А.А.БАКАЕВ, В.И.ГРИЦЕНКО, И.С.САКУНОВА

ИМИТАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Киев – Логос – 2009

ББК 65.40в6
Б19
УДК 62.507:338

Бакаев А.А.
Б19 Имитационные методы и модели исследования материальных потоков логистических систем / А.А. Бакаев, В.И. Гриценко, И.С. Сакунова. – К.: Логос, 2009. – с. 212. Библиогр.: с. 208 – 210.

ISBN 978-966-171-160-9

Теория и практика управления логистическими системами требуют привлечения различных методов создания систем непрерывного прогнозирования, контроля и оперативного управления материальными потоками. Одним из необходимых и успешно реализуемых направлений решения возникающих задач является математическое моделирование материальных потоков, осуществляемое в соответствии с комплексной концепцией управляющих решений. В монографии предлагается ряд теоретически обоснованных методов и моделей, исследующих материальные и информационные потоки логистических систем.

Рассчитана на специалистов в области реализации математических методов и моделей сложных экономических систем, аспирантов и студентов экономических и технических вузов.

Теорія і практика управління логістичними системами потребують залучення різноманітних методів створення систем безперервного прогнозування, контролю та оперативного управління матеріальними потоками. Одним з необхідних та успішно здійснюваних напрямків вирішення виникаючих задач є математичне моделювання матеріальних потоків, яке здійснюється у відповідності із комплексною концепцією управлінських рішень. В монографії запропоновано ряд теоретично обґрунтованих методів та моделей, що досліджують матеріальні та інформаційні потоки логістичних систем.

Розрахована на спеціалістів в галузі реалізації математичних методів та моделей складних економічних систем, аспірантів і студентів економічних та технічних вузів.

Р е ц е н з е н т ы:
Академик НАНУ, доктор технических наук В.И.Скурихин,
доктор экономических наук, профессор Е.Н.Сыч

Рекомендовано к печати Ученым советом Международного научно-учебного центра информационных технологий и систем НАНУ от 21.05. 2009 г. (протокол № 5)

ISBN 978-966-171-160-9

ВВЕДЕНИЕ

Совершенствование интеграционных процессов в экономике во всем мире обусловило наряду с другими формами регулирующего воздействия становление и активное развитие нового в экономической сфере научно-практического направления – логистики как одной из эффективных форм интеграции снабжения, производства, транспортного распределения и рынка с широким привлечением современных технических средств.

Концептуальная сущность логистики интерпретируется как совокупность средств и способов комплексного разрешения проблем, возникающих в процессе управления материальными и информационными потоками, с целью гармонизации интересов всех участников процесса перемещения потоков. Другими словами, современный логистический подход рассматривается как теория и практика управления материальными потоками, смещающая приоритеты в экономической деятельности от исследования субъектов перемещения к управлению потоковыми процессами.

Ключевую роль в логистической цепи перемещения материальных ресурсов играет транспорт, который, являясь отраслью материального производства, сам, в свою очередь, имеет и предлагает свою продукцию – процесс перемещения или транспортные услуги. Объектами рассмотрения являются, в частности, магистральный и промышленный транспорт, водный транспорт, контейнерные и пакетные перевозки и т. п.

Одним из основных методологических принципов логистики является системный подход, в соответствии с которым логистические системы включаются в общепринятое понятие системы или сложной системы.

В процессе создания таких логистических систем возникает задача поиска оптимального управления материальными потоками, целью которой в общем виде является реализация комплекса логистики, обеспечивающего необходимое количество товара необходимых вида и качества в нужном месте и в нужное время для нужного потребителя с минимальными или заданными затратами.

Экономические, в том числе логистические системы, необходимость изучения которых возникает на практике, во многих случаях представляют собой довольно сложные ситуации, разрешение которых, как правило, не подходит ни под одну из классически разработанных схем. В таких случаях приходится прибегать к методам искусственной имитации поведения сложных систем.

Одним из успешных разрешений комплекса логистики является создание математических моделей реальных транспортно-перегрузочных систем с моделированием воздействия на них внешних случайных факторов, а также возникновения в них ряда проблемных ситуаций.

Моделирование позволяет находить математические ожидания искомых неслучайных характеристик исследуемых систем и оптимизировать поле управляемых параметров при различных вариантах предпочтения целевой функции. Полученные рекомендации принимаются к сведению при создании систем планирования перевозок, в процессе реконструкции объектов транспортных узлов и пр.

Сложность исследуемой логистической системы диктует выбор средства ее формального описания в виде универсальной алгоритмической схемы с концептуальной базой, с высокой степенью адекватности и точности получаемых результатов. Желательно также, чтобы такая схема обладала достаточной информационной емкостью, и в то же время простотой в отражении алгоритмических особенностей, стандартизацией и унификацией построения моделей. В этом плане весьма привлекательными являются схемы моделирования с помощью систем кусочно-линейных и кусочно-непрерывных агрегатов, а также схемы моделирования с помощью систем агрегатов специального вида - вероятностных автоматов (СВА) Мура с детерминированными выходами.

Данная работа освещает использование агрегатных и автоматных схем имитационного моделирования, а также их некоторых модификаций в решении задач управления материальными потоками.

Глава 1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

1.1.Задача поиска оптимального управления материальными потоками

Основополагающей функцией логистики, как известно, является организация единого потокового процесса перемещения материалов и информации от ресурсного первоисточника к конечному потребителю.

Главная цель логистической деятельности в данном контексте определяется как оптимизация цикла воспроизводства путем формирования потока материалов и информации, обеспечивающего наилучшее и быстрейшее предложение в ответ на рыночный спрос. Одной из основных задач логистики является минимизация совокупных затрат при формировании и перемещении материальных потоков.

Исследование материальных потоков служит первоосновой для постановки и решения задач комплексной оптимизации технологических процессов производства, материально-технического обеспечения, транспортировки и сбыта продукции. Материальный поток, являясь основной, ключевой категорией логистики, интерпретируется как единое целое, как непрерывное перемещение продуктов труда в процессе применения к ним различных логистических операций.

Термин "Логистическая операция" в соответствии с трактовкой в различных литературных источниках по проблемам логистики [11, 25, 33, 47, 48, 49] – это определенная совокупность действий по реализации логистических функций, направленных на формирование ресурсного потока, его транспортировку, переработку и сбыт готовой продукции.

Выделим основные логистические операции по природе потока:

1) логистические операции с материальными потоками: производство, комплектация, складирование, погрузка, транспортирование и разгрузка;

2) логистические операции с информационными потоками: сбор информации, сохранение информации, переработка информации, передача информации;

3) к логистическим операциям следует отнести **регулирующие операции** по управлению материальными потоками: прогнозирование, контроль, оперативное управление, математическое моделирование и оптимизация в соответствии с комплексной концепцией управляющих

решений, характеризующейся всесторонним учетом всех организационно-технологических аспектов, а также рациональным использованием логического мышления и интуиции, математических методов и методов программирования при формировании и выборе решений.

Совокупность материальных объектов одного наименования образует **однородный материальный поток (ОМП)**, имеющий началом конкретный источник производства и завершающийся конкретным местом и временем потребления. Такой материальный поток в литературе определяется как элементарный. Примерами однородных материальных потоков служат потоки сырья, комплектующих, вспомогательных материалов, полуфабрикатов, готовой продукции одного вида. Множество элементарных материальных потоков образует интегральный материальный поток, обеспечивающий функционирование сложной логистической системы.

Каждому однородному материальному потоку соответствует некоторая совокупность информационных потоков, определяющая его структурно-функциональные составляющие - характеристики:

- **временная составляющая**: непрерывный либо дискретный вид передвижения материальных объектов, принадлежащих данному ОМП; определение времени поступления материальных объектов потока в конкретную точку траектории перемещения материалов; скорость перемещения ОМП; прогнозируемые и реальные сроки выполнения заказа и доставки продукции;

- **структурная составляющая:** данный ОМП является входным, внутренним либо выходным; структурные связи данного ОМП с другими ОМП в логистической системе; параметры траектории перемещения материалов данного ОМП;

- **количественная составляющая:** наименование материального ресурса, образующего данный ОМП; количество материальных ресурсов, находящихся в конкретной точке траектории перемещения материалов потока; габаритные и весовые характеристики ОМП;

- **качественная составляющая:** качественное состояние ОМП в данный момент времени (пребывание в состоянии погрузки-разгрузки, процесс перемещения ОМП, состояние простоя по причинам поломки-ремонта, форс-мажорных обстоятельств, либо ввиду невозможности начала перемещения ОМП или невозможности доставки продукции к потребителю); уровень соответствия прогнозируемых характеристик ОМП реальным характеристикам; оценка обеспечения синхронизации процессов сохранения, доставки и сбыта продукции.

В процессе формирования современных логистических систем отлаживаются различные методы создания систем непрерывного оперативного планирования и оптимального управления материальными потоками. Одним из успешно реализуемых методов решения такой задачи является математическое моделирование всей логистической цепи: производство – транспорт – потребление.

По способу описания объекта математические модели следует разделять на алгебраические, регрессионно-корреляционные, вероятностно-статистические, математического программирования.

Возникновение и развитие компьютерной техники и языков моделирования и программирования, разработка разнообразных приемов получения случайных и псевдослучайных последовательностей и методов статистического исследования реальных процессов способствовали возникновению методов вероятностно-статистического моделирования. Так метод статистического моделирования прочно вошел в практику исследования вероятностных систем. Однако, вначале применение его носило неупорядоченный характер, при этом отсутствовали какие-либо общие принципы подхода к построению моделей и, что весьма важно, отсутствовала теоретически обоснованная концептуальная база, учитывающая стохастический характер реальных систем и гарантирующая выработку логической завершенности создаваемых языков моделирования.

В дальнейшем путем обобщения опыта решения задач моделирования больших систем удалось построить основные теоретические положения описания и моделирования вероятностных процессов.

В работах [7, 8, 26, 27, 28] сосредоточены основные положения общей теории вероятностно-статистического моделирования. В основу теории положено агрегатное описание моделей и представление моделирующего и оптимизационного алгоритмов модели в операторной форме.

При описании моделирующего алгоритма с помощью операторных схем алгоритм разбивается на определенные совокупности операций – на так называемые операторы. По своему назначению операторы разделяются на арифметические, операторы формирования, логические и вспомогательные. На практике вместо задания операторов часто пользуются мощным средством описания моделирующих алгоритмов при имитационном исследовании систем - операторной блок-схемой, являющейся изображением алгоритма в виде графа, в котором вершины соответствуют операторам, а дуги описывают передачу управления от одних операторов к другим. К недостаткам операторных схем можно отнести - в случае создания моделей достаточно сложных систем - довольно большое нагромождение информации, недостаточно наглядное отражение функциональных и структурных свойств имитируемого процесса, смешение основной части модели, имитирующей функционирование системы, и служебной ее части.

Разбиение системы на отдельные взаимодействующие части гораздо удобнее отражать с помощью математических объектов, представляющих собой особый тип преобразователя информации – агрегатов и агрегатных систем [7, 8, 9].

Агрегат задается определением множества состояний Z, множества входных сигналов X, множества выходных сигналов Y, множества управляющих сигналов Г, двух операторов выходов G_1 и G_2 и трех операторов переходов - U, V_1, V_2. Агрегат функционирует как в непрерывном, так и в дискретном режиме времени. Для начального момента моделирования определяется начальное состояние агрегата. Агрегат также определяется некоторым не изменяющимся во времени конструктивным параметром $\beta \in B$.

Величины $z \in Z, x \in X, y \in Y, g \in \Gamma, \beta \in B$ являются векторными. Операторы G_1, G_2, U, V_1, V_2, вообще говоря, случайные. Первый оператор выходов $G_1 = G_1(t, z(t), g(t), \beta)$ определяет моменты времени выдачи непустых выходных сигналов. Другой оператор выходов $G_2 = G_2(t, z(t), g(t), \beta)$ находит значения выдаваемых выходных сигналов.

Если в момент времени t' поступает некоторый входной сигнал и не поступает управляющий сигнал, значение состояния агрегата $z(t'+0)$ в этом случае определяется с помощью оператора V_1:

$$z(t'+0) = V_1(t', z(t'), g(t'), x(t'), \beta).$$

Если t''- момент поступления управляющего сигнала, тогда значение состояния агрегата $z(t''+0)$ определится с помощью оператора V_2:

$$z(t''+0) = V_2(t'', z(t''), g(t''), \beta).$$

Если в один и тот же момент t''' поступают и входной, и управляющий сигналы, значение состояния агрегата $z(t'''+0)$ будет:

$$z(t'''+0) = V_1(t''', z''(t'''+0), g(t'''), x(t'''), \beta).$$

Здесь $z''(t'''+0)$ определяется с помощью оператора V_2.

Если в промежутке (t_1, t_2) не поступают ни входной, ни управляющий сигналы, а в момент t_2 поступил один из них, либо оба одновременно, тогда для каждого $t \in (t_1, t_2]$ значение состояния агрегата $z(t)$ определится с помощью оператора перехода U:

$$z(t) = U(t, t_1, z(t_1+0), g(t_1), \beta).$$

Таким образом, с учетом начального состояния агрегата и управляющего сигнала $(z(t_0), g(t_0))$ с помощью оператора U находятся значения состояний агрегата для всего промежутка времени до поступления первого входного или управляющего сигнала; с помощью оператора G_1 находятся моменты времени выдачи выходных сигналов в данном промежутке; с помощью оператора G_2 - значения выдаваемых сигналов.

Когда на вход агрегата поступает некоторый входной или управляющий сигнал, новое значение агрегата находится с помощью операторов $V_1 \vee V_2$. Весь процесс повторяется снова в том же порядке.

Модели систем с разветвленной структурой строятся уже в виде систем взаимосвязанных агрегатов. В этом случае выходные сигналы одних агрегатов отождествляются с входными или управляющими сигналами других агрегатов.

Для описания функционирования весьма сложных систем удобно строить имитационную модель в виде кусочно-линейных процессов, предложенных в [27, 28].

Кусочно-линейный процесс – это марковский процесс

$$\zeta(t) = \{\nu(t); \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_{|\nu(t)|}(t)\},$$

где $\nu(t)$ - дискретная компонента $(\nu(t) \in E)$ и $|\nu(t)| = 0$ тогда и только тогда, когда $\nu(t) = 0$; ξ_k $(k = 1,2,\dots)$ - непрерывные компоненты $(\xi_k \in P)$. Кусочно-линейный процесс определяется следующим перечнем :

1) начальное распределение вероятностей

$$P\{\nu(0) = \nu; \xi_1(0) < x_1, \xi_2(0) < x_2, \dots\} \quad (\nu \in E; x_k \in P);$$

2) семейство векторов

$$\alpha_\nu = \{\alpha_{\nu_k}\} \quad (\alpha_{\nu_k} \ge 0; \nu \in E, \nu \ne 0);$$

3) семейство стохастических матриц $\{P_{\nu\mu}^{(i)}\}$

$(\nu, \mu \in E;\ 1 \le i \le |\nu|, P_{\nu\mu}^{(i)} \ge 0\ при\ |\mu| = |\nu| - 1$ и $P_{\nu\mu}^{(i)} = 0$ в противном случае);

4) вероятности $\lambda_{\nu\mu} \begin{cases} \ge 0\ при\ |\mu| > |\nu|, \\ = 0\ при\ |\mu| \le |\nu|; \end{cases} \quad (\nu, \mu \in E);$

5) семейство совместных распределений

$$H(x_1,...,x_\delta)=P\{\eta_1<x_1,...,\eta_\delta<x_\delta\} \quad (\delta\in E;\, x_k\in P).$$

Развитие процесса представляет собой совокупность изменений таких типов: спонтанных, управляемых и равномерных. Спонтанные изменения представляют собой изменения значений дискретной компоненты $\nu(t)$ процесса, которая за малое время τ переходит из состояния ν в состояние μ с вероятностью $\lambda_{\nu\mu}\tau+0(\tau)$. В этом случае к вектору $\zeta(t)$ добавляется $|\mu|-|\nu|$ новых компонент $\eta_1,...,\eta_{|\mu|-|\nu|}$, их значения выбираются в соответствии с распределением $H(x_1,...,x_{|\mu|-|\nu|})$. Управляемые изменения исключают из вектора $\zeta(t)$ его непрерывную компоненту, обратившуюся в данный момент времени в нуль. В это время значение дискретной компоненты $\nu(t)$ в соответствии с распределением $P_{\nu\mu}^{(i)}$ изменяется с ν на μ. Равномерные изменения процесса заключаются в равномерном убывании значений непрерывных компонент вектора $\zeta(t)$ с такими скоростями:

$$\xi_k(t)=-\alpha_{\nu_k} \quad (k=\overline{1,|\nu|},\nu(t)=\nu).$$

Кусочно-линейный процесс, учитывающий внешнее воздействие посредством входного сигнала, приводит к понятию **кусочно-линейного агрегата**. Имитационная модель, построенная с помощью системы кусочно-линейных агрегатов, представляет собой агрегативную систему специального класса, основной особенностью которой является постоянство скоростей убывания значений компонент внутреннего состояния. Если убывание значений компонент внутреннего состояния происходит не с постоянными скоростями, а со скоростями, управляемыми извне, вводится понятие кусочно-непрерывного агрегата.

В процессе решения практических задач имитационными методами появился ряд требований разработчиков к используемому методу формального описания исследуемых сложных систем, в частности, к удобству описания моделируемых объектов, к наглядности отображения структуры системы и алгоритма функционирования различных ее частей, к компактности и стандартизации формы моделирующего алгоритма, к обоснованию концептуальной базы используемого языка формализации, обеспечивающего соблюдение высоких требований к уровню адекватности и точности получаемых результатов.

Таким требованиям вполне отвечает математический язык описания сложных систем в виде систем одномерных агрегатов, называемых **вероятностными автоматами**.

Предваряя изложение определений вероятностного автомата и системы вероятностных автоматов, а также рассмотрение теоретических основ построения системы вероятностных автоматов (СВА), отметим, что автоматные модели весьма эффективно отображают динамику материальных потоков, реализуя регулирующие логистические операции с информационными потоками в виде моделей замкнутых или разомкнутых процессов перетекания [3]. Выбор метода автоматного моделирования для исследования материальных потоков логистических цепей обусловлен принадлежностью последних к системам, обладающим свойством ограниченности информационных связей между отдельными структурными блоками, и принципиальной возможностью имитации данного свойства с помощью СВА.

При проведении подробного статистического и алгоритмического анализа функционирования реальных материальных и информационных потоков удается расчленить действия случайных факторов на действия отдельных временно независимых случайных величин. Этот прием применяется довольно часто при формализации моделей сложных вероятностных систем. Если расширенный вектор временных характеристик системы дополнить рядом вспомогательных компонент, имитирующих поведение взаимно независимых случайных величин, то функционирование системы можно рассматривать как взаимодействие отдельных элементов, связанных между собой в виде системы СВА.

1.2. Вероятностные автоматы в моделях логистических систем

Одним из основных методологических принципов современной логистической концепции является системный подход [7, 8, 15, 26, 27, 28, 40], в соответствии с которым всем субъектам, именуемым сложными системами, присущи свойства такие, как обладание определенной совокупностью характерных особенностей, позволяющих обнаруживать структурную связь (взаимозависимость) между элементами системы; наличие определенных количественных характеристик, определяющих состояние системы и являющихся функциями времени; способность любой сложной системы взаимодействовать с внешней средой; участие различных случайных факторов в функционировании системы.

Действительно, изучение теории и практики управления материальными потоками как инструмента рыночной экономики приводит к актуализации понятия логистической сложной системы, исследуемой с конкретной конечной целью [11, 33, 47, 48].

Так как большинство реальных сложных систем, исследование которых обусловлено необходимостью решения различных практических задач, связано с действием разнообразных вероятностных факторов, особое значение при исследовании этих систем имеют методы теории вероятностей и смежных с ней математических дисциплин: теории случайных процессов, математической статистики, теории массового обслуживания, теории статистического моделирования.

Из всех известных способов математической формализации сложных систем наиболее общим и естественным является формализация их в виде многомерного случайного процесса, компонентами которого являются временные характеристики системы. Среди всех типов случайных процессов для этой цели больше всего подходит класс процессов Маркова [20].

В большинстве случаев в процессе моделирования принимается формализующая договоренность о дискретном времени функционирования систем. Для реальных систем, функционирующих в непрерывном времени, всегда можно выбрать соответствующий масштаб дискретного времени, позволяющий строить модель уже с дискретным временем моделирования. При формализации системы в дискретном времени с помощью случайного марковского процесса описание модели может быть сведено к заданию некоторой многомерной цепи Маркова. С этой целью вводится весьма существенное упрощающее предположение об ограниченности последействия марковского процесса. Приведем равенство, иллюстрирующее сведение наличия полного последействия между всеми значениями случайного вектора во все предыдущие моменты времени к зависимости между его значениями, распространяемой на ограниченное число шагов:

$$P\{\overline{X}(t+k) \le \overline{Z} / \overline{X}(0) = \overline{C_0}; \overline{X}(1) = \overline{C_1}; \ldots; \overline{X}(t+k-1) = \overline{C_{t+k-1}}\} =$$
$$= P\{\overline{X}(t+k) \le \overline{Z} / \overline{X}(t) = \overline{C_t}; \ldots; \overline{X}(t+k-1) = \overline{C_{t+k-1}}\},$$

где неравенства типа $\overline{X}(t) \le \overline{Z}$ и равенства типа $\overline{X}(t) = \overline{C_t}$ понимаются в смысле систем неравенств $x_i(t) \le z_i$ и систем равенств $x_i(t) = c_i$ $(i = \overline{1,n})$.

Данное равенство описывает n- мерную сложную цепь Маркова-Брунса $\overline{X}(t)$, в которой зависимость между значениями распространяется на k шагов.

Цепь Маркова, в которой зависимость распространяется всего лишь на один шаг, принято называть простой марковской цепью. С помощью приема расширения размерности вектора временных характеристик системы [3] можно осуществить последующее упрощающее ограничение последействия - сведение n - мерной цепи Маркова-Брунса к простой цепи $\overline{Y}(t)$ большей размерности, равной kn.

$$P\{\overline{Y}(t)=\overline{U}/\overline{Y}(0)=\overline{d_0};\overline{Y}(1)=\overline{d_1};...;\overline{Y}(t-1)=\overline{d_{t-1}}\}=$$
$$=P\{\overline{Y}(t)=\overline{U}/\overline{Y}(t-1)=\overline{d_{t-1}}\}.$$

Как известно, простая цепь Маркова может быть задана с помощью начального распределения вероятностей и матрицы переходных вероятностей. Однако, при практическом осуществлении такого задания возникают непреодолимые трудности, так как задание переходных вероятностей для многомерных цепей сопряжено с необходимостью оперировать пространственными стохастическими матрицами, зачастую оказывающимися бесконечными. Поэтому описание модели системы с помощью многомерной цепи Маркова, а также ее исследование представляют значительные практические трудности.

Чтобы преодолеть эти трудности, в ряде случаев прибегают к различным видам упрощения формализации. Так, прежде всего, следует обратиться к изучению вектора временных характеристик системы $\overline{Y}(t)$, стремясь выделить как можно более полный набор существенных, на взгляд исследователя, компонент вектора и впоследствии оперировать именно этим набором компонент. Фиксируя некоторую компоненту $y_l(t)$ $(l=\overline{1,n})$ вектора $\overline{Y}(t)$, где n - размерность простой цепи Маркова, описывающей систему, отнесем остальные его характеристики-компоненты по отношению к фиксированной к одному из двух классов в зависимости от истинности для каждой компоненты некоторого вероятностного соотношения, например такого вида:

$$P\{y_l(t+1)\le z_l/y_i(t)=c_i\}=$$
$$=P\{y_l(t+1)\le z_l/y_m(t)=c_m\quad(i\ne m;1\le m\le n;m\ne l)\}.$$

Каждую компоненту $y_m(t)$ $(m\ne l)$ отнесем к классу $H_0(l)$ в случае выполнения для нее данного соотношения, и к классу $H_1(l)$ - в противном случае. Такое разбиение компонент вектора временных характеристик системы дает возможность построения структурного конечного направленного графа (S,U) модели, вершины которого S_i $(i=\overline{1,n})$ отождествляются с компонентами вектора, а направленные дуги u_{ij} $(i,j=\overline{1,n};j\ne i)$ приведены только для случая $y_i(t)\in H_1(j)$. Конечный направленный граф (S,U) изображается в виде квадратной конечномерной матрицы, являющейся, по сути, **матрицей структурных связей модели**.

При формализации исследуемой системы весьма существенным является определение областей допустимых значений отдельных компонент марковского вектора и связей между ними. В литературе области допустимых значений принято называть **алфавитами**

компонент, при этом **алфавит вектора** определится как декартово произведение алфавитов компонент:

$$A = \alpha_1 \times \alpha_2 \times ... \times \alpha_m$$

Указание алфавитов всех компонент марковского вектора и всех связей между ними удобно объединить с матрицей структурных связей модели, в которой на пересечении каждой i-й строки и каждого j-го столбца ставится обозначение σ_{ij} алфавита связи между i-й и j-й компонентами вектора. Полученную матрицу, характеризующую с качественной стороны все связи между компонентами марковского вектора, назовем **матрицей алфавитов модели.**

Выяснение характера связи между компонентами вектора $\overline{Y}(t)$ приводит к построению соотношений, устанавливающих соответствие между значениями компонент и значениями их связей с другими компонентами вектора. Такие соотношения принято называть **функциями выходных значений компонент,** они могут быть представлены, например, в такой форме:

$$u_{ml}(t) = g_l\{y_m(t)\}\,(y_m(t) \in \alpha_m\,; u_{ml}(t) \in \sigma_{ml}).$$

Напомним, что возможность вычисления реализации каждой компоненты вектора $\overline{Y}(t)$ как реализации случайной величины с заданным распределением сопряжена с определением переходных вероятностей для переходов из каждого многомерного состояния марковской цепи в каждое другое ее состояние. Однако, задание переходных вероятностей для многомерных цепей Маркова представляет значительные трудности практического характера. Чтобы преодолеть такие трудности в ряде случаев прибегают к дальнейшему упрощению формализации, например, к рассмотрению простой однородной цепи Маркова, в которой реализованы свойства отсутствия последействия и эргодичности (возможности вхождения исследуемого процесса из переходного состояния в стационарный режим).

Эргодическое свойство марковской цепи является наиболее значительным и важным, поскольку вероятности эргодических состояний случайных величин, образующих цепь, стремятся к предельным значениям по мере увеличения номера случайной величины, не зависящим от начального состояния цепи. Применение свойства эргодичности исследуемой цепи Маркова позволяет рассматривать вероятности p_i цепи либо как среднюю долю времени пребывания цепи в определенном состоянии, либо как вероятность принятия значения i для случайной величины цепи, достаточно удаленной от ее начала. В случае исследования случайного процесса имитационными методами сведение исходного случайного процесса к простой однородной цепи Маркова позволяет использовать свойство эргодичности для получения усредненных искомых неслучайных характеристик моделируемой системы с целью построения целевой функции и ее оптимизации.

Условные распределения простой однородной цепи Маркова можно записать в виде квадратной **таблицы-матрицы вероятностей перехода**

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \end{pmatrix}$$

В этой таблице каждое условное распределение занимает строку, соответствующую номеру значения случайной компоненты цепи, реализация которой предполагается известной. В зависимости от конечности или счетности алфавита простой однородной цепи Маркова стохастическая матрица вероятностей перехода может быть конечной или бесконечной.

Для задания цепи как инициальной необходимо исходную информацию пополнить некоторым определенным **начальным распределением вероятностей**.

Итак, при сведении изучаемого случайного процесса к простой однородной цепи Маркова для задания такой цепи необходимо задать матрицу структурных связей между компонентами цепи, матрицу алфавитов соответствующих связей, функции выходных значений компонент, матрицу вероятностей перехода и начальное распределение вероятностей.

Однако при практическом осуществлении такого задания, особенно для случаев большой размерности, возникают непреодолимые трудности, поскольку задание переходных вероятностей сопряжено с необходимостью оперировать сложнейшими стохастическими матрицами.

Чтобы преодолеть такие трудности, можно прибегнуть к выделению некоторых частных подпроцессов, обеспечивающих с определенной степенью точности решение поставленной задачи, например, к методу вложенных цепей Маркова, когда на всей временной оси удается выбрать счетное множество таких моментов времени, в которые отдельные характеристики системы образуют марковскую зависимость.

Гораздо большими возможностями обладают более общие процессы: кусочно-линейные и кусочно-непрерывные, о которых речь шла в предыдущем пункте. Аналитическое исследование таких процессов, обладающих, как известно, большой математической строгостью и общностью, удается осуществить в отдельных конкретных случаях. В большинстве же случаев изучение систем, функционирующих по типу кусочно-линейных, либо кусочно-непрерывных процессов, приводит к необходимости применения имитационных методов, в том числе моделей, строящихся с помощью систем кусочно-линейных (кусочно-непрерывных) агрегатов – так называемых агрегативных моделей.

Агрегативная система, состоящая из взаимосвязанных простейших одномерных агрегатов, представляет собой систему вероятностных автоматов, рассматриваемую как конкретное стандартизированное описание некоторого многомерного марковского процесса определенного класса.

Понятие вероятностного автомата возникло с появлением математической теории автоматов [12, 42, 43], исследующей вопросы анализа и синтеза дискретных детерминированных цифровых автоматов как абстрактных преобразователей информации при конструировании объектов вычислительной техники, в системах автоматизации производственных процессов, при организации систем управления, при решении прикладных задач кибернетики. Дальнейшие исследования показали, что во многих случаях необходимо рассматривать не детерминированные, а вероятностные автоматы, поскольку в большинстве случаев в реальных ситуациях приходится иметь дело с влиянием на систему различных внешних и внутренних вероятностных факторов.

Свойства вероятностных автоматов нашли применение в области распознавания образов, в моделировании биологических, экономических, самонастраивающихся систем.

В зависимости от стоящих перед исследователем задач, в различных источниках приводятся различные определения вероятностного автомата, поскольку в одних случаях вероятностный фактор участвует только в формировании состояний автомата, в других – в формировании выходных сигналов, в третьих – в обоих механизмах одновременно. Иногда вводится понятие инициального вероятностного автомата – с закрепленным начальным состоянием, иногда – со случайным начальным состоянием. Иногда формирование выходного сигнала существенно зависит от значения входного сигнала, в других случаях определение выходного сигнала предусматривается через внутреннее состояние автомата.

Описываемый и применяемый в данной работе вероятностный автомат является дискретным инициальным вероятностным автоматом Мура с детерминированными выходами. Изменение состояний такого автомата и выдача выходных сигналов происходят в целочисленные моменты времени, начальное состояние является закрепленным, вероятностный фактор участвует лишь в формировании внутреннего состояния автомата, значение выходного сигнала зависит от значения входного сигнала лишь через внутреннее состояние. Таким образом, в каждый момент времени рассматриваются внутреннее состояние автомата, его входной и выходной сигналы, т.е., в каждый момент времени задаются внутренний алфавит автомата (множество допустимых значений внутреннего состояния), входной и выходной алфавиты (множества всех возможных значений входного и выходного сигналов), а также начальное состояние. Правило формирования состояния автомата в каждый момент времени учитывает зависимость от состояния этого автомата в предыдущий момент времени и значения входного сигнала и при этом отражает все случайные факторы, участвующие в функционировании автомата. Так, это правило может быть задано с помощью однопараметрического семейства квадратных стохастических матриц $A(x)$, где параметр x совпадает со значением входного сигнала, а матрица $A(x)$ при каждом фиксированном x имеет порядок, совпадающий с количеством элементов внутреннего алфавита. Затем для задания автомата необходимо определить правило выбора выходного сигнала, в нашем случае не содержащее вероятностных факторов.

Таким образом, **дискретный инициальный вероятностный автомат Мура с детерминированными выходами** может быть задан совокупностью шести объектов:

$$\langle X, U, D, a_0, A(x), \varphi(a)\rangle,$$

здесь X, U, D - входной, внутренний и выходной алфавиты автомата, a_0 - начальное состояние автомата, $A(x)$ - семейство стохастических матриц, определяющих правила перехода автомата из состояния в состояние, $\varphi(a)$ - функция выходов.

Исследование вероятностных автоматов показало, что во всех практических задачах система матриц $A(x)$ всегда отражает объективные свойства какого-то конкретного элемента, а это приводит к тому, что, начиная с некоторого номера строки каждой матрицы, наблюдается определенная закономерность номера матрицы (с некоторого значения входного сигнала) и при этом наблюдается закономерность в формировании самих матриц. Поэтому, описывая функционирование реального объекта с помощью вероятностного автомата, гораздо легче на основании прямых свойств объекта непосредственно составить конечную систему условных логических высказываний относительно внутреннего состояния автомата и его входного сигнала. Сама система логических высказываний на каждом шаге перевычисления состояния автомата должна образовывать тождественно истинное высказывание. Каждому условию должна соответствовать формула перевычисления состояний автомата – так называемый **условный функционал перехода автомата** в последующее состояние, поскольку:

а) каждое новое состояние автомата $a(t+1)$ вычисляется в виде произвольной функции;

б) эта функция зависит от предыдущего состояния автомата, от значения его входного сигнала, а также от реализации независимых случайных величин;

в) величины состояния автомата $a(t)$ и входного сигнала $x(t)$ в общем случае сами являются случайными функциями.

Таким образом, система логических высказываний и соответствующая ей система условных функционалов переходов автомата вместе образуют **таблицу условных функционалов переходов (ТУФП).**

Приведем пример вычисления состояния вероятностного автомата (с конечным внутренним алфавитом) путем построения ТУФП.

Зададим для автомата A, имеющего в качестве внутреннего и входного алфавитов множество всех натуральных чисел, систему матриц $A(x)$:

$$A(0)=\left|\begin{matrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & q_0 & q_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & q_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right|; \qquad A(1)=\left|\begin{matrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & q_0 & q_1 & q_2 & \cdots \\ 0 & 0 & q_0 & q_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right|;$$

$$A(2)=\left|\begin{matrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots \\ 0 & q_0 & q_1 & q_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right|; \qquad A(3)=\left|\begin{matrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ q_0+q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \cdots \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right|.$$

Очевидно, что первые две строки всех матриц $A(x)$ идентичны и не зависят от x; в каждой матрице каждая последующая строка, начиная с третьей строки, образуется из предыдущей путем сдвига на один элемент вправо, а недостающий элемент приравнивается к нулю; при увеличении x на единицу каждая строка матрицы $A(x+1)$, имеющая номер > 2, образуется из строки с тем же номером матрицы $A(x)$ путем сдвига ее влево на один элемент, при этом элемент, вышедший за пределы матрицы, прибавляется к элементу нулевого столбца.

Обнаруженные закономерности в построении выше приведенных четырех матриц позволяют заменить систему матриц $A(x)$ достаточно простой таблицей условных функционалов переходов. Для этого обозначим через ξ и η случайные величины с распределениями $\{p_0, p_1, p_2, ...\}$ и $\{q_0, q_1, q_2, ...\}$, где $p_k = P\{\xi = k\}$; $q_k = P\{\eta = k\}$.

Тогда можно записать, что при $a(t) = 0$ значение состояния автомата в следующий момент времени будет $a(t+1) = \xi$, а при $a(t) = 1$ - соответственно $a(t+1) = 1 + \xi$. Можно объединить эти два случая в логико-импликативной форме следующим образом:

$$a(t) \le 1 \to a(t+1) = a(t) + \xi.$$

Пусть $a(t) > 1$. Тогда в том случае, когда сумма состояния автомата в момент t и очередной реализации случайной величины η превышает значение входного сигнала $x(t)$, состояние автомата в следующий момент времени может быть либо реализацией случайной величины вида

$$a(t) + \eta - x(t),$$

либо нулевым состоянием. Как видим, состояние автомата $a(t+1)$ может быть вычислено при замене системы $A(x)$ бесконечного числа бесконечных матриц следующей ТУФП:

$$a(t+1) = \left\{ \begin{array}{c|c} a(t) \le 1 & a(t) > 1 \\ \hline a(t) + \xi; & \max\{0,\, a(t) + \eta - x\}. \end{array} \right.$$

В данном примере фигурирует случай, когда в каждой строке каждой матрицы $\in$ системе $A(x)$ присутствуют вероятности одного и того же распределения и автомат A имеет единственный вход.

Остановимся на весьма важном факте того, что всякий вероятностный автомат можно рассматривать как обобщение понятия марковской цепи. Предположим, что входные сигналы автомата A в различные моменты времени представляют собой взаимно независимые, одинаково распределенные случайные величины. Заменив в ТУФП обозначение входного сигнала обозначением соответствующей случайной величины, приходим к выводу, что в таблицу перевычисления состояний автомата входят лишь значения состояний этого автомата, реализации независимых случайных величин и константы. Такая ТУФП всегда может быть преобразована в систему стохастических матриц $A(x)$, состоящих лишь из одной матрицы. В таком случае вероятностный автомат превращается в однородную марковскую цепь.

Если же вероятностный автомат не является однородной марковской цепью, система стохастических матриц $A(x)$ должна состоять, как минимум, из одной пары матриц, различающихся между собой. Отсюда следует, что в ТУФП с необходимостью войдут значения входного сигнала, не являющиеся реализациями независимых, одинаково распределенных случайных величин.

Таким образом, достаточным и необходимым условием для утверждения того, что вероятностный автомат может быть обобщением однородной марковской цепи, является представление последовательности его входных сигналов в виде реализации взаимно независимых, одинаково распределенных случайных величин, либо когда входной сигнал не участвует в перевычислении состояний автомата. Будем говорить, что в этом случае вероятностный автомат обладает свойством марковости.

В дальнейшем нас будут интересовать совокупности вероятностных автоматов, обладающих свойством марковости и связанных между собой определенным образом, а именно: объединенных в системы вероятностных автоматов для построения моделей логистических систем. Свойство марковости вероятностных автоматов, объединенных в систему, позволяет перевычислять состояния автоматов СВА в каждый текущий момент времени лишь в зависимости от их состояний в предыдущий момент и состояний соответствующих векторов входных сигналов, а также обеспечивает вхождение переходного режима функционирования модели в стационарный режим.

1.3. Система вероятностных автоматов

Введем некоторые предварительные договоренности относительно объединения автоматов в систему. Построение системы реализуется отождествлением выходных сигналов одних автоматов с входными сигналами других. Для привлечения системы автоматов к созданию имитационных моделей целесообразно считать, что рассматриваемые автоматы обладают одномерным (числовым) внутренним состоянием. Предполагается, что количество автоматов является конечным и все автоматы функционируют в режиме единого дискретного времени. В том случае, когда на состояние автомата в текущий момент времени влияют старые состояния нескольких автоматов (в предыдущий момент), входной сигнал становится векторным. Из рассмотрения исключается вариант, когда выходные сигналы автомата отождествляются с его входными сигналами, т.е. они подаются на другие (зависящие от рассматриваемого) автоматы. Перевычисления состояний автоматов системы осуществляются в рамках таблицы условных функционалов переходов (ТУФП).

Будем считать, что **система инициальных вероятностных автоматов Мура с детерминированными выходами** (Y, Γ) построена, если одновременно выполняются следующие условия:

1. Задается некоторое конечное множество Y вероятностных автоматов A_S $(S=\overline{1,N})$, имитирующих свойства и поведение реальных объектов, обладающее всеми свойствами сложных систем: структурированностью, наличием количественных характеристик исследуемых систем, способностью взаимодействовать с внешней средой, наличием внешних и внутренних случайных факторов.
2. Задается направленный граф Г без петель с числом вершин N.
3. Все автоматы $A_S \in Y$ и вершины графа Г приводятся во взаимно однозначное соответствие.
4. Устанавливается режим единого дискретного времени функционирования автоматов системы.
5. Каждой дуге графа Г, соединяющей вершины с номерами S,R, ставится в соответствие некоторое числовое множество $\Re_{SR}$ $(\Re_{SR} \neq 0)$, совпадающее с выходным алфавитом автомата A_S и входным алфавитом автомата A_R.

Таким образом, исходя из определений вероятностного автомата и системы вероятностных автоматов **(СВА),** последняя может быть задана пятью объектами: матрицей алфавитов (МА), вектором начальных состояний (ВНС), системой функций выходов (СФВ), таблицей условных функционалов переходов (ТУФП), системой распределений случайных величин, участвующих в ТУФП.

Следует отметить, что распределения всех случайных величин, участвующих в построении ТУФП, предполагаются известными, т.е. должны быть заданными функциональная форма каждого распределения и его все параметры. Случайные величины присутствуют в ТУФП только в качестве автоматов, их идентифицирующих. Действительно, допустим, что некоторая случайная величина ξ участвует в функционале вычисления состояний $a_k(t+1)$ и $a_{k+n}(t+1)$ двух автоматов A_k и A_{k+n}. В данном случае речь идет об очередной реализации ξ, выбираемой из соответствующей последовательности псевдослучайных чисел с соответствующим законом распределения. При введении автомата, например, A_i в состав СВА для идентификации случайной величины ξ запишем соответствующей строкой ТУФП тождественно истинное высказывание

$$a_i(t+1)=\xi.$$

В этом случае очередная реализация случайной величины ξ будет закреплена состоянием $a_i(t+1)$ автомата A_i, и только это одно его состояние будет участвовать в перевычислении состояний выше описанных автоматов. Иначе в ТУФП в один и тот же момент имитационного процесса появятся различные реализации данной случайной величины, относящиеся к различным последовательным моментам времени, что извратит результаты моделирования.

Рассмотрим две системы S_1 и S_2 различной природы происхождения, которым свойственны основные особенности сложных систем.

Предположим, что все характеристики данных сложных систем – структурные составные части, временные характеристики, факторы воздействия внешней среды и случайные факторы – имеют математическую природу. В таком случае системы S_1 и S_2 являются математическими. Примерами математических систем могут служить системы алгебраических и дифференциальных уравнений, цепи Маркова, агрегативные системы, системы вероятностных автоматов. Перед исследователем (в процессе изучения реального случайного процесса с помощью различных математических систем) встает задача необходимости выбора наиболее удобной и достаточно адекватной системы. И если находится возможность привлечения к рассмотрению хотя бы двух систем, тогда возникает проблема установления подобия этих систем и последующего выбора более рациональной и удобной.

Привлекаемые к рассмотрению математические системы исследования реального случайного процесса будут считаться подобными, когда между их временными характеристиками, их структурными составными частями, факторами воздействия на них внешней среды и законами распределения вероятностных факторов можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором распределения соответствующих друг другу количественных характеристик этих систем будут в выбранном определенном смысле достаточно мало различаться. На практике подобные системы, являясь моделями друг друга, как правило, различаются по сложности.

Рассмотрим с этих позиций модель S_1 сложной системы, описанную выше с помощью многомерной цепи Маркова, и модель S_2, которую можно построить с помощью СВА. Напомним, что при сведении изучаемого случайного процесса к простой однородной цепи Маркова задание такой цепи возможно осуществлять с помощью: матрицы структурных связей между компонентами цепи, матрицы алфавитов соответствующих связей, функций выходных значений компонент, матрицы вероятностей перехода и начального распределения вероятностей.

Перейдя к рассмотрению системы S_2, моделирующей реальный случайный процесс с помощью пяти объектов построения СВА: матрицы алфавитов, вектора начальных состояний, системы функций выходов, таблицы условных функционалов переходов и системы распределений случайных величин, участвующих в ТУФП, приходим к следующим выводам:

1.Система S_2 считается производной в теоретико-вероятностном смысле от системы S_1.

2.Обозначенные системы являются подобными, поскольку компоненты марковского вектора оказываются вполне аналогичными внутренним состояниям автоматов, связи между компонентами – входным и выходным сигналам автоматов, функции выходов – соотношениям для вычисления выходных значений в ТУФП и т.д.

3.Очевидно, что описание реального случайного процесса удобно осуществлять с помощью системы вероятностных автоматов. При этом вводится доступный и рациональный способ описания системы с помощью логических высказываний относительно внутренних состояний автоматов, их входных векторных сигналов и соответствующих им условных функционалов переходов в новые состояния автоматов, а в ТУФП вместо переходных вероятностей вводятся реализации взаимно независимых случайных величин. Простота и стандартизация в отражении алгоритмических особенностей функционирования автоматных моделей предполагает их широкое и эффективное применение при исследовании сложных систем.

4.Свойство марковости вероятностных автоматов $\in S_2$ (входящих в систему СВА), позволяющее исследовать потоки состояний автоматов, другими словами, рассчитывать изменения их состояний на последовательности дискретных моментов времени, и обеспечивающее вхождение этих состояний в стационарный режим, выполняется тогда и только тогда, когда входные сигналы автоматов являются взаимно независимыми, одинаково распределенными случайными величинами. При моделировании случайных процессов с помощью СВА встает вопрос об условиях существования марковского свойства для всей системы вероятностных автоматов, обеспечивающего принципиальную возможность моделирования реальных случайных систем этим методом.

В следующем пункте мы коснемся выполнения условий, обосновывающих возможность построения автоматных моделей для широкого класса сложных систем, в том числе логистических систем.

1.4. Теоретические основы автоматного моделирования

При формализации исследуемой сложной системы описание модели в виде многомерного случайного процесса может быть сведено к заданию некоторой многомерной цепи Маркова с помощью матриц структурных связей между компонентами цепи и алфавитов, функций выходных значений компонент, матрицы вероятностей перехода и начального распределения вероятностей. Выше было показано, что описание сложной системы возможно также осуществлять в виде системы вероятностных автоматов, задаваемой с помощью пяти объектов: матрицы алфавитов, вектора начальных состояний, системы функций выходов, таблицы условных функционалов переходов и системы распределения случайных величин, участвующих в ТУФП. При сравнении этих двух видов формализации исследуемой системы становится очевидной аналогия при описании модели, а именно: компоненты марковского вектора являются аналогичными внутренним состояниям автоматов, связи между компонентами – входным и выходным сигналам автоматов, функции выходов – соотношениям вычисления состояний автоматов ТУФП.

Следует отметить, что не для всякой многомерной цепи Маркова путем отождествления ее компонент с внутренними состояниями некоторых автоматов удается построить автоматную модель, и этот вопрос является очень существенным. Данная проблема разрешается при условии наличия у цепи одного важного свойства – **свойства условной независимости компонент**.

Проведенные исследования в этом направлении [2] показали, что при весьма широких предположениях исходную многомерную марковскую цепь можно превратить в цепь, обладающую свойством условной независимости компонент, и это обстоятельство обосновывает принципиальную возможность построения автоматных моделей для очень широкого класса систем. Приведем основные положения данных исследований.

Определим понятия эквивалентности случайных величин и эквивалентности случайных процессов.

Будем говорить, что **случайные величины** ξ и η в фазовом пространстве (X, B^*) являются **эквивалентными**, если для любого множества $B \in B^*$ события $\{\xi \in B\}$ и $\{\eta \in B\}$ совпадают с единичной вероятностью.

Пусть $\xi = \xi(t)$ и $\eta = \eta(t)$ - случайные процессы на множестве T, принимающие значения в фазовом пространстве (E, B^*). **Случайные процессы** назовем **эквивалентными**, если при любом $t \in T$ эквивалентны случайные величины $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Предположим, что для исследуемой реальной вероятностной системы S исходная модель представлена в виде n – мерного случайного процесса $\xi(t) = \{\xi_k(t)\}$ $(k = \overline{1,n}; t \in T)$ с дискретным параметром t (t = 0,1,2,…) на пространстве элементарных событий $(\Omega, \mathrm{N}, \mathrm{P})$ в фазовом пространстве (E, B^*). Пусть далее имеется некоторая система вероятностных автоматов $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_m\}$ $(m \geq n)$.

Рассмотрим случайный процесс

$$\bar{a}(t) = \{a_1(t), a_2(t), \ldots, a_m(t)\} \quad (t \in T),$$

где a_i $(i = \overline{1,m})$ - состояния автоматов. (1.4.1)

Обозначим через $(\Sigma, \wp, \mu)$ пространство элементарных событий процесса $\bar{a}(t)$, а через $(\mathrm{X}, \aleph)$ - его фазовое пространство. Очевидно, что X является произведением внутренних алфавитов автоматов A_i, а $\aleph$ - произведением σ- алгебр, выбранных в этих алфавитах.

Пусть I_n - некоторое подмножество из n чисел множества $\{1, \ldots m\}$, например, $I_n = \overline{1,n}$.

Введем обозначение $\bar{a}'(t) = \{a_i(t)\}$ $(i \in I_n)$ для случайного процесса, получающегося из выражения (1.4.1) в результате отбрасывания компонент, индексы которых не входят во множество I_n. Пусть $\Sigma', X', \wp', \aleph', \mu'$- проекции соответствующих множеств Σ, X, σ-алгебр $\wp, \aleph$, и меры μ на координатное пространство $\{a_i(t)\}$ $(i \in I_n)$.

Если множества $\Omega\, и\, \Sigma$, $E\, и\, X'$, а также σ-алгебры $N\, и\, \wp', B^*\, и\, \aleph'$ попарно совпадают и процессы $\xi(t)\, и\, \bar{a}(t)$ эквивалентны, то систему вероятностных автоматов Γ будем называть автоматной моделью вероятностной системы S.

Пусть $\xi(t) = \{\xi_k(t)\}$ $(k = \overline{1,n})$ - n – мерная простая однородная марковская цепь в фазовом пространстве (X, B^*), где

$$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n; \qquad B^* = B_1^* \times B_2^* \times \ldots \times B_n^*;$$

$X_k\, и\, B_k^*$ $(k = \overline{1,n})$ - соответственно пространства компонент вектора $\xi(t)$ и σ – алгебры, выбранные в этих пространствах.

Назовем компоненты $\xi_k(t)$ $(k = \overline{1,n})$ марковского вектора $\xi(t)$ **условно независимыми (в совокупности)**, если при каждом i $(i = \overline{1,n})$ для произвольных $B_i \in B_i^*, x \in X\, и\, x_k \in X_k$ $(k = \overline{1,n},\ k \neq i)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} &P\{\xi_i(t+1) \in B_i \,/\, \xi(t) = x, \xi_k(t+1) = x_k \quad (k = \overline{1,n},\ k \neq i)\} = \\ &= P\{\xi_i(t+1) \in B_i \,/\, \xi(t) = x\} \quad (t = 0,1,2,\ldots) \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Вполне очевидно, что условно независимые компоненты $\xi_k(t)$ случайного вектора $\xi(t)$ в общем случае являются зависимыми случайными величинами. Заметим, что понятие условной независимости компонент имеет смысл и для неоднородной цепи. Из определения условной независимости компонент цепи $\xi(t)$ следует постулат, утверждающий, что условная независимость компонент простой n – мерной цепи Маркова $\xi(t)$ в фазовом пространстве (X, B^*) равносильна выполнению равенства

$$P\{\xi(t+1) \in B \,/\, \xi(t) = x\} = \prod_{k=1}^{n} P\{\xi_k(t+1) \in B_k \,/\, \xi(t) = x\} \tag{1.4.3}$$
$$(B \in B^*; B_k \in B_k^* \ (k = \overline{1,n}); B = B_1 \times \ldots \times B_n; B^* = B_1^* \times \ldots \times B_n^*).$$

Введем понятие **независимости** компонент марковской цепи.

Пусть $\xi(t) = \{\xi_k(t)\}$ $(k = \overline{1,n})$ - n – мерная простая однородная цепь Маркова. Компоненты $\xi_k(t)$ $(k = \overline{1,n})$ этой цепи называются независимыми, если для произвольных $B_k \in B_k^*, x \in X, x_k \in X_k$ $(k = \overline{1,n})$ справедливо соотношение

$$P\{\xi_k(t+1) \in B_k \,/\, \xi(t) = x\} = P\{\xi_k(t+1) \in B_k \,/\, \xi_k(t) = x_k\} \tag{1.4.4}$$
$$(k = \overline{1,n}; t = 0,1,2,\ldots; x = (x_1,\ldots,x_n)).$$

Последнее соотношение равносильно следующему:

$$P\{\xi(t+1) \in B \,/\, \xi(t) = x\} = \prod_{k=1}^{n} P\{\xi_k(t+1) \in B_k \,/\, \xi_k(t) = x_k\}$$
$$(B \in B^*; B_k \in B_k^* \quad (k = \overline{1,n}); B = B_1 \times \ldots \times B_n; B^* = B_1^* \times \ldots \times B_n^*; t = 0,1,\ldots). \tag{1.4.5}$$

Сравнение (1.4.4) и (1.4.2) или (1.4.5) и (1.4.3) помогает уяснить разницу между двумя рассматриваемыми понятиями. Понятие **независимости** компонент означает возможность рассматривать заданную n – мерную цепь как **совокупность независимых** n – мерных цепей. В общем случае изучение произвольной многомерной цепи Маркова нельзя свести к изучению некоторой цепи с независимыми компонентами.

Понятие **условной независимости** компонент означает вероятностную зависимость каждой компоненты цепи в **момент** $t+1$ от **совокупности всех компонент цепи в предыдущий момент времени** t.

Для выяснения вопроса о возможности сведения изучения произвольной многомерной цепи Маркова к изучению некоторой цепи

Маркова с условно независимыми компонентами необходимо доказать лемму.

Лемма. Пусть $w(t)=\{w_m(t)\}\ (m=\overline{1,M})$ - последовательность взаимно независимых одинаково распределенных случайных векторов в фазовом пространстве

$$(Y=Y_1\times\ldots\times Y_M;\ \wp=\wp_1\times\ldots\times\wp_M;\ w_m(t)\in Y_m\quad (m=\overline{1,M};\ t=0,1,2,\ldots)),$$

то есть имеют место свойства

$$P\{w(t)\in E\,/\,w(\tau)\ (\tau=\overline{0,t-1})\}=P\{w(t)\in E\}=F(E)\ \ (E\in\wp;\ t=0,1,\ldots;\ F(Y)=1).$$

Покажем, что тогда можно построить простую однородную цепь Маркова $\xi(t)=\{\xi_k(t)\quad (k=\overline{1,n})\}\quad (t=0,1,2,\ldots)$ размерности $n=\dfrac{1}{2}M\times(M+1)$ в некотором фазовом пространстве $(X,B^*)=(X_1\times\ldots\times X_n,B_1^*\times\ldots\times B_n^*)$, обладающую свойством (1.4.2), совокупность первых компонент которой $\{\xi_k(t)\ (k=\overline{1,M})\}$ для всех $t=M,M+1,\ldots$ эквивалентна случайному вектору $w(t)$, то есть для любых

$$B_k\in B_k^*\quad (k=\overline{1,M})\ \text{и}\ \ x_i\in X_i\quad (i=\overline{M+1,n})$$

имеет место равенство

$$\begin{aligned}&P\{\xi_k(t)\in B_k\quad (k=\overline{1,M})\,/\,\xi_i(t)=x_i\quad (i=\overline{M+1,n})\}=\\&=P\{\xi_k(t)\in B_k\quad (k=\overline{1,M})\}=F(B),\end{aligned}$$

где $B=B_1\times\ldots\times B_M$.

Действительно, как следует из выше приведенного условия, **значения вектора** $w(t)$ в каждый момент времени t находятся в соответствии с заданным совместным распределением его компонент

$$\begin{aligned}&F(E)=P\{w(t)\in E\}=P\{w_m(t)\in E_m\ (m=\overline{1,M})\}\\&(E_m\in\wp_m;\ E=E_1\times\ldots\times E_M;\ \wp=\wp_1\times\ldots\times\wp_M).\end{aligned}$$

Это распределение можно представить в таком виде:

$$F(E)=\int_E F_1(dy_1)\prod_{m=2}^{M}F_m(dy_m)\,/\,y_k \quad (k=\overline{1,m-1})\,(y_k\in Y_k\ (k=\overline{1,M})) \qquad (1.4.6)$$

где
$$F_1(E_1)=P\{w_1(t)\in E_1\};$$
$$F_m(E_m\,/\,y_k\ (k=\overline{1,m-1}))=P\{w_m(t)\in E_m\,/\,w_k(t)=y_k\ (k=\overline{1,m-1})\}$$
$$(m=\overline{2,M};\ E_m\in\wp_m;\ y_m\in Y_m;\ m=\overline{1,M};\ t=0,1,2,\ldots) \qquad (1.4.7)$$

При построении последовательности $\xi(t)$ введем двухиндексную нумерацию компонент, положив $\xi(t)=\{\xi_{ij}(t)\ (i=\overline{1,M};\ j=\overline{1,M-i+1})\}$.

Очевидно, что размерность этой последовательности равна $n=\dfrac{M(M+1)}{2}$.

Обозначим фазовые пространства компонент $\xi_{ij}(t)$ соответственно через (X_{ij},B_{ij}^*) $(i=\overline{1,M};\ j=\overline{1,M-i+1})$ и положим $X_{ij}=Y_j;\ \ B_{ij}^*=\wp_j;$

Тогда
$$X=\prod_{i=1}^{M}\prod_{j=1}^{M-i+1}X_{ij}=Y_1^M\times Y_2^{M-1}\times\ldots\times Y_M^1;$$
$$B^*=\prod_{i=1}^{M}\prod_{j=1}^{M-i+1}B_{ij}^*=\wp_1^M\times\wp_2^{M-1}\times\ldots\times\wp_M^1;$$

Определим закон изменения состояний последовательности $\xi(t)$ следующим образом:

$$\xi_{ij}(t+1)=\xi_{(i+1)j}(t)\quad (i=\overline{1,M-1};\ j=\overline{1,M-i}), \qquad (1.4.8)$$
$$P\{\xi_{M1}(t)\in B_{M1}\}=F_1(B_{M1}), \qquad (1.4.9)$$

$$P\{\xi_{ij}(t+1)\in B_{ij}\,/\,\xi_{(i+1)\nu}(t)=x_{(i+1)\nu}\ (\nu=\overline{1,M-i})\}=F_i(B_{ij}\,/\,x_{(i+1)\nu}\ (\nu=\overline{1,M-i}))$$
$$(i=\overline{1,M-1};\ j=\overline{1,M-i+1};\ B_{ij}\in B_{ij}^*;\ x_{ij}\in X_{ij};\ t=0,1,2,\ldots), \qquad (1.4.10)$$

$$\xi_{ij}(0)=x_{ij}^{(0)}\quad (x_{ij}^{(0)}\in X_{ij};\ i=\overline{1,M-1};\ j=\overline{1,M-i+1}); \qquad (1.4.11)$$

где распределения F_i $(i=\overline{1,M})$ имеют тот же смысл, что и ранее.

В данном случае достаточно показать, что $\xi(t)$ - простая однородная цепь Маркова с условно независимыми компонентами, а также, что при всех t = M, $M+1,\ldots$ векторы $w(t)$ и $\{\xi_{i1}(t)\ (i=\overline{1,M})\}$ одинаково распределены.

Последовательность $\xi(t)$ - простая цепь Маркова, так как правые части равенства (1.4.8) содержат лишь значения компонент $\xi(t)$, относящихся к моменту времени *t*.

Поскольку вид этих соотношений остается одним и тем же для всех *t*, то цепь $\xi(t)$ однородна.

Заметим, что соотношения (1.4.8 -1.4.11) при заданной реализации вектора $\xi(t)$ либо **однозначно** определяют значение компонент вектора $\xi(t+1)$, либо предполагают их вычисление с помощью **одномерных условных распределений.** Это указывает на то, что для цепи Маркова $\xi(t)$ справедливо свойство (1.4.3), т.е. что компоненты $\xi(t)$ условно независимы.

Рекуррентное применение соотношений (1.4.8 – 1.4.10) при $t \geq M$ дает

$$P\{\xi_{ij}(t) \in B\ (j=\overline{1,M})\} = \int_B P\{\xi_{2j}(t-1) = dx_{2j}\ (j=\overline{1,M-1})\} F_M(dx_{1M} / x_{2j}$$

$$(j=\overline{1,M-1})) = \int_B P\{\xi_{3j}(t-2) = dx_{3j}\ (j=\overline{1,M-2})\} F_{M-1}(dx_{2,M-1} / x_{3j}$$

$$(j=\overline{1,M-2})) F_M(dx_{1M} / x_{3j}\ (j=\overline{1,M-2}), x_{2,M-1}) = \ldots =$$

$$= \int_B F_1(dx_{M1}) \prod_{m=2}^{M} F_m(dx_{M-m+1,m} / x_{M-j+1,j}\ (j=\overline{1,M-1}))\ (B \in B^*, x_{ij} \in X_{ij}),$$

что с точностью до обозначений совпадает с правой частью равенства (1.4.6). Это является доказательством эквивалентности последовательности *w(t)* и совокупности $\{\xi_{1j}(t)\,(j=\overline{1,M})\}$ компонент цепи Маркова $\xi(t) = \{\xi_{ij}(t)\}$ при $t \geq M$.

Приведем пример.

Пусть $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ $(t = 0,1,2,\ldots)$ - двумерная случайная последовательность, принимающая при каждом t значение (1,1) с вероятностью p $(0 < p < 1)$ и значение (0,0) с вероятностью $(1 - p)$. Очевидно, что $\xi(t)$ свойством (1.2) не обладает, т.е. компоненты $\xi_k(t)$ условно зависимы.

Определим трехмерную цепь Маркова $\zeta(t) = \{\zeta_1(t), \zeta_2(t), \zeta_3(t)\}$:

$$P\{\zeta_i(t+1) = 1 / \zeta_3(t) = 1\} = 1;$$
$$P\{\zeta_i(t+1) = 1 / \zeta_3(t) = 0\} = 0;$$
$$P\{\zeta_i(t+1) = 0 / \zeta_3(t) = 1\} = 0;$$
$$P\{\zeta_i(t+1) = 0 / \zeta_3(t) = 0\} = 1;$$
$$(i = 1, 2);$$

$$P\{\zeta_3(t+1)=1\}=p; \quad P\{\zeta_3(t+1)=0\}=1-p.$$

Построенная трехмерная последовательность $\zeta(t)$ является цепью Маркова с условно независимыми компонентами, и совокупность ее первых двух компонент эквивалентна исходной последовательности $\xi(t)$.

Докажем теорему, лежащую в основе применения свойства условной независимости компонент многомерной цепи Маркова при построении автоматных моделей вероятностных систем.

Теорема 1.4.1. Пусть $\xi(t)=\{\xi_k(t) \quad (k=\overline{1,n})\}-n-$мерная однородная цепь Маркова в фазовом пространстве (X,B^*) с переходной вероятностной функцией

$$\begin{aligned} &P\{\xi(t+1)\in B \,/\, \xi(t)=x\}=P\{f(x,w)\in B\} \\ &(B\in B^*, x\in X). \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

Здесь $w=\{w_1,...,w_M\}$ - конечномерный случайный вектор в фазовом пространстве *(G, L).* $w_k \quad (k=\overline{1,M})$ - в общем случае зависимые случайные величины, f – некоторая детерминированная функция, заданная на X и G со значениями в X. Тогда существует цепь Маркова

$$\zeta(t)=\{\zeta_i(t)) \quad (i=\overline{1,m})\} \quad (m\geq n)$$

с условно независимыми компонентами в расширенном фазовом пространстве *(Z, L)* такая, что совокупность $\{\zeta_{ik}(t) \quad (k=\overline{1,n})\}$ некоторых ее компонент эквивалентна исходной цепи $\xi(t)$.

Для доказательства обозначим через $f_k(x,w^{(k)}) \; (x\in X)$ проекции $f(x,w)$ на координатное пространство X_k $k-$й компоненты вектора $\xi(t)$, где $w^{(k)}=\{w_1^{(k)},...,w_M^{(k)}\} \quad (k=\overline{1,n})$ - проекции случайного вектора $w=(w_1,...,w_M)$ на координатные пространства X_k.

Среди случайных величин $w_l^{(k)} \quad (k=\overline{1,n}; l=\overline{1,M})$ могут быть независимые, для которых при любых r и s $(r=\overline{1,n}; s=\overline{1,M})$, отличных соответственно от k и l,

$$P\{w_l^{(k)}\in E_1, w_s^{(r)}\in E_2\}=P\{w_l^{(k)}\in E_1\}P\{w_s^{(r)}\in E_2\} \tag{1.4.13}$$

при любых множествах E_1 и E_2, входящих в соответствующие σ-алгебры.

Введем случайные величины $w_l^{(k)}$, удовлетворяющие свойству (1.4.13), в обозначения функционалов и обозначим остальные - через $\alpha_j^{(k)}$ $(k=\overline{1,n};\ j=\overline{1,M_k})$.

Функционалы измененного вида будем обозначать через φ_k $(k=\overline{1,n})$.

Случайный вектор $\{\alpha_j^{(k)}\ (k=\overline{1,n};\ j=\overline{1,M_k})\}$ обозначим через

$$\alpha=\{\alpha_s\,(s=\overline{1,N})\}\quad (N=\sum_{k=1}^{n}M_k),$$

его фазовое пространство – через

$$(D,\wp)=(D_1,\wp_1)\times\ldots\times(D_N,\wp_N),$$

где $(D_s,\wp_s)\ (s=\overline{1,N})$ - фазовые пространства случайных величин α_s.

Распределение случайного вектора обозначим

$$F(c)=P\{\alpha\in c\}\quad (c\in\wp).$$

Ввиду соотношения (1.4.13) переходную вероятностную функцию (1.4.12)
можно записать так:

$$P\{\xi(t+1)\in B\,/\,\xi(t)=x\}=\int\limits_D\prod_{k=1}^{n}P\{\varphi_k(x,\alpha)\in B_k\,/\,\alpha=y\}F(dy)$$

$$(B\in B^*;\ B_k\in B_k^*;\ k=\overline{1,n};\ B=B_1\times\ldots\times B_n;\ x\in X)\qquad(1.4.14)$$

Построим цепь Маркова

$$\eta(t)=\{\eta_j(t)\ (j=\overline{1,\frac{N(N+1)}{2}})\}$$

с условно независимыми компонентами в фазовом пространстве $(Y,\wp)$. Совокупность N первых компонент цепи $\{\eta_j\,(j=\overline{1,N})\}$ эквивалентна последовательности случайных векторов, каждый из которых распределен так же, как α.

Построим расширенное фазовое пространство (Z,L) конструируемой цепи Маркова $\zeta(t)$ размерности $m=n+\dfrac{N(N+1)}{2}$:

$$Z_i = \begin{cases} X_i & для \quad i=\overline{1,n}; \\ Y_{i-n} & для \; i=\overline{n+1,m}. \end{cases} \quad Z = Z_1 \times \ldots \times Z_m;$$

$$L = \begin{cases} L_i & для \quad i=\overline{1,n}; \\ \wp_{i-n} & для \; i=\overline{n+2,m}. \end{cases} \quad L = L_1 \times \ldots \times L_m;$$

Переходную вероятностную функцию цепи $\zeta(t)$ определим так:

$$P\{\zeta_i(t+1) \in R_i \,/\, \zeta(t)=z\} = P\{\varphi_i(x,\alpha\} \in R_i \,/\, \alpha = y\} =$$
$$= P\{\varphi_i(x,y) \in R_i\} = P\{\varphi_i(z) \in R_i\} \quad (i=\overline{1,n});$$

$$P\{\zeta_i(t+1) \in R_i \,/\, \zeta(t)=z\} = P\{\eta_{i-n}(t+1) \in R_i \,/\, \eta(t)=y\} \quad (i=\overline{n+1,m});$$
$$(R_i \in L_i \; (i=\overline{1,m}); \; z=(x,y); \; x \in X; \; y \in Y; \; z \in Z).$$

Очевидно, что $\zeta(t)$ - простая однородная цепь Маркова. Покажем, что $\zeta(t)$ - цепь с условно независимыми компонентами. Действительно,

$$P\{\zeta(t+1) \in R \,/\, \zeta(t)=z\} =$$
$$= P\{\zeta_i(t+1) \in R_i \quad (i=\overline{1,n}) \,/\, \zeta(t)=z\} P\{\zeta_i(t+1) \in R_i \; (i=\overline{n+1,m}) \,/\, \zeta(t)=z\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P\{\varphi_i(z) \in R_i\} \prod_{j=n+1}^{m} P\{\zeta_j(t+1) \in R_j \,/\, \zeta(t)=z\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{m} P\{\zeta_i(t+1) \in R_i \,/\, \zeta(t)=z\} \quad (R = R_1 \times \ldots \times R_m; \; z \in Z; \; R \in L).$$

Эквивалентность совокупности $\{\zeta_i(t) \; (i=\overline{1,n})\}$ компонент марковской цепи $\zeta(t)$ и исходной цепи $\xi(t)$ непосредственно следует из того, что совокупность $\{\zeta_i(t) \; (i=\overline{n+1,n+N})\}$ при каждом t эквивалентна случайному вектору α.

Пусть

$$\widetilde{Z} = Z_{n+1} \times \ldots \times Z_m; Z^* = Z_{n+1} \times \ldots \times Z_{n+N}; Z^{**} = Z_{n+N+1} \times \ldots \times Z_m.$$

Тогда

$$P\{\zeta_i(t+1) \in R_i \quad (i=\overline{1,n}) / \zeta_i(t)=z_i \quad (i=\overline{1,n})\} =$$

$$= \int\limits_{\tilde{Z}} P\{\zeta_i(t+1) \in R_i \ (i=\overline{1,n}),\ \zeta_i(t+1) \in X_j \ (j=\overline{n+1,m}) \,/\, \zeta_k(t) = z_k \ (k=\overline{1,m})\} \times$$

$$\times P\{\zeta_l(t) = dz_l \ (l=\overline{n+1,m})\} =$$

$$= \int\limits_{\tilde{Z}} \prod_{i=1}^{n} P\{\zeta_i(t+1) \in R_i \,/\, \zeta_k(t) = z_k \ (k=\overline{1,m})\} \prod_{j=n+1}^{m} P\{\zeta_j(t+1) \in X_j \,/\, \zeta_k(t) = z_k$$

$$(k=\overline{1,m})\} P\{\zeta_l(t) = dz_l \ \ (l=\overline{n+1,m})\} =$$

$$= \int\limits_{\tilde{Z}} \prod_{i=1}^{n} P\{\zeta_i(t+1) \in R_i \,/\, \zeta_k(t) = z_k \ (k=\overline{1,n+N})\} P\{\zeta_l(t) = dz_l \ (l=\overline{n+1,n+N})\} \times$$

$$\times P\{\zeta_j(t) = dz_j \ (j=\overline{n+N+1,m})\} =$$

$$= \int\limits_{Z^*} \prod_{i=1}^{n} P\{\varphi_i(z_j \ (j=\overline{1,n+N})) \in R_i\} F(dz_l \ (l=\overline{n+1,n+N})) \times$$

$$\times \int\limits_{Z^{**}} P\{\zeta_j(t) = dz_j \ (j=\overline{n+N+1,m})\} =$$

$$= \int\limits_{Z^*} \prod_{i=1}^{n} P\{\varphi_i(z_j \ (j=\overline{1,n+N})) \in R_i\} F(dz_l \ (l=\overline{n+1,n+N}))$$

$$(R_i \in L_i;\ z_i \in Z_i \ (i=\overline{1,m});\ t=0,1,2,\ldots),$$

что отличается от выражения (1.4.14) лишь обозначениями. Теорема доказана.

Свойство многомерных цепей Маркова, выраженное в данной теореме, показывает возможность путем расширения фазового пространства заменять цепь Маркова с условно зависимыми компонентами цепью большей размерности с условно независимыми компонентами.

Установим связь только что описанного свойства многомерных марковских цепей с системами вероятностных автоматов, помогающую уяснить вероятностный смысл процесса изменения состояний СВА.

Пусть $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ - система вероятностных автоматов, заданная в соответствии с определением. Тогда совокупность внутренних состояний всех автоматов системы

$$\bar{a}(t) = \{a_1(t), \ldots, a_n(t)\} \quad (t=0,1,\ldots)$$

является простой однородной цепью Маркова с условно независимыми компонентами.

Действительно, согласно алгоритму функционирования системы вероятностных автоматов, при перевычислении состояний автоматов системы исходной информацией служит значение вектора $\bar{a}(t)$ в некоторый фиксированный момент t. Если $\bar{a}(t)$ известно, то с помощью системы функций выходов однозначно определяются выходные сигналы. Вероятностное распределение вектора $\bar{a}(t+1)$ однозначно определяется через значение $\bar{a}(t)$ и входные сигналы автоматов, которые, как только что было показано, однозначно определены значением $\bar{a}(t)$. Таким образом, $\bar{a}(t)$ $(t = 0,1,\ldots)$ является простой цепью Маркова. Эта цепь однородна, так как все объекты, определяющие систему вероятностных автоматов, заданы одинаково для всех значений параметра t.

Далее вероятностное распределение компонент вектора $\bar{a}(t+1)$ определяется значением $\bar{a}(t)$ и в процессе функционирования системы используется для поочередного вычисления новых значений компонент. При этом уже вычисленные значения компонент вектора $\bar{a}(t+1)$ не используются при вычислении остальных его компонент. Отсюда следует, что цепь Маркова $\bar{a}(t)$ $(t=0,1,\ldots)$ является цепью с условно независимыми компонентами.

Теперь мы имеем возможность перейти к вопросу о представимости модели данной вероятностной системы в виде системы вероятностных автоматов. Приведем формулировку следующей теоремы:

Теорема 1.4.2. Если математическая модель данной вероятностной системы S допускает представление в виде простой однородной n – мерной цепи Маркова $\xi(t)$ в фазовом пространстве (X, B^*) с конечным множеством состояний с условно независимыми компонентами, то существует система вероятностных автоматов Г, представляющая автоматную модель системы S. Отождествим компоненты вектора $\xi(t)$ с внутренними состояниями автоматов

$$a_1(t) = \xi_1(t), \ldots, a_n(t) = \xi_n(t) \quad (t = 0, 1, \ldots).$$

Определим матрицу алфавитов $\overline{X}$ и матрицу σ - алгебр $\aleph$ через пространства X_i и σ - алгебры B_i^* компонент вектора $\xi(t)$:

$$\overline{X}_{ij} = X_i, \quad \aleph_{ij} = B_i^* \quad (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}).$$

В качестве вектора начальных состояний может быть выбран любой набор $\bar{a}_0$, где

$$a_0^{(k)} \in X_k \quad (k = \overline{1,n});$$

и значения внутренних состояний автоматов отождествляются с выходными сигналами.

По условию $\xi(t)$ является цепью Маркова с условно независимыми компонентами, поэтому переходную вероятностную функцию этой цепи можно представить в виде системы условных вероятностных распределений

$$P\{\xi_k(t+1) / \xi(t) = x\} \quad (x \in \aleph) \tag{1.4.15}$$

Фиксируя каждое значение $x \in \aleph$ и обозначая через C_x логическое высказывание $\{\xi(t) = x\}$, получаем полную систему логических высказываний для ТУФП автомата A_k $(k = \overline{1,n})$. Каждому из этих высказываний поставим в соответствие функционал, совпадающий со случайной величиной, обладающей распределением (1.4.15) при фиксированном x. ТУФП построена.

Таким образом, доказана принципиальная возможность при математическом описании системы S путем расширения фазового пространства заменять цепь Маркова с условно зависимыми компонентами цепью большей размерности с условно независимыми компонентами, что, в свою очередь, гарантирует существование системы вероятностных автоматов Г, представляющей автоматную модель системы S.

В практике автоматного моделирования условиями, гарантирующими возможность построения модели СВА любой сложной системы, являются необходимые и достаточные условия реализации свойства марковости моделируемого процесса:

- Для каждого автомата модели СВА последовательности его входных сигналов должны быть реализациями независимых, одинаково распределенных случайных величин.

- Для системы вероятностных автоматов как модели и как обобщения однородной марковской цепи необходимо выполнение условия существования свойства условной независимости компонент, а именно: задание такой совокупности автоматов, которая бы полностью определяла реальную систему в каждый модельный момент времени. Это означает построение системы автоматов, которая позволяет определить **состояние каждого автомата модели** в текущий момент времени в зависимости **от совокупности состояний всех автоматов системы** в предыдущий момент времени.

- Все случайные величины, образующие совокупность случайных факторов одновременного воздействия на систему, должны быть взаимно независимыми и участвовать в построении модели в качестве состояний автоматов.

Автоматное моделирование (как любая универсальная алгоритмическая схема создания математических моделей с концептуальной базой), базирующееся на схеме аппарата простых однородных цепей Маркова, позволяет в процессе создания и реализации моделей СВА обеспечивать высокую степень адекватности и точности получаемых результатов.

Подытоживая вышесказанное, приведем **последовательность постулатов и действий, гарантирующих в совокупности высокий уровень адекватности моделей СВА:**

- Приводится теоретическое обоснование принципиальной возможности построения СВА для систем, математическая модель которых представима марковской цепью с условно независимыми компонентами, которую, в свою очередь, всегда можно вывести из произвольной многомерной цепи Маркова.

- Предлагаются практические шаги, гарантирующие построение моделей СВА: обеспечение выполнения свойства марковости для отдельного автомата и для модели СВА.

- В рамках построения ТУФП модели необходимо выполняется строгая очередность перевычисления состояний автоматов в зависимости от структурных особенностей системы.

- ТУФП, определяющая закон изменения внутреннего состояния каждого из автоматов СВА, строится из двух подстрок: верхней и нижней. Верхняя подстрока должна содержать полный набор альтернативных высказываний относительно значений состояния автомата и его входных сигналов в предыдущий момент времени, что в терминах формальной логики представляет собой тождественно истинное высказывание и является гарантией охвата всех возможных вариантов возникающих ситуаций.

- Аналитические выражения нижней подстроки ТУФП служат для вычисления последующих состояний автоматов в зависимости от каждого из высказываний верхней подстроки. Таким образом, текущее состояние каждого автомата конкретной СВА входит во взаимно однозначное соответствие с системой логических высказываний верхней подстроки и системой соответствующих условных функционалов переходов нижней.

- Разработка сценария моделирования и построение ТУФП автоматной модели должны быть выдержаны в рамках логической и функциональной корректности, исключающей из рассмотрения варианты взаимно невозможных ситуаций, событий и состояний автоматов.

- Построение формализованной схемы исследуемой системы и сценария функционирования модели помогают отлаживать задание автоматов в рамках структурной корректности. Так, в процессе построения СВА должны быть исключены из рассмотрения как перебор, так и недостаток автоматов. В первом случае будет наблюдаться взаимозависимость некоторых автоматов и схожесть их условных функционалов переходов, что приведет к большому и бесполезному нагромождению информации и увеличению времени программной реализации. Во втором случае в процессе разработки алгоритма ТУФП можно столкнуться либо с невозможностью дальнейшего построения функционалов в принципе, либо с возникновением зависимости определяемых состояний автоматов от предыстории на более, чем одном шаге, что, в свою очередь, исключает факт существования свойства марковости в такой конкретной СВА.

- Целью построения и реализации моделей СВА является получение усредненных значений искомых неслучайных характеристик системы, используемых в нужных разработчикам целях (диагностических, прогнозных, либо оптимизационных). Поэтому обязательным должно быть введение в исходную информацию условия обеспечения вхождения моделируемого процесса в стационарный режим. Для логистических систем, например, таким условием может быть гарантия того, что некоторая количественная мера входящего потока ресурсов на протяжении длительного промежутка времени не превышает соответствующей количественной меры на выходе системы.

- Автоматное моделирование позволяет реализовывать творческий подход, создавая модели различной степени сложности в зависимости от поставленных перед разработчиком приоритетов: определения баланса между степенью сложности реальной системы и поставленными целями моделирования; между уровнем сложности модели, ее адекватности, с одной стороны, и экономией времени в процессе алгоритмической и программной реализации, с другой стороны.

Как известно, в моделирующем алгоритме ТУФП введен способ более краткого описания каждого автомата модели, использующий не переходные вероятности семейства стохастических матриц, а реализации случайных величин. Поэтому при построении СВА весьма существенную роль играет статистическое моделирование информационных потоков, включающее: проведение статистических экспериментов по сбору статистических данных, проверку последовательностей случайных величин на независимость, выдвижение гипотез о предполагаемых функциях распределения, проверку гипотез о теоретических законах распределения на достоверность, а также рассмотрение вопроса о взаимной независимости различных случайных величин. При обнаружении зависимости проводится реструктуризация модели с последующим статистическим моделированием вплоть до момента подтверждения факта того, что последовательности входных сигналов автоматов будут реализациями взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин, что свидетельствует о наличии свойства марковости у модели СВА.

Следующая глава посвящена описанию статистических исследований случайных последовательностей в автоматных моделях. Основными задачами этих исследований являются выдвижение и проверка гипотез о взаимной независимости случайных величин, гипотез о соответствии выборок тем или иным теоретическим законам, описание приемов получения так называемых случайных чисел с заданным законом распределения, а также формирование единой информационной технологии компьютерного моделирования логистических систем.

Глава 2

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОТОКОВ

2.1. Проведение статистических экспериментов

Сущностью материального потока как ключевой категории логистической системы является непрерывное перемещение продуктов труда в процессе применения к ним логистических операций формирования, транспортировки и сбыта продукции.

Классифицируя основные логистические операции (ЛО) по природе потока, разделим их на:

- ЛО с реальными материальными потоками,
- ЛО с реальными информационными потоками,
- Регулирующие ЛО по управлению материальными потоками, включающие прогнозирование, контроль, оперативное управление, формирование и выбор оптимальных решений с помощью математических методов.

В данной работе основное внимание уделено регулирующим ЛО, поскольку реализация большинства передовых логистических концепций и систем оказывается невозможной без применения математических методов, в том числе методов математического моделирования и информационно-программного обеспечения.

В предыдущей главе изложены основы метода автоматного моделирования, одним из важнейших направлений применения которого является его успешное использование в задачах исследования материальных потоков логистических систем. Модели СВА, формирующие виртуальные (имитационные) материальные и информационные потоки, являются инструментом методологической базы логистики, призванным в помощь специалистам в принятии оптимальных решений.

Важно отметить разделение виртуальных информационных потоков в моделях СВА на две категории. К первой категории следует отнести **модельные информационные потоки (МИП),** определяющие структурно-функциональные характеристики однородных материальных потоков (ОМП). К ним относятся временные, структурные, количественные и качественные информационные составляющие ОМП. В каждый момент времени моделирования они актуализируются (переопределяются) как состояния соответствующих автоматов СВА с помощью алгоритма модели.

В модели СВА присутствуют также информационные потоки второй категории – **стохастические информационные потоки (СИП)**, имитирующие реальные последовательности внешних и внутренних случайных воздействий на логистическую систему и участвующие в процессе создания модели. Примерами таких СИП могут служить последовательности моментов поступления на вход логистической системы партий ОМП (сырья, товаров, комплектующих), либо моментов наступления проблемных ситуаций на пути ОМП (форс-мажорные обстоятельства, начало/окончание поломки/ремонта транспортных средств), моментов изменения траектории и (или) скорости перемещения ОМП, габаритных и весовых характеристик новых партий продуктов труда при поступлении на вход системы.

Напомним, что выполнение условий, при которых исходную математическую модель сложной системы, представленную в наиболее общем и естественном виде – в виде многомерного марковского случайного процесса, можно привести к марковской цепи, обладающей свойством условной независимости компонент, является необходимым и достаточным фактом возможности существования и построения автоматной модели, эквивалентной исходной математической модели. Как известно, при построении моделей СВА обеспечение их свойством условной независимости компонент гарантируется такими условиями выполнения свойства марковости моделируемого процесса:

1. Необходимость задания совокупности автоматов, полностью определяющей реальную систему в каждый модельный момент времени.
2. Последовательность входных сигналов автомата должна быть реализацией независимых, одинаково распределенных случайных величин.
3. Все случайные величины, участвующие в построении модели, должны удовлетворять требованию взаимной независимости и идентифицироваться в качестве состояний соответствующих автоматов.

Первое из перечисленных условий будет подробно обсуждаться в последующих главах в процессе описания конкретных моделей СВА. Для выполнения второго и третьего условий, обеспечивающих математически грамотное построение автоматных моделей, необходимо проводить статистические исследования, о которых пойдет речь в данной главе.

В процессе изучения реальной сложной логистической системы одной из задач формализации системы является выделение в рассмотрение случайных величин, не зависящих от мгновенных характеристик системы. При этом происходит урезание обстоятельств, порождающих возникновение мгновенных, не существенных на взгляд исследователя, характеристик, определение границ рассматриваемой системы и замена влияния объектов, не вошедших в систему, случайными величинами.

В рамках информационного обеспечения имитационного логистического процесса проводятся статистические эксперименты в виде многократных наблюдений значений выделенных в рассмотрение случайных величин, образующих **последовательности и совокупности** СИП. Примерами последовательностей случайных величин в логистических системах могут быть последовательные времена поступлений партий продуктов труда на вход системы, времена внешних поступлений транспортных средств в заданную точку траектории перемещения ОМП, времена поступлений заявок потребителей, а также последовательности случайных количественных характеристик поступающих партий.

К совокупности случайных величин можно отнести набор случайных величин, отнесенных к одному и тому же промежутку времени, например: поступление на вход системы (часто множественный) партий различных ОМП, имеющее как временную, так и количественную стохастические составляющие, наступление и продолжительность внутренних случайных проблемных ситуаций.

При изучении **случайных последовательностей** исследуются наличие и характер зависимостей между отдельными случайными величинами, образующими эти последовательности, а также определяются функциональные формы и параметры распределений случайных величин.

При изучении **совокупностей случайных последовательностей** определяется наличие или отсутствие взаимной независимости случайных величин последовательностей, входящих в совокупность.

Рассмотрим варианты, которые могут возникать при определении характера зависимости между случайными величинами случайной последовательности.

1). Случайные величины, образующие последовательность, взаимно независимы. Самым благоприятным оказывается вариант, когда случайные величины последовательности можно считать распределенными по одному и тому же закону с одними и теми же параметрами, или, другими словами, когда рассматриваются различные реализации одной и той же случайной величины. В этом случае возникает необходимость выяснения функциональной формы закона распределения, которому соответствуют полученные выборки.

2). При переходе от одной случайной величины последовательности к другой не изменяется закон распределения, но изменяются параметры распределения, и это является основной информацией при имитации случайных величин в модели. В обоих случаях при проверке гипотезы о взаимной независимости случайных величин одной последовательности используется автокорреляционный метод.

Очевидно, что выбор способа описания случайной последовательности оказывается удовлетворительным, если степень зависимости случайных величин последовательности в модели соответствует степени зависимости внутри реальной последовательности. Проверить такое соответствие можно с помощью так называемой автокорреляционной последовательности.

Пусть дана реализация $x_1, x_2, ..., x_N$ случайной последовательности $\{\xi_k\}$ $(k=1,2,...)$ объема N. Последовательность

$$H(\tau)=\frac{\sum_{k=1}^{N-\tau} x_k\, x_{k+\tau}}{\sum_{k=1}^{N-\tau} x_k^2} \quad (\tau=0,1,2,...)$$

будем называть статистической автокорреляционной последовательностью случайной последовательности $\{\xi_k\}$. При каждом фиксированном значении τ автокорреляционная последовательность представляет собой коэффициент корреляции между исходной выборочной последовательностью и ею же, сдвинутой на τ шагов. Известно, что значение коэффициента корреляции может характеризовать степень зависимости между случайными величинами. Коэффициент, близкий к единице, свидетельствует о наличии зависимости между случайными величинами исследуемой последовательности. В случае, когда коэффициент близок к нулю, случайные величины последовательности можно считать взаимно независимыми.

3). Последовательность случайных величин является цепью Маркова. Это значит, что в исследуемой случайной последовательности зависимость распространяется на вполне определенное, постоянное для данной последовательности число шагов. В этом случае изучение сложной цепи Маркова-Брунса, в которой зависимость распространяется на число шагов, большее 1, для облегчения исследования сводится к изучению простой цепи Маркова. Для этого достаточно вместо единичных значений случайных величин, образующих цепь, рассматривать целые совокупности этих значений. Для такой цепи распределение каждой последующей случайной величины, входящей в эту цепь, зависит от того, какое значение приняла предыдущая случайная величина. Поэтому в задании цепи Маркова участвуют условные вероятностные распределения

$$p_{ij}(k)=P\{\xi_{k+1}=j \,/\, \xi_k=i\} \quad (i\in\Re,\ j\in\Re,\ k=0,1,2,...),$$

где $\Re$ - алфавит цепи. Далее проверяется гипотеза об однородности цепи. Если условные распределения не зависят от номера k случайной величины, то цепь является однородной. Простая однородная цепь

Маркова задается матрицей вероятностей перехода и начальным распределением вероятностей.

Очень важным является выявление эргодического свойства марковской цепи. Пусть α - одно из состояний марковской цепи ($\alpha \in \Re$) такое, что любая из случайных величин цепи, начиная с некоторого номера, может принять это состояние. Очевидно, что состояние α будет эргодическим. Эргодическое свойство цепи Маркова заключается в том, что вероятности эргодических состояний случайных величин, образующих цепь, по мере увеличения номера случайной величины стремятся к определенным предельным значениям, отличным от нуля и не зависящим от начального состояния цепи. Существуют специальные признаки [20], определяющие эргодичность марковской цепи. Данное свойство, называемое еще условием существования стационарного режима системы, является наиболее важным и для предварительной оценки организации реального процесса в логистической системе, и для дальнейшей разработки автоматной модели, особенно ее экономической части.

4).В случае рассмотрения совокупности случайных величин встает вопрос о взаимной независимости случайных величин, образующих данную совокупность. В этом случае применяются корреляционные методы.

При построении модели СВА все усилия исследователя в случае неподтверждения взаимной независимости отдельных случайных величин последовательности направлены на то, чтобы суметь выразить зависимость между случайными величинами через некоторый набор взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин. С этой целью производится определенное переформатирование модели на стадиях формализации, отладки сценария, статистического эксперимента вплоть до получения требуемого результата.

Основой статистического моделирования потоков СИП - случайных временных и количественных характеристик актуализации МИП логистической системы - является сбор данных (выборочных совокупностей) и построение гистограмм, определяющих эмпирические функциональную форму и значение основных параметров распределения по каждой случайной величине, участвующей в качестве входного сигнала в формировании состояния соответствующего вероятностного автомата.

Целью статистического исследования по каждой последовательности случайных чисел является выдвижение и проверка гипотезы о взаимной независимости случайных величин, принадлежащих одной последовательности, а также гипотезы о соответствии имеющейся выборки тому или иному теоретическому закону распределения.

Гипотеза о предполагаемой функции распределения должна быть проверена на достоверность с помощью одного из существующих критериев согласия. Для решения этой задачи обычно применяются известные статистические критерии согласия: χ^2, критерий Колмогорова-Смирнова и др.

Часто для установления соответствия между эмпирическим и теоретическим законами распределения используется критерий χ^2, контролирующий согласованность гипотетических вероятностей случайных событий с их относительными частотами. При этом каждое событие трактуется как попадание случайной величины в определенный классовый интервал. Согласие измеряется с помощью вспомогательной функции от значений случайных величин – так называемой статистики χ^2:

$$\chi^2(r,n,F)=\sum_{i=1}^{r+1}C_i\left(\frac{m_i}{n}-p_i\right)^2;$$

где r – количество интервалов, n – объем генеральной совокупности, F – проверяемый закон распределения, m_i - частота попадания в i-й интервал, p_i - соответствующая вероятность попадания. При $C_i=\dfrac{n}{p_i}$

$$\chi^2=\sum\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i};$$

Если же при этом $n\to\infty$, то данная статистика стремится к распределению Пирсона, не зависящему от вида гипотетического распределения, но зависящему от числа степеней свободы $r-q-1$, где q - число параметров оцениваемого закона распределения. По закону больших чисел при большой генеральной совокупности

$$\frac{m_i}{n}\to p_i,$$

поэтому критерием согласия выбирается сумма взвешенных по np_i квадратов разности частот и вероятностей попадания в каждый интервал.

Пусть V - множество значений статистики Z, а V_k - его критическая область, подмножество такое, что

$$P\{Z\in V_k/H_0\}=\alpha.$$

При условии истинности выдвигаемой гипотезы статистика Z попадает в V/V_k с вероятностью (1-α). По соответствующим таблицам определяется критическое значение распределения $\chi^2(r,\alpha)$, которое сравнивается с эмпирическим значением статистики χ^2.

Если $\chi^2 > \chi^2(r,\alpha)$, статистика попадает в критическую область и гипотеза неверна.

При проверке гипотезы о взаимной независимости различных случайных величин одной совокупности используется выражение, определяющее меру зависимости между двумя случайными переменными – коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta)$:

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}, \quad \operatorname{cov}(\xi,\eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta)).$$

Основной задачей статистического моделирования СИП логистических систем является описание получения последовательностей случайных чисел, эмпирические распределения которых соответствуют тому или иному теоретическому закону распределения, или, другими словами, получения последовательностей псевдослучайных чисел с соответствующими заданными законами распределения.

В следующем пункте излагается описание законов распределения случайных величин, встречающихся на практике при реализации моделей СВА.

2.2. Случайные величины в автоматных моделях материальных потоков

Процесс усовершенствования построения автоматных моделей материальных потоков включает введение способа более краткого описания каждого автомата модели, использующего вместо семейства стохастических матриц реализации случайных величин. В данном случае рассматривается та составная часть автоматного моделирования, без которой практически не обходится ни одна модель СВА – **имитация случайных воздействий.** Одним из важных приемов имитации последовательности случайных величин, принимающей участие в функционировании реальной сложной логистической системы, является воспроизведение совокупности так называемых псевдослучайных чисел с заданным законом распределения, то есть такой числовой последовательности, эмпирическое распределение которой достаточно близко подходит к некоторому заданному теоретическому вероятностному распределению. Процесс получения случайных величин, участвующих в построении алгоритма ТУФП модели, сводится к выполнению следующей последовательности статистических исследований:

1). Изучение следующих выборочных совокупностей:

- промежутки времени между последовательными поступлениями на вход реальной логистической системы партий продуктов труда (ППТ), принадлежащих соответствующему однородному материальному потоку (ОМП),

- данные о количестве, весе, габаритах каждой ППТ, поступающей на вход системы,

- промежутки времени между наступлением форс-мажорных обстоятельств и проблемных ситуаций (погодных катаклизмов, наступлений поломок транспортных средств, вынужденных простоев ОМП и др.),

- данные о длительностях погрузочно-разгрузочных и ремонтных работ.

2). Исследование наличия и характера зависимостей между отдельными случайными величинами выборочных последовательностей (совокупностей) и выяснение вопроса о том, можно ли с достаточной степенью точности считать величины, входящие в последовательности (совокупности), взаимно независимыми.

3). Определение эмпирических значений основных параметров распределений случайных величин.

4).Проверка гипотез о теоретических законах распределения, которым соответствуют имеющиеся выборки независимых случайных величин.

5).Компьютерная имитация случайных величин с заданным законом распределения и его основными параметрами.

Практика моделирования показала, что в создании моделей СВА участвуют дискретные, непрерывные и смешанные случайные величины. Дискретная величина задается с помощью своего распределения вероятностей p_k $(k = 0,1,2,...)$ того, что она примет значение, равное k:

$$p_k = P\{x = k\}.$$

Перечислим некоторые наиболее распространенные типы распределений дискретных случайных величин.

1. Распределение Бернулли (для двоичной случайной величины):

$$p_0 = 1 - p;\ p_1 = p;\ p_k = 0 \text{ при } k > 1.$$

Здесь через p обозначен параметр распределения $(0 \le p \le 1)$.

2. Распределение Пуассона:

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda} \ (0 < \lambda < +\infty;\ k = 0,1,2,\ldots).$$

3. Биномиальное распределение:

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k-1} \text{ при } k = \overline{0,n}; \quad p_k = 0 \text{ при } k > n.$$

4. Геометрическое распределение:

$$p_k = p(1-p)^k \ (k = 0,1,2,\ldots;\ 0 < p < 1).$$

5. Дискретное равномерное распределение:

$$p_k = \frac{1}{n} \text{ при } k = \overline{1,n} \text{ и } p_k = 0 \text{ при } k > n \ (n - \text{целое число}).$$

Непрерывная случайная величина может принимать значение из некоторого непрерывного ограниченного или неограниченного промежутка и задается обычно с помощью своей функции распределения $F(x)$, представляющей вероятность того, что значение случайной величины не превзойдет x:

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Приведем примеры распределений непрерывных случайных величин:

1. Показательное (экспоненциальное) распределение:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x > 0 \end{cases} \quad (0 < \lambda < +\infty).$$

Случайная величина, распределенная по такому закону, принимает лишь неотрицательные значения.

2. Нормальное распределение:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz \quad (-\infty < a < +\infty, \sigma \ge 0).$$

Нормально распределенная случайная величина принимает не только положительные, но и отрицательные значения.

3. Равномерное распределение на отрезке $[a,b]$:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & при \quad a < x \le b, \quad (-\infty < a < b < +\infty). \\ 1 & при \quad x > b \end{cases}$$

4. Усеченное нормальное распределение с точками усечения c_1 и c_2:

$$F(x)=\frac{\Phi(x)-\Phi(c_1)}{\Phi(c_2)-\Phi(c_1)},$$

где $-\infty \le c_1 < c_2 \le +\infty$, а $\Phi(x)$ - обычная нормальная функция распределения. При $c_1=-\infty$ получается одностороннее усечение справа в точке c_2, при $c_2=+\infty$ - одностороннее усечение слева в точке c_1. Если одновременно $c_1=-\infty$ *и* $c_2=+\infty$, то усеченное распределение превращается в неусеченное.

Смешанная случайная величина принимает значения, являющиеся как изолированными точками, так и непрерывно расположенными на части числовой оси. Приведем примеры смешанных распределений.

1. Смешанное показательное распределение: с вероятностью p_0 случайная величина принимает значение 0, а с противоположной вероятностью $p=1-p_0$ - значение, распределенное по показательному закону.

2. Смешанное нормальное распределение: с вероятностью p_0 случайная величина принимает значение 0, а с противоположной вероятностью $p=1-p_0$ - значение, имеющее нормальное распределение.

При решении практических задач иногда приходится оперировать случайными величинами, распределенными по некоторым специальным законам. Приведем некоторые из них:

1. Смешанное усеченное нормальное распределение: случайная величина ξ с вероятностью p_0 $(0 \le p_0 \le 1)$ принимает значение 0, а с вероятностью $(1-p_0)$ - значение, совпадающее с одной из реализаций случайной величины η, распределенной по усеченному нормальному закону

$$F(x)=P\{\eta\le x\}=\begin{cases}0 & при\ \ x<c_1,\\ \dfrac{\Phi(x)-\Phi(c_1)}{\Phi(c_2)-\Phi(c_1)} & при\ \ c_1\le x<c_2,\\ 1 & при\ \ x\ge c_2,\end{cases}$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$ - функция обычного (неусеченного) нормального распределения с математическим ожиданием a $(-\infty<a<+\infty)$ и дисперсией σ^2 $(0\le\sigma<+\infty)$; c_1 и c_2 соответственно левая и правая точки усечения.

Данное смешанное усеченное нормальное распределение определяется с помощью пяти параметров: p_0, c_1, c_2, a, σ. В частных случаях, когда усечение является односторонним слева, справа или отсутствует, принимается соответственно: $c_2=k_2, c_1=k_1, \begin{cases}c_1=k_1,\\ c_2=k_2,\end{cases}$ где в качестве k_1 берется некоторая достаточно большая по абсолютной величине отрицательная константа, k_2 - достаточно большая положительная константа.

2. Смешанное показательное распределение: случайная величина ξ с вероятностью p_0 $(0\le p_0\le 1)$ принимает значение 0, а с вероятностью $(1-p_0)$ совпадает с одной из реализаций случайной величины η, распределенной по показательному закону

$$G(x)=P\{\eta\le x\}=\begin{cases}0 & при\quad x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x} & при\quad x>0\end{cases}\quad (0<\lambda<+\infty).$$

Параметрами смешанного показательного распределения являются p_0 и λ.

3. Конечное дискретное распределение: определяется с помощью вероятностей $p_k=P\{\xi=k\}$ $(k=\overline{0,n};$ n - некоторое фиксированное положительное целое; $0\le p_k\le 1;$ $\sum\limits_{k=0}^{n}p_k=1)$. Задание этого распределения в общем случае осуществляется с помощью $n+1$ числа p_k $(k=\overline{0,n})$.

На практике встречаются случаи, когда приходится моделировать случайную величину по некоторому эмпирическому распределению, полученному непосредственно на основании статистических данных. Такое распределение носит произвольный характер и не может соответствовать известным теоретическим распределениям. Такое эмпирическое распределение может быть введено в виде значений ординат плотности распределения через определенные промежутки времени или в виде некоторого уравнения, воспроизводящего эмпирическую плотность распределения.

2.3. Некоторые способы получения случайных чисел

Для того, чтобы получить значение случайной величины с заданным законом распределения, используют одно или несколько значений равномерно распределенных случайных чисел. Поэтому получение равномерно распределенных случайных чисел на компьютере имеет особо важное значение. Компьютерная имитация равномерно распределенных случайных величин может проводиться различными способами.

Один из способов – использование таблиц равномерно распределенных чисел, записанных в память компьютера, и считывание их по мере необходимости в процессе решения задач.

Вторым способом получения равномерно распределенных случайных чисел является использование генераторов случайных чисел, преобразующих результаты некоторого случайного физического процесса в последовательности двоичных разрядов. Данный способ будет целесообразным в случае необходимости систематического применения метода статистических испытаний.

Во многих случаях используются специальные подпрограммы, генерирующие так называемые псевдослучайные последовательности с помощью некоторого рекуррентного соотношения: каждое последующее число образуется из предыдущего или группы предыдущих чисел путем применения алгоритма, состоящего из арифметических и логических операций. Так, Нейманом предложен метод возведения в квадрат некоторого произвольного числа, состоящего из $2n$ двоичных цифр, и дальнейшего отбрасывания из полученного числа, состоящего из $4n$ цифр, по n цифр с обоих концов. Процесс возведения в квадрат и отбрасывания цифр повторяется многократно, в результате полученные «середины квадратов» представляют собой последовательности случайных чисел, равномерно распределенные в интервале (0,1). На практике применяются и другие, более сложные, алгоритмы, дающие зачастую распределения лучшего качества, но, в целом, все последовательности получаемых этим способом случайных чисел удовлетворяют известным критериям случайности.

К недостаткам описанного способа следует отнести периодичность вырабатываемых с помощью специальных программ последовательностей случайных чисел. Применение методов увеличения периода последовательности снижает скорость работы компьютера. Само же распределение выработанных программным способом случайных чисел (в зависимости от конкретных программ) более или менее отличается от теоретического, что серьезно влияет на результаты формирования из последовательности равномерно распределенных чисел различных многомерных распределений.

К основным достоинствам способа генерации псевдослучайных чисел относятся возможность контроля программной реализации задачи, а также простота алгоритма выработки псевдослучайного числа. В настоящее время способом генерации псевдослучайных чисел пользуется большинство исследователей, применяющих его в процессе решения ряда прикладных задач. В частности, этот способ используется при автоматном моделировании сложных логистических систем для компьютерной реализации стохастических информационных потоков (СИП), имитирующих реальные последовательности случайных воздействий на систему.

Приведем построение программы теоретико-числового метода получения псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0,1], предложенного Н.М.Коробовым [29]. Получение последовательностей случайных чисел с помощью этого метода дает довольно хорошее соответствие равномерному закону распределения.

Исходными данными для получения равномерно распределенных на отрезке [0,1] псевдослучайных чисел служат два положительных целых числа p,q. p - простое, $p=2p_1+1$, где p_1 - тоже простое, положительное число. q должно быть близким к половине p и допускать представление в виде $q=p-3m$, m - положительное, целое.

Если с помощью фигурных скобок обозначить операцию взятия дробной части числа, а с помощью квадратных - операцию выделения целой части, то последовательность равномерно распределенных на отрезке [0,1] случайных чисел $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots$ может быть получена по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} &R_k = r_{k-1}q, \\ &\xi_k = \{R_k / p\}, \qquad\qquad (k=1,2,3,\ldots), \\ &r_k = R_k - p[R_k / p] \end{aligned}$$

где R_k и r_k - промежуточные последовательности и $r_0=1$.

При применении метода Коробова псевдослучайные числа повторяются с периодом $p-1$. Числа p,q, служащие исходными данными для работы подпрограммы, выбираются так, чтобы заведомо избежать повторений в ходе решения всей задачи. Полученные таким образом псевдослучайные числа, равномерно распределенные на отрезке

[0,1], используются для получения псевдослучайных чисел с любой заданной функцией распределения. Представим некоторые формулы получения псевдослучайных чисел.

1.Последовательность нормально распределенных псевдослучайных чисел с параметрами a, σ. Пусть ξ_i $(i = 1,2,...)$ - псевдослучайные числа, равномерно распределенные на отрезке [0,1] с математическим ожиданием 0,5 и средним квадратическим отклонением $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Тогда при достаточно больших m сумма $\eta = \sum_{i=1}^{m} \xi_i$ в силу справедливости центральной предельной теоремы теории вероятностей (сумма большого числа случайных слагаемых при выполнении некоторых весьма общих условий имеет асимптотически нормальное распределение) распределена асимптотически нормально с параметрами $a' = \frac{m}{2}$; $\sigma' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{3}}$. Псевдослучайные числа, распределенные нормально с заданными параметрами a, σ, находятся по формуле

$$\eta_k = \frac{\sum_{i=1}^{m} \xi_i - \frac{m}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{3}}} \sigma + a = \left(\frac{2}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{m} \xi_i - \sqrt{m} \right) \sigma\sqrt{3} + a.$$

2.Для получения последовательности псевдослучайных чисел, распределенных по показательному закону распределения, предлагается формула

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi_i) \quad (i = 1,2,...),$$

где λ - параметр распределения, ξ_i - последовательность случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке.

3.Для получения псевдослучайных чисел, распределенных по дискретному закону, используется метод последовательного сравнения очередной реализации равномерно распределенного на отрезке [0,1] случайного числа с последовательностью сумм $S_k = \sum_{i=0}^{k} p_i$ $(k = \overline{0, n})$. Представим алгоритм формирования распределенных по дискретному закону псевдослучайных чисел:

- формирование суммы $S_0 = p_0$;

- выборка равномерно распределенного на отрезке [0,1] случайного числа ξ;

- сравнение ξ со значением текущей суммы S_k. Если $\xi < S_k$, производится фиксация $\xi = k$ и осуществляется выход из подпрограммы. Иначе производится формирование очередной суммы:

$$S_{k+1} = S_k + p_{k+1}$$

и переход на предыдущий пункт.

4. Приведем алгоритм получения псевдослучайных чисел, распределенных в соответствии с некоторой произвольной плотностью вероятностей $f(x)$, определенной на основании статистических данных. Для функции $f(x)$ как плотности некоторого распределения справедливо соотношение $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, поэтому она должна быть или сосредоточенной на конечном промежутке, или асимптотически приближаться к горизонтальной оси для достаточно больших и достаточно малых значений x. Должно существовать также некоторое наибольшее значение ее. Это значит, что с большей или меньшей погрешностью можно указать такой прямоугольник с вершинами $(a,0),(a,c),(b,c),(b,0)$, что вся кривая плотности распределения $f(x)$, за исключением отбрасываемых близких к горизонтальной оси асимптотических участков, будет заключена внутри этого прямоугольника. Представим алгоритм получения случайных чисел:

- находятся два случайных числа: α_1, α_2, каждое из которых распределено на отрезке [0,1];

- найденные случайные числа преобразуются в координаты случайной точки, равномерно распределенной в прямоугольнике с вершинами $(a,0),(a,c),(b,c),(b,0)$, то есть $\beta_1 = a + \alpha_1(b-a)$; $\beta_2 = \alpha_2 c$;

- проверяется положение полученной случайной точки относительно графика функции $f(x)$; если точка расположена выше кривой, то есть, если $\beta_2 > f(\beta_1)$, то все действия повторяются сначала, в противном случае величина β_1 принимается за очередную реализацию моделируемой случайной величины.

Частоты попадания значений случайных чисел в интервалы отрезка $[a,b]$ будут пропорциональны площадям криволинейных трапеций, расположенных над этими отрезками и под кривой $f(x)$. Это означает, что для последовательности случайных чисел, получаемых с помощью приведенного алгоритма, функция $f(x)$ будет плотностью распределения.

При имитации процессов Маркова встречаются трудности, связанные с необходимостью ввода в память компьютера стохастических матриц большого размера. В этом случае используется логический прием, помогающий решить задачу имитации.

Пусть рассматриваемая простая однородная цепь Маркова имеет матрицу вероятностей перехода вида:

$$\begin{Vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \ldots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ q_0+q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & \ldots \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \ldots \\ 0 & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \ldots \\ 0 & 0 & q_0 & q_1 & q_2 & \ldots \\ & & & & & \ldots \end{Vmatrix}.$$

Здесь p_i, q_k - такие числа, что $0 \le p_i \le 1$; $0 \le q_k \le 1$; $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$; $\sum_{k=0}^{\infty} q_k = 1$; $(i,k = 0,1,2,\ldots)$. Необходимо построить алгоритм нахождения реализации случайной величины $a(t+1)$, если известна реализация случайной величины $a(t)$.

Пусть последовательности $\{p_i\},\{q_k\}$ являются вероятностными распределениями дискретных взаимно независимых случайных величин ξ и η. Нашей целью будет построение **конечной полной системы логических высказываний** и соответствующих формул вычисления искомой случайной величины:

Высказывание	*Формула*
$a(t) < 2$	$a(t+1) = \xi$
$a(t) = 2$	$a(t+1) = 1$
$a(t) > 2$	$a(t+1) = \max\{0, a(t) + \eta - 4\}$

Поясним алгоритм нахождения $a(t+1)$. Вначале выбирается то из высказываний, которое при данном значении $a(t)$ является истинным. Реализация $a(t+1)$ находится по формуле, соответствующей выбранному высказыванию. Если в выбранной формуле содержится случайная величина, то с помощью уже известных приемов получения псевдослучайных чисел находится реализация этой случайной величины и подставляется в формулу. Чтобы убедиться в правильности данного алгоритма и понять соображения, на основании которых построены высказывания и формулы, достаточно подставить все возможные значения случайных величин $a(t), \xi, \eta$ в формулы и сравнить результат с результатом, получаемым с помощью матрицы. Использование данного логического приема в более сложных ситуациях – составная часть идеи автоматного моделирования сложных систем.

2.4. Единая информационная технология автоматного моделирования логистических систем

Необходимость формирования единой информационной технологии компьютерного моделирования логистических систем обусловлена требованиями определения параметров экономической реакции логистической системы на частное изменение ее структурно-функциональных характеристик, оценки интегральной реакции системы на основании локальных предпочтений поставщиков (потребителей), а также возможностями усовершенствования технического, технологического и математического обеспечения управления логистической системой. Создание компьютерных логистических моделей позволяет:

- создавать язык анализа информации, близкий к языку специалиста, что позволяет «опустить» статистические методы анализа в основание модели, создать возможности для непосредственного диалога исследователя с ПК и существенно повысить возможности интерпретации данных исследования;
- усовершенствовать методику сбора и обработки исходной информации благодаря разработке специального программного обеспечения;
- восстанавливать отсутствующие для моделирования данные, оценивать неизвестные параметры;
- планировать эмпирическое исследование путем проведения вычислительных экспериментов, выявления чувствительных и наиболее важных точек модели и концентрирования усилий на получении приоритетной информации;
- моделировать гипотезы, создавая модель на гипотетических данных, и проверять их на противоречивость;
- интегрировать в единую систему большое количество данных, что позволяет учесть многофакторность логистических процессов;
- принимать решения, проводить вычислительные эксперименты, проверяя на модели последствия различных вариантов решения;
- прогнозировать проблемные процессы и нестандартные ситуации в логистических системах.

Известно, что информатика – понятие многоаспектное, поскольку одна группа специалистов считает, что информатика – это наука, другая – что это технология, третья полагает, что это – сфера человеческой деятельности, четвертая рассматривает ее как отрасль экономического хозяйствования. Считается, что предмет информатики – это и методы решения задач на ПК, и машинная технология обработки информации, и совокупность методов и средств передачи информации, и совокупность законов и закономерностей движения информации и т.д.

Как и вся наука, информатика включает в себя ряд взаимосвязанных дисциплин, объединенных общими системообразующими признаками в систему. Такими признаками информатики являются: «информация», «информационная техника», «информационная технология», «информационные системы», которые можно обобщить названием «средства информатики».

Важнейшим средством информатики являются информационные технологии, где предмет и продукт переработки – информация, а средство переработки информации – информационная техника. Другими словами, информационная технология – это совокупность знаний о способах и приемах труда по переработке информации, ее компонентах и способах их соединения для получения информационного продукта или оказания информационных услуг. Понятие «новая информационная технология» предполагает, что это, как правило, компьютеризированная информационная технология, которая должна решать следующие основные задачи:

- приблизить пользователя к вычислительным и информационным ресурсам;
- обеспечить простоту общения пользователя с ПК;
- сократить время, исчисляемое от возникновения информации до ее потребления;
- обеспечить минимальное участие человека в осуществлении всех этапов информационного цикла;
- улучшить взаимопонимание компонентов системы «человек-компьютер».

Решение этих задач осуществляется в настоящее время путем использования последних достижений науки и техники: системотехники и программотехники, теории систем баз данных, теории информационных сетей и других составляющих основу науки информатики [16, 17, 18].

Для современных информационных процессов характерна системность, при которой важные потребительские свойства приобретают не отдельная информационная техника или информационная технология, а их совокупности, обслуживающие информационные системы, т.е. системы, в которых осуществляются информационные процессы, составляющие полный цикл обращения информации (регистрация, формирование, хранение, обработка, передача, представление).

Обратимся к обсуждению одной из важнейших составляющих информатики в данном контексте – к информационному обеспечению задачи имитационного моделирования логистической системы.

Информационное обеспечение, являясь важным звеном реальной и имитационной логистических систем, **организует структурированный поток данных** и связывает этапы производства, транспортировки и сбыта в единый процесс перемещения материальных и информационных потоков в реальной системе, а также обеспечивает поступление необходимой входной информации, в том числе для получения последовательностей псевдослучайных чисел, в модель. Особенностью информационного обеспечения логистических систем является внедрение быстродействующих компьютеров, локальных вычислительных сетей, телекоммуникационных систем. Современные коммуникационные технологии обеспечивают быстрое прохождение материальных и информационных потоков и позволяют осуществлять мониторинг всех фаз перемещения партий продуктов труда (ППТ) от входа в систему до конечного потребителя. Автоматные модели (СВА) построены таким образом, что аналогично реальным логистическим системам также осуществляют мониторинг состояния системы, в том числе фаз перемещения ППТ, способом перевычисления состояний автоматов модели в каждый текущий момент времени.

Применение компьютерной функциональной области логистики дает возможность пользователям интегрироваться в человеко-машинную систему обработки данных в качестве пользователей информационной системы, обеспечивающей для них возможность выполнять такие действия:

- обрабатывать первичные текстовые документы;
- проводить поиск необходимой информации в справочных фондах и архивах;
- формировать документы, ведомости, таблицы;
- обмениваться документами и данными;
- принимать и актуализировать решения в условиях недостатка информации или неопределенности.

В процессе совершенствования технологии сбора и обработки статистической информации стал применяться такой вид информационной технологии как сетевая технология с распределенной обработкой данных. На местах появления и использования информации устанавливаются ПК и соединяются каналами связи, позволяющими децентрализировать технологии обработки данных.

Распределенная обработка данных дает возможность повысить точность, гибкость и оперативность принятия решений в процессе исходных, статистических исследований. Разработчики, выполняющие функции сбора, регистрации, сбережения, передачи и выдачи информации, ощущают преимущества такой технологии, в частности ввиду снятия пиковых нагрузок, обеспечения доступа специалистов к вычислительным ресурсам сети ПК, а также обмена данными между ними, поскольку это дает возможность распределить сетевые ресурсы и децентрализовать технологию обработки данных.

В распределенных системах используют три интегрированные технологии: технология «клиент-сервер», технология универсального общения пользователей, технология общего пользования ресурсами в границах глобальных сетей. Для того, чтобы получаемая информация эффективно поддерживала логистические процессы и служила основой для построения моделей с высокой степенью адекватности имитации, получение исходной информации для системы должно опираться на ряд обязательных принципов:

- полнота и востребованность данного вида информации как необходимые и достаточные условия для выполнения логистических функций и операций (реальных и виртуальных);

- точность и достоверность исходной информации, имеющие принципиальное значение для принятия правильных решений, в том числе для решения прогнозных и оптимизационных задач логистики;

- своевременность – это требование своевременных поступления и обработки данных, реализуемых современными логистическими технологиями сканирования, штрихового кодирования, электронного обмена данными;

- ориентированность на выявление проблемных ситуаций, «узких» мест, на появление резервов экономии ресурсов, возможности изменения маршрута и (или) смены видов (сочетания видов) транспортных средств;

- гибкость – приспособляемость получаемой и обрабатываемой информации к выдаче пользователям различных направлений в наиболее удобном в каждом конкретном случае виде;

- необходимость совместимости формата данных в логистической информационной системе (вида и формы документов, размещения реквизитов на бумажных документах, размерности данных и других параметров) и формата данных, применяемого в компьютерных и коммуникационных сетях. Это позволяет максимально эффективно использовать продуктивность технических средств – объем памяти, быстродействие, пропускную способность – в целях облегчения машинной обработки информации и циркуляции информационных потоков внутри логистической системы, а также между самой системой и внешней средой.

Использование современных ПК и концепции баз данных дают возможность реализации систем обеспечения принятия решений, предполагающих широкое использование экономико-математических методов и моделей самого различного типа. Это позволяет создавать особый банк моделей, в котором аккумулируется обобщенный опыт квалифицированных специалистов. Каждый пользователь получает возможность напрямую решать с помощью этого банка моделей свои проблемы. Создание систем такого типа связано с одним из прикладных направлений исследований «искусственного интеллекта» - с разработкой экспертных систем, объединяющих широкий класс различных по своему характеру и структуре систем и имеющих некоторые более прогрессивные черты по сравнению с традиционными информационными системами.

Экспертные системы в своем развитии вышли из информационно-справочных систем и оказались более эффективными в способности наращивания знаний о конкретной предметной области и увеличения общих возможностей обработки информации, в том числе развития и поддержания программного обеспечения, языков общения с системой в интерактивном режиме работы, использования знаний пользователя и т.д.

Общим для различных экспертных систем является наличие таких элементов, как база знаний, блок управления знаниями и наличие ситуационной модели. В структуру экспертной системы вводятся следующие блоки:

- блок представления знаний, содержащий модель предметной области;
- фактографическая часть, содержащая данные по предметной области;
- блок механизмов логического вывода, включающий набор правил и теорем;
- блок рабочей области, в котором осуществляется формулирование и ввод задач в систему;
- блок обеспечения диалогового режима работы с пользователем;
- блок обеспечения экспертной системы единой информационной технологией моделирования конкретной предметной области.

Система относится к классу экспертных в случае, если она обеспечивает усовершенствованную по сравнению с традиционными системами поддержку принимаемых решений. Совершенно очевидно, что такими свойствами экспертных систем в полной мере обладают вероятностно-автоматные модули и модели, предназначенные для исследования сложных логистических систем.

С целью усовершенствования построения автоматных моделей ЛС различной степени сложности вводится в качестве поддержки принимаемых решений **единая информационная технология автоматного моделирования сложных логистических систем,** представляющая собой последовательную реализацию следующих этапов:

1. Содержательное описание конкретной предметной области, уровень подробности детализации которого соответствует поставленной

цели исследования, техническим и технологическим возможностям исследователя. Выявление случайных величин, участвующих в описании логистической системы. Однако, при любом уровне подробности и глубины исследования необходимой должна быть достоверность, точность, своевременность полученной первичной информации. Качество первичной информации обусловливает степень точности имитации, облегчение построения текущей модели, а также гарантирует качественное пополнение блока представления знаний и фактографической части, входящих в структуру логистической экспертной системы (если таковая в данном случае уже существует).

2. Статистическое исследование системы, являющееся основой для построения вероятностно-автоматной модели. На данном этапе осуществляется сбор статистических данных по каждой случайной величине и получение выборочных совокупностей о временах поступления ППТ на вход системы, о случайных количественных характеристиках поступивших ППТ, о случайной длительности событий (погрузки/ разгрузки, безаварийной деятельности, длительности ремонтных работ, сверхнормативных времен ожидания), о наступлении форс-мажорных обстоятельств. По выборкам каждая последовательность случайных величин проверяется на независимость (автокорреляционный метод), а также определяются эмпирические распределения вероятностей с последующим выдвижением гипотез о предполагаемых функциях распределения. Гипотезы о теоретических законах распределения необходимо проверять на достоверность с помощью одного из критериев согласия. Проверке надлежат гипотезы о взаимной независимости различных случайных величин (корреляционный метод).

3. Построение формализованной схемы, выделяющей в рассмотрение существенные, на взгляд исследователя, структурно-функциональные особенности предметной области. Задача формализации заключается в том, чтобы из числа всех введенных в содержательное описание факторов, свойств, структурных особенностей системы суметь выделить те факторы, свойства, структурные особенности данной системы, описание совокупности которых достаточно полно отражает все ее закономерности. С этой целью принимаются упрощающие и уточняющие предположения и договоренности, в результате которых качественное описание характеристик системы уступает место количественному описанию, позволяющему переходить к построению модели.

4. Этап построения сценария моделирования. Служит основой для дальнейшей идентификации объектов реальной системы и описания их свойств в качестве состояний вводимых в действие вероятностных автоматов модели. Если в результате статистических исследований обнаруживается, что хотя бы одна случайная последовательность не является реализацией независимых, одинаково распределенных

случайных величин, или существует взаимная зависимость некоторых случайных совокупностей, то повторяются этапы формализации и построения сценария моделирования, но уже усовершенствованного по сравнению с предшествующим. Другими словами, если зависимость существует, то в процессе переформатирования формализованной схемы и отладки сценария корректируется выбор случайных величин, используемых при построении модели, с целью получения набора последовательностей независимых, одинаково распределенных случайных величин и набора независимых случайных совокупностей. В функцию сценария входит также урегулирование компромисса между уровнем сложности и адекватности формализованной схемы (и будущей модели) и экономией времени реализации задачи.

5. Процесс построения модели СВА. Заключается во введении состояний автоматов, идентифицирующих количественные, качественные, временные и структурно-функциональные характеристики объектов изучаемой системы. Для моделей, строящихся из небольшого количества автоматов, состояния последних записываются функциями временного аргумента - $a(t), b(t)$. Сами вероятностные автоматы обозначаются соответствующими большими буквами - A, B. В сложных моделях состояния автоматов записываются в форме специфических наборов букв, семантически имеющих отношение к описываемому объекту, с целью быстрого распознавания и сокращения сроков построения алгоритма модели.

6. Разработка алгоритма модели – таблицы условных функционалов переходов - результирующий этап автоматного моделирования. На данном этапе каждый введенный в рассмотрение автомат и вся система СВА в целом должны обладать свойством марковости, обусловливающим разрешимость и адекватность модели и позволяющим пошаговое перевычисление состояния каждого автомата. Алгоритм ТУФП является конечной системой логических высказываний относительно внутреннего состояния каждого из автоматов и его входного сигнала и соответствующей ей системой реакций автомата (системой условных функционалов переходов).

Структурно и функционально алгоритм модели делится на две части: математическую и экономическую. Математическая часть ТУФП предназначена для перевычисления состояний всех автоматов, описывающих структурно-функциональные свойства модели. В экономической части ТУФП определяются состояния автоматов накопления и усреднения, на протяжении всего периода моделирования пошагово накапливающих и усредняющих значения искомых неслучайных характеристик системы, которые участвуют в построении критерия эффективности, являющегося формульным выражением постановки задачи.

Очевидно, что единая информационная технология автоматного моделирования ЛС предусматривает необходимость строгого следования постулатам и действиям, гарантирующим выполнение условий разрешимости и адекватности при построении автоматных моделей, описанным в пункте 1.4.

Следующая глава монографии будет посвящена конкретным исследованиям: описанию аналитического исследования материальных потоков, а также построению автоматных моделей маршрутных перевозок и их модификаций, возникающих в зависимости от специфики логистических систем.

Глава 3

АВТОМАТНОЕ ОПИСАНИЕ МАРШРУТНЫХ ПЕРЕВОЗОК

3.1. Многослойные популяции. Аналитическое исследование материальных потоков

Понятие **популяция** представляет собой некоторую абстрактную упорядоченную систему множеств однородных элементов, для которых определены правила перехода элементов из одного множества в другое. Если система множеств упорядочена по одному параметру, она называется однослойной популяцией, если присутствует более одного параметра, популяция называется многослойной. Основной целью исследований многослойных популяций является разработка информационной технологии, позволяющей выполнять количественную оценку появления частных признаков в упорядоченных множествах элементов и решать различные задачи по уточненному определению потребностей в товарах и услугах, по определению спроса, по планированию выпуска продукции, по другим задачам маркетинговой логистики. Методы исследования включают автоматное описание моделей, разностные уравнения, их решение методом производящих функций, получение моментов распределений на основании производящих функций, получение асимптотических формул. Многие конкретные и актуальные задачи прогнозирования и поддержки принятия решений могут достаточно результативно решаться при формализации изучаемых процессов в виде популяций.

Если популяционные множества содержат весьма большое число элементов, а сами элементы достаточно мелкие, количества элементов могут измеряться в непрерывных единицах – единицах массы, объема и т.д. В практических приложениях, занимаясь изучением реальных процессов с помощью многослойных популяций, необходимо задавать четкую математическую формализацию относительно моментов времени возникновения существенных событий в системе, их длительности и чередования. Приведем общую схему формализации систем с помощью аппарата многослойных популяций.

Структура совокупности популяционных множеств представляет собой ряд слоев, каждый из которых состоит из цепочки множеств. Существует определенная иерархия слоев, при которой элементы из множеств верхнего слоя могут перемещаться во множества нижнего слоя; а также определенная иерархия множеств в слоях, при которой элементы определенного множества могут перемещаться в соседнее множество в одном выбранном направлении. Каждое из множеств является вместилищем определенного количества однородных элементов, каждый из которых за промежуток времени $[t,t+1)$ может с определенной вероятностью либо оставаться в том же множестве, либо переходить в следующее по заданному направлению множество того же слоя, либо во множество нижнего слоя.

Предположим, что за промежуток времени $[t,t+1)$ каждый элемент множества $\Re_{hl}$ попадает во множество $\Re_{h+1,l}$ нижнего слоя с вероятностью p, а с вероятностью $q=1-p$ остается в прежнем множестве. Каждый оставшийся элемент множества $\Re_{hl}$ может либо переместиться во множество $\Re_{h,l+1}$ того же слоя с вероятностью p^*, либо остаться в прежнем множестве с вероятностью $q^*=1-p^*$. Параметры p, p^* характеризуют скорости распространения и осаждения (перехода в нижний слой) элементов.

При аналитическом исследовании многослойных популяций вводятся операторы субститутивные и мультипликативные.

Пусть функции $\varphi(z), \psi(z), f(z)$ определены на отрезке [0, 1] и обладают свойствами:

$$\varphi(1)=1; \psi(1)=1; f(1)=1.$$

Тогда оператор

$$\mathrm{N}_f\varphi(z)=\varphi(f(z))=\psi(z)$$

назовем субститутивным оператором, переводящим функцию $\varphi(z)$ в $\psi(z)$.

Оператор

$$\mathrm{M}_f\varphi(z)=\varphi(z)f(z)=\psi(z)$$

назовем мультипликативным оператором, переводящим $\varphi(z)$ в $\psi(z)$.

Популяционные множества подразделяются на:

- множества с единственным выходом;
- множества с двумя выходами;
- Множества с входными каналами.

Наиболее интересным при использовании данного метода является вариант, когда один из параметров упорядочения имеет временной характер. В этом случае целесообразно рассматривать поведение и развитие многослойных популяций во времени - на конечном или бесконечном интервалах. Схема многослойных популяций является естественным обобщением хорошо известной классической схемы ветвящихся процессов.

Для множества $\Re$ с единственным выходом $\aleph$ обозначим через $a(t)$ его состояние в момент t и через $\{\alpha_k(t)\}$ - распределение состояния $a(t)$:

$$\alpha_k(t) = P\{a(t) = k\} \quad (k, t = 0, 1, 2, ...)$$

К моменту $t+1$ каждый из элементов множества $\Re$ может покинуть это множество по каналу $\aleph$ с вероятностью p, либо остаться с вероятностью $q = 1 - p$. Тогда распределение $\{\alpha_k(t)\}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\alpha_k(t+1) = q^k \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k+i}{k} \alpha_{k+i}(t)\, p^i \quad (k, t = 0, 1, 2, ...)$$

Введем производящую функцию данного распределения:

$$A(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t)\, z^k \quad (|z| \le 1;\, t = 0, 1, 2, ...).$$

Умножив каждое уравнение выше приведенной системы на z^k и просуммировав, получим

$$A(t+1, z) = A(t, p + qz) = \mathrm{N}_{p+qz} A(t, z).$$

Найдем производящую функцию числа элементов множества $\Re$, покидающих это множество по каналу $\aleph$ в течение промежутка $[t, t+1)$.

Пусть $x(t)$ - число элементов множества $\Re$, покидающих это множество за промежуток $[t, t+1)$ по каналу $\aleph$ и $\beta_k(t+1) = P\{x(t+1) = k\}$ - вероятность того, что множество покинут k элементов.

Переходя к системе уравнений, получаем

$$\beta_k(t+1) = p^k \sum_{i=1}^{\infty} \binom{k+i}{k} a_{k+i}(t)\, q^i \quad (k, t = 0, 1, 2, ...).$$

Тогда

$$B(t+1, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t+1)\, z^k$$

будет производящей функцией распределения $\{\beta_k(t+1)\}$ числа элементов, покидающих популяционное множество $\Re$ по каналу $\aleph$ за промежуток $[t,t+1)$. Процедура перехода к производящим функциям дает:

$$B(t+1,z) = A(t,q+pz) = \mathrm{N}_{q+pz}A(t,z).$$

В случае популяционного множества с двумя выходами аналогично обозначим состояние популяционного множества $\Re$ через $a(t)$, а через $x_1(t), x_2(t)$ - количества элементов, покидающих множество $\Re$ по каналам $\aleph_1, \aleph_2$ за промежуток времени $[t,t+1)$.

Для каждого элемента возможны варианты: с некоторой вероятностью осесть (перейти) в нижележащий слой, либо перейти в смежное множество того же слоя, либо остаться в прежнем множестве (объеме). Выходные каналы ранжируются по приоритетности.

Пусть $B_1(t+1,z), B_2(t+1,z)$ - производящие функции распределений числа элементов множества $\Re$, покидающих это множество по каналам $\aleph_1, \aleph_2$ за промежуток $[t,t+1)$. Тогда

$$A(t+\Delta t,z) = \mathrm{N}_{p_1+q_1 z}A(t,z).$$

Поскольку в промежутке $[t+\Delta t,t+1)$ выходы по каналу $\aleph_1$ не происходят, то при переходе к производящим функциям получаем

$$B_1(t+1,z) = B_1(t+\Delta t,z) = \mathrm{N}_{q_1+p_1 z}A(t,z),$$

а поскольку в промежутке $[t,t+\Delta t)$ выходы элементов по каналу $\aleph_2$ не могут происходить, то

$$B_2(t+1,z) = \mathrm{N}_{q_2+p_2 z}A(t+\Delta t,z) = \mathrm{N}_{q_2+p_2 z}\mathrm{N}_{p_1+q_1 z}A(t,z).$$

Предположим, что в каждый момент времени t по каналу Y поступает случайное число $y(t)$ элементов во множество $\Re$. Пусть в разные моменты t случайные величины $y(t)$ взаимно независимы, не зависят от $a(t)$ и одинаково распределены с известным распределением:

$$\{\gamma_k(t)\} = P\{y(t)=k\}.$$

При переходе к производящим функциям получим:

$$C(t,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k z^k \quad (|z|\le 1;\ k,t=0,1,2,...).$$

Тогда

$$A(t+1,z)=\mathrm{M}_{C(t,z)}A(t,z).$$

Для любого числа независимых входов

$$A(t+1,z)=\prod_{m=1}^{S}\mathrm{M}_{C_m(t,z)}A(t,z).$$

Приведенная формализация оказывается целесообразной в задачах экономики, техники, экологии, демографии.

Приведем некоторые примеры. Так, множество семей, проживающих в некотором регионе и упорядоченных по возрасту главы семьи и по доходу на одного члена семьи, можно рассматривать как двухслойную популяцию. Множество однотипных транспортных средств, упорядоченных по сроку службы, балансовой стоимости и степени износа, может считаться многослойной популяцией. Известные демографические модели, модели старения оборудования исследуют однослойные популяции. Для многослойных популяций, имеющих временную компоненту, упорядочения, переходы из одних множеств в другие могут зависеть от значения этой компоненты. Многослойные популяции могут подвергаться внешним воздействиям, которые могут влиять по-разному на элементы множеств различных возрастных категорий.

Оценка эффективности рассматриваемой системы может производиться по весьма разнообразным показателям. Если внешнее воздействие носит регулярный характер, ее реакция, а вместе с ней и эффективность системы, являются стабильными. При мгновенном изменении внешнего воздействия реакция популяции «размазывается» во времени. Изучение характера этого явления – одна из основных задач изучения развития многослойных популяций. В [21] предлагаются принципы построения некоторых многослойных популяций и примеры их использования.

Весьма эффективным является использование аппарата многослойных популяций для аналитического исследования моделей материальных потоков [38]. Рассмотрим модель функционирования кольцевого транспортного маршрута, по которому допускается движение транспортных единиц только в одну определенную сторону. На маршруте находится l станций – пунктов, где происходит загрузка и выгрузка грузов. В каждый момент времени на маршруте циркулирует l транспортных средств (ТС) (по числу станций) и движение организовано так, что моменты прибытия ТС на станции в точности совпадают. В каждый такой момент на каждую станцию прибывает очередное ТС и каждое ТС прибывает на очередную станцию. Загрузка и выгрузка грузов производится мгновенно в момент прибытия ТС на станцию, после чего ТС сразу же отправляется.

Все перевозимые по маршруту грузы предполагаются однородными и штучными, количество их измеряется в условно выбранных единицах. Поступление грузов на станции происходит в течение всего времени функционирования системы. Груз, прибывший на станцию, хранится там до момента поступления на эту станцию очередного ТС. Все ТС предполагаются неограниченной емкости, и весь груз, находящийся на станции в момент прибытия ТС, загружается в это ТС и отправляется со станции. Считается, что поток прибытия грузов на каждую станцию обладает свойством отсутствия последействия в том смысле, что распределение числа единиц груза, поступающего на станцию за промежуток времени между двумя последовательными моментами поступления ТС на эту станцию, не зависит от момента поступления последней единицы груза до этого промежутка. Груз, находящийся в ТС в момент его прибытия на станцию, частично выгружается и покидает систему, частично следует дальше.

Обозначим через $\eta_j^{(k)}$ $(k=\overline{0,l-1};\ j=1,2,...)$ целочисленную случайную величину – количество груза, поступающего на станцию с номером k за промежуток времени между прибытиями на эту станцию $(j-1)$-го и j-го ТС по порядку от начала функционирования системы. При фиксированном k $(k=\overline{0,l-1})$ случайные величины $\eta_j^{(k)}$ $(j=1,2,...)$ взаимно независимы и одинаково распределены. Их реализации могут рассматриваться как реализации одной и той же случайной величины $\eta^{(k)}$ $(k=\overline{0,l-1})$. Случайные величины $\eta^{(k)}$ взаимно независимы. Их распределения

$$P_i^{(k)}=P\{\eta^{(k)}=i\} \quad (i=0,1,2,...;\ k=\overline{0,l-1})$$

считаются заданными и при разных k могут различаться не только значениями параметров, но и своей функциональной формой.

Каждая единица груза, прибывшая в ТС на станцию с номером k, либо выгружается из ТС и покидает систему с вероятностью p_k $(0 \le p_k \le 1)$, либо продолжает движение дальше в этом же ТС с вероятностью $1-p_k$. Вероятности p_k $(k=\overline{0,l-1})$ зависят от номера станции, но не зависят ни от пополнения ТС, ни от пути, уже пройденного данной единицей груза, ни от времени, прошедшего с начала функционирования системы.

Если хотя бы при одном значении k имеет место $p_k > 0$, то с течением времени в системе установится определенный стационарный режим, заключающийся в том, что распределения пополнения ТС на каждом перегоне стремятся к определенным стационарным распределениям. Этот интуитивно очевидный факт найдет в дальнейшем изложении строгое подтверждение для некоторых конкретных распределений $P_i^{(k)}$. Основная задача исследования заключается в нахождении распределения накопления ТС на различных перегонах в стационарном и нестационарном режимах.

Рассмотрим следующие l последовательностей случайных величин:

$$\xi_0(t) = \{b_0(0), b_1(1), ..., b_{l-1}(l-1), b_0(l), b_1(l+1), ..., b_{l-1}(2l-1), b_0(2l), ...\}$$
$$\xi_1(t) = \{b_1(0), b_2(1), ..., b_{l-1}(l-2), b_0(l-1), b_1(l), ..., b_{l-1}(2l-2), b_0(2l-1), ...\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\xi_{l-1}(t) = \{b_{l-1}(0), b_0(1), ..., b_{l-1}(l), b_0(l+1), b_1(l+2), ..., b_{l-1}(2l), b_0(2l+1), ...\} \tag{3.1.1}$$

Эти последовательности представляют собой простые одномерные неоднородные цепи Маркова. Неоднородность этих цепей заключается в том, что их матрицы переходных вероятностей периодически чередуются с периодом l. Все эти цепи эквивалентны между собой в том смысле, что в процессе функционирования цепей их переходами из одних состояний в другие управляют одни и те же стохастические матрицы, чередующиеся в том же порядке. Однако, в один и тот же момент времени переходами состояний различных цепей управляют различные матрицы. Сдвиг между номерами матриц, управляющих в один и тот же момент времени переходами состояний каждых двух цепей из (3.1.1), совпадает с разностью номеров этих цепей.

При исследовании стационарного режима системы все цепи (3.1.1) обладают одними и теми же наборами стационарных распределений вероятностей. Поэтому в данном случае достаточно исследовать только одну из рассматриваемых цепей, безразлично какую именно. В нестационарном случае существенным оказывается лишь то, с какой из матриц начинается их чередование. Этот случай также может быть сведен к изучению только одной цепи, но при различных начальных номерах управляющих матриц. Имеется l таких вариантов.

Исследование начнем для цепи $\xi_0(t)$ и полученные результаты обобщим на остальные цепи из (3.1.1). Запишем

$$\begin{gathered}\xi_0(0) = b_0(0), \xi_0(1) = b_1(1), ..., \xi_0(l-1) = b_{l-1}(l-1), \xi_0(l) = b_0(l), \\ \xi_0(l+1) = b_1(l+1), ..., \xi_0(2l-1) = b_{l-1}(2l-1), \xi_0(2l) = b_0(2l), ...\end{gathered} \tag{3.1.2}$$

Положим

$$t = \tau l + k, \tag{3.1.3}$$

где $\qquad \tau = 0,1,2,\ldots; \quad k = \overline{0, l-1}$

и

$$\xi_0(t) = \xi(\tau, k) \tag{3.1.4}$$

Тогда цепь Маркова (3.1.2) запишется в виде

$$\xi(0,0) = b_0(0), \xi(0,1) = b_1(1), \ldots, \xi(0, l-1) = b_{l-1}(l-1),$$
$$\xi(1,0) = b_0(l), \xi(1,1) = b_1(l+1), \ldots, \xi(1, l-1) = b_{l-1}(2l-1),$$
$$\xi(2,0) = b_0(2l), \xi(2,1) = b_1(2l+1), \ldots$$

или

$$\xi(\tau, k) = b_k(t), \tag{3.1.5}$$

где t, τ *и* k сведены соотношением (3.1.3) и $t = 0,1,2,\ldots; \tau = 0,1,2,\ldots; k = \overline{0, l-1};$

Цепь Маркова (3.1.5) неоднородная: при различных k и независимо от значения τ переходами

$$\xi(\tau, k) \to \xi(\tau, k+1) \quad (k = \overline{0, l-2}) \tag{3.1.6}$$

и

$$\xi(\tau, l-1) \to \xi(\tau+1, 0) \tag{3.1.7}$$

управляют различные матрицы переходных вероятностей. При равных значениях k так же независимо от τ - одни и те же матрицы.

Таким образом, каждому фиксированному k $(k = \overline{0, l-1})$ ставится в соответствие определенная стохастическая матрица, управляющая переходом цепи из состояния в состояние в моменты времени $t = \tau l + k$. Обозначая эти матрицы через $D^{(k)}$ $(k = \overline{0, l-1})$, будем считать, что матрица $D^{(k+1)}$, где $k = \overline{0, l-2}$, управляет переходом типа (3.1.6), а матрица $D^{(0)}$ - переходом типа (3.1.7).

Пусть $d_{ij}^{(k)}$ $(k = \overline{0, l-1}; i, j = 0,1,2,\ldots)$ - элементы матрицы $D^{(k)}$. Используя введенные в предыдущем параграфе вероятности, имеем

$$d_{ij}^{(k)} = \sum_{r=j-i}^{j} P_r^{(k)} \binom{i}{i+r-j} p_k^{i+r-j} (1-p_k)^{j-r} \quad \text{при} \quad j > i \tag{3.1.8}$$

и

$$d_{ij}^{(k)} = \sum_{r=0}^{j} P_r^{(k)} \binom{i}{i+r-j} p_k^{i+r-j}(1-p_k)^{j-r} \quad при \quad j \le i \tag{3.1.9}$$

Положим

$$q_i(\tau,k) = P\{\xi(\tau,k) = i\} \tag{3.1.10}$$

$(\tau = 0,1,2,...; k = \overline{0,l-1}; i = 0,1,2,...)$.

Для всех пар τ *и* k очевидно, что

$$0 \le q_i(\tau,k) \le 1 \quad (i = 0,1,2,...); \quad \sum_{i=0}^{\infty} q_i(\tau,k) = 1; \tag{3.1.11}$$

Введем производящие функции $\varphi^{(k)}(\tau,z)$ *и* $R^{(k)}(z)$ распределений $\{q_i(\tau,k)\}$ *и* $\{P_i^{(k)}\}$ следующим образом

$$\varphi^{(k)}(\tau,z) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i(\tau,k) z^i \tag{3.1.12}$$

$$R^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i^{(k)} z^i \tag{3.1.13}$$

$$(k = \overline{0,l-1}; \tau = 0,1,2,...; |z| \le 1)$$

Докажем следующее утверждение:

Теорема 3.1.1. Производящие функции (3.1.12) вероятностных распределений (3.1.11) состояний неоднородной цепи Маркова (3.1.5) удовлетворяют системе функциональных разностных уравнений

$$\varphi^{(k+1)}(\tau,z) = R^{(k+1)}(z)\varphi^{(k)}(\tau, p_{k+1} + (1-p_{k+1})z)$$
$$(k = \overline{0,l-2}; \tau = 0,1,2,...; |z| \le 1), \tag{3.1.14}$$

$$\varphi^{(0)}(\tau+1,z) = R^{(0)}(z)\varphi^{(l-1)}(\tau, p_0(1-p_0)z)$$
$$(\tau = 0,1,2,...; |z| \le 1), \tag{3.1.15}$$

где функции $R^{(k)}(z) \quad (k = \overline{0,l-1})$ определены по (3.1.13).

Действительно, на основании того, что последовательность $\xi(\tau,k)$ является цепью Маркова (неоднородной) для каждого перехода типа (3.1.6) можно составить следующие системы разностных алгебраических уравнений

$$q_j(\tau,k+1)=\sum_{i=0}^{j}q_i(\tau,k)\sum_{r=j-i}^{j}P_r^{(k+1)}\binom{i}{i+r-j}p_{k+1}^{i+r-j}(1-p_{k+1})^{j-r}+$$

$$+\sum_{i=j+1}^{\infty}q_i(\tau,k)\sum_{r=0}^{j}P_r^{(k+1)}\binom{i}{i+r-j}p_{k+1}^{i+r-j}(1-p_{k+1})^{j-r}; \qquad (3.1.16)$$

$$(\tau=0,1,2,...;\ j=0,1,2,...;\ k=\overline{0,l-2});$$

Переход типа (3.1.7) можно описать системой разностных уравнений такого вида:

$$q_j(\tau+1,0)=\sum_{i=0}^{j}q_i(\tau,l-1)\sum_{r=j-i}^{j}P_r^{(0)}\binom{i}{i+r-j}p_0^{i+r-j}(1-p_0)^{j-r}+$$

$$+\sum_{i=j+1}^{\infty}q_i(\tau,l-1)\sum_{r=0}^{j}P_r^{(0)}\binom{i}{i+r-j}p_0^{i+r-j}(1-p_0)^{j-r}; \qquad (3.1.17)$$

$$(\tau=0,1,2,...;\ j=0,1,2,...)$$

Системы (3.1.16) и (3.1.17) не имеют существенных различий и отличаются друг от друга лишь измененной индексацией, обусловленной цикличностью процесса.

Умножая обе части каждого $j-го$ $(j=0,1,2,...)$ уравнения системы (3.1.16) на z^j и суммируя полученные равенства, приходим к (3.1.14). Действуя совершенно аналогично предыдущему, из системы (3.1.17) находим функциональное уравнение (3.1.15).

Полученные функциональные уравнения полностью описывают функционирование выделенной неоднородной марковской цепи.

Результаты доказанной теоремы можно обобщить на случай произвольного числа шагов в пределах одного цикла, т.е. описать в производящих функциях следующие переходы цепи (3.1.5):

$$\xi(\tau,k)\to\xi(\tau,k+n)\quad (k=\overline{0,l-2};\ n=\overline{1,l-k-1}); \qquad (3.1.18)$$

$$\xi(\tau,k)\to\xi(\tau+1,n-l+k)\quad (k=\overline{0,l-2}:n=\overline{l-k,l-1}). \qquad (3.1.19)$$

В частности, при $n=l$

$$\begin{aligned}&\xi(\tau,k)\to\xi(\tau+1,k)\quad (k=\overline{0,l-1}),\\ &\xi(\tau,l-1)\to\xi(\tau+1,n-1);\end{aligned} \qquad (3.1.20)$$

Управление этими переходами осуществляют соответственно такие стохастические матрицы

$$B_k^{(k+n)} = \prod_{i=1}^{n} D^{(k+i)} \quad (k = \overline{0, l-2}; n = \overline{1, l-k-1}); \tag{3.1.21}$$

$$B_k^{(n-l+k)} \prod_{i=1}^{l-k-1} D^{(k+i)} \prod_{j=0}^{n-l+k} D^{(j)} \quad (k = \overline{0, l-2}; n = \overline{l-k, l}); \tag{3.1.22}$$

$$B_{l-1}^{(n)} = \prod_{i=0}^{n} D^{(i)} \quad (n = \overline{1, l}). \tag{3.1.23}$$

Элементы данных матриц могут быть найдены непосредственно в результате последовательного перемножения матриц $D^{(i)}$ $(i = \overline{0, l-1})$, однако, более рациональный путь заключается в дальнейшем применении аппарата производящих функций.

Рассмотрим следующие последовательности случайных величин для каждого фиксированного k $(k = \overline{0, l-1})$:

$$\xi^{(k)}(\tau) = \{\xi(0,k), \xi(1,k), \ldots\} \quad (\tau = 0,1,2,\ldots)$$

Можно легко убедиться, что эти последовательности являются уже однородными марковскими цепями, вложенными в процесс (3.1.4).

Введем обозначения

$$\alpha(z, k+1, k+n) = 1 - (1-z)\prod_{i=1}^{n}(1 - p_{k+i}) \quad (k = \overline{0, l-2}; n = \overline{1, l-k-1});$$

$$\alpha(z, k+1, n-l+k) = 1 - (1-z)\prod_{i=1}^{l-k-1}(1 - p_{k+i})\prod_{j=0}^{n-l+k}(1 - p_j) \quad (n = \overline{l-k, l});$$

$$\alpha(z, 0, n-1) = 1 - (1-z)\prod_{m=0}^{n-1}(1 - p_m) \quad (n = \overline{1, l});$$

$$\alpha(z, k, k) = 1 - (1-z)(1 - p_k) \quad (k = \overline{0, l-1}). \tag{3.1.24}$$

Пусть далее

$$A = 1 - \prod_{j=0}^{l-1}(1 - p_j) \tag{3.1.25}$$

Тогда обозначим

$$\alpha(z, A^i) = 1 - (1-z)\left[\prod_{j=0}^{l-1}(1 - p_j)\right]^i = 1 - (1-z)(1-A)^i \quad (i = 0,1,2,\ldots); \tag{3.1.26}$$

Положим

$$q_i^{(k)}(\tau) = P\{\xi^{(k)}(\tau) = i\} \quad (\tau, i = 0,1,2,...),$$
$$\psi^{(k)}(\tau, z) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i^{(k)}(\tau) z^i \quad (|z| \le 1) \qquad (3.1.27)$$

С учетом (3.1.13) введем следующие производящие функции:

$$S^{(k)}(z) = R^{(k)}(z) R^{(l-1)}(\alpha(z,0,k)) \prod_{r=1}^{k} R^{(k-r)}(\alpha(z,k+1-r,k)) \times$$
$$\times \prod_{s=2}^{l-k-1} R^{(l-s)}(\alpha(z,l-s+1,k)) \qquad (k = \overline{1,l-3});$$
$$S^{(l-2)}(z) = R^{(l-2)}(z) R^{(l-1)}(\alpha(z,0,l-2)) \prod_{r=3}^{l} R^{(l-r)}(\alpha(z,l-r+1,l-2));$$
$$S^{(l-1)}(z) = R^{(l-1)}(z) \prod_{r=2}^{l} R^{(l-r)}(\alpha(z,l-r+1,l-1));$$
$$S^{(0)}(z) = R^{(0)}(z) R^{(l-1)}(\alpha(z,0,0)) \prod_{r=2}^{l-1} R^{(l-r)}(\alpha(z,l-r+1,0));$$
(3.1.28)

Теорема 3.1.2. Производящая функция $\psi^{(k)}(\tau, z)$ распределения состояний однородной марковской цепи (3.1.28) в моменты времени $\tau l + k$ $(\tau = 0,1,2,...;$ k – фиксировано, $k = \overline{0,l-1})$, удовлетворяет следующей системе функциональных уравнений

$$\psi^{(k)}(\tau+1, z) = S^{(k)}(z) \psi^{(k)}(\tau, \alpha(z,A)) \quad (k = \overline{0,l-1}); \qquad (3.1.29)$$
$$\psi^{(k)}(\tau+n, z) = \psi^{(k)}(\tau, \alpha(z,A^n)) S^{(k)}(z) \prod_{i=1}^{n-1} S^{(k)}(\alpha(z,A^i)) \quad (n = 2,3,...). \qquad (3.1.30)$$

Заметим, что (3.1.29) получается сразу же при $n = l$, если использовать обозначения (3.127) и (3.1.28).

Согласно (3.1.29) для момента $\tau + 2$ можно записать

$$\psi^{(k)}(\tau+2, z) = S^{(k)}(z) \psi^{(k)}(\tau+1, \alpha(z,A)) \qquad (3.1.31)$$

Учитывая (3.1.26) и справедливость рекуррентного соотношения

$$\alpha[\alpha(z,A), A^i] = \alpha(z, A^{i+1}) \quad (i = 0,1,2,...),$$

из (3.1.29) и (3.1.31) получим

$$\psi^{(k)}(\tau+2,z)=\psi^{(k)}(\tau,\alpha[\alpha(z,A),A])S^{(k)}(z)S^{(k)}(\alpha(z,A)) \quad \text{или}$$
$$\psi^{(k)}(\tau+2,z)=\psi^{(k)}(\tau,\alpha(z,A^2))S^{(k)}(z)S^{(k)}(\alpha(z,A)); \tag{3.1.32}$$

Соотношение (3.1.32) показывает справедливость (3.1.30) при $n=2$.

Пусть соотношения (3.1.30) выполняются для фиксированного номера n $(n\geq 2)$. При этом очевидно, что

$$\psi^{(k)}(\tau+n+1,z)=S^{(k)}(z)\psi^{(k)}(\tau+n,\alpha(z,A)) \quad (\tau=0,1,2,\ldots); \tag{3.1.33}$$

Используя (3.1.30), имеем

$$\psi^{(k)}(\tau+n+1,z)=\psi^{(k)}(\tau,\alpha[\alpha(z,A),A^n])S^{(k)}(z)S^{(k)}(\alpha(z,A))\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{n-1}S^{(k)}(\alpha[\alpha(z,A),A^i]);$$

Или

$$\psi^{(k)}(\tau+n+1,z)=\psi^{(k)}(\tau,\alpha(z,A^{n+1}))S^{(k)}(z)\prod_{i=1}^{n}S^{(k)}(\alpha(z,A^i));$$

Теорема доказана.

Поведение системы в стационарном режиме описывает следующая теорема:

Теорема 3.1.3. Пусть $A, q_i^{(k)}(\tau), \psi^{(k)}(\tau,z), R^{(k)}(z), S^{(k)}(z)$ *и* $\alpha(z,A^i)$ определены в соответствии с (3.1.13), (3.1.24) и (3.1.27). Если

$$A>0 \quad \text{и} \quad \mu^{(j)}=\left.\frac{dR^{(j)}(z)}{dz}\right|_{z=1}<+\infty \quad (j=\overline{0,l-1}), \tag{3.1.34}$$

то для каждого k $(k=\overline{0,l-1})$ существует предельное распределение вероятностей состояний цепи $\xi^{(k)}(\tau)=\{\xi(0,k),\xi(1,k),\ldots\}$, т.е.

$$q_i^{(k)}(\tau)\to q_i^{(k)} \quad \text{при} \quad \tau\to\infty, \tag{3.1.35}$$

При этом в случае $A=1$

$$\psi^{(k)}(\tau,z)=R^{(k)}(z) \quad (|z|\leq 1,\ \tau=0,1,2,\ldots) \tag{3.1.36}$$

и в случае $\qquad 0 < A < 1$

$$\psi^{(k)}(\tau, z) \to S^{(k)}(z)\prod_{i=1}^{\infty} S^{(k)}(\alpha(z, A^i)) \quad (\tau \to \infty). \qquad (3.1.37)$$

Если $A = 0$ или хотя бы при одном j $(j = \overline{0, l-1})$ *и* $0 < A < 1$ нарушено условие (3.1.34), то

$$q_i^{(k)}(\tau) \to 0 \quad при \quad \tau \to \infty \quad (k = \overline{0, l-1}). \qquad (3.1.38)$$

Пусть A=1. С помощью (3.1.13), (3.1.24), (3.1.27) в этом случае убедимся в справедливости равенств:

$$\alpha(z, 1^i) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots),$$
$$\psi^{(k)}(\tau, 1) = 1 \quad (k = \overline{0, l-1}); \tau = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$\alpha(1, n, m) = 1 \quad (n, m = \overline{0, l-1}),$$
$$R^{(k)}(1) = 1 \quad (k = \overline{0, l-1}),$$
$$S^{(k)}(1) = 1 \quad (k = \overline{0, l-1}).$$

Так как условие $A = 1$ эквивалентно условию $p_k = 1 \quad (k = \overline{0, l-1})$, то по (3.1.24) имеем

$$\alpha(z, n, m) = 1 \quad (n, m = \overline{0, l-1}); |z| \le 1).$$

Тогда по (3.1.28) найдем

$$S^{(k)}(z) = R^{(k)}(z) \quad (k = \overline{0, l-1}).$$

С учетом отмеченных свойств (3.1.30) изменяется таким образом

$$\psi^{(k)}(\tau + n, z) = R^{(k)}(z) \quad (k = \overline{0, l-1}; |z| \le 1; n = 1, 2, \ldots),$$

где правая часть равенства не зависит от n. Отсюда следует (3.1.36).

Если $A = 0$, то $p_k = 0$, и на основании (3.1.24) и (3.1.26) получим

$$\alpha(z, n, m) = z \quad (n, m = \overline{0, l-1}),$$
$$\alpha(z, 0^i) = z \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Обозначения (3.1.28) дают независимо от k $\quad (k = \overline{0, l-1})$

$$S^{(k)}(z)=\prod_{r=0}^{l-1}R^{(r)}(z) \quad (|z|\le 1).$$

Тогда (3.1.30) принимает вид

$$\psi^{(k)}(\tau+n,z)=\psi^{(k)}(\tau,z)[S^{(k)}(z)]^n \quad (n=1,2,...).$$

Отсюда следует, что при $|z|<1$ $\quad \psi^{(k)}(\tau+n,z)\to 0$, *если* $\quad n\to\infty$, при $z=1$ (независимо от n) $\psi^{(k)}(\tau+n,1)=1$.

Это равносильно (3.1. 38).

Теперь рассмотрим нетривиальный случай $0<A<1$.

Будем считать, что $k=\overline{1,l-3}$, и используем соответствующее соотношение из (3.1.28). В остальных случаях значений k $(k=0,l-1,l-2)$ доказательство такое же.

Рассмотрим последовательность производящих функций при фиксированном значении k $(k=\overline{1,l-3})$:

$$F_n^{(k)}(z)=S^{(k)}(z)\prod_{i=1}^{n-1}S^{(k)}(\alpha(z,A^i)) \quad (n=2,3,...;|z|\le 1).$$

Очевидно, что сходимость производящих функций $F_n^{(k)}(z)$ при $n\to\infty$ к некоторой производящей функции $F^{(k)}(z)$ будет зависеть от поведения этих функций в окрестности точки $z=1$, если будет доказана сходимость последовательности значений производных $\dfrac{dF_n^{(k)}(z)}{dz}$ в точке $z=1$ к некоторому конечному значению $M^{(k)}$.

Обозначим $\left.\dfrac{dF_n^{(k)}(z)}{dz}\right|_{z=1}=M_n^{(k)}, \quad \left.\dfrac{dS^{(k)}(z)}{dz}\right|_{z=1}=m^{(k)}.$

Учитывая (3.1.28), видим, что неравенство $m^{(k)}<+\infty$ выполняется, если выполняется условие (3.1.34). С помощью (3.1.26) и (3.1.28) убеждаемся в справедливости равенства

$$\left.\frac{dS^{(k)}(\alpha(z,A^i))}{dz}\right|_{z=1}=m^{(k)}(1-A)^i \quad (i=1,2,...).$$

Тогда

$$M_n^{(k)} = m^{(k)}(1+(1-A)+(1-A)^2+\ldots+(1-A)^{n-1}) \quad (n=2,3,\ldots)$$

и при $n \to \infty$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{(k)} = \frac{m^{(k)}}{A} < +\infty .$$

Таким образом, в (3.1.30) допустим предельный переход при $n \to \infty$. В результате получаем (3.1.37). Используя теорему непрерывности Феллера [41], в результате получаем (3.1.35).

С точки зрения практических применений особый интерес представляют некоторые частные случаи полученных результатов. В частности, интересен случай, когда поступление грузов на станции распределено по закону Пуассона. Этот случай находит широкое применение в задачах пассажирского и грузового транспорта. Статистика показывает, что непланируемые перевозки пассажиров и грузов (городской пассажирский транспорт, мелкие грузовые отправки на железной дороге) подходят как раз под случай пуассоновского распределения.

Итак, положим

$$P_i^{(k)} = \frac{\lambda_k^{\,i}}{i!} e^{-\lambda_k} \quad (k=\overline{0,l-1}; i=0,1,2,\ldots).$$

При условии, когда хотя бы на одной из станций возможна разгрузка транспортных единиц, т.е. когда $A>0$, существует стационарный режим. При этом стационарные распределения наполнения транспортных единиц также являются пуассоновскими с параметрами $\Lambda_k / A \quad (k=\overline{0,l-1})$, где

$$\Lambda_k = \lambda_k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \prod_{j=i+1}^{k} (1-p_j) + \prod_{r=0}^{k} (1-p_r)\left(\sum_{i=k+1}^{l-2} \lambda_i \prod_{j=i+1}^{l-1} (1-p_j) + \lambda_{l-1}\right)$$

$(k=\overline{1,l-3})$,

$$\Lambda_{l-2} = \lambda_{l-2} + \sum_{i=0}^{l-3} \lambda_i \prod_{j=i+1}^{l-2} (1-p_j) + \lambda_{l-1} \prod_{r=0}^{l-2} (1-p_r),$$

$$\Lambda_{l-1} = \lambda_{l-1} + \sum_{i=0}^{l-2} \lambda_i \prod_{j=i+1}^{l-1} (1 - p_j),$$

$$\Lambda_0 = \lambda_0 + \lambda_{l-1}(1 - p_0) + (1 - p_0) \sum_{i=1}^{l-2} \lambda_i \prod_{j=i+1}^{l-1} (1 - p_j).$$

Полученные результаты могут быть обобщены на случаи, когда число транспортных единиц в ту или другую сторону отличается от числа станций, когда интенсивность поступления грузов на станции изменяется во времени, по некоторому заданному закону, когда маршрут не является кольцевым, а, например, маятниковым и т.д.

3.2. Свойство ограниченности внутренних связей в моделях материальных потоков

Транспорт в логистике играет существенную роль, поскольку, являясь одной из отраслей экономики и предлагая на рынке товаров и услуг свою продукцию – транспортные услуги, он присутствует как составная часть в основных функциональных областях логистики, а именно: закупочной, производственной, распределительной.

По своему назначению выделяются две основные группы транспорта:

1. Магистральный транспорт или транспорт общего назначения. Обеспечивает потребности всех отраслей народного хозяйства и населения в перевозках грузов и пассажиров. К видам магистрального транспорта можно отнести железнодорожный, водный (речной, морской), автомобильный, воздушный и трубопроводный транспорт.

2. Транспорт специального (необщего) назначения. К этому виду относится внутрипроизводственный транспорт, являющийся органической составной частью производственных систем.

В современных условиях дисциплина транспортного обслуживания определяется не интересами отдельного отправителя или получателя, а оптимальным соотношением издержек и прибыли в определенном цикле производства и потребления. При построении логистической модели этот факт обычно отражается в формуле критерия эффективности, учитывающей интересы всех участников логистического процесса.

Организация перемещения грузов магистральным транспортом предполагает решение целого комплекса задач, основными из которых являются:

- выбор вида транспортного средства;

- оптимизация траектории транспортного процесса;
- выбор совокупности видов транспортных средств;
- обеспечение технологической совместимости транспортно-складских услуг;
- обеспечение оптимальной координации в логистической цепи «производство-транспорт-потребление».

При выборе вида транспорта следует учитывать:
- время доставки,
- частота отправлений груза,
- выполнение графика доставки,
- возможность данного вида транспортного средства перевозить грузы различных типов,
- траекториальные возможности транспортного средства,
- стоимость перевозки.

Так, воздушный или автомобильный вид транспорта выбирается в случае приоритетности для отправителя скорости доставки груза. Если приоритетными являются минимальные издержки, выбирается водный, трубопроводный транспорт. В логистических системах встречаются как унимодальные перевозки (с помощью одного вида транспорта), так и интермодальные. Последним отдается предпочтение либо в случае невозможности перевозки груза одним видом транспортного средства, либо с целью уменьшения транспортных издержек, например, при комбинации низких издержек перевозки по воде и гибкости автомобильного или железнодорожного транспорта. Ниже в монографии будут представлены примеры транспортного перемещения грузов как унимодальным, так и интермодальным способом.

В процессе исследований логистических систем имитационными методами было выявлено, что метод моделирования с помощью СВА эффективно отображает динамику материальных потоков, реализуя регулирующие логистические операции с модельными и стохастическими информационными потоками в виде **моделей замкнутых или разомкнутых процессов перетекания.** Модели такого рода могут быть применены к системам, обладающим свойством ограничения информационных связей между отдельными структурными блоками в системе, что, очевидно, в полной мере применимо к динамике материальных потоков логистических систем. С другой стороны, принципиальная возможность имитации данного свойства с помощью автоматных моделей обусловлена свойством марковости СВА и возможностью пошаговой актуализации состояния каждого виртуального однородного материального потока (элементарного материального потока), а также свойством отсутствия пространственного последействия для подмножеств автоматов в моделях такого рода.

Пусть математическая модель системы представлена в виде вектора временных характеристик

$$\overline{X(t)} = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}.$$

Одним из важных направлений исследования системы является умение выявить определенные ее свойства, упрощающие и облегчающие построение модели, получение результатов. Одно из подобных свойств системы предполагает возможность разбиения компонент $x_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ вектора на некоторое число M $(M \le n)$ взаимно непересекающихся упорядоченных множеств u_m $(m = \overline{1,M})$ таких, что существенные информационные связи между компонентами вектора временных характеристик имеют место лишь тогда, когда номера множеств u_m, которым принадлежат эти компоненты, отличаются не более, чем на единицу. Указанное свойство назовем свойством отсутствия пространственного последействия, являющимся структурной разновидностью хорошо известного в теории вероятностей и теории массового обслуживания свойства временной ограниченности последействия.

Исследование динамики материальных потоков показало, что во всякой логистической системе для каждого ее звена существует определенная ограниченная «функциональная окрестность», состоящая из других (смежных) звеньев, влияющих на динамику данного узла. Появляется возможность упрощения модели по связям и ее описания в компактной и удобной форме. Действительно, пусть N автоматов A_n $(n = \overline{1,N})$, составляющих модель, можно разбить на M $(M \le N)$ взаимно непересекающихся множеств u_m $(m = \overline{1,M})$, для которых

$$\bigcup_{m=1}^{M} u_m = \gamma$$

При всех $l \ne m$ из $A_k \in u_l$ и $A_r \in u_m$ следует

$$\aleph_{kr} = \aleph_{rk} = 0,$$

где $\aleph_{kr}$ - **алфавит связи между автоматами** A_k и A_r в направлении от A_k к A_r. В этом случае элементы матрицы алфавитов, отличные от нуля, могут стоять лишь на M диагональных полях. Тогда матрица алфавитов становится разложимой и вся модель разбивается на M взаимно независимых самостоятельных моделей.

Рассмотрим другой случай, встречающийся в практике изучения динамики материальных потоков. При построении автоматной модели множество γ всех автоматов A_n $(n=\overline{1,N})$ модели возможно разбить на M $(M \le N)$ взаимно непересекающихся подмножеств u_m $(m=\overline{1,M})$ таких, что при всех

$$l \quad (1 \le l \le M) \quad и \quad m > l+1 \text{ или } m < l \quad из \quad A_k \in u_l \quad и \quad A_r \in u_m \text{ при } 1 \le k \le N \quad и \quad 1 \le r \le N \tag{3.2.1}$$

следует

$$\aleph_{kr} = 0. \tag{3.2.2}$$

Модель, обладающая указанным свойством, очевидно, будет **моделью разомкнутого процесса перетекания.**

Рассмотрим случай возможного разбиения множества γ на подмножества u_m $(m=\overline{1,M})$ такие, что соотношение 3.1.2. следует из 3.1.1. при всех l, удовлетворяющих неравенствам

$$1 \le l < M \quad и \quad m > l+1 \quad или \quad m < l \quad ,$$

а также при $l = M$ и m, удовлетворяющих неравенству

$$1 < m < M.$$

Такая модель, в отличие от предыдущей, будет **моделью замкнутого процесса перетекания.**

Выявленные свойства процессов перетекания означают, что в моделях такого рода их автоматы группируются в подмножества u_m множеств γ таким образом, что во входную функциональную окрестность каждого из этих подмножеств включается предшествующее ему подмножество, в выходную его функциональную окрестность – следующее за ним подмножество.

В модели разомкнутого процесса перетекания для подмножества u_1 входная функциональная окрестность совпадает с самим этим множеством, точно так же, как выходная функциональная окрестность для подмножества u_M.

В модели замкнутого процесса перетекания подмножество u_M включается во входную функциональную окрестность подмножества u_1, а подмножества u_1 - в выходную функциональную окрестность подмножества u_M.

Отметим, что термин «процессы перетекания» указывает лишь на перетекание информационных потоков, а не на моделирование перетекания материальных потоков. Можно также говорить о том, что процессы перетекания свойственны динамике **сложных систем с ограниченными внутренними связями.**

В некоторых случаях, когда СВА состоит из малого числа автоматов, свойства процессов перетекания позволяют получать аналитическое решение задачи (см. п.3.1.). В более сложных случаях при построении имитационной модели свойство ограниченности внутренних связей позволяет строить эту модель в наиболее удобной и компактной форме.

3.3. Автоматное моделирование кольцевого транспортного маршрута

При построении имитационных моделей логистических систем возможность использования свойства ограниченности структурных связей между отдельными звеньями исследуемых систем позволяет расчленять модели систем на определенные совокупности процессов, обладающих марковским свойством, помогает строить наиболее стандартизированные и компактные модели, удобные для компьютерной имитации.

Продемонстрируем имитационное решение задачи о кольцевом транспортном маршруте, содержательная постановка которой описана в предыдущем пункте данной главы и допускает формальное описание в виде системы вероятностных автоматов.

Приведем основные обозначения постоянных и случайных характеристик системы, выполненные в транспортных терминах:

l - количество станций на маршруте;

l - количество на маршруте ТС (вагонов) (по числу станций), циркулирующих таким образом, что моменты прибытия вагонов на станции в точности совпадают;

$\eta_j^{(k)}$ $(k=\overline{0,l-1};\ j=1,2,...)$ - целочисленная случайная величина количества груза, поступающего на станцию с номером k за промежуток времени между прибытиями на эту станцию $(j-1)-$го и $j-$го вагонов по порядку от начала функционирования системы. При фиксированном k $(k=\overline{0,l-1})$ случайные величины $\eta_j^{(k)}$ $(j=1,2,...)$ взаимно независимы и одинаково распределены. Их реализации могут рассматриваться как реализации одной и той же случайной величины $\eta^{(k)}$ $(k=\overline{0,l-1})$.

$P_i^{(k)}=P\{\eta^{(k)}=i\}$ $(i=0,1,2,...;\ k=\overline{0,l-1})$ - заданные распределения случайных взаимно независимых величин $\eta^{(k)}$, при разных k различающихся не только значениями параметров, но и своей функциональной формой.

Каждая единица груза, прибывшая в вагоне на станцию с номером k, либо выгружается из вагона и покидает систему с вероятностью p_k $(0 \le p_k \le 1)$, либо продолжает движение дальше в этом же вагоне с вероятностью $1-p_k$. Вероятности p_k $(k=\overline{0,l-1})$ зависят от номера станции, но не зависят ни от пополнения вагона, ни от пути, уже пройденного данной единицей груза, ни от времени, прошедшего с начала функционирования системы. Основная задача исследования заключается в нахождении распределения накопления вагонов на различных перегонах в стационарном и нестационарном режимах.

Определим содержательный смысл автоматов модели:

- $a_k(t)$ $(k=\overline{0,l-1})$ - количество груза, накопившееся на станции с номером k за промежуток времени $(t-1,t]$,

- $b_k(t)$ $(k=\overline{0,l-1})$ - наполнение вагона, находящегося в промежутке времени $(t-1,t]$ на перегоне между $k-$й и $(k+1)-$й станциями (для $k=l-1$ - между $(l-1)-$й и нулевой станциями). $2\,l$ - мерный вектор

$$(a_0(t), b_0(t), a_1(t), b_1(t), \ldots, a_{l-1}(t), b_{l-1}(t))$$

обладает свойством процесса Маркова.

Приведем обобщенную матрицу алфавитов и структурных связей в модели СВА, иллюстрирующую наличие свойства ограниченности внутренних связей в системе, или, другими словами, принадлежность строящейся модели к моделям перетекания:

		$A_1\ B_1$	$A_2\ B_2$	....	$A_{l-2}\ B_{l-2}$	$A_{l-1}\ B_{l-1}$
A_0 B_0	$H\ H$ $0\ H$	$0\ 0$ $0\ H$				
A_1 B_1		$H\ H$ $0\ H$	$0\ 0$ $0\ H$			
A_2 B_2			$H\ H$ $0\ H$			
....	....	....	....	... ...	....	....

A_{l-2} B_{l-2}					Н Н 0 Н	0 0 0 Н
A_{l-1} B_{l-1}	0 0 0 Н					Н Н 0 Н

В качестве вектора начальных состояний в данном случае может быть выбран любой набор $2l$ натуральных чисел

$$\{a_0^{(0)}, b_0^{(0)}, a_1^{(0)}, b_1^{(0)}, ..., a_{l-1}^{(0)}, b_{l-1}^{(0)}\}$$

Определяя систему функций выходов, положим, что значения всех выходных сигналов совпадают со значениями внутренних состояний автоматов, из которых они исходят.

Запишем алгоритм функционирования автоматов модели:

$$A_k = \quad \eta_k;$$

$$(k = \overline{0, l-1})$$

$$B_0 = \frac{b_{l-1}(t) = i \quad (i = 0,1,2,...)}{\xi_i^{(0)} + a_0(t);}$$

$$B_k = \frac{b_{k-1}(t) = i \quad (i = 0,1,2,...)}{\xi_i^{(k)} + a_k(t);} \quad (k = \overline{1, l-1}).$$

Первая строка записи представляет l строк ТУФП, являющихся обозначениями случайных величин η_k $(k = \overline{0, l-1})$, которые были введены выше как количества единиц груза, скапливающиеся на станции с номером k за промежуток времени между моментами прохождения через эту станцию двух последовательных вагонов. В остальных строках системы логических высказываний верхних подстрок реализуются при подстановках $i = 0, i = 1, i = 2, ...$. Нижние подстроки этих строк заключают функционалы, в которые входит бесконечное множество случайных величин $\xi_i^{(k)}$ $(k = \overline{0, l-1})$ $(i = 0,1,2,...)$.

Случайные величины η_k $(k = \overline{0, l-1})$ предполагаются заданными своими вероятностными распределениями

$$P_j^{(k)} = P\{\eta_k = j\} \qquad (i = 0,1,2,...).$$

Функциональная форма этих распределений не конкретизируется и может быть различной для разных k. Относительно случайных величин

$$\xi_i^{(k)} \quad (k = \overline{0, l-1};\, i = 0,1,2,\ldots),$$

то их распределения

$$Q_j^{(k,i)} = P\{\xi_i^{(k)} = j\} \quad (j = \overline{0,i})$$

предполагаются биномиальными с параметрами p_k *и* i, то есть

$$Q_j^{(k,i)} = \binom{i}{j}(1-p_k)^j {p_k}^{i-j} \qquad (j = \overline{0,i});$$

В последнем равенстве символами $\binom{i}{j}$ обозначены биномиальные коэффициенты

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!\,(i-j)!} \qquad (i = 0,1,2,\ldots;\ j = \overline{0,i});$$

Поясним смысл применения здесь биномиальных распределений. Как указывалось при формализации схемы, по прибытию на станцию (в вагоне) i единиц груза, каждая из прибывших единиц может быть выгружена с вероятностью p_k (k – номер станции) или не выгружена с вероятностью $1-p_k$. Это приводит к тому, что оставшаяся часть груза в вагоне оказывается распределенной по биномиальному закону.

3.4. Моделирование логистической цепи «Производство-транспорт-потребление»

Одной из отличительных особенностей логистических систем является их структурное разнообразие или разнообразие типов траекторий перемещения материальных потоков, отражающееся на способе их имитационного исследования. В предыдущих пунктах речь шла о весьма распространенном типе траектории материального потока, перемещаемого кольцевым транспортным маршрутом, и о решении задачи о кольцевом маршруте аналитически и с помощью автоматной модели перетекания.

Приведем пример использования средств автоматного моделирования для описания типовой абстрактной задачи непрерывного оперативного управления линейной логистической системой «Производство-транспорт-потребление». Понятие «средства автоматного моделирования» в данном контексте предполагает использование свойства ограничения внутренних связей процессов перетекания в моделях СВА, имитирующих реальные материальные и информационные потоки в виде модельных МИП и СИП.

Объединим этапы содержательного описания и формализованной схемы и представим логистическую систему «Производство-транспорт-потребление» как абстрактный непрерывный процесс формирования и доставки партий груза от грузоотправителя к грузополучателю посредством маршрутных перевозок.

Возможность использования свойства ограниченности структурных связей между отдельными звеньями исследуемой системы позволяет расчленить модель системы на определенные совокупности процессов, обладающих марковским свойством.

Моделирование системы начинаем с моделирования структурного начала логистической цепи – так называемого «Входа», являющегося местом поступления порций груза от отправителя, с одной стороны, и поступления порожних вагонов железнодорожного маршрута – с другой. Все поступающие на «Вход» и перевозимые маршрутом грузы предполагаются однородными, их вес измеряется в тоннах. Поступление грузов на «Вход» системы осуществляется порциями, пополняющими складские емкости «Входа» одинакового объема, равного размеру транспортной партии. Будем считать количество складских емкостей на «Входе» неограниченным. Поступление порций груза на «Вход» по времени и по количеству считается случайным, но количество поступлений в тоннах не превышает размера транспортной партии.

При моделировании «Входа» рассматриваются все возможные варианты наступлений и длительностей проблемных ситуаций:

1.На складах «Входа» темпы накопления груза превышают темпы его перевозки. Возникает проблемная ситуация – простой груза на складах «Входа».

2.Темпы накопления и перевозки груза уравновешены.

3.Груз не успевает накапливаться до размеров хотя бы одной партии до прихода поезда, и поезд простаивает.

Структура системы предполагает наличие такого важного объекта как «Выход» - места поступления маршрутной партии груза по железной дороге и емкостей получателя (ЕП) извне. На «Выходе» также имеются складские емкости объемом, равным объему партии маршрута. Число складских емкостей «Выхода» также будем считать неограниченным. Проблемные ситуации на «Выходе» возникают в следующих случаях:

1.Темпы поступления партии груза маршрутом превышают темпы поступления получателя. Происходит чрезмерное накопление груза на складах «Выхода».

2.Темпы поступления груза на «Выход» и его потребление уравновешены.

3.Темпы поступления ЕП превышают темпы поступления груза маршрутом. Возникает простой ЕП.

Поступление ЕП на «Выход» является случайным по времени поступления и по количеству требуемого груза. Требуемые ЕП порции груза не превышают размера партии.

Между «Входом» и «Выходом» расположена железнодорожная линия, по которой движется единственный отправительский маршрут. В направлении от «Входа» маршрут движется в наполненном состоянии (размер партии – управляемый параметр), а в обратном направлении – порожняком.

Процесс передвижения состава по железной дороге будет учитываться опосредствованно через время «Оборота маршрута» Θ_{M}, в которое включены сроки погрузки груза в вагоны на «Входе» и выгрузки из вагонов – на «Выходе».

Если на «Входе» поезд может простаивать из-за отсутствия достаточного количества груза (недотягивание до объема маршрутной партии), то на «Выходе» маршрут сразу же отправляется в обратный путь после завершения разгрузки.

Постановка задачи

Сформулируем постановку задачи: Определить такую стратегию управления материальным потоком «производство-транспорт-потребление», при которой минимизируется конечная себестоимость продукции (перевозимого груза):

$$C_0 = \frac{\sum E_{np}}{dS^{(3)+}} \to \min$$

при реализации неравенства

$$dS^{(1)+} \le dS^{(3)+};$$

где $\sum E_{np}$ - усредненные суммарные приведенные расходы, связанные с производством, транспортировкой, потреблением груза, критическим простоем состава на «Входе» и ЕП – на «Выходе», хранением на складах «Входа» и «Выхода» готовой продукции – полученные усреднением за период моделирования T, обеспечивающий вхождение процесса в стационарный режим. $dS^{(1)+}$, $dS^{(3)+}$ - усредненные значения порций груза, поступающих на «Вход» и потребляемых на «Выходе», полученные усреднением за период моделирования T.

Управляемыми параметрами будут считаться количество груза в партии (размер партии) и количество поездов (через величину $\Theta_{M)}$).

Известно, что процесс моделирования в отличие от реального процесса, обладающего свойством непрерывности протекания событий в системе, является ступенчатым относительно временного аргумента. В данном случае начальной ступенькой процесса является задание вектора начальных состояний автоматов (ВНС) на начальный момент моделирования t_0. Все последующие ступеньки моделирующего процесса соответствуют значениям вектора состояний автоматов в моменты времени t_n $(n=1,2,3,...)$ - в зависимости от их значений в предыдущий момент времени t_{n-1}.

В автоматном моделировании используются две схемы фиксации ступенчатости процесса:

1) Дискретная схема. Дискретные моменты времени t_n $(n=0,1,2,...)$ отстоят друг от друга на фиксированный отрезок времени. Часто его обозначают единицей:

$$t_n = t_{n-1} + 1;$$

2) Событийная схема. Моделирование системы реализуется в непрерывном режиме времени с дискретным вмешательством случая. Назовем это вмешательство узловым моментом. В этом случае

$$t_n = t_{n-1} + X(t_n),$$

где $X(t_n)$ - величина текущего узлового интервала, t_{n-1}, t_n - смежные узловые моменты.

Нами выбрана вторая, событийная схема имитации реального процесса.

Сценарий построения модели

Предварительно договоримся о том, что в целях экономии объема памяти ПК, а также для облегчения записи и чтения формул каждый предыдущий момент времени будем обозначать через t_0, каждый следующий узловой момент будем обозначать как t_1, тогда

$$t_1 = t_0 + X(t_1);$$

Заданный на момент t_0 ВНС(t_0) будет использован для определения вектора автоматов модели на момент t_1 - ТУФП(t_1). При перевычислении состояний автоматов ТУФП(t_2) все уже известные значения состояний автоматов на момент t_1 перезаписываются как значения на момент t_0 и ТУФП (t_2) определяется как ТУФП(t_1). Такой вид записи временного аргумента повторяется на протяжении всего периода моделирования.

Моделирование логистической цепи «Производство-транспорт-потребление» будем осуществлять в виде следующей последовательности действий:

1. Расчет текущего узлового интервала $X(t_1)$.

2. Определение значения следующего узлового момента t_1.

3. Задание значений двоичных ситуативных индикаторов, определяющих наступление (ненаступление) проблемных ситуаций в узловой момент t_1.

4. Определение количества поступившего на «Вход» системы груза и требуемого груза для поступившей на «Выход» ЕП (используются текущие значения соответствующих случайных величин $\xi S^{(1)}(t_1)$, $\xi S^{(3)}(t_1)$ на момент t_1).

5. Определение накоплений груза на «Входе» – для случая превышения темпов накопления груза над темпами перевозки. Расчет должен быть проведен по количеству груза в тоннах и по количеству накопленных партий.

6. Определение отгружаемого на «Входе» номера партии для случая поступления поезда.

7. Коррекция на момент t_1 последовательности номеров ожидающих погрузки партий на «Входе» и последующие перевычисления накопленных времен ожидания для каждой простаивающей партии.

8. Вычисление накопленного времени ожидания составом на «Входе» поступления и накопления груза до размеров партии – для случая недостатка на «Входе» груза.

9. Определение накоплений груза на «Выходе» – для случая превышения темпов накопления груза над темпами его потребления.

10. Определение номера партии на «Выходе», отгруженной в ЕП.

11. Коррекция на момент t_1 последовательности номеров партий на складах «Выхода», ожидающих погрузки в ЕП. Проведение вычислений накопленных времен ожидания для каждой простаивающей на «Выходе» партии.

12. Вычисление накопленного времени ожидания емкостью получателя (ЕП) поступления и накопления груза на «Выходе» до размеров ЕП – для случая отсутствия на складах «Выхода» необходимого количества груза.

13. Определение местонахождения поезда на момент t_1 - N_M, где $N_M = 1$, когда поезд находится на «Входе» или в движении груженый; $N_M = 2$, когда поезд находится на «Выходе» или в движении порожний.

14. Определение остаточных времен на момент t_1 до поступления:

1) груза от поставщика – на «Вход» системы,
2) порожнего состава – на «Вход»,
3) груженого состава – на «Выход»,
4) ЕП – на «Выход».

Экономическая часть модели определяется такими действиями:

15. Расчет накопленных за период моделирования $T(t_N) = T(t_{N-1}) + X(t_N)$ времен кризисных простоев партий на «Входе», времен кризисных простоев партий на «Выходе», накопленных кризисных времен простоя состава и ЕП, накопленного количества поступающего за период моделирования на «Вход» груза, накопленного количества отгруженного в ЕП груза также за период моделирования.

16. Определение усредненных значений характеристик, описанных в 15-м номере, полученных усреднением накоплений за период моделирования.

17. Постановка задачи. Определение функции цели.

Имитационная модель

Построение имитационной модели начинается с введения обозначений состояний автоматов ее математической части, заданных на момент t_0, и вычисляемых на момент t_1:

$C^{(1)}(t_0)$ - остаточное время до поступления очередной порции груза на «Вход» системы;

$C^{(3)}(t_0)$ - остаточное время до поступления ЕП на «Выход»;

$C^{(21)}(t_0)$ - остаточное время до поступления порожнего состава на «Вход»;

$C^{(21)}_{ож}(t_0)$ - если на «Входе» простаивает порожний маршрут из-за нехватки необходимого количества тонн груза в размере маршрутной партии на складах, то – это остаточное время простоя маршрута;

$C^{(23)}(t_0)$ - остаточное время до поступления груженого маршрута на «Выход»;

$X(t_1)$ - текущий узловой интервал времени;

$a^{(1)}(t_0)$ - на «Входе», помимо накопленного количества ожидающих партий, может находиться некоторое накопленное количество тонн груза

$a^{(1)}(t_0)$, меньшее размера партии $a^{(2)}=$ const. Образно выражаясь, назовем его «партией-недомерком» или просто «недомерком»;

$a^{(1)П}(t_0)$ - накопленное количество ожидающих партий на «Входе»;

$a^{(1)П+}(t_1)$ - для вычисления промежуточного накопления партий груза в следующий момент t_1, учитывающего лишь поступление груза на «Вход», но не учитывающего возможной отгрузки груза в вагоны, вводится данный автомат;

$S^{(1)}(t_0)$ - порция в тоннах поступившего на «Вход» груза в момент t_0;

$S^{(3)}(t_0)$ - порция груза в тоннах, требуемая поступившей на «Выход» емкостью получателя (ЕП) в момент t_0;

$y^{(1)}(t_1)$ - индикатор поступления порции груза на «Вход» в момент t_1;

$y^{(21)}(t_1)$ - индикатор поступления порожняка на «Вход»;

$y^{(1)П}(t_0)$ - индикатор существования на «Входе» в момент t_0 хотя бы одной партии груза;

$y^{(1)П+}(t_1)$ - индикатор пополнения складов «Входа» хотя бы одной партией – в момент t_1;

$y^{(21)}_{ож}(t_0)$ - индикатор, фиксирующий факт ожидания составом поступления и накопления груза на «Входе» до размера партии на момент t_0;

$y^{(3)}(t_1)$ - индикатор поступления ЕП на «Выход» в момент t_1;

$y^{(23)}(t_1)$ - индикатор поступления груженого маршрута на «Выход»;

$a^{(3)}(t_0)$ - «недомерок» груза на «Выходе» в момент t_0, то есть количество груза в тоннах, меньшее размера маршрутной партии;

$y^{(3)-}(t_1)$ - если требуемое для ЕП количество груза не превышает имеющийся на «Выходе» «недомерок» груза $a^{(3)}(t_0)$, то $y^{(3)-}(t_1) = 0$; в противном случае $y^{(3)-}(t_1) = 1$;

$y^{(3)П}(t_0)$ - индикатор существования в момент t_0 на «Выходе» хотя бы одной партии;

$y^{(3)ЕП}(t_0)$ - индикатор, фиксирующий факт ожидания получателем на «Выходе» прихода груженого состава – на момент t_0;

$N^{(1)пг}(t_1)$ - индивидуальный номер погруженной в момент t_1 партии на «Входе» в вагоны маршрута;

$N^{(1)}(t_0)$ - последовательность номеров партий на «Входе», ожидающих погрузки в момент t_0;

$D_n^{(12)}(t_0)$ - накопленное на момент t_0 время ожидания n - й партией на «Входе» прихода поезда;

$D^{(21)}(t_0)$ - накопленное время ожидания порожним составом на «Входе» поступления порций груза и их накопления до размеров партии;

$a^{(3)П}(t_0)$ - накопленное количество партий груза на «Выходе» в момент t_0;

$D_m^{(3)}(t_0)$ - накопленное время ожидания на момент t_0 m-й партией груза на «Выходе» поступления ЕП;

$N^{(3)пг}(t_1)$ - номер партии, полностью отгруженной в ЕП на «Выходе»;

$N^{(3)}(t_0)$ - последовательность индивидуальных номеров партий груза на «Выходе», ожидающих на момент t_0 поступления ЕП;

$D^{(3)}(t_0)$ - накопленное время ожидания емкостью получателя (ЕП) на «Выходе» поступления поезда;

$p_i(t_1)$ - если в момент t_1 все имеющееся количество груза на «Входе» меньше размера партии, то при поступлении порожнего маршрута на «Вход» возникает необходимость расчета количественных и временных характеристик поступающих на «Вход» порций груза, суммарно обеспечивающих размер партии. Так вот, $p_i(t_1)$ - рассчитанная i -я количественная итерация накопления поступающего груза на «Вход», обеспечивающая увеличение общего количества груза до размера партии;

$q_i(t_1)$ - рассчитанная i-я временная итерация поступления груза на «Вход», обеспечивающая накопление груза до размеров партии;

$N_M(t_1)$ - номер местонахождения (или номер направления движения поезда) маршрута: «Вход» – значение 1, «Выход» – 2, движение поезда в груженом состоянии – 1, движение в порожнем состоянии - 2;

$S^{(3)пг}(t_1)$ - размер погруженной в момент t_1 порции груза в ЕП.

Введем обозначения автоматов экономической части модели, подразделяемых на два блока: автоматы, накапливающие за весь период моделирования значения искомых величин, и автоматы, усредняющие соответствующие накопления:

$S^{(1)+}(T)$ - суммарное накопленное количество поступившего за период T моделирования груза в тоннах на «Вход» системы;

$S^{(3)+}(T)$ - суммарное накопленное количество потребленного груза на «Выходе» – за период T;.

$D^{(12)}(T)$ - суммарное накопленное время ожидания партиями груза на «Входе» начала отгрузки – за период T;

$D^{(21)+}(T)$ - суммарное накопленное за период T время ожидания поездом на «Входе» начала погрузки;

$D^{(3)+}(T)$ - суммарное накопленное время ожидания партиями груза на «Выходе» начала отгрузки в ЕП;

$D^{(3)}_{вых}(T)$ - суммарное накопленное за период T время ожидания грузополучателем начала погрузки груза.

Обозначим усредненные значения, соответствующие выше перечисленным автоматам накопления:

$dS^{(1)+}(T)$, $dS^{(3)+}(T)$, $dD^{(12)}(T)$, $dD^{(21)+}(T)$, $dD^{(3)+}(T)$, $dD^{(3)}_{вых}(T)$,

полученные путем усреднения за период моделирования накапливающих автоматов;

$C_0(T)$ - критерий качества.

В модели участвуют последовательности случайных величин поступлений груза на «Вход» и ЕП – на «Выход»:

$\xi S^{(1)}(t_1)$ - случайное количество груза в тоннах, поступившее в момент t_1 на «Вход»;

$\xi C^{(1)}(t_1)$ - случайный промежуток времени, отделяющий поступление груза на «Вход» в момент t_1 и последующее его поступление;

$\xi S^{(3)}(t_1)$ - случайное количество груза в тоннах, требуемое ЕП, поступившей на «Выход» в момент t_1;

$\xi C^{(3)}(t_1)$ - случайный промежуток времени, отделяющий поступление на «Выход» ЕП в момент t_1 и последующее ее поступление.

Введем обозначения постоянных величин, используемых в модели:

$a^{(2)}$ - размер партии в тоннах;

Θ_M - время оборота маршрута;

$E^{(1)}$ - расходы, связанные с производством 1т груза;

$E^{(12)}$ - суточные расходы, связанные с накоплением и хранением груза на складах «Входа»;

$E^{(21)}_{ваг}$ - суточные издержки за простой маршрута на «Входе»;

$E_{ваг}$ - суточные расходы, связанные с использованием рабочего парка вагонов в процессе доставки грузов;

$E_{лок}$ - суточные суммарные расходы, относящиеся к тяговому обслуживанию продвижения вагонопотока;

$E^{(3)}$ - суточные расходы, связанные с накоплением и хранением груза на складах «Выхода»;

$E_{ЕП}$ - суточные издержки за простой ЕП в ожидании поступления маршрута на «Выход».

Состояния автоматов модели формируются в зависимости от их состояний в предыдущий момент времени, от значений входных сигналов (функции выходов одних автоматов являются входными сигналами для других автоматов), фиксирующих наступление (ненаступление) проблемных ситуаций, а также от текущих значений случайных факторов, принимающих участие в функционировании автоматов. Перевычисление состояний автоматов осуществляется с помощью Таблицы условных функционалов переходов, являющейся конечной системой логических высказываний относительно внутренних состояний автоматов и их входных сигналов в текущий момент времени, с одной стороны, и соответствующей ей системой условных функционалов переходов (системой соответствующих реакций автоматов) в последующий момент времени, с другой стороны.

В зависимости от формы логических высказываний относительно предыдущего состояния автомата, формулы Таблицы записываются в виде линейных разностных стохастических уравнений, в импликативной форме, в терминах теории отношений.

В формировании алгоритма принимает участие модельный оператор $\Psi\{A; b,c; d,e\}$ - оператор поиска состояния автомата, необходимого для перевычисления состояния описываемого в данный момент автомата. Значение его совпадает с конкретным состоянием автомата A, чьи атрибуты (b,d) определенным образом соотносятся с атрибутами (c,e) перевычисляемого автомата.

Алгоритм модели

Моделирующий алгоритм состоит из двух вложенных блоков. Внутренний блок служит для определения значений вектора состояний автоматов в каждый последующий узловой момент времени. Внешний блок (в нашем случае он реализуется в экономической части модели) моделирует процесс на длительном интервале времени T, обеспечивающем сходимость искомых неслучайных характеристик (вхождение в стационарный режим).

Приступим к реализации внутреннего блока модельного алгоритма – блока перевычисления состояний автоматов в очередной узловой момент времени. Задание ВНС обусловливает взаимное сравнение известных на момент t_0 остаточных времен завершения существующих процессов и ситуаций. Минимальное значение среди всех остаточных времен будет искомым текущим узловым интервалом $X(t_1)$, отделяющим два смежных узловых момента t_0 *и* t_1:

$$X(t_1) = \min\{C^{(1)}(t_0), C^{(3)}(t_0), C^{(21)}_{ож}(t_0), C^{(21)}(t_0), C^{(23)}(t_0)\}; \qquad (3.4.1)$$

$$t_1 = t_0 + X(t_1); \qquad (3.4.2)$$

Определим значения двоичных ситуативных индикаторов, зависящих от остаточных времен и накоплений на момент t_0 и от величины узлового интервала $X(t_1)$:

$y^{(1)}(t_1) = \delta[C^{(1)}(t_0), X(t_1)]$ – индикатор поступления порции груза на «Вход» в момент t_1;

$y^{(3)}(t_1) = \delta[C^{(3)}(t_0), X(t_1)]$ – индикатор поступления пустых емкостей получателя (ЕП) на «Выход» в момент t_1;

$y^{(21)}(t_1) = \delta[C^{(21)}(t_0), X(t_1)]$ – индикатор поступления состава в порожнем состоянии на «Вход» в момент t_1;

$y^{(1)П}(t_0) = 1 - \delta[a^{(1)П}(t_0), 0]$ – индикатор существования на «Входе» хотя бы одной маршрутной партии на момент t_0;

$y^{(21)}_{ож}(t_0) = 1 - \delta[D^{(21)}(t_0), -1]$ – индикатор, фиксирующий факт ожидания поездом на «Входе» начала погрузки груза – в случае недостаточного количества груза (или его отсутствия) на складах «Входа» в момент t_0;

$y^{(23)}(t_1) = \delta[C^{(23)}(t_0), X(t_1)]$ – индикатор поступления груженого состава на «Выход» в момент t_1 ;

$y^{(3)П}(t_0) = 1 - \delta[a^{(3)П}(t_0), 0]$ – индикатор существования на «Выходе» хотя бы одной партии груза на момент t_0;

Запишем формулу возможного поступления в момент t_1 случайного количества груза в тоннах на «Вход»:

$$S^{(1)}(t_1) = y^{(1)}(t_1)\,\xi S^{(1)}(t_1) + (1 - y^{(1)}(t_1)) \times 0. \qquad (3.4.3)$$

Опишем возможное поступление ЕП на «Выход» в момент t_1 с требованием случайного количества груза в тоннах:

$$S^{(3)}(t_1) = y^{(3)}(t_1)\,\xi S^{(3)}(t_1) + (1 - y^{(3)}(t_1)) \times 0. \qquad (3.4.4)$$

Введем следующую порцию индикаторов, зависящих от (3.4.3) и (3.4.4):

$$y^{(1)\Pi+}(t_1) = \frac{[a^{(1)}(t_0) + S^{(1)}(t_1)] \div a^{(2)} < 1}{0;} \Bigg\| \frac{[a^{(1)}(t_0) + S^{(1)}(t_1)] \div a^{(2)} \geq 1}{1.}$$

- индикатор пополнения складов «Входа» хотя бы одной партией на момент t_1;

$$y^{(3)-}(t_1) = \frac{S^{(3)}(t_1) - a^{(3)}(t_0) > 0}{1;} \Bigg\| \frac{S^{(3)}(t_1) - a^{(3)}(t_0) \leq 0}{0.}$$

- индикатор превышения потребности ЕП над имеющимся «недомерком» на складе «Выхода», он также фиксирует факт начала разгрузки партии с максимальным временем ожидания – в случае, если такая партия существует на «Выходе» в момент t_1.

Введем формулу, реализующую удовлетворение поступившего требования грузополучателя:

$$S^{(3)nг}(t_1) = y^{(3)}(t_1)\{[(1 - y^{(3)-}(t_1)) + y^{(3)-}(t_1)(y^{(3)\Pi}(t_1) + (1 - y^{(3)\Pi}(t_1))\times$$
$$\times y^{(23)}(t_1))]S^{(3)}(t_1) + y^{(3)-}(t_1)(1 - y^{(3)\Pi}(t_1))(1 - y^{(23)}(t_1))\times 0\} + (1 - y^{(3)}(t_1))\times 0. \qquad (3.4.4^*)$$

Данная формула читается следующим образом: требование ЕП, поступившей в момент t_1 на «Выход», будет удовлетворено, если оно не будет превышать имеющегося на «Выходе» «недомерка», в случае превышения - если на «Выходе» будет находиться хотя бы одна партия груза или поступит партия маршрутом. Если же на «Выходе» не окажется груза или не поступит ЕП, то количество погруженного груза в ЕП будет нулевым (погрузка не состоится).

Определим накопленное количество груза на «Входе» в тоннах на момент t_1, меньшее размера партии – новый «недомерок» «Входа»:

$$a^{(1)}(t_1) = y^{(1)}(t_1)[(1 - y^{(1)\Pi+}(t_1))(a^{(1)}(t_0) + S^{(1)}(t_1)) + y^{(1)\Pi+}(t_1)\times$$
$$\times(a^{(1)}(t_0) + S^{(1)}(t_1) - a^{(2)})] + (1 - y^{(1)}(t_1))\,a^{(1)}(t_0). \qquad (3.4.5)$$

Данное уравнение описывает три возможных взаимоисключающих случая:

1) «Недомерок» на «Входе» в момент t_0 плюс возможное поступление порции груза в момент t_1 в сумме дают накопление,

меньшее размера партии. Новый «недомерок» увеличится по сравнению со старым на величину поступления.

2) Сумма предыдущего «недомерка» и поступления превышает размер партии. Число ожидающих на складах «Входа» партий увеличится на единицу за счет доукомплектования прежнего «недомерка», а новый «недомерок» в момент t_1 будет равен разности, полученной вычитанием размера партии в тоннах из суммы старого «недомерка» и поступления.

3) В момент t_1 нет поступления груза на «Вход». Величина партии-«недомерка» остается прежней.

Новое накопленное количество партий на складах «Входа» на момент t_1 в целях наглядности запишем двумя формулами:

$$a^{(1)\Pi+}(t_1) = y^{(1)\Pi+}(t_1)(a^{(1)\Pi}(t_0)+1)+(1-y^{(1)\Pi+}(t_1))a^{(1)\Pi}(t_0). \qquad (3.4.6)$$

Формула (3.4.6) - это запись состояния автомата накопленного количества партий без учета начала отгрузки груза в вагоны.

$$a^{(1)\Pi}(t_1) = \{y^{(21)}(t_1)(a^{(1)\Pi+}(t_1)-1)+(1-y^{(21)}(t_1))a^{(1)\Pi+}(t_1)\}\, y^{(1)\Pi}(t_0); \qquad (3.4.7)$$

Выражение (3.4.7) - это формула перевычисления накопленного количества ожидающих партий на «Входе» в момент t_1 с учетом возможной отгрузки первоочередной партии в вагоны прибывшего состава. Присутствие индикатора $y^{(1)\Pi}(t_0)$ гарантирует неотрицательность результата.

Учитывая (3.4.7), введем индикатор существования на «Входе» хотя бы одной ожидающей партии на момент t_1:

$$y^{(1)\Pi}(t_1) = 1-\delta[a^{(1)\Pi}(t_1),0];$$

Для расчета кризисных простойных времен ожидания партиями отгрузки в вагоны - на «Входе», или отгрузки в емкости пользователей - на «Выходе» необходимо идентифицировать номера партий и регулярно, в каждый узловой момент, отслеживать и корректировать последовательности номеров ожидающих партий груза на «Входе» и «Выходе».

Отыщем на «Входе» номер партии груза, начавшей в момент t_1 отгрузку в вагоны подошедшего в этот же момент маршрута:

$$N^{(1)пг}(t_1) = y^{(1)П}(t_1)[y^{(21)}(t_1)\ \Psi\{n; D_n^{(12)}(t_0) = \max_n\} + \\ + (1 - y^{(21)}(t_1))\, y_{ож}^{(21)}(t_0) \times 1]. \qquad (3.4.8)$$

Очевидно, что при условии поступления отправительского маршрута на «Вход» и существования на «Входе» к моменту t_1 хотя бы одной ожидающей партии таким номером будет номер партии с наибольшим накопленным на момент t_0 временем ожидания прихода маршрута. Необходимо также учесть вариант, когда еще с момента t_0 в течение текущего узлового интервала на «Входе» присутствует поезд, ожидающий в связи с отсутствием хотя бы одной маршрутной партии начала погрузки. Если к моменту t_1 наберется маршрутная партия на «Входе» за счет поступившей порции груза и имеющегося «недомерка», о чем будет свидетельствовать ненулевое значение $y^{(1)П}(t_1)$, то номеру партии груза, начавшей в момент t_1 отгружаться в вагоны поезда, будет присвоен 1 - й номер.

Актуализируем на момент t_1 последовательность номеров партий груза на «Входе» за счет возможного формирования новой партии-«недомерка» (если соединение размера в тоннах старого «недомерка» с размером поступившей порции груза на «Вход» обеспечивает размер партии), а также возможного изъятия из очереди первоочередной партии груза в вагоны поезда. Так, если в момент t_0 под номером N была обозначена старая партия-«недомерок», то в момент t_1 N-я партия в этом случае будет полностью укомплектованной. А новый «недомерок» будет иметь номер $(N+1)$. Будет учтено также возможное изъятие из очереди партий груза на «Входе» партии под номером $N^{(1)пг}(t_1)$, отгруженной в вагоны:

$$\{N^{(1)}(t_1)\} = y^{(1)П}(t_0)\{N^{(1)}(t_0)\} \supset y^{(1)П+}(t_1)(N+1) \,/\, y^{(1)П}(t_1)[y^{(21)}(t_1) + \\ + (1 - y^{(21)}(t_1))\, y_{ож}^{(21)}(t_0)]\, N^{(1)пг}(t_1). \qquad (3.4.9)$$

Вычислим накопленное время ожидания n-й партией на «Входе» отгрузки груза в вагоны для различных случаев:

$$\downarrow \quad D_n^{(12)}(t_1) = (D_n^{(12)}(t_0) + X(t_1))\, y^{(1)П}(t_0) \quad (n \in N^{(1)}(t_0) \,/\, N^{(1)пг}(t_1)); \qquad (3.4.10)$$

- для партий, продолжающих оставаться в ожидании;

$$\downarrow \quad D_n^{(12)}(t_1) = 0 \quad (n = N+1);$$

- для вновь сформированной партии;

$$\downarrow \qquad D_n^{(12)}(t_1) = -1 \qquad (n = N^{(1)пг}(t_1));$$

- для партии, начавшей отгрузку.

Здесь следует отметить, что нулевое значение (функциональный нуль) назначается автомату $D_n^{(12)}(t_1)$ в случае, когда именно в этот момент начался отсчет накопления простойного времени нового «недомерка». Значение (-1) означает, что партия выбыла из очереди ожидающих и начала отгружаться в вагоны.

Для продолжающих ожидать партий время их простоя увеличится на величину узлового интервала $X(t_1)$.

Рассчитаем накопленное время ожидания составом начала погрузки на входе для текущего момента времени t_1 :

$$D^{(21)}(t_1) = (1 - y^{(1)П}(t_1))(y^{(21)}(t_1) \times 0 + y_{ож}^{(21)}(t_0)(D^{(21)}(t_0) + X(t_1)) + \\ + y^{(1)П}(t_1)(-1); \qquad (3.4.11)$$

В данной формуле в качестве реакции автомата $D^{(21)}(t_1)$ на ситуацию начала кризисного простоя в момент t_1 является функциональный нуль, свидетельствующий о начале отсчета накопления времени простоя, на ситуацию завершения простоя – значение (-1) (чтобы разделить смежные простойные времена), в случае продолжения простоя – простойное накопленное время увеличивается на величину текущего узлового интервала $X(t_1)$.

Актуализируем значение двоичного индикатора $y_{ож}^{(21)}(t_1)$, фиксирующего на момент t_1 факт ожидания поездом на «Входе» начала погрузки маршрутной партии:

$$y_{ож}^{(21)}(t_1) = 1 - \delta[D^{(21)}(t_1); -1].$$

Следующим расчетным этапом является определение состояния автомата, характеризующего количество груза в «недомерке» на «Выходе»:

$$a^{(3)}(t_1)=y^{(3)}(t_1)\{(1-y^{(3)-}(t_1))(a^{(3)}(t_0)-S^{(3)}(t_1))+$$
$$+y^{(3)-}(t_1)[y^{(3)П}(t_1)[a^{(2)}-(S^{(3)}(t_1)-a^{(3)}(t_0))]+(1-y^{(3)П}(t_1))\times$$
$$\times a^{(3)}(t_0)]\}+(1-y^{(3)}(t_1))a^{(3)}(t_0); \tag{3.4.12}$$

Поясним все возможные варианты перевычисления автомата $a^{(3)}(t_1)$:

1). В момент t_1 на «Выход» поступает ЕП (емкость пользователя), о чем свидетельствует ненулевое значение двоичного индикатора $y^{(3)}(t_1)$, с требованием отгрузки $S^{(3)}(t_1)$ тонн груза. Потребность груза для ЕП не превышает старого значения «недомерка» на «Выходе» ($y^{(3)-}(t_1)=0$). В этом случае старый «недомерок» к моменту t_1 уменьшится на величину потребности ЕП.

2). В этом случае осуществляется поступление ЕП на «Выход» системы с потребностью груза, превышающей старый «недомерок», но по изначальной договоренности не превышающий объема маршрутной партии. Если на «Выходе», кроме старого «недомерка», имеется на складах хотя бы одна маршрутная партия груза, ее можно разукомплектовать для обеспечения потребности ЕП. Таким образом, новый «недомерок» будет составлять разность между размером партии и величиной превышения потребности ЕП над старым «недомерком».

3). Для случаев отсутствия резервной маршрутной партии на складах «Выхода» при потребности ЕП, превышающей старый «недомерок», а также непоступления ЕП на «Выход», отгрузки груза не происходит и величина «недомерка» остается прежней.

Приведем формулу вычисления накопленного количества партий груза на «Выходе», ожидающих в момент t_1 поступления ЕП:

$$a^{(3)П}(t_1)=a^{(3)П}(t_0)+y^{(23)}(t_1)-y^{(3)}(t_1)y^{(3)П}(t_1)\{(1-y^{(3)-}(t_1))\times$$
$$\times[\delta[S^{(3)}(t_1),a^{(3)}(t_0)]\times 1+(1-\delta[S^{(3)}(t_1),a^{(3)}(t_0)])\times 0]+y^{(3)-}(t_1)\times 1\}; \tag{3.4.13}$$

Заметим, что партия-«недомерок» на «Выходе» также входит в число всех партий, ожидающих погрузки, причем она определяется первой на отгрузку. При превышении партией-«недомерком» потребности ЕП остаток ее становится новым «недомерком». В противном случае, при наличии хотя бы одной маршрутной партии старый «недомерок» полностью отгружается, а новым «недомерком» становится остаток первоочередной маршрутной партии после отгрузки.

Данный автомат реагирует на следующие ситуации, которые могут возникнуть в момент t_1 :

- Увеличение количества партий на «Выходе». Накопленное количество партий на «Выходе» системы в момент t_1 будет увеличено на единицу по сравнению с его предыдущим значением при условии поступления на «Выход» очередного маршрута.

- Уменьшение количества партий на «Выходе». Уменьшение накопленного количества ожидающих отгрузки партий на единицу может быть произведено при условии поступления в момент t_1 на «Выход» ЕП с требованием погрузки количества тонн груза, равным объему партии-«недомерка». Если же объем требования ЕП будет меньше объема партии-«недомерка», то этот старый «недомерок» с первоочередным порядковым номером в результате уменьшится в объеме и останется в очереди партий на «Выходе». Значит, количество ожидающих партий будет тем же.

- И, наконец, если при поступлении ЕП ее потребность будет превышать объем партии-«недомерка», при условии наличия на складах «Выхода» хотя бы одной маршрутной партии, количество партий будет уменьшено на единицу за счет погрузки полностью старого «недомерка» и разукомплектации первоочередной (с наибольшим временем ожидания) маршрутной партии. Отметим, что все условия, определяющие события поступления маршрута и ЕП на «Выход», возможную отгрузку груза в ЕП, выражаются соответствующими двоичными индикаторами.

Определим на момент t_1 номер порции груза, она же будет партией-«недомерком», полностью отгружаемой в ЕП на «Выходе»:

$$N^{(3)пг}(t_1) = \{y^{(3)}(t_1)(1-\delta[a^{(3)}(t_0),0])[y^{(3)-}(t_1)\,y^{(3)П}(t_1)+(1-y^{(3)-}(t_1))\times$$
$$\times\delta[S^{(3)}(t_1),a^{(3)}(t_0)]+(1-y^{(3)}(t_1))\,y^{(3)ЕП}(t_0)(1-\delta[a^{(3)}(t_0),0])\,y^{(23)}(t_1)\}\times$$
$$\times\psi\{m;D_m^{(3)}(t_0=\max\}. \qquad (3.4.14)$$

Формула описывает следующие ненулевые варианты:

1). В момент t_1 на «Выходе» в наличии имеется старый «недомерок» и поступает ЕП с потребностью, превышающей количество тонн груза в «недомерке», а склады «Выхода» обеспечены хотя бы одной маршрутной партией.

2). Потребность ЕП при поступлении на «Выход» системы не превышает объема партии-«недомерка», а более точно, эквивалентна объему «недомерка».

3). В момент t_1 на «Выходе» простаивает ЕП по крайней мере с момента t_0 по причине того, что объем «недомерка» был недостаточен для удовлетворения потребности ЕП, а на складах не было в наличии ни одной маршрутной партии груза. Но в этот момент поступает маршрутная партия груза по железной дороге, обеспечивающая потребность ЕП.

Во всех этих трех вариантах ненулевым, реальным номером полностью отгруженной партии-«недомерка» станет номер с наибольшим временем ожидания отгрузки. Все остальные возможные варианты возникающих ситуаций – нулевые.

Скорректируем последовательность номеров ожидающих погрузки в ЕП партий на «Выходе» с учетом возможного поступления новой партии по железной дороге и возможной отгрузки в ЕП полностью партии-«недомерка»:

$$\{N^{(3)}(t_1)\} = \{N^{(3)}(t_0)\} \supset y^{(23)}(t_1)(M(t_0)\,y^{(3)\Pi}(t_0)+1)\,/\,N^{(3)пг}(t_1). \quad (3.4.15)$$

Рассмотрим пример. Пусть последовательность номеров маршрутных партий груза, в том числе номер $(M-7)$ первоочередной партии-«недомерка» на момент t_0 будет выглядеть таким образом:

$$\{N^{(3)}(t_0)\} = \{M, M-1, M-2, \ldots, M-7\}.$$

Если в момент t_1 на «Выход» поступает железнодорожный маршрут, то новый номер поступившей партии груза будет на единицу больше наибольшего номера партии предыдущего поступления.

Если в тот же момент возможна отгрузка первоочередной партии-«недомерка» с номером $(M-7)$, то этот номер партии покидает последовательность номеров партий на складах «Выхода».

Если одновременно на «Выходе» происходят оба события: поступление новой партии и отгрузка первоочередной, то последовательность номеров партий груза на «Выходе» будет выглядеть так:

$$\{N^{(3)}(t_1)\} = \{M+1, M, M-1, \ldots, M-6\}.$$

Наибольший порядковый номер маршрутной партии на «Выходе» в момент t_1 (партии, прибывшей последней на «Выход» либо до момента t_1, либо в момент t_1) будет равен

$$M(t_1) = M(t_0) + y^{(23)}(t_1).$$

Накопленное время ожидания отгрузки m-й партией груза на складе «Выхода» (в том числе и партией-«недомерком») в момент t_1 определится функционалом:

$$\downarrow\ D_m^{(3)}(t_1) = y^{(3)П}(t_0)(D_m^{(3)}(t_0) + X(t_1)); \quad (m \in \{N^{(3)}(t_0)\} / N^{(3)пг}(t_1)) \quad (3.4.16)$$

- для продолжающих ожидать партий;

$$\downarrow\ D_m^{(3)}(t_1) = -1; \quad (m = N^{(3)пг}(t_1))$$

- для отгруженной партии прерывается время ожидания, ее номер выбывает из очереди;

$$\downarrow\ D_m^{(3)}(t_1) = 0; \quad (m = M(t_0) + 1)$$

- для партии, поступившей маршрутом на «Выход», которой присвоен новый номер, больший на единицу максимального порядкового номера партии (у нее же и минимальное накопленное время ожидания погрузки в ЕП). Функциональный нуль, присвоенный состоянию автомата, накапливающего простойное время новой партии на «Выходе», фиксирует начало отсчета накопления.

Рассчитаем новые остаточные времена до поступления очередной порции груза на «Вход» и ЕП – на «Выход» в момент t_1 :

$$C^{(1)}(t_1) = \frac{1).C^{(1)}(t_0) - X(t_1) > 0}{C^{(1)}(t_0) - X(t_1);} \quad \frac{2).C^{(1)}(t_0) - X(t_1) \le 0}{\xi C^{(1)}(t_1).} \qquad (3.4.17)$$

$$C^{(3)}(t_1) = \frac{1).C^{(3)}(t_0) - X(t_1) > 0}{C^{(3)}(t_0) - X(t_1);} \quad \frac{2).C^{(3)}(t_0) - X(t_1) \le 0}{\xi C^{(3)}(t_1).} \qquad (3.4.18)$$

Для определения остаточного времени до прихода порожнего маршрута на «Вход» используется так называемая процессная схема - схема реализации ускоренного локального процесса, протекающего в границах вероятностно-автоматной модели.

В целом, алгоритм автоматной модели реализуется по схеме, в соответствии с которой построенный вектор состояний автоматов перевычисляется в узловые моменты времени моделирования – от события к событию, или иначе, по схеме, в соответствии с которой среди всех возможных в будущем событий на очередном шаге моделирования выбирается ближайшее событие. Такую схему естественно стали называть **событийной.**

Однако, иногда модель нуждается в информации, имеющей прогнозно-расчетный характер и относящейся к моменту, отстоящему от текущего на промежуток времени, превышающий ближайший узловой интервал. То есть локально, в конкретном месте модели требуется прогнозное проигрывание процесса либо в направлении прошлого, либо – будущего. Такую локальную схему будем называть **процессной.**

Очевидно, что процессная схема не искажает общую, событийную схему, и внедряется в необходимых местах модели для определения состояний автоматов модели, которые зависят от далеко отстоящих по времени реализации случайных величин, в виде итеративных процессов (подалгоритмов). Каждый локальный итеративный процесс развивается в соответствии с ускоренной динамикой наступления случайных событий и не зависит от единого модельного времени.

Чаще всего процессные схемы применяются при моделировании экономических систем массового обслуживания, производственных систем, а также при построении транспортных моделей.

При моделировании непрерывного процесса формирования и доставки партий груза от производителя к пользователю с помощью маршрутных перевозок возникает необходимость применения процессной схемы - в случае отсутствия, либо недостаточного количества груза на «Входе» системы - при попытке выяснить, какими порциями и за какой промежуток времени на «Вход» поступит груз, суммарное накопленное количество которого достигнет размера партии и обеспечит начало отгрузки в прибывший (ожидающий) поезд.

Напомним обозначения состояний автоматов модели, используемых в данной локальной процессной схеме.

$y^{(1)П}(t_1)$ - индикатор существования на складах «Входа» в момент t_1 хотя бы одной маршрутной партии груза;

$a^{(2)}$ - размер маршрутной партии груза в тоннах;

$a^{(1)}(t_1)$ - накопленное количество тонн груза на «Входе» в момент t_1, меньшее размера маршрутной партии $a^{(2)}$;

$C^{(21)}(t_1)$ - остаточное время до поступления порожнего маршрута на «Вход»;

$C^{(21)}_{ож}(t_1)$ - остаточное время простоя порожняка на «Входе»;

$y^{(21)}(t_1)$ - индикатор поступления порожнего маршрута на «Вход» в момент t_1;

$y_{ож}^{(21)}(t_0)$ - индикатор, фиксирующий факт ожидания составом поступления и накопления груза на «Входе» вплоть до размера партии по крайней мере с момента t_0;

Θ_M - время оборота маршрута: «Вход»-«Выход»-«Вход» системы;

$X(t_1)$ - текущий узловой интервал, разделяющий смежные узловые моменты t_0 *и* t_1.

Введем последовательности случайных величин поступлений порций груза на «Вход» системы:

$\xi S^{(1)}(t_1)$ - случайное количество груза в тоннах, поступившее в момент t_1 на «Вход»;

$\xi C^{(1)}(t_1)$ - случайный промежуток времени, разделяющий поступление порции груза на «Вход» в момент t_1 и следующее поступление груза.

Определим $p_i(t_1)$ как процесс накопления случайных объемов порций груза, поступающих на «Вход», начиная от момента t_1:

$$p_i(t_1) = (1 - y^{(1)П}(t_1))(a^{(1)}(t_1) + \sum_{k=n(t_1)}^{n(t_1)+i} \xi S_k^{(1)}) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \quad (3.4.19)$$

Здесь $n(t_1) = n(t_0) + y^{(1)}(t_1)$ - номер случайной величины очередного поступления порции груза на «Вход». Это поступление возможно либо в момент t_1 (когда остаточное время до поступления груза в момент t_1 становится нулевым $(C^{(1)}(t_0) - X(t_1) = 0)$), либо позже, через интервал $C^{(1)}(t_1) > 0$. При этом величина $\xi S_{n(t_1)}^{(1)}$ определяется как значение случайной величины под номером $n(t_1)$, начиная с которого будет происходить итеративный процесс накопления количества тонн груза на «Входе».

Анализируя результат вычисления каждой i - той итерации (3.4.19), проверяем накопление груза на достаточность (обеспечение размера маршрутной партии) и находим необходимое значение количества итераций $i = I_{дст}(t_1)$:

$$i = \frac{p_i(t_1) \geq a^{(2)}}{I_{дст}(t_1);}\left|\frac{p_i(t_1) < a^{(2)}}{i+1;}\right.$$

Введем величину $q_i(t_1)$, выражающую процесс накопления времени, на протяжении которого запас груза на «Входе» вырастет до размера партии:

$$q_i(t_1) = (1 - y^{(1)\Pi}(t_1))(C^{(1)}(t_1)(1 - y^{(1)}(t_1)) + \sum_{k=n(t_1)}^{n(t_1)+i} \xi C_k^{(1)}) \qquad (i = \overline{1, I_{\partial cm}(t_1)}).$$

(3.4.20)

Формула (3.4.20) накопления времени запасания груза на складах «Входа» учитывает как вариант поступления груза на «Вход» в момент t_1, так и вариант учета остаточного времени до поступления груза на «Вход» очередной случайной порции груза, если эта порция поступит позже.

Следует отметить, что в событийной схеме моделирования при перевычислении текущих значений состояний автоматов модели, в определение состояний которых включена, например, некоторая случайная величина $\xi\Re$, выбирается ее очередная реализация $\xi\Re(t_1)$ на данный момент t_1 и обязательно идентифицируется как состояние конкретного вероятностного автомата, что записывается, например, таким образом:

$$R(t_1) = \xi\Re(t_1).$$

Принципиально важным аспектом автоматного моделирования является то, что не для всякой многомерной цепи Маркова, описывающей реальный случайный процесс, удается построить автоматную модель, и проблемой тут является наличие или отсутствие свойства условной независимости компонент марковского процесса.

Напомним, что компоненты $\xi_k(t)$ $(k = \overline{1, n})$ марковского вектора $\xi(t)$ являются условно независимыми (в совокупности), если при каждом i $(i = \overline{1, n})$ для произвольных

$$B_i \in \Im_i, x \in \mathrm{X}, x_k \in \mathrm{X}_k \quad (k = \overline{1, n}; k \neq i)$$

справедливо

$$P\{\xi_i(t+1) \in B_i | \xi(t) = x, \xi_k(t+1) = x_k \quad (k = \overline{1, n}; k \neq i)\} = P\{\xi_i(t+1) \in B_i | \xi(t) = x\}$$
$$(t = 0,1,2,...).$$

Применение свойства условной независимости компонент многомерной цепи Маркова в процессе построения автоматных моделей дает возможность путем расширения фазового пространства заменять цепь Маркова с условно зависимыми компонентами цепью большей размерности с условно независимыми компонентами. При этом, если математическая модель вероятностной системы S допускает представление в виде простой однородной n - мерной цепи Маркова $\xi(t)$ в фазовом пространстве $(X, \Im)$ с конечным множеством состояний с условно независимыми компонентами, то существует система вероятностных автоматов Γ, представляющая автоматную модель системы S.

Выполнение условий, приводящих исходную многомерную марковскую цепь к цепи, обладающей свойством условной независимости компонент, является необходимым и достаточным условием при построении соответствующей автоматной модели.

На практике при построении автоматной модели свойство условной независимости компонент эквивалентного ей марковского вектора обеспечивается выполнением следующих требований:

- последовательность входных сигналов автоматов должна быть реализацией независимых, одинаково распределенных случайных величин,

- система вероятностных автоматов как модель задается совокупностью автоматов, полностью определяющей реальную систему в каждый модельный момент времени и позволяющей определять состояние каждого автомата модели в текущий момент времени в зависимости от состояния всей системы автоматов в предыдущий момент времени. При этом все случайные величины, принимающие участие в построении модели, должны удовлетворять требованию взаимной независимости и обязательно идентифицироваться как состояния соответствующих автоматов.

Таким образом, в каждый узловой момент модельного времени реализуется **лишь единственное текущее значение каждой случайной независимой величины** в виде соответствующего состояния автомата вне зависимости от того, сколько раз в алгоритме модели повторяется этот автомат.

Процессное моделирование предполагает такую **выборку совокупности последовательных значений случайной величины, начиная с текущей реализации**, которая бы была достаточной для перевычисления текущего расчетного значения некоторого искомого состояния автомата.

В нашей задаче мы должны рассчитать состояние автомата, прогнозирующего остаточное время до следующего поступления порожнего маршрута на «Вход» системы.

Действительно, реализация (3.4.19) и (3.4.20) позволяет подойти к вычислению $C^{(21)}(t_1)$ - остаточного времени до прихода маршрута на «Вход». Но прежде приведем формулу остаточного времени простоя порожнего маршрута на «Входе»:

$$C_{ож}^{(21)}(t_1) = y_{ож}^{(21)}(t_0)\,(C_{ож}^{(21)}(t_0) - X(t_1)) + y^{(21)}(t_1)(1 - y^{(1)П}(t_1))q_{I_{дст}}(t_1).$$

$$C^{(21)}(t_1) = y^{(21)}(t_1)\,[y^{(1)\Pi}(t_1)\Theta_M + (1 - y^{(1)\Pi}(t_1))(\Theta_M +$$
$$+ q_{I\partial cm}(t_1))] + y^{(21)}_{o\text{ж}}(t_1)(C^{(21)}_{o\text{ж}}(t_1) + \Theta_M) +$$
$$+ (1 - y^{(21)}(t_1)y^{(21)}_{o\text{ж}}(t_1))(C^{(21)}(t_0) - X(t_1)). \qquad (3.4.21)$$

Поясним (3.4.21). В правой части данного линейного разностного стохастического уравнения присутствует четыре взаимоисключающих варианта, каждый из которых реализуется в зависимости от ненулевого значения присутствующих ситуативных индикаторов:

1.В момент t_1 на «Вход» поступает порожний маршрут и на складах «Входа» имеется по меньшей мере одна маршрутная партия груза. В этом случае остаточное время до следующего поступления маршрута на «Вход» системы буде равно времени оборота маршрута. Выше было оговорено, что в величину Θ_M (время оборота маршрута) входят времена погрузки груза на «Входе» и разгрузки его на «Выходе», причем после разгрузки маршрут сразу же покидает «Выход».

2.В момент t_1 на «Вход» поступает порожний маршрут, однако на складах «Входа» существующее количество груза в тоннах меньше размера маршрутной партии, либо вовсе отсутствует. Остаточное время до следующего поступления порожнего маршрута на «Вход» системы будет суммой времени очередного оборота маршрута Θ_M и расчетного времени накопления запаса груза на «Входе» до размера партии – $q_{I\partial cm}(t_1)$, определенного с помощью итеративных формул (3.4.19, 3.4.20).

3.В момент t_1 на «Входе» находится порожний маршрут, простаивающий из-за нехватки достаточного количества тонн груза – маршрутной партии. Остаточное время до следующего поступления маршрута на «Вход» будет состоять из остаточного времени простоя порожнего маршрута на «Входе» в ожидании появления груза в размере партии и времени оборота маршрута.

4.В случае, когда на «Вход» системы в текущий момент t_1 порожний маршрут не подошел и не простаивает на «Входе», считается, что он находится либо в пути, либо на «Выходе». Тогда актуализированное остаточное время до поступления маршрута на «Вход» в момент t_1 будет меньше соответствующего остаточного времени в момент t_0 на величину текущего узлового интервала $X(t_1)$.

Опишем алгоритм, позволяющий определять в каждый узловой момент местонахождение маршрута:

$$N_M(t_1) = (y^{(21)}(t_1) + y^{(21)}_{ож}(t_0)) \times 1 + y^{(23)}(t_1) \times 2 + (1 - y^{(21)}(t_1)\, y^{(21)}_{ож}(t_0) \times$$
$$\times y^{(23)}(t_1))[\delta[N_M(t_0), 1] \times 1 + \delta[N_M(t_0), 2] \times 2]; \qquad (3.4.22)$$

Таким образом, начиная от поступления на «Вход» и будучи в пути в груженом состоянии, поезд будет иметь местонахождение под номером «1», начиная от поступления на «Выход» и будучи в пути в порожнем состоянии, он будет иметь местонахождение под номером «2».

Приведем функционал, перевычисляющий остаточное время до прихода поезда на «Выход»:

$$C^{(23)}(t_1) = y^{(21)}(t_1)[y^{(1)П}(t_1)\frac{\Theta_M}{2} + (1 - y^{(1)П}(t_1))(\frac{\Theta_M}{2} +$$
$$+ q_{I_{дст}}(t_1))] + y^{(21)}_{ож}(t_1)(C^{(21)}_{ож}(t_1) + \frac{\Theta_M}{2}) + y^{(23)}(t_1)[y^{(1)П}(t_1)\Theta_M +$$
$$+ (1 - y^{(1)П}(t_1))(\Theta_M + q_{I_{дст}}(t_1))] + (1 - y^{(21)}(t_1)\, y^{(21)}_{ож}(t_0)\, y^{(23)}(t_1)) \times$$
$$\times \{\delta[N_M(t_1), 2] \times (C^{(23)}(t_0) - X(t_1)) + \delta[N_M(t_1), 1](C^{(21)}(t_1) - \frac{\Theta_M}{2})\}; \qquad (3.4.23)$$

Здесь рассматриваются такие возможные случаи:

1).Поезд в момент t_1 появился на «Входе» и в этот же момент t_1 имеется или появилась возможность загрузки порожняка (возможно, на «Входе» была по крайней мере одна партия груза, либо поступившая порция груза от поставщика дополнила имеющийся запас до размера партии). Тогда остаточное время до поступления поезда на «Выход» будет равно половине времени оборота $\frac{\Theta_M}{2}$.

2).В момент t_1 маршрут поступил на «Вход». Однако, из-за нехватки или отсутствия груза погрузка не началась – начался процесс накопления количества тонн груза на «Входе» до размера партии. Тогда остаточное время до поступлення поезда на «Выход» будет складываться из времени накопления партии на «Входе» - $q_{I_{дст}}(t_1)$ и половины времени оборота.

3).В момент t_1 на «Входе» ожидает порожний маршрут. Остаточное время до поступления груженого маршрута на «Выход» будет равно остаточному времени ожидания маршрутом погрузки и половине времени оборота.

4).Груженый маршрут в момент t_1 поступил на «Выход». Если в это время на «Входе» имеется хотя бы одна партия груза, расчетное время оборота поезда от «Выхода» до «Выхода», будет равно времени оборота

Θ_M. В противном случае оно будет увеличено на время накопления количества груза на «Входе» до размера маршрутной партии.

5).Поезд в момент t_1 - в движении, в порожнем состоянии. Расчетное остаточное время до поступления поезда на «Выход» будет уменьшено по сравнению с предыдущим на $X(t_1)$.

6).Поезд – в движении, в груженом состоянии. Его остаточное время до поступления на «Выход» будет меньше остаточного времени поступления на «Вход» на половину времени оборота.

Введем индикатор, фиксирующий факт ожидания получателем (ЕП) прихода поезда в момент t_0:

$$y^{(3)ЕП}(t_0) = 1 - \delta[D^{(3)}(t_0),-1] \cdot \delta[D^{(3)}(t_0),-2];$$

Здесь равенство $D^{(3)}(t_0) = -1$ фиксирует завершение очередного накопленного времени ожидания ЕП поступления груженого маршрута на «Выход» (в момент t_0 началась погрузка требуемой порции груза в емкость пользователя). Если $D^{(3)}(t_0) = -2$, то это означает отсутствие текущего накопления времени ожидания груза получателем.

Запишем накопленное время ожидания получателем (ЕП) поступления груза на «Выход» в момент t_1:

$$D^{(3)}(t_1) = (1 - y^{(3)ЕП}(t_0))[y^{(3)}(t_1) \times 0 + (1 - y^{(3)}(t_1)) \times (-2)] + y^{(3)ЕП}(t_0) \times$$
$$\times [(1 - y^{(23)}(t_1))(D^{(3)}(t_0) + X(t_1)) + y^{(23)}(t_1) \times (-1)]. \qquad (3.4.24)$$

Неотрицательные варианты будут фиксировать накопление данного простойного времени. Так, в случае поступления ЕП на «Выход» вариант $D^{(3)}(t_1) = 0$ означает возможное начало накопления времени ожидания ЕП погрузки требуемой порции. Если на «Выходе» в момент t_1 не находится ожидающая ЕП, или не поступила ЕП, это означает отсутствие накопления времени ожидания груза получателем и тогда $D^{(3)}(t_1) = -2$. В случае нахождения ожидающей ЕП на «Выходе» и не поступления груженого маршрута накопленное время ожидания ЕП на «Выходе» увеличивается на величину узлового интервала. И, наконец, если ЕП на «Выходе» дождался поступления груза по железной дороге к моменту t_1, состоянию автомата присваивается значение (-1), фиксирующее завершение текущего накопления времени ожидания получателем поступления груза.

Оптимизационный блок модели

Экономическая часть модели нацелена на перевычисление двух видов автоматов, определяющих искомые неслучайные характеристики, - автоматов накопления и усреднения значений искомых характеристик за период моделирования:

$$T(t_1) = T(t_0) + X(t_1);$$

Выше, при описании имитационной модели были введены обозначения и описания автоматов этих двух видов. Приведем формулы накопления, общая тенденция построения которых сводится к вычислению суммы соответствующих накоплений за весь период моделирования от начала моделирования до текущего момента и - текущего накопления данной искомой величины:

$$S^{(1)+}(T(t_1)) = S^{(1)+}(T(t_0)) + S^{(1)}(t_1);$$
$$S^{(3)+}(T(t_1)) = S^{(3)+}(T(t_0)) + S^{(3)пг}(t_1);$$
$$D^{(12)}(T(t_1)) = D^{(12)}(T(t_0)) + \sum_{n\in\{N^{(1)}(t_1)\}} D_n^{(12)}(t_1);$$

$$D^{(21)+}(T(t_1)) = D^{(21)+}(T(t_0)) + [D^{(21)}(t_0) + X(t_1)]\delta[D^{(21)}(t_1), -1];$$
$$D^{(3)+}(T(t_1)) = D^{(3)+}(T(t_0)) + \sum_{m\in N^{(3)}(t_1)} D_m^{(3)}(t_1);$$
$$D_{вых}^{(3)}(T(t_1)) = D_{вых}^{(3)}(T(t_0)) + [D^{(3)}(t_0) + X(t_1)]\delta[D^{(3)}(t_1), -1].$$

Запишем формулы усреднения:

$$dS^{(1)+}(T(t_1)) = S^{(1)+}(T(t_1)) \div T(t_1);$$
$$dS^{(3)+}(T(t_1)) = S^{(3)+}(T(t_1)) \div T(t_1);$$
$$dD^{(12)}(T(t_1)) = D^{(12)}(T(t_1)) \div T(t_1);$$
$$dD^{(21)}(T(t_1)) = D^{(21)}(T(t_1)) \div T(t_1);$$
$$dD^{(3)+}(T(t_1)) = D^{(3)+}(T(t_1)) \div T(t_1);$$
$$dD_{вых}^{(3)}(T(t_1)) = D_{вых}^{(3)}(T(t_1)) \div T(t_1);$$

Напомним цель создания логистической модели системы «Производство-транспорт-потребление»:

Определить такую стратегию управления материальным потоком «производство-транспорт-потребление», при которой минимизируется конечная себестоимость продукции (перевозимого груза):

$$C_0 = \frac{\sum E_{пр}}{dS^{(3)+}} \to \min$$

при реализации неравенства

$$dS^{(1)+} \le dS^{(3)+};$$

где $\sum E_{пр}$ - усредненные суммарные приведенные расходы, связанные с производством, транспортировкой, потреблением груза, критическим простоем состава на «Входе» и ЕП – на «Выходе», хранением на складах «Входа» и «Выхода» готовой продукции – полученные усреднением за период моделирования T, обеспечивающий вхождение процесса в стационарный режим, $dS^{(1)+}$, $dS^{(3)+}$ - усредненные значения порций груза, поступающих на «Вход» и потребляемых на «Выходе», полученные усреднением за период моделирования T.

Управляемыми параметрами считаются количество груза в партии (размер партии) и количество маршрутов (через величину $\Theta_{M)}$).

Расшифруем вид усредненных суммарных приведенных расходов:

$$\sum E_{пр}(T(t_1)) = E^{(1)}\, dS^{(1)+}(T(t_1)) + E^{(12)}\, dD^{(12)}(T(t_1)) + E^{(21)}_{ваг} \times$$
$$\times\, dD^{(21)+}(T(t_1)) + E_{ваг} + E_{лок} + E^{(3)}\, dD^{(3)+}(T(t_1)) + E_{ЕП}\, dD^{(3)}_{вых}(T(t_1)).$$

В соответствии с постановкой задачи определим функцию цели:

$$C_0 = \frac{\sum E_{пр}(T(t_1))}{dS^{(3)+}(T(t_1))} \to \min$$

Задача оптимизации

Развитие методов оптимизации в имитационном моделировании связано с развитием методов математического моделирования: метода линейного и стохастического программирования, метода стохастической аппроксимации, стохастического квазиградиентного метода, задачи многоэтапного стохастического программирования. При этом отличие и сложность задачи оптимизации на основе имитационных моделей заключена в том, что исследуемые закономерности не являются неизменными, а меняются с изменением решения. Сам процесс поиска неизвестных решений носит адаптивный характер и представляет собой чередование многократной имитации поведения реальной системы и реализации очередной оптимизирующей процедуры по информации, получаемой в результате имитации. Процесс завершается нахождением такого набора оптимизируемых параметров, при котором усредненное значение показателя качества принимает наименьшее значение. Другими словами, при проведении сравнения усредненных значений показателя качества на текущем и предыдущем шагах итерации в зависимости от результата осуществляется либо завершение процесса сходимости, а также выдача искомых рекомендаций по значениям параметров, либо продолжается процесс чередования многократной имитации исследуемой системы и оптимизирующей итерации – до завершения процесса сходимости функции цели.

В данной задаче целесообразно применить в качестве оптимизационного метода метод линейного программирования, хорошо зарекомендовавший себя в сочетании с имитационным моделированием с помощью системы вероятностных автоматов.

Завершая изложение данного пункта, можем сделать вывод о том, что в результате проведенных исследований разработана принципиальная абстрактная схема решения задачи непрерывного оперативного управления логистической цепью «производство-транспорт-потребление», демонстрирующая преимущества автоматного моделирования, позволяющие достаточно адекватно отражать сложность и многогранность поведения логистических систем.

3.5. Модель взаимодействия пассажирских потоков в транспортных узлах

В настоящее время актуальным является исследование взаимодействия потоков пассажиров на крупных вокзалах, являющихся важнейшей составляющей инфраструктуры транспортной логистики. Оценка пропускной способности транспортных узлов, в том числе железнодорожных вокзалов, должна служить основой в задаче обеспечения стабильности качества обслуживания пассажиров.

Эта оценка конкретизируется в виде реализации и анализа результатов последовательности следующих задач:

- определение оптимальных параметров системы – размеров площади вокзала, компоновки и ширины его входов-выходов, минимизирующих потери от задержки пассажиров на вокзале,

- обоснование планировочных и архитектурных решений новых (реконструируемых) вокзалов,

- оптимизация (корректировка) расписания пассажирского движения на направлениях и в регионах,

- определение рациональных параметров и компоновки существующих и резервных входов-выходов вокзалов в условиях экстремальных пассажиропотоков.

Приведем вероятностно-автоматную модель взаимодействия пассажирских потоков в пересадочных узлах.

Содержательное описание

Исследуемая система состоит из двух подсистем: статичной подсистемы, включающей в себя пространство (площадь) и всю инфраструктуру вокзала, и динамичной – подсистемы встречных потоков пассажиров. Пассажиры поступают на территорию вокзала со стороны его входа (выхода) и, в зависимости от целей каждого из пассажиров, разделяются на потоки, следующие сразу на выход (вход), и на потоки, следующие к какому-либо из объектов инфраструктуры вокзала. Учитываются также потоки пассажиров, следующие от объектов инфраструктуры к выходу (входу) вокзала.

Формализованная схема

Условимся считать, что площадь вокзала представляет собой структуру, состоящую из $I * J$ прямоугольных «клеток», где I - общее количество клеток по горизонтали, а J - общее количество клеток по вертикали. Положение каждой клетки идентифицируется парой индексов (i, j), где $i = \overline{1, I}$, а $j = \overline{1, J}$. Договоримся называть переменный индекс j номером уровня. Назовем первым со стороны перрона или верхним уровнем уровень $j = 1$. Тогда $j = J$ - последний или нижний уровень (со стороны выхода в город). Все структурные клетки считаются одинаковыми (с одинаковой длиной стороны, например, в 1,65 м), клетки каждого уровня нумеруются слева направо.

Договоримся, что в каждой клетке площади вокзала в каждый момент времени могут находиться пассажиры, в каждую клетку могут поступать пассажиры и из каждой клетки могут выходить пассажиры. То есть пассажиры каждой клетки площади вокзала (кроме клеток, занятых под объекты инфраструктуры) одновременно перемещаются по своему желанию в таких направлениях:

- из города к перрону,
- от поездов в город,

$$\left.\begin{array}{l} -\mathit{слева} \to \mathit{направо}, \\ -\mathit{справа} \to \mathit{налево}. \end{array}\right\}\text{к объектам инфраструктуры вокзала}$$

Диагональные перемещения в модели не рассматриваются.

Анализ содержательного описания данной системы и формализованного представления площади вокзала в виде декартового произведения клеток $I*J$, а также такие факторы, как сложность и вероятностный характер движения встречных потоков пассажиров по клеткам площади вокзала, включая клетки входа-выхода, потребность в определении искомых характеристик и анализе возникающих ситуаций в любой момент (срез) единого модельного времени, обусловливают выбор метода имитационного моделирования с помощью СВА для исследования такой системы.

Анализируя систему «вокзал - пассажиропотоки», убеждаемся в очевидности наличия свойства ограниченности структурно-функциональных и информационных связей между клетками $(i, j) \in I*J$. Действительно, в реальности через каждую элементарную клетку вокзала в каждый момент времени одновременно может передвигаться восемь потоков пассажиров: четыре потока наружу из клетки и четыре потока внутрь в клетку. Каждый поток в отдельности, проходя через клетки вокзала, будет представлять собой модель перетекания. Свойство ограниченности внутренних связей в процессе автоматного моделирования динамики пассажиропотоков позволяет осуществить разбиение совокупного разновекторного потока пассажиров на последовательность потоков по определенным направлениям для одного и того же текущего момента времени и рассчитать последовательно все промежуточные наполнения каждой клетки. Поэтому следует предварительно договориться об одинаковой последовательности расчета наполнения клеток в соответствии с зафиксированным чередованием направлений потоков через клетки.

Договоримся о введении следующей системы приоритетов направлений передвижения пассажиропотоков через (i, j)- ю клетку площади вокзала:

1) снизу$\to$ вверх (из города к перрону),
2) сверху$\to$ вниз (от поездов в город),
3) справа$\to$налево, (3.5.1)
4) слева$\to$направо.

Придерживаясь приведенной очередности приоритетов направления движения пассажиропотоков внутри клеток, получаем возможность расчленить эти потоки и исследовать промежуточное наполнение клеток по каждому направлению движения потоков, постепенно суммируя наполнение клеток по схеме (3.5.1) в течение одного и того же зафиксированного единичного интервала модельного времени $(t-1,\ t]$.

Построение модели

Введем обозначения состояний автоматов, описывающих (i,j)- ю клетку:

$a_{ij}(t)$- поток пассажиров в (i,j)-й клетке в момент t;

$\lambda_{ij}^{(1)}(t)$- поток желающих выйти в момент t из (i,j)-й клетки вверх, в клетку $(i,j-1)$;

$L_{ij}^{(1)}(t)$– поток вышедших в момент t из клетки (i,j) в клетку $(i,j-1)$;

$a_{ij}^{(1)}(t)$- текущий поток пассажиров в клетке (i,j) после завершения вертикального перемещения потока - «снизу-вверх» на момент t;

$\lambda_{ij}^{(3)}(t)$- поток желающих выйти вниз из (i,j)-й клетки в $(i,j+1)$-ю клетку;

$L_{ij}^{(3)}(t)$– поток вышедших в момент t из клетки (i,j) в клетку $(i,j+1)$;

$a_{ij}^{(3)}(t)$- текущий поток в клетке (i,j) в момент t после завершения следующего вертикального перемещения потока – «сверху-вниз»;

$\lambda_{ij}^{(5)}(t)$- поток желающих выйти в момент t из клетки (i,j) влево, в клетку $(i-1,j)$;

$L_{ij}^{(5)}(t)$– поток вышедших в момент t из клетки (i,j) влево, в клетку $(i-1,j)$;

$a_{ij}^{(5)}(t)$- текущее количество пассажиров в (i,j)-й клетке в момент t после завершения последующего модельного горизонтального перемещения потока «справа-налево»;

$\lambda_{ij}^{(7)}(t)$- поток желающих выйти в момент t из ij–й клетки вправо – в клетку $(i+1,j)$;

$L_{ij}^{(7)}(t)$– поток вышедших в момент t из клетки (i,j) в клетку $(i+1,j)$;

$a_{ij}^{(7)}(t)$- завершающий текущий поток в клетке (i,j) в момент t после завершения перемещения потока «слева - направо»;

Введем обозначения входящих потоков в $(i,j)-$ю клетку с четырех сторон в момент t, соблюдая приоритеты (3.3.1):

$L_{ij}^{(2)}(t)-$ поток вошедших в клетку (i,j) из нижней клетки $(i,j+1)$;

$L_{ij}^{(4)}(t)-$поток вошедших в клетку (i,j) из верхней клетки $(i,j-1)$;

$L_{ij}^{(6)}(t)$- поток вошедших в клетку (i,j) из соседней клетки справа $(i+1,j)$;

$L_{ij}^{(8)}(t)-$поток вошедших в клетку (i,j) из соседней клетки слева $(i-1,j)$;

$A_{ij}=const-$ предельно допустимая пассажировместимость $(i,j)-$й клетки;

$X_{ij}^{(pq)}(t)-$доля пассажиров от всего потока вошедших в клетку (i,j) по приоритету $q=2\vee 4\vee 6\vee 8$ и желающих выйти из нее по приоритету $p=1\vee 3\vee 5\vee 7$ в момент t;

Введем обозначения заданных статистически определенных случайных величин:

$\xi_i^{(1)}(t)-$случайный поток пассажиров, поступивших в момент t на вход $i-$й клетки последнего (нижнего) $J-$го уровня из города;

$\xi_i^{(3)}(t)-$ случайный поток поступивших на вход $i-$й клетки верхнего первого уровня;

$\lambda_i^{*(1)}(t)$, $\lambda_i^{*(3)}(t)-$ число пассажиров, не вошедших в помещение вокзала из города (снизу) и от перрона (сверху) из-за переполнения клеток входа-выхода;

$\eta_{ij}^{(pq)}(t)-$ случайная доля потока желающих выйти из клетки (i,j) по приоритету $p=1\vee 3\vee 5\vee 7$ из всего потока пассажиров, вошедших в нее по приоритету $q=2\vee 4\vee 6\vee 8$.

Введем следующие двоичные индикаторы:

$z_{ij}^{(q)}(t)-$принимает значение 1, если поток вошедших в $(i,j)-$ю клетку пассажиров в момент t по приоритету $q=2\vee 4\vee 6\vee 8$ отличен от нуля (поступление реально состоялось), в противном случае данная величина принимает значение 0.

$\rho_{ij}^{(p)}-$ фиксированная двоичная величина, ненулевое значение которой определяет принципиальную возможность выхода из клетки (i,j)

(клетка не запретная, не занятая объектом инфраструктуры вокзала) согласно приоритету $p = 1 \vee 3 \vee 5 \vee 7$.

$V_{ij}^{(pq)}(t) = 1$, если выход из клетки (i, j) по приоритету p невозможен (выход в сторону «запретной» клетки) для пассажиров, поступивших в клетку (i, j) по приоритету q, и $V_{ij}^{(pq)}(t) = 0$ – в противном случае.

$y_{ij}(t)$ - индикатор «кризисного» простоя пассажиров в клетке (i, j).

Приведем описание автоматов агрегата целей.

$\tau_{ij}(t)$ – накопленное время пребывания клетки (i, j) в очередном кризисе на момент t;

$N_{ij}(t)$ - накопленное количество «кризисов» для клетки (i, j) на момент t;

$W_{ij}(t)$ - накопленный штраф для клетки (i, j) на момент t;

T - время имитации, достаточно длительный интервал времени, позволяющий ввести систему в стационарное состояние и решать задачи прогноза или оптимизации;

$N_{ij}^{(*)}(T)$ - усредненное количество «кризисных» ситуаций для клетки (i, j), полученное усреднением за время моделирования T;

$W_{ij}^{(*)}(T)$ - усредненный штраф для клетки (i, j) на момент T;

$W^{(**)}(T)$ - суммарный усредненный штраф по системе за время моделирования T.

Обозначим каждый предыдущий, в том числе и исходный, момент моделирования через $(t-1)$. Очевидно, что на этот момент заданы векторы начальных состояний автоматов $a_{ij}(t-1)$ и $\lambda_{ij}^{(p)}(t-1)$, отображающих соответственно степень наполнения клеток и потоки желающих выйти из них согласно системе приоритетов.

Сценарий моделирования

1.Моделируется динамика перемещения пассажиров из клетки (i, j) в клетку $(i, j-1)$, при этом определяется поток вышедших «вверх» - $L_{ij}^{(1)}(t)$ - на последующий момент времени имитации t, а также первое текущее оставшееся число пассажиров в (i, j) – й клетке - $a_{ij}^{(1)}(t)$.

2. Определяется поток вышедших из (i, j) - й клетки «вниз» и остаток пассажиров в ней на момент t - $L_{ij}^{(3)}(t)$ и $a_{ij}^{(3)}(t)$ соответственно.

3. Производится перевычисление потока вышедших «влево» $L_{ij}^{(5)}(t)$ и новый остаток пассажиров для клетки (i,j) $a_{ij}^{(5)}(t)$ на момент t.

4. Осуществляется аналогичный «парный» шаг определения пассажиров, переместившихся «вправо» из клетки (i,j) - $L_{ij}^{(7)}(t)$, а также текущее наполнение клетки - $a_{ij}^{(7)}(t)$, которое будет результирующим наполнением $a_{ij}(t)$ клетки в следующий момент единого модельного времени t.

5. Следующие четыре последовательные шага определяют потоки вошедших в клетку согласно системе приоритетов вхождения - $L_{ij}^{(q)}(t)$, где $q = 2 \vee 4 \vee 6 \vee 8$.

6. Определяются двоичные индикаторы реальной реализации потоков вхождения в клетку (i,j) с различных сторон $z_{ij}^{(q)}(t)$ и оценки принципиальной возможности выхода по различным направлениям $\rho_{ij}^{(p)}$.

7. Определяются реальные доли $X_{ij}^{(pq)}(t)$ потоков желающих выйти из $(i,j)-$й клетки по трем направлениям из всего потока вошедших в клетку (i,j) в момент t с четвертой стороны.

8. Определяется поток желающих выйти из клетки (i,j) в разные стороны - $\lambda_{ij}^{(p)}(t)$.

Таким образом, на момент t становятся известными все значения состояний автоматов, определяющих наполнение каждой (i,j) - й $(i=\overline{1,I};\ j=\overline{1,J})$ клетки площади вокзала. Вычисления состояний КВА системы, реализуемые в соответствии с описанным сценарием, имеют циклический характер, повторяясь для каждого следующего момента времени

$$t_n = t_{n-1} + \Delta t;$$

Для простоты вычислений примем $\Delta t = 1$, а при записи ТУФП будем пользоваться такими двумя обозначениями временного аргумента:

- предыдущее значение временного аргумента, в том числе и для вектора начальных состояний, будет обозначаться как $t-1$,

- значение временного аргумента для перевычисляемых значений автоматов модели будет обозначено как t. В следующем цикле вычислений определенные на момент t значения автоматов модели будут уже считаться значениями на момент $(t-1)$ и служить для переопределения новых значений всех автоматов на следующий момент модельного времени $(t-1)+1=t$.

Искомые автоматы экономической части модели перевычисляются по мере накопления значений временного аргумента $\sum_{n}(t+n)\to T$.

Алгоритм модели

1. $L_{i1}^{(1)}(t)=\lambda_{i1}^{(1)}(t-1); \quad (i=\overline{1,I}; \quad j=1)$ -

из клеток первого уровня в момент t к поездам на перрон вышли все желающие выйти «вверх» на момент $(t-1)$.

2. $L_{ij}^{(1)}(t)=\min\left\{\lambda_{ij}^{(1)}(t-1);\ A_{i(j-1)}-a_{i(j-1)}(t-1)\right\} \quad (i=\overline{1,I};\ j=\overline{2,J})$ -

поток вышедших в момент t «вверх» из клеток второго и ниже уровней будет равен минимуму между количеством желающих выйти в этом направлении из $(i,j)-$й клетки и резервной емкостью верхней клетки $(i,j-1)$ на момент $(t-1)$.

3. $L_{i(J+1)}^{(1)}(t)=\min\left\{\xi_i^{(1)}(t)+\lambda_i^{*(1)}(t-1); \quad A_{iJ}-a_{iJ}(t-1)\right\} \quad (i=\overline{1,I})$ -

поток входящих в клетки входа со стороны города определяется как минимум между суммой случайного количества пассажиров, поступивших в момент t к соответствующим клеткам уровня J и количества не поступивших в предыдущий момент времени к данным клеткам, и резервом соответствующих клеток (i,J) нижнего уровня.

4. $a_{ij}^{(1)}(t)=\min\left\{a_{ij}(t-1)-L_{ij}^{(1)}(t)+L_{i(j+1)}^{(1)}(t);\ A_{ij}\right\} \quad (i=\overline{1,I};\ j=\overline{1,J})$ -

первое промежуточное наполнение клетки (i,j) на момент t определяется таким образом: предыдущий поток (на момент $t-1$) уменьшается на количество выбывших «вверх» и увеличивается на количество вошедших в данную клетку «снизу» в момент t и проверяется на условие нормы пассажировместимости клетки.

5. $\lambda_i^{*(1)}(t)=\xi_i^{(1)}(t)+\lambda_i^{*(1)}(t-1)-L_{i(J+1)}^{(1)}(t); \quad (i=\overline{1,I})$ -

вычисляется возможное наличие потока не вошедших в момент t на уровень J в случае переполнения (i,J)-й клетки входа в вокзал со стороны города.

6. $L_{iJ}^{(3)}(t)=\lambda_{iJ}^{(3)}(t-1); \quad (i=\overline{1,I};\ j=J)$ -

выход в город всех желающих из клеток уровня J осуществляется без ограничений.

$$7.\ L_{ij}^{(3)}(t)=\min\left\{\lambda_{ij}^{(3)}(t-1);\ A_{i(j+1)}-a_{i(j+1)}^{(1)}(t)\right\};\quad (i=\overline{1,I};\ j=\overline{J-1,1})\ \text{-}$$

поток вышедших из клетки (i,j) (кроме уровня J) «вниз» рассчитывается как минимум между потоком желающих выйти в этом направлении с момента $t-1$ и резервом вместимости нижней клетки на момент t.

$$8.\ L_{i0}^{(3)}(t)=\min\left\{\xi_i^{(3)}(t)+\lambda_i^{*(3)}(t-1);\ A_{i1}-a_{i1}^{(1)}(t)\right\};\quad (i=\overline{1,I};\ j=0)\ \text{-}$$

рассчитывается поток вошедших в клетки верхнего уровня (ко входу в вокзал со стороны перрона) как минимум между суммой случайного поступления потока от поездов и остатка не вошедших в вокзал с момента $t-1$ и наполнением клеток первого уровня после выхода из них желающих.

$$9.\ a_{ij}^{(3)}(t)=\min\left\{a_{ij}^{(1)}(t)-L_{ij}^{(3)}(t)+L_{i(j-1)}^{(3)}(t);\ A_{ij}\right\};\quad (i=\overline{1,I};\ j=\overline{1,J})\ \text{-}$$

текущее число пассажиров в каждой клетке (i,j), полученное на момент t в результате вертикального перемещения потока сверху-вниз через клетку – из клетки $(i,(j-1))$ в клетку (i,j) и одновременно из клетки (i,j) в клетку $(i,(j+1))$.

$$10.\ \lambda_i^{*(3)}(t)=\xi_i^{(3)}(t)+\lambda_i^{*(3)}(t-1)-L_{i0}^{(3)}(t);\quad (i=\overline{1,I})\ \text{-}$$

наличие потока не вошедших в вокзал со стороны перрона в момент t будет характеризоваться разностью между суммой поступивших с поездов на перрон в момент t и остатком не вошедших в вокзал с момента $(t-1)$ и потоком пассажиров, поступивших «вниз», в клетки первого уровня на момент t.

$$11.\ \begin{array}{l} L_{1j}^{(5)}(t)=0;\quad (i=1;\ j=\overline{1,J}) \\ L_{ij}^{(5)}(t)=\min\left\{\lambda_{ij}^{(5)}(t-1);\ A_{(i-1)j}-a_{(i-1)j}^{(3)}(t)\right\};\quad (i=\overline{1,I};\ j=\overline{1,J}) \end{array}\ \text{-}$$

определяется величина потока, переместившегося в момент t из (i,j)-й клетки в соседнюю «слева» $((i-1),j)$-ю клетку, в соответствии с приоритетом последовательности перемещений.

$$12.\ a_{ij}^{(5)}(t)=\min\left\{a_{ij}^{(3)}(t)-L_{ij}^{(5)}(t)+L_{(i+1)j}^{(5)}(t);\ A_{ij}\right\};\quad (i=\overline{2,I-1};\ j=\overline{1,J})\ \text{-}$$

производится вычисление текущего наполнения клеток вследствие горизонтального перемещения потоков «справа-налево» между клетками одного уровня.

13. $$\begin{aligned} a_{Ij}^{(5)}(t) &= a_{Ij}^{(3)}(t) - L_{Ij}^{(5)}(t); \quad (i = I;\ j = \overline{1,J}) \\ a_{1j}^{(5)}(t) &= \min\left\{a_{1j}^{(3)}(t) + L_{2j}^{(5)}(t);\ A_{1j}\right\}; \quad (i = 1;\ j = \overline{1,J}) \end{aligned}$$ -

определяется текущее наполнение крайних правой и левой клеток одного уровня.

14. $$\begin{aligned} L_{Ij}^{(7)}(t) &= 0; \quad (i = I;\ j = \overline{1,J}) \\ L_{ij}^{(7)}(t) &= \min\left\{\lambda_{ij}^{(7)}(t-1);\ A_{(i+1)j} - a_{(i+1)j}^{(5)}(t)\right\}; \quad (i = \overline{1,I-1};\ j = \overline{1,J}) \end{aligned}$$ -

моделируется движение пассажиров «вправо» из ij-й клетки.

15. $$\begin{aligned} a_{1j}^{(7)}(t) &= a_{1j}^{(5)}(t) - L_{1j}^{(7)}(t); \quad (i = 1;\ j = \overline{1,J}) \\ a_{Ij}^{(7)}(t) &= \min\left\{a_{Ij}^{(5)}(t) + L_{(I-1)j}^{(7)}(t);\ A_{Ij}\right\}; \quad (i = I;\ j = \overline{1,J}) \\ a_{ij}^{(7)}(t) &= \min\left\{a_{ij}^{(5)}(t) - L_{ij}^{(7)}(t) + L_{(i-1)j}^{(7)}(t);\ A_{ij}\right\}; \quad (i = \overline{2,I-1};\ j = \overline{1,J}) \end{aligned}$$

определяется результирующая величина наполнения клетки (ij) в момент t (по итогам реализации выходящих потоков из клетки по всем четырем направлениям).

Очевидно, что

$$a_{ij}(t) = a_{ij}^{(7)}(t);$$

Таким образом, мы вычислили состояние одного из автоматов, определяющих ij-ю клетку на момент t, а именно: автомата $a_{ij}(t-1)$, идентифицирующего наполнение ij - й клетки.

Перейдем к определению состояний автомата $\lambda_{ij}^{(p)}(t)$, идентифицирующего количество желающих выйти из ij-й клетки, на момент t. Для этого определим потоки вошедших в клетку (i,j) в момент t со всех допустимых направлений поступления пассажиров:

$$\begin{aligned} L_{ij}^{(2)}(t) &= L_{i(j+1)}^{(1)}(t); \\ L_{ij}^{(4)}(t) &= L_{i(j-1)}^{(3)}(t); \\ L_{ij}^{(6)}(t) &= L_{(i+1)j}^{(5)}(t); \\ L_{ij}^{(8)}(t) &= L_{(i-1)j}^{(7)}(t); \end{aligned}$$

Сформируем текущие значения $z_{ij}^{(q)}(t)$ индикаторов поступления пассажиров в клетку (i, j) в момент t по направлениям $q = 2 \vee 4 \vee 6 \vee 8$ - («снизу», «сверху», «справа», «слева»):

$$z_{ij}^{(q)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если} } L_{ij}^{(q)}(t) \neq 0, \\ 0, & \text{\textit{если} } L_{ij}^{(q)}(t) = 0. \end{cases}$$

Напомним, что заданными считаются индикаторы, определяющие принципиальную возможность выхода из клетки в направлении p (1 – «вверх», 3 – «вниз», 5 – «влево», 7 – «вправо»):

$$\rho_{ij}^{(p)} = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если выход возможен,}} \\ 0 & \text{\textit{в противном случае}} \end{cases}$$

Приведем формулы вычисления долей (процентов) потоков желающих выйти из ij-й клетки в момент t в направлениях:

1.Доли желающих выйти «вверх», «влево» и «вправо» из потока пассажиров, поступивших «снизу» в ij-клетку

$$X_{ij}^{(12)}(t) = z_{ij}^{(2)}(t)\, \rho_{ij}^{(1)}\, \eta_{ij}^{(12)}(t);$$

$$V_{ij}^{(12)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если} } X_{ij}^{(12)}(t) = 0; \\ 0 & \text{\textit{в противном случае}} \end{cases}$$

$$X_{ij}^{(52)}(t) = z_{ij}^{(2)}(t)\, \rho_{ij}^{(5)}\, (\eta_{ij}^{(52)}(t) + V_{ij}^{(12)}(t)\, \eta_{ij}^{(12)}(t));$$

$$X_{ij}^{(72)}(t) = z_{ij}^{(2)}(t)\, \rho_{ij}^{(7)}\, (1 - X_{ij}^{(12)}(t) - X_{ij}^{(52)}(t));$$

2.Доли желающих выйти «вниз», «влево» и «вправо» из потока поступивших «сверху»

$$X_{ij}^{(34)}(t) = z_{ij}^{(4)}(t)\, \rho_{ij}^{(3)}\, \eta_{ij}^{(34)}(t);$$

$$V_{ij}^{(34)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если} } X_{ij}^{(34)}(t) = 0; \\ 0 & \text{\textit{в противном случае}} \end{cases}$$

$$X_{ij}^{(54)}(t) = z_{ij}^{(4)}(t)\, \rho_{ij}^{(5)}\, (\eta_{ij}^{(54)}(t) + V_{ij}^{(34)}(t)\, \eta_{ij}^{(34)}(t));$$

$$X_{ij}^{(74)}(t) = z_{ij}^{(4)}(t)\, \rho_{ij}^{(7)}\, (1 - X_{ij}^{(34)}(t) - X_{ij}^{(54)}(t));$$

3.Доли желающих выйти «вверх», «вниз» и «влево» из потока пассажиров, поступивших «справа» в ij-ю клетку в момент t будут такими

$$X_{ij}^{(16)}(t) = z_{ij}^{(6)}(t)\,\rho_{ij}^{(1)}\,\eta_{ij}^{(16)}(t);$$

$$V_{ij}^{(16)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad X_{ij}^{(16)}(t) = 0; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$X_{ij}^{(36)}(t) = z_{ij}^{(6)}(t)\,\rho_{ij}^{(3)}\,(\eta_{ij}^{(36)}(t) + V_{ij}^{(16)}(t)\,\eta_{ij}^{(16)}(t));$$

$$X_{ij}^{(56)}(t) = z_{ij}^{(6)}(t)\,\rho_{ij}^{(5)}\,(1 - X_{ij}^{(16)}(t) - X_{ij}^{(36)}(t));$$

4.Доли желающих выйти «вверх», «вниз» и «вправо» из потока пассажиров, поступивших в момент t в ij-ю клетку «слева»

$$X_{ij}^{(18)}(t) = z_{ij}^{(8)}(t)\,\rho_{ij}^{(1)}\,\eta_{ij}^{(18)}(t);$$

$$V_{ij}^{(18)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad X_{ij}^{(18)}(t) = 0; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$X_{ij}^{(38)}(t) = z_{ij}^{(8)}(t)\,\rho_{ij}^{(3)}\,(\eta_{ij}^{(38)}(t) + V_{ij}^{(18)}(t)\,\eta_{ij}^{(18)}(t));$$

$$X_{ij}^{(78)}(t) = z_{ij}^{(8)}(t)\,\rho_{ij}^{(7)}\,(1 - X_{ij}^{(18)}(t) - X_{ij}^{(38)}(t));$$

Теперь вычислим потоки желающих в момент t выйти из ij-й клетки по допустимым направлениям:

$$\lambda_{ij}^{(1)}(t) = \lambda_{ij}^{(1)}(t-1) - L_{ij}^{(1)}(t) + L_{ij}^{(2)}(t)\,X_{ij}^{(12)}(t) + L_{ij}^{(6)}(t)\,X_{ij}^{(16)}(t) + L_{ij}^{(8)}(t)\,X_{ij}^{(18)}(t);$$

Приведенная формула отображает результирующий поток желающих выйти «вверх» в момент t из ij- й клетки, складывающийся из таких потоков:

- возможный остаток пассажиров, не вышедших «вверх» с момента $(t-1)$,
- поток желающих выйти «вверх» из потока вошедших «снизу»,
- поток желающих выйти «вверх» из потока вошедших «справа»,
- поток желающих выйти «вверх» из потока вошедших «слева».

Ниже приведем аналогичные формулы для вычисления потоков желающих выйти «вниз», «влево» и «вправо» из ij-й клетки в момент t.

$$\lambda_{ij}^{(3)}(t) = \lambda_{ij}^{(3)}(t-1) - L_{ij}^{(3)}(t) + L_{ij}^{(4)}(t)\,X_{ij}^{(34)}(t) + L_{ij}^{(6)}(t)\,X_{ij}^{(36)}(t) + L_{ij}^{(8)}(t)\,X_{ij}^{(38)}(t);$$

$$\lambda_{ij}^{(5)}(t) = \lambda_{ij}^{(5)}(t-1) - L_{ij}^{(5)}(t) + L_{ij}^{(2)}(t)\,X_{ij}^{(52)}(t) + L_{ij}^{(4)}(t)\,X_{ij}^{(54)}(t) + L_{ij}^{(6)}(t)\,X_{ij}^{(56)}(t);$$

$$\lambda_{ij}^{(7)}(t) = \lambda_{ij}^{(7)}(t-1) - L_{ij}^{(7)}(t) + L_{ij}^{(2)}(t)\,X_{ij}^{(72)}(t) + L_{ij}^{(4)}(t)\,X_{ij}^{(74)}(t) + L_{ij}^{(8)}(t)\,X_{ij}^{(78)}(t);$$

Напомним, что в начальный момент моделирования $(t-1)$ был задан вектор начальных состояний автоматов $(a_{ij}(t-1), \lambda_{ij}^{(p)}(t-1))$, определяющий (i,j)-ю клетку. Здесь p $(p=1,3,5,7)$ обозначает направление выхода потоков из клетки. С помощью ТУФП были переопределены состояния этих автоматов на следующий момент модельного времени t.

Перейдем к построению алгоритма для автоматов экономической части модели. Зададим индикатор кризисного простоя пассажиров в ij-й клетке на момент t:

$$Y_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a_{ij}(t) = A_{ij}; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Сначала приведем функционалы накапливающих автоматов, записанные в логико-импликативной форме.

Запись в этом случае является двухстрочной: в верхней подстроке задаются варианты условий, в нижней – записываются условные функционалы переходов для искомых автоматов, соответствующие каждому из вариантов. Все условия в совокупности должны составлять тождественно-истинное высказывание.

Приведем варианты, определяющие значения следующих накапливающих автоматов:

- $\tau_{ij}(t)$- накопленное на момент t время пребывания (i,j)-й клетки в очередном «кризисе»,
- $N_{ij}(t)$- накопленное количество «кризисов»,
- $W_{ij}(t)$ - накопленный штраф (i,j)-й клетки на момент t.

Вариант 1.

$$\frac{Y_{ij}(t-1)\cdot Y_{ij}(t) = 1}{\begin{array}{l} \tau_{ij}(t) = \tau_{ij}(t-1) + 1; \\ N_{ij}(t) = N_{ij}(t-1); \\ W_{ij}(t) = W_{ij}(t-1) + \alpha_{ij}; \end{array}}$$

где α_{ij} - штраф за «кризисный» простой клетки (i, j) в течение интервала $(t-1, t]$. Здесь условие первого варианта означает, что клетка пребывает в «кризисе» от момента $t-1$ до момента t, поэтому накопленное время текущего кризиса увеличивается на единицу, количество «кризисов» остается тем же, накопленный штраф увеличивается на величину α_{ij}.

Вариант 2.

$$\frac{(1-Y_{ij}(t-1))\cdot Y_{ij}(t)=1}{\begin{gathered}\tau_{ij}(t)=1;\\ N_{ij}(t)=N_{ij}(t-1)+1;\\ W_{ij}(t)=W_{ij}(t-1)+\alpha_{ij};\end{gathered}}$$

Вариант 2 описывает реакцию автоматов накопления на ситуацию, когда в предыдущий момент $t-1$ клетка не была в «кризисе», но в момент t зафиксировано возникновение «кризиса» переполнения.

Вариант 3

$$\frac{(1-Y_{ij}(t-1))\cdot(1-Y_{ij}(t))=1\vee Y_{ij}(t-1)\cdot(1-Y_{ij}(t))=1}{\begin{gathered}\tau_{ij}(t)=0;\\ N_{ij}(t)=N_{ij}(t-1);\\ W_{ij}(t)=W_{ij}(t-1);\end{gathered}}$$

Условие варианта 3 является дизъюнкцией высказываний: клетка не была в состоянии «кризиса» по меньшей мере в течение двух интервалов, либо «кризис» завершился в момент $t-1$. Тогда накопленное время очередного «кризиса» равно нулю, а накопленное количество «кризисов» и накопленный штраф остались неизменными.

Автомат, накапливающий период времени моделирования системы, запишем так

$$T(t)=T(t-1)+1;$$

Усредненные искомые величины, они же автоматы усреднения, вычисляются следующим образом:

$$N_{ij}^{*}(T(t)) = \frac{N_{ij}(t)}{T(t)};$$

$$\tau_{ij}^{*}(T(t)) = \frac{\tau_{ij}(t)}{T(t)};$$

$$W_{ij}^{*}(T(t)) = \frac{W_{ij}(t)}{T(t)};$$

$$W^{**}(T(t)) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} W_{ij}^{*}(T(t));$$

Искомые величины могут рассматриваться как критерии оптимизации при постановке конкретных задач.

Приведем **постановку задачи обеспечения стабильности качества обслуживания пассажиров**:

Определить оптимальные параметры системы «вокзал-пассажиропотоки» (размеры площади вокзала, компоновку и ширину его входов-выходов), минимизирующие суммарные усредненные потери

$$W^{**}(T(t)) \to \min$$

при условии независимости расписания движения поездов с целью обоснования планировочных (реконструкторских) решений.

В рамках описанной многоцелевой модели могут быть также поставлены задачи оптимизации расписания пассажирского движения, либо определения рациональных параметров и компоновки существующих и резервных входов-выходов вокзалов в условиях экстремальных пассажиропотоков и т.д.

Глава 4

АГРЕГАТНО-АВТОМАТНЫЕ МОДЕЛИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

4.1. Особенности агрегатно-автоматного моделирования сложных систем

Современные логистические системы (ЛС) характеризуются неоднородностью (разнотипностью) системных элементов, сложным характером взаимодействия между различными типами элементов, сложностью функций, выполняемых системой в целом, наличием сложно организованного управления, влиянием множества стохастических факторов внешней среды и внутри системы.

Во многих случаях элементы ЛС невозможно описать единой математической схемой, учитывающей наличие и дискретного, и непрерывного характера происходящих в системе процессов, структурную и функциональную неоднородность ЛС. Современные ЛС, относящиеся к разряду сложных систем, нуждаются при описании своих элементов в унифицированной математической схеме, позволяющей единообразно описывать все элементы системы (дискретные, непрерывные, детерминистические, стохастические). В частности, такая схема должна иметь возможность описывать двойственную природу образования и осуществления материальных потоков в моделируемой системе как процессов, протекающих в непрерывном режиме времени функционирования с дискретным вмешательством случая. Такая схема также должна иметь возможность формализации структурно-параметрических особенностей сложных логистических систем, возможность имитации систем с большим разбросом интервалов временных характеристик элементов, возможность имитации ЛС, обладающих функциональной неоднородностью.

С этих позиций нами выбирается описанный выше кусочно-линейный агрегат как математический объект, задаваемый множествами моментов времени T, входных сигналов X, управляющих сигналов Г, внутренних состояний Z, выходных сигналов Y, подмножествами $Z^{(Y)}$ и операторами переходов V', V'', U (в новое состояние) и выходов G', G''.

Агрегат функционирует как в непрерывном, так и в дискретном режиме времени. Для начального момента моделирования определяется начальное состояние агрегата.

Значение состояния агрегата определяется с помощью операторов в зависимости от реализации определенной совокупности значений входного и управляющего сигналов.

Несомненный интерес вызывает рассмотрение класса сложных систем, представляющих собой некоторые конструкции из агрегатов. Говоря в дальнейшем о системе S такого класса, мы будем иметь в виду совокупность конечного числа агрегатов C_j $(j=\overline{1,N})$ вместе со связями между ними. Таким образом, агрегат рассматривается в качестве элемента системы.

В различных математических системах одним из желательных свойств является представимость произвольной системы из заданного класса в виде некоторой структуры, состоящей из фиксированных элементарных объектов, которые можно сочетать посредством применения некоторых правил и соотношений. Нашей целью будет указание способа представления любого кусочно-линейного агрегата в виде системы, состоящей из конечного числа элементарных агрегатов.

Будем называть **элементарными агрегатами** агрегаты:

- способные хранить информацию в виде некоторого вещественного числа x (элемента счетного множества);

- обладающие в любой момент t некоторым состоянием $x(t)$ в виде неотрицательного числа, которое в отсутствие входного сигнала убывает с единичной скоростью;

- имеющие свойства мгновенного кусочно-линейного случайного преобразователя, способного воспринимать и посылать дискретные сигналы.

Существует теоретическое обоснование [9] возможности представимости любого кусочно-линейного агрегата в виде сложной системы, состоящей из совокупности трех перечисленных выше типов элементарных агрегатов: элементов памяти, элементов задержки и мгновенных кусочно-линейных случайных преобразователей.

Модель системы, построенная в виде системы взаимосвязанных агрегатов, называется **агрегативной системой**. В агрегативной системе выходные сигналы одних агрегатов отождествляются с входными или управляющими сигналами других агрегатов. Следует отметить одно важное обстоятельство, расширяющее область применения метода агрегативного моделирования, а именно: построение имитационных моделей с помощью агрегативных систем не включает определения способа задания операторов, используемых в агрегатах, поэтому может быть использован, в принципе, любой способ описания стохастического алгоритма. Для построения формального понятия агрегативной системы остается выбрать достаточно удобные способы формализации и математического описания агрегатов модели.

В частности, для этой цели нами выбирается **задание операторов**, используемых в агрегатах, или, другими словами, способ описания стохастического алгоритма в виде групп элементарных агрегатов, представляющих собой, в свою очередь, **группы взаимосвязанных вероятностных автоматов**. Каждая такая группа автоматов (назовем ее модулем) описывает конкретный агрегат, имитирующий однородные по структурно-функциональным особенностям объекты сложной ЛС. Совокупность **модулей-агрегатов является** агрегативной моделью ЛС.

Действительно, при сравнительном рассмотрении свойств вероятностных автоматов и кусочно-линейных агрегатов оказывается, что вероятностные автоматы являются по сути элементарными одномерными агрегатами, в определении которых принимаются следующие упрощения:

- дискретное время функционирования;
- скалярный характер величины состояния агрегата $z(t)$;
- нет различия между управляющими и входными сигналами;
- возможность реализации для каждого момента времени входного и выходного сигналов;
- оператор выхода G_2 - детерминированный;
- осуществление задания оператора перехода V_1 в виде условного матричного стохастического оператора;
- отсутствие необходимости применения операторов G_1, U, V_2.

Очевидным является тезис, что вероятностные автоматы выполняют функции элементарных агрегатов, поскольку их состояния обладают свойствами элементов памяти, элементов задержки и мгновенных кусочно-линейных случайных преобразователей.

Кроме того, система вероятностных автоматов справляется с функциями операторов, используемых в агрегатах, переопределяя динамику их состояний, в чем можно убедиться в процессе реализации моделей СВА.

Переход при моделировании сложных ЛС от автоматных моделей к агрегатно-автоматным моделям позволяет единообразно описывать все разнородные по структуре и динамике объекты ЛС, выделяя однородные объекты под «крышу» соответствующих агрегатов. Это дает возможность, в свою очередь, охватить моделью все разнообразие, все особенности предметной области.

Вероятностно-автоматная схема построения тел агрегатов, обладая свойством марковости, характеризуется удобством описания моделируемых сложных ЛС как систем с ограниченными внутренними связями, наглядностью отображения их структуры, стандартной формой моделирующего алгоритма, теоретической обоснованностью концептуальной базы языка формализации, обеспечивающей высокий уровень адекватности и точности получаемых результатов.

С позиции обеспечения унификации имитационных схем реальных ЛС такой подход, использующий рациональное сочетание агрегатного и автоматного описания моделей в виде систем взаимосвязанных стандартных модулей-агрегатов, расширяет класс различных по направлению исследования и степени сложности моделируемых ЛС.

Введем определение модуля-агрегата:

Определение 4.1.1. Модулем-агрегатом называется обладающий свойствами кусочно-линейного агрегата имитационный модуль

$$A(t) = \{A_1(t), A_2(t), A_3(t), \ldots, A_n(t)\},$$

в каждый момент времени t с дискретной либо случайной тактностью полностью определяющий выделенный по своим однородным структурно-функциональным характеристикам существенный объект моделируемой системы.

Определение 4.1.2. Назовем **телом модуля-агрегата** $A(t)$ совокупность $\{A_k(t)\}$ $(k = \overline{1,n})$ инициальных вероятностных автоматов Мура с детерминированными выходами, выполняющих по отношению к модулю-агрегату $A(t)$ функции элементарных агрегатов. Состояние каждого из автоматов модуля-агрегата определяет динамику одной из существенных структурно-функциональных характеристик, присущих данному модулю.

4.2. Примеры построения модулей-агрегатов в логистических моделях

4.2.1. Моделирование работы морского порта

Продемонстрируем построение модулей-агрегатов в задаче исследования логистической системы взаимодействия железнодорожного, автомобильного и водного видов транспорта в порту [36]. В понятие «взаимодействие» входят собственно поступление порожних и груженых перечисленных видов транспорта в порт, осуществление операций разгрузки-погрузки груза между транспортными партнерами и выход транспортных средств, завершивших необходимую операцию, из территории порта.

Содержательное описание предметной области включает порядок и условия перегрузки грузов через порт, определяемые договорами между представителем грузовладельца и портом, между железной дорогой и портом, между фрахтователем и судовладельцем. Обработка портом судов осуществляется в соответствии со «Сводом обычаев портов».

В соответствии с существующими договорами Сторон процесс перегрузки грузов в порту осуществляется в следующем порядке:

- складирование и хранение грузов производится на открытом складе порта;
- подача вагонов в порт и расстановка их по фронтам погрузки и выгрузки производится по уведомлениям;
- сдача и прием грузов производится в местах погрузки и выгрузки круглосуточно в соответствии с правилами;
- в порту устанавливается одновременный фронт постановки вагонов для погрузки или выгрузки в зоне каждого причала;
- каждый конкретный фронт постановки предполагает постоянное число вагонов под конкретный груз и постоянный ассортимент грузов для каждого из причалов порта (специализация причалов);
- порядок перегрузки грузов с сухопутного на водный вид транспорта и наоборот предполагает два этапа: на первом этапе происходит погрузка грузов в зоне открытого склада с разгружаемого **транспортного средства (ТС)** на склад при причале, на втором этапе – выгрузка данного ассортимента грузов со склада на требуемый вид ТС. Именно такой вариант перегрузки грузов осуществляется в большинстве случаев. Гораздо реже реализуется прямой вариант перегрузки грузов, для которых в порту отсутствуют склады для хранения.

За необеспечение "Дорогой"(железной дорогой) подачи вагонов для выполнения плана перевозок и в случае неиспользования Портом поданных вагонов , "Дорога" и Порт несут взаимную ответственность (штрафные санкции). Ответственность сторон по договору морской перевозки регламентируется такими основными документами: КТМ, чартером на перевозку, различными международными Конвенциями.

Вопросы ответственности возникают при сверхнормативном простое судна в порту. В этом случае фрахтователь оплачивает судовладельцу демередж. В случае неготовности судна к погрузке в день канцелинга фрахтователь имеет право аннулировать договор или назначить новую дату канцелинга. В случае отказа судовладельца от подачи судна фрахтователь вправе рассчитывать на компенсацию затрат на разницу фрахта. В случае отказа фрахтователя от судна судовладелец требует оплаты полной суммы мертвого фрахта.

В соответствии с обязанностями всех сторон перегрузки (грузовладельца, судовладельца, Порта, Дороги) поступление ТС, перегрузка грузов и отправление ТС из Порта должны осуществляться в соответствии с запланированным временем поступления ТС и взаимным предоставлением предварительной и точной информации о подходе ТС.

Реальное же поступление ТС в силу множества объективных и субъективных причин не всегда соответствует запланированному. И этот фактор случайности поступлений ТС будет учитываться при моделировании работы Порта.

В область рассмотрения введен учет **простоев ТС** и объектов Порта в силу следующих причин:

- ввиду форс-мажорных обстоятельств (в основном, это вариант непогоды);

- при отсутствии партнера по перегрузке груза;

- в случае поломки и ремонта партнера (или его неготовности к операции перегрузки).

В зависимости от цели, поставленной перед руководством Порта, можно сформулировать такие **постановки задач**:

1.Объем перевалки грузов не соответствует пропускной способности Порта, из-за чего возникают либо непредусмотренные простои ТС и грузов, либо простои портовой техники, складов, либо простой причалов. В этом случае ставится задача:

Определить оптимальные параметры Порта – количество и размеры причалов, емкости причальных складов, нормы разгрузки (т.е.класс грузоподъемной техники), погрузочно-разгрузочные тарифы (по типам грузов), время ремонта техники Порта, которые максимизируют прибыль Порта (ПП)

$$ПП \to \max$$

при заданном объеме перевалки грузов и ограничении среднего времени пребывания ТС в порту

$$T_{\min} < M(T) < T_{\max}$$

Результаты решения такой задачи могут быть использованы при обосновании реконструкторских решений руководства Порта.

2. Ставится задача:

Определить такую стратегию, при которой минимизируется время пребывания ТС в Порту

$$M(T) \to \min$$

при ограничении на прибыль Порта:

$$П_{\min} < ПП < П_{\max}$$

Управляемые параметры – интенсивность поступления ТС в Порт, объемы перевозок, номенклатура груза. Задача решается в случае предпочтения цели: оптимизация скорости доставки грузов и оборачиваемости ТС.

Анализ **структурно-параметрических особенностей** исследуемой системы позволяет отнести ее к разряду сложных логистических систем и применить к ее изучению метод агрегатно-автоматного моделирования.

Первое, на что следует обратить внимание, это возможность при построении формализованной схемы заменить качественные характеристики различных видов транспорта их количественными, т.е. обобщить все виды транспорта в один однородный субъект модели - транспортное средство (ТС). В этом случае отпадает необходимость раздельного моделирования динамики каждого вида ТС и возникает возможность выделить основные стандартизированные компоненты обеспечения построения имитационной модели ЛС «Взаимодействие ТС в Порту»:

- модуль-агрегат «**kn-е транспортное средство**» (k – обозначение номера вида транспорта, а n - номер “подачи” или появления ТС в Порту),

- модуль-агрегат **«knm- я емкость»**, где m – индивидуальный номер емкости под определенный тип груза n-й подачи k – го ТС. Присвоим видам транспорта k такие номера:

1– железнодорожный транспорт,

2 - автомобильный,

3– складские емкости,

4– водный транспорт,

5– причалы.

Как видим, с целью унификации различных видов емкостей, относящихся к различным видам ТС, мы ввели термин «емкость», имеющий количественные характеристики: объем, номер типа груза, порядковый номер, номер подачи.

Например, knm=134 означает “Железнодорожный состав, 3-я подача в Порт, 4-я емкость по порядку номеров емкостей в составе.

В Порт поступают ТС с “директивными предназначениями”, т.е. с заданными (запланированными) характеристиками: совокупностью назначенных операций (либо разгрузка-погрузка как сдвоенная операция, либо только разгрузка, либо только погрузка), видом ТС-партнера для данного ТС (не забывая о том, что промежуточным видом-партнером для всех подач всех ТС будет склад), типом груза, предназначенным для knm-й емкости, специализацией kn й подачи (конкретной стандартной номенклатурой грузов) и объемом knm-й емкости.

Для склада kn-я подача означает – склад (k=3) вдоль n-го причала, полностью готовый либо к разгрузке, либо к погрузке. Если в предыдущей серии операций перегрузки его партнером был ж/д вид ТС, то в последующей серии операций это будет судно. При разгрузке (погрузке) склада разгружаются (погружаются) не обязательно все его емкости, а те, которые соответствуют запросу вид-партнера (ТС). Понятие «запрос» означает перечень и объем типов грузов, обязательно входящих в специализацию и склада, и его вид-партнера, но не всегда идентичный специализации. Возможен также вариант перегрузки грузов с судна на судно через склад. Текущие партнеры (ТС – склад) начнут операцию перегрузки при идентичности специализации грузов, противоположности операций перегрузки и равенстве порядковых номеров партнеров, пребывающих в очередях ожидания начала операции (в порядке убывания времен ожидания).

Оговорим следующие упрощающие положения:

1.Перегрузка грузов по прямому варианту в порту составляет не более 5% всех перегрузок, однако этот вариант при построении модели будет учитываться.

2.В обозначении З*nm*- й складской емкости *n* – будет также и номером причала, у которого расположен склад З*n*, *m* – порядковый номер складского помещения на *kn* - м складе, предназначенного для постоянного типа груза.

3.Операция разгрузки *kn* - го склада может начаться при условии полной загруженности всех *knm* –х емкостей и при наличии вида-партнера по перегрузке.

4.Операция погрузки *kn* - го склада начнется, только когда все емкости склада будут пусты и у склада появится партнер по перегрузке.

5.Будем считать, что перегрузка грузов в Порту осуществляется такими вариантами: "ж/д ТС (автомоб.ТС) – склад – судно", "судно – склад – ж/д (автомоб.)", "судно – склад – судно".

6.По завершению всех директивно заданных операций ТС покидает Порт.

7.Класс (уровень) технического грузоподъемного средства в модели будет рассматриваться опосредствованно: через нормы разгрузки/погрузки и частоту поломок.

8.Время поступления ТС в Порт, сроки перегрузки грузов в силу различных объективных и субъективных причин будет отличаться от запланированного. Поэтому договоримся считать временные и количественные характеристики поступающих ТС в Порт для перегрузки грузов случайными факторами.

9.Процесс перегрузки грузов между ТС-партнерами осуществляется опосредствованно через склады (кроме прямого варианта) – в порядке убывания времен ожидания партнерами начала операции.

10.Погрузка-разгрузка судов в портах регулируется договорами с грузовладельцами или их представителями – экспедиторами. Между сторонами производятся расчеты по демереджу при условии представления грузовладельцем документов, подтверждающих факт аналогичных расчетов и проплат с судовладельцем.

Перечислим учитываемые в модели вопросы ответственности и взаимных проплат:

1.В Порту установлены сборы с судов (корабельный, причальный, швартовый и т.д.).

2.Все услуги, оказываемые Портом, являются платными. Основные услуги Порта – это выгрузка или погрузка грузов. Сталийное время определяется делением массы (объема) груза на норму выгрузки-погрузки. Нормы погрузки-выгрузки включают сепарирование, крепление груза, швартовые работы и т.д. Поэтому перечисленные выше работы в модели будут учтены опосредствованно, через нормы погрузки-выгрузки.

3.Стоимость простоя рабочей силы по вине судна оплачивается судном.

4.В случае несвоевременного освобождения причала или несвоевременного прибытия в Порт судовладелец несет ответственность перед Портом.

5.Грузовладелец осуществляет плату “Дороге” за использование ж/д емкостей на станции отправления.

6.Простой вагонов по вине Порта относится на ответственность Порта.

7.Необеспечение “Дорогой” подачи вагонов относится на ответственность “Дороги”.

8.При сверхнормативном простое судна в Порту фрахтователь оплачивает судовладельцу демередж.

9.Экспедитор (грузовладелец) оплачивает Порту его услуги и затраты по перегрузке грузов на основе прямых договоров.

Модельный вариант регулирования ответственности сторон: Дорога-Порт, Порт-судовладелец, Порт-грузовладелец, фрахтователь-судовладелец – будет учитывать взаимную ответственность ТС и Порта (сверхнормативные простойные времена, штрафные санкции , проплаты за перегрузочные работы и т .д.), но все проплаты будут в конечном итоге осуществляться владельцами грузов и ТС.

Введем понятие “качественные характеристики knm-й емкости”, определяющее возможное состояние емкости в каждый момент модельного времени. Очевидно, что такими состояниями будут

- разгрузка,
- простой – состояние, наступающее по таким причинам: отсутствие партнера по виду ТС, либо партнера по емкости, форс-мажор (непогода), поломка/ремонт (неготовность) партнера по емкости,
- поломка (ремонт),
- погрузка.

Будем считать, что поломка $3nm$ - й емкости означает поломку (неготовность) технического средства, обслуживающего эту емкость. Разгрузка или погрузка грузов начинается одновременно для всех емкостей ж/д (автомоб.) ТС вдоль каждого фронта постановки вагонов (автомоб. емкостей) в районе соответствующего причала.

Имитационная модель системы строится по событийной схеме в непрерывном режиме времени с дискретным вмешательством случая (наступлением узловых моментов). В промежутке между узловыми моментами состояния knm-й емкости и kn - й подачи не меняются, в то же время они могут изменяться в узловые моменты времени, в зависимости от возникающих конкретных событий в модели системы.

- **Модель строится из трех модулей-агрегатов**: модуля "knm-я емкость", описывающего все присутствующие в Порту емкости, модуля "kn-я подача", описывающего все ТС в Порту, и модуля-агрегата целей, описывающего искомые неслучайные характеристики системы.

Определим автоматы тела агрегата "knm - я емкость":

$\tau_{knm}^{(1)}(t)$- остаточное время пребывания knm-й емкости в текущем состоянии в узловой момент t,

$x_{knm}^{(1)}(t^-)$ - индикатор состояний разгрузки или простоя емкости в промежутке между двумя смежными узловыми моментами времени;

$x_{knm}^{(2)}(t^-)$- индикатор состояний разгрузки или поломки для knm-й емкости в интервале времени, примыкающем к моменту t слева;

$X(t)$- длина промежутка времени между смежными узловыми моментами;

$t_k(t)$ - остаточное время на момент t до очередной подачи k-го вида ТС в Порт;

$x_{knm}^{(3)}(t)$- индикатор наступления узлового момента непосредственно для knm-й емкости;

Введем обозначения группы автоматов, определяющих текущие качественные состояния knm-й емкости в момент t:

$a_{knm}^{(1)}(t)$- состояние "разгрузка продолжается";

$a_{knm}^{(2)}(t)$- состояние "разгрузка закончена";

$a_{knm}^{(3)}(t)$- начало поломки;

$a_{knm}^{(4)}(t)$- начало простоя;

$a_{knm}^{(5)}(t)$- простой продолжается;

$a_{knm}^{(6)}(t)$- поломка+ремонт (неготовность) продолжается;

$a_{knm}^{(7)}(t)$- погрузка продолжается;

$a_{knm}^{(8)}(t)$- простой закончен;

$a_{knm}^{(9)}(t)$- поломка закончена;

$a_{knm}^{(10)}(t)$ - погрузка закончена.

Остаточное время на момент t пребывания knm-й емкости в одном из 4-х состояний обозначим такими автоматами:

$OX^*(t)$ - остаточное время до наступления непогоды;

$C_{knm}^{(4)}(t)$ - остаточное время пребывания knm-й емкости в состоянии "поломка";

$C_{knm}^{(6)}(t)$ - остаточное время – в состоянии непогоды;

$C_{knm}^{(1)}(t)$ - остаточное время разгрузки;

$C_{knm}^{(2)}(t)$ - остаточное время погрузки;

$C_{knm}^{(3)}(t)$ - остаточное простойное время;

$C_{knm}^{(7)}(t)$ - остаточное время до наступления поломки knm-й емкости.

Очередная группа автоматов характеризует модуль-агрегат "*kn*--я подача " ТС (n-й склад):

$C_{kn}^{(3^*)}(t)$ - остаточное время до появления партнера по крайней мере по виду для kn-го ТС (или склада);

$t_{3n}^*(t)$ - остаточное время занятости n-го склада;

$t_3(t)$ - остаточное время до ближайшего завершения текущей операции одним из складов;

$t\,\text{ож}_{4n}^{(np)}(t)$ - накопленное время ожидания $4n$-м судном свободного причала для пришвартовки;

$t\,\text{ож}_{5n}(t)$ - накопленное время ожидания $5n$-м причалом пришвартовки судна;

$N_{4n}^{+}(t)$ - последовательность индивидуальных номеров судов, ожидающих на рейде освобождения причалов в порядке убывания времен ожидания;

$N_{5n}^{+}(t)$ - последовательность индивидуальных номеров причалов, ожидающих поступления судов в порядке убывания времен ожидания;

$N\Pi_{4n}^{(np)}(t)$ - номер причала-партнера, предназначенный для пришвартовки $4n$-го судна;

$N\Pi_{5n}(t)$ - номер (подача) судна-партнера для $5n$-го причала;

$y_{kn}(t)$ - индикатор ожидания kn-м ($k \neq 3$) ТС или $3n$-м складом начала операции;

$t\,\text{ож}_{kn}(t)$ - накопленное время ожидания kn-м ТС или $3n$ –м складом начала текущей операции;

$\{N_k^*(t)\}$ - последовательность индивидуальных номеров (номеров подач в Порт) k-го вида ТС или номеров складов (при соответствующих причалах), ожидающих начала операции перегрузки;

$\{NZ1_{ki}(t)\}$ - последовательность индивидуальных номеров подач k-го ТС (или номеров складов), расположенная в порядке убывания времен ожидания начала разгрузки грузов i-й специализации;

$\{NZ2_{ki}(t)\}$- последовательность индивидуальных номеров k-го ТС (или склада), расположенная в порядке убывания времен ожидания начала погрузки грузов i-й специализации;

Обозначим текущие характеристики kn-го ТС (склада), пребывающего в порту, а также характеристики knm-й емкости, предназначенной под конкретный тип груза, на момент t с помощью следующих автоматов:

$NO_{kn}(t)$ - номер текущей операции ;

$ГР_{knm}(t)$ - тип груза для knm-й емкости;

$vid_{kn}(t)$ - вид ТС – партнера по операции для kn-го ТС;

$SP_{kn}(t)$ - специализация kn-го ТС;

$NП_{kn}(t)$ - индивидуальный номер вида ТС-партнера для kn-го ТС ($3n$-го склада);

$NП^*_{knm}(t)$ - индивидуальный номер емкости-партнера для knm-й емкости;

$V_{knm}(t)$ - объем knm-й емкости (степень текущего наполнения);

$A^{(2)}_{kn}(t)$ - количество завершивших разгрузку емкостей kn-го ТС ($3n$-го склада), $0 \le A^{(2)}_{kn}(t) \le M_{kn}$, где M_{kn} - общее число емкостей kn-й подачи;

$A^{(10)}_{kn}(t)$ - количество завершивших погрузку емкостей kn-го ТС ($3n$-го склада), где $0 \le A^{(10)}_{kn}(t) \le M_{kn}$;

Введем обозначения директивных характеристик (предназначений) для ТС (складов) и их емкостей на момент t на случай операции разгрузки:

$DIRO_{kn}(Z1,t)$ - директивой предусмотрена разгрузка kn-го ТС (склада);

$DIR\ ГР_{knm}(Z1,t)$ - директивный тип груза для операции разгрузки knm-й емкости;

$DIR\ vid_{kn}(Z1,t)$ - директивный вид ТС (склада), предназначенный для разгрузки kn-го ТС (склада);

$DIRSP_{kn}(Z1,t)$ - директивная специализация kn-го ТС по операции разгрузки;

$DIRV_{knm}(Z1,t)$- директивный объем груза, предназначенный для разгрузки knm-й емкости kn –го ТС (склада);

Аналогично обозначатся директивные характеристики для операции погрузки kn-го ТС (склада):

$DIRO_{kn}(Z2,t)$- директива на погрузку kn-го ТС (склада);

$DIR\ ГР_{knm}(Z2,t)$- директива на тип груза при погрузке knm-й емкости;

$DIRvid_{kn}(Z2,t)$- директива на вид партнера при погрузке kn-го ТС (склада);

$DIRSP_{kn}(Z2,t)$- директива на специализацию грузов при погрузке kn-го ТС (склада);

$DIRV_{knm}(Z2,t)$- директивный объем knm-й емкости, предназначенной для погрузки соответствующего груза.

Введем обозначения состояний модуля-агрегата цели:

$W_k^{(s)}(t)$ - накопленный к узловому моменту t штраф k-го вида ТС или склада за сверхнормативные простои вид-партнера s-го вида , ожидающего начала операции перегрузки, в пользу s-го вида ТС. В случае $k=5 \wedge s=4$ рассчитывается накопленный штраф Порта за простои судов перед пришвартовкой в пользу Судовладельца. Если $k=4 \wedge s=5$, это будет накопленный штраф Судовладельца в пользу Порта за простои свободных причалов.

$W_{k(пол)}^{(s)}(t)$ - накопленный к моменту t штраф k-го вид-партнера из-за его поломки (неготовности), ведущей к сверхнормативному простою s-го вид-партнера, в пользу s -го вида.

$ДП(t)$ - накопленный доход Порта от перегрузочных операций, за хранение грузов на складах и за участие в перевозке грузов водным путем.

$ПП(t)$ - накопленная прибыль Порта, включающая доходы и издержки Порта.

$Hv_{kj}^{(p)}(t)$ - накопленный объем j-го типа груза, разгруженного с k-го вида ТС к моменту t.

$Hv_{kj}^{(n)}(t)$ - накопленный объем j-го типа груза, погруженного на k-й вид ТС к моменту t.

$T^{(k)}(t)$ - накопленное кризисное простойное время емкостей k-го вида в ожидании начала операции перегрузки к моменту t.

$T_{пол}^{(k)}(t)$ - накопленное простойное время емкостей k-го вида из-за поломок (неготовности) вид-партнеров к моменту t.

Введем в модель фиксатор превышения верхней границы $\Delta ож_4^{(np)}$ для накопленного времени ожидания судном $4n$ пришвартовки:

$$y_{4n}^{(W\,np)}(t_1) = \delta[tож_{4n}^{(np)}(t_1) \geq \Delta ож_4^{(np)}];$$

Аналогично записывается фиксатор превышения верхней границы $\Delta ож_5^{(np)}$ для накопленного времени ожидания причалом $5n$ пришвартовки судна:

$$y_{5n}^{(W\,np)}(t_1) = \delta[tож_{5n}^{(np)}(t_1) \geq \Delta ож_5^{(np)}];$$

Введем фиксатор превышения верхней границы $\Delta ож_k$ для накопленного времени ожидания kn-м ТС (складом) начала соответствующей операции:

$$y_{kn}^{(W)}(t_1) = \delta[tож_{kn}(t_1) \geq \Delta ож_k];$$

Введем автоматы - приближенные значения математических ожиданий искомых величин, полученные путем усреднения выше перечисленных накапливающих автоматов за промежуток времени

$$T(t_1) = T(t_0) + X(t_1)$$

от начала функционирования системы до текущего узлового момента времени $t = t_1$:

$dW_k^{(s)}(t)$ - усредненный штраф k-го вида ТС за простои вид-партнера s-го вида ТС перед началом операции перегрузки в пользу s-го вида.

$dW_{k(пол)}^{(s)}(t)$ - усредненный штраф k-го вида ТС из-за поломок (неготовности), ведущих к сверхнормативным простоям s-го вид-партнера, в пользу s-го вида.

$d\,ДП(t)$ - усредненный доход Порта от перегрузочных операций, за хранение грузов на складах, а также за участие Порта в перевозке грузов водным путем.

$dПП(t)$ - усредненная прибыль Порта, включающая доходы и издержки Порта.

$dHv_{kj}^{(p)}(t)$ - усредненный объем j-го типа груза, разгруженного с k-го вида ТС.

$dHv_k^{(p)}(t)$ - суммарный усредненный объем грузов, разгружаемых с k-го вида ТС ($k = 1 \vee 2 \vee 4$).

$dHv_{kj}^{(n)}(t)$ - усредненный объем j-го типа груза, погруженного на k-й вид ТС.

$dHv_k^{(n)}(t)$ - суммарный усредненный объем грузов, погружаемых на k-й вид ТС ($k = 1 \vee 2 \vee 4$).

$dT^{(k)}(t)$ - усредненное кризисное простойное время емкостей k-го вида в ожидании начала операции перегрузки.

$dT_{пол}^{(k)}(t)$ - усредненное простойное время емкостей k-го вида из-за поломок вид-партнеров.

Приведем сценарий моделирования, ориентирующий пользователя на понимание динамики построения модели взаимодействия транспортных средств в порту, осуществляющих операции перегрузки грузов с помощью портовой техники.

1.Определение остаточных времен пребывания knm-х емкостей в их текущих состояниях.

2.Определение очередного узлового момента t_1.

3.Определение качественных состояний knm-х емкостей на момент t_1 с помощью двоичных индикаторов.

4.Вычисление накопленных времен ожидания пришвартовки для судов, стоящих на рейде, и для свободных причалов.

5.Установление взаимнооднозначного соответствия между последовательностями номеров судов и причалов, готовых к пришвартовке, с учетом специализации причалов по типу грузов – в порядке убывания времен ожидания.

6.Вычисление накопленных времен ожидания всеми незадействованными kn-ми подачами ТС (складами) начала соответствующих операций.

7.Установление взаимнооднозначного соответствия между индивидуальными номерами последовательностей видов ТС (складов) - партнеров по переработке грузов в порядке убывания времен ожидания начала операций.

8.Зная состояния емкостей на момент t_1 и определив последовательности номеров партнеров – видов транспортных средств, готовых начать операции по перегрузке грузов, можем приступить к вычислению текущих характеристик емкостей и подач ТС (складов) на момент t_1. Они могут не совпадать с директивно заданными характеристиками по причине вмешательства управляющего воздействия некоторых оговоренных правил. Например, директивным партнером для ж/д состава по перегрузке груза является судно, но вначале груз будет с вагонов перегружен на соответствующий склад, а затем – со склада – на судно. Значит, склад будет текущим партнером в данном случае, не совпадающим с директивным партнером - судном. Кроме того, нам необязательно в каждый узловой момент без надобности привлекать директивные характеристики, несущие в общем-то излишнюю информационную нагрузку. Итак, следующим этапом сценария будет определение текущих характеристик knm -й емкости и kn-й подачи : номера операции (разгрузка или погрузка), типа груза для knm-й емкости, вида партнера для kn-й подачи, специализации kn-й подачи, объема груза knm-й емкости, индивидуального номера вида-партнера для kn-й подачи, индивидуального номера емкости – партнера для knm-й емкости, а также характеристик степени завершенности операции перегрузки для kn-й подачи.

9.Определение директивных характеристик емкостей, присутствующих в системе, и появившихся на входе системы в узловой момент. Для определения директивных характеристик последних будут использованы случайные последовательности.

10.Перевычисление очередных (на момент t_1) остаточных времен пребывания емкостей и подач в их новых состояниях.

11.Вычисление автоматов модуля-агрегата целей. Он состоит из автоматов двух видов. Автоматы первого вида осуществляют накопление искомых неслучайных характеристик процесса. К ним отнесем накопленные штрафы, доход порта, накопленные простойные времена, количество кризисных простоев, количество поломок и т.д. Этот перечень может быть продолжен в зависимости от целей, творческой направленности пользователей. Главное, что он может быть гарантированно реализован на основе информации, полученной при вычислении автоматов модулей-агрегатов «kn–я подача» и «knm-я емкость», полностью определяющих взаимодействие ТС в Порту в каждый момент модельного времени.

12.Автоматы второго вида агрегата целей усредняют искомые накопленные характеристики, их использование позволяет ставить и исследовать актуальные задачи совершенствования комбинированных перевозок, а также проводить анализ последствий принятых решений, сравнения вариантов решений по их эффективности.

Не останавливаясь на построении алгоритма модели, рассмотрим проблему выбора критерия эффективности или сходимости, состоящую в нахождении показателей, достаточно полно характеризующих затрату общественного труда. С другой стороны, проблема выбора критерия эффективности напрямую зависит от выбора ЛПР первоочередной, главной цели оптимизации. Необходимо найти такой критерий оптимальности, который бы отражал достижение этой цели с позиции основных экономических факторов: рентабельности, прибыли, дохода. В качестве такого критерия экономической эффективности можно выбрать математическое ожидание прибыли Порта, которое включает доход за выполнение операций перегрузки, за хранение грузов на складах Порта, за участие Порта в перевозке грузов водным путем, а также суммарные издержки (штрафы) с плюсом (в случае вины ТС) и с минусом (в случае вины Порта). Для второстепенных целей (с точки зрения ЛПР) вводятся ограничения, например, ограничение на объем перегружаемых грузов и на кризисные простойные времена для каждого вида ТС.

Конкретизируем следующую постановку задачи оптимизации функционирования Порта: максимизировать усредненную прибыль Порта:

$$dПП(t_1) \to \max,$$
$$dHv_k^{(p)н} \le dHv_k^{(p)}(t_1) \le dHv_k^{(p)в},$$
$$dHv_k^{(n)н} \le dHv_k^{(n)}(t_1) \le dHv_k^{(n)в};$$

В качестве оптимизируемых параметров назначаются : число причалов - N_5, усредненный объем разгрузки j-го типа груза с k-го ТС - $dHv_{kj}^{(p)}$, усредненный объем погрузки j-го типа груза на k-ое ТС - $dHv_{kj}^{(n)}$, специализация причалов (складов) - SP_{5n} , где $n \in N_5$; нормы разгрузки/погрузки - NR_{kj} / NP_{kj}, усредненные тарифы по перегрузке грузов по прямому варианту, по перегрузке и хранению грузов по непрямому варианту, по перевозке различных типов грузов - $Tar_{kj}, Tar_{kj}^*, Tar1_{4i}, Tar2_{4i}$. В качестве оптимизируемых параметров назначаются также нормы штрафов для s-виновников - ТС в пользу k-х ТС - $W_{s_k}, W_{s(пол)_k}$.

4.2.2. Моделирование морских паромных сообщений

Морские паромные сообщения занимают особое место в обеспечении непрерывного обслуживания региональных производственных комплексов и поддержании транзитных транспортно-экономических связей.

В связи с тем, что перевозки на пароме входят в работу региональных и международных транспортных коридоров, береговые паромные комплексы или порты выступают как логистические центры перевозок.

Совершенствование управления деятельностью паромных сообщений является центральной проблемой перспективного развития судоходных компаний по критерию конкурентоспособности.

Одним из успешных подходов к решению задачи обеспечения принятия оптимальных решений в процессе исследования функционирования паромных сообщений между **береговыми паромными комплексами (БПК)** является привлечение метода агрегатно-автоматного моделирования и создание динамических имитационных моделей паромных сообщений [31].

Приведем **содержательное описание** процесса паромного сообщения между двумя абстрактными БПК.

Рассмотрим БПК, предназначенный для обработки морских судов-паромов, которые осуществляют перевозку груженых и порожних вагонов, автомобилей и пассажиров между портами. В число рассматриваемых субъектов БПК входит паромный район, включающий

- паромный причал;

- железнодорожные пути, расположенные на территории паромного района порта;

- зону выполнения приемо-сдаточных операций и контрольного досмотра вагонов и грузов;

- производственно-технические и служебные здания.

Соединение паромов с железнодорожными путями обеспечивают подъемно-переходные мосты. Техническая характеристика таких мостов предусматривает выкатку-накатку на пути со средней палубы парома с заездом маневрового локомотива на переходный мост.

Железнодорожные пути, расположенные на территории терминала порта, по своему назначению подразделяются:

- для накатки-выкатки вагонов с парома;

- для производства приемо-сдаточных операций и операций контрольного досмотра вагонов и грузов.

Группы вагонов, подобранные по определенным признакам («плети»), подаются по железнодорожным путям в зону выполнения приемо-сдаточных операций и контрольного досмотра вагонов и грузов.

На БПК присутствует станция, предназначенная для погрузки-выгрузки вагонов на паромы, обслуживающие международную переправу.

В приемо-отправочном парке предпаромного парка станции выполняются работы:

- прием поездов со станции другого государства, их обработка по прибытию и отправлению на эту станцию;

- обработка передач перед отправлением, их отправление в выставочный парк и районный парк станции, прием и обработка передач по прибытию.

В сортировочном парке предпаромного парка выполняются работы:

- расформирование прибывших поездов, формирование экспортных «плетей» и передач с местными грузами, отправление их в выставочный и районный парки;

- прием передач и «плетей» из выставочного и районного парков, обработка их по прибытию, расформирование, формирование, обработка и отправление грузовых поездов в расформирование на сортировочную станцию;

- отсев задержанных вагонов с техническими и коммерческими неисправностями.

В выставочном парке выполняются следующие виды работ:

- прием передач (экспортных «плетей») из предпаромного парка, их обработка, отстой в ожидании подачи и подача на пути паромного района;

- прием импортных «плетей» с путей паромного района, их обработка, отстой в ожидании отправления и отправление в предпаромный парк;

- производство маневровой работы по выбрасыванию отдельных вагонов или групп вагонов с экспортных или импортных «плетей» на путь ремонта или отстоя задержанных вагонов;

- производство маневровой работы по выбрасыванию вагонов с ремонтного пути и пути отстоя задержанных вагонов, постановка их в передачи, отправляемые в предпаромный парк или в экспортные «плети», подаваемые на пути паромного района.

Суда-паромы перевозят вагоны между морскими портами и участвуют в выгрузке-погрузке вагонов. На комплексе паромы обрабатываются последовательно. В процессе обработки паромов выполняются следующие основные операции:

- маневровые с «плетями» вагонов;
- контрольного досмотра паромов, грузов, вагонов;
- приемо-сдаточные с грузами и вагонами;
- выкатки-накатки вагонов на паром с использованием лифта.

Маневровые операции включают:

- выкатку-накатку вагонов на пути главной палубы парома
- перестановку «плетей» с Выставочного парка на пути выполнения приемо-сдаточных операций и наоборот.

Операции контрольного досмотра и приемо-сдаточные выполняются параллельно с небольшим сдвигом во времени между их началом. Операции контрольного досмотра выполняются пограничниками, таможенниками и представителями карантинных служб, а приемо-сдаточные – приемосдатчиками от железной дороги, работниками ВОХР и тальманами порта. Вышеуказанные операции проводятся по каждой «плети» отдельно в порядке их выкатки и накатки.

Приемо-сдаточные операции заключаются в проверке состояния вагонов и грузов на открытом подвижном составе, сохранности проволочных закруток и пломб на дверях изотермических и крытых вагонов, соответствия контрольных знаков пломб на вагоне и в перевозочном документе.

Операции контрольного досмотра и приемо-сдаточные операции с «плетями» выполняются последовательно. До окончания выполнения этих операций с предыдущей «плетью», очередная «плеть» может подаваться в зону только с разрешения пограничников.

Поток вагонов, перевозимых паромами, представляет собой сумму потоков вагонов из порта 1 в порт 2 и из порта 2 в порт 1.

Технология обработки вагонов парома, следующего из порта 1 в порт 2, предусматривает:

- составление списка вагонов «плети» и согласование его по телефону с каргопланщиком;
- формирование и обработку «плети» на одном из выделенных путей Предпаромного парка;
- заезд локомотива под «плеть», проба тормозов, отправление «плети» в Выставочный парк;
- обработку «плети» по прибытии в Выставочный парк.

Перечисленные операции обработки вагонов одной «плети» выполняются последовательно.

Вагоны на порт 2, не включенные по какой-либо причине в «плеть», отсеиваются на один из путей Предпаромного парка и ожидают включения в одну из последующих «плетей».

Технология обработки вагонов парома, прибывшего из порта 2 в порт 1, после их выставки с паромного района в Выставочный парк, предусматривает:

- обработку вагонов «плети» по прибытии в Выставочный парк;
- прицепку локомотива, пробу автотормозов и следование «плети» в Предпаромный парк;
- обработку «плети» по прибытии в Предпаромный парк;
- расформирование «плети». Длинные «плети» делятся при расформировании на две части;
- простой вагонов под накоплением.

Перечисленные операции обработки вагонов одной «плети», прибывших из порта 2, выполняются последовательно.

Итак, при обработке паромов выполняются следующие операции:

- маневровые - с «плетями» вагонов;
- контрольного досмотра паромов, грузов, вагонов;
- приемо-сдаточные грузов и вагонов;
- выкатка-накатка вагонов на паром с использованием лифта.

Для определения продолжительности всех перечисленных операций из «Журнала прибытия и отправки поездов», который ведется в диспетчерской паромного района, выбираются следующие данные:

- общая продолжительность выполнения операций контрольного досмотра и приемо-сдаточных операций с **выкатываемыми** «плетями» по каждому парому;
- общее количество вагонов, прибывших на пароме из порта 2;
- общая продолжительность выполнения операций контрольного досмотра и приемо-сдаточных операций с **накатываемыми** «плетями» по каждому парому;
- общее количество вагонов, накатываемых на паром для отправления в порт 2.

Норма времени на выполнение выкатки-накатки вагонов на паром с использованием лифта определяются хронометражными наблюдениями. Как правило, на практике хронометражные наблюдения показывают, что общее время обработки парома лимитируется продолжительностью выполнения операций контрольного досмотра и приемо-сдаточных операций. Другие операции – по выкатке, накатке «плетей» парома (кроме первой по выкатке и последней по накатке), маневровые по выставке готовых «плетей» с зоны в Выставочный парк, по подаче «плетей», следующих на паром с Выставочного парка в зону и др. выполняются **параллельно** операциям контрольного досмотра и приемо-сдаточным операциям. Исходя из этого и данных графика обработки парома, составляется аналитическое выражение определения продолжительности обработки парома в зависимости от количества выкатываемых и накатываемых вагонов, необходимое при моделировании процесса паромных сообщений:

$$T_{ПАР} = T_{В(1ПЛ)} + N_{ВЫК}\Delta t^{В}_{ДОС} + N_{НАК}\Delta t^{Н}_{ДОС} + T_{Н(ПОСЛ.ПЛ.)},$$

где $T_{ПАР}$ - продолжительность обработки парома;

$T_{В(1ПЛ)}$ - время выкатки первой «плети»;

$N_{ВЫК}$ - количество прибывших в порт 1 на пароме вагонов;

$\Delta t^{В}_{ДОС}, \Delta t^{Н}_{ДОС}$ - норма времени на выполнение операции контрольного досмотра и приемо-сдаточной операции с одним выкатываемым и с одним накатываемым вагоном соответственно;

$N_{НАК}$ - количество вагонов, планируемых для накатки на паром для дальнейшего следования в порт 2;

$T_{Н(ПОСЛ.ПЛ.)}$ - время накатки последней плети.

Операции обработки поездов по прибытии на станцию и их отправления со станции являются общими для вагонопотоков, следующих на паром и с парома, а также для задержанных вагонопотоков.

Обработка вагонов на паром, следующий в порт 2 после обработки поезда по прибытии, начинается с их подготовки для формирования «плетей». Продолжительность операций подготовки этих вагонов к формированию «плетей» устанавливается хронометражными наблюдениями.

На паромном комплексе 1 задерживаются вагоны, следующие в порт 2, и поступающие паромом из порта 2 в порт 1.

Вагоны, следующие в порт 2 , могут задерживаться в Предпаромном парке по прибытии поезда, а также в паромном районе, в процессе выполнения операций контрольного досмотра и приемо-сдаточных операций.

Задержанные вагоны в Предпаромном парке выбрасываются на путь задержанных вагонов в процессе расформирования состава.

Вагоны, задержанные в паромном районе, после накатки «плети» на паром, выставляются на путь для задержанных вагонов в Выставочном парке. Вагоны задерживаются до устранения причин задержки.

Основными причинами задержки вагонов, следующих в порт 2, являются:

- по документам;
- коммерческие неисправности вагона.

Вагоны, следующие из порта 2, задерживаются в паромном районе. Основными причинами их задержек являются:

- коммерческие неисправности вагонов;
- не завершенные таможенные операции;
- по решению карантинных инспекций;
- по климатическим условиям в задержанных вагонах.

Сравнительный анализ обработки вагонов и документов на береговых паромных комплексах (БПК) проводится для сравнения продолжительности обработки вагонов и документов двух направлений следования паромов : БПК 1 $\leftrightarrow$ БПК 2 .

Для направления БПК 1 $\rightarrow$ БПК 2 сравнивается продолжительность обработки вагонов и документов от момента прибытия поезда до момента:

- накатки на паром (для вагонов);
- окончания обработки в таможне (для документов).

Для направления БПК 1 $\leftarrow$ БПК 2 сравнивается продолжительность обработки вагонов и документов от момента начала выкатки парома до момента:

- готовности «плети» к расформированию в Предпаромном парке (для вагонов);
- завершения обработки документов на «плеть».

Приведем **формализованную схему** функционирования системы двух береговых паромных комплексов. Введем следующие ограничения и договоренности:

1.Рассмотрим абстрактный непрерывный процесс доставки грузов от грузовладельцев к грузополучателям в прямом железнодорожно-паромном сообщении между двумя паромными комплексами: $БПК_i$ и $БПК_{ji}$. Структурная составляющая $БПК_i$ представлена следующими объектами:

* вход, на который поступают железнодорожные составы с груженными и порожними вагонами;

* тип груза (обозначим через q), поступающего в вагонах на вход $БПК_i$ и следующего по системе вплоть до выхода $БПК_{ji}$. Будем считать, что каждому номеру q типа груза соответствует аналогичный номер q типа

вагонов, перевозящих данный тип груза. В таком случае порожние вагоны будут иметь свой номер типа.

2. $БПК_i$ - протяженный объект, по которому продвигаются вагоны вначале в составах, затем в «плетях» по направлению от входа паромного комплекса к паромной зоне. По мере продвижения вагоны обрабатываются в техническом и коммерческом плане, одновременно обрабатывается и их документация. В процессе обработки часть вагонов задерживается по какой-либо причине. Введем обозначение вида неисправности через r. В этот список входят технические и коммерческие неисправности вагонов, документов, ошибки принимающей стороны при проверке, а также лишние вагоны, превышающие емкость парома.

3. Вагоны продвигаются по $БПК_i$, теряя задержанные, в то же время к ним присоединяются вагоны, прошедшие ремонт и (или) исправление в сопроводительной документации.

4. Обработанные вагоны, уже находящиеся в «плетях», готовые к накатке на паром, ожидают поступления парома. В наявности возможна и противоположная ситуация – паром ожидает поступления готовых «плетей».

5. Паром, завершив операции выкатки и накатки, операции с документацией, продвигается по морю вплоть до поступления на $БПК_{ji}$ - й берег.

6. При поступлении на ji-й берег паром подвергается обработке, а выгруженные вагоны продвигаются по $БПК_{ji}$ и обрабатываются в техническом и коммерческом плане с одновременной обработкой сопровождающей документации на них.

7. На $БПК_{ji}$ также происходит задержание вагонов, прибывших с i-го берега, в соответствии с введенными обозначениями - так называемое qr-е задержание (задержание вагонов q- го типа по r- той причине неисправности).

8. К поступившим с парома вагонам присоединяются вагоны, готовые начать обработку после исправления неисправностей. По завершении обработки на $БПК_{ji}$ вагоны готовы к экспортному или транзитному железнодорожному сообщению, т.е. к поступлению к соответствующим грузополучателям.

Для исследования рассматриваемой системы предлагается метод агрегатно-автоматного моделирования. Обозначения модулей-агрегатов, имитирующих основные (существенные на взгляд исследователя) объекты системы, и автоматов, определяющих их структурно-функциональные особенности, вводятся после разработки **сценария функционирования паромной линии между двумя береговыми паромными комплексами**, в соответствии с которым строится имитационная модель.

Прежде всего, следует отметить, что как сценарий, так и алгоритм модели не отвечают на вопрос: "Где отслеживаемый объект и что с ним происходит ? ". Их ответ условен: "В зависимости от местонахождения отслеживаемого объекта и его качественного состояния в предыдущий узловой момент t_0 в следующий узловой момент t_1 этот объект будет в соответствующем месте и в соответствующем состоянии (определяющем вид статики или динамики) ".

Очевидно, что моделирование материальных потоков грузов в вагонах по паромной переправе в обоих ее направлениях будет осуществляться в такой последовательности:

1. Определение очередного узлового момента, определяемого минимальным остаточным временем среди всех остаточных времен пребывания объектов модели в текущих состояниях. Название объектов будет определено в процессе описания модулей-агрегатов модели.
2. Расчет двоичных ситуационных индикаторов, расшифровывающих возможные качественные состояния объектов модели в очередной узловой момент модельного времени.
3. Определение случайного количества вагонов, поступивших на входы каждого БПК в очередной узловой момент, а также случайного отрезка времени до их следующего поступления.
4. Определение количества обрабатываемых в сторону парома вагонов в «плетях» для каждого БПК. Расчет проводится для случаев продолжающейся обработки, завершившейся обработки и ожидания «плетьми» накатки, а также для случая поступления составов на входы БПК. В последнем случае новое количество обрабатываемых вагонов будет складываться из вагонов, поступивших на вход, а также поступивших в обработку после завершения устранения неисправностей – и без вагонов, поступивших на вход и задержанных на БПК по различным причинам неисправностей (технических, коммерческих, документальных, лишних).
5. Расчет остаточного времени обработки «плетей» в сторону парома для обоих БПК.
6. Вычисление количества накатанных и выкатанных вагонов для случая поступления парома к любому из БПК.

7. Расчет времени возможного ожидания паромом на каждом из БПК (для случая подхода парома к причалу) поступления готовых к накатке «плетей» для каждого БПК. Общий расчет времени пребывания парома на БПК в зависимости от времени ожидания начала накатки-выкатки и от количества накатанных и выкатанных вагонов.
8. Определение количества обрабатываемых на обоих БПК вагонов, направляемых в сторону от парома, с учетом поступивших в обработку завершивших устранение неисправностей вагонов и с вычетом задержанных вагонов из числа выкатанных с парома.
9. Определение остаточных времен обработки вагонов в «плетях», выкатанных с парома – для каждого БПК.
10. Определение накопления времен ожидания «плетьми» запаздывающего парома, а также накопленного времени ожидания паромом задерживающихся «плетей» (для каждого парома).
11. Выявление направления движения парома в текущий узловой момент в зависимости от его местонахождения в предыдущий узловой момент.
12. Определение остаточного времени до прибытия парома (с учетом обработок и задержек) к каждому из БПК.
13. Определение остаточных времен устранения неисправностей r-го вида в вагонах q-го типа на обоих БПК и в обоих направлениях движения вагонов: от парома и к парому.
14. Отслеживание и актуализация последовательностей номеров задержанных партий вагонов в зависимости от времени их поступления в задержание и с учетом момента возвращения вновь в обработку – для обоих БПК и обоих направлений продвижения вагонов.
15. Расчет количества обрабатываемых на обоих БПК в обе стороны вагонов q-го типа.
16. Отслеживание времен пребывания вагонов q-го типа на обоих БПК и на пароме с учетом времени их обработки и устранения неисправностей. Расчет на текущий узловой момент остаточного времени до поступления на железную дорогу назначения – для обоих направлений движения грузов. Сравнение остаточного времени их обработки на паромной переправе с остаточным резервом запланированного времени доставки груза к получателю.

17. Расчет оптимизационного блока.

Особенности структуры и функционирования описанной выше логистической системы сообщений между береговыми паромными комплексами диктуют применение агрегатно-автоматного подхода в процессе создания ее модели.

Выделим **модули-агрегаты**, имитирующие структурно-функциональные либо качественные особенности однородных субъектов системы:

- модуль-агрегат **«i – й БПК»** ;

- модуль-агрегат **«qi – й тип вагонов»** (имеются в виду вагоны, поступающие на $БПК_i$ как со стороны железной дороги в составах, так и со стороны j_i - го берега паромом, и предназначенные под q - й тип грузов);

- модуль-агрегат **«qri– й вид неисправности»** (r – й вид неисправности, обнаруживаемый и устраняемый в вагонах q – го типа на i - м береговом паромном комплексе).

В модели также присутствует **модуль-агрегат целей,** предназначенный для нахождения искомых неслучайных характеристик системы.

Введем обозначения автоматов, определяющих состояние модуля-агрегата «i - БПК» в текущий узловой момент t_1:

$y_{01i}^{(П1)}(t_1)$ - индикатор поступления 1–го состава на $БПК_i$ в момент t_1;

$y_{12i}^{(Пл)}(t_1)$ - индикатор завершения обработки «плетей» на $БПК_i$ в направлении парома;

$y_{21i}^{(Пар)}(t_1)$ - индикатор подхода парома к $БПК_i$ в момент t_1;

$y_{2i}^{(Пар)}(t_1)$ - индикатор завершения обработки парома на $БПК_i$;

$y_{10i}^{(Пл)}(t_1)$ - индикатор завершения обработки «плетей» на $БПК_i$ на момент t_1, выгруженных ранее с парома;

$m_i(t_1)$ - номер партии вагонов, задержанных на $БПК_i$, после завершения устранения неисправности в дальнейшем отправляемых на паром;

$y_{12i}^{(Ож)}(t_0)$ - индикатор, фиксирующий факт ожидания с момента времени t_0 начала накатки на паром «плетей», завершившим обработку на $БПК_i$ (индикатор ожидания задерживающегося парома);

$y_{21i}^{(Ож)}(t_0)$ - индикатор, фиксирующий факт ожидания с момента t_0 паромом, прибывшим на $БПК_i$, начала обработки (индикатор ожидания паромом задерживающихся «плетей»);

$y_{2i}^{(Пар)0}(t_1)$ - индикатор начала обработки парома в момент t_1 на $БПК_i$;

$y_{21i}^{(Пл)}(t_1)$ - индикатор начала обработки на момент t_1 «плетей», выгруженных с парома, прибывшего на $БПК_i$, после завершения его обработки;

$S_{01\,i}(t_1)$ - количество вагонов, поступивших в очередной порции составов на $БПК_i$, начиная с момента t_1;

$C_{01i}^{(П1)}(t_1)$ - остаточное время на момент t_1 до поступления очередной порции составов по железной дороге на $БПК_i$;

$M_i(t_1)$ - номер партии вагонов, задержанных в момент t_1 при обработке на $БПК_i$ (договоримся отнести момент начала задержки к моменту поступления вагонов на $БПК_i$);

$n_{1i}^{(Пл)}(t_1)$ - количество обрабатываемых на момент t_1 вагонов в «плетях» на $БПК_i$;

$T_{12i}^{(Пл)}[n_{1i}^{(Пл)}(t_1)]$ - общее нормативное время обработки вагонов на $БПК_i$, зависящее от количества обрабатываемых вагонов;

$C_{12i}^{(Пл)}(t_1)$ - остаточное время обработки «плетей» на $БПК_i$ к моменту t_1;

$N_{12i}^{(Нак)}(t_1)$ - если в момент t_1 началась обработка парома, то данное обозначение относится к количеству накатываемых вагонов;

$N_{21i}^{(Вык)}(t_1)$ - количество выкатываемых с парома вагонов, начиная с момента начала обработки парома - t_1;

$T_{2i}^{(Пар)*}(t_1)$ - время обработки парома, если он начал обрабатываться в момент t_1;

$C_{2i}^{(Пар)}(t_1)$ - остаточное время обработки парома;

$C_{21i}^{(Пл)}(t_1)$ - остаточное время обработки «плетей», выкатанных с парома;

$n_{0i}^{(Пл)}(t_1)$ - количество обрабатываемых на $БПК_i$ вагонов, выкатанных с парома на момент t_1;

$D_{21i}^{(Ож)}(t_1)$ - накопленное время ожидания паромом начала обработки на $БПК_i$ (время ожидания готовности запаздывающих «плетей» к накатке на паром);

$D_{12i}^{(Ож)}(t_1)$ - накопленное время очередного сверхнормативного простоя «плетей» в ожидании подхода парома к $БПК_i$ и последующей накатки;

$S_{01i}^{*}(t_n)$ - количество вагонов, которые поступят на вход $БПК_i$ в последующий локальный узловой момент $t_n \geq t_1$, рассчитываемое по процессной схеме;

$n_{1i}^{(Пл)*}(t_n)$ - расчетное количество вагонов, которые будут обрабатываться по пути от входа $БПК_i$ до пристани;

$T_{12i}^{(Пл)}(n_{1i}^{(Пл)*}(t_n))$ - нормативное время обработки расчетного (не реального) количества вагонов в «плетях» на $БПК_i$;

$RD_{21i}^{(Пар)}(t_1)$ - время ожидания паромом подхода «плетей», рассчитываемое для случаев: запаздывания «плетей», пребывающих в обработке; ввиду отсутствия «плетей» на момент t_1 на входе вообще времени ожидания поступления очередной порции составов на вход (в момент t_n) плюс времени обработки поступивших на вход вагонов, присоединения к ним вагонов, завершивших устранение неисправностей, и также обрабатываемых - вплоть до готовности сформированных «плетей» к накатке;

$RP_{21i}^{(Пар)}(t_1)$ - общее расчетное время пребывания парома на $БПК_i$ от момента t_1;

$N_2^{(Дв)}(t_1)$- направление движения парома на момент t_1 ($i \to j_i$ или $j_i \to i$);

$C_{21i}^{(Пар)}(t_1)$- остаточное время на момент t_1 до прибытия парома к $БПК_i$ в случае направления движения в i- ю сторону, начиная от швартовки к j_i- му берегу.

Определим совокупность автоматов, формирующих тело модуля-агрегата «qi – й тип вагонов» (q - й тип вагонов, обрабатываемых в обоих направлениях на i - м береговом паромном комплексе):

$n_{1i}^{(Пл)q}(t_1)$- количество обрабатываемых на момент t_1 вагонов q - го типа на $БПК_i$ в сторону парома;

$N_{12i}^{(Нак)q}(t_1)$- количество накатанных на паром вагонов q- го типа при условии начала обработки парома на $БПК_i$ в момент t_1;

$N_{12i}^{(Вык)q}(t_1)$- количество выкатанных вагонов q - го типа с парома, начавшего обрабатываться на $БПК_i$ в момент t_1;

$n_{0i}^{(Пл)q}(t_1)$- количество вагонов q - го типа, обрабатываемых на $БПК_i$ в направлении i-й железной дороги (выкатанных в «плетях» с парома);

Ведем символы, обозначающие смену качественных состояний qi- х вагонов в направлении $i \to j_i$ или, другими словами, последовательность этапов прохождения паромной переправы вагонами q- го типа, начиная от поступления на вход i-го БПК и начала обработки до завершения обработки на j_i-м БПК:

k_0 - этап, соответствующий входу;

k_1 - обработка на $БПК_i$;

k_2 - ожидание группы вагонов, формирующих «плеть», поступления парома на i - й БПК;

k_3 - время обработки парома, накатка qi - х вагонов;

k_4 - время движения парома между причалами;

k_5 - ожидание «плетей» на $БПК_{j_i}$;

k_6 - обработка парома, выкатка qi - х вагонов;

k_7 - обработка прибывших вагонов на $БПК_{j_i}$ (в сторону получателя).

Приведем обозначения состояний автоматов остаточных времен возможного пребывания qi - х вагонов в качественных состояниях, соответствующих последовательному прохождению этапов $k_0 - k_7$ паромной переправы в направлении $i \to j_i$:

$C_i^{(q)}(k_0(t_1))$ - остаточное время на момент t_1 до поступления qi - х вагонов на вход $БПК_i$;

$C_i^{(q)}(k_1(t_1))$ - остаточное время обработки поступивших вагонов q - го типа на $БПК_i$ вплоть до формирования «плетей»;

$C_i^{(q)}(k_2(t_1))$ - остаточное время ожидания «плетьми» поступления парома на $БПК_i$;

$C_i^{(q)}(k_3(t_1))$ - остаточное время обработки парома на i - м берегу вплоть до завершения накатки qi - х вагонов;

$C_i^{(q)}(k_4(t_1))$ - остаточное время движения парома вплоть до поступления на j_i - й берег;

$C_i^{(q)}(k_5(t_1))$ - остаточное время ожидания прибывшими на пароме вагонами начала обработки на $БПК_{j_i}$ (задержка возникает из-за запаздывания обрабатываемых «плетей» на j_i - м берегу);

$C_i^{(q)}(k_6(t_1))$ - остаточное время до завершения обработки парома на $БПК_{j_i}$;

$C_i^{(q)}(k_7(t_1))$ - остаточное время до завершения обработки выкатанных с парома qi - х вагонов на j_i - м берегу.

Определим автоматы, перевычисляющие состояние модуля-агрегата «qri - й вид неисправности»:

$y_{12i}^{(qr)}(m_i(t_1))$ - индикатор завершения на момент t_1 устранения неисправности r - го вида в вагонах с грузом q – го типа, следующих в сторону парома, состоящих в $m_i(t_1)$ - й партии задержанных вагонов;

$y_{21i}^{(qr)}(m_{j_i}(t_1))$ - индикатор завершения устранения qri - го вида неисправности в момент t_1 в вагонах, поступивших с парома и состоящих в $m_{j_i}(t_1)$ - й партии задержанных;

$y_{12i}^{(qr)0}(M_i(t_1))$ - индикатор начала на момент t_1 задержания вагонов q – го типа по r - й причине неисправности, следующих в сторону парома и вошедших в партию задержанных под номером $M_i(t_1)$;

$y_{21i}^{(qr)0}(M_{j_i}(t_1))$ - индикатор начала задержания qr - х неисправных вагонов, поступивших с парома и вошедших в партию задержанных под номером $M_{j_i}(t_1)$;

$N_{12i}^{(qr)}(M_i(t_1))$ - количество задержанных в момент t_1 qr - х неисправных вагонов, поступивших на вход $БПК_i$ по железной дороге и вошедших в партию задержанных под номером $M_i(t_1)$;

$N_{21i}^{(qr)}(M_{j_i}(t_1))$ - количество задержанных в момент t_1 вагонов с грузом q - го типа по r - й причине неисправности, выкатанных с парома на i - й берег и вошедших в $M_{j_i}(t_1)$ - ю партию задержанных вагонов;

$C_{12i}^{(qr)}(m_i(t_1))$ - остаточное на момент t_1 время до завершения устранения неисправности r - го вида в вагонах q - го типа в $m_i(t_1)$ - й партии задержанных на $БПК_i$ вагонов, следующих в сторону парома;

$C_{21i}^{(qr)}(m_{j_i}(t_1))$ - остаточное время до завершения устранения qr - й неисправности в вагонах, выкатанных с парома на i - й берег и входящих в $m_{j_i}(t_1))$ - ю партию задержанных вагонов.

Модуль-агрегат целей определен автоматами накопления и усреднения значений искомых неслучайных характеристик системы.

Введем состояния автоматов усреднения и расшифруем их назначения:

$dS_{01i}^{(q)+}(T(t_1))$ - усредненное за период моделирования $T(t_1)$ количество вагонов q - го типа, поступающих на вход $БПК_i$;

$dD_{12i}^{(Ож)+}(T(t_1))$ - усредненное время простоя вагонов в «плетях» в ожидании накатки на паром;

$dD_{12i}^{(Ож)q+}(T(t_1))$ - усредненное количество вагонов q - го типа, ожидающих начала накатки;

$dD_{21i}^{(Ож)+}(T(t_1))$ - усредненное время сверхнормативного простоя парома на причале $БПК_i$ в ожидании подхода готовых к накатке «плетей»;

$dn_{0i}^{(Вык)q+}(T(t_1))$ - усредненное количество вагонов q - го типа, ожидающих на пароме начала выкатки на $БПК_i$;

$dD_{12i}^{(Здр)qr+}(T(t_1))$ - усредненное время задержки на $БПК_i$ вагонов q - го типа из-за неисправности r - го вида, отправляемых в дальнейшем после ликвидации неисправности на паром;

$dn_{1i}^{(Здр)qr+}(T(t_1))$ - усредненное количество qr - х задержаний вагонов на $БПК_i$, отправляемых в сторону парома;

$dD_{21i}^{(Здр)qr+}(T(t_1))$ - усредненное время задержаний на $БПК_i$ q - х вагонов из-за неисправностей r - го вида, выкатанных с парома;

$dn_{0i}^{(Здр)qr+}(T(t_1))$ - усредненное количество qr - х задержаний на $БПК_i$ вагонов, выкатанных с парома;

$dC_i^{(q)}(k_7(T(t_1)))$ - усредненное количество опозданий вагонов q - го типа (вагонов с q - м типом груза, вагонов q - го грузовладельца) при поступлении на выход системы - на $БПК_{j_i}$ (в случае направления паромной переправы: «$i \to j_i$»);

$dS_{10j_i}^{(q)+}(T(t_1))$ - усредненное количество вагонов q - го типа, завершивших обработку на выходе системы и направляемых в j_i - е государство или транзитом через него;

$dD_{21i}^{(Пар)+}(T(t_1))$ - усредненное время обработки парома на $БПК_i$.

В построении модели участвуют случайные величины:

$\xi S_{01i}(t_1)$ - если в момент t_1 на вход $БПК_i$ началось поступление очередной партии составов, то данная случайная величина определяет общее количество вагонов в данной партии составов;

$\xi C_{01i}^{(П1)}(t_1)$ - если в текущий момент модельного времени на вход паромной переправы «$i \to j_i$» началось поступление очередной партии железнодорожных составов, то следующее поступление составов на вход системы будет осуществлено через промежуток времени $\xi C_{01i}^{(П1)}(t_1)$;

$\xi K_{01i}^{(q)}\%(t_1)$ - случайный процент очередного поступления на вход системы вагонов с грузом q - го типа;

$\xi \mu_{01i}^{(qr)}\%(t_1)$ - случайный процент неполадок r - го вида, возникших при обработке вагонов q - го типа, поступивших ранее на вход системы;

$\xi \mu_{21i}^{(qr)} \%(t_1)$ - случайный процент неполадок qr - го вида, возникших при выкатке с парома вагонов и их дальнейшей обработке.

В модели используется ряд постоянных величин:

Q - общее количество типов грузов, провозимых через паромную переправу;

R - общее количество видов неисправностей в отношении вагонов и документов;

$T_{Вык}^{(Пл1)}, T_{Нак}^{(Пл4)}$ - нормативное время выкатки первой и накатки последней «плети» соответственно, полученное в результате хронометрирования;

$\Delta t_{Дос}^{(H)}, \Delta t_{Дос}^{(B)}$ - нормативное время выполнения операций контрольного досмотра и приемо-сдаточных операций с одним накатываемым и одним выкатываемым вагоном соответственно;

$\Theta_{i\,j_i}^{(q)}$ - запланированное время доставки q - го типа груза (вагонов q - го типа), начиная от момента поступления груза в составах на вход $БПК_i$ и завершая моментом окончания обработки данного типа груза на $БПК_{j_i}$;

$V^{(Пар)}$ - емкость парома или максимальное количество вагонов, вмещаемое в паром;

L_{qi} - общее расстояние, проходимое грузом q - го типа из i - й страны в j_i - ю, начиная от грузоотправителя до выгрузки грузополучателем;

$L_{0qi}, L_2, L_{q\,j_i 0}$ - расстояния, проходимые грузом q - го типа по железной дороге отправления, паромом по морю, по железной дороге назначения соответственно;

$\Theta_{i\,j_i}$ - время оборота парома без учета времени пребывания на обоих причалах;

$E_{qi}^{(Пр)}$ - расходы, связанные с производством, погрузкой, доставкой на вход $БПК_i$ одного вагона q - го типа;

$E_{qi}^{(Ож)}$ - норма издержек грузовладельца груза q - го типа за простой в единицу времени одного вагона на $БПК_i$ (из-за отсутствия парома), или на пароме (из-за отсутствия «плетей» накатки);

$E_{Суд}^{(Ож)}$ - норма штрафа, выплачиваемого судоходной компанией грузовладельцу из-за опоздания парома;

$E^{(Ож)}_{(ж-д)\ j_i}$ - при направлении движения $i \to j_i$ - это норма штрафа, выплачиваемого железной дорогой назначения грузовладельцу из-за опоздания «плетей» к накатке на j_i - м берегу;

$E^{(qr)}_i$ - норма издержек грузоотправителя на устранение неисправности одного вагона q - го типа по r - й причине в единицу времени;

$E^{(Штр)}_{Гр_i}$ - штрафные санкции в отношении грузоотправителя в пользу грузополучателя за одно опоздание при доставке груза с i - го берега на j_i - й берег;

$E_{0qi}, E_{2qi}, E_{0qj_i}$ - нормы тарифов за продвижение одного вагона q - го типа на расстояние 1 км по трем отрезкам пути:

- от станции погрузки до входа на $БПК_i$,
- от $БПК_i$ по морю до $БПК_{j_i}$,
- от $БПК_{j_i}$ до железнодорожной станции назначения соответственно;

$E^{(Обр)}_{qi}, E^{(Обр)}_{qj_i}$ - нормы тарифов за обработку одного вагона q - го типа и комплекта документов к нему при прохождении вагона по $БПК_i$, а затем по $БПК_{j_i}$.

Следует отметить, что построение выше описанной модели осуществляется в направлении «$БПК_i \to БПК_{j_i}$». Аналогично решается зеркальная задача в направлении «$БПК_{j_i} \to БПК_i$». В этом случае индексы «i» и «j_i», встречающиеся в обозначениях состояний модулей-агрегатов, автоматов, двоичных индикаторов, случайных величин и констант, меняются местами.

Модель может быть использована при решении задачи минимизации усредненных приведенных расходов и издержек грузоотправителей. Приведем построение соответствующей функции цели, учитывающей процессы изготовления грузов, погрузки грузов в вагоны, продвижения вагонов с грузами, в том числе в пределах паромной переправы, где происходят обработка и устранение неисправностей в вагонах и документах, обработка парома (накатка-выкатка «плетей»), поступление грузов на противоположном берегу к грузополучателю.

Введем функцию цели:

$$C_i^* = \sum_q dE_i^{(q)+}(T(t_1)) \to \min$$

Расшифруем вид $dE_i^{Iq)+}(T(t_1))$ усредненных суммарных приведенных расходов грузоотправителя при отправлении q - го типа груза в направлении $i \to j_i$, полученных усреднением за период моделирования $T(t_1)$:

$$
\begin{aligned}
& dE_i^{(q)+}(T(t_1)) = dS_{01i}^{(q)+}(T(t_1)) \times E^{(Пр)q} + \\
& + dD_{12i}^{(Ож)+}(T(t_1)) \times (E_{qi}^{(Ож)} - E_{Суд}^{(Ож)}) \times dn_{1i}^{(Ож)q+}(T(t_1)) + \\
& + dD_{21j_i}^{(Ож)+}(T(t_1)) \times dn_{0j_i}^{(Вык)q+}(T(t_1)) \times (E_{qi}^{(Ож)} - E_{(Ж-д)j_i}^{(Ож)}) + \\
& + \sum_r dD_{12i}^{(Здр)qr+}(T(t_1)) \times dn_{1i}^{(Здр)qr+}(T(t_1)) \times E_i^{(qr)} + \\
& + \sum_r dD_{21i}^{(Здр)qr+}(T(t_1)) \times dn_{0j_i}^{(Здр)qr+}(T(t_1)) \times E_{j_i}^{(qr)} + \\
& + dC_i^{(q)+}(k_7(T(t_1))) \times E_{qi}^{(Штр)} + \\
& + dS_{10j_i}^{(q)+}(T(t_1)) \times (L_{0qi} \times E_{0qi} + L_2 \times E_{2qi} + L_{0qj_i} \times E_{0qj_i} + \\
& + dS_{10j_i}^{(q)+}(T(t_1)) \times (E_{qi}^{(Обр)} - E_{qj_i}^{(Обр)}) + dD_{21i}^{(Пар)+}(T(t_1)) \times E_{21i}^{(Пар)} + \\
& + dD_{21j_i}^{(Пар)+}(T(t_1)) \times E_{21j_i}^{(Пар)} + \Delta t_{проч}.
\end{aligned}
$$

При реализации процедуры оптимизации функции цели обязательно должно выполняться условие ограничения снизу усредненной прибыли субъектов паромной переправы как гарантии соблюдения их интересов при минимизации издержек грузовладельцев.

Выбор процедуры оптимизации всегда остается за ЛПР. В частном случае такой процедурой может быть сравнительный анализ результатов варьирования поля управляемых параметров, например, когда речь идет об изменении количества паромов, введении новой линии паромной переправы, об изменении графика поступления грузов и т.д.

В задачу данного пункта входило лишь описание создания модулей-агрегатов, образующих базовые агрегатно-автоматные модели логистических систем.

Разработке алгоритма агрегатно-автоматной модели формирования и продвижения материальных потоков к конечному потребителю и порождаемых соответствующих информационных потоков посвящен следующий пункт.

4.3. Модель контейнерных перевозок

Возможности метода агрегатно-автоматного моделирования весьма эффективно раскрываются при описании логистических систем со сложной конфигурацией маршрутов материальных потоков, с широким разнообразием качествообразующих характеристик материальных потоков различных видов и направлений, с наличием случайных воздействий и возникновением проблемных ситуаций. Метод позволяет описывать динамику материальных потоков с помощью кусочно-линейных агрегатов, расчленяющих материальные потоки и выделяющих из них однородные по своим структурно-функциональным особенностям потоки. При этом тело каждого из агрегатов строится с помощью коллектива автоматов, формирующего информационные потоки сопровождения соответствующих материальных потоков. Следует отметить существенную особенность построения тел агрегатов подобного рода, состоящую в привлечении автоматов, описывающих динамику состояний различных характеристик агрегатов, а также автоматов, являющихся последовательностями, определяющими состояния определенных совокупностей однородных переменных модели.

Приведем агрегатно-автоматную модель функционирования системы перевозок грузов в универсальных контейнерах различного вида в международном железнодорожном сообщении. Такая модель может быть использована, например, в задаче исследования взаимодействия выступающих партнерами в системе международных контейнерных перевозок железнодорожных администраций собственниц и пользовательниц универсальных контейнеров.

Под **железнодорожной администрацией-собственницей** нами понимается железнодорожная транспортная система любой из стран, участвующих в совместном процессе контейнерных перевозок, обладающая имуществом (терминалами, платформами, парком контейнеров и вагонов и т.д.). **Железнодорожной администрацией-пользовательницей** является транзитная или конечная транспортная система. В составе администраций-собственниц имеются структурные подразделения, являющиеся государственными центрами транспортного сервиса (ГЦТС), в сферу деятельности которых входят организация перевозок грузов в универсальных 20 – и 40 – футовых контейнерах, рефрижераторных контейнерах и экспедирование любых грузов железнодорожным и другими видами транспорта. Центры ГЦТС располагают надежными и стабильными договорными отношениями с ведущими экспедиторскими организациями стран-партнеров. Спектр услуг ГЦТС предполагает:

- экспедирование грузов;
- перевозка грузов в контейнерах;
- слежение за грузом и оперативное устранение задержек;
- организация транзитных перевозок;
- разработка маршрутов и условий перевозки;
- расчет стоимости;
- комплексная обработка грузов на базах поступления и базах назначения грузов.

Таким образом, ГЦТС, являясь единственным структурным подразделением соответствующей железнодорожной администрации, выполняет функции субъекта хозяйственной деятельности в качестве базового терминала страны, принимающего и реализующего заявки от заказчиков на обслуживание по контейнерной перевозке грузов.

При поступлении конкретной заявки между ГЦТС и заказчиком устанавливается договор о направлении порожних контейнеров на согласованную сторонами договора станцию, находящуюся на территории страны-отправительницы.

При прохождении контейнеров (и порожних, и с грузом) через железные дороги страны-отправительницы, транзитных стран и страны назначения фиксируется прохождение контейнеров только через межгосударственные станции передачи, соответствующие конкретным маршрутам следования контейнеров.

Заказчик совместно с администрацией ГЦТС выбирает маршрут следования контейнерного состава по критериям кратчайшего расстояния, минимальной стоимости, или по желанию заказчика.

В процессе обслуживания заявок осуществляются следующие денежные взаиморасчеты:

- в стране отправления грузовладелец платит тариф за перевозку железной дороге отправления;

- в стране – транзитере грузовладелец платит через экспедитора за транзит контейнеров;

- в стране назначения получатель платит тариф за погрузочно-разгрузочные работы, за подачу-уборку контейнеров, за пользование контейнерами железной дороге назначения.

К управляемым параметрам моделируемой системы контейнерных перевозок можно отнести:

* количество контейнеров, принадлежащих каждой из баз - ГЦТС;

* выбор пути следования;

* нормативы тарифов расходов грузовладельцев, администраций собственниц и пользовательниц, а также штрафов как в процессе обслуживания заявок, так и при аварийных простоях железнодорожного

транспорта, сверхнормативных простоях заявок или транспорта в ожидании начала доставки груза.

Целью задачи моделирования процесса контейнерных перевозок в международном железнодорожном сообщении является определение стратегии (поля управляемых параметров), при которой максимизируется прибыль любой железнодорожной администрации-собственницы, выбираемой в качестве субъекта моделирования, и, соответственно, прибыль принадлежащего данной транспортной системе структурного подразделения (базы) - ГЦТС.

Модель системы контейнерных перевозок можно строить по типу контейнерной либо вагонной модели. Нами выбирается контейнерный тип модели.

Приведем **формализующие договоренности и упрощения,** позволяющие выделить существенные особенности имитируемой системы. Будем говорить о моделировании функционирования базы под индивидуальным номером m, являющейся структурным подразделением m - й железнодорожной администрации-собственницы в m - й стране.

Целью моделирования функционирования m - й базы является рассмотрение взаимодействия базы с заказчиками и возникновения проблемных ситуаций.

Будем считать поступление заявок на базу случайным по времени поступления и по заданным так называемым директивным специализациям заявок - по совокупности следующих директивных характеристик:

- страна отправления, терминал отправления;
- страна назначения, терминал назначения;
- объем груза заявки;
- требуемый вид контейнеров.

На m - й базе $(m \in \{m_j\},\ j = \overline{1,J})$ возможны наступления следующих проблемных ситуаций:

- простой контейнеров различных видов в ожидании заявок;

- простой заявок в очереди (в порядке поступления) в ожидании появления на базе необходимого количества контейнеров необходимого вида. Выражение «необходимое количество» означает в данном контексте, что это количество должны составлять все контейнеры необходимого вида с резервным временем до начала планового ремонта 2 и осмотра, превышающим время оборота заявки. Временем оборота заявки будем считать время от начала обслуживания заявки до поступления обслуживших ее контейнеров в порожнем состоянии назад на базу-собственницу.

В каждый моделируемый момент времени t на m - й базе могут начаться действия:

- поступление заявок,
- начало обслуживания первоочередной заявки,
- поступление порожних контейнеров.

Договоримся о том, что номер заявки не выбывает из рассмотрения в модели после доставки соответствующего груза получателю, а присутствует в алгоритме вплоть до поступления порожних контейнеров на базу.

Договоримся, что в каждый момент времени на базу может поступить только одна заявка.

Будем считать моменты начала планового осмотра и ремонта (ремонта2) контейнеров, а также моменты возникновения неисправностей (поломок) контейнеров на маршруте (ремонта1) моментами начала их ремонта.

Сформируем **сценарий построения модели.**

1.Определение директивных характеристик заявок, обслуживаемых m - й базой для случаев поступления очередной заявки на базу, ожидающих начала обслуживания на базе заявок, заявок на маршрутах.

2.Вычисление двоичных индикаторов, фиксирующих места нахождения и состояния контейнеров и заявок, обслуживаемых m - й базой.

3.Выбор номера оптимального маршрута заявки в зависимости от координат входа и выхода заявки, а также от критерия выбора, согласованного с клиентом.

4.Актуализация на текущий моделируемый момент времени индивидуальных номеров контейнеров различного вида и номеров заявок на m - й базе в зависимости от возможного поступления заявки на базу, возможного начала обслуживания первоочередной заявки, возможного поступления на базу порожних контейнеров.

5.Актуализация на текущий момент времени t последовательностей индивидуальных номеров контейнеров и номеров заявок на маршрутах в зависимости от пополнения этих последовательностей номерами, начавшими обслуживание и исключения из них номеров, завершивших обслуживание.

6.Определение на момент t номеров межгосударственных станций передачи (СП) для заявок на маршруте и станций передач при возвращении порожних контейнеров.

7.Определение остаточных времен: до поступления заявок на очередную СП, порожних контейнеров до поступления на базу m, остаточных времен до наступления ремонта 1(внепланового) и ремонта 2 (планового), а также до их завершения – для каждого индивидуального номера контейнера m -й базы.

8.Вычисление накопленных времен пребывания контейнеров и заявок на базе, накопленных времен пребывания заявок на маршрутах, контейнеров - в ремонте 1.

9.Определение требуемого вида контейнеров для каждой заявки; находящейся в системе, и объема этой заявки.

10.Актуализация маршрута для каждого индивидуального номера заявки для случаев поступления заявки на базу, пребывания на маршруте, возвращения на базу порожних контейнеров, обслуживших данную заявку.

11.Определение количества контейнеров и заявок, находящихся на базе-отправительнице и на маршрутах этой базы.

12.Разработка экономического блока модели.

Рассмотрение особенностей функционирования системы контейнерных перевозок в международном железнодорожном сообщении, а также анализ формализующих договоренностей и упрощений, сценария логических шагов дальнейшего моделирования позволяют отнести процесс взаимодействия железнодорожных администраций и принадлежащих им сервисных центров обслуживания контейнерных перевозок к разряду сложных логистических систем и применить к изучению этого процесса метод агрегатно-автоматного моделирования.

Построение модели начнем с выделения модулей-агрегатов, каждый из которых описывает структурно-функциональные особенности одного из существенных на взгляд исследователя объектов системы:

- модуль-агрегат « ***m* – я база** », где индекс «m» является идентификатором и индивидуального номера сервисного центра, и номера железнодорожной транспортной системы, в состав которой входит данный центр, и номера страны, на территории которой находятся транспортная система и база;

- модуль-агрегат « ***mn* – я заявка** », описывающий процесс обслуживания каждой заявки, начиная от момента поступления на m - ю базу и заканчивая моментом поступления на эту базу порожних контейнеров, обслуживших данную заявку, после чего номер « n » выбывает из поля рассмотрения;

- модуль-агрегат « ***im* – й вид контейнеров** », принадлежащих m - й базе и обслуживающих потоки грузов соответствующего типа;

- модуль-агрегат « ***ikm* – й индивидуальный номер контейнера** »;

- модуль-агрегат « ***mns* – я станция передачи (СП)** »; другими словами, это модуль-агрегат, описывающий все возможные ситуации, возникающие при подходе контейнеров с mn - й заявкой к s - й станции, при поступлении их на станцию и отбытии от станции.

Описание модулей-агрегатов и принадлежащих им автоматов, относящихся к экономическому блоку модели, а также алгоритм перевычисления их состояний будут введены после построения алгоритма математического блока модели.

Введем состояния автоматов, описывающих динамику приведенных модулей-агрегатов.

Тело модуля-агрегата **« *m* – я база »** составляют автоматы:

$C_m^{(0)}(t_1)$ - автомат остаточного времени на момент t_1 до поступления на m - ю базу очередной заявки на обслуживание;

$y_m^{(0)}(t_1)$ - автомат – двоичный индикатор, фиксирующий поступление в момент t_1 очередной заявки на m - ю базу;

$y_m^{(1)}(t_1)$ - индикатор наличия к моменту t_1 на m - й базе хотя бы одной заявки;

$z_m^{(1)}(t_1)$ - индивидуальный номер первоочередной заявки на обслуживание, ожидающей на m - й базе, либо, возможно, поступившей в момент t_1;

$vid_m^{(1)}(t_1)$ - вид контейнера, необходимый для первоочередной заявки;

$y_m^{(vid1)}(t_1)$ - индикатор наличия на m - й базе последовательности контейнеров вида, требуемого первоочередной заявке;

$\{Z_m^{(0)}(t_1)\}$ - последовательность индивидуальных номеров заявок на m - й базе в момент t_1;

$\{Z_m(t_1)\}$ - последовательность индивидуальных номеров заявок, находящихся в процессе обслуживания контейнерами m - й базы;

$K_m^{(0)}(t_1)$ - количество заявок, ожидающих на m - й базе начала обслуживания к моменту t_1;

$K_m(t_1)$ - количество обслуживаемых базой заявок.

Приведем автоматы модуля-агрегата **« *mn* – я заявка »:**

$DIR\,SP_{mn}(t_1)$ - директивная спецификация mn - й заявки, сокращенно обозначающая последовательность входных директив, назначенных в момент поступления заявки на базу и сопровождающих ее вплоть до поступления грузополучателю. Перечислим последовательность входных директив mn - й заявки:

- $M_{mn}^{(отп)}(t_1)$ - страна отправления mn - й заявки;
- $S_{mn}^{(отп)}(t_1)$ - терминал отправления mn - й заявки;
- $M_{mn}^{(наз)}(t_1)$ - страна назначения mn - й заявки;

- $S_{mn}^{(наз)}(t_1)$ - терминал назначения mn - й заявки;

- $vid_{mn}(t_1)$ - вид контейнеров, необходимый для mn - й заявки;

- $V_{mn}(t_1)$ - требуемый объем mn - й заявки (количество контейнеров);

- $KR_{mn}(t_1)$ - критерий выбора маршрута mn - й заявки, согласованный грузоотправителем и грузополучателем;

$x_{mn}^{(1)}(t_1)$ - однозначный эквивалент координат размещения заявки при отправлении – страны и терминала отправления;

$x_{mn}^{(2)}(t_1)$ - однозначный эквивалент координат размещения заявки при поступлении грузополучателю – страны и терминала назначения;

$\{NM_{mn}(t_1)\}$ - упорядоченная последовательность номеров возможных маршрутов следования контейнеров, обслуживающих mn - ю заявку;

$N_{mn}(t_1)$ - номер маршрута, реализуемого в процессе удовлетворения mn - й заявки;

$T_{mn}(t_1)$ - время оборота контейнеров, обслуживающих mn - ю заявку;

$K_{mn}^{(0)}(t_1)$ - количество контейнеров, необходимое для обслуживания первоочередной заявки;

$y_{mn}(t_1)$ - двоичный индикатор, фиксирующий возможность начать в момент t_1 обслуживание mn -й заявки по признаку ее первоочередности и по признаку готовности обслуживать данную заявку директивно необходимого количества контейнеров необходимого вида;

$y_{mn}^{(0)}(t_1)$ - индикатор поступления в момент t_1 на базу порожних контейнеров, обслуживших mn - ю заявку;

$C_{mn}(t_1)$ - остаточное время до окончания обслуживания mn - й заявки;

$s_{mn}(t_1)$ - номер достигнутой станции передачи (СП) в момент t_1 составом с контейнерами, обслуживающими mn - ю заявку;

$s_{mn}^{(-)}(t_1)$ - номер станции передачи, достигнутой составом с порожними контейнерами, уже обслужившими mn - ю заявку и следующими в обратном направлении на m - ю базу;

$\{NK_{mn}^{(рем1)}(t_1)\}$ - последовательность индивидуальных номеров контейнеров, обслуживающих mn - ю заявку и находящихся в состоянии «неисправность/ремонт1» в момент t_1;

$\{NK_{mn}(t_1)\}$ - последовательность индивидуальных номеров контейнеров, обслуживающих на момент t_1 mn - ю заявку;

$D_{mn}^{(0)}(t_1)$ - накопленное время задержки mn - й заявки на базе (сверхнормативный простой заявки из-за отсутствия необходимого количества контейнеров необходимого вида);

$D_{mn}(t_1)$ - накопленное на момент t_1 время обслуживания mn - й заявки.

<u>Введем автоматы модуля-агрегата « ***im* – й вид контейнеров** »:</u>

$\{NK_{im}^{(0)}(t_1)\}$ - последовательность индивидуальных номеров контейнеров i - го вида, присутствующих на m - й базе в момент t_1;

$\{NK_{im}^{(\Delta рем2)}(t_1)\}$ - последовательность индивидуальных номеров контейнеров i - го вида, пребывающих на m - й базе в состоянии планового ремонта;

$\{NK_{im}^{(\Delta рем1)}(t_1)\}$ - последовательность номеров контейнеров im - го вида, пребывающих на маршруте в состоянии «неисправность/ремонт1»;

$K_{im}^{(0)}(t_1)$ - количество контейнеров i - го вида, пребывающих на m - й базе в момент t_1.

<u>Опишем состояние модуля-агрегата « ***ikm* – й номер контейнера** »:</u>

$y_{ikm}^{(рем2)}(t_1)$ - двоичный индикатор, фиксирующий на момент t_1 начало планового ремонта ikm - го контейнера;

$y_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_1)$ - индикатор завершения планового ремонта ikm - го контейнера в момент t_1;

$y_{ikm}^{(рем1)}(t_1)$ - индикатор, фиксирующий момент начала поломки ikm - го контейнера, находящегося на маршруте;

$y_{ikm}^{(\Delta рем1)}(t_1)$ - индикатор завершения ремонта ikm - го контейнера, находящегося на маршруте;

$y_{ikm}^{(рем2)*}(t_1)$ - индикатор готовности ikm - го контейнера начать в момент t_1 обслуживание первоочередной заявки по признаку достаточности резервного времени до начала планового осмотра и ремонта;

$y_{ikm}^{(0)}(t_1)$ - индикатор присутствия ikm - го контейнера на базе;

$C_{ikm}^{(рем2)}(t_1)$ - остаточное время до начала планового осмотра и ремонта k - го индивидуального номера контейнера i - го вида на m - й базе;

$C_{ikm}^{(рем1)}(t_1)$ - остаточное время до начала поломки ikm - го контейнера, находящегося на маршруте;

$C_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_1)$ - остаточное время пребывания ikm - го контейнера на базе в состоянии планового ремонта;

$C_{ikm}^{(\Delta рем1)}(t_1)$ - остаточное время пребывания ikm - го контейнера в ремонте на маршруте;

$y_{ikm}(t_1)$ - индикатор возвращения в момент t_1 ikm - го контейнера на исходную базу после завершения обслуживания заявки;

$D_{ikm}^{(0)}(t_1)$ - накопленное время пребывания ikm - го контейнера на исходной базе;

$C_{ikm}(t_1)$ - остаточное время до окончания обслуживания заявки ikm - м контейнером;

$D_{ikm}^{(\Delta рем1)}(t_1)$ - накопленное на момент t_1 время пребывания ikm - го контейнера в текущем ремонте на маршруте;

Модуль-агрегат « ***mns* – я станция передачи** » определяется автоматами:

$C_{mn}^{(s)}(t_1)$ - остаточное время на момент t_1 до момента поступления mn - й заявки на s - ю станцию передачи;

$C_{mn}^{(s)-}(t_1)$ - остаточное время до поступления порожних контейнеров, обслуживших mn - ю заявку и возвращающихся на m - ю исходную базу, до поступления на s - станцию передачи;

$y_{mn}^{(s)}(t_1)$ - двоичный индикатор поступления в момент t_1 контейнеров, обслуживающих mn - ю заявку, на s - ю станцию передачи;

$y_{mn}^{(s)-}(t_1)$ - двоичный индикатор поступления в момент t_1 контейнеров, обслуживших mn - ю заявку и возвращающихся на исходную базу, на s - ю станцию передачи;

$a_{mn}^{(s)-}(t_1)$ - двоичный вероятностный автомат, единичное значение состояния которого равнозначно ситуации, когда в момент t_1 при попадании порожних контейнеров, возвращающихся на исходную базу после завершения обслуживания mn - й заявки, на s - ю станцию передачи началось обслуживание попутной заявки;

$b_{mn}^{(s)-}(t_1)$ - вероятностный автомат, состояние которого обозначает количество станций передачи, пересекаемых попутной заявкой, обслуживаемой порожними контейнерами, обслужившими mn - ю заявку, с началом попутного обслуживания на s - й СП до его завершения.

Введем перечень случайных величин, принимающих участие в создании модели:

$\xi\, DIR\, SP_{mn}(t_1)$ - совокупный термин, обозначающий входную директивную спецификацию заявки с номером $n = N+1$ (N - индивидуальный номер заявки предыдущего поступления), поступившей на исходную базу в момент (t_1);

Расшифруем последовательность случайных характеристик входной директивной спецификации поступившей на базу в момент t_1 заявки:

$\xi M_{mn}^{(отп)}(t_1)$ - страна отправления mn - й заявки $(n = N+1)$;

$\underset{(n=N+1)}{\xi M_{mn}^{(наз)}(t_1)}$ - страна назначения mn - й заявки;

$\underset{(n=N+1)}{\xi S_{mn}^{(отп)}(t_1)}$ - терминал отправления mn - й заявки;

$\underset{(n=N+1)}{\xi S_{mn}^{(наз)}(t_1)}$ - терминал назначения поступившей заявки;

$\underset{(n=N+1)}{\xi TP_{mn}(t_1)}$ - тип поступившей заявки (тип груза);

$\underset{(n=N+1)}{\xi V_{mn}(t_1)}$ - объем поступившей заявки (необходимое количество контейнеров);

$\underset{(n=N+1)}{\xi vid_{mn}(t_1)}$ - требуемый вид контейнеров для поступившей на исходную базу очередной заявки;

$\underset{(n=N+1)}{\xi KR_{mn}(t_1)}$ - критерий выбора маршрута поступившей заявки;

Если критерий выбора маршрута для заявки, поступившей в момент t_1 на исходную базу, выбирается по желанию заказчика, то

$\xi\, q_{mn}(t_1)$ - номер выбранного маршрута;

$\xi\, t_{ikm}^{(рем1)}(t_1)$ - случайный промежуток времени, отделяющий момент t_1 наступления неисправности ikm - го контейнера на маршруте и момент следующего наступления неисправности этого контейнера;

$\xi\, t_{ikm}^{(\Delta рем1)}(t_1)$ - случайное время пребывания в ремонте 1 (на маршруте) ikm - го контейнера, начавшееся в момент t_1;

$\xi\, a_{mn}^{(s)-}(t_1)$ - случайная двоичная величина, фиксирующая момент t_1 началом обслуживания на s - й станции передачи попутной заявки контейнерами, возвращающимися на исходную базу после завершения обслуживания mn - й заявки;

$\xi\, b_{mn}^{(s)-}(t_1)$ - случайное количество станций передач, которое должны пересечь контейнеры, начавшие в момент t_1 обслуживание s - й попутной заявки по завершении обслуживания mn - й заявки.

Введем обозначения, характеризующие структурно-параметрические особенности системы контейнерных перевозок:

$Q_{mn}(t_1)$ - количество всех возможных маршрутов доставки mn - й заявки потребителю в зависимости от места начала и места завершения обслуживания;

Введем обозначение переменной $q=\overline{1,Q_{mn}(t_1)}$ как конкретного номера маршрута mn - й заявки. Тогда для каждого сочетания индексов mnq договоримся, что

T_{mnq} - постоянное время оборота mn - й заявки по q - му маршруту.

В зависимости от директивной спецификации mn - й заявки и номера q выбранного маршрута постоянными будут:

$S(N_{mn}(t_1))$ - общее количество станций передач, пересекаемых mn - й заявкой на маршруте в момент t_1, для $(N_{mn}(t_1))$ - го маршрута обслуживания заявки, определенного в процессе моделирования;

S_{mnq} - стоимость обслуживания mn - й заявки;

$\Delta C_{im}^{(рем2)*}$ - средняя длительность времени пребывания контейнеров i - го вида вне планового осмотра и ремонта, осуществляемого на m - й базе;

$K_{im}^{(0)*}$ - общее количество контейнеров i - го вида, принадлежащих m - й базе.

Алгоритм модели

Приведем формулы условных функционалов переходов для вычисления значений вероятностных автоматов математического блока модели, определяющих в текущий узловой момент времени t_1 состояния формирующих модель агрегатов, в зависимости от значений этих автоматов в предыдущий узловой момент времени t_0, текущих реализаций случайных величин и заданных изначально параметров системы.

1. Рассчитаем для исходной базы «m» длину текущего узлового интервала. Другими словами, определим расположение на временной оси интервала, интерпретирующего непрерывное время функционирования системы между смежными узловыми моментами дискретного вмешательства случая: предыдущим узловым моментом t_0 и моментом t_1 ближайшего обнуления по меньшей мере одного из остаточных времен длительности состояний объектов в системе, либо заданных на начальный момент времени в случае начала моделирования, либо определенных на предыдущем шаге:

$$X(t_1)=\min_m\{C_m^{(0)}(t_0),\min_{i,k}\{C_{ikm}^{(рем2)}(t_0),C_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_0),C_{ikm}^{(рем1)}(t_0),C_{ikm}^{(\Delta рем1)}(t_0),$$

$$C_{ikm}(t_0),\},\min_n\{C_{mn}(t_0)\},\min_{n,s}\{C_{mn}^{(s)}(t_0),C_{mn}^{(s)-}(t_0)\}\},$$

$$(m=\overline{1,m_J}\,;\,i=\overline{1,I}\,;\,k=\overline{1,K_{im}^{(0)*}}\,;\,n\in\{Z_m^{(0)}(t_0)\}\cup\{Z_m(t_0)\}).$$

2. Запишем первую порцию двоичных индикаторов, единичные значения которых определяют изменение качественных состояний объектов модели на момент t_1:

$y_m^{(0)}(t_1)=\delta[C_m^{(0)}(t_0),X(t_1)]$ - на m - ю базу в момент t_1 поступила очередная заявка;

$y_{ikm}^{(рем2)}(t_1)=\delta[C_{ikm}^{(рем2)}(t_0),X(t_1)]$ - в момент t_1 начался плановый осмотр и ремонт ikm - го контейнера на исходной базе;

$y_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_1)=\delta[C_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_0),X(t_1)]$ - завершился плановый осмотр и ремонт ikm - го контейнера на исходной базе;

$y_{ikm}^{(рем1)}(t_1)=\delta[C_{ikm}^{(рем1)}(t_0),X(t_1)]$ - возникновение поломки ikm- го контейнера на маршруте;

$y_{ikm}^{(\Delta рем1)}(t_1)=\delta[C_{ikm}^{(\Delta рем1)}(t_0),X(t_1)]$ - завершение ремонта ikm - го контейнера на маршруте;

$y_m^{(1)}(t_1)=1-\delta[\{Z_m^{(0)}(t_0)\},0]+\delta[\{Z_m^{(0)}(t_0)\},0]\times y_m^{(0)}(t_1)$ - фиксация факта наличия на базе « m » в момент t_1 хотя бы одной заявки.

3. В формуле вычисления состояния автомата $z_m^{(1)}(t_1)$ - номера первоочередной заявки, имеющейся в наличии на m - й базе в момент t_1, присутствует модельный оператор $\Psi\{A;\,b,c;\,d,e\}$, реализующий процессную схему поиска соответствующего индекса, необходимого для перевычисления $z_m^{(1)}(t_1)$. По определению, значение данного оператора совпадает со значением автомата (индекса) «А», чьи атрибуты «b,c» определены известным на данный момент образом через атрибуты «d, e». Приведем формулу номера первоочередной заявки:

$$z_m^{(1)}(t_1)=(1-\delta[\{Z_m^{(0)}(t_0)\},0])\times\Psi\{n;\,n\in\{Z_m^{(0)}(t_0)\};D_{mn}^{(0)}(t_0)=\max_n\}+$$

$$+\delta[\{Z_m^{(0)}(t_0)\},0]\times y_m^{(0)}(t_1)\times(N+1).$$

Данная формула читается следующим образом: если на m - й базе с момента t_0 имеется в наличии хотя бы одна заявка, номером первоочередной заявки будет номер, принадлежащий последовательности индивидуальных номеров ожидающих заявок и имеющий наибольшее накопленное время ожидания начала доставки этой заявки по назначению. Если же заявок на базе не находилось до текущего момента t_1, но в этот момент заявка появилась, ей присваивается номер $N+1$.

4. Общая директивная входная спецификация для заявок, присутствующих либо на исходной базе, либо на маршрутах, будет оставаться прежней и запишется так:

$$\underset{(n \in \{Z_m^{(0)}(t_0)\} \bigcup \{Z_m(t_0)\})}{DIR\,SP_{mn}(t_1)} = (1 - y_m^{(0)}(t_1)) \times DIR\,SP_{mn}(t_0);$$

Для поступившей на базу в момент t_1 заявки с присвоенным ей номером $n = N+1$ входная директивная спецификация будет случайной:

$$\underset{(n=N+1)}{DIR\,SP_{mn}(t_1)} = y_m^{(0)}(t_1) \times \xi\, DIR\,SP_{mn}(t_1).$$

Аналогично будут вычисляться все составляющие общей спецификации: как для номеров заявок, присутствующих в системе, так и, возможно, для нового номера прибывшей на базу в момент t_1 заявки:

$$M_{mn}^{(omn)}(t_1) = (1 - \delta[n, N+1]) \times M_{mn}^{(omn)}(t_0) + y_m^{(0)}(t_1) \times \xi \underset{(n=N+1)}{M_{mn}^{(omn)}(t_1)};$$

$$S_{mn}^{(omn)}(t_1) = (1 - \delta[n, N+1]) \times S_{mn}^{(omn)}(t_0) + y_m^{(0)}(t_1) \times \xi \underset{(n=N+1)}{S_{mn}^{(omn)}(t_1)};$$

$$M_{mn}^{(наз)}(t_1) = (1 - \delta[n, N+1]) \times M_{mn}^{(наз)}(t_0) + y_m^{(0)}(t_1) \times \xi \underset{(n=N+1)}{M_{mn}^{(наз)}(t_1)};$$

$$S_{mn}^{(наз)}(t_1) = (1 - \delta[n, N+1]) \times S_{mn}^{(наз)}(t_0) + y_m^{(0)}(t_1) \times \xi \underset{(n=N+1)}{S_{mn}^{(наз)}(t_1)};$$

$$vid_{mn}(t_1) = (1 - \delta[n, N+1]) \times vid_{mn}(t_0) + y_m^{(0)}(t_1) \times \xi \underset{(n=N+1)}{vid_{mn}(t_1)};$$

$$V_{mn}(t_1) = (1 - \delta[n, N+1]) \times V_{mn}(t_0) + y_m^{(0)}(t_1) \times \xi \underset{(n=N+1)}{V_{mn}(t_1)};$$

$$KR_{mn}(t_1) = (1 - \delta[n, N+1]) \times KR_{mn}(t_0) + y_m^{(0)}(t_1) \times \xi \underset{(n=N+1)}{KR_{mn}(t_1)};$$

$$(n \in \{Z_m^{(0)}(t_0)\} \bigcup \{Z_m(t_0)\} \to \max_n = N \wedge n \neq N+1;\ y_m^{(0)}(t_1) = 1 \to \max_n = N+1).$$

5. В третьем функционале был определен индивидуальный номер первоочередной заявки $z_m^{(1)}(t_1)$, ожидающей начала обслуживания. Вычислим вид контейнеров, требуемый данной заявке. Очевидно, что в

случае присутствия первоочередной заявки на базе с момента t_0 требуемый вид контейнеров останется прежним. В случае отсутствия заявок на базе первоочередной заявкой станет, возможно, прибывшая в момент t_1 заявка с требованием вида контейнеров, заявленным во входной директивной спецификации:

$$vid_m^{(1)}(t_1) = \Psi\{n\,;\, n \in \{Z_m^{(0)}(t_0)\}\,;\, n = z_m^{(1)}(t_1)\} \times vid_{mn}(t_0) + \\ + \delta[n, N+1] \times vid_{m(N+1)}(t_1).$$

6. Назначим номерами входа контейнерных заявок в систему международных железнодорожных перевозок и выхода их из системы однозначные эквиваленты координат размещения заявки при отправлении – страны и терминала отправления, а также однозначные эквиваленты координат размещения заявки при ее поступлении по назначению – страны и терминала назначения:

$$x_{mn}^{(1)}(t_1) = N_1(M_{mn}^{(omn)}(t_1), S_{mn}^{(omn)}(t_1)); \quad x_{mn}^{(2)}(t_1) = N_2(M_{mn}^{(наз)}(t_1), S_{mn}^{(наз)}(t_1)).$$

7. Построим для каждой присутствующей в системе заявки постоянную последовательность номеров всех возможных ее маршрутов, расположенную по порядку номеров и зависящую только от номеров входа заявки в систему и выхода ее из системы:

$$\{NM_{mn}(t_1)\} = \{\Theta(x_{mn}^{(1)}(t_1),\, x_{mn}^{(2)}(t_1))\}.$$

8. Ведем переменную q, обозначающую один из возможных номеров маршрутов mn - й заявки, присутствующей в системе. Тогда в зависимости от значения критерия выбора маршрута, назначенного заявке во входной директивной спецификации, из множества всех маршрутов заявки выбирается номер оптимального маршрута. Пусть значение 1 соответствует критерию кратчайшего расстояния или минимального времени обслуживания заявки. Значение 2 соответствует критерию минимальной стоимости перевозки грузов. Под номером 3 выбирается маршрут по желанию заказчика. Выберем номер маршрута для mn - й заявки, либо ожидающей на исходной базе начала обслуживания, либо начавшей обслуживаться в момент t_1:

$$\underset{(n \in \{Z_m^{(0)}(t_0)\} \vee n = z_m^{(1)}(t_1))}{N_{mn}(t_1)} = \Psi\{q\,;\, q \in \{NM_{mn}(t_1)\};\, \delta[KR_{mn}(t_1),1] \times T_{mnq} = \min_q;$$

$$\delta[KR_{mn}(t_1),2] \times S_{mnq} = \min_q;\, \delta[KR_{mn}(t_1),3] \times \xi\, q_{mn}(t_1)\};$$

$$y_{mn}^{(-)}(t_1) = 0;$$

Индикатор $y_{mn}^{(-)}(t_1)$, равный нулю, фиксирует факт следования заявки по прямому маршруту. Единичное значение индикатора означает следование контейнеров, обслуживших mn - ю заявку, в обратном направлении.

Номер маршрута для обслуживаемой заявки, не поступившей еще на станцию назначения S; либо номер обратного маршрута, совершаемого порожними контейнерами по завершении обслуживания mn - й заявки, определится в логических терминах:

$$\frac{0 < s_{mn}(t_0) < S(N_{mn}(t_0))}{N_{mn}(t_1) = N_{mn}(t_0);\quad y_{mn}^{(-)}(t_1) = 0;}$$

$$\frac{s_{mn}(t_0) = S(N_{mn}(t_0)) \vee s_{mn}(t_0) < 0 \wedge \wedge \sum_{i = vid_{mn}(t_0)} \sum_{k \in \{NK_{mn}(t_0)\}} y_{ikm}(t_0) = 0}{N_{mn}(t_1) = -N_{mn}(t_0);\quad y_{mn}^{(-)}(t_1) = 1;}$$
$$(n \in \{Z_m(t_0)\}).$$

9. Вычислим двоичный индикатор, в случае равенства единице которого истинным является утверждение о том, что на m - й базе имеется последовательность контейнеров вида, требуемого для первоочередной заявки:

$$y_m^{(vid1)}(t_1) = 1 - \delta[R\{\{NK_{im}^{(0)}(t_0)\};vid_m^{(1)}(t_1);m\},0].$$

В правой части данной формулы присутствует модельный оператор $R\{\{A\},i,j\}$, реализующий процессную схему поиска определенной двухиндексной последовательности. Его значение совпадает с той последовательностью $\{A\}$, которая имеет своим первым индексом i, вторым – j. В данном случае среди всех последовательностей индивидуальных номеров контейнеров $\{NK_{im}^{(0)}(t_0)\}$ всех видов, имеющихся на m - й базе с момента t_0, с помощью оператора R отыскивается последовательность номеров контейнеров вида, требуемого для первоочередной заявки $(i = vid_m^{(1)}(t_1))$. Если такая последовательность существует, искомый индикатор равен единице.

10. Приведем формулы для вычисления времени оборота заявки (контейнеров, обслуживающих mn - ю заявку) как для случая первоочередной заявки, так и для заявки на маршруте - вплоть до момента возвращения порожних контейнеров на исходную базу:

$$\underset{(n=z_m^{(1)}(t_1))}{T_{mn}}(t_1) = R\{T_{mnq};\, m;\, z_m^{(1)}(t_1);\, N_{mn}(t_1)\}; \qquad \underset{(n\in\{Z_m(t_0)\})}{T_{mn}}(t_1) = T_{mn}(t_0).$$

В функционале 10 присутствует модельный оператор $R\{A;i;j;k\}$ поиска члена трехиндексной последовательности. Его значение совпадает с тем членом последовательности $\{A\}$, который имеет i первым своим индексом, j - вторым индексом, k - третьим индексом .

11. Для каждого k - го контейнера i - го вида, ожидающего на m - й базе начала обслуживания имеющихся заявок и, в то же время, – начала планового осмотра и ремонта, определим индикатор его готовности начать в момент t_1 обслуживание первоочередной заявки:

$$\underset{(k\in\{NK_{im}^{(0)}(t_0)\})}{y_{ikm}^{(рем2)*}}(t_1) = \begin{cases} \dfrac{\delta[vid_m^{(1)}(t_1), i] = 1 \wedge C_{ikm}^{(рем2)}(t_0) \geq R\{T_{mn}(t_1); m; z_m^{(1)}(t_1)\}}{1;} \\ \dfrac{\delta[vid_m^{(1)}(t_1), i] = 1 \wedge C_{ikm}^{(рем2)}(t_0) < R\{T_{mn}(t_1); m; z_m^{(1)}(t_1)\}}{0.} \end{cases}$$

Действительно, если вид контейнеров, требуемый для первоочередной заявки, имеющейся на базе, совпадает с видом ikm - го контейнера и остаточное время до начала планового осмотра и ремонта этого контейнера превышает время оборота первоочередной заявки, индикатор $y_{ikm}^{(рем2)*}(t_1)$ принимает единичное значение, в противном случае он равен нулю.

12. Количество контейнеров, необходимое первоочередной заявке, ожидающей начала обслуживания на m - й базе, будет соответствовать ее входной директивной составляющей:

$$K_{mn}^{(0)}(t_1) = (1 - \delta[z_m^{(1)}(t_1), 0]) \times \delta[n, z_m^{(1)}(t_1)] \times V_{mn}(t_1).$$

13. Введем индикатор начала обслуживания первоочередной заявки:

$$y_{mn}(t_1) = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{i=vid_m^{(1)}(t_1)} \sum\limits_{k \in \{NK_{im}^{(0)}(t_0)\}} y_{ikm}^{(рем2)*}(t_1) \geq K_{mn}^{(0)}(t_1)}{1;} \vee \\ \vee \dfrac{\sum\limits_{i=vid_m^{(1)}(t_1)} \sum\limits_{k \in \{NK_{im}^{(0)}(t_0)\}} y_{ikm}^{(рем2)*}(t_1) < K_{mn}^{(0)}(t_1)}{0.} \end{cases}$$

$$(n = z_m^{(1)}(t_1) \times y_m^{(1)}(t_1)).$$

Единичное значение индикатора свидетельствует о готовности достаточного для первоочередной заявки количества присутствующих на исходной базе контейнеров необходимого вида начать в момент t_1 обслуживание этой заявки. Нулевое значение индикатора свидетельствует об отсутствии условий начала обслуживания заявки.

14. Актуализируем последовательность индивидуальных номеров заявок на базе на текущий момент модельного времени с учетом возможного поступления очередной заявки на базу, а также возможного начала обслуживания первоочередной заявки в момент t_1 :

$$\{Z_m^{(0)}(t_1)\} = \{Z_m^{(0)}(t_0)\} \supset y_m^{(0)}(t_1) \times \Psi\{(N+1); N \in \{Z_m^{(0)}(t_0)\}; N = \max_n\} \setminus z_m^{(1)}(t_1).$$

15. Індикатор, фиксирующий возвращение в момент t_1 на исходную m - ю базу порожних контейнеров, обслуживших mn - ю заявку, определится следующим образом:

$$y_{mn}^{(0)}(t_1) = \delta[C_{mn}(t_0), X(t_1)].$$

16. Актуализируем на момент t_1 последовательность индивидуальных номеров контейнеров i - го вида, находящихся на исходной базе. За основу принимаем одноименную последовательность в предыдущий момент t_0, обновленную двумя возможными поступлениями и двумя возможными выбываниями совокупностей номеров контейнеров данного вида в момент t_1. Выбывания номеров контейнеров включают: выбывание последовательности номеров контейнеров, возможно, начавших обслуживание первоочередной заявки, а также выбывание последовательности номеров контейнеров, начавших плановый осмотр и ремонт (ремонт 2). Возможные поступления номеров контейнеров на исходную базу включают: возвращение номеров порожних контейнеров, завершивших обслуживание очередной заявки, и поступление номеров

контейнеров, завершивших плановый осмотр и ремонт. Приведем формулу:

$$\{NK_{im}^{(0)}(t_1)\} = \{NK_{im}^{(0)}(t_0)\} \setminus \delta[vid_m^{(1)}(t_1), i] \times R\{y_{mn}(t_1); m; z_m^{(1)}(t_1)\} \times$$
$$\times S^{-1}\{S\{\{D_{ikm}^{(0)}(t_0)\}; k \times y_{ikm}^{(рем2)*}(t_1)\}, K_{mn}^{(0)}(t_1)\} \supset \bigcup_{n \in \{Z_m(t_0)\}} \{\Psi\{NK_{mn}(t_0)\};$$
$$vid_{mn}(t_0) = i; y_{mn}^{(0)}(t_1) = 1\} \supset \{\Psi\{k; k \in \{NK_{im}^{(0)}(t_0)\}; y_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_1) = 1\}\} \setminus$$
$$\setminus \{\Psi\{k; k \in \{NK_{im}^{(0)}(t_0)\}; y_{ikm}^{(рем2)}(t_1) = 1\}\};$$

В данной формуле кроме модельных операторов $R\{\}, \Psi\{\}$ присутствует оператор $S\{\{A\}; i\}$ упорядочения индивидуальных номеров членов последовательности $\{A\}$ в порядке убывания значений этих членов. Так, например, пусть $A_1 = 2; A_2 = 10; A_3 = 1; A_4 = 3; A_5 = 4$. Тогда $S\{\{A\}, i\,(i = \overline{1,5})\} = \{2,5,4,1,3\}$.

$S^{-1}\{S\{\{A\}; i\}; j\}$ - оператор-ограничитель последовательности индивидуальных номеров последовательности $\{A\}$, упорядоченной в порядке убывания значений ее членов, с указанием наибольшего порядкового номера ограничения j. Пусть $S\{\{A\}, i\} = \{2,5,4,1,3\}$. Зададим $j = 3$. Тогда оператор $S^{-1}\{S\{\{A\}; i\}; j\} = \{2,5,4\}$.

Последовательное применение операторов упорядочения позволяет сначала с помощью внутреннего оператора $S\{\}$ определить последовательность индивидуальных номеров контейнеров требуемого вида, готовых к началу обслуживания первоочередной заявки, упорядоченную в порядке убывания накопленных времен ожидания. Внешний оператор $S^{-1}\{\}$ ограничивает эту последовательность требуемым заявке количеством контейнеров.

17. Актуализируем последовательность индивидуальных номеров заявок, находящихся в момент t_1 в процессе обслуживания контейнерами m - й базы:

$$\{Z_m(t_1)\} = \{Z_m(t_0)\} \supset R\{y_{mn}(t_1); m; z_m^{(1)}(t_1)\} \times z_m^{(1)}(t_1) \setminus$$
$$\setminus \bigcup \Psi\{n; n \in \{Z_m(t_0)\}; y_{mn}^{(0)}(t_1) = 1\}.$$

Новая последовательность номеров заявок на маршруте, обслуживаемых на момент t_1 контейнерами m - й базы, будет складываться из «старой» последовательности на момент t_0 с возможным присоединением номера заявки, начавшей обслуживаться, и с исключением совокупности номеров уже обслуженных заявок при условии поступления в момент t_1 контейнеров, обслуживших эти заявки, на исходную базу.

18. Введем индикатор присутствия с момента t_0 ikm - го контейнера на исходной базе и определим его с помощью следующей формулы:

$$y_{ikm}^{(0)}(t_0) = 1 - \delta[D_{ikm}^{(0)}(t_0), -1].$$

19. Перейдем к вычислению остаточного времени до окончания обслуживания mn - й заявки. Вначале приведем формулу для заявки, находящейся в момент t_1 на маршруте:

$$\underset{(n \in \{Z_m(t_0)\})}{C_{mn}}(t_1) = \frac{C_{mn}(t_0) - X(t_1) \geq 0}{C_{mn}(t_0) - X(t_1);} \left| \frac{C_{mn}(t_0) - X(t_1) < 0}{-1;} \right.$$

Для заявки, начавшей обслуживаться в момент t_1, формула будет иметь вид:

$$\underset{(n \in \{Z_m^{(0)}(t_0)\})}{C_{mn}}(t_1) = y_m^{(1)}(t_1) \times y_{mn}(t_1) \times T_{mn}(t_1).$$

20. Определим номер станции передачи, достигнутой в момент t_1 составом контейнеров, обслуживающих mn - ю заявку:

$$\begin{aligned}
&s_{mn}(t_1) = (1 - \delta[s_{mn}(t_0), S]) \times \{y_{mn}(t_1) \times 0 + (1 - y_{mn}(t_1)) \times \\
&\times (\Psi\{(s+1); s = s_{mn}(t_0); C_{mn}^{(s+1)}(t_0) = X(t_1)\} + \\
&+ \Psi\{s; s = s_{mn}(t_0); C_{mn}^{(s+1)}(t_0) \neq X(t_1)\})\} + \delta[s_{mn}(t_0), S] \times (-1); \\
&(n \in \{Z_m(t_1)\}; S = S(N_{mn}(t_1)); s = \overline{0, S}).
\end{aligned}$$

Формула читается следующим образом: если в предыдущий момент t_0 считалась пройденной mn - й заявкой станция передачи (СП) под номером $s_{mn}(t_0)$, не являющаяся последней СП на маршруте, то номер СП, достигнутой заявкой в момент t_1 будет нулевым (начальным) - в случае начала обслуживания заявки в момент t_1. Если заявка находится на маршруте до момента t_1, то номеру уже пересеченной ею СП присваивается значение автомата $s_{mn}(t_0)$ $(s=s_{mn}(t_0))$. Тогда $s+1$ будет номером следующей СП, если остаточное время до пересечения mn - й заявкой $(s+1)$ - й станции передачи будет равно величине текущего узлового интервала $X(t_1)$. В противном случае номер достигнутой СП остается прежним. И. наконец, если уже достигнутая заявкой к моменту t_0 СП является последней $(s=S)$, то в этом направлении маршрута заявки номер следующей СП считается выбывшим $(s_{mn}(t_1)=-1)$. Заявка прибыла по назначению.

21. Запишем номер станции передачи, достигнутой к моменту t_1 (или в момент t_1) составом контейнеров, обслуживших mn - ю заявку и возвращающихся на исходную базу:

$$
\begin{aligned}
&s_{mn}^{(-)}(t_1)=(1-\delta[s_{mn}^{(-)}(t_0),0])\times y_{mn}^{(-)}(t_1)\times\{\delta[s_{mn}(t_1),S]\times S+\\
&+\Psi\{(s-1);\, s=s_{mn}^{(-)}(t_0);\, C_{mn}^{(s-1)-}(t_0)=X(t_1)\}+\Psi\{s\,;\, s=s_{mn}^{(-)}(t_0);\\
&\ C_{mn}^{(s-1)-}(t_0)\neq X(t_1)\}\}+\delta[s_{mn}^{(-)}(t_0),0]\times(-1);\\
&(n\in\{Z_m(t_1)\};\, S=S(N_{mn}(t_1));\, s=\overline{S,0}).
\end{aligned}
$$

Данное линейное разностное стохастическое уравнение читается следующим образом: номер СП, достигнутой к моменту t_1 контейнерами, обслужившими mn - ю заявку и возвращающимися на исходную базу (введем соответствующий термин: «номер станции передачи, достигнутой постобслуженной mn - й заявкой»), равен S в момент поступления на СП назначения заявки; номер СП уменьшается на единицу по сравнению с предыдущим значением при условии поступления постобслуженной заявки на следующую СП в обратном направлении $(s_{mn}^{(-)}(t_1)=s-1;$ $(s_{mn}^{(-)}(t_0)=s))$ и когда остаточное время до поступления возвращающихся контейнеров на $(s-1)$ - ю СП равно текущему узловому интервалу. Если остаточное время до поступления постобслуженной mn - й заявки на следующую СП в обратном направлении превышает текущий узловой интервал $X(t_1)$, то номер СП, пройденной контейнерами на обратном маршруте, останется прежним. Если СП в предыдущий момент времени имела нулевой номер (контейнеры, обслужившие mn - ю заявку, вернулись на исходную базу), то тогда номеру СП, достигнутой в момент t_1 постобслуженной mn - й заявкой, присваивается значение (-1).

22. В некоторых случаях бывает возможным перевычисление состояний блока автоматов при наличии единой для всего блока совокупности условий. В данном пункте будет представлен блочный

способ записи перевычисления состояний автомата остаточного времени до поступления mn - й заявки на s - ю СП по прямому маршруту $C_{mn}^{(s)}(t_1)$, индикатора поступления в момент t_1 mn - й заявки на s - ю СП по прямому маршруту, значения следующего номера СП в зависимости от маршрута заявки и факта поступления или непоступления заявки на s - ю СП.

Рассмотрим первый вариант такой блочной записи, определяющий искомые данные для mn - й заявки, обслуживание которой началось в момент t_1:

$$\frac{n = z_m^{(1)}(t_1) \wedge y_{mn}(t_1) = 1 \wedge s = 1}{C_{mn}^{(s)}(t_1) = \Psi\{T_{mnq}^{(1)};\, q = N_{mn}(t_1)\}; \quad y_{mn}^{(s)} = 0; \quad s = s.}$$

Состояния автоматов перевычисляются в импликативной форме в виде двух подстрок. В верхней подстроке в терминах формальной логики приводится совокупность логических условий, относящихся к соответствующему варианту. В нижней подстроке по каждому варианту записываются функционалы реакций автоматов.

Следующий вариант записи касается заявки на маршруте $(n \in \{Z_m(t_1)\})$, остаточное время до поступления которой на следующую, s - ю станцию передачи $(s = \overline{2, S-1};\, S = S(N_{mn}(t_1)))$, превышает текущий узловой интервал $X(t_1)$:

$$\frac{n \in \{Z_m(t_1)\} \wedge C_{mn}^{(s)}(t_0) - X(t_1) > 0 \wedge S = S(N_{mn}(t_1)) \wedge s = \overline{2, S-1}}{C_{mn}^{(s)}(t_1) = C_{mn}^{(s)}(t_0) - X(t_1); \quad y_{mn}^{(s)}(t_1) = 0; \quad s = s.}$$

Если остаточное время до поступления заявки на очередную СП равно длине текущего узлового интервала, тогда индикатор поступления заявки на эту СП равен единице, номер следующей станции передачи увеличивается на единицу по сравнению с предыдущей (в рамках данного маршрута), а остаточное время до поступления заявки на следующую СП представляет собой заданную постоянную величину времени продвижения заявки между двумя смежными СП – текущей и очередной:

$$\frac{n \in \{Z_m(t_1)\} \wedge C_{mn}^{(s)}(t_0) - X(t_1) \le 0 \wedge S = S(N_{mn}(t_1)) \wedge s < S}{y_{mn}^{(s)}(t_1) = 1; \quad s = s + 1; \quad C_{mn}^{(s+1)}(t_1) = \Psi\{T_{mnq}^{(s+1)};\, q = N_{mn}(t_0)\}.}$$

Последний вариант отличается от предыдущего тем, что следующая СП для mn - й заявки на маршруте является последней:

$$\frac{n \in \{Z_m(t_1)\} \wedge C_{mn}^{(s)}(t_0) - X(t_1) \le 0 \wedge S = S(N_{mn}(t_1)) \wedge s = S}{y_{mn}^{(s)}(t_1) = 1; \quad C_{mn}^{(s)}(t_1) = -1; \quad s = S.}$$

23. Воспользуемся блочным способом перевычисления состояний автомата остаточного времени $C_{mn}^{(s)-}(t_1)$ до поступления постобслуженной mn - й заявки, следующей обратным маршрутом в направлении исходной базы, на s - ю СП, индикатора поступления совокупности контейнеров, обслуживших mn - ю заявку, на s - ю СП, а также значения следующего номера СП, пересекаемого постобслуженной заявкой.

Вариант 1. Рассматривается случай поступления mn - й заявки в момент t_1 на последнюю СП, отделяющую пройденный маршрут от страны (базы) назначения заявки:

$$\frac{n \in \{Z_m(t_0)\} \wedge S = S(N_{mn}(t_1)) \wedge s = S \wedge y_{mn}^{(S)}(t_1) = 1}{C_{mn}^{(s-1)}(t_1) = \Psi\{T_{mnq}^{(S-1)}; q = -N_{mn}(t_1)\}; \quad y_{mn}^{(s-1)-}(t_1) = 0; \quad s = S.}$$

Вариант 2. Постобслуженная заявка (состав контейнеров, обслуживших mn - ю заявку и возвращающихся обратным маршрутом на исходную базу) к моменту t_1 не достигла следующей СП (остаточное время до поступления заявки на эту СП в момент t_0 превысило текущий узловой интервал $X(t_1)$):

$$\frac{n \in \{Z_m(t_0)\} \wedge C_{mn}^{(s)-}(t_0) - X(t_1) > 0 \wedge s = \overline{S-1,0}}{C_{mn}^{(s)-}(t_1) = C_{mn}^{(s)-}(t_0) - X(t_1); \quad y_{mn}^{(s)-}(t_1) = 0; \quad s = s.}$$

Вариант 3. Условие варианта отличается от условия предыдущего варианта тем, что узловой момент t_1 является моментом поступления постобслуженной заявки на s- ю СП. Индикатор это поступление фиксирует своим единичным значением. Номер следующей СП по пути на исходную базу будет уменьшен на единицу, а остаточное время до поступления постобслуженной заявки на эту, следующую СП будет заданной постоянной величиной времени продвижения mn - й заявки от s - й до $(s-1)$- й СП:

$$\frac{n \in \{Z_m(t_0)\} \wedge C_{mn}^{(s)-}(t_0) - X(t_1) \le 0 \wedge s > 0}{C_{mn}^{(s)-}(t_1) = \Psi\{T_{mnq}^{(s-1)-}; q = -N_{mn}(t_1)\}; \quad y_{mn}^{(s)-}(t_1) = 1; \quad s = s-1.}$$

Вариант 4. В условии данного варианта фиксируется факт поступления совокупности контейнеров, обслуживших mn - ю заявку, на исходную базу:

$$\frac{n \in \{Z_m(t_0)\} \wedge C_{mn}^{(s)-}(t_0) - X(t_1) \le 0 \wedge s = 0}{C_{mn}^{(s)-}(t_1) = -1; \quad y_{mn}^{(s)-}(t_1) = 1; \quad s = 0.}$$

24. Определим остаточное время до начала планового осмотра и ремонта (ремонта2) k - го индивидуального номера контейнера i - го вида, прикрепленного к m - й исходной базе. Рассмотрим все возможные альтернативные варианты возникающих ситуаций.

1). Прежнее остаточное время до начала ремонта2 превышает текущий узловой интервал (интервал времени между двумя смежными узловыми моментами: t_0 и t_1). Значит, остаточное время до ремонта2 для ikm - го контейнера уменьшится на величину текущего узлового интервала:

$$C_{ikm}^{(рем2)}(t_1) = \frac{C_{ikm}^{(рем2)}(t_0) - X(t_1) > 0}{C_{ikm}^{(рем2)}(t_0) - X(t_1);}$$

2). В момент t_1 начался ремонт2 для ikm - го контейнера. Это случай, когда прежнее остаточное время до ремонта2 равно величине текущего узлового интервала. Данный вариант фиксирует значение искомого автомата как (-1) (перевычисление состояния автомата не имеет смысла):

$$C_{ikm}^{(рем2)}(t_1) = \frac{C_{ikm}^{(рем2)}(t_0) - X(t_1) = 0}{-1;}$$

3). В момент t_1 для ikm - го контейнера завершился плановый осмотр и ремонт. Остаточное время до следующего ремонта2 для этого контейнера будет равно заданной средней длительности времени пребывания контейнеров i - го вида, принадлежащих m - й базе, вне ремонта2:

$$C_{ikm}^{(рем2)}(t_1) = \frac{C_{ikm}^{(рем2)}(t_0) - X(t_1) < 0 \wedge y_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_1) = 1}{\Delta C_{im}^{(рем2)*};}$$

4). С момента t_0 ikm - й контейнер находится в состоянии планового осмотра и ремонта (ремонта2) и он не завершится к моменту t_1. В этом случае перевычисление состояния искомого автомата не имеет смысла и его значение, как и во втором варианте, равно (-1).

$$C_{ikm}^{(рем2)}(t_1) = \frac{C_{ikm}^{(рем2)}(t_0) - X(t_1) < 0 \wedge y_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_1) = 0}{-1.}$$

25. Определим формулу остаточного времени пребывания ikm- го контейнера в состоянии планового осмотра и ремонта (ремонта2). Состояния автомату $C_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_1)$ назначаются в соответствии с четырьма возможными альтернативными вариантами условий:

1). Состояние автомата остаточного времени пребывания данного контейнера в ремонте2 на момент t_0 превышает текущий узловой интервал. В момент t_1 значение этого состояния сократится на $X(t_1)$.

2). В момент t_1 для данного контейнера завершился ремонт2. Дальнейшее перевычисление состояния искомого автомата не имеет смысла. Ему присваивается значение (-1).

3). В момент t_1 начался ремонт2 для ikm - го контейнера. Состоянию искомого автомата присваивается постоянная величина $\Delta t_{im}^{(\Delta рем2)}$ средней длительности ремонта2.

4). С момента t_0 до момента t_1 включительно ikm - й контейнер не находится в состоянии ремонта2. В этом случае состоянию искомого автомата присваивается значение (-1).

Приведем данную формулу с учетом всех перечисленных вариантов:

$$C_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_1) = \begin{cases} 1)\ \dfrac{C_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_0) - X(t_1) > 0}{C_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_0) - X(t_1);} \\ 2)\ \dfrac{C_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_0) - X(t_1) = 0}{-1;} \\ 3)\ \dfrac{C_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_0) - X(t_1) < 0 \wedge y_{ikm}^{(рем2)}(t_1) = 1}{\Delta t_{im}^{(\Delta рем2)};} \\ 4)\ \dfrac{C_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_0) - X(t_1) < 0 \wedge y_{ikm}^{(рем2)}(t_1) = 0}{-1.} \end{cases}$$

26. Остаточное время на момент t_1 до возникновения неисправности и ее устранения (ремонта1) в k- м контейнере i - го вида, принадлежащем

m - й базе и находящемся на маршруте в процессе обслуживания mn - й заявки, рассчитывается следующим образом:

$$C_{ikm}^{(\text{рем}1)}(t_1)=\begin{cases} \dfrac{C_{ikm}^{(\text{рем}1)}(t_0)-X(t_1)>0}{C_{ikm}^{(\text{рем}1)}(t_0)-X(t_1);} & (1)\\[2ex] \dfrac{C_{ikm}^{(\text{рем}1)}(t_0)-X(t_1)=0}{-1;} & (2)\\[2ex] \dfrac{C_{ikm}^{(\text{рем}1)}(t_0)-X(t_1)<0 \wedge y_{ikm}^{(\Delta\text{рем}1)}(t_1)=1}{\xi\, t_{ikm}^{(\text{рем}1)}(t_1);} & (3)\\[2ex] \dfrac{C_{ikm}^{(\text{рем}1)}(t_0)-X(t_1)<0 \wedge y_{ikm}^{(\Delta\text{рем}1)}(t_1)=0}{-1;} & (4)\end{cases}$$

$$(n\in\{Z_m(t_1)\};\quad i=vid_{mn}(t_1);\quad k\in\{NK_{mn}(t_0)\}).$$

В варианте (3) формулы при условии завершения в момент t_1 ремонта1, о чем свидетельствует равенство соответствующего индикатора единице, состоянию искомого автомата присваивается очередное значение случайной величины промежутка времени до наступления следующей поломки ikm - го контейнера на маршруте.

27. Приведем формулу расчета состояния автомата остаточного времени пребывания ikm - го контейнера на маршруте в состоянии ремонта1:

$$C_{ikm}^{(\Delta\text{рем}1)}(t_1)=\begin{cases} \dfrac{C_{ikm}^{(\Delta\text{рем}1)}(t_0)-X(t_1)>0}{C_{ikm}^{(\Delta\text{рем}1)}(t_0)-X(t_1);} & (1)\\[2ex] \dfrac{C_{ikm}^{(\Delta\text{рем}1)}(t_0)-X(t_1)=0}{-1;} & (2)\\[2ex] \dfrac{C_{ikm}^{(\Delta\text{рем}1)}(t_0)-X(t_1)<0 \wedge y_{ikm}^{(\text{рем}1)}(t_1)=1}{\xi\, t_{ikm}^{(\Delta\text{рем}1)}(t_1);} & (3)\\[2ex] \dfrac{C_{ikm}^{(\Delta\text{рем}1)}(t_0)-X(t_1)<0 \wedge y_{ikm}^{(\text{рем}1)}(t_1)=0}{-1;} & (4)\end{cases}$$

$$(n\in\{Z_m(t_1)\};\quad i=vid_{mn}(t_1);\quad k\in\{NK_{mn}(t_0)\})$$

28. Актуализируем последовательность индивидуальных номеров контейнеров, обслуживающих mn - ю заявку в момент t_1:

$$\{NK_{mn}(t_1)\} = \begin{cases} \dfrac{n \in \{Z_m(t_0)\} \wedge y_{mn}^{(0)}(t_1) = 0}{\{NK_{mn}(t_0)\};} \\ \dfrac{n \in \{Z_m(t_0)\} \wedge y_{mn}^{(0)}(t_1) = 1}{0;} \\ \dfrac{n \in \{Z_m^{(0)}(t_0)\} \wedge y_{mn}(t_1) = 1}{S^{-}\{S\{D_{ikm}^{(0)}(t_0); \Psi\{k;\, vid_m^{(1)}(t_1) = i;\, y_{ikm}^{(рем2)*}(t_1) = 1\}\}; K_{mn}^{(0)}(t_1)\};} \\ \dfrac{n \in \{Z_m^{(0)}(t_0)\} \wedge y_{mn}(t_1) = 0}{0.} \end{cases}$$

Расшифруем записанные варианты условий и полученных результатов:

1). Последовательность номеров контейнеров, обслуживающих mn - ю заявку с момента t_0, останется прежней на момент t_1, если этот момент не будет моментом окончания обслуживания данной заявки.

2). Если в момент t_1 завершится время оборота mn - й заявки, соответствующая последовательность номеров контейнеров будет отсутствовать.

3). Если в момент t_1 началось обслуживание первоочередной заявки с номером $n \in \{Z_m^{(0)}(t_0)\}$, то искомую последовательность индивидуальных номеров контейнеров будет составлять последовательность необходимого количества номеров контейнеров требуемого вида, расположенных в порядке убывания времен ожидания на исходной базе и готовых по признаку достаточности резервного времени до начала планового осмотра и ремонта начать обслуживание mn - й заявки.

4). Если в текущий момент mn - я заявка остается на базе, последовательность номеров контейнеров для нее будет отсутствовать.

29. Проведем актуализацию последовательности индивидуальных номеров контейнеров, обслуживающих mn - ю заявку и находящихся в состоянии «неисправность/ремонт1» в момент t_1:

$$\{NK_{mn}^{(рем1)}(t_1)\} = \{NK_{mn}^{(рем1)}(t_0)\} \supset \{\Psi\{k;\, k \in \{NK_{mn}(t_1)\};\, vid_{mn}(t_1) = i;$$
$$y_{ikm}^{(рем1)}(t_1) = 1\}\} \setminus \{\Psi\{k;\, k \in \{NK_{mn}(t_1)\};\, vid_{mn}(t_1) = i;\, y_{ikm}^{(\Delta рем1)}(t_1) = 1\}\}.$$

Данная последовательность актуализируется, пополняясь номерами контейнеров, начавших ремонтироваться на маршруте, и с вычетом номеров контейнеров, завершивших ремонт1 в момент t_1.

30. Определим последовательность всех индивидуальных номеров контейнеров im - го вида, находящихся в момент t_1 на маршруте в состоянии «неисправность/ремонт1»:

$$\{NK_{im}^{(\Delta рем1)}(t_1)\} = \bigcup \{\Psi\{\{NK_{mn}^{(рем1)}(t_1)\};\ n \in \{Z_m(t_1)\};\ vid_{mn}(t_1) = i\}\}.$$

31. Актуализируем последовательность номеров контейнеров i - го вида, пребывающих в момент t_1 на исходной базе и находящихся в состоянии планового осмотра и ремонта (ремонта2):

$$\{NK_{im}^{(\Delta рем2)}(t_1)\} = \{NK_{im}^{(\Delta рем2)}(t_0)\} \supset \{\Psi\{k;\ k \in \{NK_{im}^{(0)}(t_0)\};\ y_{ikm}^{(рем2)}(t_1) = 1\}\} \setminus$$
$$\setminus \{\Psi\{k;\ k \in \{NK_{im}^{(\Delta рем2)}(t_0)\};\ y_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_1) = 1\}\}.$$

32. Приведем формулы перевычисления состояний автомата $C_{ikm}(t_1)$ остаточного времени до окончания обслуживания заявки ikm - м контейнером или, другими словами, до поступления ikm - го контейнера на исходную базу «m» в зависимости от возможных вариантов условий:

$$C_{ikm}(t_1) = \begin{cases} \dfrac{C_{ikm}(t_0) - X(t_1) > 0}{C_{ikm}(t_0) - X(t_1);} \\ \dfrac{C_{ikm}(t_0) - X(t_1) = 0}{0;} \\ \dfrac{C_{ikm}(t_0) - X(t_1) < 0 \wedge k \in \Psi\{\{NK_{mn}(t_1)\};\ n = z_m^{(1)}(t_1); vid_{mn}(t_1) = i\}}{R\{T_{mn}(t_1) \times y_{mn}(t_1);\ m;\ z_m^{(1)}(t_1)\};} \\ \dfrac{C_{ikm}(t_0) - X(t_1) < 0 \wedge k \notin \Psi\{\{NK_{mn}(t_1)\};\ n = z_m^{(1)}(t_1); vid_{mn}(t_1) = i\}}{0.} \end{cases}$$

Итак, остаточное время пребывания ikm - го контейнера на маршруте уменьшается в момент t_1 на величину узлового интервала, если его значение в предыдущий узловой момент превышает $X(t_1)$. В случае равенства этих величин искомое остаточное время равно нулю, что равнозначно высказыванию «ikm - й контейнер в текущий момент поступил на исходную базу». Если данная разница меньше нуля, значит ikm - й контейнер находится на исходной базе и далее следует проверка принадлежности ikm - го контейнера последовательности контейнеров, начавших в момент t_1 обслуживание первоочередной заявки. Если такая принадлежность обнаружена, остаточное время обслуживания заявки данным контейнером будет равно времени оборота заявки. В противном случае остаточное время до поступления контейнера на исходную базу равно нулю.

33. Введем двоичный индикатор возвращения ikm - го контейнера в момент t_1 на исходную базу и определим его значение:

$$y_{ikm}(t_1)=\delta[C_{ikm}(t_0),\,X(t_1)].$$

34. Определим накопленное время пребывания ikm - го контейнера на исходной базе для случаев:

1). Контейнер находится на базе в предыдущий момент t_0, и в случае начала обслуживания очередной заявки в этот момент он не вошел в состав номеров контейнеров, начавших это обслуживание либо по причине несоответствия его вида требуемому заявке виду, либо из-за нехватки резервного времени до начала ремонта2 для времени оборота контейнера, либо по причине небольшого объема заявки. В этом случае накопленное время простаивания контейнера в ожидании запроса на обслуживание первоочередной заявки увеличивается на длину узлового интервала.

2). Условие отличается от предыдущего тем, что данный номер вошел в состав последовательности номеров контейнеров, начавших в момент t_0 обслуживание заявки, либо данный контейнер с момента t_0 не присутствует на базе, либо в момент t_1 не поступил на базу. Накопленное время простаивания данного номера контейнера приравнивается к (-1).

3). В момент t_1 порожний ikm- й контейнер поступил на базу, завершив оборот обслуживания. Его накопленное время простаивания началось. Для этого состояние искомого автомата приравнивается к функциональному нулю, означающему начало отсчета накопления.

Приведем формулу:

$$D_{ikm}^{(0)}(t_1)=\begin{cases}\dfrac{y_{ikm}^{(0)}(t_0)=y_m^{(1)}(t_0)=1\wedge n=z_m^{(1)}(t_0)\wedge vid_{mn}(t_0)=i\wedge \\ \wedge k\notin\{NK_{mn}(t_0)\}\vee y_m^{(1)}(t_0)=0\vee y_m^{(1)}(t_0)=1\wedge vid_{mn}(t_0)\neq i}{D_{ikm}^{(0)}(t_0)+X(t_1);} & (1)\\ \dfrac{y_{ikm}^{(0)}(t_0)=y_m^{(1)}(t_0)=1\wedge n=z_m^{(1)}(t_0)\wedge vid_{mn}(t_0)=i\wedge \\ \wedge k\in\{NK_{mn}(t_0)\}\vee(1-y_{ikm}^{(0)}(t_0))\times(1-y_{ikm}(t_1))=1}{-1;} & (2)\\ \dfrac{(1-y_{ikm}^{(0)}(t_0))\times y_{ikm}(t_1)=1}{0.} & (3)\end{cases}$$

35. Состояние автомата накопленного времени пребывания mn - й заявки на маршруте вычисляется по формуле:

$$D_{mn}(t_1)=\begin{cases}\dfrac{n\in\{Z_m^{(0)}(t_1)\}\wedge n=z_m^{(1)}(t_1)\wedge y_{mn}(t_1)=1}{0;} & (1)\\[2ex] \dfrac{n\in\{Z_m(t_1)\}\wedge N_{mn}(t_1)=N_{mn}(t_0)\wedge s_{mn}(t_1)<S(N_{mn}(t_1))}{D_{mn}(t_0)+X(t_1);} & (2)\\[2ex] \dfrac{n\in\{Z_m(t_1)\}\wedge N_{mn}(t_1)=N_{mn}(t_0)\wedge s_{mn}(t_1)=S(N_{mn}(t_1))}{D_{mn}(t_0).} & (3)\end{cases}$$

На этой формуле завершается описание условных функционалов переходов состояний автоматов, определяющих структурно-функциональные особенности выделенных модулей-агрегатов модели. Перейдем к построению модуля-агрегата цели, или, другими словами, к экономическому блоку модели.

Модуль-агрегат цели представляет собой завершающий, экономический блок имитационной модели контейнерных перевозок.

Автоматы тела модуля-агрегата цели, определяющие накопление и усреднение за весь период T моделирования доходных и расходных статей экономических взаиморасчетов грузовладельцев и обслуживающих их субъектов, используются при построении функции цели в задаче максимизации усредненной прибыли интересующей разработчика и (или) пользователя m - й исходной базы.

Расчеты доходной части экономического блока модели

Приведем формулы, рассчитывающие слагаемые $DB_m^{(r)}(t_1)$ $(r=\overline{1,5})$ накопленного дохода $DB_m^*(T)$ m - й базы за весь период моделирования T. Напомним, что при построении модели используются инициальные вероятностные автоматы Мура с детерминированными выходами. Это означает, что расчет значений состояний автоматов на текущий момент t_{n+1} производится на основе значений соответствующих автоматов, заданных (рассчитанных) на предыдущий момент модельного времени t_n $(n=0,1,2,...)$.

Структура моделирующей программы носит концентрический характер и состоит из трех блоков.

Первый блок является подпрограммой для получения псевдослучайных чисел.

Второй блок предназначен для моделирования элементарного переходного цикла (для реализации алгоритма ТУФП перевычисления состояний автоматов модулей-агрегатов в каждый узловой момент). В целом эти действия могут быть записаны следующим образом:

$$ТУФП(t_n) \to ТУФП(t_{n+1}).$$

В третьем блоке осуществляется моделирование поведения системы на протяжении всего периода моделирования. Временной аргумент в формулах данного блока будет накапливаться за счет добавления очередного узлового интервала

$$T(t_{n+1}) = T(t_n) + X(t_{n+1}).$$

По завершении работы цикла: (блок2 + блок3) с целью экономии компьютерной памяти производится переход (перезапись):

$$ТУФП(t_n) \leftarrow ТУФП(t_{n+1}),$$

а затем происходит повторение цикла.

Для облегчения записи и чтения формул, а также программной реализации каждый предыдущий узловой момент обозначим как t_0, а каждый следующий узловой момент – как t_1.Тогда

$$t_1 = t_0 + X(t_1).$$

Временной аргумент третьего блока будет записан следующим образом:

$$T(t_1) = T(t_0) + X(t_1).$$

Выше было введено обозначение $DB_m^{(r)}(t_1)$ $(r = \overline{1,5})$ для слагаемых накопленного за период моделирования дохода m - й базы $DB_m^*(T(t_0))$, рассчитываемых в текущем узловом интервале. Расшифруем значения r:

1). Грузовладельцы оплачивают m - й железнодорожной администрации-собственнице стоимость перевозки и дополнительные сборы (соответствующий процент отходит m - й базе) за время пребывания (контейнеро-сутки) заявок на m - й территории. Оплата фиксируется в момент пересечения обслуживаемой заявкой первой межгосударственной станции передачи, в результате чего такая заявка поступает на территорию соседней страны и базы. В этом случае $r = 1$.

Введем следующие договоренности:

- Под номером «ноль» будем идентифицировать, собственно, m - ю базу;

- Номером «один» будет обозначен терминал поступления контейнеров и погрузки грузов текущей заявки, относящийся к m - й исходной территории;

- Первая межгосударственная станция передачи (СП) будет обозначена под номером «два». Тогда условие $y_{mn}^{(s)}(t_1) = y_{mn}^{(2)}(t_1) = 1$ означает, что mn - я заявка в момент t_1 пересекла первую межгосударственную СП. Приведем формулу первого слагаемого дохода m - й исходной базы:

$$DB_m^{(1)}(t_1) = \sum_{n \in \{Z_m(t_1)\}} y_{mn}^{(2)}(t_1) \times \Psi\{TAR_{im}^{(пер)} + DS_{im}\,; i = vid_{mn}(t_1)\} \times D_{mn}(t_1) \times V_{mn}(t_1).$$

Здесь $(TAR_{im}^{(пер)} + DS_{im})$ – сумма тарифа за перевозку и дополнительных сборов, оплачиваемая грузовладельцем за одни контейнеро-сутки пребывания заявки на m - й исходной территории. Доход рассчитывается по каждой mn - й заявке только в случае пересечения этой заявкой в момент t_1 первой межгосударственной СП, с учетом накопленного времени обслуживания данной заявки и ее объема (необходимого количества необходимого вида обслуживающих заявку контейнеров). Доход суммируется по всем номерам заявок, обслуживаемых на данный момент контейнерами m - й базы.

2). Грузовладельцы оплачивают m - й исходной базе стоимость пользования контейнерами по всему маршруту следования каждой из заявок. В этом случае $r = 2$. Оплату удобно рассчитывать в момент пересечения заявками первой межгосударственной станции передачи.

$$DB_m^{(2)}(t_1) = \sum_{n \in \{Z_m(t_1)\}} y_{mn}^{(2)}(t_1) \times \Psi\{TAR_{im}^{(полз)}; i = vid_{mn}(t_1)\} \times \Psi\{\frac{T_{mnq}}{2}; q = N_{mn}(t_1)\} \times$$
$$\times V_{mn}(t_1),$$

где $TAR_{im}^{(полз)}$ - тариф, оплачиваемый грузовладельцем m - й базе за использование одного контейнера i - го вида в течение одних суток.

3). В том случае, когда m - я база является базой назначения, грузовладельцы оплачивают ей стоимость перевозки и дополнительные сборы за время пребывания (контейнеро-сутки) заявок на ее территории. Доход базы фиксируется в случае реализации единичного значения в момент t_1 индикатора поступления контейнеров на СП назначения под номером $S - 2$. В этом случае $r = 3$.

$$DB_m^{(3)}(t_1) = \sum_{m_j \neq m} \sum_{n \in \bigcup\{Z_{m_j}(t_1)\}} \delta[M_{m_jn}^{(наз)}(t_1); m] \times \delta[S; S(N_{m_jn}(t_1))] \times \delta[s_{m_jn}(t_1);$$

$$S-2] \times y_{m_jn}^{(S-2)}(t_1) \times \Psi\{(TAR_{im_j}^{(пер)} + DC_{im_j}); i = vid_{m_jn}(t_1)\} \times V_{m_jn}(t_1) \times$$

$$\times \Psi\{(\frac{T_{m_jnq}}{2} - D_{m_jn}(t_1)); q = N_{m_jn}(t_1)\};$$

$(j \in \{J\})$.

4). Рассмотрим случай, когда m - я база (страна, железнодорожная администрация) является транзитной. В этом случае грузовладельцы через экспедиторов оплачивают m - й базе стоимость транзитной перевозки по территории m - й страны. Оплату договоримся фиксировать в момент пересечения заявками границы m - й страны на входах ее станций передачи, соответствующих маршруту заявок.

Введем последовательность номеров стран, входящих в маршрут следования m_jn - й заявки:

$$\{M_{m_jn}(t_1)\} = \{M(N_{m_jn}(t_1)\};$$

Введем также последовательность входящих номеров СП:

$$\{S_{m_jn}^{(1)}(t_1)\} = \{0, 2, 3, \ldots, S(N_{m_jn}(t_1)) - 2\}.$$

Так, 0 – это m_j - я база-администрация, 1 – терминал поступления контейнеров и погрузки грузов текущей заявки, 2 – пересечение заявкой первой пограничной СП и ее поступление на первую транзитную территорию, 3 – заявка поступает на следующую транзитную территорию. И, наконец, последнее обозначение $S(N_{m_jn}(t_1)) - 2$ относится к входящей станции передачи страны назначения в случае ее пересечения m_jn - й заявкой в момент t_1. При этом выделим «m» как одну из транзитных баз (транзитных территорий) для заявки под номером «n» $(n \in \bigcup\{Z_{m_j}(t_1)\})$, обслуживаемой m_j - й базой, то есть $m \neq m_j$, $j \in \{J\}$.

Определим номер СП, являющейся входящей для m - й базы:

$$s_m(t_1) = P\{\{M_{m_jn}(t_1)\}; \{S_{m_jn}^{(1)}(t_1)\}; m\}.$$

В данном случае применяем модельный оператор $P\{\}$ поиска значения номера СП, являющейся входящей для m - й территории. Сравнивая последовательность номеров территорий прохождения заявок, включая номера транзитных территорий, и последовательность номеров входящих СП, находим значение номера СП, которое имеет тот же порядковый номер, что и m - я транзитная территория. Приведем пример. Пусть

$$\{M_{m_j n}(t_1)\} = \{2,4,7,1,3,5\}; \quad \{S^{(1)}_{m_j n}(t_1)\} = \{0,2,3,4,5,6\}.$$

Выберем $m=1$. То есть транзитная территория под индивидуальным номером «1» имеет четвертый порядковый номер. Следовательно, четвертой по счету входящей СП будет СП, имеющая индивидуальный номер 4.

Приведем формулу текущего дохода m - й транзитной базы от транзита одной заявки, поступившей на вход m - й территории в момент t_1, например, $m_j n$ - й заявки:

$$DB_{mm_j n}(t_1) = (1-\delta[m;M^{(omn)}_{m_j n}(t_1)] \times \delta[m;M^{(наз)}_{m_j n}(t_1)]) \times \delta[s;s_m(t_1)] \times y^{(s)}_{m_j n}(t_1) \times$$
$$\times \Psi\{TAR^{(nep)mp}_{im_j}; i = vid_{m_j n}(t_1)\} \times V_{m_j n}(t_1) \times \Psi\{T^{(s+1)}_{m_j nq}; q = N_{m_j n}(t_1)\};$$

где $T^{(s+1)}_{m_j nq}$ - время прохождения $m_j n$ - й заявкой по m - й территории, соответствующей s - й входящей СП $(s = s_m(t_1))$.

Определим суммарный текущий доход m - й базы, ставшей транзитной для всех поступивших в момент t_1 на m - ю территорию заявок, следующих по маршрутам $N_{m_j n}(t_1)$:

$$DB^{(4)}_m(t_1) = \sum_{m_j \neq m} \sum_{n \in \bigcup\{Z_{m_j}(t_1)\}} DB_{mm_j n}(t_1); \quad j \in \{J\}.$$

5). Рассчитаем текущий доход m - й базы-собственницы за пользование ее контейнерами, обслуживающими попутные заявки в процессе возвращения на исходную, m - ю базу $(r=5)$.

Напомним, что при описании модуля-агрегата «mns - я станция передачи» были введены вероятностные автоматы, фиксирующие, соответственно, возможность начала обслуживания в момент t_1 на s - й СП попутной заявки контейнерами, обслужившими основную, mn - ю заявку, и количество СП, которое должна пересечь попутная заявка от s - й СП до СП назначения:

$$a_{mn}^{(s)-}(t_1) = \xi\, a_{mn}^{(s)-}(t_1); \quad b_{mn}^{(s)-}(t_1) = \xi\, b_{mn}^{(s)-}(t_1).$$

Оплата базе-собственнице фиксируется в момент начала обслуживания попутной заявки, индикатором чего является выполнение равенств:

$$y_{mn}^{(s)-}(t_1) = 1; \quad a_{mn}^{(s)-}(t_1) = 1.$$

Приведем формулу текущего дохода $DB_m^{(5)}(t_1)$ m - й базы-собственницы за использование порожних контейнеров, выполнивших основную заявку:

$$DB_m^{(5)}(t_1) = \sum_{n \in \{Z_m(t_1)\}} \delta[s; s_{mn}^{(-)}(t_1)] \times y_{mn}^{(s)-}(t_1) \times a_{mn}^{(s)-}(t_1) \times (1 - \delta[s;1] \times \delta[s;0]) \times$$

$$\times V_{mn}(t_1) \times \Psi\{TAR_{im}^{(полз)}; i = vid_{mn}(t_1)\} \times \sum_{v=s-1}^{s-b_{mn}^{(s)-}(t_1)} \Psi\{T_{mnq}^{(v)-}; q = -N_{mn}(t_1)\}.$$

В целом, все текущие доходы m - й базы на момент t_1 будут равны:

$$DB_m(t_1) = \sum_{r=1}^{5} DB_m^{(r)}(t_1).$$

Накопленный доход m - й базы за весь период моделирования до текущего момента t_1, а также за текущий узловой интервал будет равен:

$$DB_m^*(T(t_1)) = DB_m^*(T(t_0)) + DB_m(t_1).$$

Расходная часть экономического блока модели

Определим накопленное за весь период моделирования вплоть до текущего момента t_1 время пребывания контейнеров m - й базы на плановом ремонте (ремонте2):

$$D_m^{(\Delta рем2)*}(T(t_1)) = D_m^{(\Delta рем2)*}(T(t_0)) + \sum_{i=1}^{I} \sum_{k \in \{NK_{im}^{(0)}(t_0)\}} (1 - y_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_0)) \times (1 -$$

$$- \delta[C_{ikm}^{(\Delta рем2)}(t_0); -1]) \times X(t_1).$$

Аналогично определится накопленное время пребывания контейнеров m - й базы в ремонте на маршрутах (ремонте1) за период моделирования $T(t_0) + X(t_1)$:

$$D_m^{(\Delta рем1)*}(T(t_1)) = D_m^{(\Delta рем1)*}(T(t_0)) + \sum_{i=1}^{I} \sum_{k \in \{NK_{im}^{(\Delta рем1)}(t_0)\}} (1 - y_{ikm}^{(\Delta рем1)}(t_0)) \times (1 -$$

$$- \delta[C_{ikm}^{(\Delta рем1)}(t_0); -1]) \times X(t_1).$$

Вычислим накопленное время простоя контейнеров на m - й базе за период моделирования:

$$DK_m^{(0)*}(T(t_1)) = DK_m^{(0)*}(T(t_0)) + \sum_{i=1}^{I} [\sum_{k \in \{NK_{im}^{(0)}(t_0)\}} y_{ikm}^{(0)}(t_0) +$$

$$+ \sum_{k \in \bigcup_{n \in \{Z_m(t_0)\}} \{NK_{mn}(t_0)\}} y_{ikm}(t_0)] \times (1 - \delta[D_{ikm}^{(0)}(t_1); -1]) \times X(t_1).$$

Вычислим накопленное время задержек заявок на m - й базе ввиду отсутствия контейнеров необходимого директивно заданного вида и требуемой емкости (необходимого количества контейнеров):

$$D_m^{(0)*}(T(t_1)) = D_m^{(0)*}(T(t_0)) + \sum_{n \in \{Z_m^{(0)}(t_0)\}} (1 - y_{mn}(t_0)) \times X(t_1).$$

Общие накопленные расходы базы за период моделирования будут равны:

$$RB_m^*(T(t_1)) = D_m^{(\Delta рем2)*}(T(t_1)) \times E_m^{(\Delta рем2)} + D_m^{(\Delta рем1)*}(T(t_1)) \times E_m^{(\Delta рем1)} +$$

$$+ DK_m^{(0)*}(T(t_1)) \times EK_m^{(0)} + D_m^{(0)*}(T(t_1)) \times E_m^{(0)};$$

где

$E_m^{(\Delta рем2)}$ - средние суточные расходы базы на плановый ремонт контейнера, находящегося на базе;

$E_m^{(\Delta рем1)}$ - средние суточные расходы базы, относящиеся к ремонту контейнера на маршруте;

$EK_m^{(0)}$ - суточные издержки за простой на базе одного контейнера;

$E_m^{(0)}$ - суточные издержки за простой одной заявки на базе.

Приведем формулу накопленной прибыли m - й базы:

$$PB_m(T(t_1)) = DB_m^*(T(t_1)) - RB_m^*(T(t_1)).$$

Усредненная прибыль базы будет иметь вид:

$$dPB_m(T(t_1)) = PB_m(T(t_1)) \div T(t_1).$$

Постановка задачи сводится к определению стратегии управления функционированием m - й базы, при которой максимизируется усредненная прибыль базы:

$$dPB_m(T(t_1)) \to \max$$

К управляемым параметрам задачи можно отнести:

- количество контейнеров каждого вида на балансе базы;
- нормативы тарифов за перевозку, за дополнительные сборы и за пользование контейнерами;
- нормативы расходов за ремонт1 и ремонт2;
- нормативы издержек за сверхнормативный простой контейнеров и заявок на базе.

При варьировании параметрами следует во многих случаях использовать рекомендации экспертов, имеющих опыт в области экономических взаиморасчетов грузовладельцев и обслуживающих их субъектов.

Оптимизация функции цели на основе имитационной модели заключается в том, что анализируемые здесь закономерности не являются неизменными, а меняются с изменением решения. Процесс поиска неизвестных решений носит адаптивный характер и представляет собой чередование многократной имитации поведения исследуемой системы Θ и реализации очередной оптимизирующей процедуры (шага итерации) по информации, получаемой в результате имитации. Процесс завершается нахождением такого набора X оптимизируемых параметров, при котором усредненное значение показателя качества (критерия эффективности)

$f^{(0)}(X,\Theta)$ принимает наименьшее (наибольшее) значение при определенных ограничениях на средние значения остальных показателей.

Развитие методов оптимизации в имитационном моделировании в основном связано с развитием прямых методов стохастического программирования: метода стохастической аппроксимации, стохастического квазиградиентного метода, задачи многоэтапного стохастического программирования. Однако, относительная сложность математических средств этих методов для пользователя и длительное время проигрывания сценария каждой итерации (имитация + оптимизация), а, следовательно, и время сходимости процесса в целом обусловливают поиск других оптимизирующих процедур.

Поиск процедур оптимизации, используемых в сочетании с имитационными моделями, показал, что язык вероятностных автоматов удобен для анализа и синтеза алгоритмов случайного поиска при оптимизации процессов [37]. В данном случае используется имитационный аналог метода оптимизации с помощью **коллектива оптимизирующих вероятностных автоматов** (название принадлежит авторам [37]), реализующего процесс случайного поиска с обучением в сочетании с вероятностно-автоматным моделированием. Здесь также имеет место чередование процесса многократной имитации исследуемой системы и оптимизирующей итерации – до завершения процесса сходимости функции цели.

Идея автоматной оптимизации заключается в том, чтобы каждым параметром оптимизации управляли стохастические автоматы A_i, независимые друг от друга. Входом такого автомата является знак приращения показателя качества:

$$\Delta\Theta_N = \Theta_N - \Theta_{N-1},$$

а выходом – знак изменения i - го параметра:

$$\Delta X_i^{(N)} = \alpha_i^{(N)} \cdot a_i;$$

где $a_i = const > 0$, является модулем шага вдоль i - го параметра, а

$\alpha_i^{(N)} = \pm 1$ - знак этого шага на N - м такте.

Направление рабочего шага по i - му параметру однозначно определяется состоянием i - го автомата $(i = \overline{1,n})$:

$$\alpha_i = \begin{cases} +1, если\, S = S_j \; (j = \overline{1,m}), \\ -1, если\, S = S_j \; (j = \overline{m+1, 2m}); \end{cases}$$

Состояние автомата изменяется на соседнее слева или справа в зависимости от его входа в соответствии с принципом линейной тактики: закреплять то действие, которое поощряется $(\Delta\Theta < 0)$, и менять на обратное то действие, которое наказывается $(\Delta\Theta \geq 0)$. Для того, чтобы в пространстве параметров оптимизируемая система не двигалась вдоль одной прямой, в работу автоматов вводится несинхронность. В данном случае несинхронность вводится путем допущения обратного действия с определенной вероятностью $p > \frac{1}{2}$. При этом каждый раз некоторая малая случайная часть автоматов совершает "неразумные действия", т.е. изменяет номера своих состояний не по алгоритму линейной тактики, а в обратном направлении, что снимает опасность синхронизации автоматов.

Приведем сценарий автоматной оптимизации:

1).Обозначим через $X_1,...,X_i,...,X_I$ управляемые количественные параметры, через $\Theta^{(0)}$ - оптимизируемый показатель качества; проведем имитацию в очередной узловой момент t_1; Вычислим значение $\Theta^{(0)}$ при заданном ограничении на остальные показатели качества (выбор осуществляется в зависимости от целей заказчика).

2).Зададим входные значения оптимизирующих автоматов по каждому X_i- му управляемому параметру, т.е. знаки приращения параметров $\alpha_i^{(1)}$, а также модули a_i их приращения на первом такте: $\Delta x_i^{(1)} = \alpha_i^{(1)} \cdot a_i$;

3).Вычислим новые значения параметров с учетом их приращений.

4).Проведем имитацию на текущем узловом интервале времени для вычисления $\Theta^{(1)}$.

5).Проверим знак приращения Θ.

6).Найдем функцию штрафа.

7).Проведем выбор алгоритма, вычисляющего номер состояния каждого оптимизирующего автомата.

8).Определим знак изменения для каждого параметра.

9).Определим усредненное значение показателя качества Θ^*:

$$\Theta^{*(u+1)} = \frac{\Theta^{*(u)} + \Theta^{(u+1)}}{2};$$

где u - номер такта;

10).Проведем сравнение усредненных значений показателя качества на текущем и предыдущем тактах, при этом в зависимости от результата осуществляется либо завершение процесса сходимости, а также выдача искомых рекомендаций по значениям параметров, либо осуществляется переход на пункт 1. При этом узловой момент t_1 переименовывается на момент t_0, которому присваивается абсолютное значение t_1 $(t_0 = t_1)$. Значения всех автоматов модели, вычисленные на момент t_1 в предыдущей итерации, будут в качестве аргумента иметь узловой момент t_0, а их совокупность будет в последующей итерации вектором исходной информации. Затем определяется очередной узловой интервал $X(t_1)$ и повторяется вычисление всех автоматов модели и показателя качества на новый момент $t_1 = t_0 + X(t_1)$.

Алгоритм оптимизации

1) Реализация ТУФП модели в узловой момент t_N, определение численного значения $\Theta^{(0)}$ - показателя качества; $N = 0,1,2,...$;

2) $\Delta x_i^{(N+1)} = \alpha_i^{(N+1)} \cdot a_i$; $N = 0,1,...$, т.е. задается знак и модуль приращения X_i - го управляемого параметра на $(N+1)$ - м номере такта.

3) $X_i^{(N+1)} = X_i^{(N)} + \Delta x_i^{(N+1)}$; т.е. вычисляется новое значение i - го параметра.

4) Реализация ТУФП в узловой момент t_{N+1}, определение численного значения показателя качества $\Theta^{(N+1)}$ - с новыми значениями параметров $X_i^{(N+1)}$.

5) Проверка знака приращения для показателя качества:

$$\Delta\Theta_{N+1} = \Theta^{(N+1)} - \Theta^{(N)};$$

6) Определение функции штрафа:

$$C_{N+1} = \begin{cases} 1 & при\, \Delta\Theta_{N+1} \geq 0, штраф, \\ 0 & при\, \Delta\Theta_{N+1} < 0, нештраф; \end{cases}$$

$$\overline{C_{N+1}} = \begin{cases} 1 & при\, C_{N+1} = 0; \\ 0 & при\, C_{N+1} = 1; \end{cases}$$

7) При $\Delta\Theta < 0$ действуем по алгоритму A_0:

$$j^{(N+1)}=\begin{cases} j^{(N)}, & \textit{если} \quad j^{(N)}=1, \\ j^{(N)}-1, & \textit{если} \quad j^{(N)}\le m, \\ j^{(N)}+1, & \textit{если} \quad j^{(N)}>m, \\ j^{(N)}, & \textit{если} \quad j^{(N)}=2m; \end{cases}$$

При $\Delta\Theta \ge 0$ действуем по алгоритму A_1:

$$j^{(N+1)}=\begin{cases} j^{(N)}+1, & \textit{если}\, j^{(N)}\le m, \\ j^{(N)}-1, & \textit{если}\, j^{(N)}> m; \end{cases}$$

Здесь

- $j^{(N)}$ - номер состояния автомата на N - м такте поиска.

8) $A_{N+1}=p_{N+1}\cdot(\overline{C_{N+1}}\cdot A_0+C_{N+1}\cdot A_1)+q_{N+1}\cdot(C_{N+1}\cdot A_0+\overline{C_{N+1}}\cdot A_1)$;

Здесь

- A_{N+1} - вероятностный алгоритм линейной тактики, p_{N+1} - элемент случайной двоичной последовательности, единичные значения которого индицируют закрепления поощряемых действий и смену действий, которые наказываются, на обратные – на $(N+1)$-м такте.

- q_{N+1} - элемент - на $(N+1)$-м такте - случайной двоичной последовательности, единичное значение которого означает сбой тактики алгоритма A_{N+1}, т.е. реализацию действий, обратных действиям при $p_{N+1}=1$;

$$p_{N+1}=1-q_{N+1};$$

Алгоритм $A_{N+!}$ реализуется для каждого i- го оптимизирующего автомата. В результате определяется $\alpha_i^{(N+1)}$ - знак изменения i- го параметра;

9) $$\Theta^{*(N+1)}=\frac{\sum_{n=1}^{N+1}\Theta^{(n)}}{N+1};$$

10) $$\Delta\Theta^{*(N+1)}=\Theta^{*(N+1)}-\Theta^{*(N)};$$

На основе анализа последовательности $\Delta\Theta^{*(N)}$ отыскивается экстремум $\Delta\Theta^{*}$. Зададимся величиной ε. Если, начиная с некоторого N, для всех $n>N$ выполняется условие $\left|\Delta\Theta^{*(n)}\right|\le\varepsilon$, то $\Theta^{*(N)}$ - приближенное значение искомого оптимизируемого показателя качества. Необходимые и достаточные условия сходимости последовательности $\Delta\Theta^{*(N)}$ доказываются рядом теорем о сходимости, дающих удобный для проверки набор требований сходимости [22].

11) В случае невыполнения условий пункта 10 осуществляется переход на пункт 1.

Скорость сходимости зависит от памяти оптимизирующих автоматов, от случайных последовательностей p и q, управляющих несинхронностью автоматов. Чем больше единиц в последовательности p, тем более локализуется процесс поиска оптимума, при меньшей средней вероятности $M_p \approx \frac{1}{2}$ система блуждает по всему пространству параметров, ненадолго задерживаясь в локальных экстремумах. Этот режим соответствует глобальному поиску. Влияют на сходимость и величины модулей шагов сходимости по каждому из параметров. Регулировка всех этих величин осуществляется в диалоговом режиме в процессе реализации алгоритма оптимизации.

Заключение

В монографии приведено изложение новых подходов к разрешению научной задачи поиска путей оптимального управления современными логистическими системами (ЛС).

Результаты проведенных научных исследований дают возможность сделать следующие выводы:

1. Современная логистика рассматривается как теория и практика управления потоковыми процессами, одним из основных методологических принципов которой является системный подход, в соответствии с которым логистические системы рассматриваются как сложные системы, требующие для своего исследования привлечения методов искусственной имитации.

2. Сложность логистических систем диктует выбор средства их формального описания в виде универсальной алгоритмической схемы с концептуальной базой и с требованием высокой степени адекватности ЛС. В монографии обосновывается выбор математических схем моделирования и приводятся результаты теоретико-вероятностного обоснования принципиальной возможности построения автоматных и агрегатных схем имитации ЛС.

3. Разработаны и приведены принципы построения единой информационной технологии создания автоматных моделей ЛС, объединяющие постулаты обеспечения адекватности автоматных моделей, статистическое исследование информационных и материальных потоков ЛС и иерархическое построение этапов разработки модели.

4. С целью ускорения и облегчения решения задач логистики осуществлен поиск свойств, имеющих место в ЛС и автоматных моделях, завершившийся их выявлением - свойств ограниченности внутренних связей и отсутствия пространственного последействия (свойств так называемых процессов перетекания). Применение выявленных свойств проиллюстрировано на примерах создания моделей транспортного узла и логистической системы «производство-транспорт-потребление».

5. Применение аппарата многослойных популяций к процессам перетекания позволило в задаче о кольцевых транспортных перевозках реализовать аналитический подход для переходного и для стационарного периодов функционирования модели имитируемой системы.

6. Обоснование применения совокупности вероятностных автоматов в качестве операторов при построении тела кусочно-линейного агрегата позволило моделировать сложные ЛС с учетом их временной, качественной и структурно-функциональной неоднородности в непрерывном режиме времени с дискретным вмешательством случая.

Основным строительным «материалом» таких моделей для ЛС являются модули-агрегаты, описывающие **однородные** информационные и материальные потоки. В монографии предлагаются примеры описания модулей-агрегатов, составляющих модели морского узла и морской паромной переправы. В качестве показательного примера предложено описание агрегатной модели межгосударственных контейнерных железнодорожных перевозок с подробным пояснением построения алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакаев А.А., Костина Н.И., Яровицкий Н.В. Автоматные модели экономических систем. – К.: «Наукова думка», 1970. – 190 с.

2. Бакаев А.А., Костина Н.И., Яровицкий Н.В. Имитационные модели в экономике. – К.: «Наукова думка», 1978. – 300 с.

3. Бакаев А.А., Гриценко В. И., Сакунова И.С. Автоматное моделирование в задачах исследования сложных систем. – К.: «Логос», 2007. – 208 с.

4. Беляев Ю.К. Линейчатые марковские процессы и их приложения к задачам теории надежности. Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятности и математической статистике, 1960.

5. Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: «Наука», 1965, 524 с.

6. Берж. Теория графов. – М.: «Иностранная литература», 1970, 319с.

7. Бусленко Н.П. К теории сложных систем. Известия АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1968.

8. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: «Наука», 1978, 309 с.

9. Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории сложных систем. – М.: «Советское радио», 1973. -439 с.

10. Бухараев Р.Г. Вероятностные автоматы. – В кн.: Вероятностные методы и кибернетика. Вып. 3. Казань, 1964, с. 72-84.

11. Гаджинский А.М. Логистика. – М.: Информационно-внедренческий центр «Маркетинг», 2000. – 375 с.

12. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов . – М.: «Физматгиз», 1962. – 476 с.

13. Глушков В.М. Введение в кибернетику. – К.: Изд – во АН УССР, 1964. – 323 с.

14. Глушков В.М. Основы безбумажной информатики. – М.: «Наука». 1982. – 552 с.

15. Гриценко В.И., Лапа А.П., Панченко А.А. Проблемно-ориентированное моделирование производственно-транспортных систем. – Киев.: «Наукова думка», 1987. – 158 с.

16. Гриценко В.И., Мирошниченко В.М. и др. Новые информационные технологии для управления транспортно-технологическими комплексами. Труды 6-го Международного симпозиума ИФАК по управлению в транспортных системах. – Париж, 1989.

17. Гриценко В.И., Лапа А.П. и др. Технология реального времени для оперативного управления железнодорожным транспортом. Труды 2-й

международной конференции по применению передовых технологий на транспорте. – Миннесота, США, 1991.

18. Гриценко В.И., Урсатьев А.А. Распределенные информационные системы широкого применения. Концепция. Опыт разработки и внедрения. – Киев.: «Наукова думка», 2005. – 317 с.

19. Дал У., Нигард К. СИМУЛА-67 – универсальный язык программирования. – М.: «Мир», 1969, 99 с.

20. Дуб Дж. Вероятностные процессы. – М.: «Иностранная литература», 1959, 605 с.

21. Екеева З.Ж., Костина Н.И., Яровицкий Н.В. Популяционный подход к решению экологических задач. – К.: журнал «Кибернетика и системный анализ», № 5, 1992.

22. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. – М.: «Наука», 1976. – 239 с.

23. Жеребин В.М., Романов А.Н., Одинцов Б.Е. Автоматизация проектирования экономических информационных систем. – М.: «Наука», 1988. – 170 с.

24. Калиниченко Л.А. СЛЕНГ – экспериментальный язык программирования, ориентированный на описание и моделирование вычислительных машин и систем. Труды семинара «Теория автоматов». К.:РИО ИК АН УССР, выпуск 1, 1967.

25. Кальченко А.Г. Логістика. Навчальний посібник. – К.: КНЕУ, 2002. – 148 с.

26. Коваленко И.Н. О некоторых классах сложных систем. Известия АН СССР, Техническая кибернетика, № 6. 1964.

27. Коваленко И.Н. О некоторых классах сложных систем. Известия АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 1965.

28. Коваленко И.Н. О некоторых классах сложных систем. Известия АН СССР, Техническая кибернетика, № 3, 1965.

29. Коробов Н.М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел. – М.: ДАН СССР, № 115, 1957, с.1062-1065.

30. Кукин В.И. Информатика: организация и управление. – М.: «Экономика», 1991. – 175 с.

31. Кутах Ю.А., Сакунова И.С. Научно-методическое обеспечение принятия оптимальных решений по стабилизации работы паромных сообщений. – К.: Збірник наукових праць «Економіко-математичне моделювання соціально-економічних систем», випуск № 7 Міжнародного науково-навчального центру ЮНЕСКО інформаційних технологій та систем НАНУ, 2003.

32. Кутах О., Миронюк І., Сакунова І. Імітаційне моделювання матеріальних потоків у логістичній системі «Виробництво-транспорт-

споживання». – К.: Збірник наукових праць Київського університету економіки і технологій, випуск 4, 2003.

33. Леншин И.А., Смольняков Ю.И. Логистика. – М.: «Машиностроение», 1996. – 246 с.

34. Марковиц Г., Хауспер Б., Карр Г. СИМСКРИПТ _ Алгоритмический язык для моделирования. – М.: «Наука», 1966, 151 с.

35. Мирошниченко В.М., Сакунова И.С., Торопов Б.И. О модели пассажиропотоков в крупных пассажирских комплексах. Международная научная конференция «Транспорт XX1 века», секция 4, Варшава, 19-21, 11.2001, с. 285-292.

36. Подлесный П.И., Сакунова И.С. Моделирование транспортно-перегрузочного процесса в порту. – К.: журнал «Економіст», № 6, 2003.

37. Расстригин Л.А., Рипа К.К. Автоматная теория случайного поиска. – Рига.: «Зинатне», 1973. – 342 с.

38. Сакунова И.С., Яровицкий Н.В. Задача о кольцевом маршруте. К.: журнал «Кибернетика», № 3, 1973.

39. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: «Центр навчальної літератури», 2004. – 446 с.

40. Спицнадель В.Н. Основы системного анализа. Учеб. пособие.- СП б.: Бизнес – пресса, 2000. – 325 с.

41. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: «Мир», 1964, 498 с.

42. Цетлин М.Л. Конечные автоматы и моделирование простейших форм поведения. – УМН, 1963, 18, № 4.

43. Шрейдер Ю.А. Модели обучения и управляющие системы. – В кн.: Стохастические модели обучаемости. – М.: 1962, с. 465 - 479.

44. Яровицкий Н.В. Предельное поведение замкнутой системы автоматов со случайным выходом. – К.: журнал «Кибернетика», № 1, 1965.

45. Яровицкий Н.В. Исследование стационарного режима замкнутой системы, находящейся под действием периодического случайного входного сигнала. – К.: журнал «Кибернетика», № 1, 1966.

46. Яровицкий Н.В. Вероятностно-автоматное моделирование систем. – К.:журнал «Кибернетика», № 5, 1966.

47. Ballou R.H. Business Locistics Management. 3ed.- New York: Prentice-Hall International Inc., 1993.

48. Bowersox D.J., Calarbo R.J., Wagenheim G. Introduction to Transportation. New York: MacMillan, 1982.

49. Coyle J.J., Bardi E.J., Langley C.J. The Management of Business Logistics. 5 ed.- St.Paul, MN: West Publishing Co., 1992.

СОДЕРЖАНИЕ

Підп. до друку 10.06.2009. Формат 60×84 1/16. Папір. офс. Гарнітура "Таймс". Друк. офс.
Ум. друк. арк. 12,3. Обл.-вид. арк. 13,8. Наклад 150 прим. Зам. 288.

Віддруковано у видавництві "ЛОГОС" з оригіналів автора.
Свідоцтво ДК № 201 від 27.09.2000 р.
01030, Київ-30, вул. Богдана Хмельницького, 10, тел. 235-6003