gamma^1 \geq \beta^1$ и $\gamma^2 \geq \beta^2$. Тогда в силу доказанной выше леммы $C_\gamma(\Gamma) \subset C_\beta(\Gamma)$. Значит пересечение $C_\beta(\Gamma)$ и $C_\gamma(\Gamma)$ есть по сути множество $C_\gamma(\Gamma)$, которое не пусто по условию теоремы.

б) Пусть наоборот $\gamma^1 \leq \beta^1$ и $\gamma^2 \leq \beta^2$. Тогда в силу доказанной выше леммы $C_\beta(\Gamma) \subset C_\gamma(\Gamma)$. Значит пересечение $C_\beta(\Gamma)$ и $C_\gamma(\Gamma)$ есть по сути множество $C_\beta(\Gamma)$, которое не пусто по условию теоремы.

в) Пусть теперь $\gamma^1 > \beta^1$ но $\gamma^2 < \beta^2$. Тогда $C_\beta \bigcap C_\gamma = D^1$ и любой исход v из множества D^1 принадлежит пересечению $C_\beta(\Gamma)$ и $C_\gamma(\Gamma)$.

г) Случай $\gamma^1 < \beta^1$ но $\gamma^2 > \beta^2$ рассматривается аналогично предыдущему.

Так как разобранные случаи исчерпывают все возможности, теорема доказана.

Таким образом, все игры двух лиц разбиваются на три класса.

1. Игры в которых β-ядро пусто, а γ-ядро – нет. В этом случае каждому из игроков выгодно затягивать с принятием своего решения, стараясь узнать выбор противника.

- Курская дуга - борьба за право второго походка.

2. Игры в которых пусто γ-ядро и не пусто β-ядро. В этом случае возникает борьба за право первого походка.

3. Игры в которых и β-ядро и γ-ядро не пусты. В этом случае в игроков появляется возможность найти компромисс, который может быть сделан устойчивым при помощи угроз.

Из доказательства последней теоремы следует, что третий класс в свою очередь разбивается на четыре подкласса.

а) Если $\gamma^1 \geq \beta^1$ и $\gamma^2 \geq \beta^2$, то обоим игрокам лучше быть лидером, но в силу этих неравенств все-таки возможен компромисс, делающий ситуацию устойчивой.

б) Если $\gamma^1 \leq \beta^1$ и $\gamma^2 \leq \beta^2$, то наоборот, обоим игрокам выгодно быть ведомыми, но снова имеется взаимовыгодный исход.

в) Если $\gamma^1 > \beta^1$ но $\gamma^2 < \beta^2$, то первому игроку выгодно быть лидером, а второму – ведомым и конфликта из-за очередности ходов вовсе не возникает

г) Случай $\gamma^1 < \beta^1$ но $\gamma^2 > \beta^2$ полностью аналогичен предыдущему.

- Атос и д'артаньян

Модель Гермейера-Вателя

В данном разделе речь пойдет об играх Гермейера–Вателя. Напомним, что это игра в нормальной форме $\Gamma = \langle N, U^1, \dots, U^n, g^1, \dots, g^n \rangle$,имеющая следующую дополнительную структуру.

Множество игроков $N = \{1, \dots, n\}$... Множество управлений i-го игрока представляет собой параллелепипед $U^i = \{u^i \in \mathbb{R}^{L^i} : 0 \leq u^i_l \leq a^i_l, l = 1, \dots, L^i\}$. Пусть функции $f^i : U^i \to \mathbb{R}$, i=1,…,n, непрерывны и строго возрастают по каждому аргумента, а функция $F:\prod_{i=1}^{n} U^i \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго возрастает по каждому аргумента и, кроме того, F(0)≥0, а $f^i(0)=0$ для всех i=1,…,n... Функция выигрыша i-го игрока определяется условием

$g^i(u^1,\ldots,u^n)=\min\{F(u^1,\ldots,u^n),f^i(a^i-u^i)\}$ (i=1,…,n)

(здесь принято обозначение $a^i=(a_1^i,\ldots,a_{L^i}^i)$).

При сделанных предположениях в каждого из игроков имеется универсальная стратегия наказания, то есть $0\in \operatorname{Arg}\min_{v^i\in U^i} g^j(u\|v^i)$ для дорогого j≠I и любой ситуации u∈U. Поэтому почти очевидно (и проверяется непосредственно), что в такой игре α-ядро совпадает с β-ядром. В лекции 7 доказано, что в игре Гермейера–Вателя существует ситуация сильного равновесия, которая, как показано выше, принадлежит α-ядру. Таким образом, установленная

Теорема. В игре Гермейера–Вателя β-ядро не пусто.

В оставшейся части раздела будем считать, что N={1,2}.

Непосредственно проверяется, что при сделанных предположениях множество $B^1(u^2)$ наилучших ответов первого игрока на стратегию u^2 состоит из одного элемента $u_b^1(u^2)$, определяемого условиями

- $u_b^1(u^2)=0$, если $f^1(a^1)\le F(0,u^2)$,
- $f^1(a^1-u_b^1(u^2))=F(u_b^1(u^2),u^2)$ в противном случае.

В силу утверждений, доказанных в первой лекции, функция $u_b^1: U^2 \to U^1$ непрерывна.

Если две стратегии u^2 и v^2 второго игрока таковы, что $u_l^2 \ge v_l^2, l = 1,...,L^2$, то $F(u_b^1(u^2), u^2) \ge F(u_b^1(v^2), v^2)$. В самом деле, если $u_b^1(v^2) = 0$ то нужное неравенство немедленно следует из монотонности функции F. Если же $u_b^1(u^2) > 0$, то $F(u_b^1(v^2), u^2) > F(u_b^1(v^2), v^2)$ и можно подобрать такой маленький положительный вектор ε, что $F(u_b^1(v^2) - \varepsilon, u^2) > F(u_b^1(v^2), v^2)$ и $f^1(a^1 - u_b^1(v^2) + \varepsilon) > f^1(a^1 - u_b^1(v^2))$, то есть $g^1(u_b^1(v^2) - \varepsilon, u^2) > g^1(u_b^1(v^2), v^2)$ и тем более $g^1(u_b^1(u^2), u^2) > g^1(u_b^1(v^2), v^2)$. Но в данном случае $g^1(u_b^1(u^2), u^2) = F(u_b^1(u^2), u^2)$ и $g^1(u_b^1(u^2), u^2) = F(u_b^1(u^2), u^2)$, откуда и следует нужное неравенство.

- Картинка

В силу сказанного максимум $\max\limits_{u^2 \in U^2} \min\limits_{u^1 \in B^1(u^2)} g^1(u^1, u^2)$ достигается в некоторой точке u_0^2, причем

- $u_0^2 = 0$, если $f^2(a^2) \le F(u_b^1(0), 0)$,
- $f^1(a^1 - u_b^1(u_0^2)) = F(u_b^1(u_0^2), u_0^2)$

Таким образом, ситуация $(u_b^1(u_0^2), u_0^2)$ удовлетворяет достаточным условиям сильного равновесия в рассматриваемой игре.

Аналогичные рассуждения проходят, если поменять первого и второго игроков ролями. Поэтому справедливая

Теорема. В игре Гермейера–Вателя γ-ядро не пусто и состоит из всех ситуаций сильного равновесия (и только из их).

Коллективное принятие решений

Рассмотрим следующую модель выборов. Имеются множество N={1,…,n}избирателей и множество L кандидатов. Каждый избиратель имеет право (и обязан) подать свой голос за один из кандидатов. Таким образом, множество управлений избирателя i есть множество U^i=L. Кроме того, задано правило подведения результатов выборов, то есть отображение $R:\prod_{i=1}^{n} U^i \to L$. Кандидат k считается победившим на выборах, если избиратели выбрали управления $u^1,\ldots,u^n$и $R(u^1,\ldots,u^n)=k$...

Будем считать, что правило подведения итогов выборов удовлетворяет следующему условию: всегда побеждает один из кандидатов, набравших максимальное количество голосов. Формально это означает, что если $R(u^1,\ldots,u^n)=k$, это для дорогого кандидата l мощность множества $\{i\in N:\ u^i=l\}$ не превосходит мощности множества $\{i\in N:\ u^i=k\}$.

Предположим, что предпочтения каждого избирателя i заданы с помощью функции $h^i : L \to \mathbb{R}$ (чем больше $h^i(k)$, тем лучше кандидат k для данного избирателя).

Тогда рассматриваемая ситуация моделируется игрой в нормальной форме $\langle N,U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n\rangle$,функции выигрыша в которой определяются равенствами $g^i(u^1,...,u^n) = h^i(R(u^1,...,u^n))$.

Остановимся подробно на частном случае этой модели, ситуация в котором получила название парадокса Кондорсе.

- Кондорсе (de Condorcet) Жан Антуан-Николь Коришот (1743-1794).

Будем считать, что имеется три кандидата Е, Ж и З и три однородные группы избирателей К, Л и М ($L = K \cup Л \cup M$). Предположим, количество избирателей в каждой группе строго меньше половины общего числа избирателей, а предпочтения определяются следующим образом:

- для избирателей из группы К кандидат С наилучший, а кандидат Е наихудший;
- для избирателей из группы Л кандидат Е наилучший, а кандидат Ж наихудший;
- для избирателей из группы М кандидат Ж наилучший, а кандидат С наихудший.

Покажем, что α-ядро в этой игре пусто. Допустим противное. Пусть $(u^1,\ldots,u^n)\in C_\alpha(\Gamma)$. В силу симметрии игры можно, не ограничивая общности, считать, что $R(u^1,\ldots,u^n)$=Э.

Но тогда избирателям, входящим в группы К и М выгодно образовать коалицию. В самом деле, если избиратели i, входящие в такую коалицию, выберут управления u^i=Ж, то независим вот управлений остальных избирателей, будет выбран кандидат Ж, который для всех членов коалиции лучше кандидата Э. Следовательно, получено противоречие с условием $(u^1,\ldots,u^n)\in C_\alpha(\Gamma)$.

Рассмотренная конструкция послужила началом большой теории общественного поведения.

Олигополия Курно

Пусть n фирм производят однородный продукт. Затраты i-ой фирмы на производство единицы продукции не зависят вот масштаба производства и равны c^i. Управлением фирмы является объем выпуска u^i (по своему смыслу эти величины неотрицательны). Целью фирмы является максимизация прибыли $g^i(u)=p(u)u^i-c^iu^i$. Будем считать, что рыночная цена продукции линейно убывает с ростом суммарного предложения: $p(u)=a-b\sum_{i=1}^{n}u^i$, где a и b – некоторые положительные константы.

В соответствующей игре $\max\limits_{v^i\in U^i}\min\limits_{u\in U} g^i(u\|v^i)=\min\limits_{u\in U}\max\limits_{v^i\in U^i} g^i(u\|v^i)=0$. В самом деле, если какой-то игрок вовсе откажется вот производства, то вон гарантирует себя нулевую прибыль не завысим вот действий партнеров. С другой стороны, если кто-то из его конкурентов выпустит продукцию в объеме $\frac{a}{b}$, то цена продукции не сможет быть положительной, и рассматриваемый игрок не сможет получить положительную прибыль, как бы вон не действовал.

Таким образом, в данной игре множество дележей, α-ядро и β-ядро совпадают и представляют собой множество эффективных исходов, в которых выигрыши всех игроков неотрицательны. В случае дуополии Курно (то есть игре двух лиц) можно говорит и в γ-ядре. Не ограничивая общности, можно считать, что $c^1\le c^2$. Тогда, как следует из результатов, полученных выше $\gamma^2 = \frac{(a-2c^2+c^1)^2}{8b}$. Выражение для γ^1 зависит вот соотношения параметров. Возможны три случая.

Если $c^2 > \frac{a+c^1}{2}$, то $\gamma^1 = \frac{(a-c^1)^2}{4b}$. Это глобальный максимум выигрыша первого игрока, который достигается только тогда, когда u^2=0 и соответственно выигрыш второго игрока равен нулю. Значит, в этом случае γ-ядро пусто.

Если $\frac{a+2c^1}{3} \le c^2 \le \frac{a+c^1}{2}$, то $\gamma^1 = \frac{(a-c^2)(c_2-c^1)}{b}$.

Если $c_2 < \frac{a+2c_1}{3}$, то $\gamma^1 = \frac{(a-2c^1+c^2)^2}{8b}$. Борьба за право первого походка.

Задачи

1. Найдите α-, β- и γ-ядра в игре «камень–ножницы–бумага».
2. Докажите, что если в игре Г существует ситуация равновесия по Нэшу, то ее β-ядро не пусто.
3. Стратегия u_0^1 первого игрока называется строго доминирующей, если для любой другой стратегий u^1 первого игрока и и любой стратегии u^2 второго игрока выполняется неравенство $g^1(u_0^1, u^2) > g^1(u^1, u^2)$. Аналогично, стратегия u_0^2 второго игрока называется строго доминирующей, если для любой другой стратегий u^2 второго игрока и и любой стратегии u^1 первого игрока выполняется неравенство $g^1(u^1, u_0^2) > g^1(u^1, u^2)$. Пусть в игре двух лиц оба игрока имеют строго доминирующую стратегию. Докажите, что и β-ядро и γ-ядро в такой игре не пусты.

4. Стратегия u_0^1 первого игрока называется доминирующей, если для любой стратегий u^1 первого игрока и и любой стратегии u^2 второго игрока выполняется неравенство $g^1(u_0^1,u^2) \ge g^1(u^1,u^2)$. Аналогично, стратегия u_0^2 второго игрока называется доминирующей, если для любой стратегий u^2 второго игрока и и любой стратегии u^1 первого игрока выполняется неравенство $g^1(u^1,u_0^2) \ge g^1(u^1,u^2)$. Пусть в игре двух лиц оба игрока имеют доминирующую стратегию. Приведите пример, показывающий, что в такой игре γ-ядро может быть пустым.

5. Пусть в игре двух лиц оба игрока имеют доминирующую стратегию. Может ли в такой игре быть пустым β-ядро?

6. Пусть в игре двух лиц найдется такой исход u, что $g^1(u)=\gamma^1$ и $g^2(u)=\gamma^2$. Докажите, что и β-ядро и γ-ядро в такой игре не пусты.

7. Рассмотрим биматричную игру, в которой все элементы матриц выигрышей попарно различны. Пусть в неи имеется две различных ситуации равновесия по Нэшу, ни одна из которых не доминируется по Парето никакой третьей ситуацией равновесия. Докажите, что тогда γ-ядро в рассматриваемой игре пусто.

Литература

8. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. Г.: Мир. 1985.
9. Fudenberg D., Tirole J. Game Theory. The MIT Press. Cambridge. 1996.

Лекция. Модели коллективного выбора

Необходимые сведения из общей алгебры

- Отношения
- Эквивалентность
- Классы эквивалентности
- Фактормножество, каноническая проекция
- Факторструктуры
- Предпорядок - порядок
- Системы стандартных представителей

Индивидуальные предпочтения

Определение. Отношение $\succ$ называется отношением строгого линейного порядка, если выполняются следующие аксиомы:

1. для дорогого x не верно, что $x \succ x$ (антисимметричность);
2. если $x \neq y$ то либо $x \succ y$, либо $y \succ x$ (полнота);
3. если $x \succ y$ и $y \succ z$, то $x \succ z$ (транзитивность).

Лемма. Если множество X конечно и содержит n элементов, то для дорогого строгого линейного порядка $\succ$ на X существует взаимнооднозначная функция $g:X \to \{1,\ldots,n\}$ такая, что $x \succ y$ тогда и только тогда, когда $g(x)>g(y)$.

- Функции полезности
- Перестановки
- Табличная форма задания

Пусть задано конечное множество альтернатив A. Множество всех строгих линейных порядков на A обозначим R.

Пусть задано конечное множество N={1,…,n}избирателей. Будем считать, что для каждого избирателя i из N задано отношение предпочтения $\succ^i$ из R. Элементы множества R^n будем называть профилями предпочтений. Для профилей предпочтения будем использовать стандартные обозначения $\bar{\succ} = \left(\succ^1, \ldots, \succ^n\right)$.

- Нарушение транзитивности
- Топология нейронных сетей
- Улам стр. 30 - принятие решения = голосование на уровне подсознания

Аксиомы Эрроу.

- Аксиоматический метод в экономике

Пусть на множестве A задано отношение $\succeq$, удовлетворяющее следующей аксиоме:

Аксиома полноты. Для любых x и y либо x$\succeq$ y, либо y$\succeq$ x.

С отношением $\succeq$ можно связать два новых отношения □ и $\succ$ следующим образом:

x□ y тогда и только тогда, когда x$\succeq$ y и y$\succeq$ x;

x$\succ$ y тогда и только тогда, когда x$\succeq$ y, но не верно, что y$\succeq$ x.

Определение. Отношение $\succeq$ называется отношением коллективного предпочтения, если оно транзитивно, то есть

если x$\succeq$ y и y$\succeq$ z, то x$\succeq$ z;

- Парадокс кучи.

Множество всех отношений коллективного предпочтения обозначим $\Re$.

Лемма. Если $x \succ y$ и $y \succeq z$, то $x \succ z$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда либо не верно, что $x \succeq z$, либо $z \succeq x$. В первом случае из аксиомы полноты следует, что $z \succeq x$.

Итак, в любом случае $z \succeq x$. Но тогда с учетом $y \succeq z$ получаем по транзитивности $y \succeq x$, что противоречит условию $x \succ y$.

Определение. Функцией группового выбора будем называть отображение $\rho : R^n \to \Re$.

Для каждой функции группового выбора определены отображения π и ι из R^n в множество бинарных отношений на A, удовлетворяющие условиям:

$x\pi(\bar{\succ})y$ тогда и только тогда, когда $x\rho(\bar{\succ})y$ и не верно, что $y\rho(\bar{\succ})x$;

$x\iota(\bar{\succ})y$ тогда и только тогда, когда $x\rho(\bar{\succ})y$ и $y\rho(\bar{\succ})x$;

Будем считать, что функция группового выбора удовлетворяет следующим аксиомам:

Аксиома 1 (монотонность). Пусть имеются два профиля предпочтений $\bar{\succ}$ и $\bar{\succ}'$ и две альтернативы x и y, удовлетворяющие следующему условию:

если $x \succ^{i} y$, то $x \succ^{i\prime} y$ для дорогого i.

Тогда из отношения $x\pi(\bar{\succ})y$ следует отношение $x\pi(\bar{\succ}')y$.

Аксиома 2 (независимость вот посторонних альтернатив). Для любых альтернатив x и y и любых профилей предпочтения $\bar{\succ}$ и $\bar{\succ}'$, удовлетворяющих условию

$x \succ^i y$ тогда и только тогда, когда $x \succ^{i\prime} y$,

отношение $x\rho(\bar{\succ})y$ равносильно отношению $x\rho(\bar{\succ}')y$.

- Манипулирование организаторов голосования

Аксиома 3 (суверенность избирателей). Для каждой пары альтернатив x и y найдется такой профиль предпочтений $\bar{\succ}$, что $x\pi(\bar{\succ})y$.

Аксиома 4 (единогласие). Если профиль предпочтений $\bar{\succ}$ таков, что $x \succ^i y$ для всех i, то $x\pi(\bar{\succ})y$.

Лемма. Аксиомы 1, 2, 3 эквивалентны аксиомам 1,2 и 4.

Теорема Эрроу (1951, 1963).

Определение. Функция группового выбора называется диктаторской, если найдется такой избиратель i, что условие $x \succ^i y$ влечет условие $x\pi(\bar{\succ})y$.

Теорема. Пусть множество N содержит, по меньшей мэр, двух избирателей, а множество A содержит не менее трех альтернатив. Тогда всякая функция выбора, удовлетворяющая аксиомам 1,2 и 3 является диктаторской.

Доказательство. Введем удобный термин.

Определение. Множество избирателей T называется решающей коалицией для упорядоченной пары альтернатив (x,y), если для дорогого профиля предпочтений $\bar{\succ}$ выполнение условий $x \succ^i y$ для всех $i \in T$ влечет выполнение условия $x\pi(\bar{\succ})y$.

Лемма. Коалиция T является решающей для (x,y) тогда и только тогда, когда найдется профиль предпочтений $\bar{\succ}$, для которого $\{i\in N\colon x\succ^{i}y\}=T$ и $x\pi(\bar{\succ})y$.

Доказательство. Преждет всего, заметим, что в силу аксиомы монотонности коалиция T является решающей для (x,y) тогда и только тогда, когда для дорогого профиля предпочтений $\bar{\succ}$ выполнение условия $\{i\in N\colon x\succ^{i}y\}=T$ влечет выполнение условия $x\pi(\bar{\succ})y$.

Рассмотрим профиль предпочтения $\bar{\succ}'$, определенное условиями:

а) для $i\in T$ $x\succ'^{i}y\succ'^{i}z$ для дорогого $z\neq x,y$;

б) для $i\notin T$ $y\succ'^{i}x\succ'^{i}z$ для дорогого $z\neq x,y,z$.

В силу аксиомы независимости вот посторонних альтернатив коалиция T является решающей для (x,y) тогда и только тогда, когда выполнение условия $\{i\in N\colon x\succ'^{i}y\}=T$ влечет выполнение условия $x\pi(\bar{\succ}')y$.

Последнее условие в силу аксиомы независимости вот посторонних альтернатив равносильно поэтому, что найдется профиль предпочтений $\bar{\succ}$, для которого $\{i\in N\colon x\succ^{i}y\}=T$ и $x\pi(\bar{\succ})y$.

Определение. Коалиция T называется решающей, если найдется упорядоченная пара (x,y) такая, что коалиция T является решающей для (x,y).

Коалиция N является решающей в силу аксиомы единогласия. Следовательно, семейство решающих коалиций не пусто. Пустое множество решающей коалицией не является, опять таки в силу аксиомы единогласия. Поскольку множество N конечно, найдется такая решающая коалиция T, что никакое ее собственное подмножество решающей коалицией не является.

Лемма. Такая коалиция T содержит ровно одного избирателя.

Доказательство. В силу только что сделанного замечания, по крайней мэр, одного избирателя j коалиция T содержит. Допустим, что коалиция T содержит более одного избирателя. Тогда множество W=T\{j} не пусто. Положим U=N\T. Пусть коалиция T решающая для альтернатив (x,y). Множество A содержит еще по крайней мэр одну альтернативу z.

Рассмотрим следующий профиль предпочтений: $x \succ^{j} y \succ^{j} z$, $z \succ^{i} y \succ^{i} x$ для всех i из W и $y \succ^{i} z \succ^{i} x$ для всех i из U (если есть другие альтернативы, то считаем, сто они хуже альтернатив x,y,z для всех избирателей).

Тогда $x\pi(\overline{\succ})y$ так как коалиция T решающая для альтернатив (x,y).

Кроме того, $y\rho(\overline{\succ})z$, так как иначе выполнялось бы отношение $z\pi(\overline{\succ})y$ и по предыдущей лемме коалиция W была бы решающей для (z,y) вопреки выбору коалиции T.

Из справедливости этих двух отношений следует $x\pi(\overline{\succ})z$ (по доказанной выше лемме). Но тогда коалиция {j} является решающей для (x,z), что опять противоречит выбору коалиции T.

Поученное противоречие доказывает лемму.

Итак, доказано, что существуют избиратель j и альтернативы (x,y) такие, что коалиция {j} является решающей для (x,y). Для доказательства теоремы достаточно доказать, что коалиция {j} является решающей для любой пары альтернатив (v,w).

Начнем с пар вида (x,w). Рассмотрим следующий профиль предпочтений $x \succ^{j} y \succ^{j} z$, $y \succ^{i} z \succ^{i} x$ для всех $i \neq j$. Имеем, $x\pi(\overline{\succ})y$, так как {j} является решающей для (x,y). Кроме того $y\pi(\overline{\succ})z$ в силу аксиомы единогласия. По транзитивности получим , $x\pi(\overline{\succ})z$, следовательно, {j} является решающей для (x,w).

Рассмотрим теперь пары (v,w), в которых оба элемента отличны вот x. Рассмотрим профиль предпочтений $v \succ^{j} x \succ^{j} w$, $w \succ^{i} v \succ^{i} x$ для всех $i \neq j$. Имеем, $v\pi(\overline{\succ})x$ в силу аксиомы единогласия. Кроме того, $x\pi(\overline{\succ})w$, поскольку как только что доказано, является решающей для (x,w). По транзитивности имеем $v\pi(\overline{\succ})w$, следовательно, {j} является решающей для (v,w).

Осталось рассмотреть пары вида (v,x). Рассмотрим профиль предпочтений $v \succ^{j} w \succ^{j} x$, $w \succ^{i} x \succ^{i} v$ для всех $i \neq j$. Имеем, $v\pi(\overline{\succ})w$, как доказано в предыдущем абзаце. Кроме того, $w\pi(\overline{\succ})x$ в силу аксиомы единогласия. По транзитивности получим $v\pi(\overline{\succ})x$. Следовательно, {j} является решающей для (v,x).

Теорема доказана.

Другое доказательство теоремы Эрроу

Пусть функция группового выбора ρ удовлетворяет аксиомам 1, 2, 3, а значит, и 4. Докажем, что она является диктаторской.

Фиксируем произвольную альтернативу $x \in A$. Докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть профиль предпочтений $\overline{\succ}$ таков, что для дорогого избирателя i выполняется одно из двух условий:

- для любой другой альтернативы $y \in A$ выполняется отношение $x \succ^i y$;
- для любой другой альтернативы $y \in A$ выполняется отношение $y \succ^i x$.

Тогда выполняется одно из двух условий

- для любой другой альтернативы $y \in A$ выполняется отношение $x\pi(\overline{\succ})y$;
- для любой другой альтернативы $y \in A$ выполняется отношение $y\pi(\overline{\succ})x$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся альтернативы y и z, для которых $y\rho(\overline{\succ})x\rho(\overline{\succ})z$. По транзитивности отсюда получим $y\rho(\overline{\succ})z$. Рассмотрим другой профиль предпочтений, $\overline{\succ}_*$, удовлетворяющий условиям

- для всех $i \in N$ выполняется отношение $z \succ_*^i y$;
- если $x \succ^i y$, то и $x \succ_*^i y$;
- если $x \succ^i z$, то и $x \succ_*^i z$;
- если $y \succ^i x$, то и $y \succ_*^i x$;

- если $z \succ^i x$, то и $z \succ_*^i x$.

Тогда в силу аксиомы в независимости вот посторонних альтернатив из условия $y\rho(\overline{\succ})x$ следует $y\rho(\overline{\succ_*})x$, а из условия $x\rho(\overline{\succ_*})z$ следует $x\rho(\overline{\succ_*})z$. Значит, по транзитивности $y\rho(\overline{\succ_*})z$.

С другой стороны, в силу аксиомы единогласия $z\pi(\overline{\succ})y$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Рассмотрим параметрическое семейство $\overline{\succ_0}, \overline{\succ_1} \ldots, \overline{\succ_n}$ профилей предпочтений, удовлетворяющих условиям

- если i≤t, то для дорогого y≠x выполняется отношение $x \succ_t^i y$;
- если i>t, то для дорогого y≠x выполняется отношение $y \succ_t^i x$;
- если y и z отличны вот x, то для дорогого i, и любых t и l условие $y \succ_t^i z$ влечет условие $y \succ_l^i z$.

В силу аксиомы единогласия для дорогого y≠x выполняются условия $y\pi(\overline{\succ_0})x$ и $x\pi(\overline{\succ_n})y$. Значит, в силу предыдущей леммы найдется такое d=1,…,n, что для дорогого y≠x выполняются условия $y\pi(\overline{\succ_{d-1}})x$ и $x\pi(\overline{\succ_d})y$. Покажем, что этот избиратель d является диктатором.

Лемма. Для любых двух различных альтернатив y≠x и z≠x условие $y \succ^d z$ влечет условие $y\pi(\overline{\succ})z$.

Доказательство. Рассмотрим профиль предпочтений $\overline{\succ_*}$, удовлетворяющий условиям

- для дорогого i условие $y \succ^i z$ равносильно условию $y \succ^i_* z$;
- если i<d, то для дорогого w≠x выполняется условие $x \succ^i_* w$;
- $y \succ^d_* x \succ^d_* z$;
- если i>d, то для дорогого w≠x выполняется условие $w \succ^i_* x$;
- если w≠x и v≠x, то для дорогого избирателя i условие $v \succ^i w$ равносильно условию $v \succ^i_* w$.

В силу аксиомы в независимости вот посторонних альтернатив условие $y\rho(\overline{\succ})z$ равносильно условию $y\rho(\overline{\succ_*})z$. Поэтому достаточно доказать, что $y\pi(\overline{\succ_*})z$.

Сравним профили предпочтений $\overline{\succ_{d-1}}$ и $\overline{\succ_*}$. По построению условия $x \succ^i_{d-1} y$ и $x \succ^i_* y$ эквивалентны, поэтому в силу аксиомы 2 эквивалентны условия $x\rho(\overline{\succ_{d-1}})y$ и $x\rho(\overline{\succ_*})y$. Но в силу выбора избирателя d, выполняется отношение $y\pi(\overline{\succ_{d-1}})x$, значит $y\pi(\overline{\succ_*})x$.

Теперь сравним профили предпочтений $\overline{\succ_d}$ и $\overline{\succ_*}$. По построению условия $x \succ^i_d z$ и $x \succ^i_* z$ эквивалентны, поэтому в силу аксиомы 2 эквивалентны условия $x\rho(\overline{\succ_d})z$ и $x\rho(\overline{\succ_*})z$. Но в силу выбора избирателя d, выполняется отношение $x\pi(\overline{\succ_d})z$, значит $x\pi(\overline{\succ_*})z$.

Сравнивая выводы двух последних абзацев, получим в силу транзитивности $y\pi(\overline{\succ_*})z$. Лемма доказанная.

Подведем предварительные итоги. Фиксировав альтернативу x, мы нашли такого избирателя d, что для любой пары альтернатив y≠x и z≠x отношения $y \succ^d z$ и $y\pi(\overline{\succ})z$ эквивалентны.

Фиксировав альтернативу z и проведя то же рассуждения, мы можем найти, вообще говоря, второго избирателя e, для которого для любой пары альтернатив x≠z и y≠z отношения $x \succ^e y$ и $x\pi(\overline{\succ})z$ эквивалентны. Но сравнение профилей предпочтений $\overline{\succ}_{d-1}$ и $\overline{\succ}_d$ показывает, что на самом деле e=d.

Аналогичные рассуждения можно провести и для фиксированного элемента y. А поскольку в любой паре альтернатив не содержится один из элементов x,y или z, избиратель d является диктатором.

Теорема доказана.

Варианты теории

1. Ранжирование вместо голосования
2. Ослабление требований к индивидуальным предпочтениям

- Квазипорядок (компонента безразличия не обязательно транзитивная). Тогда - олигархия
- Ацикличность. Тогда - выделяются выигрывающие коалиции.

3. Ослабление требований к коллективным предпочтениям
4. Экспертные оценки.
5. Вероятностный подход

Правило большинства

Определение. Правилом голосования называется отображение S, ставящее в соответствие каждому профилю предпочтений $\overline{\succ}$ непустое подмножество $S(\overline{\succ})$ множества альтернатив.

Аксиома 5 (монотонность). Пусть имеются два профиля предпочтений $\overline{\succ}$ и $\overline{\succ}'$ и две альтернативы x и y, удовлетворяющие следующему условию:

если $x \succ^{i} y$, то $x \succ^{i\prime} y$ для дорогого i и для любых $y,z \neq x$ и дорогого i отношение $z \succ^{i} y$ выполняется тогда и только тогда, когда $z \succ^{i\prime} y$.

Тогда из отношения $x \in S(\overline{\succ})$ следует отношение $x \in S(\overline{\succ}\,')$.

Аксиома 6 (нейтральность). Пусть σ – перестановка на множестве альтернатив и профили предпочтений $\overline{\succ}$ и $\overline{\succ}'$ удовлетворяют условию:

для дорогого i отношение $x \succ^{i} y$ выполняется тогда и только тогда, когда $\sigma(x) \succ^{i\prime} (y)$.

Тогда включение $x \in S(\overline{\succ})$ равносильно включению $\sigma(x) \in S(\overline{\succ}\,')$.

Аксиома 7 (анонимность). Пусть σ – перестановка на множестве избирателей и профили предпочтений $\overline{\succ}$ и $\overline{\succ}'$ удовлетворяют условию:

для дорогого i отношение $x \succ^{i} y$ выполняется тогда и только тогда, когда $x \succ^{\sigma(i)\prime} y$.

Тогда включение $x \in S(\bar{\succ})$ равносильно включению $x \in S(\bar{\succ}')$.

Ограничимся рассмотрением случая с двумя альтернативами.

Теорема. Правило голосования S анонимно, нейтрально и монотонно тогда и только тогда, когда найдется целое $0 \le q \le \frac{n+1}{2}$ для которого множество $S(\bar{\succ})$ есть множество альтернатив, которые являются наилучшими, по крайней мэр, для q избирателей.

Аксиома 8 (строгая монотонность). Пусть имеются два профиля предпочтений $\bar{\succ}$ и $\bar{\succ}'$ и две альтернативы x и y, удовлетворяющие следующему условию:

если $x \succ^{i} y$, то $x \succ^{i\prime} y$ для дорогого i и для любых $y,z \neq x$ и дорогого i отношение $z \succ^{i} y$ выполняется тогда и только тогда, когда $z \succ^{i\prime} y$ и $\bar{\succ} \neq \bar{\succ}'$.

Тогда из отношения $x \in S(\bar{\succ})$ следует отношение $\{x\} = S(\bar{\succ}')$.

Теорема. Существует единственное анонимное, нейтральное и строго монотонное правило голосования - правило простого большинства.

Определение. Правило голосования называется решительным, если для дорогого профиля предпочтений $\bar{\succ}$ множество $S(\bar{\succ})$ состоит из одного элемента.

Теорема. Не существует анонимных, нейтральных и решительных правил голосования.

Голосование по Борда

- Сумма мест
- Другие оценки
- Линейная свертка
- Трудность выявления предпочтений
- Нарушение аксиомы независимости вот посторонних альтернатив
- Пример: $\begin{matrix} 3 & 5 & 7 & 6 \\ a & a & b & c \\ b & c & d & b \\ c & b & c & d \\ d & d & a & \end{matrix}$.

Пример: голосование по Ролсу

- Два голосующих, семь кандидатов
- Ранжирование, выбор - минимакс ранга
- Три худших отбрасываются
- Оптимум - лучший из четырех оставшихся
- Если кандидат получается в 1-результате равновесия и 2-равновесия, то вон единственный
- В противном случае - борьба за лидерство

Модель голосования Кондорсе

(Condorset Мары Жан Антуан Никола 1743-1794).

- Нечетное число игроков.
- Правило голосования - выбирается один из набравших максимальное количество голосов. В остальном - произвольно.
- Пустота (-ядра. Парадокс Кондорсе.

- Анонимность, нейтральность и строгая монотонность приводит к правилу Кондорсе
- Анонимность и категоричность противоречивы
- Манипуляции на выборах
- Парадлкс Эрроу - парграф IV.3 в Блекуэла-Гиршика

Задачи

1. Докажите, что полное отношение рефлексивно.
2. Исследовать модель голосования по Кондорсе в случае четного числа игроков.
3. Голосование проводится в два тура. В первом тур каждый избиратель подает свой голос за один из кандидатов. Если кто-то из кандидатов наберет более половины голосов, вон считается победителем выборов. В противном случае проводится второй тур, в котором участвуют два кандидата, набравшие в первом тур наибольшее число голосов. Побеждает тот из их, кто наберет больше голосов. Является ли данное правило голосования монотонным?

Литература

1. Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. Г.: ИЛ, 1961.
2. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. Г.: Мир.1991.
3. Клима Р., Ходжей Дж. Математика выборов. Г.: МЦНМО. 2007.
4. Гарднер М. Путешествие во времени. Г.: Мир, 1990

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ 2.3

Билет 1

1. Методологические принципы исследования операций.

2. Максимальный гарантированный результат и оптимальная стратегия первого игрока в игре Γ_2.

3. Найдите $\min\limits_{v\in V}\max\limits_{u\in U} g(u,v)$ и $\max\limits_{u\in U}\min\limits_{v\in V} g(u,v)$, если U=V=[0,1], $g(u,v)=2u^{2-3}uv+2v^2$.

Билет 2

1. Максимин и седловая точка. Мотивация и простейшие свойства.

2. Максимальный гарантированный результат и оптимальная стратегия первого игрока в игре Γ_3.

3. Пусть множество U представляет собой стандартный симплекс $U=\{(u_1,u_2,u_3)\colon u_1\geq 0,\ u_2\geq 0,\ u_3\geq 0,\ u_1+u_2+u_3=1\}$ и имеется два критерия $(3u_1+u_2+4u_3)^2$ и $\sqrt{2u_1+2u_2+u_3}$. Найдите множество эффективных точек.

Билет 3

1. Смешанные расширения. Мотивация и простейшие свойства.

2. Максимальный гарантированный результат и оптимальная стратегия первого игрока в игре с неточно известным критерием противника (параметрическая постановка).

3. Существует ли седловая точка в игре <U,V,g>, где U=V=[0,1], $g(u,v)=\dfrac{1}{1+2(u-v)^2}$?____________________________

Билет 4

1. Модель распределения дефицитного ресурса.

2. Максимальный гарантированный результат и оптимальная стратегия первого игрока в игре с неточно известным критерием противника (интервальная постановка).

3. Множество управлений представляет собой симплекс {(u,v,w): u≥0, v≥0, w≥0, u+v+w=1}. Найдите множество оптимальных по Парето стратегий и соответствующие выигрыши в задаче с двумя критериями g^1(u,v,w)=u+3v+5w и g^2(u,v,w)=6u+2v.____________________________

Билет 5

1. Эффективные и слабо эффективные точки. Мотивация и простейшие свойства.

1. Теорема Эрроу.

2. Определить наибольшие гарантированные результаты и какие-либо оптимальные (или ε-оптимальные) результаты в играх $Г_2$ и $Г_3$, если $U^1=U^2=[0,1]$, $g^1(u^1,u^2)= u^1+u^2$, $g^1(u^1,u^2)= u^{1-2}u^2$.

Билет 6

1. Игровой смысл множителей Лагранжа. Достаточные условия оптимальности

2. Решение многошаговых антагонистических игр методом динамического программирования.

3. В каком случае будет эффективным решение игры Γ_2?

Билет 7

1. Многокритериальные задачи. Мотивировка и примеры.

2. Равновесия по Нэшу в бесконечно повторяющихся играх.

3. Решите игры Γ_1, Γ_2, Γ_3, если $U^1=U^2=[0,1]$, $g^1(u^1,u^2)=3u^{1/4}+u^{2/2}$, $g^2(u^1,u^2)=(u^1–u^2)^2$.

Билет 8

1. Равновесия по Нэшу. Мотивация и простейшие свойства.

2. Теорема в классификации игр двух лиц.

3. В биатлонной гонке принимают участие 7 спортсменов вот каждой страны. По ее итогам каждый из их получает целое число очков вот 0 до 30. В командный зачет идет сумма результатов трех лучших гонщиков. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции.

Билет 9

1. Сильное равновесие. Мотивация и простейшие свойства.

2. Теорема Гермейера в свертке качественных критериев.

3. Докажите, что игра с матрицей $A = \begin{pmatrix} a & e & a & e & a & e & a & e \\ b & f & b & f & f & b & f & b \\ c & g & g & c & c & g & g & c \end{pmatrix}$ имеет цену в чистых стратегиях (a,b,c,d,e,f,g – произвольные числа).

Билет 10

1. Модель Гермейера-Вателя и ее интерпретации.

2. Решение матричных игр в смешанных стратегиях и линейное программирование.

3. Решите игры $Г_1$, $Г_2$, $Г_3$, если $U^1=U^2=[0,1]$, $g^1(u^1,u^2)=3u^{1/4}+u^{2/2}$, $g^1(u^1,u^2)=(u^1-u^2)^2$.

Билет 11

1. Информационные расширения. Мотивация и простейшие свойства.

2. Поиск равновесий по Нэшу с помощью итерационной процедуры.

3. Докажите, что множество слабо эффективных стратегий совпадает с множеством решений уравнения $\sup\limits_{u'\in U} \min\limits_{1\le i\le m} \left(g^i(u') - g^i(u) \right) = 0.$

Билет 12

1. Способы формализации информационных обменов. Примеры.

2. Существование седловых точек в выпуклых играх.

3. Может ли максимальный гарантированный результат в игре Γ_1 быть меньше, чем $\max_{u\in U}\min_{v\in V} g^1(u,v)$? А меньше, чем $\min_{v\in V}\max_{u\in U} g^1(u,v)$?

Билет 13

1. Позиционные игры.

2. Существование седловых точек в смешанных расширениях матричных игр.

3. Пусть игра Γ антагонистическая. Чему равны максимальные гарантированные результаты в соответствующих играх Γ_1, Γ_2 и Γ_3.

Билет 14

1. Совершенное равновесие. Мотивация и простейшие свойства.

2. Седловые точки и минимаксы в квазиинформационных расширениях.

3. Определить наибольшие гарантированные результаты и какие-либо оптимальные результаты в играх Γ_2 и

Γ_3, если функции выигрыша задаются матрицами $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

и $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Билет 15

1. Аксиомы Эрроу и их мотивировка. Парадокс Эрроу.

2. Максимальные гарантированные результаты в квазиинформационных расширениях неантагонистических игр.

3. Найдите ситуации равновесия по Нэшу в следующей игре трех лиц $U^1=U^2=U^3=[0,8)$, $g^1(u)=-2(u^1)^2+u^1u^2+u^1u^3+4u^1$, $g^1(u)=-2(u^2)^2+u^2u^3+u^2u^1+4u^2$, $g^1(u)=-2(u^3)^2+u^3u^2+u^3u^1+4u^3$.

Билет 16

1. Игры Гермейера и игра Штакельберга. Мотивация и простейшие свойства.

2. Теорема Гермейера в свертке критериев, принимающих конечное множество меченный.

3. Найти ситуации равновесия в следующей игре: $U=V=[0,1]$, $g^1(u,v)=-u^2+5uv+v^2$, $g^2(u,v)=-(u-v)^2-\alpha v$, где α – вещественное число.

Билет 17

1. Игра Γ_1. Мотивация и простейшие свойства.

2. Теорема Гермейера об эффективных точках.

3. Найдите $\min_{v\in V}\max_{u\in U} g(u,v)$ и $\max_{u\in U}\min_{v\in V} g(u,v)$ если U=[π,2π], V=[π/2,3π/2], g(u,v)=ucosv–sinu.

Билет 18

1. Модель рационального использования ресурсов.

2. Теорема Карлина об эффективных очках.

3. Докажите, что цена игры, матрица которой состоит из рациональных чисел, рациональна.

Билет 19

1. Информационная теория иерархических систем.

2. Существование равновесий по Нэшу в выпуклых играх.

3. В двух кучках лежат 7 и 13 камней соответственно. Двое играющих берут по очереди 1,2 или 3 камня из однои кучки. Выигрывает тот, кто заберет последний камень. Кто выигрывает при правильной игре?

Билет 20

1. Иерархические игры.

2. Существование и единственность равновесия по Нэшу в одномерной модели Гермейера-Вателя.

3. Найдите седловую точку в смешанных стратегиях в игре с матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Билет 21

1. Обобщенный принцип максимального гарантированного результата.

2. Существование и единственность сильного равновесия в одномерной игре Гермейера-Вателя.

3. Найдите ситуации равновесные по Нэшу и оптимальные по Парето в биматричной игре
$$\begin{pmatrix} (1,5) & (3,1) & (0,2) & (1,7) \\ (5,1) & (4,2) & (3,2) & (0,0) \\ (2,2) & (0,1) & (7,1) & (2,2) \\ (6,3) & (4,1) & (2,3) & (0,5) \end{pmatrix}.$$

Билет 22

1. Субъективное описание конфликта. Игры с неопределенными факторами.

2. Агрегирование многомерной модели Гермейера-Вателя.

3. Рассмотрим следующую игру. Три игрока выбирают одного из кандидатов по правилу большинства голосов. Кандидат Панаев для всех игроков предпочтительнее кандидата Скабичевского. Найдите все ситуации равновесия по Нэшу в данной игре.

Билет 23

1. Индивидуально рациональные решения и дележи. Мотивация и простейшие свойства.

2. Структура равновесия по Нэшу в метарасширении первого ранга игры двух лиц.

3. Найдите седловую точку в смешанных стратегиях в игре с матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$.

Билет 24

1. (-ядро. Мотивация и простейшие свойства.

2. Сведение поиска равновесий по Нэшу к исследованию антагонистических игр.

3. Имеется 19 спичек. Двое играющих по очереди берут из их 1, 2 или три спички. Проигравшим считается тот, кто возьмет последнюю спичку. Доказать, что берущий спичку первым всегда может выиграть.

Билет 25

1. (-ядро. Мотивация и простейшие свойства.

2. Нормальная форма позиционной игры.

3. Найдите седловую точку в смешанных стратегиях в игре с матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Билет 26

1. (-ядро. Мотивация и простейшие свойства.

2. Теорема Куна-Такера.

3. Студенту за сессию предстоит сдать пять экзаменов, на каждом из которых вон может получить оценку вот 2 до 5. Для получения стипендии необходима сдать все экзамена как минимум на удовлетворительно, и при этом получить не более однои тройки. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции.

Билет 27

1. Равновесия по Нэшу в квазиинформационных расширениях.

2. Принцип динамического программирования. Существование седловой точки в игре с полной информацией.

3. Решите игры Γ_1, Γ_2, Γ_3, если выигрыши игроков задаются матрицами $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

РАЗДЕЛ 3

Использование компьютерных технологий при прогнозировании международных отношений

Лекция. Элементы автоматизации моделирования международных отношений.

План

1. Компьютерное моделирование.
2. Глобальное моделирование.

1. Компьютерное моделирование

Традиционно под моделированием на ЭВМ понималось лишь имитационное моделирование. Но последними годами благодаря развитию графического интерфейса и графических пакетов значительного распространения приобрело компьютерное структурно-функциональное моделирование, а также началось использование компьютера с целью концептуального моделирования, например для построения систем искусственного интеллекта. Итак, понятие «компьютерное моделирование» значительно шире за традиционное понятие «моделирование на ЭВМ».

Под ***компьютерной моделью*** чаще всего понимают:

– условный образ объекта или некоторой системы объектов (или процессов), описанных с помощью взаимозависимых компьютерных таблиц, схем, диаграмм, графиков, рисунков, анимационных фрагментов, гипертекстов и т.д., что отображают структуру и взаимосвязи между элементами объекта или системы. Компьютерные модели такого типа называют ***структурно-функциональными***;

– отдельную программу, совокупность программ или программный комплекс, что дает возможность выполнения последовательности вычислений с дальнейшим графическим отображением их результатов, воссоздавать (имитировать) процессы функционирования объекта (системы объектов), что функционирует под влиянием разных, как правило, случайных, факторов. Такие модели называют ***имитационными моделями***.

Компьютерное моделирование — *метод решения задачи анализа или синтеза сложной системы*, *что обоснована на использовании ее компьютерной модели*. Сущность компьютерного моделирования состоит в поиске количественных и качественных результатов с привлечением имеющейся модели. Качественные выводы, сделанные на основании такого исследования, дают возможность раскрывать неизвестные до сих пор свойства сложной системы: ее структуру, динамику развития, стойкость, целостность и т.п.. Количественные выводы имеют преимущественно характер прогноза будущих или объяснение прошлых значений сменных, что характеризуют систему.

Предметом компьютерного моделирования может быть экономическая деятельность фирмы, банка, промышленного предприятия; информационно-вычислительная сеть; технологический процесс; любой реальный объект или процесс, например процесс инфляции, и вообще — любая сложная система. И хотя цели компьютерного моделирования могут быть разными, чаще всего оно, как уже отмечалось, представляет центральную процедуру системного анализа — совокупности методологических средств, что используются для подготовки и принятия решений экономического, организационного, социального или технического характера.

Компьютерная модель сложной системы имеет по возможности полнее отбивать все основные факторы и взаимосвязи, что характеризуют реальные ситуации, критерии и ограничения. И вдобавок модель должна быть настолько универсальной (чтобы охватывать наибольший круг близких по назначению объектов) настолько просто (чтобы оказывать содействие выполнению необходимых исследований с минимальными затратами).

2. Глобальное моделирование.

Первые попытки создания глобальных моделей были осуществлены Дж. Форрестером и группой Д. Медоуза на основе разработанного Дж. Форрестером метода системной динамики, позволяющего исследовать поведение сложной структуры взаимосвязанных переменных. Модели мира состояли из пяти соединенных друг с другом прямыми и обратными связями секторов (уровней): народонаселение, промышленное производство, сельскохозяйственное производство, природные ресурсы, состояние природной среды.

Ранее строились формальные модели отдельных сторон действительности – развития экономики, роста численности населения и т. д. Но выявление связей между этими тенденциями (в соответствии с представлениями о биосфере как единой системе) столь же важно, как и изучение их в отдельности. В созданных Дж. Форрестером и группой Д. Медоуза моделях мира пять главных тенденций мирового развития – быстрый рост населения, ускоренные темпы промышленного роста, широкое распространение зоны недостаточного питания, истощение невосполнимых ресурсов и загрязнение окружающей среды – рассматривались во взаимосвязи друг с другом.

Компьютерное моделирование, проведенное в Массачусетском технологическом институте (США), показало, что при отсутствии социально-политических изменений в мире и сохранении его технико-экономических тенденций быстрое истощение природных ресурсов вызовет около 2030 года замедление роста промышленности и сельского хозяйства и в результате резкое падение численности населения – демографическую катастрофу. Если предположить, что достижения науки и техники обеспечат возможность получения неограниченного количества ресурсов (как предполагалось во втором сценарии анализа модели), катастрофа наступает от чрезмерного загрязнения окружающей среды. При допущении, что общество сможет решить задачу охраны природы (третий сценарий), рост населения и выпуска продукции будет продолжаться до тех пор, пока не исчерпаются резервы пахотной земли, а затем, как во всех предыдущих вариантах, наступает коллапс. Катастрофа неминуема, потому что все пять опасных для человечества тенденций растут по экспоненте, и беда может подкрасться незаметно и актуализироваться, когда поздно будет что-либо сделать. Рост по экспоненте – коварная вещь, и человечество может оказаться в положении раджи, который легко согласился заплатить изобретателю шахмат растущее по экспоненте количество зерен (за первое поле одно зерно, за второе – два, за третье – четыре и т. д.), а потом горько раскаялся в этом, поскольку всех его запасов не хватило для того, чтобы отдать обещанное.

Основываясь на своих результатах, создатели моделей дают в последней главе своей книги «Пределы роста» следующие рекомендации по предотвращению грозящей опасности. Они предлагают в кратчайшее время стабилизировать численность населения планеты и одновременно производство на современном уровне. Такое глобальное равновесие, как считают Д. Медоуз и его коллеги, не будет означать застоя, ибо человеческая деятельность, не требующая большого расхода невосполнимых ресурсов и не приводящая к деградации природной среды (в частности, наука, искусство, просвещение, спорт), может развиваться неограниченно.

Такая концепция не нова, если мы вспомним Платона, Аристотеля и Мальтуса. Сто лет назад английский философ и экономист Д. С. Милль предсказывал, что в конце прогрессивного развития промышленности и сельского хозяйства непременно должно наступить, как он его назвал, «неподвижное состояние», при котором сохраняются на постоянном уровне численность населения и продукция производства. С этим «неподвижным состоянием» Милль связывал «золотой век» человечества. Сейчас данная концепция получила новый импульс в связи с ухудшением экологической обстановки на планете.

Концепция «пределов роста» имеет позитивное значение в социально-политическом плане, поскольку направлена на критику основополагающего принципа капитализма – ориентации на безудержный рост материального производства и потребления. Однако предположение, что правительства всех стран можно уговорить или заставить поддерживать численность населения на постоянном уровне, явно не реалистично, а отсюда помимо всего прочего вытекает невозможность принятия предложения о стабилизации промышленного и сельскохозяйственного производства. Можно говорить о пределах роста в определенных направлениях, но не об абсолютных пределах. Задача заключается в предвидении опасностей роста в каких-либо направлениях и выборе путей гибкой переориентации развития.

В методологическом плане критике была подвергнута слишком высокая степень агрегации переменных, характеризующих процессы, протекающие в мире. Например, в модели Медоуза представлены средние темпы роста населения планеты, а не темпы роста в отдельных странах, средний уровень загрязнения природной среды, а не конкретные показатели в различных районах земного шара и т. д. Все эти величины сильно варьируют. Использование средних значений переменных, сильно отличающихся друг от друга по величине, может привести к ошибочным результатам. Например, максимальные темпы роста населения на планете превышают минимальные во много раз, однако в модели представлено среднее значение.

Эксперименты с моделью Форрестера показали, что если выделить в модели по крайней мере две группы стран – развитые и развивающиеся, то следует ожидать не одну глобальную катастрофу, а две региональных – сначала в развитых странах, а затем в развивающихся. Если же разбить модель на большее число частей, соответственно увеличится количество экологических катастроф.

В модели Медоуза почти не был представлен научно-технический прогресс. Это аргументировалось тем, что о науке и технике будущего ничего не известно. Авторы «Пределов роста» признают, что, возможно, объем человеческих знаний так же как население и экономика мира, растет экспоненциально, но из этого, по их мнению, не следует, что технологическое применение знания тоже растет по экспоненте. Например, удвоение урожая не создает предпосылок для следующего его удвоения. Предполагать, что технический прогресс развивается экспоненциально, и включать это допущение в формальную модель – значит, как считают Медоуз и его соратники, не понимать природы экспоненциального роста. Несмотря на то, что трудно предвидеть, какие именно технические нововведения будут сделаны в ближайшие десятилетия, тем не менее абсурдно сомневаться, исходя из опыта прошлого, в их неизбежности. Дело, впрочем, даже не в этом. Моделирование может и должно показать, какова должна быть роль технологии в предотвращении угрозы глобальной катастрофы.

Р. Бойд изменил модель Форрестера таким образом, чтобы она отражала точку зрения «технологического оптимизма». Он добавил в модель переменную «технология», а также коэффициенты, выражающие влияние научно-технического прогресса на другие переменные модели. Его эксперименты показали, что для предотвращения глобальной экологической катастрофы необходимо, чтобы технический прогресс соответствовал росту населения и потребления промышленной и сельскохозяйственной продукции.

Эксперименты с моделями мира продемонстрировали, что человечество при определении своего будущего может оперировать более широким спектром возможностей, чем дилемма «рост – равновесие».

Критике подверглись предположения группы Медоуза об экспоненциальном характере основных тенденций мирового развития и жестких физических пределах, которые накладывает на это развитие биосфера. Указывалось, что в моделях мира не представлена возможность целенаправленного воздействия на социально-экономическую систему в случае ее развития в нежелательном направлении. В моделях Форрестера и Медоуза много петель обратной связи между переменными, но отсутствует социальная обратная связь. В методологическом отношении важен учет изменений в структуре экономики современного общества. В моделях Форрестера и Медоуза не учтено действие реальных адаптационных механизмов, особенно в экономике, где их роль весьма существенна (например, механизм ценообразования). Вообще, поведение общества запрограммировано как неизменное. Отсутствие социальной обратной связи в модели не позволило представить в ней защитные механизмы, препятствующие катастрофе.

Орлеманс, Теллингс и де Вриес ввели в сектор загрязнения природной среды социальную обратную связь, представив зависимость между уровнем загрязнения среды и объемом затрат на ее охрану. Аналогично был модифицирован и сектор природных ресурсов. Эксперименты голландской группы показали, что, если ввести в секторы природных ресурсов и загрязнения природной среды социальную обратную связь, глобальная катастрофа не становится неминуемой.

Критический анализ моделей Форрестера и Медоуза выявил положительные и отрицательные стороны их работы, которую в целом следует оценить как негативное моделирование, показавшее, что грозит человечеству в случае сохранения и развертывания некоторых негативных тенденций технико-экономического развития при отсутствии принципиальных научно-технических и социокультурных изменений в мире. Однако у Форрестера и Медоуза отсутствует то, что можно назвать важнейшим методологическим принципом позитивного моделирования, – конструктивный преобразовательный аспект. Не был принят во внимание также важный принцип учета иерархичности структуры биосферы (модель Медоуза отвечает этому принципу только частично в том плане, что для выяснения конкретных деталей глобальных моделей построено отдельно несколько частных моделей). Не было учтено также, что модель должна конструироваться таким образом, чтобы учитывалась не только вероятность данного развития событий (точнее, возможность осуществления нескольких вариантов с разной степенью вероятности), но и, так сказать, желательность данной реконструкции природной среды.

Несмотря на серьезную критику моделей мира попытки глобального моделирования продолжались. М. Месаровичем и Э. Пестелем была построена на основе методики «иерархических систем» регионализированная модель, в которой мир разделен на 10 регионов с учетом экономических, социально-политических и идеологических различий. Каждый из этих регионов, в свою очередь, разделен на взаимодействующие иерархические сферы, или страты: экологическую, включающую антропогенно преобразуемую неживую природу и весь живой мир, кроме человека; технологическую – совокупность созданной техники и ее воздействие на природную среду; демоэкономическую, оказывающую влияние на развитие техники; социально-политическую, в которую входят «формальные организации» – правительства, официальные учреждения и т. п., а также «неформальные организации» – религиозные и политические движения, оказывающие влияние на деятельность формальных организаций; наконец, индивидуальную страту, которая охватывает условия физического и психологического развития человека.

Такая модель более реалистична и способна дать более детализированную и приемлемую для различных районов мира систему рекомендаций. В модели Месаровича и Пестеля заложено около ста тысяч соотношений (в более ранних моделях мира их было несколько сотен). Месарович и Пестель пришли к существенно иным выводам, чем Форрестер и группа Медоуза. Результаты их моделирования показали, что можно ожидать не одну глобальную, а несколько региональных катастроф. Варианты моделирования (или, как их называют, сценарии) предсказывают прежде всего продовольственный кризис в Юго-Восточной Азии вследствие отставания темпов роста производства продуктов питания от темпов роста народонаселения. По мнению Месаровича и Пестеля, стабилизация населения этого региона через 50 лет не даст возможности преодолеть продовольственный кризис, а стабилизация через 25–30 лет окажет положительное влияние в том случае, если экономике данного региона будет оказана соответствующая помощь.

В своей книге «Человечество на переломе» М. Месарович и Э. Пестель отмечают, что основной причиной экологических опасностей является стремление к количественному экспоненциальному росту без качественных преобразований экономической системы. Авторы полагают, что мировую систему следует рассматривать как единое целое, в котором все процессы настолько взаимосвязаны, что промышленный рост каких-либо регионов без учета изменений в других регионах может вывести мировую экономическую систему из устойчивого состояния. Глобальное моделирование Месаровича и Пестеля показало, что угроза экологической катастрофы отодвигается при органичном, сбалансированном росте всей мировой системы. Наиболее приемлемыми оказались модельные варианты взаимодействия между регионами, в которых действие развивалось по сценариям кооперации.

Сравнивая методологию Форрестера с той, которую использовали Месарович и Пестель, отметим, что если системная динамика может дать только плоскостную количественную картину ситуации, то теория иерархических систем за счет введения третьего измерения (иерархии уровней) способна обеспечить пространственную картину, представить эволюцию мировой системы не только в виде экспоненциальной кривой, как у Форрестера и Медоуза, но и в виде некоего «дерева», способного к квазиорганическому росту. Возможности «органического» роста, разумеется, больше, чем у роста одномерного, однако они зависят от того, насколько многомерным окажется «органический» рост, понимаемый, конечно, не только как буквально органический.

Концепции «пределов роста» Месарович и Пестель противопоставили концепциям «органического роста», считая, что экологические трудности могут быть преодолены без отказа от роста мировой экономической системы в том случае, если рост будет сбалансированным и органичным, наподобие, скажем, роста дерева.

Указанные концепции не являются диаметрально противоположными. Пределы роста существуют, но возможности его увеличиваются, если он сбалансирован, а это требует качественных изменений. Как чисто количественный показатель, рост не может быть бесконечным. Не равновесие, а развитие как единство качественных и количественных изменений является подлинной альтернативой роста, хотя равновесие, как и рост, представляет собой неотъемлемый момент развития, так что рост в одних направлениях предполагает равновесное состояние других параметров. Общим условием, обеспечивающим развитие, является сохранение стабильности при наличии качественных изменений.

Концепция «органического роста» привлекательна, но человечество не достигло такой степени целостности, чтобы сознательно органично развиваться, как дерево, хотя технические возможности человека достигли такого уровня, что он может уничтожить все деревья на Земле.

Методология глобального моделирования представляет собой экстраполяцию методов системного анализа различных областей действительности на исследование мировой системы в целом. В этом плане следует отметить работу по глобальному моделированию, проведенную группой экспертов ООН во главе с В. Леонтьевым. Если Форрестер и Медоуз использовали метод системной динамики, разработанный для анализа и проектирования индустриальных систем, а Месарович и Пестель – сформировавшийся прежде всего в биологии метод иерархических систем, то группа ООН применила разработанный В. Леонтьевым для анализа экономических систем метод «затраты – выпуск», основанный на построении матрицы, отражающей экономическую структуру межотраслевых потоков. Работа группы В. Леонтьева была определенным шагом на пути к повышению конструктивности глобального моделирования, поскольку в основном ориентировалась на рассмотрение вариантов улучшения существующего эколого-экономического положения на нашей планете. Первые попытки создания глобальных моделей были осуществлены Дж. Форрестером и группой Д. Медоуза на основе разработанного Дж. Форрестером метода системной динамики, позволяющего исследовать поведение сложной структуры взаимосвязанных переменных. Модели мира состояли из пяти соединенных друг с другом прямыми и обратными связями секторов (уровней): народонаселение, промышленное производство, сельскохозяйственное производство, природные ресурсы, состояние природной среды.

Ранее строились формальные модели отдельных сторон действительности – развития экономики, роста численности населения и т. д. Но выявление связей между этими тенденциями (в соответствии с представлениями о биосфере как единой системе) столь же важно, как и изучение их в отдельности. В созданных Дж. Форрестером и группой Д. Медоуза моделях мира пять главных тенденций мирового развития – быстрый рост населения, ускоренные темпы промышленного роста, широкое распространение зоны недостаточного питания, истощение невосполнимых ресурсов и загрязнение окружающей среды – рассматривались во взаимосвязи друг с другом.

Компьютерное моделирование, проведенное в Массачусетском технологическом институте (США), показало, что при отсутствии социально-политических изменений в мире и сохранении его технико-экономических тенденций быстрое истощение природных ресурсов вызовет около 2030 года замедление роста промышленности и сельского хозяйства и в результате резкое падение численности населения – демографическую катастрофу. Если предположить, что достижения науки и техники обеспечат возможность получения неограниченного количества ресурсов (как предполагалось во втором сценарии анализа модели), катастрофа наступает от чрезмерного загрязнения окружающей среды. При допущении, что общество сможет решить задачу охраны природы (третий сценарий), рост населения и выпуска продукции будет продолжаться до тех пор, пока не исчерпаются резервы пахотной земли, а затем, как во всех предыдущих вариантах, наступает коллапс. Катастрофа неминуема, потому что все пять опасных для человечества тенденций растут по экспоненте, и беда может подкрасться незаметно и актуализироваться, когда поздно будет что-либо сделать. Рост по экспоненте – коварная вещь, и человечество может оказаться в положении раджи, который легко согласился заплатить изобретателю шахмат растущее по экспоненте количество зерен (за первое поле одно зерно, за второе – два, за третье – четыре и т. д.), а потом горько раскаялся в этом, поскольку всех его запасов не хватило для того, чтобы отдать обещанное.

Основываясь на своих результатах, создатели моделей дают в последней главе своей книги «Пределы роста» следующие рекомендации по предотвращению грозящей опасности. Они предлагают в кратчайшее время стабилизировать численность населения планеты и одновременно производство на современном уровне. Такое глобальное равновесие, как считают Д. Медоуз и его коллеги, не будет означать застоя, ибо человеческая деятельность, не требующая большого расхода невосполнимых ресурсов и не приводящая к деградации природной среды (в частности, наука, искусство, просвещение, спорт), может развиваться неограниченно.

Такая концепция не нова, если мы вспомним Платона, Аристотеля и Мальтуса. Сто лет назад английский философ и экономист Д. С. Милль предсказывал, что в конце прогрессивного развития промышленности и сельского хозяйства непременно должно наступить, как он его назвал, «неподвижное состояние», при котором сохраняются на постоянном уровне численность населения и продукция производства. С этим «неподвижным состоянием» Милль связывал «золотой век» человечества. Сейчас данная концепция получила новый импульс в связи с ухудшением экологической обстановки на планете.

Концепция «пределов роста» имеет позитивное значение в социально-политическом плане, поскольку направлена на критику основополагающего принципа капитализма – ориентации на безудержный рост материального производства и потребления. Однако предположение, что правительства всех стран можно уговорить или заставить поддерживать численность населения на постоянном уровне, явно не реалистично, а отсюда помимо всего прочего вытекает невозможность принятия предложения о стабилизации промышленного и сельскохозяйственного производства. Можно говорить о пределах роста в определенных направлениях, но не об абсолютных пределах. Задача заключается в предвидении опасностей роста в каких-либо направлениях и выборе путей гибкой переориентации развития.

В методологическом плане критике была подвергнута слишком высокая степень агрегации переменных, характеризующих процессы, протекающие в мире. Например, в модели Медоуза представлены средние темпы роста населения планеты, а не темпы роста в отдельных странах, средний уровень загрязнения природной среды, а не конкретные показатели в различных районах земного шара и т. д. Все эти величины сильно варьируют. Использование средних значений переменных, сильно отличающихся друг от друга по величине, может привести к ошибочным результатам. Например, максимальные темпы роста населения на планете превышают минимальные во много раз, однако в модели представлено среднее значение.

Эксперименты с моделью Форрестера показали, что если выделить в модели по крайней мере две группы стран – развитые и развивающиеся, то следует ожидать не одну глобальную катастрофу, а две региональных – сначала в развитых странах, а затем в развивающихся. Если же разбить модель на большее число частей, соответственно увеличится количество экологических катастроф.

В модели Медоуза почти не был представлен научно-технический прогресс. Это аргументировалось тем, что о науке и технике будущего ничего не известно. Авторы «Пределов роста» признают, что, возможно, объем человеческих знаний так же как население и экономика мира, растет экспоненциально, но из этого, по их мнению, не следует, что технологическое применение знания тоже растет по экспоненте. Например, удвоение урожая не создает предпосылок для следующего его удвоения. Предполагать, что технический прогресс развивается экспоненциально, и включать это допущение в формальную модель – значит, как считают Медоуз и его соратники, не понимать природы экспоненциального роста. Несмотря на то, что трудно предвидеть, какие именно технические нововведения будут сделаны в ближайшие десятилетия, тем не менее абсурдно сомневаться, исходя из опыта прошлого, в их неизбежности. Дело, впрочем, даже не в этом. Моделирование может и должно показать, какова должна быть роль технологии в предотвращении угрозы глобальной катастрофы.

Р. Бойд изменил модель Форрестера таким образом, чтобы она отражала точку зрения «технологического оптимизма». Он добавил в модель переменную «технология», а также коэффициенты, выражающие влияние научно-технического прогресса на другие переменные модели. Его эксперименты показали, что для предотвращения глобальной экологической катастрофы необходимо, чтобы технический прогресс соответствовал росту населения и потребления промышленной и сельскохозяйственной продукции.

Эксперименты с моделями мира продемонстрировали, что человечество при определении своего будущего может оперировать более широким спектром возможностей, чем дилемма «рост – равновесие».

Критике подверглись предположения группы Медоуза об экспоненциальном характере основных тенденций мирового развития и жестких физических пределах, которые накладывает на это развитие биосфера. Указывалось, что в моделях мира не представлена возможность целенаправленного воздействия на социально-экономическую систему в случае ее развития в нежелательном направлении. В моделях Форрестера и Медоуза много петель обратной связи между переменными, но отсутствует социальная обратная связь. В методологическом отношении важен учет изменений в структуре экономики современного общества. В моделях Форрестера и Медоуза не учтено действие реальных адаптационных механизмов, особенно в экономике, где их роль весьма существенна (например, механизм ценообразования). Вообще, поведение общества запрограммировано как неизменное. Отсутствие социальной обратной связи в модели не позволило представить в ней защитные механизмы, препятствующие катастрофе.

Орлеманс, Теллингс и де Вриес ввели в сектор загрязнения природной среды социальную обратную связь, представив зависимость между уровнем загрязнения среды и объемом затрат на ее охрану. Аналогично был модифицирован и сектор природных ресурсов. Эксперименты голландской группы показали, что, если ввести в секторы природных ресурсов и загрязнения природной среды социальную обратную связь, глобальная катастрофа не становится неминуемой.

Критический анализ моделей Форрестера и Медоуза выявил положительные и отрицательные стороны их работы, которую в целом следует оценить как негативное моделирование, показавшее, что грозит человечеству в случае сохранения и развертывания некоторых негативных тенденций технико-экономического развития при отсутствии принципиальных научно-технических и социокультурных изменений в мире. Однако у Форрестера и Медоуза отсутствует то, что можно назвать важнейшим методологическим принципом позитивного моделирования, – конструктивный преобразовательный аспект. Не был принят во внимание также важный принцип учета иерархичности структуры биосферы (модель Медоуза отвечает этому принципу только частично в том плане, что для выяснения конкретных деталей глобальных моделей построено отдельно несколько частных моделей). Не было учтено также, что модель должна конструироваться таким образом, чтобы учитывалась не только вероятность данного развития событий (точнее, возможность осуществления нескольких вариантов с разной степенью вероятности), но и, так сказать, желательность данной реконструкции природной среды.

Несмотря на серьезную критику моделей мира попытки глобального моделирования продолжались. М. Месаровичем и Э. Пестелем была построена на основе методики «иерархических систем» регионализированная модель, в которой мир разделен на 10 регионов с учетом экономических, социально-политических и идеологических различий. Каждый из этих регионов, в свою очередь, разделен на взаимодействующие иерархические сферы, или страты: экологическую, включающую антропогенно преобразуемую неживую природу и весь живой мир, кроме человека; технологическую – совокупность созданной техники и ее воздействие на природную среду; демоэкономическую, оказывающую влияние на развитие техники; социально-политическую, в которую входят «формальные организации» – правительства, официальные учреждения и т. п., а также «неформальные организации» – религиозные и политические движения, оказывающие влияние на деятельность формальных организаций; наконец, индивидуальную страту, которая охватывает условия физического и психологического развития человека.

Такая модель более реалистична и способна дать более детализированную и приемлемую для различных районов мира систему рекомендаций. В модели Месаровича и Пестеля заложено около ста тысяч соотношений (в более ранних моделях мира их было несколько сотен). Месарович и Пестель пришли к существенно иным выводам, чем Форрестер и группа Медоуза. Результаты их моделирования показали, что можно ожидать не одну глобальную, а несколько региональных катастроф. Варианты моделирования (или, как их называют, сценарии) предсказывают прежде всего продовольственный кризис в Юго-

Восточной Азии вследствие отставания темпов роста производства продуктов питания от темпов роста народонаселения. По мнению Месаровича и Пестеля, стабилизация населения этого региона через 50 лет не даст возможности преодолеть продовольственный кризис, а стабилизация через 25–30 лет окажет положительное влияние в том случае, если экономике данного региона будет оказана соответствующая помощь.

В своей книге «Человечество на переломе» М. Месарович и Э. Пестель отмечают, что основной причиной экологических опасностей является стремление к количественному экспоненциальному росту без качественных преобразований экономической системы. Авторы полагают, что мировую систему следует рассматривать как единое целое, в котором все процессы настолько взаимосвязаны, что промышленный рост каких-либо регионов без учета изменений в других регионах может вывести мировую экономическую систему из устойчивого состояния. Глобальное моделирование Месаровича и Пестеля показало, что угроза экологической катастрофы отодвигается при органичном, сбалансированном росте всей мировой системы. Наиболее приемлемыми оказались модельные варианты взаимодействия между регионами, в которых действие развивалось по сценариям кооперации.

Сравнивая методологию Форрестера с той, которую использовали Месарович и Пестель, отметим, что если системная динамика может дать только плоскостную количественную картину ситуации, то теория иерархических систем за счет введения третьего измерения (иерархии уровней) способна обеспечить пространственную картину, представить эволюцию мировой системы не только в виде экспоненциальной кривой, как у Форрестера и Медоуза, но и в виде некоего «дерева», способного к квазиорганическому росту. Возможности «органического» роста, разумеется, больше, чем у роста одномерного, однако они зависят от того, насколько многомерным окажется «органический» рост, понимаемый, конечно, не только как буквально органический.

Концепции «пределов роста» Месарович и Пестель противопоставили концепциям «органического роста», считая, что экологические трудности могут быть преодолены без отказа от роста мировой экономической системы в том случае, если рост будет сбалансированным и органичным, наподобие, скажем, роста дерева.

Указанные концепции не являются диаметрально противоположными. Пределы роста существуют, но возможности его увеличиваются, если он сбалансирован, а это требует качественных изменений. Как чисто количественный показатель, рост не может быть бесконечным. Не равновесие, а развитие как единство качественных и количественных изменений является подлинной альтернативой роста, хотя равновесие, как и рост, представляет собой неотъемлемый момент развития, так что рост в одних направлениях предполагает равновесное состояние других параметров. Общим условием, обеспечивающим развитие, является сохранение стабильности при наличии качественных изменений.

Концепция «органического роста» привлекательна, но человечество не достигло такой степени целостности, чтобы сознательно органично развиваться, как дерево, хотя технические возможности человека достигли такого уровня, что он может уничтожить все деревья на Земле.

Методология глобального моделирования представляет собой экстраполяцию методов системного анализа различных областей действительности на исследование мировой системы в целом. В этом плане следует отметить работу по глобальному моделированию, проведенную группой экспертов ООН во главе с В. Леонтьевым. Если Форрестер и Медоуз использовали метод системной динамики, разработанный для анализа и проектирования индустриальных систем, а Месарович и Пестель – сформировавшийся прежде всего в биологии метод иерархических систем, то группа ООН применила разработанный В. Леонтьевым для анализа экономических систем метод «затраты – выпуск», основанный на построении матрицы, отражающей экономическую структуру межотраслевых потоков. Работа группы В. Леонтьева была определенным шагом на пути к повышению конструктивности глобального моделирования, поскольку в основном ориентировалась на рассмотрение вариантов улучшения существующего эколого-экономического положения на нашей планете.

Лекция. Комплексные системы моделирования политического развития страны и международных отношений

План

1. Компьютерные модели. Модель World3. Модели для комплексной оценки. Integrated Forecast System**.**
2. Пример задачи исследования

1. Компьютерные модели. Модель World3. Модели для комплексной оценки (IAM). Integrated Forecast System.

World3 модель является моделью динамической системы для компьютерного моделирования взаимодействий между населением, промышленным ростом, производством продуктов питания и ограничениями в экосистемах Земли. Первоначально она была воспроизведена и использована в исследовательских клубах Рима. Основными создателями модели были Донелла Медоуз и Йорген Рандерс.

Модель описана в книге «Динамика роста в конечном мире». Он добавил, новые возможности для Джей У. Forrester World2 модели. Так, подошли к модели World3/91, позже после улучшения создали World3/2000, модель создана Институтом политики и социальных исследований и, наконец, World3 / 2004 модель, что используется в книге.

World3 является одной из нескольких глобальных моделей, что были созданы во всем мире (Месаровича / Пестель Модель, Модель Барилоче, Мойра Модель, Модель Сару, FUGI модель) и, вероятно эта модель, породила искру для всех последующих моделей.

Модель состоит из нескольких взаимодействующих частей. Каждая из которых соответствует иной системе модели.

Основными системами были

- система питания, сельского хозяйства и производства продуктов питания,
- индустриальная система,
- система населения,
- система невозобновляемых ресурсов,
- система загрязнений.

Модели для комплексной оценки являются одним из видов научного моделирования и часто используются в экологических науках и экологической политики анализа. Моделирование интегрированы, потому что экологические проблемы не имеют границ между академическими дисциплинами. Интегрированные модели оценки могут интегрировать знания из двух или более областей в единую структуру. Встроенное моделирование называют моделями оценки. Модели для комплексной оценки является частью комплексной оценки, что опирается на использование численных моделей. Модели для комплексной оценки получили дальнейшее развитие в области изменения климата, в частности в контексте моделирования энергетического форума.

Известными центрами моделирования для комплексной оценки являются МИПСА, MIT, RIVM и международные фьючерсы.

Известны ученые Барри Б. Хьюз, Билл Нордхауз, Роберт Мендельсон, Рич Ричерлс, Майкл Шлезингер, Стивен Шнайдер, Ричард Тол, Джон Веэнт и Гэри Йо.

С другой стороны, Роберт Пиндайк утверждает, что они являются проблематичными и "близко к бесполезным в качестве инструмента для анализа политики". Он утверждает, что они "на основе анализов климатической политики создают восприятие знаний и точности, что иллюзорно может обмануть политиков, думая, что прогнозы модели генерируются какой-то научной легитимностью".

Integrated Forecast System

Комплексная система прогнозирования (IFS) это оперативная глобальная метеорологическая модель прогнозирования. IFS, разработана и поддерживается Европейским центром среднесрочных прогнозов погоды, основанной в Англии. Оперативнай модель работает в детерминированном режиме прогноза. GFS, использует спектральное представление, а не системы на основе сетки.

2. Пример задачи исследования

1) Краткий исторический экскурс в модели мировой динамики.

2) ТНК и их место в мировой экономике.

3) Анализ существующих моделей мировой экономики с точки зрения возможности учета в них инвестиционной деятельности ТНК.

4) Построение модели мировой динамики, включающей в себя потоки прямых иностранных инвестиций и затрат на НИОКР со стороны ТНК.

5) Анализ различных сценариев развития мировой экономики для оценки связи между ТНК и экономическими показателями национальных экономик.

За последние десятилетия глобализационный процесс развивался бурными темпами. Одной из отличительных особенностей глобализации является усиление роли транснациональных корпораций, которые на международной арене имеют подчас даже большее влияние, чем национальные экономики. Из-за высокой концентрации ресурсов экономическая власть, сконцентрированная в руках крупнейших ТНК, может быть сопоставима с властью экономического блока.

Определенный интерес представляет выявление этой власти с целью оценки влияния ТНК на суверенные государства. Продажи ТНК в различных регионах являются величиной закамуфлированной, поскольку в стране продажи может быть расположен завод, производящий продукцию под маркой той или иной ТНК. Иными словами, анализ продаж ТНК в странах представляется затруднительным, поэтому необходимо выделить другие потоки, которые смогли бы отразить деятельность ТНК в стране. Этими потоками могут выступать прямые иностранные инвестиции (Foreign Direct Investment) и затраты на НИОКР (Research & Development). Во-первых, они вполне отражают уровень проникновения ТНК в национальную экономику, а во-вторых, данные ряды доступны за большое количество лет и даны в разбивке по странам, что дает возможность провести межвременное и межстрановое исследование.

Поэтому целью данного исследования является анализ влияния потоков прямых иностранных инвестиций и затрат на НИОКР транснациональных корпораций на экономические показатели национальных экономик. Цель исследования определяет задачи, выполнение которых необходимо для выполнения цели.

Первой задачей ставится введение в методы глобального моделирования, то есть проводится краткий исторический экскурс в модели мировой экономики.

Второй задачей ставится анализ транснациональных корпораций и их места в мировой экономике. Анализ проводится с точки зрения влияния потоков, генерируемых ТНК, на экономические показатели национальных экономик.

Третьей задачей ставится анализ существующих моделей мировой динамики с точки зрения учета с них деятельности ТНК. Если деятельность ТНК (в данном исследовании выделяют потоки ПИИ и затраты на НИОКР) явно не учтена в уравнениях рассматриваемой модели, то рассматривается возможность вычленения из агрегированных потоков потоки, которые были сгенерированны транснациональными корпорациями.

Четвертой задачей ставится построение модели мировой динамики на базе уже существующей модели, которая бы включала в себя потоки прямых иностранных инвестиций и затрат на НИОКР со стороны ТНК.

Пятой задачей ставится оценка различных сценариев развития мировой экономики для оценки взаимозависимостей между ТНК и национальными экономиками. Предполагается анализ шоков во входящих и исходящих потоках ПИИ и затрат на НИОКР на предмет влияния на экономический рост, запас капитала и так далее.

Глобальные модели (**Peter Brecke, Georgia Institute of Technology**) должны удовлетворять трем характеристикам:

А) Географический охват модели должен включать весь мир или, по крайней мере, значительную его часть.

Б) Модель должна включать в себя объединение различных аспектов, таких как, например, экономика, окружающая среда и демография.

В) Модель должна быть способной давать прогнозы эволюции мира в будущем.

Развитие глобальных моделей началось с 1960-х гг. Самые ранние модели мировой динамики:

- **World 2** (Jay W. Forrester, 1972)
- **World 3** (Meadows, 1972)

- **WIM** – World Integrated Model (Mihajlo Mesarovic, 1974)
- **WIOM** – World Input-Output Model (United Nations Global Model, новая версия этой модели называется World Model)
- **FUGI** – FUture of Global Interdependence Model (Akira Onishi, 1972)
- **SIM/GDP** – System of Integrated Models/Global Development Processes (начало 1980-х гг., Дубовский С.В.)
- **GLOBUS** – Generating Long-term Options By Using Simulation (Peter Brecke, 1980-е гг.)

Современные модели мировой динамики, разбирающиеся в данном исследовании:

- **GEM** – Global Economic Model (2004, МВФ, Tatim Bayoumi)
- **WorldScan** (Arjan Lejour, CPB Netherlands Bureau for Economic Policy Analysis, 2004)

Источник данных по ТНК: UNCTAD – United Nations Conference on Trade and Development (**World Investment Report**).

Ряды данных с 1991 года по каждой стране:

– FDI (foreign direct investment), входящий и исходящий
– Затраты на R&D (research and development), которые осуществляют ТНК в каждой стране.

Поток FDI:

– инвестиции в уставной капитал (примерно 70% от общего потока),

– займы внутри ТНК (от главного офиса региональным),

– реинвестированный доход.

График 1. Поток FDI, разбитый по трем составляющим.

Постановка гипотез исследования.

Гипотеза №1:

В странах, в которых присутствие ТНК достаточно велико, существует положительная корреляция (с определенным лагом) муровнем FDI и экономическим ростом.

Мировой рынок R&D оценивается в 676,5 млрд. долл. Из них 449,8 млрд. долл. приходится на бизнес. Агентство UNCTAD представляет данные входящего потока средств на R&D, ассигнованных иностранными компаниями, практически по каждой стране. С некоторой погрешностью можно сделать предположение, что данный поток полностью относится к ТНК.

Гипотеза №2:

Существует корреляция (с определенным лагом) между затратами на НИОКР со стороны ТНК и экономическим ростом.

Модели CGEM.

Вычислимые модели общего равновесия (CGEM – computable general equilibrium models) представляют собой набор уравнений (чаще всего нелинейных), относящихся к спросу и предложению на различных рынках.

Решение модели находится путем приведение рынков в состояние равновесия. Поиск неизвестных параметров модели осуществляется в процессе **калибровки** модели (аналог оценки коэффициентов регрессии в эконометрике).

Сильные и слабые стороны CGEM:

«+» при построении модели используется структурных подход, который держит исследователя в рамках экономической теории

«+» модели обладают прогностической силой на кратко- и среднесрочном периоде

«-» CGE модели по своей структуре больше статичны, чем динамичны (Peter Brecke), поэтому не могут учесть качественное развитие экономики на большом временном интервале.

«-» процесс калибровки занимает длительное время, он не всегда приводит к наилучшему решению.

«-» крупный размер модели не всегда отвечает задачам исследователя, модель должна разрабатываться под узкую задачу и быть отточенной для конкретной задачи (Айвазян С.А.).

5. Модель GEM (см. Схему 1):

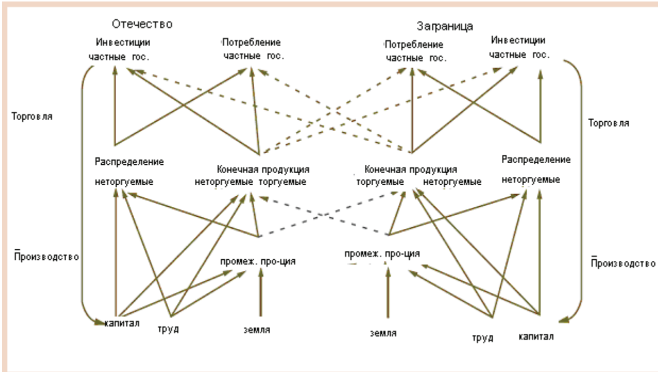


Схема 1.

Предпосылки модели GEM:

- Модель построена по принципу: страновые (региональные) модели открытой экономики и связи между ними. Агенты агрегированы.
- Фирмы производят продукцию, потребители владеют трудом, капиталом и землей. Потребители также владеют фирмами, получают от них зарплату и прибыль. Зарплата в модели жесткая.
- Рабочие выбирают между работой и досугом (в зависимости от зарплаты), что и определяет предложение труда.

- Государство собирает налоги и выплачивает трансферты, тратит на импорт и на отечественные товары.
- Фискальная и финансовая сторона модели на данный момент достаточно просты.
- Товары делятся на торгуемые и неторгуемые. Неторгуемые товары идут на потребление и инвестиции через сектор Distribution.
- В базовые уравнения вводятся лагированные переменные, чтобы переход от одного долгосрочного равновесия к другому осуществлялся не скачкообразно, а постепенно.

Некоторые соотношения модели GEM:

Производство:

(1) $q = CES(K, L, TIM; \rho)$, или иначе:

(2) $q_s = (\alpha_{Ks}^{1-\rho} K_s{}^{\rho} + \alpha_{Ls}^{1-\rho} L_s{}^{\rho} + \alpha_{TIMs}^{1-\rho} TIM_s{}^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$,

где

q_s - выпуск в объемном выражении отрасли s

ρ - коэффициент CES производственной функции, различный для каждой отрасли

K_s – капитал, занятый в отрасли s

L_s – труд, занятый в отрасли s

TIM_s – промежуточная продукция, участвующая в производстве продукта отраслиs.

Инвестиции:

(3) $k_t = k_{t-1} - \delta^K k_{t-1} + i_t$

(4) $$i_t = \frac{I_t}{p_t^I}$$

(5) $$I_t = \alpha_t^{PR} PR_t$$

Обозначение переменных:

k_t - запас капитала на момент времени t

δ^K - коэффициент амортизации капитала

i_t - инвестиционные товары, добавляемые к капиталу в момент времени t

I_t - инвестиции в момент времени t в денежном выражении

p_t^I - цена инвестиционного товара в момент времени t

PR_t - прибыль, полученная фирмами за период t

α_t^{PR} - доля прибыли в момент t, которая идет на покупку инвестиционных товаров

Модель WorldScan (см. Схему 2):

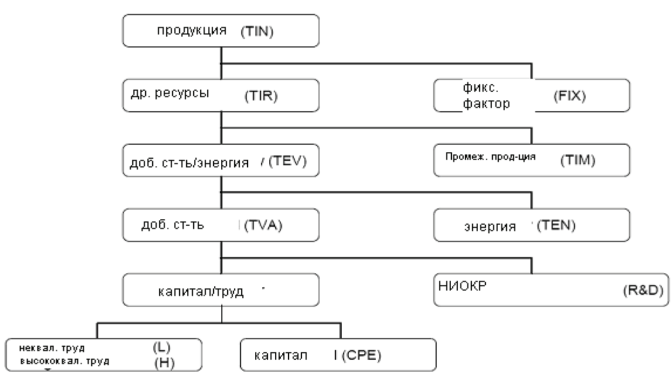


Схема 2.

Предпосылки модели WorldScan:

- В модели рассматриваются чистые, а не хозяйственные отрасли.
- Труд делится на высококвалифицированный и неквалифицированный.
- В производстве участвуют труд, капитал и промежуточная продукция. Труд и капитал являются хорошими субститутами, а промежуточную продукцию практически нельзя заменить.
- Занятость определяется экзогенно как разность между трудовыми ресурсами и безработицей (заданными для каждого периода).
- Если рынок труда жестко ограничен страновыми рамками, то капитал более мобилен. Его цена определяется на региональном уровне.
- Международная торговля задана делением спроса потребителя на отечественные продукты и зарубежные (причем предполагается, что товары разных стран не являются совершенными субститутами).
- Моделирование государства аналогично модели GEM.
- Основными движущими силами экономического роста является технологический прогресс и факторы, влияющие на увеличение предложения труда.

– В модели учитывается влияние затрат на R&D на добавленную стоимость, чего не делается в большинстве аналогичных моделей.

Некоторые соотношения модели WorldScan:

Производство: В модели рассматривается CES производственная функция. Уравнение (6):

$$q_{TIN} = CES(q_{TIR}, q_{FIX}; \rho_{TIN}) = (\alpha_{TIR}^{1-\rho_{TIN}} q_{TIR}^{\rho_{TIN}} + \alpha_{FIX}^{1-\rho_{TIN}} q_{FIX}^{\rho_{TIN}})^{\frac{1}{\rho TIN}}$$

Аналогичные уравнения записываются на каждом уровне Схемы 2.

(7) $q_{TIR} = CES(q_{TEV}, q_{TIM}; \rho_{TIR})$

(8) $q_{TVA} = CES(K, L, R\&D; \rho_{TVA})$

(9) $Q_{xx}{}^{r} = p_r^{xx} q_{xx}^{r}$ (переход от объемных показателей к стоимостным в регионе r путем умножения на p_r^{xx} - цену товара в регионе r)

Обозначение переменных:

q_{TIN} - конечная продукция

q_{TIR} - другие ресурсы

q_{FIX} - фиксированный фактор

q_{TEV} - добавленная стоимость/энергия

q_{TVA} - добавленная стоимость

ρ - соответствующая эластичность CES производственной функции.

Инвестиционный спрос: В модели уровень инвестиций в регионе r равен сбережениям. На инвестиции фирмы покупают инвестиционные товары.

(10) $i_r = k_r^E - (1 - \delta^K) k_r$

(11) $I_r = i_r p_r^I$

(12) $I_{sr} = \alpha_{sr}^I I_r$

Обозначение переменных:

i_r - объем инвестирования (investment volume)

k_r^E - объем капитала в следующий период

δ^K - уровень амортизации для капитала

k_r - уровень запаса капитала в текущий момент

I_r - инвестирование в денежном выражении (investment value)

p_r^I - цена инвестиционных товаров в регионе r

I_{sr} - спрос в денежном выражении в регионе r на инвестиционные товары сектора s

α_{sr}^I - доля инвестиционных товаров из сектора s

Конечный продукт сектора s (по сумме конечной продукции):

(13) $Y_S^{VA} = Q_s^S - \sum_f Q_{fs}$

Обозначение переменных:

Y_S^{VA} - ВВП, рассчитанный по стоимости конечной продукции

Q_s^S - валовой выпуск продукта в секторе s

Q_{fs} - общий спрос на промежуточный продукт f

Учет потока FDI, генерируемого ТНК:

Модель GEM:

(14) $k_t = k_{t-1} - \delta^K k_{t-1} + i_t$

(15) $i_t = \dfrac{I_t}{p_t^I}$

(16) $I_t = \alpha_t^{PR} (PR_t - FDI_{outflow}) + FDI_{\inf low}$

$FDI_{outflow}$ - исходящий поток FDI.

$FDI_{\inf low}$ - входящий поток FDI.

Модель WorldScan:

Вариант 1.

Запас капитала с лагом в t периодов пополняется инвестиционными товарами. Предполагается, что на FDI приобретаются инвестиционные товары, которые вводятся с задержкой в t периодов.

(17) $i_r = k_r^E(ск) - (1 - \delta^K) k_r + \dfrac{FDI_r^{net}(-t)}{p_r^I(-t)}$

$FDI_r^{net}(-t)$ - чистый поток прямых частных инвестиций в регионе r, t периодов назад.

$k_r^E(ск)$ - количество капитала в следующий период времени, скорректированный на товарный эквивалент $FDI_r^{net}(-t)$.

Вариант 2.

(18) $i_r = \dfrac{\tilde{I}_r(-t) + FDI_r^{net}(-t)}{p_t^I}$, где

$FDI_r^{net}(-t)$ - чистый поток прямых частных инвестиций в регионе r, взятый с некоторым лагом t.

$\tilde{I}_r(-t)$ - инвестиционные в стране r ресурсы за вычетом $FDI_r^{net}(-t)$, взятые также с лагом t.

i_r - инвестиционные товары.

Учет потока R&D, генерируемого ТНК:

Модель GEM:

Данный раздел находится на стадии разработки.

Модель WorldScan:

На схеме 2 показано, как затраты на R&D включены в производственную функцию, а следовательно и в уравнение ВВП.

Шоки для полученной модели, включающей инвестиционную деятельность ТНК в странах:

1. Увеличение входящего потока FDI в страну на 1% (для страны с положительным значением FDI_r^{net})
2. Увеличение исходящего потока FDI в страну на 1% (для страны с отрицательным значением FDI_r^{net})
3. Увеличение/уменьшение входящего потока затрат на R&D на 1% в развивающуюся страну (рассматривается страна, для которой доля входящего потока затрат на R&D является существенной).

Список использованной литературы:

1. World Investment Report 2005, UNCTAD, United Nations publication, 2005.
2. GEM A New International Macroeconomic Model, Tatim Bayoumi, IMF publication, 2004.
3. WorldScan: a Model for International Economic Policy Analysis, Arjan Lejour, CPB Document, 2004.
4. The Past, Present, and Future of Macroeconomic Forecasting, Diebold Francis X., Journal of Economic Perspectives, Vol. 12, Number 2, Spring 1998.
5. Integrated Global Models that Run on Personal Computers, Peter Brecke, Georgia Institute of Technology, 1992
6. A Description of the Soviet Global Model, Peter Brecke, Georgia Institute of Technology, 1995
7. A Classification of Empirical CGE Modeling, Mark Thissen, University of Groningen, 1998.
8. The Oxford World Macroeconomic Model: an Overview, Mark Burridge, Oxford Economic Forecasting, 2005.
9. A Standard Computable General Equilibrium Model in GAMS, Hans Lofgren, Microcomputers in Policy Research 5, 2000.

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Лабораторная работа. Использование электронных таблиц Excel для вычисления выборочных характеристик данных

Математическая статистика подразделяется на две основные области: описательную и аналитическую статистику. Описательная статистика охватывает методы описания статистических данных, представления их в форме таблиц, распределений.

Аналитическая статистика или теория статистических выводов ориентирована на обработку данных, полученных в ход эксперимента, с целью формулировки выводов, имеющих прикладное значение для самых различных областей человеческой деятельности.

1.1 Характеристика пакета Excel

Пакет Excel оснащен средствами статистической обработки данных. И хотя Excel существенно уступает специализированным статистическим пакетам обработки данных, тем не менее, этот раздел математики представлен в Excel наиболее полно. В него включены основные, наиболее часто используемые статистические процедуры: средства описательной статистики, критерии различия, корреляционные и другие методы, позволяющие проводит необходимый статистический анализ экономических, психологических, педагогических и медико-биологических типов данных.

Каждая единица информации занимает свою собственную ячейку (клетку) в создаваемой рабочей таблице. В каждой рабочей таблице 256 столбцов (из которых в новой рабочей таблице на экране видны, как правило, только первые 10 или 11 (вот А к J или К) и 65 536 срок (из которых обычно видны только первые 15-20). Каждая новая рабочая книга содержит три чистых письма рабочих таблиц.

Вся помещаемая в электронную таблицу информация хранится в отдельных клетках рабочей таблицы. Но ввести информацию можно только в текущую клетку. С помощью адреса в строке формул и табличного курсора Excel указывает, какая из клеток рабочей таблицы является текущей. В основе системы адресации клеток рабочей таблицы лежит комбинация буквы (или букв) столбца и номера сроки, например А2, В12.

При рассмотрении применения методов обработки статистических данных в данной лабораторной работе ограничимся только простейшими и наиболее часто описательными статистиками, реализованными в мастере функций Excel.

1.2 Использование специальных функций

В мастере функций Excel имеется ряд специальных функций, предназначенных для вычисления выборочных характеристик.

Функция СРЗНАЧ вычисляет среднее арифметическое из нескольких массивов (аргументов) чисел. Аргументы число1, число2, ... — это вот 1 до 30 массивов для которых вычисляется среднее.

Функция МЕДИАНА позволяет получать медиану заданной выборки. Медиана - это элемент выборки, число элементов выборки со значениями больше которого и меньше которого равно.

Функция МОДА вычисляет наиболее часто встречающееся значение в выборке.

Функция ДИСП позволяет оценить дисперсию по выборочным данным.

Функция СТАНДОТКЛОН вычисляет стандартное отклонение.

Функция ЭКСЦЕСС вычисляет оценку эксцесса по выборочным данным.

Функция СКОС позволяет оценить асимметрию выборочного распределения.

Функция КВАРТИЛЬ вычисляет квартили распределения. Функция имеет формат КВАРТИЛЬ(массив, значение), где массив – интервал ячеек, содержащих значения СВ; значение определяет какая квартиль должна быть найденная (0 – минимальное значение, 1 – нижняя квартиль, 2 – медиана, 3 – верхняя квартиль, 4 – максимальное значение распределения).

Пример 1. Провести статистический анализ методом описательной статистики доходов населения в регионе 1 и регионе 2.

1	49
1	51
1	49
1	51
1	49
1	51
1	49
1	51
1	49
491	51

500 500 сумма

50 50 среднее

240 1,1

10 1 дисперсия

154, 1,0 станд.

95 5 отклонение

1 49 квартили

1 51 квартили

1 50 медиана

1 49 мода

-

10 2,57 эксцесс

скос(ассиме

3,16 0 трия)

Задания для самостоятельной работы

1. Наблюдение посещаемости четырех внеклассных мероприятий в экспериментальном (20 человек) и контрольном (30 человек) классах дали значения (соответственно): 18, 20, 20, 18 и 15, 23, 10, 28. Требуется найти среднее значение, стандартное отклонение, медиану и квартили этих данных.

2. Найти среднее значение, медиану, стандартное отклонение и квартили результатов бега на дистанцию 100 г в группы студентов (с): 12,8; 13,2; 13,0; 12,9; 13,5; 13,1.

3. Определите верхнюю и нижнюю квартиль, выборочную асимметрию и эксцесс для данных измерений роста групп студенток: 164, 160, 157, 166, 162, 160, 161, 159, 160, 163, 170, 171.

4. Найти наиболее популярный туристический маршрут из четырех реализуемых фирмой, если за неделю последовательно были реализованы следующие маршруты: 1, 3, 3, 2, 1, 1, 4, 4, 2, 4, 1, 3, 2, 4, 1, 4, 4, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 1, 3.

1.2 Использование инструмента Пакет анализа

В пакете Excel помимо мастера функций имеется набор более мощных инструментов для работы с несколькими выборками и углубленного анализа данных, называемый Пакет анализа, который может быть использован для решения задач статистической обработки выборочных данных. Для установки пакета Анализ данных в Excel сделайте следующее:

- в меню Сервис выберите команду Надстройки;

- в появившемся списке установите флажок Пакет анализа.

Для использования статистического пакета анализа данных необходим:

- указать курсором мыши на пункт меню Сервис и щелкнуть левой кнопкой мыши;
- в раскрывающемся списке выбрать команду Анализ данных (если команда Анализ данных отсутствует в меню Сервис, то необходимо установить в Excel пакет анализа данных);
- выбрать сроки Описательная статистика и нажать кнопку Ok
- в появившемся диалоговом окне указать входной интервал, то есть ввести ссылки на ячейки, содержащие анализируемые данные;
- указать выходной интервал, то есть ввести ссылку на ячейку, в которую будут выведены результаты анализа;
- в разделе Группирование переключатель установит в положение по столбцам или по срокам;
- установит флажок в поле Итоговая статистика и нажать Ок.

Задание для самостоятельной работы

1. В рабочей зоне производились замеры концентрации вредного вещества. Получен ряд мечен (в мг./м^3): 12, 16, 15, 14, 10, 20, 16, 14, 18, 14, 15, 17, 23, 16. Необходимо определить основные выборочные характеристики.

Лабораторная работа. Использование электронных таблиц Excel для построения распределений случайных величин и генерации случайных чисел

Распределение вероятностей – одно из центральных понятой теории вероятности и математической статистики. Определение распределения вероятности равносильно заданию вероятностей всех СВ, описывающих некоторое случайное событие. Распределение вероятностей некоторой СВ, возможные значения которой x_1, x_2, … x_n образуют выборку, задается указанием этих меченный и соответствующих им вероятностей p_1, p_2,… p_n... (p_n должны быть положительны и в сумме давать единицу).

В данной лабораторной работе будут рассмотрены и построены с помощью MS Excel наиболее распространенные распределения вероятности: биномиальное и нормальное.

2.1 Биномиальное распределение

Представляет собой распределение вероятностей числа наступлений некоторого события («удачи») в n повторных независимых испытаниях, если при каждом испытании вероятность наступления этого события равна p. При этом распределении разброс вариант (есть или нет события) является следствием влияния ряда независимых и случайных факторов.

Примером практического использования биномиального распределения может быть контроль качества партии фармакологического препарата. Здесь требуется подсчитать число изделий (упаковок), не соответствующих требованиям. Все причины, влияющие на качество препарата, принимаются одинаково вероятными и не зависящими один от другого. Сплошная проверка качества в этой ситуации не возможна, поскольку изделие, прошедшее испытание, не подлежит дальнейшему использованию. Поэтому для контроля из партии наудачу выбирают определенное количество образцов изделий (n). Эти образцы всестороннее проверяют и регистрируют число бракованных изделий (k). Теоретически число бракованных изделий может быть любым, вот 0 к n.

В Excel функция БИНОМРАСП применяется для вычисления вероятности в задачах с фиксированным числом тестов или испытаний, когда результатом дорогого испытания может быть только успех или неудача.

Функция использует следующие параметры:

БИНОМРАСП (число_успехов; число_испытаний; вероятностъ_успеха; интегральная), где

число_успехов — это количество успешных испытаний;

число_испытаний — это число независимых испытаний (число успехов и число испытаний должны быть целыми числами);

вероятность_ успеха — это вероятность успеха каждого испытания;

интегральный — это логическое значение, определяющее форму функции.

Если данный параметр имеет значение ИСТИНА (=1), то считается интегральная функция распределения (вероятность того, что число успешных испытаний не менее значения число_ успехов);

если этот параметр имеет значение ЛОЖЬ (=0), то вычисляется значение функции плотности распределения (вероятность того, что число успешных испытаний в точности равно значению аргумента число_ успехов).

Пример 1. Какова вероятность того, что трое из четырех новорожденных будут мальчиками?

Решение:

1. Устанавливаем табличный курсор в свободную ячейку, например в А1. Здесь должно оказаться значение искомой вероятности.

2. Для получения значения вероятности воспользуемся специальной функцией: нажимаем на панели инструментов кнопку Вставка функции (fx).

3. В появившемся диалоговом окне Мастер функций - шаг 1 из 2 слева в поле Категория указаны виды функций. Выбираем Статистическая. Дело в поле Функция выбираем функцию БИНОМРАСП и нажимаем на кнопку ОК.

Появляется диалоговое окно функции. В поле Число_s вводим с клавиатуры количество успешных испытаний (3). В поле Испытания вводим с клавиатуры общее количество испытаний (4). В рабочее поле Вероятность_s вводим с клавиатуры вероятность успеха в отдельном испытании (0,5). В поле Интегральный вводим с клавиатуры вид функции распределения — интегральная или весовая (0). Нажимаем на кнопку ОК.

В ячейке А1 появляется искомое значение вероятности р = 0,25. Ровно 3 мальчика из 4 новорожденных могут появится с вероятностью 0,25.

Если изменить формулировку условия задачи и выяснить вероятность того, что появится не более трех мальчиков, то в этом случае в рабочее поле Интегральный вводим 1 (вид функции распределения интегральный). Вероятность этого события будет равна 0,9375.

Задания для самостоятельной работы

1. Какова вероятность того, что восемь из десяти студентов, сдающих зачет, получат «незачет». (0,04)

2.2 Нормальное распределение

Нормальное распределение - это совокупность объектов, в которой крайние значения некоторого признака — наименьшее и наибольшее — появляются редко; чем ближе значение признака к математическому ожиданию, тем чаще оно встречается. Например, распределение студентов по их весу приближается к нормальному распределению. Это распределение имеет очень широкий круг приложений в статистике, включая проверку гипотез.

Диаграмма нормального распределения симметрична относительно точки а (математического ожидания). Медиана нормального распределения равна тоже а. При этом в точке а функция f(x) достигает своего максимума, который равен $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

В Excel для вычисления меченный нормального распределения используются функция НОРМРАСП, которая вычисляет значения вероятности нормальной функции распределения для указанного среднего и стандартного отклонения.

Функция имеет параметры:

НОРМРАСП (х; среднее; стандартное_откл; интегральная), где:

х — значения выборки, для которых строится распределение;

среднее — среднее арифметическое выборки;

стандартное_откл — стандартное отклонение распределения;

интегральный — логическое значение, определяющее форму функции. Если интегральная имеет значение ИСТИНА(1), то функция НОРМРАСП возвращает интегральную функцию распределения; если это аргумент имеет значение ЛОЖЬ (0), то вычисляет значение функция плотности распределения.

Если среднее = 0 и стандартное_откл = 1, то функция НОРМРАСП возвращает стандартное нормальное распределение.

Пример 2. Построить график нормальной функции распределения f(x) при x, меняющемся вот 19,8 до 28,8 с шагом 0,5, a=24,3 и σ =1,5.

Решение

1. В ячейку А1 вводим символ случайной величины х, а в ячейку В1 — символ функции плотности вероятности — f(x).

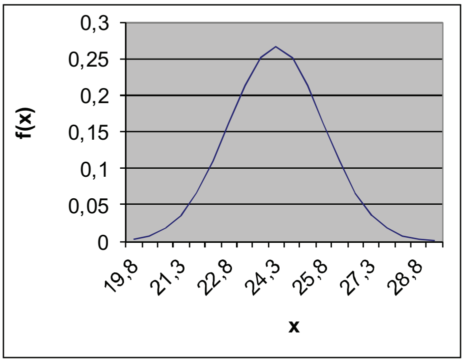
2. Вводим в диапазон А2:А21 значения х вот 19,8 до 28,8 с шагом 0,5. Для этого воспользуемся маркером автозаполнения: в ячейку А2 вводим левую границу диапазона (19,8), в ячейку А3 левую границу плюс шаг (20,3). Выделяем блок А2:А3. Затем за правый нижний угол протягиваем мышью к ячейки А21 (при нажатой левой кнопке мыши).

3. Устанавливаем табличный курсор в ячейку В2 и для получения значения вероятности воспользуемся специальной функцией — нажимаем на панели инструментов кнопку Вставка функции (fx). В появившемся диалоговом окне Мастер функций - шаг 1 из 2 слева в поле Категория указаны виды функций. Выбираем Статистическая. Дело в поле Функция выбираем функцию НОРМРАСП. Нажимаем на кнопку ОК.

4. Появляется диалоговое окно НОРМРАСП. В рабочее поле Х вводим адрес ячейки А2 щелчком мыши на этой ячейке. В рабочее поле Среднее вводим с клавиатуры значение математического ожидания (24,3). В рабочее поле Стандартное_откл вводим с клавиатуры значение среднеквадратического отклонения (1,5). В рабочее поле Интегральная вводим с клавиатуры вид функции распределения (0). Нажимаем на кнопку ОК.

5. В ячейке В2 появляется вероятность р = 0,002955. Указателем мыши за правый нижний угол табличного курсора протягиванием (при нажатой левой кнопке мыши) из ячейки В2

к B21 копируем функцию НОРМРАСП в диапазон B3:B21.



6. По полученным данным строим искомую диаграмму нормальной функции распределения. Щелчком указателя мыши на кнопке на панели инструментов вызываем Мастер диаграмм. В появившемся диалоговом окне выбираем тип диаграммы График, вид — левый верхний. После нажатия кнопки Далее указываем диапазон данных — B1:B21 (с помощью мыши). Проверяем, положение переключателя Ряды в: столбцах. Выбираем закладку Ряд и с помощью мыши вводим диапазон подписей осы X: A2:A21. Нажал на кнопку Далее, вводим названия осей X и У и нажимаем на кнопку Готово.

Рис. 1 График нормальной функции распределения

Получен приближенный график нормальной функции плотности распределения (см. рис.1).

Задания для самостоятельной работы

1. Построить график нормальной функции плотности распределения f(x) при x, меняющемся вот 20 до 40 с шагом 1 при σ =3.

2.3 Генерация случайных величин

Еще одним аспектом использования законов распределения вероятностей является генерация случайных величин. Бывают ситуации, когда необходим получить последовательность случайных чисел. Это, в частности, требуется для моделирования объектов, имеющих случайную природу, по известному распределению вероятностей.

Процедура генерации случайных величин используется для заполнения диапазона ячеек случайными числами, извлеченными из одного или нескольких распределений.

В MS Excel для генерации СВ используются функции из категории Математические:

СЛЧИС () – выводит на экран равномерно распределенные случайные числа больше или равные 0 и меньшие 1;

СЛУЧМЕЖДУ (ниж_граница; верх_граница) – выводит на экран случайное число, лежащее между произвольными заданными значениями.

В случае использования процедуры Генерация случайных чисел из пакета Анализа необходим заполнить следующие поля:

- число переменных вводится число столбцов меченный, которые необходим разместить в выходном диапазоне. Если это число не введено, то все столбцы в выходном диапазоне будут заполнены;

- число случайных чисел вводится число случайных меченный, которое необходим вывести для каждой переменной, если число случайных чисел не будет введено, то все сроки выходного диапазона будут заполнены;

- в поле распределение необходим выбрать тип распределения, которое следует использовать для генерации случайных переменных:

1. равномерное - характеризуется верхней и нижней границами. Переменные извлекаются с однои и тот же вероятностью для всех меченный интервала.

2. нормальное — характеризуется средним значением и стандартным отклонением. Обычно для этого распределения используют среднее значение 0 и стандартное отклонение 1.

3. биномиальное — характеризуется вероятностью успеха (величина p) для некоторого числа попыток. Например, можно сгенерировать случайные двухальтернативные переменные по числу попыток, сумма которых будет биномиальной случайной переменной;

4. дискретное — характеризуется значением СВ и соответствующим ему интервалом вероятности, диапазон должен состоять из двух столбцов: левого, содержащего значения, и правого, содержащего вероятности, связанные со значением в данной строке. Сумма вероятностей должна быть равна 1;

5. распределения Бернулли, Пуассона и Модельное.

- в поле случайное рассеивание вводится произвольное значение, для которого необходим генерировать случайные числа. Впоследствии можно снова использовать это значение для получения тех же самых случайных чисел.

- выходной диапазон вводится ссылка на левую верхнюю ячейку выходного диапазона. Размер выходного диапазона будет определен автоматически, и на экран будет выведено сообщение в случае возможного наложения выходного диапазона на исходные данные.

Рассмотрим пример.

Пример 3. Повар столовой может готовит 4 различных первых блюда (уха, щи, борщ, грибной суп). Необходим составить меню на месяц, так чтобы первые блюда чередовались в случайном порядке.

Решение

1. Пронумеруем первые блюда по порядку: 1 - уха, 2 - щи, 3 - борщ, 4 - грибной суп. Введем числа 1-4 в диапазон A2:A5 рабочей таблицы.

2. Укажем желаемую вероятность появления каждого первого блюда. Пусть все блюда будут равновероятны (p=1/4). Вводим число 0,25 в диапазон B2:B5.

3. В меню Сервис выбираем пункт Анализ данных и далее указываем срока Генерация случайных чисел. В появившемся диалоговом окне указываем Число переменных — 1, Число случайных чисел — 30 (количество дней в месяце). В поле Распределение указываем Дискретное (только натуральные числа). В поле Входной интервал меченный и вероятностей вводим (мышью) диапазон, содержащий номера супов и их вероятности. - A2:B5.

4. Указываем выходной диапазон и нажимаем ОК. В столбце С появляются случайные числа: 1, 2, 3, 4.

Задание для самостоятельной работы

1.Сформировать выборку из 10 случайных чисел, лежащих в диапазоне вот 0 до 1.

2.Сформировать выборку из 20 случайных чисел, лежащих в диапазоне вот 5 до 20.

3.Пусть спортсмену необходим составить график тренировок на 10 дней, так чтобы дистанция, пробегаемая каждый день, случайным образом менялась вот 5 до 10 км.

4.Составить расписание внеклассных мероприятий на неделю для случайного проведения: семинаров, интеллектуальных игр, КВН и спец. курса.

5.Составить расписание на месяц для случайной демонстрации на телевидении одного из четырех рекламных роликов турфирмы. Причем вероятность появления рекламного ролика №1 должна быть в два раза выше, чем остальных рекламных роликов.

Лабораторная работа. Использование электронных таблиц Excel для построения выборочных функций распределения

Рассмотренные в лабораторной работе 2 распределения вероятностей СВ опираются на знание закона распределения СВ. Для практических задач такое знание – редкость. Здесь закон распределения обычно неизвестен, или известен с точностью к некоторых неизвестных параметров. В частности, невозможно рассчитать точное значение соответствующих вероятностей, так как нельзя определить количество общих и благоприятных исходов. Поэтому вводится статистическое определение вероятности. По этому определению вероятность равна отношению числа испытаний, в которых событие произошло, к общему числу произведенных испытаний. Такая вероятность называется статистической частотой.

Связь между эмпирической функцией распределения и функцией распределения (теоретической функцией распределения) такая же, как связь между частотой события и его вероятностью.

Для построения выборочной функции распределения весь диапазон изменения случайной величины X (выборки) разбивают на ряд интервалов (карманов) одинаковой ширины. Число интервалов обычно выбирают не менее 3 и не более 15. Затем определяют число меченный случайной величины X, попавших в каждый интервал (абсолютная частота, частота интервалов).

Частота интервалов – число, показывающее сколько раз значения, относящиеся к каждому интервалу группировки, встречаются в выборке. Поделив эти числа на общее количество наблюдений (n), находят относительную частоту (частость) попадания случайной величины X в заданные интервалы.

По найденным относительным частотам строят гистограммы выборочных функций распределения. Гистограмма распределения частот – это графическое представление выборки, где по осы абсцисс (OX) отложены величины интервалов, а по осы ординат (ОУ) – величины частот, попадающих в данный классовый интервал. При увеличении к бесконечности размера выборки выборочные функции распределения превращаются в теоретические: гистограмма превращается в график плотности распределения.

Накопленная частота интервалов – это число, полученное последовательным суммированием частот в направлении вот первого интервала к последнему, к тому интервала включительно, для которого определяется накопленная частота.

В Excel для построения выборочных функций распределения используются специальная функция ЧАСТОТА и процедура Гистограмма из пакета анализа.

Функция ЧАСТОТА (массив_данных, двоичный_массив) вычисляет частоты появления случайной величины в интервалах меченный и выводит их как массив цифр, где

• массив_данных — это массив или ссылка на множество данных, для которых вычисляются частоты;

• двоичный_массив — это массив интервалов, по которым группируются значения выборки.

Процедура Гистограмма из Пакета анализа выводит результаты выборочного распределения в виде таблицы и графика. Параметры диалогового окна Гистограмма:

• Входной диапазон - диапазон исследуемых данных (выборка);

• Интервал карманов - диапазон ячеек или набор граничных мечен, определяющих выбранные интервалы (карманы). Эти значения должны быть введены в возрастающем порядке. Если диапазон карманов не был введен, то набор интервалов, равномерно распределенных между минимальным и максимальным значениями данных, будет создан автоматически.

• выходной диапазон предназначен для ввода ссылки на левую верхнюю ячейку выходного диапазона.

• переключатель Интегральный процент позволяет установит режим включения в гистограмму графика интегральных процентов.

• переключатель Вывод графика позволяет установит режим автоматического создания встроенной диаграммы на листе, содержащем выходной диапазон.

Пример 1. Построить эмпирическое распределение веса студентов в килограммах для следующей выборки: 64, 57, 63, 62, 58, 61, 63, 70, 60, 61, 65, 62, 62, 40, 64, 61, 59, 59, 63, 61.

Решение

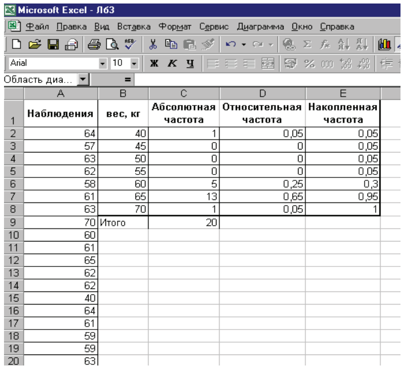
1. В ячейку A1 введите слово Наблюдения, а в диапазон A2:A21 — значения веса студентов (см. рис. 1).

2. В ячейку B1 введите названия интервалов Вес, кг. В диапазон B2:B8 введите граничные значения интервалов (40, 45, 50, 55, 60, 65, 70).

3. Введите заголовки создаваемой таблицы: в ячейки C1 — Абсолютные частоты, в ячейки D1 — Относительные частоты, в ячейки E1 — Накопленные частоты.(см. рис. 1).

4. С помощью функции Частота заполните столбец абсолютных частот, для этого выделите блок ячеек C2:C8. С панели инструментов Стандартная вызовите Мастер функций (кнопка fx). В появившемся диалоговом окне выберите категорию Статистические и функцию ЧАСТОТА, после чего нажмите кнопку ОК. Указателем мыши в рабочее поле Массив_данных введите диапазон данных наблюдений (A2:A8). В рабочее поле Двоичный_массив мышью введите диапазон интервалов (B2:B8). Слева на клавиатуре последовательно нажмите комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter. В столбце C должен появится массив абсолютных частот (см. рис.1).

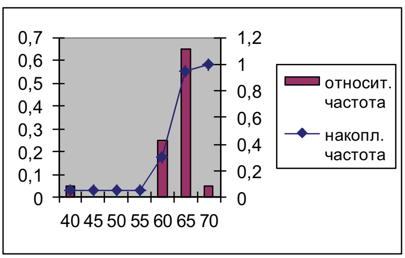
5. В ячейке C9 найдите общее количество наблюдений. Активизируйте ячейку C9, на панели инструментов Стандартная нажмите кнопку Автосумма. Убедитесь, что диапазон суммирования указан правильно и нажмите клавишу Enter.



Microsoft Excel - Лб3

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Диаграмма Окно Справка

	A	B	C	D	E
1	Наблюдения	вес, кг	Абсолютная частота	Относительная частота	Накопленная частота
2	64	40	1	0,05	0,05
3	57	45	0	0	0,05
4	63	50	0	0	0,05
5	62	55	0	0	0,05
6	58	60	5	0,25	0,3
7	61	65	13	0,65	0,95
8	63	70	1	0,05	1
9	70	Итого	20		
10	60				
11	61				
12	65				
13	62				
14	62				
15	40				
16	64				
17	61				
18	59				
19	59				
20	63				



6. Заполните столбец относительных частот. В ячейку введите формулу для вычисления относительной частоты: =C2/C9. Нажмите клавишу Enter. Протягиванием (за правый нижний угол при нажатой левой кнопке мыши) скопируйте введенную формулу в диапазон и получите массив относительных частот.

7. Заполните столбец накопленных частот. В ячейку D2 скопируйте значение относительной частоты из ячейки E2. В ячейку D3 введите формулу: =E2+D3. Нажмите клавишу Enter. Протягиванием (за правый нижний угол при нажатой левой кнопке мыши) скопируйте введенную формулу в диапазон D3:D8. Получим массив накопленных частот.

Постройте диаграмму относительных и накопленных частот. Щелчком указателя мыши по кнопке на панели инструментов вызовите Мастер диаграмм. В появившемся диалоговом окне выберите закладку Нестандартные и тип диаграммы

График/гистограмма. После редактирования диаграмма будет иметь такой вид, как на рисунке.

Задания для самостоятельной работы

1. Для данных из примера 1 построить выборочные функции распределения, воспользовавшись процедурой Гистограмма из пакета Анализа.

2. Построить выборочные функции распределения (относительные и накопленные частоты) для роста в см. 20 студентов: 181, 169, 178, 178, 171, 179, 172, 181, 179, 168, 174, 167, 169, 171, 179, 181, 181, 183, 172, 176.

3. Найдите распределение по абсолютным частотам для следующих результатов тестирования в баллах: 79, 85, 78, 85, 83, 81, 95, 88, 97, 85 (используйте границы интервалов 70, 80, 90).

4. Рассмотрим любой из критериев оценки качеств педагога-профессионала, например, «успешное решение задач обучения и воспитания». Ответ на этот вопрос анкеты типа «да», «нет» достаточно печек. Чтобы уменьшить относительную ошибку такого измерения, необходим увеличить число возможных ответов на конкретный критериальный вопрос. В табл. 1 представлены возможные варианты ответов.

Обозначим этот параметр через x. Тогда в процессе ответа на вопрос величина x примет дискретное значение x, принадлежащее определенному интервалу меченный. Поставим в соответствие каждому из ответов определенное числовое значение параметра x (см. табл. 1).

Табл. 1 Критериальный вопрос: успешное решение задач обучения и воспитания

п/п	Варианты ответов	
	Абсолютно неуспешно	,1
	Неуспешно	,2
	Успешно в очень малой степени	,3
	В определенной степени успешно, но еще много недостатков	,4
	В среднем успешно, но недостатки имеются	,5
	Успешно с некоторыми оговорками	,6
	Успешно, но хотелось бы улучшить результат	,7
	Достаточно успешно	,8
	Очень успешно	,9
0	Абсолютно успешно	

При проведении анкетирования в каждой отдельной анкете параметр x принимает случайное значение, но только в пределах числового интервала вот 0,1 до 1.

Тогда в результате измерений мы получаем неранжированный ряд случайных мечен.

Сгруппируйте полученную выборку, рассчитайте среднее значение выборки, стандартное отклонение, абсолютную и относительную частоту появления параметра, а также постройте график плотности вероятности f(x)=$\frac{W(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, где W(x) – относительная частота наступления события;

σ - стандартное отклонение; π =3,14.

Постройте график функции f(x) и сравните его с нормальным распределением Гаусса.

Лабораторная работа. Использование электронных таблиц Excel для обработки данных тестирования

В процессе обучения постоянно ощущается потребность в хорошо разработанных методах измерения уровня обученности в самых различных областях знаемый. Известно, что профессиональное тестирование было начато еще в 2200 году к нашей эры, когда служащие Китайского императора тестировались, чтобы определить их пригодность для императорской службы. По некоторым оценкам в 1986 году по крайней мэр 800 профессий лицензировались в Соединенных Штатах на основании тестирования (А. А. Захаров, А. В. Колпаков Современные математические методы объективных педагогических измерений)

Почти каждый педагог разрабатывает тестовые задания по своей дисциплине, но не каждый может грамотно обработать и интерпретировать результаты теста. Напротив, грамотное конструирование теста на основе знания теории тестирования позволит педагогу-исследователю создать инструмент, позволяющий провести объективное измерение знаемый, умений и навыков по данному курса с необходимой точностью.

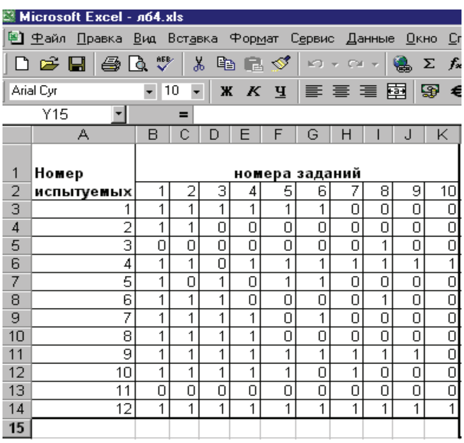
В настоящее время существуют два теоретических подхода к созданию тестов: классическая теория и современная теория IRT (Item Response Theory). Оба подхода базируются на последующей статистической обработке так называемого сырого балла (raw score), то есть балла, набранного в результате тестирования. Только после проведения многократных статистических обработок можно говорит в создании теста с устойчивыми параметрами качества (надежностью и валидностью).

Для обработки данных, полученных на этапе тестирования, воспользуемся пакетом MS Office 2000 и электронными таблицами MS Excel.

После сбора эмпирических данных необходим провести статистическую обработку, которую будем проводит на ЭВМ. Этап математико-статистической обработки разобьем на ряд шагов.

Шаг 1. Формирование матрицы тестовых результатов.

Результаты ответов учеников на задания тестов оцениваются в дихотомической шкале: за каждый правильный ответ учащийся получает один балл, а за неправильный ответ или за пропуск задания - нуль баллов (см. рис. 1).



Номер испытуемых	номера заданий									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
4	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
5	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
6	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
7	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
8	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
10	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Шаг 2. Преобразование матрицы тестовых результатов.

На втором шаге из матрицы тестовых результатов устраняются сроки и столбцы, состоящие только из нулей или только из единиц. В приведенном выше примере таких столбцов нет, а срок только две. Одна из их, нулевая строка соответствует ответам одиннадцатого испытуемого, который не смог выполнить правильно ни одного задания в тесте.

В этом случае вывод довольно однозначен: тест непригоден для оценки знаем такого ученика. Для выявления его уровня знаемый тест необходим облегчить, добавил несколько более легких заданный, которые, скорее всего, выполнит правильно большинство остальных испытуемых группы.

Столь же непригоден, но уже по другой причине, тест для оценки знаем двенадцатого ученика, который выполнил правильно все без исключения задания теста. Причина непригодности теста заключается в его излишней легкости, не позволяющий выявить истинный уровень подготовки двенадцатого ученика. Возможно, двенадцатый ученик знает много чего второго и в состоянии выполнить по контролируемым разделам содержания гораздо более трудные задания, которые просто не были включены в тест.

Таким образом, на данном шаге необходим удалить из матрицы данных 11 и 12 срока.

Шаг 3. Подсчет индивидуальных баллов испытуемых и количество правильных ответов на каждое задание теста.

Индивидуальный балл испытуемого получается суммированием всех единиц, полученных им за правильное выполнение задания теста. В Excel для суммирования данных по строке можно воспользоваться кнопкой Автосумма Σ на панели инструментов Стандартная. Для удобства полученные индивидуальные баллы (X_i) приводятся в последнем столбце матрицы результатов (см. рис. 2).

Число правильных ответов на задания теста (Y_i) также получается суммированием единиц, но уже расположенным по столбцам. (см. рис. 2)

Шаг 4. Упорядочение матрицы результатов.

Значения индивидуальных баллов необходим отсортировать по возрастанию, для этого в MS Excel:

1. выделим блок ячеек, содержащих номера испытуемых, матрицу результатов и индивидуальные баллы. Начинать выделение необходим со столбца X (индивидуальные баллы).

2. на панели инструментов Стандартная нажимаем на кнопку Сортировка по возрастанию. Матрица результатов примет вид, изображенный на рис. 3.

M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Номер испытуемых	номера заданий										Индивиду-альные баллы (X)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
5	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	4
6	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	4
8	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	4
7	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	5
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	6
10	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	6
4	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	9
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9
число правильных ответов (Y)	9	8	7	6	5	5	3	4	2	1	50

Рис. 2. Матрица с подсчетом итоговых сумм

число правильных ответов (Y)	9	8	7	6	5	5	3	4	2	1	50

Рис. 3 Упорядоченная матрица результатов

Шаг 5. Графическое представление данных.

Эмпирические результаты тестирования можно представит в виде полигона частот, гистограммы, сглаженной кривой или графика.

Для построения кривых упорядочим результаты эксперимента и подсчитаем частоту получения баллов (см. рис. 4-6).

Номер	Балл
1	6
2	2
3	1
4	9
5	4
6	4
7	5
8	4
9	9
10	6

Номер	Балл	Ранг
3	1	1
2	2	2
5	4	3
6	4	3
8	4	3
7	5	6
1	6	7
10	6	7
4	9	9
9	9	9

Балл	Частота
1	1
2	1
4	3
5	1
6	2
9	2

Рис. 4. Несгруппированный ряд Рис. 5. Ранжированный ряд

Рис. 6. Частотное распределение

Для расчета рейтинга (ранга) каждого учащегося по индивидуальным баллам необходим применить функцию РАНГ, которая возвращает ранг числа в списке чисел. Ранг числа - это его величина относительно вторых меченный в списке.

В MS Excel 2000 для вычисления ранга используется функция

РАНГ (число; ссылка; порядок), где

Число – адрес на ячейку, для которой определяется ранг.

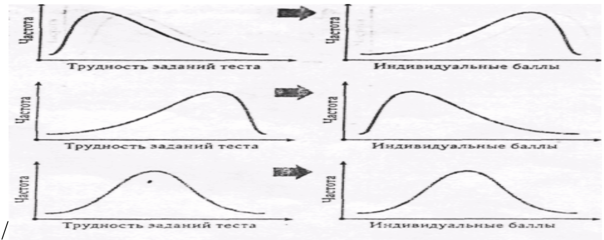
Ссылка - ссылка на массив индивидуальных баллов (выборка).

Порядок – число, определяющее способ упорядочения. Если порядок равен 0 (нулю), или опущен, то Excel определяет ранг числа так, как если бы ссылка была списком, отсортированным в порядке убывания. Если порядок - любое ненулевое число, то Excel определяет ранг числа так, как если бы ссылка была списком, отсортированным в порядке возрастания.

Примечание. Функция РАНГ присваивает повторяющимся числам одинаковый ранг. При этом наличие повторяющихся чисел влияет на ранг последующих чисел. Например, если в списке целых чисел дважды встречается число 10, имеющее ранг 5, число 11 будет иметь ранг 7 (ни одно из чисел не будет иметь ранг 6). По частотному распределению можно построить гистограмму.

Гистограмму можно построить и по индивидуальным баллам.

При разработке тестов необходим помнить в том, что кривая распределения индивидуальных баллов, получаемых по репрезентативной выборке, является следствием кривой распределения трудности заданный теста.



/

Рис. 7. Связь распределения индивидуальных баллов и трудности заданный теста

Для первого распределения слева характерно явное смещение в тесте в сторону легких заданный, что, несомненно, приведет к появлению большого числа завышенных баллов в репрезентативной выборки учеников. Большая часть учеников выполнит почти все задания теста.

Второй случай (слева) отражает существенное смещение в сторону трудных заданный при разработке теста, что не может не сказаться на снижении результатов учеников, поэтому распределение индивидуальных баллов имеет явным образом выраженный всплеск вблизи начала горизонтальной осы. Основная часть учеников выполнит незначительное число наиболее легких заданный теста.

В третьем случае задания теста обладают оптимальной трудностью, поскольку распределение имеет вид нормальной кривой. Отсюда автоматически возникает нормальность распределения индивидуальных баллов репрезентативной выборки учеников, что в свою очередь позволяет считать полученное распределение устойчивым по отношению к генеральной совокупности.

В профессионально разработанных нормативно-ориентированных тестах типичным является результат, когда приблизительно 70% учеников выполняют правильно вот 30 до 70% заданный теста. а наиболее часто встречается результат в 50%.

Шаг 6. Определение выборочных характеристик результатов.

На данном этапе необходим вычислить среднее значение, моду, медиану, дисперсию, стандартное отклонение выборки, ассиметрию и эксцесс (см. рис.10).

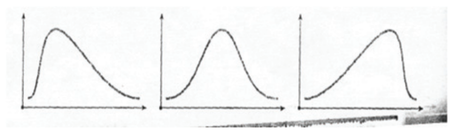
Степень отклонения распределения наблюдаемых частот выборки вот симметричного распределения, характерного для нормальной кривой, оценивается с помощью асимметрии. Наличие асимметрии легко установит визуально, анализируя полигон частот или гистограмму Более тщательный анализ можно провести с помощью обобщенных статистических характеристик, предназначенных для оценки величины асимметрии в распределении.

Функция СКОС MS Excel возвращает ассиметрию распределения.

СКОС (число 1; число 2), где число1 – ссылка на массив данных, содержащих индивидуальные баллы учеников.

При интерпретации полученного значения асимметриии 0,277 необходим обратить внимание на то, что величина ассиметрии получилась положительной и небольшой (см. рис. 8, 9).

Рис. 9. Кривые распределения с отрицательной, нулевой и положительной ассиметрией (слева направо) соответственно.



	A	L
1	Номер	Индивиду-
2	испытуемых	альные баллы
3	1	6
4	2	2
5	3	1
6	4	9
7	5	4
8	6	4
9	7	5
10	8	4
11	9	9
12	10	6
13	среднее	5
14	мода	4
15	медиана	4.5
16	дисперсия	6.889
17	ст. отклонение	2.625
18	ассиметрия	0.277
19	эксцесс	-0.4117

Рис. 8. Описательные характеристики выборки

Асимметрия распределения положительна, если основная часть меченный индивидуальных баллов лежит дело вот среднего значения, что обычно характерно для излишне легких тестов.

Асимметрия распределения баллов отрицательна, если большинство учеников получили оценки ниже среднего балла. Эффект отрицательной асимметрии встречается в излишне трудных тестах, не сбалансированных правильно по трудности при отборе заданный

В хорошо сбалансированном по трудности тесте, как уже отмечалось ранее, распределение баллов имеет вид нормальной кривой. Для нормального распределения характерная нулевая асимметрия, что вполне естественно, так как при полной симметрии каждое значение балла, меньшее среднего значения, уравновешивается вторым симметричным, большим чем среднее.

С помощью эксцесса можно получить представление в том, является ли функция распределения частот островершинной, средневершинной или плоской.

Для расчета данного параметра применим функцию ЭКСЦЕСС (число1; число2; …), где число1 – ссылка на массив данных, содержащих индивидуальные баллы учеников.

В том случае, когда распределение данных бимодально (имеет две моды), необходим говорит об эксцессе в окрестности каждой моды. Бимодальная конфигурация указывает на то, что по результатам выполнения теста выборка учеников разделилась на две группы. Одна группа справилась с большинством легких, а другая с большинством трудных заданный теста.

Лабораторная работа. Практическая работа в статистическом пакете STADIA версия 6.0

1. Ввод данных

Электронная таблица пакета Stadia представляет собой матрицу данных, в которой столбцы отвечают переменным, а сроки – измерениям меченный переменных. Элементы таблицы могут содержать как числовые, так и символьные значения, однако последние используются только лишь в информационных целях.

Чтобы ввести или изменить значение в ячейке необходим:

1.сделать эту ячейку активной - щелкнув по неи указателем мыши или используя клавиши управления курсором;

2.набрать новое значение с клавиатуры и нажать клавишу Enter для перепохода к следующей позиции.

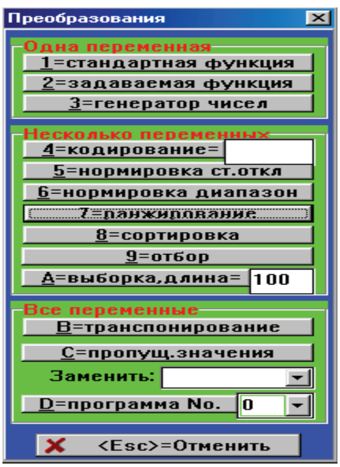
Для изменения наименований переменной выделите ее имя щелчком мыши и произведите изменение имени в поле редактирования.

Переход к следующей позиции таблицы осуществляется клавишами перемещения курсора, а смена страниц – клавишами PageDown и PageUp. Для быстрого перемещения по таблице используются линейки прокрутки внизу и дело экрана, управляемые мышью.

Удаление числа в текущей позиции производится клавишей Del.

В таблице также можно выделять отдельные фрагменты данных. Для этого подведите мышь к верхнему левому фрагменту данных, нажмите левую клавишу и, не отпуская ее, ведите мышь к правому нижнему края фрагмента. Далее выделенный фрагмент можно удалить, забрать в буфер или скопировать.

Для перемещения фрагмента нажмите правую кнопку мыши и, не отпуская ее, ведите указатель (вон изменит свою привычную форму на стрелку с листком) к нужной ячейки. Далее отпустите кнопку мыши и переменная будет вставленная в указанное место.



Максимально возможное количество элементов (чисел) в таблице определяется поставленной версией пакета Stadia и может доходит до 20000, а число столбцов – до 500.

Операция записи содержимого страницы осуществляется нажатием функциональной клавиши F4. Чтобы очистит содержимое страницы нажмите F5.

2. Преобразование данных

Блок преобразования данных содержит обширный набор алгебраических, тригонометрических, матричных и вторых операций, необходимых для преобразования исходных данных в электронной таблице к нужному вида (см. рис. 1).

Для вызова меню выбора преобразования нужно нажать клавишу F8 или выполнить пункт «Преобраз» в верхней экранной линейке команд.

Операции преобразования разбиты на три группы в зависимости вот того, изменяются ли при этом значения однои переменной, нескольких или всех переменных (матричные операции).

Операции над однои переменной

Операции над однои переменной производятся над данными в текущей ячейке (там, где находится указатель мыши). Результат преобразования записывается в ту же самую переменную.

Рис. 1 Меню выбора преобразования

1.стандартные алгебраические функции

Выполнение данного пункта приводит к появлению меню выбора стандартных операций. Данное меню содержит также поля для ввода меченный двух параметров a и b.

Задание 1. Найти логарифм 120. Ответ: 2,0791812

Задание 2. Возвести 82 в степень 3. Ответ: 551368

2.функции, задаваемые по вводимой формуле

Пункт «Задаваемая функция» приводит к появлению типичного бланка формул (см. рис. 2), в который необходим ввести новую формулу преобразований или же выбрать одну из имеющихся и нажать Enter.

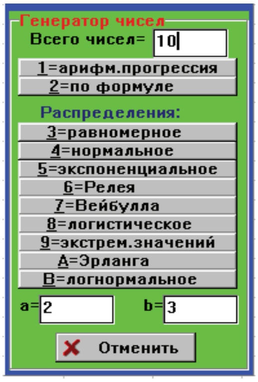


Рис. 2 Меню задаваемых функций

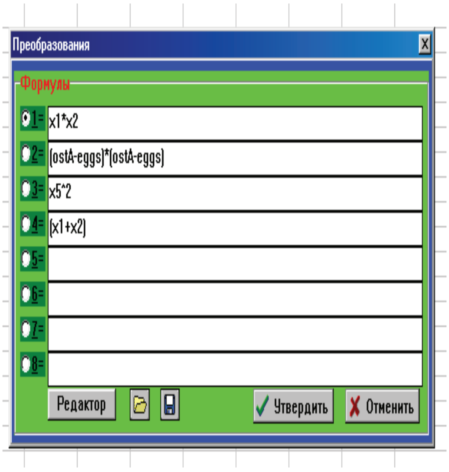


Рис. 3 Меню генератора чисел

Задание 3. Найти произведение 64 и 15. Ответ: 960

3.генератор чисел

Выполнение данного пункта приводит к появлению меню выбора типа генератора (см. рис. 3).

В этом меню предоставляется выбор из следующих возможностей:

1. генерация чисел по закону арифметической прогрессии (возрастающей или убывающей) a+b*i, i=0,n-1;

2. генерация чисел по задаваемой формуле вот аргумента X, где X изменяет свои значения по арифметической прогрессии a+b*i, i=0,n-l,

3. генераторы случайных чисел, распределенных по следующим законам:

- по равномерному закона в диапазоне вот a к b;

- по нормальному закону со средним значением a и стандартным отклонением b;

- по вторым законам распределения.

В верхнем поле ввода бланка необходим предварительно указать количество п генерируемых чисел, а в двух нижних полях ввести значения параметров a, b, если они нужны для выбираемого генератора.

Задание 4. Сгенерировать цепочку из 10 чисел вот 0 до 1 по арифметической прогрессии, по равномерному и нормальному закону распределения сгенерировать цепочку чисел из 20 элементов вот 1 до 25.

Операции над несколькими переменными

1.Кодирование меченный

Операция кодирования означает замену меченный выбранных переменных некоторым кодом, которым может быть как число, так и символьное обозначение (слово, текст). Такая замена производится только для тех меченный переменных, которые удовлетворяют вводимому логическому условию.

Перед выполнением этой операции в меню преобразований, расположенном дело вот кнопки кодирования, необходим ввести код, а после нажатия на кнопку «Кодирование» – указать подлежащие выборке переменные. После этого появляется типовой бланк формул, в который надо ввести логическое условие или же выбрать одно из имеющихся и нажать Enter. В качестве переменных в формулах условий можно использовать не только наименования переменных из электронной таблицы, но и обозначения x[i].

Задание 5. В сгенерированной цепочке из 10 меченный по арифметической прогрессии заменить все значения большие 6 на 1.

2. Нормировка меченный выбранных переменных в электронной таблице может производиться двумя способами:

- по диапазону меченный. Из каждого значения переменной вычитается минимальное значение и результат делится на диапазон мечен (разность между максимальным и минимальным значениями). При этом все значения становятся положительными и меньше единицы;

- по стандартному отклонению (нормализация или стандартизация). Из каждого значения переменной вычитается среднее значение и делится на стандартное отклонение данной переменной (полученные значения центрированы нулем).

После выбора операции нормировки в окне необходим указать подлежащие нормировке переменные.

3. Ранжирование осуществляет замену числовых меченный выбранных переменных на их ранги, то есть на целые числа, являющиеся порядковыми номерами этих меченный в соответствии с их величиной по возрастанию. Совпадающие значения заменяются средними рангами, которые могут принимать дробные значения.

4. Сортировка позволяет переупорядочить выборку из электронной таблицы по возрастанию меченный сортирующих переменных.

При выполнении этой операции появляется специальный экранный бланк, который включает следующие элементы: список переменных таблицы; список сортирующих переменных; список сортируемых переменных; кнопки переноса переменных из одного списка в другой и обратно; кнопку выбора всех переменных в качестве сортируемых; фонарики режима сортировки: по возрастанию меченный сортирующих переменных или по убыванию этих меченный.

Задание 6. Отранжируйте цепочку из 20 элементов вот 1 до 25, построенную по равномерному распределению и отсортируйте ее по убыванию меченный.

5. Отбор позволяет оставят в электронной таблице только то измерения указанных переменных, которые удовлетворяют вводимому логическому условию.

Задание 7. Отберите в цепочке из 20 элементов, построенной с помощью генератора чисел по нормальному закону распределения, все значения >5.

6. Выборка. При выполнении статистического анализа часто возникает следующая задача: имеется достаточно объемная выборка, то есть измеренные значения некоторой переменной. Однако исследователь не уверен, что эти значения получены достаточно случайным образом в ход корректно организованных измерений. В таких случаях для повышения статистической точности полезно для анализа из такой выборки отобрать случайным образом некоторое подмножество меченный (получить подвыборку).

Перед выполнением этой операции в меню преобразований необходим в расположенное дело поле ввести число отбираемых случайным образом измерений (размер подвыборки), а после нажатия на кнопку «Выборка» - указать подлежащие выборке переменные.

Матричные операции (операции над всемы переменными)

Эти операции производятся над всем содержимым электронной таблицы.

1. Транспонирование. В результате транспонирования матрицы данных в электронной таблице сроки становятся столбцами, а столбцы - сроками.

Задание 8. Транспонировать следующую матрицу:

x1	x2	x3
1	2	3
1	2	4
1	2	5

2.Анализ пропущенных меченный.

Даже в прекрасно организованных и проведенных экспериментах некоторые наблюдения могут быть зарегистрированы неверно или не зарегистрированы совсем. Например, экспериментальное животное может умереть, пациент - не придти на назначенный прием, очередной препарат - оказаться испорченным, а регистрирующий прибор - отказать.

Замена пропущенных меченный может быть произведена двумя возможными методами: замена каждого пропущенного значения средним значением, вычисленным для соответствующей переменной или замена регрессионными значениями.

Второй метод обеспечивает более корректную и дифференцированную замену. В соответствии с этим методом для каждой анализируемой переменной, содержащей пропущенные значения выбирается парная переменная по условию максимума коэффициента корреляции. Затем по парной переменной вычисляется линейная регрессия. Все пропущенные значения заменяются регрессионными. Однако если парная переменная также содержит пропущенное значение, то замена производится по методу средних.

Ввод пропущенных меченный в электронную таблицу производится посредством набора дорогого нечислового значения.

При выполнении данной операции в экранную страницу результатов [Rez] выдается таблица пропущенных меченный. По этой таблице можно визуально оценить характер распределения пропущенных элементов в матрице данных.

Задание 9. Ввести следующую матрицу:

x1	x2	x3	x4	
1		44-2		3
m	48	m	9	
2		51	0	7
8		m	44-5	
m	35	m	2	
5		33	2	m
5		32	1-3	
8-1			0	1

Произвести замену пропущенных меченный (m) по методу средних и по методу регрессии, сравнить полученные результаты.

Ответ:

Метод средних

1		44-2		3
4. 8333333	48	7.5	9	
2		51	0	7
8	34.571429		44-5	

4. 8333333 35 7.5 2

5 33 2 2

5 32 1-3

8-1 0 1

Метод регрессии

1 44-2 3

2. 1196388 48-0 .0214695 9

2 51 0 7

8 6.53 44-5

3.7890645 35 0.1562574 2

5 33 2 1.6703157

5 32 1-3

80 1

3. Визуализация данных (графические возможности)

Пакет STADIA имеет все современные и необходимые возможности доступного отображения графической информации.

Использование средств графического представления в системе STADIA возможно для:

а) исходных данных (см. рис.4);

б) результатов анализа.

Построение графиков данных производится по нажатию клавиши F6 (или соответствующего пункта из верхней командной сроки), а построение графика результатов анализа -

при выполнении конкретного статистического метода. В обоих случаях график выдается в отдельную экранную страницу.

При активизации экранной страницы с графиком в третьей инструментальной линейке экрана появляется ряд дополнительных кнопок общего назначения, посредством которых можно модифицировать уже построенный график (см. рис. 5):

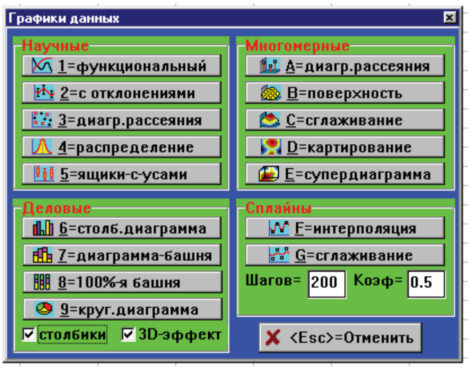


Рис. 4. Меню выбора типа графика данных

Рис. 5. Дополнительное меню для графиков

1. кнопка сохранения данных с графика в электронную таблицу

2. кнопка изменения толщины линий на графике (действует не на все типы графиков);

3. кнопка переключения: цветное/черно-белое изображение (полезно использовать перед выводом графика на принтер);

4. кнопка добавления подрисуночных надписей и легенд;

5. кнопка добавления/снятия координатной сетки;

Наряда с этим, отдельно для категорий научной графики и деловой графики контекстно появляются еще и дополнительные инструментальные кнопки:

6. кнопка изменения формы графика имеет четыре состояния, циклически изменяемые при каждом нажатии:

- график в виде линий;
- график в виде линий с маркерами точек;
- график в виде маркированных точек;
- график в виде столбиков;

7. кнопка номера зависимости Y=f(X) устанавливает одну из нескольких экспонируемых на графике зависимостей в качестве активной.

Доступные в пакете графические формы разбиты на 4 группы: научная графика, деловая графика, многомерная графика и сплайны.

Научная графика

включает преимущественно наиболее употребительные в научных и инженерных исследованиях формы двухмерных графиков:

1) функциональный график (см. рис. 5) отображает одну или несколько экспериментальных или теоретических зависимостей вида Y=f(X), представленных множеством пар мечен переменных X,Y. В бланке выбора переменной можно

указать и одну переменную, тогда по осы абсцисс будут расположены порядковые номера.

2) график с отклонениями, аналогичен функциональному, но в нем каждое значение Y интерпретируется, как некоторое среднее значение, и для него еще указывается третья переменная d, представляющая собой интервал ошибки или стандартное отклонение меченный;

3) в диаграмме рассеяния данные интерпретируются как множество пар мечен X,Y, каждая из которых представляет координаты некоторой точки в двумерном пространстве;

4) график распределения выборочных меченный представляет изображение однои или нескольких выборок (переменных) в порядке возрастания их меченный;

5) ящики с усами являются модификацией получившего распространение способа компактного совместного изображения многих выборок с указанием их средних меченный и стандартных отклонений.

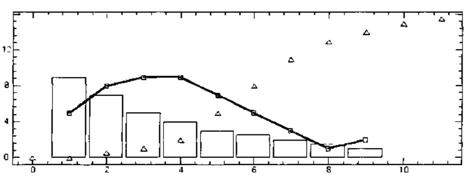


Рис. 6. Функциональный график в форме изображения: линиями, точками (диаграмма рассеяния) и столбиками (столбиковая диаграмма).

Деловая графика

Данный раздел объединяет наиболее употребительные формы изображения данных гуманитарного и экономического характера, представленных в виде матрицы со значениями нескольких переменных (столбцы), измеренных в ряда объектов (сроки). Из меню деловая графика можно выбрать следующие типы диаграмм:

1. столбиковая диаграмма обеспечивает последовательное линейное расположение меченный переменных в виде столбиков;

2. диаграмма-башня изображает значения переменных для каждого объекта одно над вторым в виде башни;

3. 100% -я башня представляет вариант диаграммы—башни, в которой каждая вертикальная колонка (значения переменных объекта) нормирована на 100%; такая диаграмма позволяет увидеть процентные сопоставимости каждой переменной в разных объектов;

4. круговая диаграмма изображает значения некоторой переменной в разных объектов в виде секторов круга.

Многомерная графика

объединяет следующие формы представления многомерных данных:

1. диаграмма рассеяния изображает множество триад меченный X,Y,Z, в виде точек в трехмерном пространстве;

2. поверхность представляет изображение поверхности в трехмерном| пространстве, заданной алгебраической формулой.

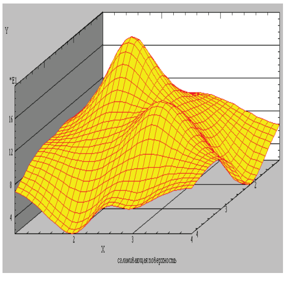
3. поверхность сглаживания представляет изображение поверхности в трехмерном пространстве, сглаживающую множество точек, заданных координатами X,Y,Z;

4. картирование аналогично сглаживанию, но результат представляется в виде двумерной карты, на которой высоты сглаживающей поверхности представлены в цветной или черно-белой тональной шкале, приведенной дело вот карты;

5. супердиаграмма предназначена для визуализации многомерных данных (более трех измерений). Супердиаграмма - это динамичное четырехмерное изображение (суперкуб), представляющий срез многомерного пространства.

Задание 10. Произвести сглаживание следующего распределения точек:

X	Y	Z
1	1	20
1	3	100
2	1	100
2	2	200
2	4	20
3	3	150
3	4	50
4	2	20



Сплайны

можно отнести к специальному разделу научной графики, где промежутки между экспериментальными точками сглаживаются/интерполируются посредством специальных кривых - сплайнов:

1. сплайн-интерполяция обеспечивает прохождение сплайнов непосредственно через заданные точки;

2. сплайн-сглаживание обеспечивает прохождение сплайнов на некотором удалении вот заданных точек с меньшими колебаниями.

Для графика сплайн-сглаживания в соседнем поле ввода дополнительно необходим указать значение коэффициента сглаживания. Этот коэффициент указывает среднее расстояние, на которое сглаживающий сплайн будет отстоять вот заданных точек. Чем ближе этот коэффициент к нулю, тем ближе к экспериментальным точкам будет проходит сплайн.

После нажатия клавиши сплайн-графика в бланке переменных необходим выбрать две переменные из электронной таблицы в качестве X и Y. В бланке выбора можно указать и одну переменную Y, тогда по осы абсцисс будут расположены порядковые числа.

4. Статистический анализ

Блок статистического анализа в пакете Stadia 6.0 содержит набор процедур, реализующих широко применяемые методы анализа данных и представления результатов.

Чтобы провести статистический анализ необходим выполнить ряд последовательных шагов:

1. Ввести данные в электронную таблицу (см. пункт 1. Ввод данных). Обрабатываемые данные должны соответствовать выбранному метода анализа.

2. Вызвать меню статистических методов (см. рис. 7) нажатием клавиши F9. В этом меню нажмите на кнопку нужного метода.

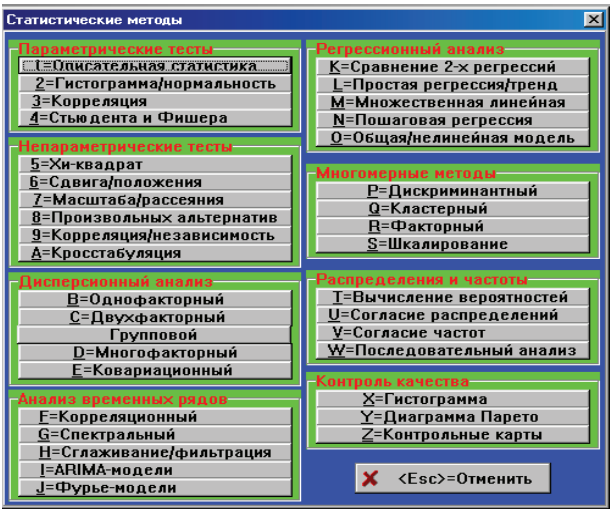


Рис. 7. Меню выбора статистического метода

3. Далее появляется блок выбора переменных, в котором надо определить подлежащие анализу переменные. Далее протекает диалог, характерный для выбранного Вами метода.

4. Выдача числовых результатов и их интерпретация их происходит в экранной странице [Rez]. Результаты анализа можно перенести в электронную таблицу через буфер обмена.

При проверке статистических гипотез STADIA выводит на экран вычисленное значение уровня значимости P и сообщениеподсказку в возможности принятия или непринятия нулевой гипотезы по условию $P>0.05$. (критический уровень 0.05 может быть изменен при настройке).

STADIA выводит не только вычисленное значение уровня значимости P, но и значение статистики критерия T, а также значения специальных параметров распределения (обычно называемых числом степеней свободы).

5. Результаты статистического анализа в виде графика появляются на экранной странице [Gri], i=1,8.

4.1 Параметрические критерии

В группу параметрических процедур входят методы для вычисления описательных статистик, построения графиков на нормальность распределения, проверка гипотез в принадлежности двух выборок однои совокупности. Эти методы основываются на предположении в том, что распределение выборок подчиняется нормальному (гауссовому) закона распределения.

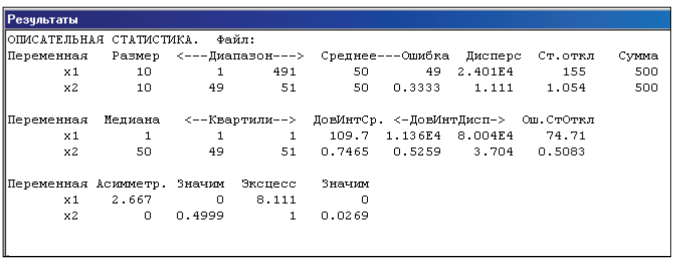
Описательная статистика

Данная процедура вычисляет общеупотребительные выборочные характеристики распределения. Размер выборки для данного метода должен быть больше 4 и меньше 100 (Demo-версия). После запуска процедуры в типовом бланке необходим выбрать для анализа одну, несколько или все переменные из электронной таблицы. Результатом выполнения будет выдача на экран следующих основных характеристик (см. рис. 8):

Далее по подтверждению может быть выдана дополнительная статистика (см. рис. 8):

1.медиана, квартили, размах доверительного интервала, границы доверительного интервала для дисперсии, ошибка стандартного отклонения

2.коэффициенты асимметрии и эксцесса с уровнями значимости Р. Нулевая гипотеза определена как отсутствие различий данного распределения вот нормального распределения по каждому из коэффициентов. Если Р>0,05 - нулевая гипотеза может быть принята.



```
Результаты
ОПИСАТЕЛЬНАЯ СТАТИСТИКА.  Файл:
Переменная   Размер  <---Диапазон--->  Среднее---Ошибка  Дисперс  Ст.откл   Сумма
       x1       10        1      491        50        49  2.401E4      155     500
       x2       10       49       51        50    0.3333    1.111    1.054     500

Переменная  Медиана   <--Квартили-->  ДовИнтСр. <-ДовИнтДисп->  Ош.СтОткл
       x1        1        1        1     109.7   1.136E4  8.004E4    74.71
       x2       50       49       51    0.7465    0.5259    3.704   0.5083

Переменная Асимметр. Значим   Эксцесс   Значим
       x1    2.667        0    8.111        0
       x2        0   0.4999        1   0.0269
```

Рис. 8. Результат вычисления показателей описательной статистики

Задание 11. Вычислить показатели описательной статистики и сделать выводы в нормальности данных распределений.

x1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 491

x2 49 51 49 51 49 51 49 51 49 51

Гистограмма и проверка на нормальность

Задание 12. Вычислить гистограмму и проверить выборку на нормальность для переменной x1 с построением результирующего графика

51 73 55 40 58 48 58 69 61 33

Для выполнения данного задания необходим ввести данные в таблицу и запустит процедуру 2=Гистограмма/нормальность в окне выбора Статистических методов. Далее выбрать переменную для анализа данных (x1) и нажать кнопку Утвердит.

Затем в бланке Гистограмма указать число интервалов и область определения гистограммы. В качестве числа интервалов программа Stadia показывает значение, вычисленное по формуле $\mathrm{int}(1.5 + 3.3 \cdot \log_{10}(N))$. Область определения (левая граница и правая граница) равна диапазону меченный. Если возникнет необходимость можно вручную с клавиатуры изменить число интервалов и область определения.

После нажатия на кнопку Утвердит для каждого интервала на экран выводятся следующие значения (см. рис. 10): левая граница интервала в исходных единицах и в единицах стандартного отклонения; число выборочных меченный, попавших в интервал (в числовом и процентном выражении); накопленное число выборочных меченный к текущего интервала включительно (в числовом и процентном выражении).

Затем проводится проверка нулевой гипотезы об отсутствии различий между выборочным и нормальным распределениями и выдача трех различных статистик:

- Колмогорова с уровнем значимости P;
- Омега-квадрат с уровнем значимости P;
- Хи-квадрат с уровнем значимости P.

При P>0,05 нулевая гипотеза может быть принята.

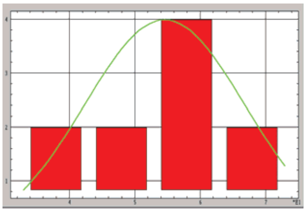
```
ГИСТОГРАММА И ТЕСТ НОРМАЛЬНОСТИ.  Файл:

     Х-лев.  Х-станд  Частота       %   Накопл.       %
       33   -1.766         2       20        2       20
       43  -0.9484         2       20        4       40
       53  -0.1308         4       40        8       80
       63   0.6868         2       20       10      100
       73    1.504
Колмогоров=0.1131, Значимость=2.322, степ.своб = 10
   Гипотеза 0: <Распределение не отличается от нормального>
Омега-квадрат=0.01733, Значимость=1.448, степ.своб = 10
   Гипотеза 0: <Распределение не отличается от нормального>
Хи-квадрат=1.198, Значимость=0.2737, степ.своб = 1
   Гипотеза 0: <Распределение не отличается от нормального>
```

Рис. 10. Гистограмма распределения и кривая нормального распределения

9. Результаты выполнения задания 12

Линейная корреляция

Коэффициент корреляции определяет степень, тесноту линейной связи между величинами и может принимать значения вот –1 к +1 — в зависимости вот тесноты и характера связи между данными СВ.



Задание 13. Вычислить значение коэффициента корреляции.

x1 51 73 55 40 58 48 58 69 61 33

x2 66 69 67 58 87 54 91 95 88 55

После запуска процедуры 3=Корреляция в окне выбора Статистических методов нужно выбрать для анализа несколько переменных из электронной таблицы и нажать кнопку Утвердит.

Процедура вычисляет (см. рис. 11):

- коэффициент корреляции Пирсона

статистику Стьюдента с n-2 степенями свободы

уровень значимости Р нулевой гипотезы;

- число степеней свободы.

```
ПАРАМЕТРИЧЕССКАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ.  Файл:
                             Переменные: x1, x2
Коэфф.корреляции=0.6933 T:=2.721, Значимость=0.0253, степ.своб = 8
   Гипотеза 1: <Коэффициент корреляции отличен от нуля>
```

Рис. 11. Выдача результатов по заданию 13

Задание 14. Вычислить значение коэффициента корреляции для данных тестирования из лабораторной работы №4:

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0	0

После запуска процедуры 3=Корреляция в окне выбора Статистических методов нужно выбрать для анализа ВСЕ переменные из электронной таблицы и нажать кнопку Утвердит. В окне электронный таблицы появятся результаты подсчета меченный коэффициента корреляции между результатами по отдельным заданиям теста. (см. рис. 12)

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
1	0,66666667	0,50917508	0,40824829	0,33333333	0,33333333	0,21821789	-0,40824829	0,16666667	0,111111
0,66666667	1	0,21821789	0,61237244	0	0	0,32732684	-0,10206207	0,25	0,166666
0,50917508	0,21821789	1	0,35634832	0,21821789	0,21821789	-0,047619048	-0,35634832	-0,21821789	-0,50917
0,40824829	0,61237244	0,35634832	1	0,40824829	0,40824829	0,53452248	-0,16666667	0,40824829	0,272165
0,33333333	0	0,21821789	0,40824829	1	0,6	0,65465367	0	0,5	0,333333
0,33333333	0	0,21821789	0,40824829	0,6	1	0,21821789	0	0,5	0,333333
0,21821789	0,32732684	-0,047619048	0,53452248	0,65465367	0,21821789	1	0,35634832	0,76376262	0,509175
-0,40824829	-0,10206207	-0,35634832	-0,16666667	0	0	0,35634832	1	0,61237244	0,408248
0,16666667	0,25	-0,21821789	0,40824829	0,5	0,5	0,76376262	0,61237244	1	0,666666
0,11111111	0,16666667	-0,50917508	0,27216553	0,33333333	0,33333333	0,50917508	0,40824829	0,66666667	1

Рис. 12. Матрица коэффициентов корреляции задания 14

Анализ меченный коэффициента корреляции позволяет выделить третье и восьмое задание теста, так как они отрицательно коррелируют со вторыми заданиями. Отрицательные значения коэффициента указывают на определенный просчет разработчиков в содержании этих заданный теста.

Критерий Стьюдента и Фишера

Критерий Фишера для двух выборок проверяет нулевую гипотезу в равенстве дисперсий двух выборок, а критерий Стьюдента - гипотезу в равенстве выборочных средних.

Задание 15. В двух группах учащихся - экспериментальной и контрольной - получены следующие результаты по учебному предмету (тестовые баллы; см. лекция 6):

Таблица данных

	x1	x2
1	12	13
2	14	9
3	13	11
4	16	10
5	11	7
6	9	6
7	13	8
8	15	10
9	15	11
10	18	
11	14	

Требуется выявить различия этих двух методов по критерию Стьюдента и Фишера.

После ввода исходных данных и запуска процедуры анализа в типовом бланке 4=Стьюдента и Фишера в окне выбора Статистических методов нужно выбрать для анализа две переменные (x1, x2). Результатом выполнения процедуры будет выдача на экран в окне Rez значения следующих статистик (см. рис. 13):

- статистика Фишера F;
- статистика Стьюдента T (в зависимости вот результатов сравнения дисперсий применяются различные формулы вычисления статистики);
- в случае равенства размеров выборок выдается также статистика Стьюдента, применимая для парных переменных.

```
Результаты
КРИТЕРИЙ ФИШЕРА И СТЬЮДЕНТА.   Файл:

                              Переменные: x1, x2
Статистика Фишера=1,267, Значимость=0,3753, степ.своб = 10,8
   Гипотеза 0: <Нет различий между выборочными дисперсиями>

Статистика Стьюдента=4,034, Значимость=0,001, степ.своб = 18
   Гипотеза 1: <Есть различия между выборочными средними>
```

Рис. 13. Выдача результатов по заданию 15

Задание 16. Проверить эффективность проведенной работы по формированию ориентации на художественно-эстетические ценности к началу эксперимента и после (тестовые баллы; см. лекция 6 и табл. ниже):

x1	x2
14	18
20	19
15	22
11	17
16	24
13	21
16	25
19	26
15	24
9	15

Рис. 13. Выдача результатов по заданию 16

```
Результаты

КРИТЕРИЙ ФИШЕРА И СТЬЮДЕНТА.   Файл:

                            Переменные: x1, x2
Статистика Фишера=0,7974, Значимость=0,3703, степ.своб = 9,9
   Гипотеза 0: <Нет различий между выборочными дисперсиями>

Статистика Стьюдента=3,989, Значимость=0,0011, степ.своб = 18
   Гипотеза 1: <Есть различия между выборочными средними>

Стьюдент для парных данных=6,678, Значимость=0,0002, степ.своб = 9
   Гипотеза 1: <Есть различия между выборочными средними>
```

Лабораторная работа. Проверка статистической гипотезы

Цель работы. Ознакомиться с базовыми понятиями проверки статистической гипотезы. Овладеть привычками применения критерия "хи-квадрат" и использование коэффициента конкордации для проверки статистической гипотезы в областях международных отношений.

Порядок выполнения работы

1. Предыдущая обработка теоретического материала.
2. Получение допуска к выполнению лабораторной работы.
3. Обработка типичной учебной задачи.
4. Выполнение индивидуальной задачи.
5. Оформление отчета.
6. Защита работы.

3. Короткие теоретические сведения

3.1. Понятие статистической гипотезы

Статистических гипотез всегда две и они взаимоисключающие. Одну из них называют нулевой гипотезой $Њ_0$, а другу – альтернативной гипотезой $Њ_1$, что всегда противоположная нулевой.

Для процедуры проверки статистических гипотез существует понятие уровня значимости результатов наблюдений. Теория вероятностей разделяет событию на три класса – обычные, редкие и исключению. При этом наблюдение исключительного события дает основания считать, что причина его наступления неслучайная, так как имеет место влияния некоторого фактора.

Метод выделения редких событий предлагает считать событие редкой, если ее вероятность не превышает 5 %, такое значение есть условным и зависит от поставленной задачи, в некоторых случаях редкими считают события с вероятностью не более 1 %, хотя самое использование пяты процентного уровня значимости принято почти во всех прикладных направлениях статистики, в том числе и в экономике.

Если наблюдения относятся к редким событиям (с вероятностью до 5 %), то такие наблюдения и результаты их обработки называют статистически значимыми. Если вероятность некоторого результата наблюдения в условиях основной гипотезы окажется очень малой, то чем она меньше, тем более основ отклонить $Њ_0$. С другой стороны, если состоится очень редкая событие то значимость такого наблюдения чрезвычайно высокая.

Статистический критерий - правило соответствующего которого принимается или отвергается та или другая гипотеза.

К сожалению, не существует единого, универсального критерия значимости - их приходится разрабатывать в теории и использовать на практике относительно особенностей конкретных задач.

3.2. Критерий "хи-квадрат" проверки статистической гипотезы

Существует довольно большой класс задач где случайные величины имеют больше двух допустимых значений. В таких задачах используется критерий χ^2 , за формулой:

$$\chi^2 = \sum^{k} \frac{(\mathbf{W_H} - \mathbf{W_E})^2}{\mathbf{W_H}}$$, где

W_H - теоретические данные, W_E - экспериментальные данные, k - количество интервалов на шкале. Сумма беритесь по всем допустимым значениям случайной величины.

Эта случайная величина была предложена видным статистиком Р.Фішером для проверки гипотез о соответствии выборочного распределения некоторому заданному закону.

Полученное значение χ^2 называют эмпирическим, т.е. полученным экспериментальным путем. Существуют статистические таблицы (Приложение 1) функции $F(\chi^{2)}$ с рассчитанными критическими значениями χ^2 для разных уровней значимости и числа степеней свободы v=(k-1). Именно разность между эмпирическим значением χ^2_e и табличным критическим значением $\chi^2_{кр}$ влияет и принятие (отклонение) гипотезы.

3.3. Использование коэффициента конкордации для проверки статистической гипотезы

Случайные величины, которые измеряются за ранговой шкалой Ord, как правило имеют больше чем два допустимых значения, т.е. припускается наличие нескольких фиксированных значений, упорядоченных по некоторому признаку, или свойства. В этих случаях говорят, что случайная величина может быть величиной “первого ранга”, “второго ранга” и т.п.

Существуют и разные, обоснованные и апробированные методы анализа таких величин. Отличие между ними только в способе расчета критерия, принятии или отбрасывании нулевой гипотезы.

Один из таких методов, которые чаще всего используется для анализа экспертных оценок, предложено М. Кендаллом и имеет название "показатель согласованности рангов" или коэффициент конкордации:

$W = S / S_{max}$, где S - сумма квадратов отклонений;

S_{max} $m^2 \bullet (n^3 - n) / 12$, где

m - количество экспертов; n - количество факторов;

Числовое значение коэффициента конкордации находится в пределах $0 \le W \le 1$. При $W = 1$ наблюдается максимальная согласованность, при $W=0$ согласованности нет.

4. Типичная учебная задача

Пример 2.1: проанализировать результаты голосования в одном избирательном округе, по четырем партиям (вместо названий используются первые 4 буквы латинского алфавита), данные наблюдений занесены в таблицу:

Партии	A	B	C	D	СУММА
Число голосов "ЗА" (тыс. лиц)	227	196	201	220	844

Величины теоретических значений W_H зависит от того, как будет сформулирована нулевая гипотеза. Как нулевая гипотеза принимается: Њ$_0$ ="все партии одинаково популярные, или $P_A=P_B=P_C=P_D=0.25$", как альтернативная: Њ$_1$="популярность партий существенно разная".

Согласно Њ$_0$ $W_H=844/4=211$, а экспериментальные данные W_E, будут принимать значение: 227, 196, 201, 220 соответственно.

За формулой обсчитывается значение χ 2-^{критерии}:

χ^2 = $(211\text{-}227)^{2/}211+(211\text{-}196)^{2/}211+(211\text{-}201)^{2/}211+(211\text{-}220)^{2/}211=3.14$

Табличное значение $\chi^2_{кр}$ для числа степеней свободы $v=(k-1)=(4-1)=3$ равняется 3.8, а эмпирическое значение $\chi^2_e=3.14$, соответственно $\chi^2_{кр}>\chi^2_э$. Это дает основания принять Њ$_0$ гипотезу о равной популярности партий.

Пример 2.2.: двенадцать экспертов (вместо фамилий экспертов используются первые 12 буквы латинского алфавита) ранжували шесть факторов (F1, F2, F3, F4, F5, F6), что определяют эффективность некоторой экономической системы, по принципу: найсприятливіший фактор равняется 6, ранги не повторяются. Как нулевая гипотеза принимается: Њ$_0$ ="мысли экспертов согласованы", как альтернативная: Њ$_1$="мысли экспертов существенно различаются".

Данные наблюдений занесены в таблицу:

Факторы / Эксперты	F1	F2	F3	F4	F5	6	СУММА
A	6	1	3	4	2		21
B	5	1	2	6	3		21
C	4	1	2	3	5		21
D	5	2	1	4	3		21
E	4	1	3	5	2		21
F	2	3	6	5	1		21
G	3	2	1	4	5		21
H	6	2	3	5	1		21
I	5	1	4	3	2		21
J	6	1	3	2	4		21
K	4	3	2	5	1		21
M	6	1	2	5	3		21
Сумма рангов	56	19	32	51	32	2	252
Суммарный ранг	2	6	4	3	4		
Отклонение суммы рангов от Δ=42	14	-23	-10	9	-10	0	
Квадраты отклонений	196	529	100	81	100	00	1406

По данным таблицы: полная сумма рангов составляет 252, что дает Δ=252/12=42 на фактор.

Для каждого из факторов наблюдается отклонение суммы рангов, указанных экспертами, от среднего значения.

Для общего случая при n факторов и m экспертов среднее значение суммы рангов для любого фактора определится выражением:

Δ 0.5(m((n+1).

Поскольку сумма этих отклонений всегда равняется нулю, для их усреднения используют квадраты их значений.

S =1406

S_{max} $m^2 \bullet (n^3 - n) / 12 = 12^2 \bullet (63-6) / 12 = 1750$

$W = S / S_{max}$ =1406/1750=0.8

Значение коэффициента конкордации для данного примера составляет близко 0.8, что явным образом достаточно для принятия $Ђ_0$ гипотезы о согласованности мыслей экспертов.

Индивидуальная задача.

1. Предложить и самостоятельно проанализировать систему в области международных отношений.
2. Определить основную и альтернативную гипотезы исследования, применяя критерий "хи-квадрат" провести их проверку по схеме типичной задачи (Пример 2.1.).
3. Разработать анкеты для определения эффективности предложенной системы и провести анкетирование (минимальное количество факторов-5, минимальное количество экспертов-10).

Обработать результаты анкетирования по схеме типичной задачи (Пример 2.2.).

Вопросы допуска к лабораторной работе

1. Охарактеризовать базовые понятия статистической гипотезы.
2. Охарактеризовать основные количественные показатели социальных систем.
3. Определить суть основной и альтернативной гипотез исследования.
4. Определить алгоритм окончательного выбора рабочей гипотезы.
5. Проанализировать принципы выделения редких событий.
6. Охарактеризовать понятие статистического критерия.
7. Охарактеризовать случайную величину χ^2.
8. Сравнить понятие теоретического и эмпирического значения χ^2.
9. Проанализировать метод проверки статистической гипотезы с помощью критерия "хи-квадрат".
10. Проанализировать метод проверки статистической гипотезы с помощью использования коэффициента конкордации.

Вопрос к защите лабораторной работы

11. Обосновать выбор системы для выполнения индивидуальной задачи.
12. Определить цель и задачу исследования проведенного в индивидуальной задаче.
13. Охарактеризовать предложенную систему за основными характеристиками.
14. Обосновать причинно-следственные связи у системы, которая исследовалась в индивидуальной задаче.
15. Обосновать выбор основной и альтернативной гипотезы собственного исследования.
16. Сравнить полученные при исследовании эмпирические значения χ^2 с теоретическими, сделать выводы.
17. Обосновать выбор факторов для определения эффективности системы, которая исследовалась в индивидуальной задаче.
18. Проанализировать основные принципы разработки и анализа анкет.
19. Охарактеризовать понятие - эксперт.
20. Проанализировать понятие ошибка первого и второго рода.

ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ

1. Гондюл В.П., Добржанська О.Л. Методические указания к выполнению лабораторных робот из нормативной дисциплины "Системный анализ". - К.:ІМВ, 2003.- 57 с.
2. Макарова Н. В., Трофимец В. Я. Статистика в Excel. - Г.: Финансы и статистика, 2002. - 368 с.
3. Циба В.Т. Математические основы социальных исследований: кваліметричний подход. - К.:МАУП, 2002. - 248 с.
4. Томенко М., Бадешко Л., Гребельник В. Гребельник О., Грицяк И., Міхеєнко Ю., Поджигатель О. Парахонський Б., Погарський Я., Томенко В. Азбука Украинской политики. - К.: Факел, - 2002. - 368.
5. Казиев В.М. Введение в системный анализ и моделирование. ИМОАС, 2001. - 115 с.
6. Корнилов Г.И. Основы теории систем и системного анализа. Кривой Рог.: Институт делового администрирования, 1996. - 76 с.

Лабораторная работа. Регрессионный анализ в системе международных отношений

Цель работы. Ознакомиться с основными составляющими регрессионного анализа. Овладеть привычками использования метода регрессионного анализа в исследованиях систем международных отношений.

2. Порядок выполнения работы

1. Предыдущая обработка теоретического материала.
2. Получение допуска к выполнению лабораторной работы.
3. Обработка типичной учебной задачи.
4. Выполнение индивидуальной задачи.
5. Оформление отчета.
6. Защита работы.

3. Короткие теоретические сведения

3.1 Регрессионный анализ

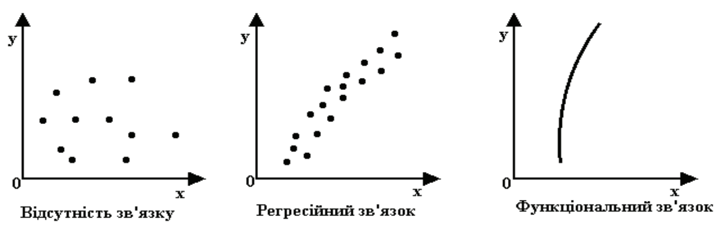
При изучении вероятностных зависимостей используется один из наиболее распространенных методов обработки данных - метод регрессионного анализа. Он состоит из определение общего вида уравнения регрессии, построению статистических оценок неизвестных параметров, которые входят у уравнение регрессии, и проверке статистических гипотез о регрессии.

Отличной особенностью уравнений, которые используются в этом случае, есть наличие двух видов сменных - зависимых и независимых. На практике часто используют модели, в которых есть одна зависимая сменная - функция и несколько независимых сменных аргументов:

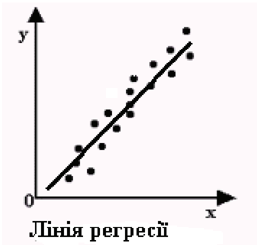
$Y=F(X_1,...X_i)$

Подол сменных на зависимую и независимые в регрессионном анализе всегда проводится на основе содержательных понятий.

В простейшем случае есть одна зависимая и одна независимая сменная, множественная регрессия имеет несколькими независимых сменных (регресорів). Общая вычислительная задача которую решают при анализе методом множественной регрессии, составляется в подгоне прямой линии к некоторому набору точек.



Линия регрессии строится так, чтобы минимизировать квадраты отклонений этой линии от точек, поэтому эту процедуру иногда называют оцениванием по методу наименьших квадратов.



Прямая линия на плоскости (в просторные двух измерений) задается уравнением:

Y=a•X +b.

где сменная Y может быть выраженная через угловой коэффициент a умноженный на сменную X плюс константа b. Угловой коэффициент a называют регрессионным коэффициентом, а константу b - свободным членом.

Выдвигается следующая гипотеза: случайная величина Y при фиксированном значении величины X распределена нормально с математическим ожиданием M_y = a• X + b и дисперсией D_y, что не зависит от X.

При наличии результатов наблюдений над парами X_i и Y_i предварительно исчисляются средние значения M_y и M_x, а потом высчитывается оценка регрессионного коэффициента a: $a = R_{xy} \bullet \frac{S_y}{S_x}$, где R_{xy} - коэффициент корреляции Sy, Sx - среднеквадратичные отклонения по X и Y, соответственно. За полученным регрессионным коэффициентом a высчитывается оценка свободного члена b: b = M_y - a M_X и проводится проверка значимости полученных результатов

Регрессионный коэффициент a и свободный член b можно найти и не обсчитывая математическое ожидание, среднеквадратичное отклонение и коэффициент корреляции. Для этого применяются формулы: $a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$;

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Основное концептуальное ограничение всех методов регрессионного анализа заключается в том, что они разрешают найти только числовые зависимости, а не причинные связи.

Типичная учебная задача

Пример 1.: построить регрессионное уравнение, если за величину X принимается "количество международных соглашений по охране окружающей среды ", а за величину Y - "количество аварий на предприятиях страны, которые притворили загрязнение окружающей среды (зарегистрированных за год)". Величина n=30 (количество проанализированных стран).

На основе данных наблюдений рассчитывается:

X / У	0	5	10	20	n_j
1	1	1	2	1	5
2	3	0	2	1	6
3	0	3	2	1	6
4	3	4	2	1	10
5	2	1	0	0	3
n_i	9	9	8	4	30

- математическое ожидание M_x=6.83
- математическое ожидание M_y=3.00
- среднеквадратичное отклонение S_x=6.39
- среднеквадратичное отклонение S_y=1.26
- коэффициент корреляции R_{xy}=-0.25
- $$a = R_{xy} \bullet \frac{S_y}{S_x} = -0.25 \bullet \frac{1.26}{6.39} = -0.05$$
- $b = M_y - a \bullet M_x = 3.00-(-0.05 \bullet 6.83)=3.33$

Соответственно регрессионное уравнение имеет вид: y=-0.05x+3.33

Пример 2.: построить регрессионное уравнение, если за величину X принимается "количество родившихся в Украине", а за величину Y - "количество зарегистрированных браков в Украине". Величина n=5 (количество проанализированных лет).

Данные наблюд. приведены в таблице: №	Год	Количество родившихся (тыс. лиц)	Количество браков (тис. лиц)	$X_i \bullet Y_i$	X_i^2
		X_i	Y_i		
1	1985	762,8	148,5	113275,8	581863,84
2	1995	495,9	123,4	61194,06	245916,81
3	1999	389,2	100,2	38997,84	151476,64
4	2000	385,1	80,1	30846,51	148302,01
5	2001	376,5	86	32379	141752,25
СУММА		2409,5	538,2	276693,21	1269311,55

По данным таблицы:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{5 \bullet 276693.21 - 2409.5 \bullet 538.2}{5 \bullet 1269311.55 - 2409.5^2} = 0.16$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{1269311.55 \bullet 538.2 - 2409.5 \bullet 276693.21}{5 \bullet 1269311.55 - 2409.5^2} = 30.42$$

Соответственно регрессионное уравнение имеет вид: $y=0.16x+30.42$

Для проверки идентичности формул рассчитывается:

математическое ожидание $M_x=481,9$

математическое ожидание $M_y=107,64$

среднеквадратичное отклонение $S_x=147,09$

среднеквадратичное отклонение $S_y=25,3$

коэффициент корреляции $R_{xy}=0,93$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}_{xy} \bullet \frac{\boldsymbol{S}_y}{\boldsymbol{S}_x} = 0.16$$

$b = M_y - a \bullet M_x = 30.42$

Соответственно регрессионное уравнение имеет тот же вид: $y=0.16x+30.42$

Индивидуальная задача.

1. Предложить и самостоятельно проанализировать систему в области международных отношений.
2. Используя методы регрессионного анализа найти регрессионное уравнение для исследуемых величин, исследование проводить по схеме типичной задачи (Пример 5.1- 5.2.).
3. Построить график полученной функции.

Вопросы допуска к лабораторной работе

1. Определить основные этапы регрессионного анализа.
2. Охарактеризовать понятие зависимой и независимой сменной.
3. Определить методы прогнозирования зависимой сменной по независимым сменным.

4. Охарактеризовать основные целые применения регрессионного анализа.
5. Охарактеризовать общее назначение множественной регрессии.
6. Охарактеризовать понятие математического ожидания случайной величины.
7. Охарактеризовать понятие среднеквадратичного отклонения случайной величины.
8. Определить роль коэффициента корреляции в регрессионном анализе.
9. Охарактеризовать регрессионный коэффициент и свободный член для регрессионного уравнения.

Вопросы к защите лабораторной работы

1. Обосновать выбор системы для выполнения индивидуальной задачи.
2. Определить цель и задачу исследования проведенного в индивидуальной задаче.
3. Охарактеризовать предложенную систему за основными характеристиками.
4. Обосновать причинно-следственные связи у системы, которая исследовалась в индивидуальной задаче.
5. Обосновать выбор переменных величин, которые избрано для исследования проведенного в индивидуальной задаче.
6. Охарактеризовать коэффициенты регрессионного уравнения полученные при выполнении индивидуальной задачи.
7. Проанализировать график функции, которая получена по результатам собственного исследования.

8. Определить концептуальные ограничения применения метода регрессионного анализа.

ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ

1. Гондюл В.П., Добржанська О.Л. Методические указания к выполнению лабораторных робот из нормативной дисциплины "Системный анализ". - К.:IMB, 2003.- 57 с.
2. Макарова Н. В., Трофимец В. Я. Статистика в Excel. - Г.: Финансы и статистика, 2002. - 368 с.
3. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере/ под ред. В.Э. Фигурнова - М.: Инфра-М, 1998. - 528с.
4. Циба В.Т. Математические основы социальных исследований: кваліметричний подход. - К.:МАУП, 2002. - 248 с.
5. Томенко М., Бадешко Л., Гребельник В. Гребельник О., Грицяк И., Міхеєнко Ю., Поджигатель О. Парахонський Б., Погарський Я., Томенко В. Азбука Украинской политики. - К.: Факел, - 2002. - 368.
6. Боровиков В. STATISTICA: искусство анализа данных на компьютере. Для профессионалов. - Спб.: Питер, 2001. - 656 с.
7. Казиев В.М. Введение в системный анализ и моделирование. ИМОАС, 2001. - 115 с.
8. Корнилов Г.И. Основы теории систем и системного анализа. Кривой Рог.: Институт делового администрирования, 1996. - 76 с.

Лабораторная работа. Использование электронных таблиц Excel и статистического пакета Stadia для проведения корреляционного анализа

Корреляционный анализ

Одна из наиболее распространенных задач статистического исследования состоит в изучении связи между выборками. Обычно связь между выборками носит не функциональный, а вероятностный (или стохастический) характер. В этом случае нет строгой, однозначной зависимости между величинами. При изучении стохастических зависимостей различают корреляцию и регрессию.

Корреляционный анализ состоит в определении степени связи между двумя случайными величинами X и Y. В качестве меры такой связи используется коэффициент корреляции. Коэффициент корреляции оценивается по выборке объема п связанных пар наблюдений (x_i, y_i) из совместной генеральной совокупности X и Y. Существует несколько типов коэффициентов корреляции, применение которых зависит вот измерения (способа шкалирования) величин X и Y.

Для оценки степени взаимосвязи величин X и Y, измеренных в количественных шкалах, используется коэффициент линейной корреляции (коэффициент Пирсона), предполагающий, что выборки X и Y распределены по нормальному закону.

Коэффициент корреляции — параметр, который характеризует степень линейной взаимосвязи между двумя выборками, рассчитывается по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum (y_i - \overline{y})^2}}$$

Коэффициент корреляции изменяется вот -1 (строгая обратная линейная зависимость) до 1 (строгая прямая пропорциональная зависимость). При значении 0 линейной зависимости между двумя выборками нет.

В MS Excel для вычисления парных коэффициентов линейной корреляции используется специальная функция КОРРЕЛ (массив1; массив2),

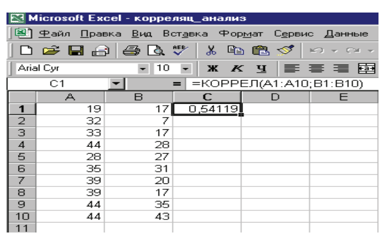
где массив1 – ссылка на диапазон ячеек первой выборки (X);

массив2 – ссылка на диапазон ячеек второй выборки (Y).

Пример 1.10 школьникам были даны тесты на наглядно-образное и вербальное мышление. Измерялось среднее время решения заданный теста в секундах. Исследователя интересует вопрос: существует ли взаимосвязь между временем решения этих задач? Переменная X - обозначает среднее время решения наглядно-образных, а переменная Y- среднее время решения вербальных заданный тестов (см. лекцию 7).

Таблица 1

№ испытуемых	X	Y
1	19	17



2	32	7
3	33	17
4	44	28
5	28	27
6	35	31
7	39	20
8	39	17
9	44	35
10	44	43

Рис. 1. Результаты вычисления коэффициента корреляции

Решение: Для выявления степени взаимосвязи, преждет всего, необходим ввести данные в таблицу MS Excel (см. табл. 1, рис. 1). Затем вычисляется значение коэффициента корреляции. Для этого курсор установите в ячейку С1. На панели инструментов нажмите кнопку Вставка функции (fx). В появившемся диалоговом окне Мастер функций выберите категорию Статистические и функцию КОРРЕЛ, после чего нажмите кнопку ОК. Указателем мыши введите диапазон данных выборки Х в поле массив1 (А1:А10). В поле массив2 введите диапазон данных выборки В (В1:В10). Нажмите кнопку ОК. В ячейке С1 появится значение коэффициента корреляции - 0,54119. Далее необходим по статистическим таблицам определить критические значения для полученного коэффициента корреляции (см. лекцию 7 Приложение 3). При нахождении критических меченный для вычисленного коэффициента линейной корреляции Пирсона число степеней свободы рассчитывается как k = n - 2 = 8.

$к_{крит}$=0,63 > 0,54 , следовательно, гипотеза H_1 отвергается и принимается гипотеза H_0, иными словами, связь между временем решения наглядно-образных и вербальных заданный теста не доказанная.

Задание для самостоятельной работы

1. Определите, имеется ли взаимосвязь между рождаемостью и смертностью (количество на 1000 человек) в Санкт-Петербурге:

Годы	Рождаемость	Смертность
1991	9,3	12,5
1992	7,4	13,5
1993	6,6	17,4
1994	7,1	17,2
1995	7,0	15,9
1996	6,6	14,2
1997	7,1	16
1998	8,2	13,4

Ответ: коэффициент корреляции равен -0,726

3. Рассчитайте коэффициент корреляции Пирсона из примера 1 и задания 1 в статистическом пакете Stadia (см. лаб. 5). Для этого выбираем процедуру 3=Корреляция в окне Статистические методы – Параметрические тесты. Совпадают ли полученные значения.

Множественная корреляция

При большом числе наблюдений, когда коэффициенты корреляции необходим последовательно вычислять для нескольких выборок, для удобства получаемые коэффициенты сводят в таблицы, называемые корреляционными матрицами.

Корреляционная матрица — это квадратная таблица, в которой на пересечении соответствующих сроки и столбца находится коэффициент корреляции между соответствующими параметрами.

В MS Excel для вычисления корреляционных матриц используется процедура Корреляция из пакета Анализ данных.. Процедура позволяет получить корреляционную матрицу, содержащую коэффициенты корреляции между различными параметрами.

Для реализации процедуры необходим:

1. выполнить команду Сервис - Анализ данных;

2. в появившемся списке Инструменты анализа выбрать срока Корреляция и нажать кнопку ОК;

3. в появившемся диалоговом окне указать Входной интервал, то есть ввести ссылку на ячейки, содержащие анализируемые данные. Входной интервал должен содержать не менее двух столбцов.

4. в разделе Группировка переключатель установит в соответствии с введенными данными (по столбцам или по срокам);

5. указать выходной интервал, то есть ввести ссылку на ячейку, с которой будут показаны результаты анализа. Размер

выходного диапазона будет определен автоматически, и на экран будет выведено сообщение в случае возможного наложения выходного диапазона на исходные данные. Нажать кнопку ОК.

В выходной диапазон будет выведена корреляционная матрица, в которой на пересечении каждых сроки и столбца находится коэффициент корреляции между соответствующими параметрами. Ячейки выходного диапазона, имеющие совпадающие координаты срок и столбцов, содержат значение 1, так как каждый столбец во входном диапазоне полностью коррелирует сам с собой

Рассматривается отдельно каждый коэффициент корреляции между соответствующими параметрами. Отметим, что хотя в результате будет получена треугольная матрица, корреляционная матрица симметрична. Подразумевается, что в пустых клетках в правой верхней половине таблицы находятся то же коэффициенты корреляции, что и в нижней левой (симметрично расположенные относительно диагонали).

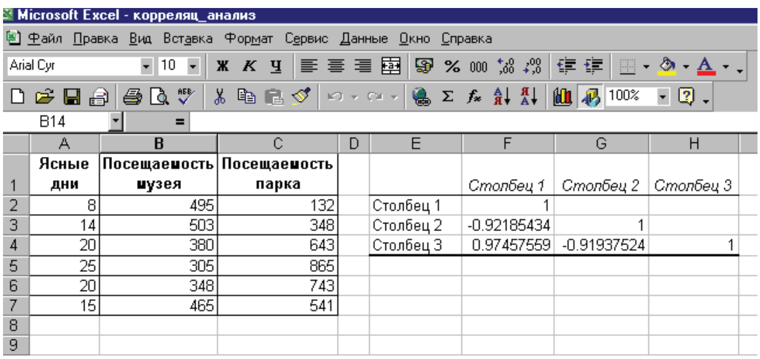
Пример 2. Имеются ежемесячные данные наблюдений за состоянием погоды и посещаемостью музеев и парков (см. табл. 2). Необходим определить, существует ли взаимосвязь между состоянием погоды и посещаемостью музеев и парков.

Таблица 2.

Число ясных дней	Количество посетителей музея	Количество посетителей парка
8	495	132
14	503	348

20	380	643
25	305	865
20	348	743
15	465	541

Решение. Для выполнения корреляционного анализа введите в диапазон A1:G3 исходные данные (рис. .2). Затем в меню Сервис выберите пункт Анализ данных и далее укажите срока Корреляция. В появившемся диалоговом окне укажите Входной интервал (A2:C7). Укажите, что данные рассматриваются по столбцам. Укажите выходной диапазон (E1) и нажмите кнопку ОК.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Ясные дни	Посещаемость музея	Посещаемость парка			Столбец 1	Столбец 2	Столбец 3
2	8	495	132		Столбец 1	1		
3	14	503	348		Столбец 2	-0.92185434	1	
4	20	380	643		Столбец 3	0.97457559	-0.91937524	1
5	25	305	865					
6	20	348	743					
7	15	465	541					
8								
9								

Рис. 2. Результаты вычисления корреляционной матрицы из примера 2

На рис. 2 видно, что корреляция между состоянием погоды и посещаемостью музея равна -0,92, а между состоянием погоды и посещаемостью парка - 0,97, между посещаемостью парка и музея -

-0,92.

Таким образом, в результате анализа выявлены зависимости: сильная степень обратной линейной взаимосвязи между посещаемостью музея и количеством солнечных дней и практически линейная (очень сильная прямая) связь между посещаемостью парка и состоянием погоды. Между посещаемостью музея и парка имеется сильная обратная взаимосвязь.

Задание для самостоятельной работы

1.10 менеджеров оценивались по методике экспертных оценок психологических характеристик личности руководителя (см. Психологические тесты. Т.2. Под ред. А.А. Карелина. - Г., ВЛАДОС, 1999, стр. 99). 15 экспертов производили оценку каждой психологической характеристики по пятибальной системе (см. табл. 3). Психолога интересует вопрос, в какой взаимосвязи находятся эти характеристики руководителя между собой.

Испытуемые п/п	тактичность	требовательность	критичность
1	70	18	36
2	60	17	29
3	70	22	40
4	46	10	12
5	58	16	31
6	69	18	32

7	32	9	13
8	62	18	35
9	46	15	30
10	62	22	36

Ответ: все три оцениваемые качества оказывают существенное влияние друг на вторая, иными словами, такие качества личности менеджера, как критичность, тактичность и требовательность, выступают единым комплексом и в очень большой степени необходимы для успешности его профессиональной работы (см. рис. 3).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	70	18	36			*Столбец 1*	*Столбец 2*	*Столбец 3*
2	60	17	29		Столбец 1	1		
3	70	22	40		Столбец 2	0.86376615	1	
4	46	10	12		Столбец 3	0.85224321	0.94868538	1
5	58	16	31					
6	69	18	32					
7	32	9	13					
8	62	18	35					
9	46	15	30					
10	62	22	36					
11								

Рис. 3. Результаты вычисления корреляционной матрицы из задания 1

2. Постройте корреляционную матрицу из примера 2 и задания 1 в статистическом пакете Stadia (см. лаб. 5). Для этого выбираем процедуру 3=Корреляция в окне Статистические методы – Параметрические тесты. Совпадают ли полученные значения.

Лабораторная работа Использование электронных таблиц Excel и статистического пакета Stadia для проведения дисперсионного анализа

Дисперсионный анализ предназначен для исследования задачи в действии на измеряемую случайную величину (отклик) одного или нескольких независимых факторов.

В MS Excel для проведения однофакторного дисперсионного анализа используется процедура Однофакторный дисперсионный анализ.

Для проведения дисперсионного анализа необходим:

1. ввести данные в таблицу, так чтобы в каждом столбце оказались данные, соответствующие одному значению исследуемого фактора, а столбцы располагались в порядке возрастания (убывания) величины исследуемого фактора;
2. выполнить команду Сервис > Анализ данных;
3. в появившемся диалоговом окне Анализ данных в списке Инструменты анализа выбрать процедуру Однофакторный дисперсионный анализ, затем нажать кнопку ОК;
4. в появившемся диалоговом окне задать Входной интервал, то есть ввести ссылку на диапазон анализируемых данных, содержащий все столбцы данных.
5. в разделе Группировка переключатель установит в положение по столбцам;
6. указать выходной интервал, то есть ввести ссылку на ячейку, с которой будут показаны результаты анализа. Размер выходного диапазона будет определен автоматически, и на

экран будет выведено сообщение в случае возможного наложения выходного диапазона на исходные данные. Нажать кнопку ОК.

Выходной диапазон будет включат в себя результаты дисперсионного анализа: средние, дисперсии, критерий Фишера и другие показатели. Влияние исследуемого фактора определяется по величине значимости критерия Фишера, которая находится в таблице Дисперсионный анализ на пересечении сроки Между группами и столбца Р-Значение. В случаях, когда Р-Значение < 0,05, критерий Фишера значим и влияние исследуемого фактора можно считать доказанным.

Кроме рассмотренной процедуры однофакторного дисперсионного анализа, для проведения двухфакторного дисперсионного анализа в пакете анализа реализованы процедуры Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями и Двухфакторный дисперсионный анализ без повторенный.

Пример 1. Необходим выявить, влияет ли расстояние вот центра города на степень заполняемости гостиниц. Пусть введены 3 уровня расстояний вот центра города: 1) до 3 км, 2) вот 3 до 5 км и 3) свыше 5 км. Данные заполняемости представлены в таблице 1.

Решение

Расстояние	Заполняемость					
До 3 км	92	98	89	97	90	94
Вот 3 до 5 км	90	86	84	91	83	82
Свыше 5 км	87	79	74	85	73	77

1. Исследуемые данные введите в рабочую таблицу Excel по столбцам: в столбец А — заполняемость

гостиниц в центре города, в столбец В — гостиниц, находящихся на расстоянии вот 3 до 5 км и т.д. (диапазон A1:C6).

2. Выполните команду Сервис > Анализ данных. В появившемся диалоговом окне Анализ данных в списке Инструменты анализа щелчком мыши выберите процедуру Однофакторный дисперсионный анализ. Нажмите кнопку ОК.

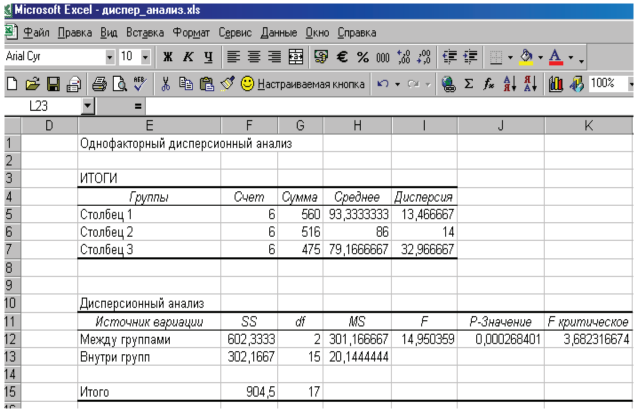
3. В появившемся диалоговом окне Однофакторный дисперсионный анализ в поле

4. Входной интервал задайте A1:C6.

5. В разделе Группировка переключатель установите в положение по столбцам.

6. Укажите выходной диапазон E1 и нажмите Ок.

В результате будет получена следующая таблица см. рис. 1. В таблице Дисперсионный анализ на пересечении сроки Между группами и столбца Р-значение находится величина 0,0002684 <0,05, следовательно, критерий Фишера значим и влияние фактора расстояния вот центра города на эффективность заполнения гостиниц доказанная статистически.



	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Однофакторный дисперсионный анализ						
2								
3		ИТОГИ						
4		*Группы*	*Счет*	*Сумма*	*Среднее*	*Дисперсия*		
5		Столбец 1	6	560	93,3333333	13,466667		
6		Столбец 2	6	516	86	14		
7		Столбец 3	6	475	79,1666667	32,966667		
8								
9								
10		Дисперсионный анализ						
11		*Источник вариации*	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-Значение*	*F критическое*
12		Между группами	602,3333	2	301,166667	14,950359	0,000268401	3,682316674
13		Внутри групп	302,1667	15	20,1444444			
14								
15		Итого	904,5	17				

Рис. 1. Результаты примера 1

Задание для самостоятельной работы

1. Определите влияет ли фактор образования на уровень зарплаты сотрудников фирмы на основании следующих данных (см. табл. 2).

Таблица 2.

Образование	Зарплата сотрудников					
Высшее	3200	3000	2600	2000	1900	1900
Среднее спец.	2600	2000	2000	1900	1800	1700
среднее	2000	2000	1900	1800	1700	1700

2. Исследователь сравнивает эффективность четырех разных методик обучения производственным навыкам. Для этой цели из всех выпускников ПТУ выбраны четыре группы учащихся, обучавшиеся, соответственно четырьмя разными методами. Эффективность методик оценивалась по сумме

обработанных учащимися деталей в течение одного дня (см. табл. 3). Проверить гипотезу об отсутствии влияния регулируемого фактора (методик обучения) на продуктивность деятельности ученика (Ермолаев О.Ю. Математическая статистика для психологов: Учебник, М., 2003. - стр. 192).

Таблица 3.

№ учащихся	1 группа	2 группа	3 группа	4 группа
1	60	75	60	95
2	80	66	80	85
3	75	85	65	100
4	80	80	60	80
5	85	70	86	
6	70	80	75	
7		90		

2. Проведите дисперсионный анализ для примера 1, задания 1 и задания 2 в статистическом пакете Stadia (см. лаб. 5). Для этого выбираем процедуру В=Однофакторный в окне Статистические методы – Дисперсионный анализ. При запросе метода выбираем 1=параметрический. Совпадают ли полученные значения.

Лабораторная работа. Средние величины и показатели вариации

При изучении социально-экономических представленный и процессов статистика встречается с разнообразной вариацией признаков, характеризующих отдельные единицы совокупности.

Все показатели вариации в зависимости вот характеризуемых ими особенностей можно разделить на три группы:

- Показатели центра распределения – средняя арифметическая, мода и медиана;
- Показатели степени вариации – вариационный размах, среднее линейное отклонение, дисперсия, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации;
- Показатели типа (формы) распределения – структурные характеристики, показатели асимметрии и эксцесса.

1. Показатели центра распределения.

Важнейшей характеристикой центра распределения является средняя арифметическая ( ). При вычислении по данным ранжированного вариационного ряда применяется формула средней взвешенной:

В отличие вот средней арифметической, рассчитываемой на основе использования всех вариантов меченный признака, такие структурные средние, как мода, медиана, квартили, децили и т.д., характеризуют величину варианта, занимающего определенное положение в ранжированном вариационном ряда.

Мода распределения (   ) - значение изучаемого признака, повторяющееся с наибольшей частотой.

Медиана (   ) – величина изучаемого признака, которая находится в середине упорядоченного вариационного ряда.

Моду и медиану в интервальном ряда распределения можно определить графически. Мода определяется по гистограмме распределения, а медиана - по кумуляте.

Методика определения квартилей (   ) и децилей (   ) аналогична методике исчисления медианы.

Формулы расчета первого и третьего квартилей (меченный признака, делящих ранжированную совокупность на 4 равновеликие части):

Для расчета децилей (меченный признака, делящих совокупность на 10 равных частей) используют следующие формулы:

2. Показатели степени вариации

Средняя величина дает обобщенную характеристику всеи совокупности единиц изучаемого явления. Но для вариационного ряда важно изучать степень сплоченности всех отдельных меченный признака вокруг его среднего значения или степень колеблемости. Для этого в теории статистики используются показатели вариации, которые делятся на две группы: абсолютные и относительные.

Абсолютные показатели вариации:

а) вариационный размах ( ) – разность между наибольшим и наименьшим значениями варьирующего признака.

б) среднее линейное отклонение ( ) – это отклонение отдельных вариантов единиц совокупности вот среднего значения.

в) дисперсия ( ) – средний квадрат отклонений индивидуальных мечен признака вот их средней величины.

Имеется упрощенная формула расчета дисперсии, исходящая из ее свойств:

г) среднее квадратическое отклонение ( ) – показывает, насколько в среднем отклоняются конкретные варианты признака вот среднего значения.

Относительные показатели вариационного ряда:

а) коэффициент осцилляции ( ):

б) линейный коэффициент вариации ( ):

в) коэффициент вариации:

В целях сравнения вариации в различных рядах вычисляется относительный квартильный показатель вариации по формуле:

Когда при изучении вариационного ряда возникает необходимость дать относительную характеристику степени вариации ряда и имеются уже предварительно вычисленные квартили и децили, то можно вычислить коэффициент дифференциации.

Квартильный коэффициент дифференциации:

Децильный коэффициент дифференциации:

3. Показатели формы распределения

Для обобщающей характеристики особенностей формы распределения применяются кривые распределения. Они бывают симметричными и асимметричными.

При сравнительном изучении асимметрии нескольких распределений с разными единицами измерения вычисляется относительный показатель асимметрии ( ):

Его величина может быть положительной и отрицательной. В первом случае речь идет в правосторонней асимметрии, а во втором - в левосторонней.

Коэффициент асимметрии равен отношению центрального 3-момента го порядка к среднему квадратическому отклонению в кубе:

Если , то асимметрия правосторонняя, а если , то асимметрия левосторонняя. Чем численность ближе к 0, тем асимметрия меньше. Принято считать, что асимметрия выше 0,5 (независим вот знака) считается значительной; если она меньше 0,25, то незначительной.

Пример

Итак, мы взяли произвольные 50 крупнейших компаний Сибири по объему реализации продукции в 2007 году. Составим план, по которому будем производить вычисления необходимых показателей.

План.

1. Разбить компании на несколько групп и найти ширину интервалов групп.

2. Найти показатели центра распределения:

2.1 Среднюю арифметическую (простым и способом моментов).

2.2 Моду, медиану и изобразить их графически.

2.3 Квартили и децили.

3. Вычислить показатели степени вариации:

3.1. Абсолютные показатели.

3.2. Относительные показатели.

3.3. Определить коэффициенты дифференциации.

4. Найти показатель формы распределения или асимметрии. Определить левостороннюю или правостороннюю асимметрию и сделать вывод в ее значительности

Исходные данные:

Компания	Объем реализации в 2007 г., млн. руб.
1. Русский холод	2 447, 1
2. Горводоканал (Новосибирск)	2 464, 5
3. Сиб-Экометалл	2 484, 0
4. Геба	2 524, 2
5. Нордком	2 529, 3
6. Красноярский жилищно-коммунальный комплекс	2 558, 6
7. Бийскэнерго	2 562, 4

8.	Алтекс Плюс	2 566, 5
9.	ХК «Эвалар»	2 584, 9
10.	Мтннеско Новосибирск	2 592, 1
11.	Поликарбон	2 600, 2
12.	Новосибирский жировой комбинат	2 616, 2
13.	Востсибуголь	2 653, 7
14.	ИлимСибЛес	2 656, 3
15.	Мельник	2 677, 0
16.	Кедр	2 683, 3
17.	Глиноземсервис	2 700, 8
18.	Сибпромснаб	2 767, 8
19.	ПКФ «Крепость»	2 786, 6
20.	Белавтосиб	2 786, 7
21.	Домостроительная корпорация «Стройбетон»	2 804, 1
22.	ПАВА	2 858, 1
23.	Аэропорт Толмачево	2 867, 1
24.	Кондитерский дом «Восток»	2 874, 2
25.	Омскметаллоптторг	2 885, 5
26.	Кузбасская топливная компания	2 886, 2
27.	Алтайский шинный комбинат	2 888, 9
28.	Завод «Сибгазстройдеталь»	2 901, 8
29.	Новоенисейский лесохимический комплекс	2 902, 8
30.	Ангарский завод полимеров	2 916, 2

31. Автоцентр «КамАЗ» (Кемеровоо)	2 956, 3
32. Церера	2 995, 0
33. Омская региональная компания по реализации газа	2 999, 8
34. Гурьевский металлургический завод	3 050, 6
35. Восточная транснациональная компания	3 053, 2
36. Сервико	3 082, 8
37. АМИК Кэш энд Керри	3 086, 5
38. Сталь НК	3 093, 6
39. НЭТА	3 149, 9
40. Бурятнефтепродукт	3 151, 1
41. Алкйскзернопродукт им. С. Н. Старовойтова	3 183, 3
42. Русский продукт	3 198, 7
43. Усольехимпром	3 238, 9
44. Новосибирский электродный завод	3 241, 5
45. Алтайэнерго	3 274, 8
46. ТГК-11	3 276, 7
47. Автоленд-Сибирь	3 277, 5
48. ПродГамма	3 292, 1
49. Юргинский машиностроительный завод	3 341, 0
50. Труд	3 341,8

Задача 1. По населенному пункта имеются данные в реализации яиц в магазинах по месяцам 2001-2004 гг. (млн. шт.):

Месяц	200 1	2002	2003	2004
Январь	12,4	13,8	18,0	24,6
Февраль	11,5	12,0	15,1	18,9
Март	12,1	14,6	16,5	17,9
Апрель	45,8	44,9	47,7	50,8
Имей	58,1	62,3	61,5	65,3
Июнь	60,4	62,4	65,7	69,5
Июль	45,7	48,9	49,0	58,2
Август	26,5	32,7	35,9	43,2
Сентябрь	15,3	18,5	20,7	25,0
Октябрь	15,4	17,2	19,8	28,9
Ноябрь	16,5	18,5	24,4	27,6
Декабрь	15,8	17,0	22,3	25,4

Для изучения общей тенденции реализации данной продукции:

1) нанесите месячные уровни на линейный график;

2) произведите сглаживание месячных уровней с применением двенадцатичленной скользящей средней;

3) нанесите полученные сглаженные уровни на график с исходными (эмпирическими) уровнями;

4) сделайте выводы в характере общей тенденции изучаемого явления.

Решение.

График реализации яиц:

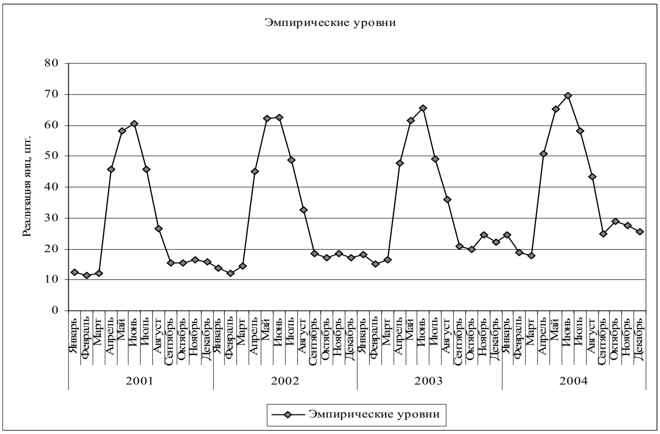


Рис. 1.1. Динамика реализации яиц в 2001-2004 гг.

Для определения скользящей средней формируются укрупненные интервалы, состоящие из одинакового числа уровней. Каждый последующий интервал получают, постепенно сдвигаясь вот начального уровня на один уровень.

Произведем сглаживание уровней с применением двенадцатичленной скользящей средней.

Для ряда динамики, отображающего развитие явления по месяцам скользящие средние составляются из двенадцати уровней.

$$\overline{y_1} = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_{12}}{12}; \overline{y_2} = \frac{y_2 + y_3 + ... + y_{13}}{13} \quad и\ т.д.$$

В нашем случае исчисляется 37 скользящих средних.

Для четного числа уровней каждое значение скользящей средней приходится на промежуток между двумя смежными кварталами. Так, первая скользящая средняя записывается между 6 и 7 месяцами, вторая - между 7 и 8-ым. Для определения сглаженных уровней определяется серединное значение между первой и второй скользящей средними:

Период		Уровни ряда	Скользящие средние	Сглаженные уровни с центрированием
2001	Январь	12,4		
	Февраль	11,5		
	Март	12,1		
	Апрель	45,8		
	Имей	58,1		
	Июнь	60,4	335,5/12 = 133,5	
	Июль	45,7	336,9/12 = 135,2	28,0
	Август	26,5	337,4/12 = 135,3	28,1
	Сентябрь	15,3	339,9/12 = 135,5	28,2
	Октябрь	15,4	339/12 = 137,1	28,3
	Ноябрь	16,5	342,2/12 = 137,5	28,4
	Декабрь	15,8	345,2/12 = 137,7	28,7
2002	Январь	13,8	348,4/12 = 138,0	28,9
	Февраль	12	354,6/12 = 137,6	29,3
	Март	14,6	357,8/12 = 137,8	29,7
	Апрель	44,9	359,6/12 = 138,5	29,9

	Имей	62,3	361,6/12 = 140,0	30,1
	Июнь	62,4	362,8/12 = 140,2	30,2
	Июль	48,9	367/12 = 141,4	30,4
	Август	32,7	370,1/12 = 142,5	30,7
	Сентябрь	18,5	372/12 = 143,5	30,9
	Октябрь	17,2	374,8/12 = 143,7	31,1
	Ноябрь	18,5	374/12 = 145,3	31,2
	Декабрь	17	377,3/12 = 147,2	31,3
	Январь	18		31,4
	Февраль	15,1	377,4/12 = 149,7	31,6
	Март	16,5	380,6/12 = 151,4	31,8
	Апрель	47,7	382,8/12 = 152,9	32,0
	Имей	61,5	385,4/12 = 154,0	32,4
	Июнь	65,7	391,3/12 = 154,4	32,8
2003	Июль	49	396,6/12 = 155,6	33,3
	Август	35,9	403,2/12 = 156,6	33,8
	Сентябрь	20,7	407/12 = 158,3	34,0
	Октябрь	19,8	408,4/12 = 160,0	34,2
	Ноябрь	24,4	411,5/12 = 160,8	34,5
	Декабрь	22,3	415,3/12 = 161,6	34,8
	Январь	24,6	419,1/12 = 162,5	35,3
2004	Февраль	18,9	428,3/12 = 163,3	36,0
	Март	17,9	435,6/12 = 164,1	36,5

	Апрель	50,8	439,9/12 = 165,7	37,0
	Имей	65,3	449/12 = 167,5	37,6
	Июнь	69,5	452,2/12 = 169,7	37,8
	Июль	58,2	455,3/12 = 171,7	
	Август	43,2		
	Сентябр ь	25		
	Октябрь	28,9		
	Ноябрь	27,6		
	Декабрь	25,4		

Нанесем полученные сглаженные уровни на график с исходными (эмпирическими) уровнями:

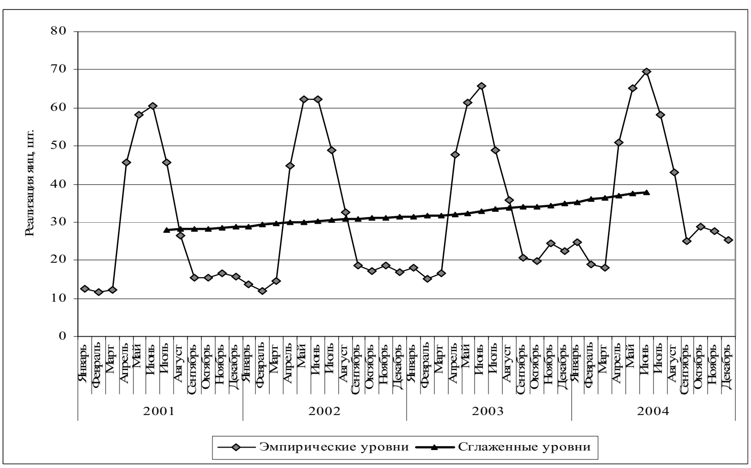


Рис.1.2. Эмпирические и сглаженные уровни реализации

Таким образом, на рис 1.2. видная общая тенденция роста объемов реализации сахара.

Задача 2. Производство картофеля в регионе за 1998-2004 гг. характеризуется следующими данными, тыс. т:

1 998	1 999	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004
1 35,9	1 33,5	1 33,0	1 30,6	1 29,5	1 28,0	1 27,1

Для изучения общей тенденции динамики производства картофеля:

1) изобразите ряд динамики в виде линейного графика;

2) произведите аналитическое выравнивание ряда по прямой и выразите общую тенденцию роста математическим уравнением;

3) определите выравненные (теоретические) уровни ряда динамики и нанесите их на график рядом с исходными (эмпирическими) данными;

4) рассчитайте прогнозные значения производства картофеля в регионе на 2005 и 2006 гг.

Решение.

Изобразим ряд динамики в виде линейного графика:

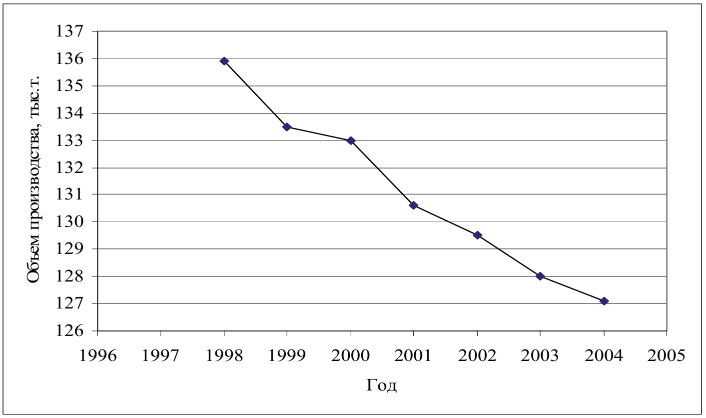


Рис.2.1. Динамика производства картофеля

Произведем аналитическое выравнивание ряда по прямой. Для этого определим параметры a и b уравнения $y = a_0 + a_1x$:

Для их опрделения решим систему нормальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \sum y &= a_0 n + a_1 \sum x \\ \sum yx &= a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 \end{aligned}\right\}$$

Годы	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Σ
x	1	2	3	4	5	6	7	28
x^2	1	4	9	16	25	36	49	140
y	135,9	133,5	133,0	130,6	129,5	128,0	127,1	917,6
yx	135,9	267	399	522,4	647,5	768	889,7	3629,5

$$\left.\begin{aligned} 7a_0 + 28a_1 &= 917{,}6 \\ 28a_0 + 140a_1 &= 3629{,}5 \end{aligned}\right\}$$

$a_0 = 136{,}93$

$a_1 = -1{,}46$

Получим следующее уравнение, выражающие общую тенденцию роста реализации:

$Y = 136{,}93 + -1{,}46\ x$

Выровненный (теоретический) ряд динамики (на рис.2.2 выделен пунктирной линией):

Годы	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
x	1	2	3	4	5	6	7
y	135,47	134,01	132,55	131,09	129,63	128,17	126,71

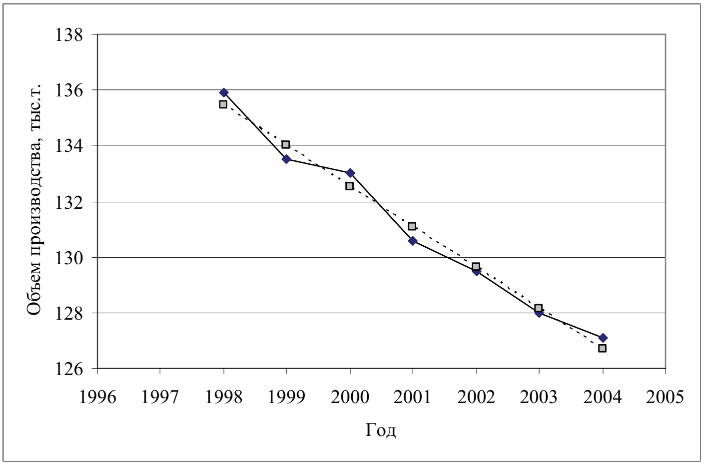


Рис.2.2. График исходного и выровненного рядов

Используя построенную модель, найдем прогнозное значение производства картофеля:

- в 2005 г. (х = 8):

Y = 136,93 + -1,46 * 8 = 125,24 тыс.т.

- в 2006 г. (х = 9):

Y = 136,93 + -1,46 * 9 = 123,78 тыс.т.

Задача 3. Используя исходные данные задачи 1 в целях анализа внутригодовой динамики: 1) определите индексы сезонности методом постоянной средней; 2) представьте в виде линейного графика сезонную волну развития изучаемого явления по месяцам года; 3) сделайте выводы.

Решение.

Рассчитаем индексы сезонности методом постоянной средней

Месяц	2001	2002	2003	2004	Средняя за 4 года	Индекс сезонности (средняя за 4 ч / среднемесячный показатель * 100), %
Январь	12,4	13,8	18	24,6	17,20	53,26
Февраль	11,5	12	15,1	18,9	14,38	44,51
Март	12,1	14,6	16,5	17,9	15,28	47,30
Апрель	45,8	44,9	47,7	50,8	47,30	146,46
Май	58,1	62,3	61,5	65,3	61,80	191,36

Июнь	60,4	62,4	65,7	69,5	64,50	199,72
Июль	45,7	48,9	49	58,2	50,45	156,21
Август	26,5	32,7	35,9	43,2	34,58	107,06
Сентябрь	15,3	18,5	20,7	25	19,88	61,54
Октябрь	15,4	17,2	19,8	28,9	20,33	62,93
Ноябрь	16,5	18,5	4,4	7,6	21,75	67,35
Декабрь	15,8	17	2,3	5,4	20,13	62,31
Средняя	27,96	30,23	3,05	7,94	32,3	

Сезонная волна реализации сахара по месяцам года (среднемесячные показатели производства):

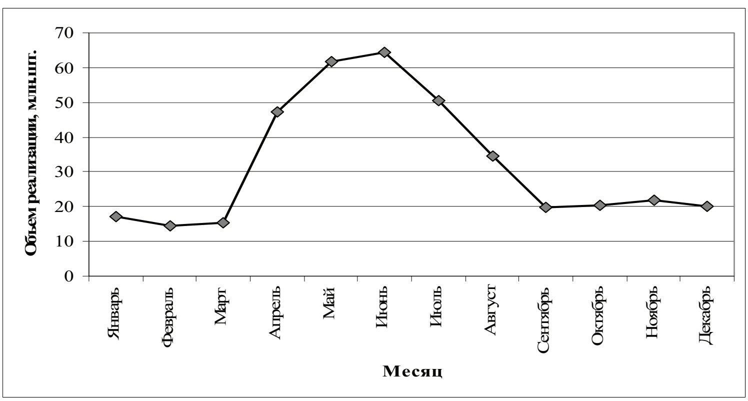


Рис. 3.1. Сезонная волна реализации яиц по месяцам года

Видно, что реализация носит сезонный характер. Минимальные объемы реализации наблюдаются в холодный период. Затем они постепенно увеличиваются и в июне достигают своего максимального значения, а затем опять снижаются.

Список использованной литературы

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы и М., “Юнити ”, 1998.
2. Дуброва Т.А. Статистические методы прогнозирования в экономике. МЭСИ. Г., 1999.
3. Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики: Учебник. - Г.: Финансы и статистика, 2000.
4. Статистическое моделирование и прогнозирование. Учебное пособие / Под ред . А.Г.Гранберга. Г.: Финансы и статистика. 1990.

Лабораторная работа. Описание и моделирование систем в международных отношениях

Цель работы

Ознакомиться с базовыми понятиями системы и системности. Овладеть привычками системного анализа, разными видами описания систем, принципами морфологии и когнітології, когнитивного моделирования систем.

Порядок выполнения работы

1. Предыдущая обработка теоретического материала.

2. Получение допуска к выполнению лабораторной работы.

3. Обработка типичной учебной задачи.

4. Выполнение индивидуальной задачи.

5. Оформление отчета.

6. Защита работы.

1.3. Короткие теоретические сведения

1.3.1. Основные принципы и процедуры системного анализа

Система - совокупность (множество) отдельных объектов с неминуемыми связями между ними. Подсистема - часть системы с некоторыми связями и отношениями. Любая система состоит из подсистем, каждая подсистемы любой системы может быть рассмотренная самая как система.

Основные принципы системного анализа:

Требование рассматривать совокупность элементов системы как одно целое, более ли жестко, - запрет на рассмотрение системы как простого объединения элементов.

Признание того, что свойства системы не просто сумма свойств ее элементов. Тем самым подтверждается возможность того, что система имеет особые свойства, которых может и не быть у отдельных элементов.

Каждая система имеет свой максимум эффективности, так как всегда существует функция ценности системы в виде зависимости ее эффективности от условий построения и функционирование. Такая функция ограничена, а значит существует ее минимум и максимум.

Запрет рассматривать систему в отрыве от окружающей среды - как автономную, обособленную. Это означает обязательность учета внешних связей, или в более общем виде, требование рассматривать анализируемую систему как часть (подсистему) какой-то более общей системы.

Возможность (а иногда и необходимость) распределения системы на части, подсистемы. Если последние оказываются недостаточно простые для анализа, с ними ведут себя так именно. Но в процессе такого распределения нельзя поднимать предыдущие принципы - пока они соблюденные, распределение оправдано.

Таки принципы разрешают формализовать определение термина система в виде - многоуровневая конструкция из элементов, которые взаимодействуют для достижения единой цели функционирования (целевой функции).

Основные процедуры системного анализа:

1. Формулирование целей, их приоритетов и проблем исследования.
2. Определение и уточнение ресурсов исследования.
3. Обособление системы от окружающей среды.
4. Определение границ исследуемой системы.
5. Определение всех надсистем, в которые входит исследуемая система как часть.
6. Определение направления развития всех надсистем, которым принадлежит данная система, в частности, формулирования их целей и противоречий между ними.
7. Определение подсистем, из которых составляется система, выделение частей и элементов системы.
8. Определение ролей подсистем у функционирование исследуемой системы.
9. Определение структуры системы, совокупности связей между ее компонентами.
10. Выявление интегрирующих факторов, т.е. причин объединяющих отдельные части в целое.
11. Определение всех возможных связей системы, коммуникации системы с внешней средой и связи между ее элементами.
12. Изучение исследуемой системы в динамике

13. Тестирование системы (системной модели), ее функционирование.

Перечисленные процедуры системного анализа не в полной мере исчерпывают арсенал приемов исследования систем. Тем более, что эти процедуры носят скорее формальный, чем содержательный характер. Ведь только при исследовании конкретной системы возникают специальные приемы, формируется особые методологии, которые в дальнейшем разрешают использовать получении знания для исследования данной системы.

Классификация систем

Классификацию систем можно осуществить за разными критериями, но она всегда зависит от целой и ресурсов системы и задачи, которые стоит перед исследователем.

Любую систему можно классифицировать:

1. По отношению системы к окружающей среде: открытые; закрытые.
2. По происхождению системы (элементов, связей, подсистем): естественные; социальные; искусственные; виртуальные; смешанные.
3. По способу управления системой (в системе): управляемые извне; управляемые изнутри; с комбинированным управлением.
4. По зависимости от предыстории: динамические; статические.
5. По зависимости от времени: нестационарные; стационарные.

6. За предсказуемостью поведения: детерминированные; стохастичні.

Одной из характерных тенденций развития общества есть появление больших систем.

Система называется большой, если ее если ее исследование, моделирование, описание и управления осложнено через большую размерность, т.е. множество станов системы S имеет большую размерность (в другом случае система будет малая).

Система называется сложной, если ее исследование, моделирование, описание и управления осложнено за неимением ресурсов (главным образом, - информационных).

Соответственно признаком простой системы есть достаточность информации для ее управления.

За типом сложности системы бывают:

- структурной или статической сложности;
- динамической или временной сложности;
- информационной или информационно-логической сложности;
- вычислительной сложности;
- алгоритмической или конструктивной сложности;
- сложности развития или эволюции, самоорганизации.

Структура систем

Начальное исследование системы заключается в разложении ее на подсистемы и изучении каждой подсистемы отдельно и во взаимосвязи с другими, что дает интегрированную картину исследуемой системы.

Структура - это совокупность связей и отношений между частями целого.

Структура есть связанной, если возможный обмен ресурсами между любыми двумя подсистемами системы (предполагается, что если есть обмен i-той подсистемы с j-той подсистемой, то существует обмен j-той подсистемы с i-той).

Структуры систем бывают разного типа, разной топологии, к основным структурам относят:

1. Линейные структуры:

В линейных структурах действуют лишь последовательные связи, их сложность можно определять за количеством подсистем системы. В случае линейной структуры осложнения некоторой подсистемы системы приведет к осложнению всей системы. Математическое описание (модель) систем с линейной структурой за обычай есть линейное уравнение. При корректном объединении двух линейных структур, как правило образовывается новая линейная структура.

2. Иерархические (древовидные) структуры:

Иерархия - это структура с наличием подчиненности, т.е. неравноправных связей между элементами, когда действие в одном направлении служит причиной значительно больший влияния на элемент, чем действие в другом направлении. Существует разные виды иерархических структур, но в практике чаще всего применяется древовидная. В древовидной структуре легко определять иерархические уровни, это группы элементов равноотстоящих от верхнего (главного) элемента.

Сложность иерархических структур можно определять как число уровней иерархии. Увеличение сложности при этом требует больших ресурсов для достижения цели. При корректном объединении двух иерархических структур, как правило образовывается новая иерархическая структура. Комбинация иерархической и линейной структуры может привести как к иерархической так и к сложной неопределенной структуре.

3. Сетевые структура:

В сетевых структурах действуют как последовательные так и параллельные связи, их сложность можно определять как максимальную со сложностей всех линейных структур соответствующих разным стратегиям достижения цели (путей ведущих от начальной подсистемы к конечной). При корректном объединении двух сетевых структур, как правило образовывается новая сетевая структура.

Пример: система "военные силы", если ее разложить на три подсистемы: "авиация", "наземные силы", "морские силы", "разведка", и др., будет иметь сетевую структуру, так как некоторые из этих подсистем можно активизировать параллельно, а некоторые последовательная.

4. Матричные структуры:

В матричных структурах сложность можно определять количеством подсистем системы, а математическое описание (модель) таких систем за обычай есть система линейных уравнений. При корректном объединении двух матричных структур, как правило образовывается новая структура - пространственная матрица. Такого вида структуры часто используются в системах с тесно связанными и равноправными (“по вертикалу” и “по горизонтали”) структурными связями.

Кроме указанных основных типов структур используются и другие, что образуются с помощью их корректных комбинаций - соединений и вложений.

Если структура системы плохо описываема или определена, то такие системы называются плохо структурированными.

Все элементы и подсистемы системы подчинены одной главной цели, выполнение которой является движущей силой функционирования всей системы. Вообще система - это средство достижения цели или все то, что необходимо для достижения цели (элементы, отношения, структура, работа, ресурсы) в некотором заданном множестве объектов (операционной среде).

Цель - наилучшей стан системы, т.е. такой, что разрешает решать проблему при данных ресурсах.

Целенаправленное обращение системы - обращение системы (последовательность принятых ею станів), что ведет к целые системы.

Цель системы тесно связана с ее эффективностью.

Эффективность системы - способность системы оптимізувати некоторый критерий эффективности.

Как правило для достижения цели существует много альтернатив, выбрать оптимальную из них является главной задачей исследователя.

Задача - описание возможных стратегий достижения целые системы или возможных промежуточных станов исследуемого объекта.

Решить задачу - означает определить четко ресурсы и пути достижения указанной цели при исходных посылках.

Решение задачи - описание того стана задачи, при котором достигается указанная цель; решением задачи называют и сам процесс поиска описания этого стана.

Если входные посылки, цель, условие задачи, или решение, возможно, даже самое понятия решения плохо описываемые, формализованные, то эти задачи называются поганоформалізовані.

Деятельность системы может происходить в двух режимах: развитие (эволюция) и функционирование.

Эволюцию систем можно понимать как целенаправленный (на основе выбора) движение, изменение этих систем по некоторой траектории развития.

Развитие - это деятельность системы с изменением целей.

При развитии инфраструктура системы качественно изменяется. Развитие, это борьба организации и дезорганизации в системе.

Функционирование - это деятельность системы без изменения цели.

При функционировании явным образом не происходит качественного изменения инфраструктуры системы.

Системы где количественный рост элементов, подсистем и связей ведет к качественным изменениям структуры называют системами, которые развиваются. Такие системы могут непроизвольно изменять свой стан (как детерминировано, так и стохастично), а их жизнеспособность (стойкость) зависит от изменения связей между элементами (подсистемами) системы.

Система называется стойкой, если она сохраняет тенденцию стремления к тому стану, который более всего отвечает ее целям, целям что сохраняют качество без изменения структуры и не приводит к сильным изменениям системы на некотором заданном множестве ресурсов (например, на временном интервале).

Стойкость систем - способность системы сохранять свое движение по траектории.

Траектория системы - последовательность принятых системой станов, которые рассматриваются как некоторые точки в множестве станов системы.

Стойкость может быть структурной, вычислительной, алгоритмической или информационной, динамической, эволюционной и др.

Асимптотична стойкость системы состоит из возможности системы возвратиться к равновесному стану (при t жаждущему к бесконечности) из любого не равновесного стана.

Гибкость системы - способность к структурной адаптации системы в ответ на влияния окружающей среды.

Любая система имеет внутренние станы, внутренний механизм преобразования входных сигналов, данных в исходные (внутреннее описание) и внешние проявления (внешнее описание). Внутреннее описание дает информацию об обращении системы, о соответствии (несоответствия) внутренней структуры системы целям, подсистемам (элементам) и ресурсам в системе, внешнее описание - о взаимоотношениях с другими системами, с целями и ресурсами других систем. Внутреннее описание системы определяет внешнее описание.

Описание систем

Описание (спецификация) системы - это описание всех ее элементов (подсистем), их взаимосвязей, целой, функций при некоторых ресурсах, т.е. всех допустимых станов.

Морфологическое описание системы - описание или здания структуры системы: описание совокупности A элементов этой системы и необходимого для достижения цели набора отношений R между ними.

Морфологическое описание задается кортежем:

$S = \langle Q, A, B, R, V \rangle$, где

Q - определение языка описания;

A - множество элементов;

B - множество отношений с окружающей средой;

R - множество связей в A;

V - структура системы, тип этой структуры.

Из морфологического описания системы получают функциональное описание системы (т.е. описание законов функционирования, эволюции системы), а с її - информационного описания (описание информационных связей как системы с окружающей средой, так и подсистем системы) информационную систему, а также информационно-логический (інфологічний) описание системы.

Моделирование систем

Модель - замещение (на определенных условиях) оригинала для изучения или воспроизведение его свойств.

Модель исследуемой системы в самом лаконичном виде можно представить в виде зависимости: $E = f(Y, X)$, где:

E - некоторый количественный показатель эффективности системы в плане достижения цели ее существование T (критерий эффективности).

Y - зависимые сменные системы - те, на которые можно влиять (управляющие влияния);

X - независимые сменные системы.

На практике часто используют модели, в которых есть одна зависимая сменная - функция и несколько независимых сменных аргументов.

Модели, если не учитывать сферы их применения, бывают трех типов: познавательные, прагматические и инструментальные.

Первая модель при исследовании системы есть когнитивная модель.

Когнітологія - междисциплинарное научное направление, которое изучает методы и модели формирования знания, познание, универсальных структурных схем мышления.

Цель когнитивной структуризации - формирование и уточнение гипотезы о функционировании исследуемой системы, т.е. структурных схем причинная - наслідкових связей, их количественной оценки.

Причинно-следственная связь между элементами (системами, подсистемами, признаками, ...) когнитивной модели определяется как:

1. положительный, если увеличение или усиление элемента А ведет к увеличению или усилению элемента В.

2. отрицательный, если увеличение или усиление элемента А ведет к уменьшению или ослаблению элемента В.

Кроме когнитивных схем могут использоваться когнитивные решетки (шкалы, матрицы), что разрешают определять стратегии обращения системы.

Основные требования к модели:

– наглядность построения;

– видимость основных ее свойств и отношений;

– удобство для исследования или воспроизведение;

– простота исследования, воспроизведение;

– сохранение информации, которые содержались в оригинале (с точностью рассмотренных при построении модели гипотез) и получение новой информации.

Проблема моделирования состоит из трех задач:

- построение (эта задача поганоформалізована, в том содержании, которое нет алгоритма для построения моделей);

- исследование (эта задача более формализована, имеет исследовательский приемы разных классов моделей);

- использование (формализованная, конструктивная и конкретизированная задача).

Свойства любой модели такие:

- ограниченность (модель отображает оригинал лишь в конечном числе его отношений и, кроме того, ресурсы моделирования концу);

- упрощенность (модель отображает только важные стороны объекта);

- приблизительность (действительность отображается моделью грубо или приблизительно);

- адекватность (модель успешно описывает систему, которая моделируется);

- информативность (модель должна содержать достаточную информацию о системе - в рамках гипотез, принятых при построении модели).

Системный подход в анализе международных отношений

Для государства система международных отношений представляет собой внешняя среда. Под ее влиянием в значительной мере формируется ее внешнеполитическая деятельность, в ней она реализуется, в ней государства реализуются.

Международные отношения - прежде всего отношения политические, главным звеном которых есть взаимоотношения между государствами. Иногда в качестве самостоятельной системы рассматривают виды международных отношений - экономическую, политическую, военно-стратегическую та другие системы.

Отделяют такие виды международных отношений:

На основе сфер общественной жизни и содержания отношений - экономические, политические, культурные, идеологические, и т.п.

На основе взаимодействующих субъектов - международные, міжпартійні, отношения между организациями, и т.п.

На основе геополитического критерия - глобальные, региональные, локальные.

На основе ступня развития и интенсивности - высокий, средний, низкий.

С точки зрения напряженности - стабильные и нестабильные, отношения соперничества, вражды, конфліктності, войны и т.п.

Одной из определяющих характеристик структуры системы международных отношений есть рези структурные уровни:

– глобальный;
– региональный;
– субрегіональний;
– міжнародно-ситуаційний;
– групповой (коалиционный);
– двусторонний.

Все уровни в совокупности составляют иерархию структуры системы международных отношений. Они являются единицами анализа международных отношений. Иерархия в международных отношениях отображает их фактическую неровность с точки зрения военно-политических, экономических, ресурсных, идеологических и других возможностей влияния на систему.

Иерархия в системе, согласно Р. Ароном, определяется по помощи категорий сила и могущество.

Сила – это совокупность средств давления или принуждения, которые их имеют в своем распоряжении актеры.

Могущество – это способность актера влиять на другие. В случае, когда силы в системе уравновешены, то уравновешиваются и могущества, пусть приблизительно.

Следствием неровности государств есть международная стратификация с присущей ей фактической иерархией государств на международной арене.

Английский ученый И. Луард дает следующую классификацию государств:

– сверхдержавы;
– большие государства;
– средние государства;
– малые государства;
– микрогосударства.

Одним из основных принципов функционирования международной системы есть стремление держал получить контроль над поведением других актеров международных систем. На протяжении существования всех международных систем были характерные три типа контроля (управление):

1. Имперский (империалистический) - единое государство контролирует сдачу.

2. Биполярный - две сверхдержавы контролируют и регулируют взаимоотношения в пределах своих сфер влияния.

3. Баланс сил - три, или больше государств контролируют действия одно одной с помощью дипломатических маневров, изменения союзов и открытых конфликтов.

Существуют разные взгляды на типичные модели систем международных отношений. Г. Каплан в своих исследованиях выделяет шесть моделей системы международных отношений: система баланса сил, жесткая биполярная система, гибкая биполярная система, универсальная система, иерархическая система, система единичного вето. Г.Арон, в свою очередь, подвергает критике М.Каплана, отделяя лишь два типа систем, которые существовали в исторической ретроспекции, - система многополярного равновесия и система биполярного равновесия.

Типичная учебная задача

Пример 1.1: охарактеризовать систему - "Украина, как будущий член Европейского союза".

Прикладные параметры системы:

Внешняя среда: система международных отношений.

Входные данные: нормы и соответствующие нормативные акты ЕС, относительно принятия нового члену.

Исходные данные: улучшение международных отношений Украины со странами ЕС, подписание соглашений, получение инвестиций и. т.г.

Внутренние данные: принятие соответствующего национального (украинского) законодательства, принципы и собственные методы улучшения экономического роста (ВВП, повышение соцстрахования, благосостояния, и др.)

Станы системы: стадии отношений (экономических, политических) между Украиной и ЕС.

Цель системы: вхождение Украины к Европейскому Союзу.

Целевая функция: оптимальная (наиболее эффективная) стратегия вхождения Украины к Европейскому Союзу.

Классификация системы: сложная, многополярного равновесия.

За структурой: сетевая.

По отношению к окружающей среде: открытая.

По происхождению: социальная.

По описанию сменных системы: со смешанными сменными.

По типу описания закона функционирования системы: параметризована.

По способу управления системой (в системе): с комбинированным управлением.

По зависимости от предыстории: динамическая.

По зависимости от времени: нестационарная.

За предсказуемостью поведения: стохастична.

За режимом деятельности: что функционирует и развивается, не стойка.

Пример 1.2.: сделать морфологическое описание системы, если исследуется наличие границ между восьмая странами. Такая модель имеет трофическую структуру типа “кто чей сосед?”. Эта структура однорівнева, т.е. наличие связи определяется наличием границ между странами (множества X- "границы есть" со свойствами S(X)), а отсутствие связи определяется отсутствием границ между странами (множество Y-"границ нет" со свойствами S(Y)).

Кортеж S = < Q, A, B, R,V >, будет иметь следующую интерпретацию:

Q - язык: украинская с элементами алгебры.

А - множество элементов: {Украина, Польша, Беларусь, Россия, Молдова, Румыния, Венгрия, Словакия}

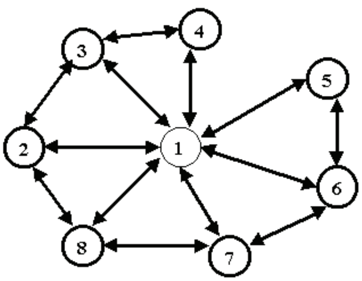
В - множество отношений с окружающей средой: {наличие морских границ, экологический стан,...}; R - множество связей в А: {X, Y};

V - структура системы, тип этой структуры: трофическую структуру системы можно описать таблицей:

	Украина	Польша	Беларусь	Россия	Молдова	Румыния	Венгрия	Словачина
Украина		1	1	1	1	1	1	1
Польша	1		1	0	0	0	0	1
Беларусь	1	1		1	0	0	0	0
Россия	1	0	1		0	0	0	0
Молдова	1	0	0	0		1	0	0

	Украина	Польша	Беларусь	Россия	Молдова	Румыния	Венгрия	Словач-чина
Румыния	1	0	0	0	1		1	0
Венгрия	1	0	0	0	0	1		1
Словакия	1	1	0	0	0	0	1	

где 1 демонстрирует наличие связи (множество X), а 0 его отсутствие (множество Y).

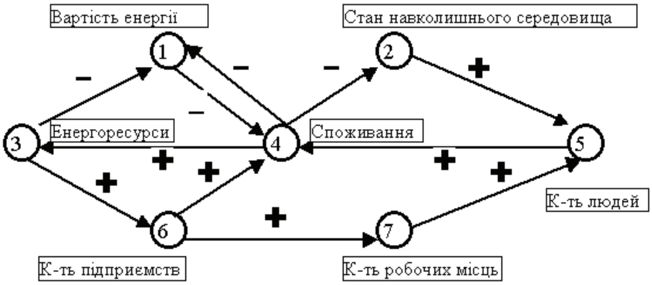


Граф информационного описания системы изображено на рисунке:

Мал. Граф информационного описания системы.

где 1-украина, 2-польша, 3-беларусь, 4-россия, 5-молдова, 6-румыния, 7-венгрия, 8-словакия.

Пример 1.3.: построить когнитивную структурную схему



для анализа системы энергопотребления.

Индивидуальная задача.

1. Предложить и самостоятельно проанализировать систему в области международных отношений по схеме типичной задачи (Пример 1.1.).
2. Описать подсистемы предложенной системы.
3. Сделать морфологическое описание предложенной системы, определить ее трофическую структуру, построить граф информационного описания.
4. Построить структурную когнитивную схему для анализа предложенной системы.

Вопрос допуска к лабораторной работе

1. Определить основные признаки системы.
2. Проанализировать общую характеристику системы.
3. Охарактеризуйте большие системы. Привести примеры.
4. Охарактеризуйте сложные системы. Привести примеры.

5. Охарактеризовать типы сложности систем.
6. Сформулируйте основные принципы системного анализа.
7. Сформулируйте основные процедуры системного анализа.
8. Охарактеризовать функции и общую схему морфологического описания систем.
9. Определить место когнітології в системном анализе.
10. Проанализируйте когнитивный инструментарий, который использует системный анализ.

Вопросы к защите лабораторной работы

1. Обосновать выбор системы для выполнения индивидуальной задачи.
2. Определить цель и задачу исследования проведенного в индивидуальной задаче.
3. Обосновать количество подсистем избранных и описанных в индивидуальной задаче.
4. Обосновать морфологическое описание системы проведенный в индивидуальной задаче.
5. Обосновать причинно-следственные связи в когнитивной схеме системы, которая предложена в индивидуальной задаче.
6. Охарактеризовать основные структуры системы международных отношений.
7. Охарактеризовать классификацию государств предложенной И. Луардом.
8. Охарактеризовать основные типы моделей международных отношений.

9. Определить основные типы управления (контроля) в системе международных отношений
10. Определить особенности системного анализа системы международных отношений.

ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ

1. Гондюл В.П., Добржанська О.Л. Методические указания к выполнению лабораторных робот из нормативной дисциплины "Системный анализ". - К.:IMB, 2003.- 57 с.
2. Копель О. А., Пархомчук О.С. Международные системы. Мировая политика. - К.: ФАДА, ЛТД, -2001. - 224 с.
3. Система, структура и процесс развития современных международных отношений/отв. ред. Гатман В.И. - М.:Наука, 1984.-422 с.
4. Циба В.Т. Математические основы социальных исследований: кваліметричний подход. - К.:МАУП, 2002. - 248 с.
5. Гондюл В.П., Литвиненко Н.П., Мельничук Н.Б., Майстренко П.П. Математическое моделирование и прогнозирования политических конфликтов в Европе. К.: IMB, 1999. - 106 с.
6. Зернецька О.В. Глобальное развитие систем массовой коммуникации и международные отношения. - К.: Образование, 1999. - 351 с.
7. Ивахненко А. Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. К.: “Техника”, 1975-312с.

Лабораторная работа. Описание и моделирование систем в международных отношениях. Система: «Целесообразность вступления Украины в Единое экономическое пространство»

Прикладные параметры системы:

Внешняя среда: система международных отношений

Входные данные: Соглашение об ЄЕП, статистические данные, межгосударственные соглашения, международные соглашения.

Исходные данные: улучшение экономических отношений, экономического стана Украины, получение инвестиций.

Внутренние данные: ратификация Соглашения Верховной радой Украины, роз′яснення выгоды от вступления до ЄЕП.

Станы системы: подготовка Соглашения об ЄЕП, подписание Соглашения, ратификация и вступление в ЄЕП.

Цель системы: Вступление в ЄЕП.

Целевая функция системы: наиболее эффективная стратегия вступления Украины в Единое экономическое пространство.

Классификация системы «Целесообразность вступления Украины в Единый экономический просторную»: сложная, многополярного равновесия.

За структурой: сетевая.

По отношению к окружающей среде: открытая.

По происхождению: социальная.

По описанию сменных системы: со смешанными сменными.

По типу описания закона функционирования системы: параметризована.

По способу управления системой : с комбинированным управлением

По зависимости от предыстории: динамическая.

По зависимости от времени: нестационарная.

За предсказуемостью поведения: стохастична.

За режимом деятельности: что функционирует и развивается, неустойчивая.

Элементами системы “Вступление Украины в ЄЕП” есть другие международные и межправительственные организации, которые активно влияю на вступление Украины в ЄЕП :

1. ООН
2. Европейский союз
3. Совет Европы
4. НАТО
5. ОБСЕ
6. СНГ
7. ГУУАМ
8. ЄБРР
9. Мировой банк
10. Черноморское экономическое сотрудничество

Описание некоторых подсистем системы «Целесообразность вступления Украины в Единый экономический просторную»:

1. Европейский союз:

Прикладные параметры системы:

Внешняя среда: система международных отношений

Входные данные: нормы и нормативные акты ЕС.

Исходные данные: улучшение отношений стран-членов ЕС с другими странами Европейского региона.

Внутренние данные: принятие соответствующих законов, подписание соглашений, влияние на те или другие решения потенциальных членов ЕС.

Станы системы: стадии отношений между странами-членами ЕС.

Цель системы: Улучшение экономических и политических зв′язків между странами-членами ЕС..

Целевая функция системы: наиболее эффективная стратегия управления ЕС.

Классификация системы “Европейский союз”: сложная, многополярного равновесия.

За структурой: сетевая.

По отношению к окружающей среде: открытая.

По происхождению: социальная.

По описанию сменных системы: со смешанными сменными.

По типу описания закона функционирования системы: параметризована.

По способу управления системой : с комбинированным управлением

По зависимости от предыстории: динамическая.

По зависимости от времени: нестационарная.

За предсказуемостью поведения: стохастична.

За режимом деятельности: что функционирует и развивается, неустойчивая.

2. СНГ

Прикладные параметры системы:

Внешняя среда: система международных отношений

Входные данные: нормы и нормативные акты СНГ.

Исходные данные: улучшение экономических отношений стран-членов СНГ.

Внутренние данные: принятие соответствующих законов, подписание соглашений.

Станы системы: стадии отношений между странами-членами СНГ.

Цель системы: Улучшение экономических и политических зв′язків между странами-членами СНГ.

Целевая функция системы: наиболее эффективная стратегия отношений между странами-членами СНГ.

Классификация системы “СНГ”: сложная, многополярного равновесия.

За структурой: сетевая.

По отношению к окружающей среде: открытая.

По происхождению: социальная.

По описанию сменных системы: со смешанными сменными.

По типу описания закона функционирования системы: параметризована.

По способу управления системой : с комбинированным управлением

По зависимости от предыстории: динамическая.

По зависимости от времени: нестационарная.

За предсказуемостью поведения: стохастична.

За режимом деятельности: что функционирует и развивается, неустойчивая.

В результате морфологического описания система: «Целесообразность вступления Украины в Единый экономический просторную», получим однорівневу структуру, наличие связи в которой будет определяться наличием влияния элементов системы один на один (множество X – “влияние есть” со свойствами S (X), а отсутствие связи будет определяться отсутствием влияния (множество Y – “влияния нет” со свойствами S (Y))

Кортеж S ={Q, A, B, R, V} имеет следующую интерпретацию.

Q – язык: украинская с элементами алгебры.

А – множество элементов: {ООН, ЕС, Совет Европы, НАТО, ОБСЕ, СНГ, ГУУАМ, ЄБРР, Мировой Банк, Черноморское экономическое спвробітництво}

В – множество отношений с окружающей средой: {наличие морских границ, экологический стан, геополитическое положение регионов};

R - множество связей в А: {X, Y}

V – структура системы, тип этой структуры. Трофическую структуры системы можно описать с помощью таблицы:

	ООН	ЕС	СЕ	НАТО	ОБСЕ	СНГ	ГУУАМ	ЄБРР	СБ	ЧЕС
ООН			1	1	1	1	1	1	1	1
ЕС	1		1	1	1	1	1	1	0	1
СЕ	1			1	1	1	1	1	0	1
НАТО	1		1		1	1	1	0	0	1
ОБСЕ	1		1	1		1	1	0	0	1
СНГ	0			0	0		0	0	0	1
ГУУАМ	0			0	0	0		0	0	1
ЄБРР	1			0	1	1	1		0	1
СБ	1			1	1	1	1	1		1
ЧЕС	0			0	0	1	1	0	0	

где 1 демонстрирует наличие связи (множество Х), а 0 – его отсутствие (множество Y).

Граф информационного описания системы изображено на рисунке:

(

10 O O 2

9 O O 3

8 O O 4

7 O O 5

6 (

Рис. Граф информационного описания системы.

где 1 - ООН, 2 - ЕС, 3 - Совет Европы, 4 - НАТО, 5 - ОБСЕ, 6 - СНГ, 7 - ГУУАМ, 8 - ЄБРР, 9 - Мировой Банк, 10 - Черноморское экономическое сотрудничество.

Когнитивная структурная схема для анализа влияния международных организаций на вступление Украины в ЄЕП.

Лабораторная работа. Корреляционный анализ в системе международных отношений

Цель работы

Ознакомиться с базовыми понятиями корреляции случайных величин. Овладеть привычками корреляционного анализа и исследование зависимостей корреляции от выбора шкалы измерения.

2. Порядок выполнения работы

1. Предыдущая обработка теоретического материала.

2. Получение допуска к выполнению лабораторной работы.

3. Обработка типичной учебной задачи.

4. Выполнение индивидуальной задачи.

5. Оформление отчета.

6. Защита работы.

3. Короткие теоретические сведения

3.1. Корреляционный анализ

Корреляционный анализ - совокупность методов выявления корреляционной зависимости между случайными величинами или признаками.

Для числовой оценки возможной связи между двумя случайными величинами: Y(с математическим ожиданием M_y и среднеквадратичным отклонением S_y) и X (с математическим ожиданием M_x и среднеквадратичным отклонением S_x) используется коэффициент корреляции:

$$R_{xy} = \frac{K}{S_x S_y} = \frac{1}{S_x S_y} \bullet \frac{1}{n} \bullet \Sigma(X_i - M_x)(Y_i - M_y)$$

где n - количество наблюдений,

$K = \frac{1}{n} \bullet \Sigma(X_i - M_x)(Y_i - M_y)$, что грунтуется на использовании смешанного момента между случайными величинами X и У.

Этот коэффициент может принимать значение от -1 к +1 - в зависимости от тесноты связи между данными случайными величинами.

Основные свойства коэффициента корреляции :

Числовое значение коэффициента корреляции находится в пределах $-1 \le R_{xy} \le 1$.

Зависимость между X и Y тем более сильная, чем $|R_{xy}|$ ближе до 1.

Если $R_{xy} \ge 1$, тогда с ростом X в среднем возрастает и Y.

Если $R_{xy} \le 1$, тогда при росте X величина Y в среднем уменьшается.

При $R_{xy}=1$ наблюдается линейная связь между X и Y (именно поэтому часто говорят о линейной корреляции).

При $R_{xy}=0$, величины X и Y называют некорельованими ї их можно считать случайными и независимыми.

Значение коэффициента парной корреляции указывает на близость зависимостей свойств X и Y к функциональной и о степени интенсивности их связи. Слабая корреляция, т.е. слабая "чувствительность" одного свойства к изменениям другой через ее "недостаточную реакцию" (только в среднем), предопределяет слабую "управляемость" одного свойства путем изменения другой.

В системном анализе приходится решать вопрос и о связи нескольких (больше за двух) случайных величин, т.е. вопрос о множественной корреляции.

Пусть X, Y и Z - случайные величины, по результатам наблюдениями над который установлено их математические ожидания M_x, M_y, Mz и среднеквадратичные отклонения S_x, S_y, S_z.

Тогда можно найти парные коэффициенты корреляции R_{xy}, R_{xz}, R_{yz} по приведенной выше формуле. Но этого явным образом недостаточно - ведь для каждого из трех коэффициентов отсутствуют сведения о влиянии третьей случайной величины.

Если сменная X коррелирует со сменной Y, после учета влияния всех других независимых сменных, такую корреляцию иногда называют частной корреляцией.

Если одна величина коррелируется с другой, то это может быть отображением того факта, что они обе коррелируются с третьей величиной или с совокупностью величин.

В случаях множественного корреляционного анализа рассчитываются частные коэффициенты корреляции — например, оценка влияния Z на связь между X и Y:

$R_{xy.z}$ =

Коэффициенты множественной корреляции $R_{x.yz}$, $R_{y.zx}$, $R_{z.xy}$ определяют какую связь между данной случайной величиной и совокупностью других, формулы для вычисления которых построены по тем же принципам — учета связи одной из величин со всеми другими в совокупности.

3.2. Шкалирование случайных величин

Принято использовать четыре вида шкал:

Nom. номинальная шкала — применяется к тем величинам, которые не имеют естественной единицы измерения. Если некоторая величина может принимать на номинальной шкале значения X, Y или Z, то справедливыми считаются только выражение типа: $(X \neq Y)$, $(X = Z)$.

Ord. порядковая (ранговая) шкала — применяется к тем величинам, которые не имеют естественных единиц измерения, но разрешают применять понятие преимущества одного значения над другим. Иногда говорят о рангах значений таких величин. Если некоторая величина может принимать на порядковой шкале значения X, Y или Z, то справедливыми считаются только выражение типа: $(X \neq Y)$, $(X = Z)$, $(X < Y)$, $(Y > Z)$, $(Z \leq X)$, $(Z \geq Y)$.

Количественные шкалы: Int. интервальная шкала; Rel. относительная шкала.

Эти две шкалы применяется к тем величинам, которые имеют натуральные размерности. Для таких величин допустимые все арифметические действия. Если некоторая величина может принимать на количественной шкале значения X, Y или Z, то справедливыми считаются выражение типа: (X≠Y), (X=Z), (X<Y), (Y>Z), (Z≤X), (Z≥Y), (X+Y), (Z−X), (Y•Z), (Z÷X).

Разность между интервальной и относительной шкалой:

Схематично интервальная шкала выглядит: 0________________+,

а относительная: −________________0________________+,

т.е. интервальная шкала не имеет отрицательных значений, а 0 (нуль) на интервальной шкале означает отсутствие значения.

Поскольку в аналитическому исследованные могут быть использованы разные типы шкал (номинальная, ранговая, интервальная, относительная) то возникает вопрос об особенностях обсчета коэффициенту корреляции при использовании данных, которые вымерены за разными шкалами.

3.3. Обе сменные измеренные за номинальной шкалой Для таких величин коэффициент корреляции можно вычислить за формулой:

$$\varphi = \frac{p_{xy} - p_x p_y}{\sqrt{p_x q_x p_y q_y}}$$, где

p_x - частица объектов, которые имеют единицу по X ;

q_x - частица объектов, которые имеют нуль по X;

p_y - частица объектов, которые имеют единицу по Y;

q_y - частица объектов, которые имеют нуль по Y;

p_{xy} - частица объектов, которые имеют единицу по X и по Y одновременно.

3.4. Обе сменные измеряются за ранговой (порядковой) шкалой

Для таких величин исходные данные могут быть преобразованы в ранги или просто быть рангами, при этом исчисляются коэффициенты ранговой корреляции. Таких коэффициентов несколько, один из которых коэффициент ранговой корреляции

Спирмена -R_s: $\boldsymbol{R_s} = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}{n(n^2-1)}$, гдесменные X и Y

приобретают значение 1,2,…,n; n-количество рангов; (x_i-y_i)-разность между рангом i-го объекта по X и его же рангом по Y. Коэффициенты ранговой корреляции измеряют тесноту связи между величинами которые можно расставить за ростом или снижением степени интенсивности каждой. Такая процедура имеет название ранжирование ряда.

При τ=+1 все пара рангов имеют прямой порядок; при τ=-1 все пара имеют обратный порядок рангов; при τ=0 количество пар с прямым и обратным порядками рангов одинаковая.

Также для вычисления коэффициента ранговой корреляции τ можно использовать способы, которые не нуждаются в составлении таблицы, количество пар рангов. Для этого формула τ превращается так, чтобы она содержала или количество пар рангов с прямым порядком P, или с обратным порядком Q:

$$\tau = \frac{S}{C_n^2} = \frac{P - Q}{n(n-1)/2} = \frac{2 \bullet P}{n(n-1)/2} - 1 = 1 - \frac{2 \bullet Q}{n(n-1)/2}$$

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена превышает коэффициент ранговой корреляции Кендела, хотя значение двух коэффициентов достаточно большие, что свидетельствует о важной связи между величинами Х и У.

Отличие между этими коэффициентами заключается в том, что при определении коэффициента коэффициент ранговой корреляции Кендела τ фиксируется только факт прямого или обратного расположения рангов для каждой пары элементов независимо от отдаления рангов один от другого.

3.5. Обе сменные вымеренные за количественными шкалами

В этом случае исчисляется линейный коэффициент корреляции Пирсона -r_{xy}:

$$r_{xy} = \frac{K}{S_x S_y}$$

где K - корреляционный момент;

S_x S_y- средние квадратичные отклонения.

3.6. Одна из сменных вымеренная за ранговой шкалой, а другая - за количественной

Предположим, что X измеряется в ранговой шкале, Y - в интервальной шкале (или относительной). Для таких величин можно превратить оценки Y в ранги и найти коэффициенты ранговой корреляции Спирмена или Кендала.

3.7.Одна из сменных измеряется за номинальной, а другая - за количественной шкалой

Для таких величин определения связи между X и Y удобно использовать следующую формулу:

$$\boldsymbol{R} = \frac{\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_0}{\sigma_x} \sqrt{\frac{\boldsymbol{n}_1 \boldsymbol{n}_0}{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)}}$$, где

$\bar{x}_1$ - среднее по X объектов, которые имеют единицы по Y;

$\bar{x}_0$ - среднее по X объектов, которые имеют нуль по Y;

δ_x - стандартное отклонение n значений по X;

n_1 - число объектов, которые имеют единицу по Y;

n_0 - число объектов, которые имеют нуль по Y.

Типичная учебная задача

Пример 4.1.: проверяется статистическая гипотеза о существовании корреляционной связи между валовым внутренним продуктом на душу населения и членством страны в Европейском Союзе. В качестве пример избран 15 европейских стран, данные по которым представленные в виде таблицы:

№	Страна	ВВП на душу населения (долл. США)	Членство в ЕС
1	Люксембург	36400	ТАК
2	Дания	25500	ТАК
3	Бельгия	25300	ТАК
4	Австрия	25000	ТАК
5	Нидерланды	24400	ТАК

6	Германия	23400	ТАК
7	Испания	18000	ТАК
8	Греция	17200	ТАК
9	Чехия	12900	НИ
10	Венгрия	11200	НИ
11	Эстония	10000	НИ
12	Беларусь	7500	НИ
13	Литва	7300	НИ
14	Латвия	7200	НИ
15	Болгария	3000	НИ

Как нулевая гипотеза принимается: $Њ_0$ ="существует положительная связь", как альтернативная: $Њ_1$="связи нет".

Пусть величина X это - "ВВП на душу населения (долл. США)", а величина В это - "Членство в ЕС".

Свойство X приводим к номинальной шкале: с вариантами $X_i \geq 20000$ и $X_i < 20000$, соответственно X_i принимает значение 1 и 0.

Свойство В определяется по номинальной шкале с вариантами ответов "Так" и "Ни", соответственно Y_i принимает значение 1 и 0.

Распределение случайных величин X и В представленный в виде таблицы:

№	Страна	ВВП на душу населения (долл. США)	Членство в ЕС
		Х	У
1	Люксембург	1	1
2	Дания	1	1
3	Бельгия	1	1
4	Австрия	1	1
5	Нидерланды	1	1
6	Германия	1	1
7	Испания	0	1
8	Греция	0	1
9	Чехия	0	0
10	Венгрия	0	0
11	Эстония	0	0
12	Беларусь	0	0
13	Литва	0	0
14	Латвия	0	0
15	Болгария	0	0

По данным таблицы:

p_x = 6/15=0,4 (частица объектов, которые имеют единицу по Х);

q_x = 9/15=0,6 (частица объектов, которые имеют нуль по Х);

p_y = 8/15=0,53 (частица объектов, которые имеют единицу по Y);

q_y = 7/15=0,47 (частица объектов, которые имеют нуль по Y);

p_{xy} =6/15=0,4 (частица объектов, которые имеют единицу по X и по Y одновременно);

$$\varphi = \frac{0.4 - 0.4 \bullet 0.53}{\sqrt{0.4 \bullet 0.6 \bullet 0.53 \bullet 0.47}} = 0.76$$

Гипотеза Њ$_0$ подтвердилась: между величинами X и Y существует сильная положительная связь (во время увеличения X значение Y также увеличивается).

Пример 4.2.: проверяется статистическая гипотеза о существовании корреляционной связи между валовым внутренним продуктом на душу населения и рождаемостью на 1000 единиц населения. В качестве пример избран 15 европейских стран, данные по которым представленные в виде таблицы:

№	Страна	ВВП на душу населения (долл. США)	Рождаемость на 1000 од. нас.
1	Люксембург	36400	12.25
2	Дания	25500	11.96
3	Бельгия	25300	10.74
4	Австрия	25000	9.9

5	Нидерланд ы	24400	11.85
6	Германия	23400	9.35
7	Испания	18000	9.26
8	Греция	17200	9.83
9	Чехия	12900	9.1
10	Венгрия	11200	9.26
11	Эстония	10000	8.7
12	Беларусь	7500	9.27
13	Литва	7300	9.77
14	Латвия	7200	7.8
15	Болгария	3000	8.06

Как нулевая гипотеза принимается: $Њ_0$ ="существует положительная связь", как альтернативная: $Њ_1$="связи нет".

Пусть величина X это - "ВВП на душу населения (долл. США)", а величина В это - "Рождаемость на 1000 од. нас. ".

Свойство X определяется по ранговой шкале, соответственно X_i принимает значение от 1 и 15, где 1 высочайший ранг, а 15 наиболее низкий.

Свойство В определяется по ранговой шкале, соответственно Y_i принимает значение от 1 и 15, где 1 высочайший ранг, а 15 наиболее низкий.

Распределение случайных величин X и В представлены в виде таблицы:

№	Страна	ВВП на душу	Ранг ВВП	Рождаемость на	Ранг нар.

		населения (долл. США)	X	1000 од. нас.	У
1	Люксембург	36400	1	12.25	1
2	Дания	25500	2	11.96	2
3	Бельгия	25300	3	10.74	4
4	Австрия	25000	4	9.9	5
5	Нидерланды	24400	5	11.85	3
6	Германия	23400	6	9.35	8
7	Испания	18000	7	9.26	10
8	Греция	17200	8	9.83	6
9	Чехия	12900	9	9.1	12
10	Венгрия	11200	10	9.26	10
11	Эстония	10000	11	8.7	13
12	Беларусь	7500	12	9.27	9
13	Литва	7300	13	9.77	7
14	Латвия	7200	14	7.8	15
15	Болгария	3000	15	8.06	14

По данным таблицы:

n =15 (количество рангов);

$n(n^2-1)=15(15^2-1)=3360$

$(X_i-Y_i) = (1-1)^2 + (2-2)^2 + (3-4)^2 + (4-5)^2 + (5-3)^2 + (6-8)^2 + (7-10)^2 + (8-6)^2 + (9-12)^2 + (10-10)^2 + (11-13)^2 + (12-9)^2 + (13-7)^2 + (14-15)^2 + (15-14)^2 = 83$

(разность между рангом i-го объекта по X и его же рангом по Y).

$$\boldsymbol{R_s} = 1 - \frac{6 \bullet 83}{3360} = 0.85$$

Гипотеза Њ$_0$ подтвердилась: между величинами X и Y существует сильная положительная связь (при увеличение X значение Y также увеличивается).

Пример 4.3.: проверяется статистическая гипотеза о существовании корреляционной связи между количеством пользователей Интернет и производством программного обеспечения. Как нулевая гипотеза принимается: Њ$_0$ ="существует положительная связь", как альтернативная: Њ$_1$="связи нет". В качестве пример избран 10 гипотетических стран (вместо названий используются первые 10 литер латинского алфавита), величина X это - "место страны за доступом населения к сети Интернет ", а величина В это - " место страны за производством программного обеспечения". Свойства X и В определяются по ранговой шкале, соответственно принимают значение от 1 и 10, где 1 высочайший ранг, а 10 наиболее низкий. Данные представленные в виде таблицы:

НАЗВАНИЕ	РАНГ X	РАНГ У
A	5	7
B	10	8
C	4	3

НАЗ ВАНИЕ	РАН Г Х	РАН Г У
D	2	4
E	3	2
F	1	1
G	8	9
H	7	5
I	6	6
J	9	10

При расположении элементов второго столбика за ростом картина соответствия элементов Х и В станет более четкая. Данные представленные в виде таблицы:

НАЗ ВАНИЕ	РАН Г Х	РАН Г У
F	1	1
D	2	4
E	3	2
C	4	3
A	5	7
I	6	6
H	7	5
G	8	9
J	9	10

НАЗВАНИЕ	РАНГ X	РАНГ У
В	10	8

Из сравнения рядов вытекает, что существует определенная связь между Х и В, поскольку оказывается тенденция к сосредоточению меньших значений рангов в начале и больших значений рангов в конце третьего столбика (В). Итак, порядок расположения рангов по Х относительно рангов по В определяет степень их взаимозависимости. Степень безалаберщины определяется количеством пар по В, расположенных в обратном порядке (D и C- 4 и 3; A і I - 7 и 6; ...), поскольку именно такое количество операций нужна для обратной перестановки элементов в парах, чтобы превратить ряд В на благоустроенный.

Метод №1: определим все возможные пары рангов, каждой пари с прямым порядком элементов присвоим значение "+1", а из обратным - значение "-1". Данные представленные в виде таблицы:

Пара рангов	Порядок рангов	Пара рангов	Порядок рангов	Пара рангов	Порядок рангов	Пара рангов	Порядок рангов
AB	+1	BF	+1	DE	-1	FH	+1
AC	+1	BG	-1	DF	+1	FI	+1

Па ра ра нго в	По ряд ок ран гов	Пара ранг ов	Поря док ранг ов	Пар а ранг ов	Поряд ок рангов	Пара ранго в	Поря док ранго в
AD	+1	BH	+1	DG	+1	FJ	+1
AE	+1	BI	+1	DH	+1	GH	+1
AF	+1	BJ	-1	DI	+1	GI	+1
AG	+1	CD	-1	DJ	+1	GJ	+1
AH	-1	CE	+1	EF	+1	HI	-1
AI	-1	CF	+1	EG	+1	HJ	+1
AJ	+1	CG	+1	EH	+1	IJ	+1
BC	+1	CH	+1	EI	+1		
BD	+1	CI	+1	EJ	+1		
BE	+1	CJ	+1	FG	+1		

По данным таблицы:

P = 38 (количество пар рангов с прямым порядком);

Q = 7 (количество пар рангов с обратным порядком);

n =10 (общее количество рангов);

S = P-Q= 38-7=31

$$C_n^2 = n(n-1)/2 = 10(10-1)/2 = 90/2 = 45$$

$$\tau = \frac{31}{45} = 0.69$$

Гипотеза Н$_0$ подтвердилась: между величинами X и Y существует сильная положительная связь (при увеличении X значение Y также увеличивается).

Метод №2: для определения Р надо подсчитать количество пар рангов по ряду В={1, 4, 2, 3, 7, 6, 5, 9, 10, 8}, что имеют прямую связь. Так для первого элемента ряда "1", прямой порядок образовывают все девять элементов, которые находятся по правую сторону от нее. Для "1" таких элементов - 9, для "4" таких элементов - 6, для "2" таких элементов - 7, для "3" таких элементов - 6, для "7" таких элементов - 3, для "6" таких элементов - 3, для "5" таких элементов - 3, для "9" таких элементов - 1, для "10" таких элементов - 0, соответственно Р=9+6+7+6+3+3+3+1+0=38, и

$$\tau = \frac{2 \bullet \boldsymbol{P}}{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)/2} - 1 = \frac{2 \bullet 38}{10\,(10-1)/2} - 1 = 0.69$$

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена для данного примера равняется $\boldsymbol{R_s} = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{y}_i)^2}{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}^2 - 1)} = 1 - \frac{120}{990} = 0.88$.

Пример 4.4.: проверяется статистическая гипотеза о существовании корреляционной связи между валовым внутренним продуктом на душу населения и рождаемостью на 1000 единиц населения. В качестве пример избран 15 европейских стран.

Как нулевая гипотеза принимается: $Њ_0$ ="существует положительная связь" , как альтернативная: $Њ_1$="связи нет".

Пусть величина Х это - "ВВП на душу населения (долл. США)", а величина В это - "Рождаемость на 1000 од. нас. ".

Свойство Х и В определяются по интервальной (количественной) шкалой соответственно принимают естественные значения..

Распределение случайных величин Х и В представлены в виде таблицы:

№	Страна	ВВП на душу населения (долл. США)	Рождаемость на 1000 ед. нас.
		Х	У
1	Люксембург	36400	12.25
2	Дания	25500	11.96
3	Бельгия	25300	10.74
4	Австрия	25000	9.9
5	Нидерланды	24400	11.85
6	Германия	23400	9.35
7	Испания	18000	9.26
8	Греция	17200	9.83
9	Чехия	12900	9.1
10	Венгрия	11200	9.26
11	Эстония	10000	8.7
12	Беларусь	7500	9.27
13	Литва	7300	9.77
14	Латвия	7200	7.8
15	Болгария	3000	8.06

По данным таблицы:

$r_{xy} = 0.83$

Гипотеза $Њ_0$ подтвердилась: между величинами X и Y существует сильная положительная связь (при увеличении X значение Y также увеличивается).

Пример 4.5.: проверяется статистическая гипотеза о существовании корреляционной связи между валовым внутренним продуктом на душу населения и членством страны в Европейском Союзе. В качестве пример избран 15 европейских стран.

Как нулевая гипотеза принимается: $Њ_0$ ="существует положительная связь" , как альтернативная: $Њ_1$="связи нет".

Пусть величина X это - "ВВП на душу населения (долл. США)", а величина В это - "Членство в ЕС".

Свойство X определяется по интервальной (количественной) шкалой, соответственно X_i принимает естественные значения.

Свойство В определяется по номинальной шкале с вариантами ответов "Так" и "Ни", соответственно Y_i принимает значение 1 и 0.

Распределение случайных величин X и В представлен в виде таблицы:

№	Страна	ВВП на душу населения (долл. США)	Членство в ЕС
		X	У
1	Люксембург	36400	1

2	Дания	25500	1
3	Бельгия	25300	1
4	Австрия	25000	1
5	Нидерланды	24400	1
6	Германия	23400	1
7	Испания	18000	1
8	Греция	17200	1
9	Чехия	12900	0
10	Венгрия	11200	0
11	Эстония	10000	0
12	Беларусь	7500	0
13	Литва	7300	0
14	Латвия	7200	0
15	Болгария	3000	0

По данным таблицы:

$\bar{x}_1$

=(36400+25500+25300+25000+24400+23400+18000+17200)/8=24 400

$\bar{x}_0$ =

(12900+11200+10000+7500+7300+7200+3000)/7=8442.86

δ_x= 9464.43 (стандартное отклонение n значений по X);

n_1 = 8 (число объектов, которые имеют единицу по Y);

n_0 =7 (число объектов, которые имеют нуль по Y);

R=0.87

Гипотеза Њ$_0$ подтвердилась: между величинами X и Y существует сильная положительная связь (при увеличение X значение Y также увеличивается).

Индивидуальная задача.

1. Предложить и самостоятельно проанализировать систему в области международных отношений.

2. Используя методы корреляционного анализа проверить наличие и силу связи между исследуемыми величинами, исследование проводить по схеме типичной задачи (Пример 4.1- 4.5.).

Вопросы допуска к лабораторной работе

1. Охарактеризовать типы шкал, которые используются для измерения случайных величин в системе.
2. Охарактеризовать основные этапы корреляционного анализа.
3. Охарактеризовать коэффициент корреляции, и его показатели.
4. Охарактеризовать понятие множественной корреляции.
5. Охарактеризовать понятие частной корреляции.
6. Определить коэффициент корреляции, которая используется для номинальных величин.
7. Определить коэффициент корреляции, что используется, если одна из сменных измеряется за номинальной, а другая - за количественной шкалой.
8. Определить для каких величин применяется коэффициент корреляции Спирмена.

9. Определить для каких величин применяется коэффициент корреляции Кандела.
10. Определить для каких величин применяется коэффициент корреляции Пирсона.

Вопросы к защите лабораторной работы

1. Обосновать выбор системы для выполнения индивидуальной задачи.
2. Определить цель и задачу исследования проведенного в индивидуальной задаче.
3. Охарактеризовать предложенную систему за основными характеристиками.
4. Обосновать причинно-следственные связи у системы, которая исследовалась в индивидуальной задаче.
5. Обосновать выбор переменных величин, которые избрано для исследования, проведенного в индивидуальной задаче.
6. Проанализировать исследование зависимостей корреляции от выбора шкалы измерения.
7. Сравнить полученные в индивидуальном задании причиненные числовые показатели коэффициентов корреляции, обосновать их расхождения.
8. Определить ограничение применения корреляционного анализа.

ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ

1. Гондюл В.П., Добржанская О.Л. Методические указания к выполнению лабораторных робот из нормативной дисциплины "Системный анализ". - К.:ІМВ, 2003.- 57 с.
2. Макарова Н. В., Трофимец В. Я. Статистика в Excel. - Г.: Финансы и статистика, 2002. - 368 с.
3. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере/ под ред. В.Э. Фигурнова - М.: Инфра-М, 1998. - 528с.
4. Циба В.Т. Математические основы социальных исследований: квалиметричный подход. - К.:МАУП, 2002. - 248 с.
5. Томенко М., Бадешко Л., Гребельник В. Гребельник О., Грицяк И., Михеенко Ю., Поджигатель О. Парахонский Б., Погарский Я., Томенко В. Азбука Украинской политики. - К.: Факел, - 2002. - 368.
6. Боровиков В. STATISTICA: искусство анализа данных на компьютере. Для профессионалов. - Спб.: Питер, 2001. - 656 с.
7. Казиев В.М. Введение в системный анализ и моделирование. ИМОАС, 2001. - 115 с.
8. Корнилов Г.И. Основы теории систем и системного анализа. Кривой Рог.: Институт делового администрирования, 1996. - 76 с.

Основная литература к курсу:

1. Абт, СС, и Гордон, М. (1969) Отчет о TEMPER проекта, в Прюитт, Д., и Снайдер, RC (ред). *Теория и исследования о причинах* войны. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.
2. Баутиста, RM (1988). Макроэкономические модели для Восточной Азии развивающимися странами. *Азиатско-Тихоокеанского экономического* Литература, 2 (2), 1-23.
3. Brecke, П. (1995). Советский глобальной модели:. SIM / ВВП *Моделирование и* Игры, 26 (1) 17-26.
4. Барни, GO (1980). *Глобальная 2000: Доклад Президента США: Ввод* *21-й* *век.* Вашингтон, округ Колумбия: Печать Правительство США Управление.
5. Барни, GO (1993). *Глобальная программа-2000 Revisited: Что мы будем* делать?. Арлингтон, штат Вирджиния: Миллениум институт.
6. Бремер, SA (1977). *Имитация миров: компьютерная модель национального принятия* решений. Принстон: Princeton University Press.
7. Бремер, SA (ред.) (1987). *ГЛОБУС Модель: Компьютерное моделирование Worldwide политических и экономических* событий. Боулдер: Уэствью Пресс.
8. Броды, PA (1963). Некоторые системные эффекты распространения оружия ядерных технологий: исследование через моделирование в нескольких ядерных будущее. *Журнал* конфликтологии, 7 (4), 665-753.

9. . Бруннер, РД, и Брюер, Д. (1971) *организованной сложности: Эмпирические теории политического* развития.Нью-Йорк: Свободная пресса (Макмиллан).
10. Чедвик, RW (1967). Эмпирический тест Пяти Предположения в межнациональных моделирования о национальных политических систем. *Дополнительная систем* ежегодника, 12, 177-192.
11. Чедвик, RW (1969). Индуктивное, эмпирический анализ внутри- и международного поведения, направленных на частичное распространение межнациональных моделирования теории. *Журнал исследований* мира, 6 (3), 193-214.
12. Чедвик, RW (1972). Теория Развитие через моделирование. *Международных исследований* Quarterly, 16 (1), 83-127.
13. Чедвик, RW (1985). G-карте [так в оригинале] Проект: Многонациональная Утилита в аналитической моделирования, в Лестницы, G. (Ed). *Форсайт планирования: реалии и отказоустойчивость на границе политики. Отдельные презентации с конференции Всемирной группы Политика* роста. Дарем, Северная Каролина: Иногда Paper Series, Центр международных исследований, Университет Дьюка.

14. Чедвик, RW (1986). Ричардсон Процессы и оружия Трансферы 1971-1980:. Предварительный анализ *Журнал исследований* мира, 23 (4), 309-328.
15. Чедвик, RW (1989). Древняя Восточная философия и современное Глобальное моделирование. *Принятие решений Теория и* практика, 1 (1), опубликованные в китайцев в КНР; TR. Лу Цзянь-Jun. Выдержки, опубликованные в имитации на службе общества, *моделирование, (),*.
16. Кларк, Дж, и Коул, С. (1975). *Глобальные модели Моделирование: Сравнительное* исследование. Нью-Йорк: John Wiley & Sons.
17. . Коул, HSD, Freeman, C., Ягода, M., & Павитт, LR (1973) *Модели Doom: Критика Пределов* роста. Нью-Йорк: Вселенная книги.
18. Коплин, WD & O'Лири, MK (1976). *Принц обывателя: Руководство к пониманию ваших политических*проблем. North Scituate, Массачусетс: Даксбери Пресс.
19. Коплин, WD (1968). *Моделирование в исследовании* политики. Нью-Йорк: Маркхэм.
20. Деминг, WE (1986). *Из* кризиса. Кембридж: Массачусетский технологический институт, Центр перспективных инженерных исследований.

21. Деминг, WE (1991). *Новая* экономика. Кембридж: Массачусетский технологический институт, Центр перспективных инженерных исследований.
22. Эдвардс, П. Н. (1996). Глобальные комплексные модели в политике и политики, *изменении* климата, 32, 149-161.
23. Старший, CD, и Pendley, RE экономической модели и стабильность правительства: Реконструкция межнационального моделирования. В Guetzkow, H., & Валадеза, JJ (1981). *Искусственным международных процессов: теории и исследования в области моделирования* глобального. Беверли-Хиллз: Sage Publications, 65-100.
24. Форрестер, JW (1989). *Начало динамики систем.* Система Динамика Общество банкетный разговоры доставлен 13 июля [й.] Веб-сайт: ftp://sysdyn.mit.edu/ftp/sdep/papers/D-4165-1.pdf
25. Форрестер, JW (1971). *Мировой* Динамика. Кембридж: Райт-Аллен Пресс.
26. Форрестер, JW (1998). *Проектирование* будущего. Разговор приведен в Университетад де Севилья, Севилья, Испания, 15 [декабря-й.] Веб-сайт: ftp://sysdyn.mit.edu/ftp/sdep/papers/Designjf.pdf
27. Gigengack, AP и др. (1987) Военные Динамика расходов и модели мира, в Шмидту, С, и Blackaby, Ф. *Мир, обороны и экономического* анализа. Лондон: Макмиллан Пресс Лтд, 321-341.

28. Guetzkow, H. (L950). Длинные Исследования Диапазон в области
международных *отношений. Американский*Перспектива. 4 (4), 421-440.
29. Guetzkow Х., Элгар, CF, Броды, PA, Ноэль, RC, Снайдер и, RC (1963). *Моделирование в области международных отношений: Разработки для исследований и* преподавания. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.
30. Guetzkow, Х., и Валадес, JJ (1981). *Имитация Международные процессы: Теории и исследования в области моделирования* глобального. Беверли-Хиллз: Sage Publications.
31. Guetzkow, Х. (1995). Воспоминания о межнациональных моделирование (INS) и некоторые производные в Глобальное моделирование. *Моделирование и* игр, 26 (4).
32. Эррера, AO, Scolnik, HD, Chichilnisky Г., Галлопин, GC Hardoy, JE, Мосович Д., Отейса Е., Брест, Л. де Р., Суарес, CE, & Талавера, Л. (1976) . *Катастрофа или новое общество? Латиноамериканский модели* мира.Оттава: Международный научно-исследовательский центр развития.
33. Герман, CF (1967). Проверка Проблемы игры и симуляции со специальной ссылкой на модели международной политики. *Поведенческие* науки, 12, 216-231.

34. Хьюз, ВВ (1985). *Мировой Фьючерсы: Критический анализ* альтернатив. Балтимор: Джонса Хопкинса университета.
35. Хьюз, ВВ (1999). *Международный фьючерсы: выбор в условиях* неопределенности. Боулдер: Уэствью Пресс.
36. Кан, Х. (1960) *О термоядерной* войне. Принстон: Princeton University Press.
37. . Лассуэлл, HD, и Каплан, А. (1950) *Мощность и общество: Рамки для политического* расследованию. Нью-Хейвен: Издательство Йельского университета.
38. Лассуэлл, HD (1963). *Будущее* политологии. Нью-Йорк: Атертон Пресс.
39. Леонтьев, В., и Duchin, Ф. (1983). *Военные расходы: факты и цифры, во всем мире последствия и*перспективы. Нью-Йорк: Oxford University Press.
40. Линнеманн, Х. Де Hoogh, Дж, Кайзер, М., & Ван Heemst, Х. (1979). *Мойра - модель международных отношений в сельском* хозяйстве. Амстердам: Северная Голландия издательская компания.
41. Маслоу, АХ (1954). *Мотивация и* личность. Нью-Йорк: Харпер и Роу, издателей.
42. Луга, DH, Meadows, DL, Рандерс, Дж, и Беренс III, WW (1972). *Пределы роста: доклад для Римского клуба ПРОЕКТ на затруднительное* человечества. Нью-Йорк: Вселенная книги.

43. Луга, DL, Беренс III, WW, луга, DH, Naill, РФ, Рандерс, J., и Зана, EKO (1973). *Динамика роста в конечном* мире.Кембридж: Райт-Аллен Пресс.
44. Луга, DH, Meadows, DL, и Рандерс, J. (1992) *за* пределы. Сообщение Миллс, Вт: Челси Грин издательская компания.
45. Месаровича, М., & Пестель, Е. (1974). *Человечество в точке поворота: Второй Доклад Римского* клуба.Нью-Йорк: EP Даттон & Co., Inc.
46. Onishi, A. (1977). FUGI-Фьючерсы глобальной взаимозависимости в затраты-выпуск подходов в Глобальной моделирования, в Bruckmann, G. (ред.) *Труды Пятой ИИАСА симпозиум по глобальным моделированию.*МИПСА Труды 9, 91-357. Оксфорд: Пергамон.
47. . Onishi, A. (1994) *Глобальный Имитационная модель: новые горизонты экономики и систем* науки. Токио: Сока Университет, Институт системного науки, Хатиодзи, префектура Токио 192.
48. Poldy, Ф. (1986). *ОБЛАСТЬ Модель* Справочник. Канберра: Правительство Австралии Издательская служба.
49. Раджу, Шрипада К.С., & Дон Макрей (1981) Голосование участников в СКС семинара по модели приемки: некоторые предварительные результаты, в *Ист-Вест Центр взносам в семинаре по модели приемки, Вашингтон, округ Колумбия, 22-23 апреля*

1981 года. Гонолулу: Восток-Запад Центр, Глобальные модели и процесс политики (G-МАПП) Проект.

50. Рапопорт, А. (1957). Математическая теория Льюиса Фрай Ричардсон *войны. Журнал конфликтов* революции,1 (3), 249-299.
51. Разер, JR, Кэмпбелл, DT, и Чедвик, RW (1970). Игры и моделирование для разработки теории, имеющие отношение к международным отношениям, *Генеральной системы* ежегодника, 15, 183-204.
52. Ричардсон, Л. Ф. (1960). *Оружие и отсутствие безопасности: Математическая Изучение причин и истоков* войны. Питтсбург: Самшит Пресс.
53. Ричардсон, Л. Ф. (1960). *Статистика Deadly* ссоры. Питтсбург: Самшит Пресс.
54. Шухарта, Вашингтон (1931). *Экономический контроль качества производимого* продукта. Нью-Йорк: Ван Norstrand. Печатается 1986, Ceepress, Университет Джорджа Вашингтона.
55. Симон, НА (1957). *Модели парня: социального и* Rational. Нью-Йорк: John Wiley & Sons, Inc.
56. Симмонс, Х. (1973). Системная динамика и технократии, в Коул, HSD, Freeman, C, Ягода, M., & Павитт, Л. (1973). *Модели Судьбы: Критика Пределов* роста. Нью-Йорк: Вселенная книги, 207.
57. Отношение к курению, П. (1981). Международных процессах Моделирование в Guetzkow, H., & Валадеза,

JJ*Имитация Международные процессы: Теории и исследования в области моделирования* глобального.Беверли-Хиллз: Sage Publications, 101-133.

58. Снайдер, RC, Брук, HW, и Sapin, Б. (1962). *Внешняя политика принятия решений: подход к изучению международной* политики. Нью-Йорк: Свободная пресса.
59. Варфилд Ю.Н. (1996). Wandwaver Решение. Фэрфакс, штат Вирджиния: Университет Джорджа Мейсона, Институт перспективных исследований в интегративных наук. Веб-сайт: http://www.gmu.edu/departments/t-iasis/wandwaver/wandw.htm.
60. Самарский А.А., Михайлов А.П. Курс математического моделирования. - Г., 1997.
61. Аврамчук Э. Ф. и др. Технология системного моделирования. - Г.: Машиностроение, 1988.
62. Арнольд В.И. Теория катастроф. - Г., 1990.
63. Вознесенский В.А., Ковальчук А.Ф. Принятие решений по статистическим моделям. - Г., 1978.
64. Общая теория статистики. Под ред. А.А.Спирина. - Г., 1995.
65. Плотинский Ю.М. Математическое моделирование динамики социальных процессов. - Г., 1992.