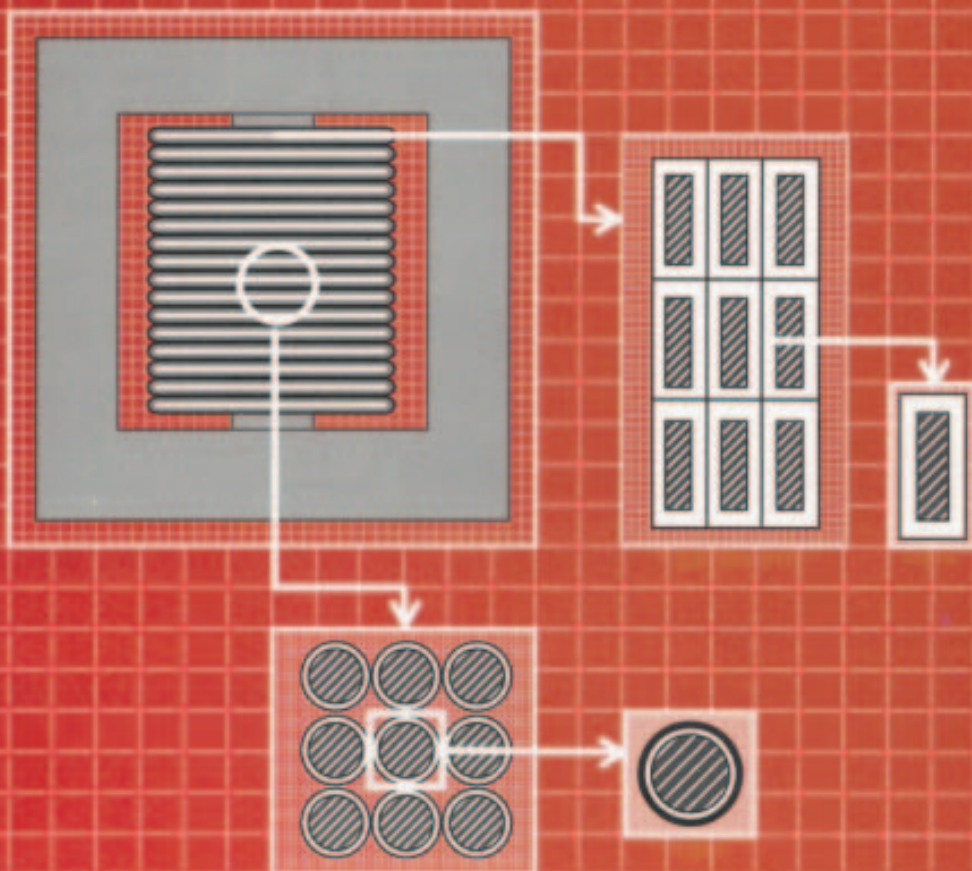


А.Д. Подольцев
И.Н. Кучерявая

Многомасштабное моделирование в электротехнике



НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

А.Д. ПОДОЛЬЦЕВ
И.Н. КУЧЕРЯВА

**МНОГОМАСШТАБНОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ**

КИЕВ 2011

УДК 621.3:004.94

Рассмотрен комплекс вопросов, связанных с применением метода многомасштабного моделирования для изучения электромагнитных процессов в электротехнических устройствах, композиционных материалах и биологических объектах с учетом их сложной внутренней иерархической структуры. Рассмотрено построение многоуровневых математических и компьютерных моделей для численного расчета электромагнитного поля и высокочастотных параметров обмоток силового трансформатора, эффективных характеристик композиционных диэлектрических материалов и электрических процессов в теле человека, находящегося под высоковольтной линией электропередачи.

Монография предназначена для студентов и аспирантов электротехнических специальностей, а также специалистов, занимающихся вопросами расчета электромагнитного поля в силовом электроэнергетическом оборудовании. Может также представлять интерес для специалистов в области биомедицины, изучающих воздействие электромагнитного поля на биологические объекты.

Розглянуто комплекс питань, пов'язаних із застосуванням методу багатомасштабного моделювання для вивчення електромагнітних процесів в електротехнічних пристроях, композиційних матеріалах і біологічних об'єктах з урахуванням їхньої складної внутрішньої ієрархічної структури. Розглянуто побудову багаторівневих математичних і комп'ютерних моделей для чисельного розрахунку електромагнітного поля та високочастотних параметрів обмоток силового трансформатора, ефективних характеристик композиційних діелектричних матеріалів й електричних процесів у тілі людини, яка перебуває під високовольтною лінією електропередачі.

Монографія призначена для студентів і аспірантів електротехнічних спеціальностей, а також спеціалістів, які займаються питаннями розрахунку електромагнітного поля у силовому електроенергетичному обладнанні. Може також зацікавити спеціалістів у галузі біомедицини, які вивчають вплив електромагнітного поля на біологічні об'єкти.

Рецензенты:

член-корреспондент НАН Украины *В.Ф. Резцов*
доктор технических наук, профессор *Ю.М. Васецкий*

*Утверждено к печати ученым советом
Института электродинамики НАН Украины.
Протокол № 1 от 3 февраля 2011 г.*

ISBN 978-966-02-5942-3

© А.Д. Подольцев, И.Н. Кучерявая, 2011

© Ин-т электродинамики НАН Украины, 2011

**A.D. PODOLTSEV
I.N. KUCHERYAVAYA**

**MULTISCALE MODELING
IN ELECTRICAL ENGINEERING**

KIEV 2011

UDC 621/3 : 004.94

This book presents a number of problems related to using the multi-scale modeling for investigation of electromagnetic processes taking place in electric equipment, composite materials and biological organisms considering their complex internal hierarchical structure. The multilevel mathematical and computer models are developed to calculate numerically the electromagnetic field and high-frequency parameters of power transformer windings, to determine effective characteristics of dielectric composite materials and to analyze electric processes in human body being under high-voltage transmission line.

The book is intended for the students and postgraduate students specialized in electrical engineering as well as for specialists concerned with computations of electromagnetic field in electrical power equipment. It may also be of interest for specialists in the field of biomedicine who study the influence of electromagnetic field on biological organisms.

Reviewers:

V.F. Reztsov, Corresponding Member, Ukrainian National Academy of Sciences,
Yu.M. Vasetsky, Dr. Sc. (Eng.), Prof.

ISBN 978-966-02-5942-3

© A.D. Podoltsev, I.N. Kucheryavaya, 2011
© Institute of Electrodynamics, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	8
Глава 1	
МНОГОУРОВНЕВЫЕ МОДЕЛИ. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ (обзор)	11
1.1. Многоуровневые модели	11
1.2. Метод многомасштабного моделирования	16
1.3. Мультифизические задачи	22
1.4. Применение метода к задачам электродинамики и электротехники	23
Глава 2	
МНОГОУРОВНЕВЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ	26
2.1. Введение	26
2.2. Общие сведения из теории композиционных материалов	27
2.3. Многоуровневые модели при анализе электромагнитных процессов в материале со сложной структурой	32
2.4. Осредненная система дифференциальных уравнений Максвелла	37
2.5. Полевая задача на элементарной ячейке и расчет эффективных характеристик композита	42
2.6. Полевая задача на представительном элементе объема	46
2.7. Анализ электромагнитных процессов в магнитно-проводящем композиционном материале с регулярной структурой	50
2.8. Численное моделирование электротепловых процессов при протекании электрического тока в пористом проводнике	62
Глава 3	
МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИЦИОННОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ	76
3.1. Введение	76
3.2. Структура композиционного материала и результаты эксперимента	77
3.3. Использование классических моделей композита	80
3.4. Математические модели на двух разномасштабных уровнях	83
3.5. Результаты компьютерного моделирования	86

Глава 4

МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИЦИОННОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ	91
4.1. Введение	91
4.2. Структура композиционного материала и результаты эксперимента	92
4.3. Двухуровневая математическая модель композиционного материала	95
4.4. Результаты компьютерного моделирования	101

Глава 5

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПАРАМЕТРОВ МНОГОВИТКОВОЙ ОБМОТКИ НА ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЕ	106
5.1. Введение.....	106
5.2. Эквивалентное сопротивление многовитковой обмотки с массивными проводниками на различной частоте	109
5.2.1. Эквивалентное сопротивление единичного проводника с переменным током.....	110
5.2.2. Эквивалентное сопротивление единичного проводника при заданном внешнем магнитном поле	115
5.2.3. Эквивалентное сопротивление многовитковой обмотки трансформатора.....	119
5.3. Эквивалентное сопротивление многовитковой обмотки из провода типа литцендрат	122
5.4. Результаты экспериментальных исследований и сравнение их с расчетными данными	123

Глава 6

РАСЧЕТ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ОБМОТОК СИЛОВОГО ТРАНСФОРМАТОРА НА ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЕ МЕТОДОМ МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ	130
6.1. Введение.....	130
6.2. Эквивалентное сопротивление и эффективные диамагнитные свойства обмоток трансформатора на высокой частоте.....	133
6.3. Эффективные характеристики шихтованного магнитопровода	144
6.4. Расчет трехмерного магнитного поля силового трансформатора при различной частоте	146

Глава 7

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В УСТАНОВКЕ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА НА ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УРОВНЯХ.....	155
7.1. Введение.....	155

7.2. Компьютерный анализ электромагнитных и тепловых процессов при индукционном нагреве стального реактора с сыпучим материалом	159
7.2.1. Постановка электротепловой задачи и метод решения	159
7.2.2. Анализ результатов расчета	164
7.3. Компьютерное моделирование процессов в индукционной установке на двух пространственных уровнях	172
7.3.1. Математическая модель электротепловой задачи	172
7.3.2. Решение электромагнитной задачи на двух пространственных уровнях	177
7.3.3. Результаты компьютерного моделирования	181

Глава 8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАГНИТНЫХ НАНОЧАСТИЦ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ДЛЯ БИМЕДИЦИНСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

8.1. Применение магнитных наночастиц в биомедицине	186
8.2. Расчет величины магнитной силы, действующей на наночастицы	192
8.3. Магнитное поле и магнитная силовая функция для различных типов магнитных систем	195
8.4. Магнитофоретическое движение магнитных наночастиц в потоке жидкости	201
8.4.1. Расчет изменяющейся во времени концентрации магнитных частиц	201
8.4.2. Расчет траектории движения магнитных частиц в потоке жидкости во внешнем магнитном поле	207

Глава 9

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВНЕШНЕГО ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ТЕЛЕ ЧЕЛОВЕКА МЕТОДОМ МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

9.1. Введение	216
9.2. Переменное электрическое поле высоковольтной воздушной линии электропередачи на пространственном уровне человека	219
9.2.1. Двумерное квазистатическое поле воздушной линии электропередачи напряжением 110 кВ	220
9.2.2. Трехмерное электрическое поле в теле человека	222
9.3. Переменное электрическое поле на уровне биологической клетки	225
9.3.1. Постановка задачи и ее решение	226
9.3.2. Анализ результатов расчета	229
9.4. Переменное электрическое поле на уровне поры	232
9.4.1. Электрические диполи в неоднородном электрическом поле	235

Литература	240
-------------------------	-----

ПРЕДИСЛОВИЕ

Разработка нового электроэнергетического оборудования (силовых трансформаторов, реакторов, высоковольтных кабелей и др.), а также создание новых электротехнических устройств и композиционных материалов стимулируют развитие методов компьютерного моделирования и создание новых математических моделей и методик для расчета протекающих в них электромагнитных процессов и основных их характеристик.

В большинстве случаев для определенного класса электротехнических устройств не удастся создать универсальную математическую модель, описывающую электромагнитные процессы. В такой ситуации целесообразно разрабатывать и изучать иерархию моделей, последовательно все более точно описывающих каждое конкретное рассматриваемое устройство или определенный класс явлений. При таком подходе проверяются достоверность и точность более простых моделей путем сопоставления с результатами, полученными на более сложных моделях. К тому же использование моделей следующего поколения позволяет проводить более детальное и углубленное изучение конкретного электротехнического устройства или процесса.

Одним из современных подходов в электродинамике и электротехнике, позволяющим разрабатывать комплексные математические и компьютерные модели нового поколения, является многоуровневый подход, основанный на методе многомасштабного моделирования. Этот метод предназначен для изучения процессов и устройств, для которых необходимо учитывать их сложную внутреннюю иерархическую структуру как пространственную, так и в общем случае временную, и предполагает создание для исследуемого устройства или композиционного материала многоуровневых математических и компьютерных моделей нового поколения.

Метод многомасштабного моделирования первоначально возник и использовался в задачах исследования механических свойств композиционных материалов (см., например, [1–4]). Позднее с его по-

мощью изучались эффективные электромагнитные свойства таких материалов [5, 6]. В последнее десятилетие, в связи с созданием наномерных композиционных материалов и структур, компьютерному моделированию при их разработке отводится доминирующая роль, а многомасштабный подход является одним из основных направлений исследований в области нанотехнологий [7].

Таким образом, метод многомасштабного моделирования возник и применялся в основном для анализа механических, электромагнитных и тепловых процессов в композиционных материалах. В монографии на некоторых примерах показано, что наряду с материалами существует широкий класс электротехнических устройств со сложной внутренней иерархической структурой, анализ электромагнитных процессов в которых также необходимо проводить на компьютерных многоуровневых моделях нового поколения, создаваемых на основе метода многомасштабного моделирования. Это обстоятельство стало одним из ключевых моментов и определило одну из основных целей написания данной монографии, в которой в качестве примеров электротехнических устройств со сложной иерархической структурой рассмотрены силовой трансформатор и индуктор.

Одним из приоритетных направлений развития науки XXI столетия является изучение электромагнитных процессов в биологических системах. Как известно, живой организм представляет собой самую сложную иерархическую систему с множеством разномасштабных пространственных уровней. По мнению авторов, именно многоуровневые модели нового поколения целесообразно применять для анализа электромагнитных процессов в живых организмах, в том числе и в теле человека, и эти модели могут быть построены на основе метода многомасштабного моделирования. Один из примеров построения многомасштабной модели, позволяющей анализировать электрические процессы в теле человека, находящегося под высоковольтной линией электропередачи, приведен в главе 9 монографии.

Анализ опубликованных материалов показал, что на сегодняшний день существуют лишь разрозненные статьи и отсутствуют монографии, в которых систематически были бы рассмотрены вопросы применения метода многомасштабного моделирования и особенности его численной реализации для решения задач электродинамики и электротехники.

Данное издание, в котором рассмотрены общие вопросы применения метода многомасштабного моделирования в теории электромагнитного поля и на ряде примеров показано использование этого метода

для анализа электромагнитных процессов в композиционных материалах и электротехнических устройствах со сложной внутренней иерархической структурой, частично восполняет этот пробел.

Основной материал книги изложен в следующей последовательности. В главе 1 приведен обзор отечественных и зарубежных публикаций по применению метода многомасштабного моделирования в различных областях науки и техники. В главе 2 рассмотрены многоуровневые модели в теории электромагнитного поля и рассчитаны растекание тока в пористом проводнике и распределение в нем температуры, обусловленной действием джоулевого тепловыделения. В главах 3 и 4 исследованы электрические процессы в композиционном диэлектрическом материале с регулярной и стохастической структурой соответственно. Расчет эквивалентных параметров многовитковой обмотки трансформатора малой мощности, выполненной из сплошного проводника и из проводника типа литцендрат, проведен в главе 5. Параметры обмотки силового трансформатора на высокой частоте рассчитаны в главе 6. Определение и анализ активного сопротивления индуктора для высокочастотного нагрева с учетом неравномерного распределения плотности тока в массивных витках индуктора проведены в главе 7. В главе 8 на двух пространственных уровнях исследовано движение магнитных наночастиц в потоке жидкости и во внешнем неоднородном магнитном поле. В главе 9 представлены результаты анализа на четырех пространственных уровнях электрических процессов в теле человека, находящегося под воздушной линией электропередачи.

В заключение выскажем предположение, что стимулируемый современными исследованиями в области силового электрооборудования, нанотехнологий и электромагнитной биологии метод многомасштабного моделирования не только позволит решить многие сложные проблемы, но и в скором времени станет обязательным предметом при обучении студентов и аспирантов, специализирующихся в области вычислительной электродинамики.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам чл.-корр. НАН Украины В.Ф. Резцову и д.т.н., проф. Ю.М. Васецкому за внимательное рассмотрение работы и сделанные критические замечания, способствовавшие улучшению изложения материала.

Отзывы о книге, замечания и пожелания просим направлять по адресу: Украина, 03680, г. Киев-57, проспект Победы 56, Институт электродинамики НАН Украины. Электронный адрес: podol@ied.org.ua

Авторы

ГЛАВА 1

МНОГОУРОВНЕВЫЕ МОДЕЛИ. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ (ОБЗОР)

1.1. Многоуровневые модели

В современных условиях ускоренного развития компьютерных технологий, наращивания вычислительных мощностей, создания специализированного программного обеспечения все более расширяется круг задач, решаемых с помощью методов компьютерного моделирования. При этом интенсивно разрабатываются новые методы и подходы к моделированию. Компьютерные средства и методы моделирования применяются не только для количественного описания процессов и качественного исследования явлений в сложных физических объектах и системах с учетом их строения и свойств, но и для проектирования новых конструкций и материалов, а также для прогнозирования их свойств и характеристик.

Компьютерное моделирование представляется альтернативным, а во многих случаях единственно возможным методом исследования, который с успехом может дополнять, а в ряде случаев и заменять трудоемкие и дорогостоящие натурные эксперименты. При этом численные эксперименты дают возможность получать новые результаты, опережающие результаты экспериментов и отличающиеся своим многообразием и многосторонностью информации об исследуемом объекте. Более того, компьютерное моделирование позволяет интерпретировать экспериментальные данные и оценивать их достоверность, например, с точки

зрения их соответствия фундаментальным соотношениям баланса энергии, импульса и т.п. В отдельных же случаях компьютерные модели делают возможным прогнозирование свойств физических объектов, которые лежат за пределами современного эксперимента, например, когда речь идет о наноразмерных объектах.

Важную роль в компьютерном моделировании играет точность и экономичность расчета процессов и физических величин, характеризующих состояние системы. В последнее десятилетие в этом направлении активно развивается новый численный метод – *метод многомасштабного моделирования* [1, 2]. Он предназначен для решения определенного класса задач, в которых процессы и явления, имеющие место в малых объемах исследуемых объектов, оказывают существенное влияние на протекание процессов в больших областях, что имеет место в объектах со сложной вложенной иерархической структурой.

Метод многомасштабного моделирования применяется для исследования физических объектов, имеющих сложную в общем случае как пространственную, так и временную иерархические структуры, а также функциональную иерархию. Он основывается на комбинировании различных масштабных уровней в модельном описании всего объекта и организации обмена информацией между этими уровнями посредством "сшивания" решений соответствующих задач, относящихся к различным и, как правило, соседним уровням. Определяющую роль в процедуре сшивания разномасштабных уровней и в обмене информацией между ними играет правильный выбор масштабов, границ их раздела, условий согласования в виде граничных условий задач [1, 3, 4].

Под многомасштабностью подразумевается множественность пространственных и/или временных градаций соответственно линейного масштаба (например, нано-, микро-, миллиметровая и метровая размерные шкалы) и/или временного масштаба (в фемто-, пико-, нано-, микро-, миллисекундном и много выше временных диапазонах). Каждый масштабный уровень на этапе анализа формируется в соответствии со структурой и функциональной иерархией исследуемого объекта и характеризуется своими особенностями, различными электрическими, магнитными, механическими и другими физическими свойствами, а отсюда и описывается различными математическими моделями.

Важно отметить, что многомасштабность или вложенность иерархических уровней присуща всем реальным объектам, исследуемым в различных областях науки и техники, в том числе в электротехнике, материаловедении, гидродинамике, нанотехнологиях и др. На практике традиционно при проведении исследований, в том числе и при решении

полевых задач, рассматривается один из наиболее характерных для рассматриваемой задачи пространственный уровень. В то же время существует широкий класс задач, решение которых может быть получено лишь с учетом процессов на различных пространственных уровнях.

Некоторые наиболее характерные примеры задач в области электротехники, для решения которых необходимо рассмотрение на различных пространственных уровнях, приведены на рис. 1.1. В первую очередь это композиционные материалы, для расчета эффективных электромагнитных характеристик которых необходимо анализировать процессы на уровне микроструктуры материала, а также широкий класс электротехнических устройств с многovitковой обмоткой при анализе процессов на высокой частоте. При этом обмотка характеризуется эквивалентными параметрами, для расчета которых необходимо рассматривать вспомогательную задачу в окрестности единичного проводника на микроуровне. Следующий широкий класс задач – это биологические системы, испытывающие воздействие внешнего электромагнитного поля. При этом распределение и значение поля, например, на уровне клетки, определяются электромагнитными процессами на более высоких уровнях – на уровне человека в целом и уровне отдельных его органов.

В области биомедицины в исследованиях присутствуют как минимум два пространственных уровня – наноуровень, на котором исследуется движение молекул и наночастиц, а также более высокий макроскопический уровень устройства в целом, создающего, например, воздействующее электромагнитное поле.

Согласно результатам исследований в [5–9], многомасштабное моделирование в металлах и сложных материалах может быть проведено на четырех характерных уровнях, расположенных в порядке возрастания масштаба: атомарный масштаб ($\sim 10^{-9}$ м) для рассмотрения процессов на электронном уровне, микромасштаб ($\sim 10^{-6}$ м) для исследования взаимодействия между атомами, мезоскопический масштаб ($\sim 10^{-4}$ м) для анализа кристаллической микроструктуры и, наконец, макроскопический масштаб ($\sim 10^{-2}$ м и выше) для описания свойств материалов такими макроскопическими величинами, как плотность, температура, скорость, деформация, механическое напряжение. Таким подходом с применением многомасштабного моделирования детально изучается влияние нано-, микро- и мезоуровневых эффектов на макромасштабные явления, а также устанавливается связь между микроструктурой материалов и их свойствами на всех уровнях. Как результат, свойства макромасштабного объекта определяются структурой и свойствами всех вложенных уровней иерархической организации материала.

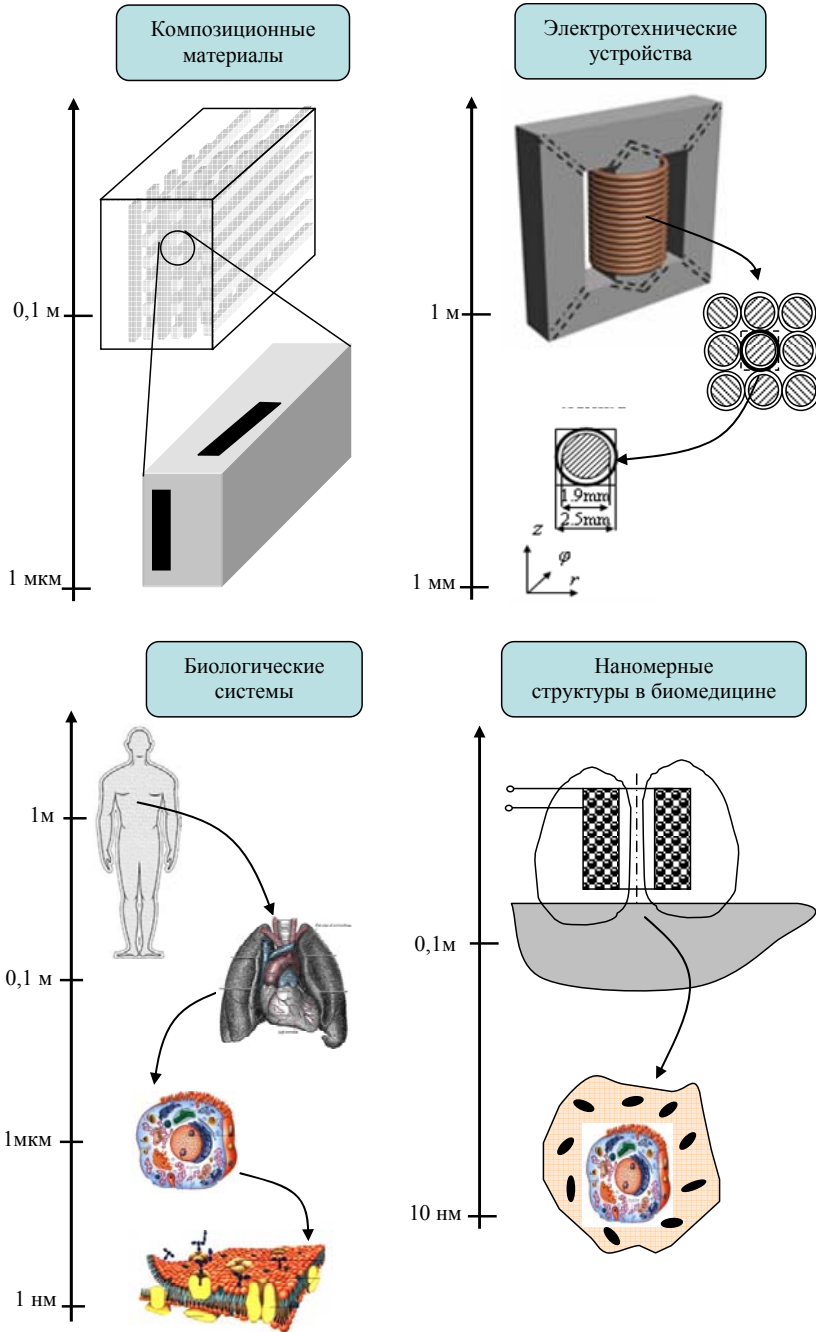


Рис. 1.1. Примеры материалов и систем со сложной иерархической пространственной структурой

Многомасштабное моделирование позволяет соединять различные научные и вычислительные модели. Так, для задач в области материаловедения на рис. 1.2 показаны иерархия моделей и порядок линейных размеров и временных диапазонов для различных структурных уровней [8, 10].

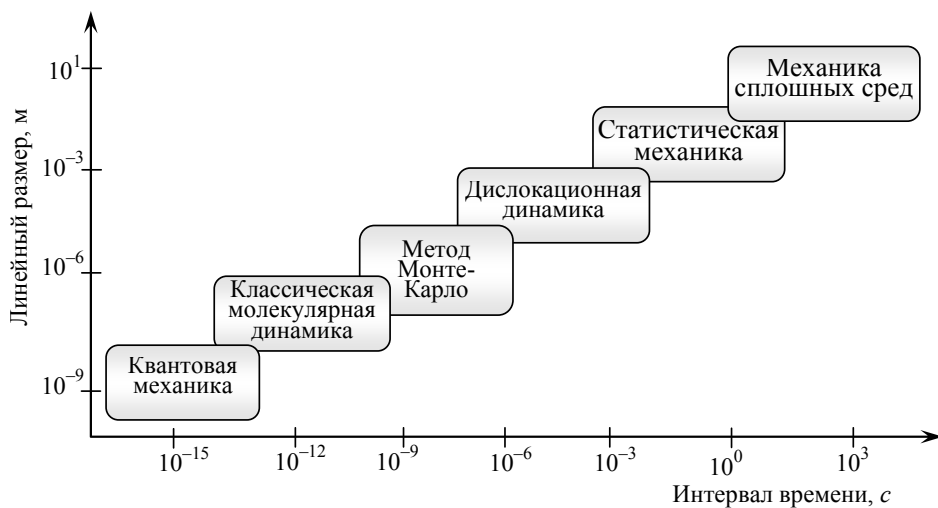


Рис. 1.2. Иерархия моделей на различных пространственных и временных уровнях, основанных на различных физических законах и использующихся при исследовании структуры и свойств материалов методом многомасштабного моделирования

В силу того, что каждый масштаб отличается своими особенностями и физическими свойствами, для моделирования на различных уровнях строится ряд моделей, основанных на положениях различных дисциплин. Процессы на разных масштабных уровнях могут определяться законами квантовой механики на одном масштабном уровне и классической механики – на другом уровне [7, 8, 10]. Еще один пример – применительно к задачам гидродинамики можно выделить три основных уровня [10, 11]. Первый – макроуровень в метровом и миллиметровом масштабе, где движение жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса в терминах скорости, плотности и температуры жидкости. Следующий промежуточный уровень связан с движением отдельных частиц и описывается уравнениями кинетической теории. И третий уровень – наноуровень, для которого положение и скорость отдельных атомов, формирующих жидкость, определяются законами молекулярной

динамики. В общем случае хорошо отлаженный математический аппарат молекулярной динамики позволяет проводить моделирование на масштабе до десятков и сотен нанометров.

Разработанные подходы и математический аппарат связи между различными методами, применяемыми на разных масштабных уровнях, позволяют связывать дискретные и непрерывные структурные элементы этих уровней, а также использовать дискретно-континуальные модели объектов [7, 12–14]. Поясним это на примере задач материаловедения [7, 9, 10]. Материал может рассматриваться как некоторый континуум и описываться методами механики сплошных сред. Наряду с этим существует и другой подход, при котором материал представляется набором дискретных атомных элементов, что на самом малом масштабе соответствует атомистическому моделированию. При построении иерархической модели для рассматриваемого материала процессы на нижнем уровне могут рассматриваться в рамках дискретных моделей, а на верхнем уровне – в рамках континуальной модели. В таком случае говорят о дискретно-континуальных моделях и применяют способы перехода от атомистических моделей к континуальным. Это позволяет путем рассмотрения нескольких уровней детализации материала и реализации многомасштабного моделирования выявлять масштабные эффекты и явления, исследовать материал от уровня его электронной структуры до макроскопических (механических, электромагнитных и др.) свойств.

1.2. Метод многомасштабного моделирования

Изучение объектов со сложной пространственной иерархической структурой предполагает, на первом этапе, выделение тех пространственных уровней, которые наиболее важны и характерны для данной конкретной задачи. Далее, для исследования объекта на каждом из этих уровней необходимо выбрать систему координат с указанием характерного масштаба и выделить *представительный элемент объема* – тот минимальный объем, основные физические свойства которого позволяют охарактеризовать свойства объекта на данном пространственном уровне – см. рис. 1.3. Для случая объекта или среды с периодической структурой базовым элементом структуры является *элементарная ячейка* – минимальный элемент объема, с помощью параллельного переноса которого по трем координатным осям может быть реконструирована вся структура материала. Для такого объекта с периодической структурой в качестве представительного элемента объема выбирается его элементарная ячейка. В качестве примера на рис. 1.4 показана элементарная

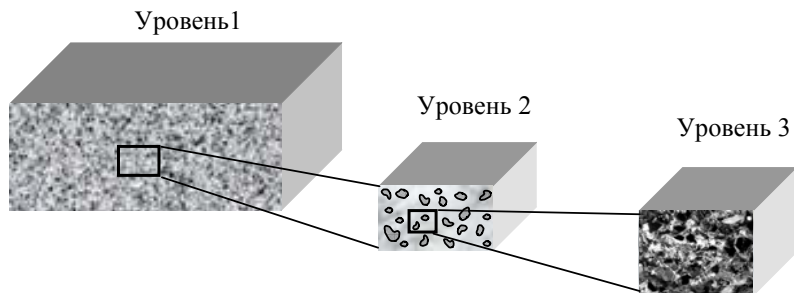


Рис. 1.3. Схема рассматривания трех разномасштабных уровней композиционного материала с выбором представительного элемента объема

ячейка периодической (регулярной) пористой структуры, в которой исследуется движение жидкости [11]. Отдельный виток многовиткового индуктора также может рассматриваться в качестве представительного элемента объема (или элементарной ячейки при регулярной структуре расположения витков) и значения его электрических параметров будут приблизительно (без учета краевых эффектов) характеризовать значения эквивалентных параметров индуктора в целом.

На следующем этапе выполняется решение задачи на каждом уровне и организуется необходимый обмен данными между уровнями. В зарубежной литературе такой обмен называется *bridging scales* [3, 4, 14, 15].

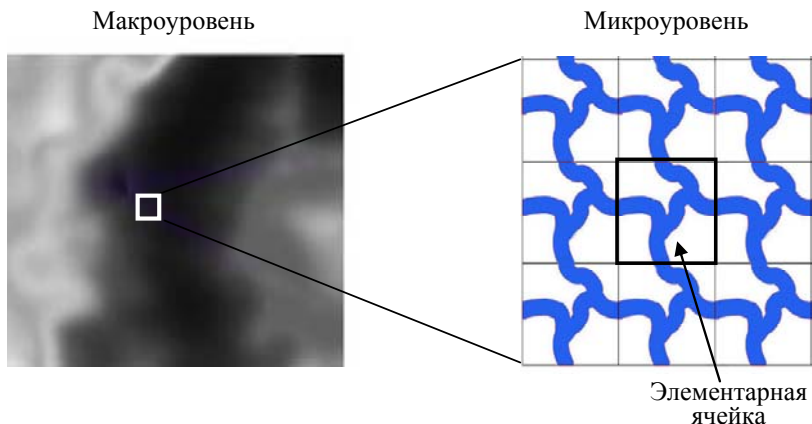


Рис. 1.4. Рассмотрение двух разномасштабных уровней с выбором элементарной ячейки на микроуровне при исследовании характеристик течения жидкости в пористой среде с периодической структурой

Основные перечисленные этапы решения задачи с помощью метода многомасштабного моделирования схематически показаны на рис. 1.5. Обмен информацией между уровнями в зависимости от решаемой задачи может осуществляться двумя основными способами (рис. 1.6): путем последовательного решения задач и путем одновременного решения задач на всех уровнях. Последовательное решение возможно для линейных задач. Проведение расчетов осуществляется как по цепочке возрастающих масштабов – движение «снизу–вверх», например, как при создании новых материалов и прогнозировании их свойств [8, 10, 16]), так и по цепочке убывающих масштабов – движение «сверху–вниз», например, как при исследовании биологических систем [17]. Пример для случая четырехуровневой модели при движении «снизу–вверх» показан на рис. 1.7.

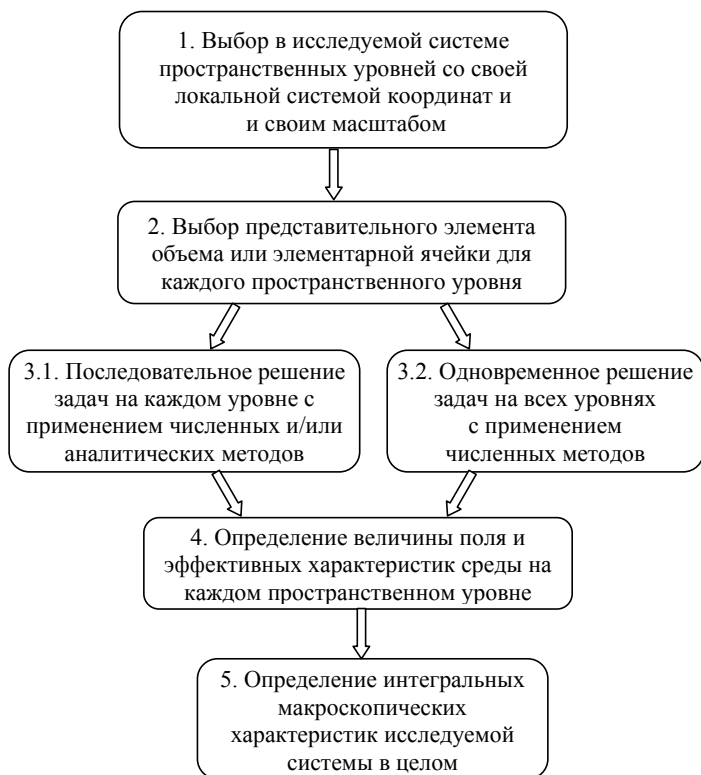


Рис. 1.5. Основные этапы реализации метода многомасштабного моделирования для решения задач на различных пространственных уровнях

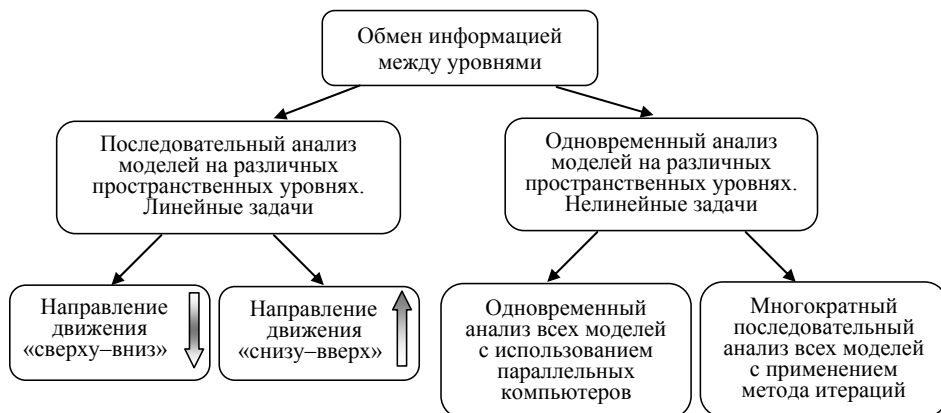


Рис. 1.6. Варианты последовательности решения задач в многоуровневых моделях

Одновременный анализ моделей необходимо выполнять для нелинейных задач. Такой анализ может проводиться с применением параллельных компьютеров, каждый из которых решает задачу на своем уровне и в ходе решения непрерывно обменивается данными с другими компьютерами. Также возможен итерационный метод решения нелинейных задач на различных пространственных уровнях. В качестве примера на рис. 1.8 показана схема расчета эффективных характеристик материала с нелинейными свойствами на двух пространственных уровнях. В качестве такого материала может выступать композит из ферро-

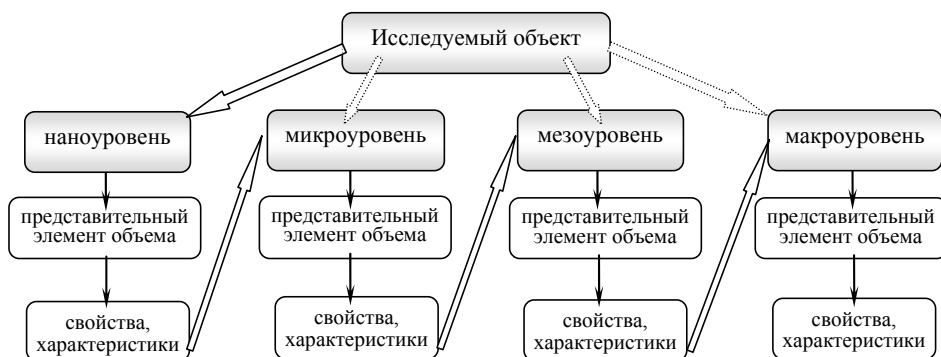


Рис. 1.7. Схема иерархического рассмотрения многоуровневых физических и математических моделей при многомасштабном моделировании, начиная от нижнего и до высшего уровня (движение «снизу–вверх»)

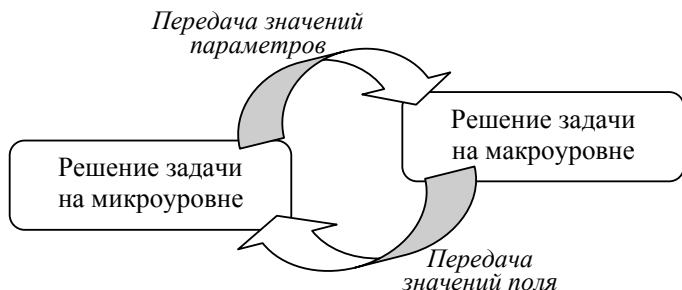


Рис. 1.8. Схема непрерывного моделирования, реализуемая с помощью последовательного решения задач двух уровней на ряде итераций

магнетика. При этом на макроуровне рассчитывается магнитное поле, по его значению на микроуровне рассчитываются магнитное микрополе и эффективная магнитная проницаемость материала, а затем по значению проницаемости уточняется поле на макроуровне и так до сходимости значений поля и параметров с заданной точностью.

Метод многомасштабного моделирования представляет уникальную возможность для проведения численных расчетов с целью изучения физических явлений и процессов, происходящих на разных масштабных уровнях вплоть до уровня отдельных атомов и молекул вещества, что осуществимо благодаря развитому математическому аппарату метода молекулярной динамики. Типичным масштабом для молекулярного моделирования являются десятки и сотни нанометров. Это обуславливает широкое применение метода многомасштабного моделирования в различных областях науки и техники: материаловедении [6, 8], порошковой металлургии [18], квантовой электронике [2, 19], физической химии [16, 20–22], в медицине и биологии [3, 23–26] и многих других областях [2, 27, 28]. К примеру, с помощью многомасштабного метода удастся промоделировать процессы, составляющие основу новых биомедицинских технологий – доставки биологически активных веществ через клеточную мембрану, исследовать механизмы проводимости ионных каналов клетки, спроектировать молекулы – прототипы будущих лекарственных препаратов, изучить условия протекания и переходные состояния химических реакций. Кроме того, на различных масштабах исследуются [1, 3, 6, 8, 10, 16, 19]: явления в наноэлектронике, наномеханике, микромеханике, в магнитных и сверхпроводящих структурах, физике дефектов материалов, процессы их деформации и разрушения, в механике жидкостей и газов, химии полимеров и др.

В настоящее время метод многомасштабного моделирования является особо востребованным в области моделирования наноструктурных материалов и наномерных устройств [29–32]. Именно этот метод признается ключевым к описанию наноразмерных объектов, поскольку многоуровневый подход в сочетании с методами молекулярной динамики позволяет исследовать характеристики веществ и материалов на атомарном и молекулярном масштабах и выявить их практически важные свойства на макроуровне. С помощью многомасштабного метода выполняется компьютерное моделирование наноструктурных материалов и композитов, физико-химических процессов в нанотехнологиях.

Строение нанообъектов исследуется по схеме: атомная структура, молекулы, супрамолекулярные системы и нанокластеры. Уникальность компьютерного многомасштабного моделирования в приложении к нанонауке и наноиндустрии обусловлена тем, что соответствующие экспериментальные исследования для нанообъектов сложны и требуют дорогостоящей высокоточной аппаратуры. Многомасштабный метод исследования находит применение в разработке перспективных технологий создания материалов и конструкций, которые в своей основе используют нано- и микромасштабные объекты, включая нанопокрывтия, нанослои и объемные наноэлементы, такие как нанотрубки, нанопроволоки, а также в разработке технологий проектирования композиционных материалов, содержащих наночастицы. Тем самым использование метода содействует решению задач компьютерного прогнозирования свойств материалов, виртуального проектирования новых наноструктурных материалов, создания прототипов наносистем и всесторонней проработки новых технологических решений. Подтверждением сказанному являются разработки, описанные в [32] и многочисленных статьях, опубликованных в специализированных изданиях [27, 28]. В частности, компьютерное проектирование наноактюатора с помощью многомасштабного и мультифизического моделирования на основе моделей молекулярной динамики, квантовой механики и механики сплошных сред проведено авторами работы [33].

Благодаря многомасштабному моделированию возникло новое направление в исследовании материалов – компьютерное материаловедение. В этом направлении моделируются реальные и новые виртуально спроектированные для дальнейшего производства структурные материалы. Моделирование их свойств и структуры проводится, начиная от электронного уровня и заканчивая макроуровнем, где исследуются механические свойства и характеристики, такие как деформация, прочность, упругопластические свойства материалов, распространение де-

фактов, сопротивление разрушению и др. Путем проведения численных экспериментов с применением метода многомасштабного моделирования может быть выполнена параметрическая оптимизация при конструировании новых материалов и отработаны подходы к их испытаниям.

1.3. Мультифизические задачи

Наиболее общей методологией многомасштабного моделирования является так называемый гетерогенный многомасштабный метод [34–36], который предусматривает решение связанных задач различной физической природы на разных масштабах. В таком случае говорят о мультифизическом моделировании в рамках многомасштабного метода.

Отметим, что в общем случае мультифизическое моделирование относится к классу методов одноуровневого моделирования. Оно предполагает построение составной математической модели и выполнение на ее основе компьютерных расчетов связанных между собой разных физических явлений и одновременно протекающих различных физических процессов. Это могут быть связанные электромагнитные и тепловые процессы, гидродинамические и химические процессы, электрохимические процессы, процессы теплопереноса в результате химических реакций, процессы при движении магнитных жидкостей и плазмы, электромеханические явления и взаимодействия и т. п. Решение таких связанных мультифизических задач основывается на использовании ряда взаимозависимых свойств и характеристик одного физического процесса (например, электрического поля) от другого процесса (температурного поля, биологических эффектов или химических реакций). Мультифизическое моделирование может быть проведено с помощью современных программных пакетов, таких как Comsol Multiphysics, Ansys Multiphysics, CFD-ACE Multiphysics Solver, LS-Dyna, в которых реализуется численный метод конечных элементов.

Таким образом, мультифизический (или гетерогенный согласно [35]) многомасштабный метод используется, когда физические процессы, во-первых, рассматриваются на различных уровнях (пространственных и в общем случае и временных уровнях) и, во-вторых, имеют различную физическую природу и относятся к разным научным дисциплинам. Как отмечается в работе [35], предложенное название гетерогенный к многомасштабному методу подчеркивает тот факт, что на различных масштабах рассматриваются явления и процессы различной физической природы, описываемые в рамках различных научных дисциплин, например, моле-

кулярной динамики на микроуровне и континуальной механики на макроуровне.

В работе [35] рассмотрено применение метода гетерогенного многомасштабного моделирования для изучения реологически сложных жидкостей, микрожидкостей и твердых тел. В работе [25] применен гетерогенный многомасштабный метод для исследования прохождения нуклеиновых кислот ДНК через нанопоры. Решена мультифизическая задача, объединяющая связанные модели молекулярной динамики и гидродинамики для описания соответствующих процессов на каждом из ряда выбранных масштабных уровней. В статьях [37, 38] на макроуровне, в объеме всей установки индукционного нагрева, решены связанные электромагнитная и тепловая задачи, что является примером "гетерогенности" в понимании авторов работ [34–36] на отдельно взятом уровне.

1.4. Применение метода к задачам электродинамики и электротехники

Основы численного расчета электромагнитных процессов в композиционном материале методом многомасштабного моделирования рассмотрены в монографии [39].

Метод многомасштабного моделирования находит применение при решении задач магнетизма и микромагнетизма [40, 41]. Так, в работе [40] проанализированы гистерезисные явления в магнитах с учетом магнитной анизотропии, сдвоенных границ и микроструктурных изменений в материале. В статье [41] использован атомистический и микромагнитный подход к расчету энергии и локального поля микромагнита. Для расчета магнитных систем предлагается применять адаптивную конечно-разностную сетку.

Применительно к задачам электростатики близкая по сути методика расчета электрического поля предложена в статье [42], где последовательно рассмотрен ряд подобластей уменьшающихся размеров по сравнению с размерами всей исследуемой системы. Вначале сложные части системы исследованы упрощенно. Степень детализации увеличивается при переходе к следующей подобласти с более малым масштабом. Аналогичный подход рассмотрения процессов на разных уровнях и все более "крупным планом" отдельных элементов проводников многовитковой катушки использован в работе [43].

В публикациях [44, 45] применительно к решению разномасштабных электромагнитных задач предложены способы построения структурированных и неструктурированных сеточных элементов для

различных сложных конфигураций исследуемых систем. Структурированным сеточным разбиением расчетной области называют сетку, каждый узел которой имеет одинаковое количество соседних узлов, а неструктурированные сетки состоят из треугольных или тетраэдных элементов в зависимости от размерности задачи.

В работе [46] методом многомасштабного моделирования исследованы высокочастотные явления в силовом трансформаторе. При этом обмотка трансформатора рассмотрена как композиционная среда с периодической структурой. На основе многомасштабного иерархического подхода к моделированию рассчитаны значения эквивалентных эффективных параметров обмотки трансформатора (индуктивность и сопротивление) в широком диапазоне изменения частоты – от 50 Гц до 10 МГц. При этом учтены скин-эффект, эффект близости, геометрические особенности элементов трансформатора. Задачи низкого уровня рассмотрены в двумерной постановке, а на макроуровне всего электромагнитного устройства реализована трехмерная модель расчета магнитного поля трансформатора, по результатам которого определены эквивалентные параметры обмотки с учетом потерь в шихтованном сердечнике и эффективных диамагнитных свойств проводников обмотки в высокочастотном магнитном поле.

В статье [47] путем рассмотрения многовитковых обмоток электромагнитных устройств на различных пространственных уровнях проведен расчет эффективного сопротивления и потерь в них.

В рамках последовательного рассмотрения моделей для разных масштабов известен подход непрерывного моделирования соседних уровней, а именно итеративного решения взаимосвязанных задач на нескольких уровнях. Примером тому может служить подход, предложенный в работе [37], для расчета электротепловых процессов в установке индукционного нагрева. Здесь рассмотрены два пространственных уровня: микроуровень – отдельный виток индуктора и макроуровень – вся установка. Электромагнитные задачи на двух уровнях решены методом последовательных приближений. Основным параметром системы при этом являлось эквивалентное сопротивление индуктора. Схема такого подхода, реализующая один из возможных вариантов метода многомасштабного моделирования, показана на рис. 1.8.

Анализ опубликованных литературных источников показывает, что в различных областях науки и техники существует широкий класс задач в области математического и компьютерного моделирования, решаемых с помощью метода многомасштабного моделирования. Метод позволяет проводить комплексные исследования сложных объектов,

достигать глубокого понимания природы явлений, механизмов их действия на различных уровнях детализации объекта. Применение метода дает возможность строить и реализовывать модели взаимосвязанных явлений и процессов, решать и связывать дву- и трехмерные задачи, достигать большой точности и эффективности расчетов.

Анализ опубликованных исследовательских материалов показывает, что на сегодняшний день применительно к задачам электродинамики и электротехники существуют лишь разрозненные публикации, в которых рассмотрены конкретные задачи с применением этого метода, и в то же время отсутствуют монографии по этой тематике. Данное издание частично восполняет этот пробел.

ГЛАВА 2

МНОГОУРОВНЕВЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

2.1. Введение

При анализе воздействия электромагнитного поля на проводящие среды как отдельный класс задач следует рассматривать случай микро-неоднородных сред – материалов, содержащих малые неоднородности или структурные элементы, разделенные границей раздела и отличающиеся электрофизическими параметрами. К числу таких задач, представляющих практический интерес, можно отнести задачи исследования:

- поведения композиционных материалов при протекании электрического тока или под воздействием электромагнитного поля;
- электротепловых процессов в пористых проводниках или проводниках с дефектами и трещинами при протекании сильного электрического тока;
- электромагнитных процессов в двухфазной зоне кристаллизующегося металла, который находится во внешнем магнитном поле;
- электромагнитных процессов в биологических объектах, в том числе в теле человека при воздействии внешнего электрического, магнитного и электромагнитного полей и др.

В связи с наличием в среде малых структурных неоднородностей особенностями численного решения перечисленных задач являются:

- 1) использование осредненной системы уравнений Максвелла, описывающей распределение средних значений векторов поля в областях, масштаб которых значительно превосходит характерный размер неоднородностей;

2) получение макроскопических определяющих соотношений (материальных уравнений) исходного материала и расчет его эффективных характеристик;

3) анализ распределения электромагнитного поля на двух разно-масштабных уровнях – осредненного поля на уровне масштаба исходного образца и быстроменяющегося поля на уровне масштаба малых структурных элементов.

В этой главе применительно главным образом к композиционным материалам изложены особенности численного расчета электромагнитного поля в микронеоднородных проводящих средах. В частности, в разделах 2.2–2.6 изложены общие теоретические подходы к решению задач для материалов, в структуре которых существуют разно-масштабные уровни, в разделах 2.7 и 2.8 приведены результаты решения конкретных задач, имеющих прикладное значение.

2.2. Общие сведения из теории композиционных материалов

В последнее десятилетие значительно расширилось производство композиционных материалов (композитов), в том числе и нанокompозитов и их применение в различных областях техники. Это связано с тем, что композиционные материалы обладают комплексом свойств и особенностей, отличающих их от традиционных материалов, что открывает широкие возможности для совершенствования существующих и разработки новых конструкций и технологических процессов. Значительные успехи в конструировании большого числа новых материалов обусловили необходимость углубленного изучения происходящих в них процессов и исследования широкого круга научных проблем, связанных с композиционными материалами, в том числе изучения поведения таких материалов при протекании электрического тока или при воздействии внешнего электрического, магнитного либо электромагнитного поля.

Композиционный материал представляет собой многофазную систему, состоящую из двух и более компонентов (структурных элементов), разделенных границей раздела фаз и сохраняющих свои индивидуальные свойства. Теоретическое исследование процессов в композиционных материалах предполагает проведение определенной их классификации по тем или иным признакам. На основании данных работ [1–4] все композиты могут быть разбиты на два больших класса – материалы с регулярной (периодической) структурой и с нерегулярной (стохастической) структурой. В свою очередь, материалы каждого из классов в

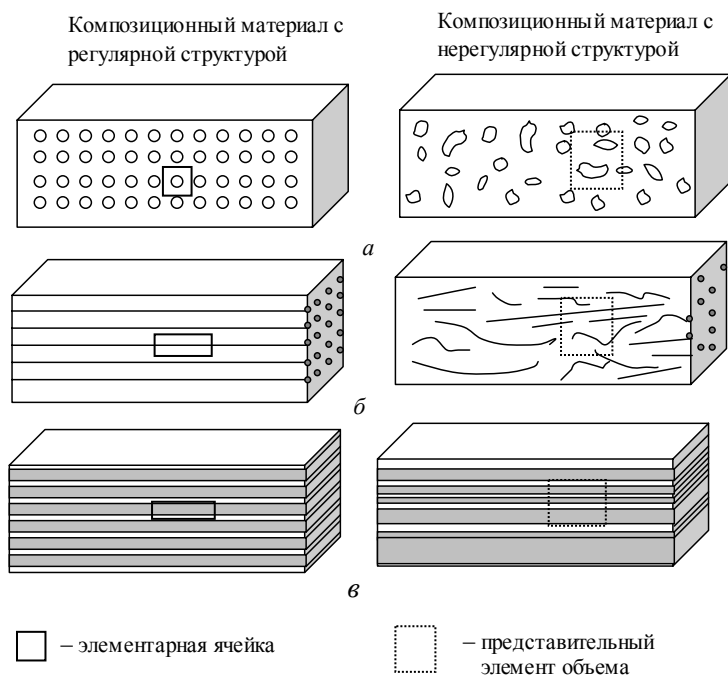


Рис. 2.1. Композиционный материал различного типа:
(а) зернистый; (б) волокнистый; (в) слоистый

зависимости от формы структурных элементов делятся на следующие основные виды: зернистые, волокнистые и слоистые (рис. 2.1).

При анализе электромагнитных, тепловых и механических процессов в композитах используется понятие представительного элемента объема, т.е. такого элемента, в котором все усредненные по объему характеристики поля равны соответствующим величинам, вычисленным для композита в целом. Композит с регулярной (периодической) структурой характеризуется наличием элементарной ячейки структуры, позволяющей путем трансляции по трем координатным направлениям воспроизвести всю структуру материала. Для такого композита в качестве представительного объема выбирается, как правило, элементарная ячейка структуры (см. рис. 2.1).

Для описания процессов в композиционных материалах предложено много упрощенных, полуэмпирических и основанных на аналитических методах теорий, позволяющих рассчитывать эффективные (осредненные) характеристики таких материалов [5–13]. Однако тенденции современного развития методов компьютерного моделирования и математического обеспечения создают предпосылки для проведения углуб-

ленного математического моделирования электромагнитных и тепловых процессов, как правило, в трехмерной постановке и с учетом сложной структуры материала [2, 14–17]. Решение таких задач позволяет не только рассчитывать эффективные характеристики материалов со сложной структурой, но и получать картины полей (электромагнитного, теплового полей), а также механических напряжений на уровне отдельных структурных элементов (микроструктуры материала), неоднородное распределение которых может оказывать решающее влияние на поведение материалов. Заметим, что экспериментальное исследование характеристик композиционного материала требует использования дорогостоящей аппаратуры.

Учитывая то обстоятельство, что структурные элементы композита имеют малые размеры, при анализе процессов в образце из композиционного материала обычно рассматриваются два пространственных уровня, значительно отличающиеся по масштабу. Это уровень с масштабом порядка размера исходного образца L и уровень с масштабом неоднородностей или структурных элементов с характерным размером $a \ll L$. При этом, согласно принятой в теории композиционных материалов терминологии [2, 3], поле на уровне малых неоднородностей называется микроскопическим или микрополем, а поле на уровне размера образца – макроскопическим или макрополем (рис. 2.2). Подчеркнем, что здесь термин "микроскопический" не предполагает рассмотрения на молекулярном уровне, как это принято в классической электродинамике, а характеризует процессы на уровне именно малых структурных элементов.

Электромагнитные процессы в образце из композиционного материала описываются в наиболее полной постановке системой дифференциальных уравнений Максвелла с определяющими соотношениями, содержащими электрофизические параметры среды, которые являются быстро изменяющимися функциями пространственных координат

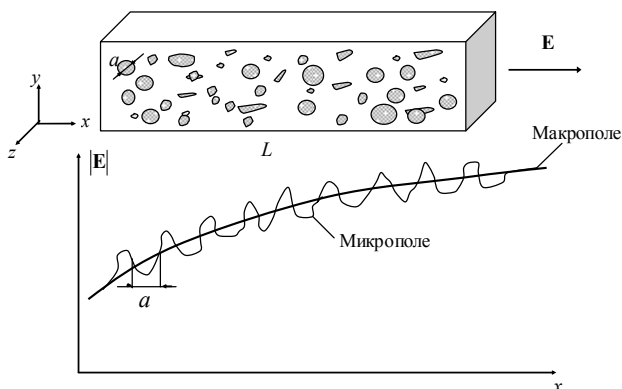


Рис. 2.2. Качественный характер распределения поля в композите с дисперсными включениями

(функции изменяются скачком на границе раздела фаз). В связи с трудностями интегрирования такой системы, вызванными наличием сложной структуры материала, возникает проблема описания осредненных электромагнитных процессов. Решение такой проблемы предполагает рассмотрение следующих трех основных задач:

1) получение макроскопических определяющих соотношений материала и расчет его эффективных (макроскопических) электромагнитных характеристик;

2) анализ распределения крупномасштабного (макроскопического, осредненного) электромагнитного поля во всем объеме образца из композиционного материала, позволяющий получать макроскопическую картину поля;

3) анализ распределения мелкомасштабного (микроскопического или флуктуационного) поля на уровне отдельных неоднородностей, который выполняется для малого объема (представительного элемента объема) и позволяет получать микроскопическую картину поля.

Рассмотрим образец из композиционного материала с характерным размером L , содержащий структурные неоднородности с характерным размером a . При расчете электромагнитного поля в образце численным методом, например, методом конечных элементов или конечных разностей, используется пространственная сетка с характерным размером h . Предположим, имеется полная информация о структуре и свойствах композиционного материала во всем образце, т.е. информация о свойствах его фаз, геометрических характеристиках фаз и контактных явлениях на межфазных границах. Тогда может быть строго решена полевая задача в образце из композиционного материала, и при использовании численного метода в зависимости от соотношения геометрических размеров L , h и a могут быть условно выделены следующие три класса задач, для решения которых необходимо применять различные подходы.

1. Случай относительно крупных структурных неоднородностей в материале, когда характерный размер неоднородностей a соизмерим с размером образца L , а шаг сетки h может быть выбран малым, так что $h \ll a \leq L$ (рис. 2.3 а). В этом случае выполняется численный анализ электромагнитного поля в композите на одном пространственном уровне, позволяющий строго учесть структуру материала и свойства его компонентов. Отметим, что для задач этого класса, как правило, не рассматривается проблема получения осредненной системы дифференциальных уравнений Максвелла и определения эффективных характеристик материала.

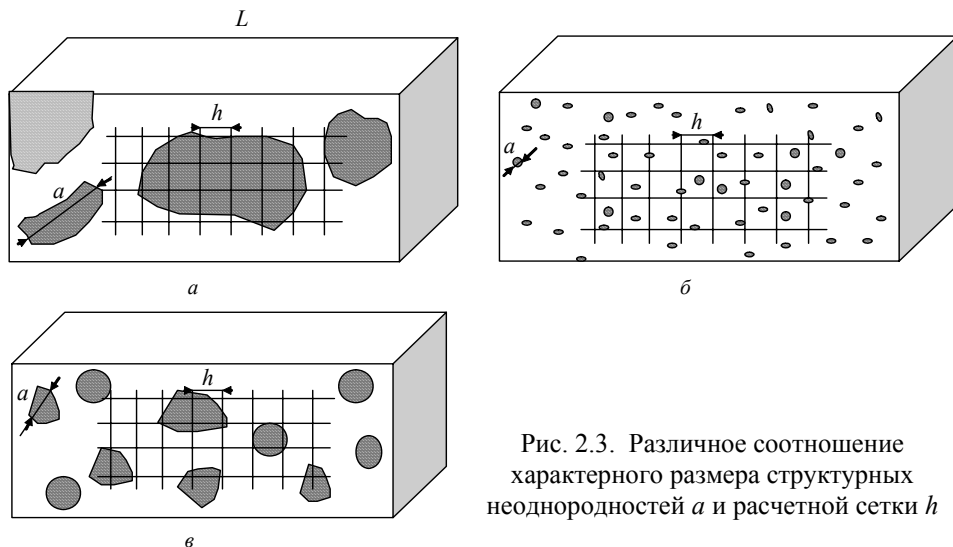


Рис. 2.3. Различное соотношение характерного размера структурных неоднородностей a и расчетной сетки h

2. *Случай структурных неоднородностей малого размера – микрон неоднородная среда*, когда характерный размер неоднородностей $a \ll L$ (рис. 2.3 б). Исходя из возможностей компьютера и разумных затрат машинного времени, размер сетки h может быть выбран в пределах $a \ll h \ll L$. В этом случае при расчете электромагнитного поля реализуется макроскопический подход, и на первый план выступает задача получения осредненной системы дифференциальных уравнений Максвелла на макроуровне и макроскопических определяющих соотношений, которые содержат эффективные характеристики среды. Для определения значений этих характеристик применительно к каждому типу материала необходимо решать вспомогательную полевую задачу на представительном элементе объема или в элементарной ячейке, т.е. рассматривать процессы на микроуровне. Таким образом, в этом случае проводится анализ композита на двух пространственных уровнях.

3. *Промежуточный случай, когда характерный размер структурных неоднородностей соизмерим с размером сетки* (рис. 2.3 в). Характерный размер неоднородностей $a \cong h \ll L$, и для расчета электромагнитных процессов используется исходная (неосредненная) система уравнений Максвелла. В таком случае на этапе формирования дискретного аналога этой системы необходимо применять тот или иной алгоритм расчета эффективных параметров среды между двумя соседними узлами расчетной сетки, учитывающий положение границы раздела фаз в окрестности узлов сетки.

Остановимся далее на задаче расчета поля в микронеоднородной среде (случай 2 по ранее введенной классификации), рассмотрим процедуру получения осредненной системы уравнений Максвелла и задачу расчета эффективных характеристик материала.

Следует отметить, что в данной работе предполагается, что существует полная информация о структуре материала и свойствах его компонентов. Для композитов с регулярной структурой такая информация, как правило, доступна, в то время как для композитов с нерегулярной – отсутствует, и тогда для получения необходимой информации применяются те или иные способы схематизации структуры, в том числе способы, использующие генератор случайных чисел на этапе задания формы и расположения структурных элементов. Один из возможных подходов к построению пространственной модели структуры такого композита описан в главе 4.

2.3. Многоуровневые модели при анализе электромагнитных процессов в материале со сложной структурой

Рассмотрим применение метода многомасштабного моделирования для исследования электромагнитных процессов в материале на различных пространственных уровнях. Одним из примеров такого материала является композиционный материал, структурные элементы которого в свою очередь выполнены из другого композиционного материала, например, из пористого проводника (рис. 2.4). Другой задачей, при решении которой в наиболее полной постановке необходимо анализировать процессы на трех разномасштабных уровнях, является исследование

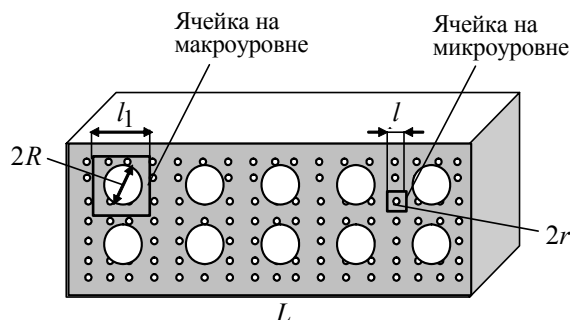


Рис. 2.4. Композиционный материал с тремя разномасштабными пространственными уровнями – $l \ll l_1 \ll L$

воздействия внешнего электромагнитного поля на биологические объекты. При этом в качестве масштабных уровней можно выделить: 1) объект в целом; 2) отдельный его орган; 3) уровень биологической клетки; 4) уровень клеточной мембраны.

Прежде чем перейти к исследованию электромагнитных процессов в материале со сложной иерархической структурой с точки зрения многомасштабного подхода, рассмотрим алгоритм анализа таких процессов на двух уровнях, допускающий обобщение на случай большего числа уровней.

Двухмасштабный анализ процессов в материале. Рассматривается материал, в котором можно выделить два разномасштабных пространственных уровня. Как было показано ранее, анализ электромагнитных процессов в таком материале предполагает:

1) выделение в структуре материала макроскопического уровня и рассмотрение макроскопического поля, которое рассчитывается в объеме всего образца в глобальной системе координат $O_1x_1y_1z_1$; при этом используется осреднение по объему ячейки V с помощью операции

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\dots) dV;$$

2) выделение в структуре материала микроскопического уровня и рассмотрение микроскопической картины поля в объеме ячейки (или представительном элементе объема) в локальной системе координат $Oxyz$.

Для описания распределения микроскопического поля в объеме ячейки используется дифференциальный оператор $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$, а

для описания распределения макроскопического поля во всем объеме образца из композиционного материала – оператор $\nabla_1 = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_1} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_1}$.

Соответствующие системы фундаментальных дифференциальных уравнений Максвелла, записанные с помощью этих операторов, приведены на рис. 2.5. Последовательность решения задачи анализа электромагнитного поля в композите с линейными характеристиками для случая двухмасштабного подхода показана на рис. 2.6.

Многомасштабный анализ процессов в материале. В случае, когда в материале можно выделить $N+1$ разномасштабных структурных уровней, анализ электромагнитных процессов предполагает:

1) выделение микроскопического уровня или уровня с наименьшим масштабом, характеризующегося распределением микрополя (рис. 2.7);

2) выделение макроскопических уровней $1, 2, \dots, N$, характеризующихся своим распределением макрополя соответствующего уровня;

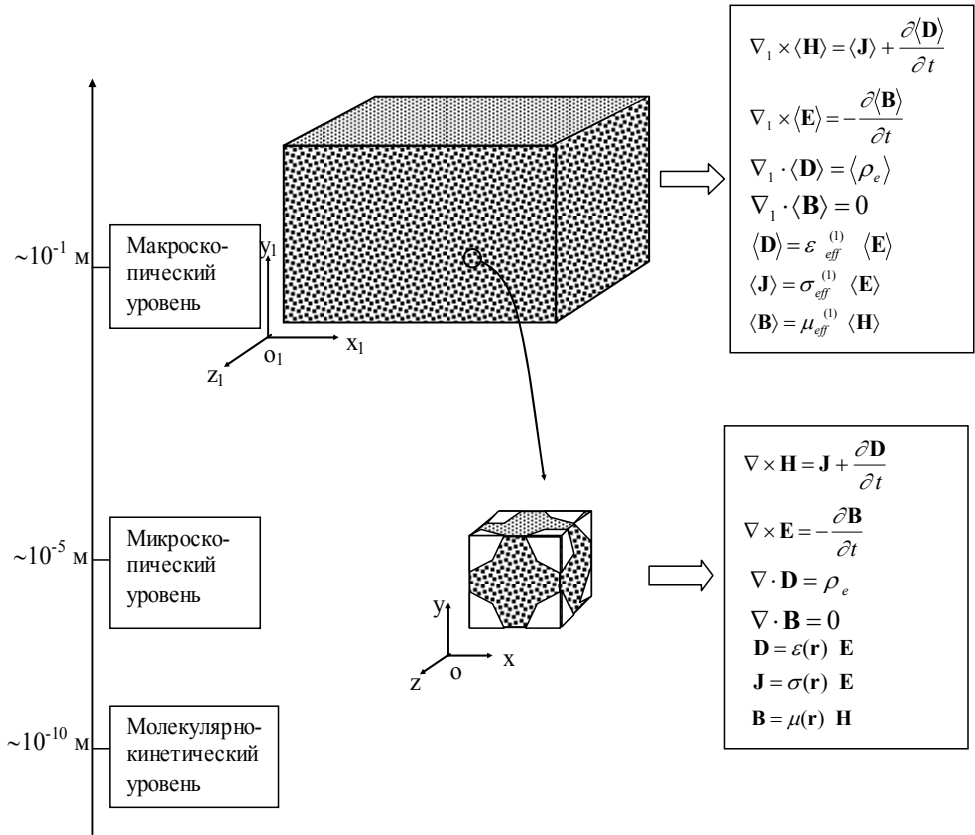


Рис. 2.5. Анализ электромагнитных процессов в композиционном материале для случая двухмасштабных уровней

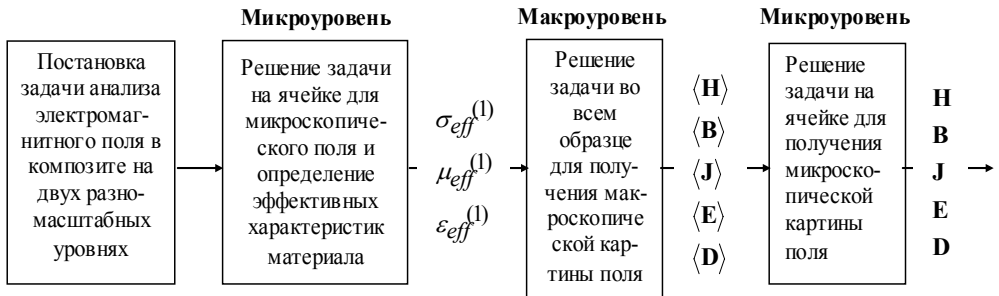


Рис. 2.6. Алгоритм расчета электромагнитных процессов в композиционном материале с линейными характеристиками на двух пространственных уровнях

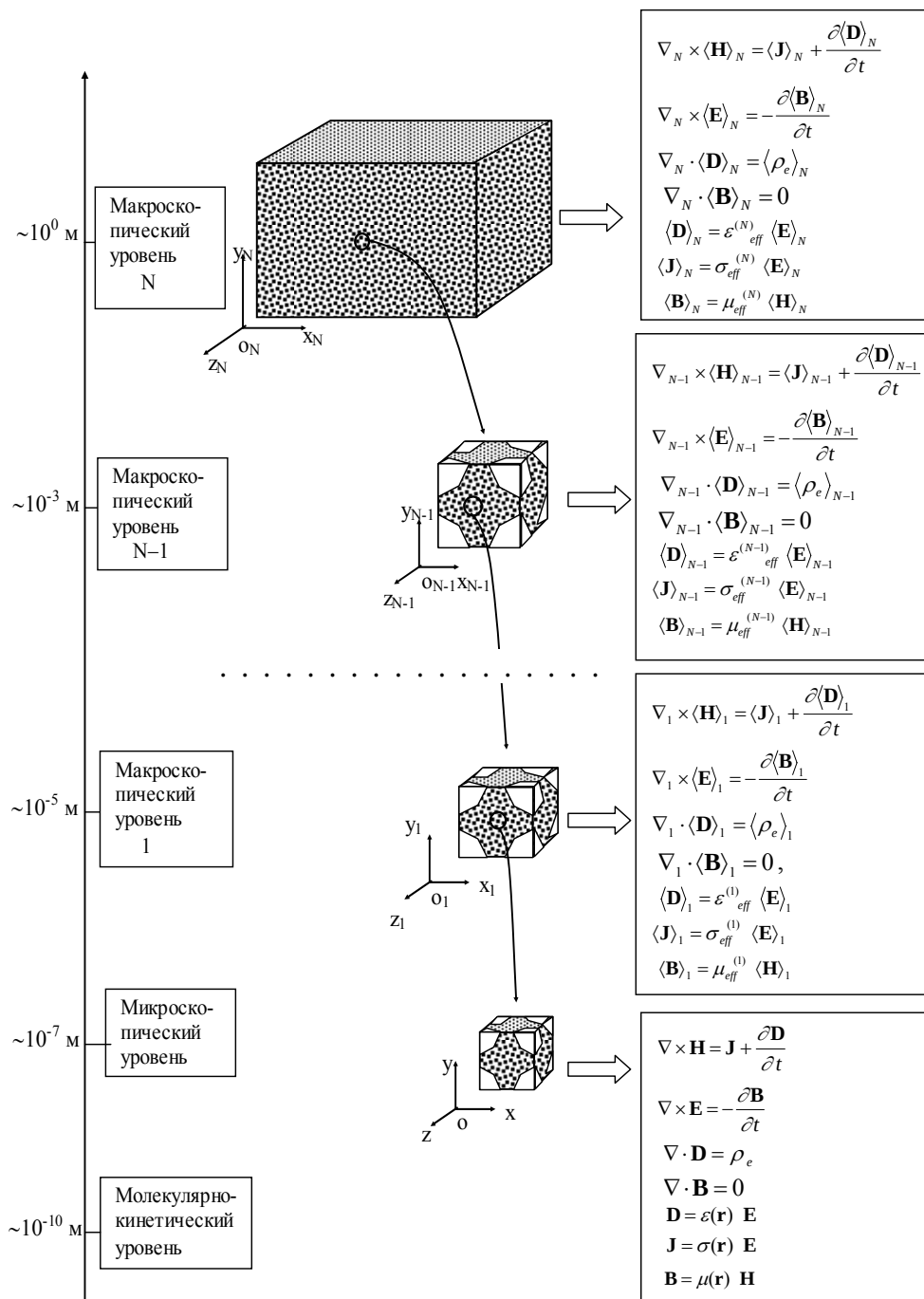


Рис. 2.7. Анализ электромагнитных процессов в композиционном материале с применением метода многомасштабного моделирования

3) на макроскопическом уровне n , где $n = 1, 2, \dots, N$, определяются элементарная ячейка структуры или представительный элемент объема n -го уровня с объемом V_n и связанная с ней локальная система координат $O_n x_n y_n z_n$. Для получения векторов макрополя n -го уровня используется операция осреднения по объему соответствующей ячейки $\langle \dots \rangle_n = \frac{1}{V_n} \int_V (\dots) dV$. При этом полевая задача для макрополя на n -м уровне запи-

сывается с помощью оператора $\nabla_n = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_n} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_n} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_n}$ (рис. 2.7).

Последовательность решения задачи анализа электромагнитных процессов в композите при многомасштабном подходе заключается в том, что на первом этапе последовательно находятся значения эффек-

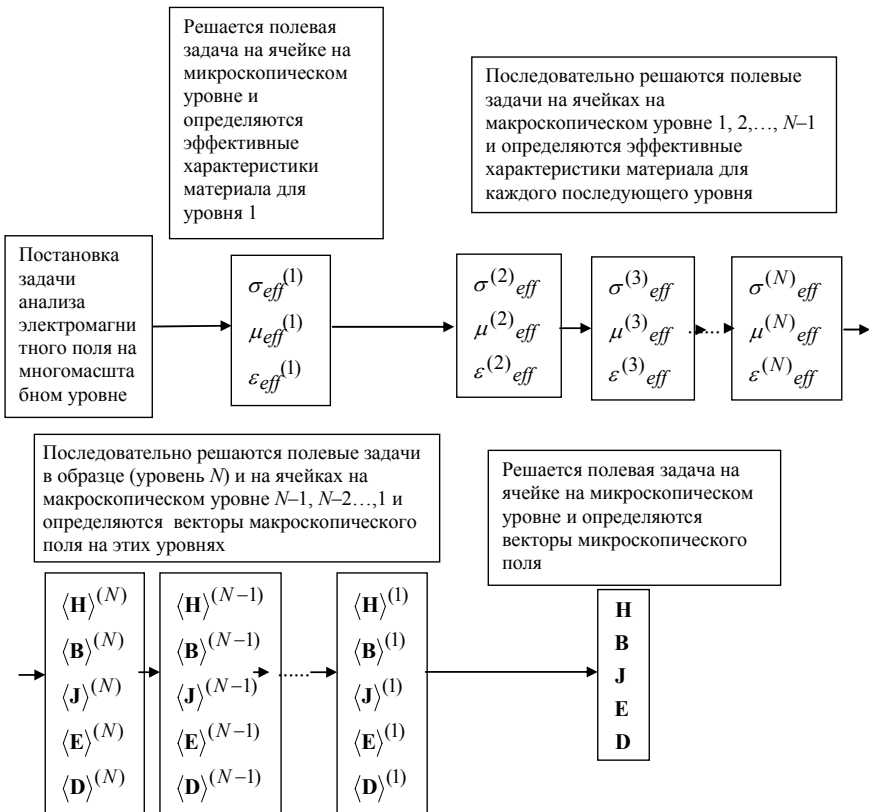


Рис. 2.8. Алгоритм расчета электромагнитных процессов в композиционном материале с линейными характеристиками, имеющем N пространственных уровней

тивных характеристик материала, осуществляя движение от низшего уровня, т.е. уровня с наименьшим масштабом, к высшему (см. рис. 2.8). На втором этапе при движении в обратном направлении решаются последовательно полевые задачи в объемах ячеек и определяются картины макрополей на уровнях $N, N-1, \dots, 1$, а затем и на микроуровне.

Отметим, что данные рис. 2.7 соответствуют случаю, когда материал только одной фазы композита является в свою очередь композиционным материалом. Схема значительно усложнится за счет введения новых ветвей, если исходный материал состоит из нескольких фаз, каждая из которых выполнена из другого композиционного материала.

В случае необходимости учета нелинейных свойств материала на каком-либо из разномасштабных уровней, к описанному циклическому процессу расчета на различных уровнях эффективных характеристик и векторов макрополя необходимо добавить итерационный процесс, позволяющий уточнить значения векторов поля на уровне с нелинейными свойствами.

2.4. Осредненная система дифференциальных уравнений Максвелла

При математическом моделировании электромагнитных процессов в микронеоднородных средах предполагаются справедливыми два основных допущения [18]:

- 1) характерный размер неоднородностей в материале a во много раз превышает размеры атомов и молекул данной среды;
- 2) характерный размер неоднородностей в материале a во много раз меньше характерного размера образца из композиционного материала L и расстояния, на котором существенно изменяется величина электромагнитного поля в объеме образца.

Первое допущение позволяет применить гипотезу континуума и классические уравнения электродинамики для однородных сред, а второе – использовать осредненные характеристики поля в композите.

Существует несколько методов введения осредненных характеристик поля в композите или методов осреднения – пространственное, вероятностное и др. [18]. Все эти методы приводят практически к одинаковым системам осредненных уравнений, различие методов проявляется при их обосновании и выборе основных гипотез.

В данной монографии используются разработанный применительно к задачам механики [2, 18, 19], гидродинамики [20] и электроди-

намики [21] способ пространственного осреднения по представительному элементу объема (или по объему элементарной ячейки для случая композита с регулярной структурой) и связанный с таким осреднением метод определения эффективных характеристик композита путем численного решения полевой задачи в объеме ячейки. Принятый подход более простой в реализации и "прозрачный" с физической точки зрения. Кроме того, при численном расчете эффективных характеристик он позволяет учесть электрофизические свойства фаз композита, конфигурацию границ раздела фаз, а также протекающие на фазовых границах сложные физико-химические процессы – контактные явления.

Электромагнитные процессы в композите, содержащем малые неоднородности или структурные элементы из однородного материала, на микроскопическом (с точки зрения композита) уровне описываются системой дифференциальных уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

и определяющими соотношениями вида

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E},\tag{2.2}$$

где микроскопические параметры среды $\varepsilon(\mathbf{r})$, $\mu(\mathbf{r})$, $\sigma(\mathbf{r})$ являются быстро меняющимися функциями пространственных координат, задаваемых радиус-вектором $\mathbf{r}$, из-за резкого изменения электрических свойств на границе раздела фаз.

Следует отметить, что дифференциальный оператор ∇ в системе (2.1) реализуется при приращениях пространственных переменных, во много раз меньших характерного размера неоднородностей, т.е. $dx, dy, dz \ll a$.

Для получения осредненной системы уравнений Максвелла, описывающей распределение макроскопического поля в объеме образца из композиционного материала, представим векторы "истинного" микроскопического (с точки зрения композита) поля в виде суммы крупномасштабных, осредненных (макроскопических) составляющих $\langle \mathbf{B} \rangle, \langle \mathbf{H} \rangle, \langle \mathbf{J} \rangle, \langle \mathbf{E} \rangle$ и мелкомасштабных флуктуаций $\mathbf{B}', \mathbf{H}', \mathbf{J}', \mathbf{E}'$, среднее значение которых равно нулю. Так, например, для вектора $\mathbf{H}$ получим

$$\mathbf{H} = \langle \mathbf{H} \rangle + \mathbf{H}', \quad (2.3)$$

причем $\langle \mathbf{H}' \rangle = 0$.

Здесь используется пространственное осреднение, которое в окрестности точки $\mathbf{r}$ определяется как

$$\langle \mathbf{H}(\mathbf{r}) \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \mathbf{H}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') dV', \quad (2.4)$$

где малый объем V с центром в точке $\mathbf{r}$ является представительным элементом объема композита или элементарной ячейкой (для композита с регулярной структурой).

Используя свойства операции осреднения

$$\langle \mathbf{H}' \rangle = 0; \quad \langle \nabla \times \mathbf{H} \rangle = \nabla \times \langle \mathbf{H}' \rangle; \quad \langle \nabla \cdot \mathbf{H} \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{H} \rangle,$$

из системы (2.1) получаем следующую систему дифференциальных уравнений Максвелла для осредненного (макроскопического) поля:

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle \mathbf{H} \rangle &= \langle \mathbf{J} \rangle + \frac{\partial \langle \mathbf{D} \rangle}{\partial t}; \\ \nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle &= -\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t}; \\ \nabla \cdot \langle \mathbf{D} \rangle &= \langle \rho_e \rangle; \quad \nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В простейшем случае справедливы определяющие соотношения вида

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{D} \rangle &= \langle \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E} \rangle \equiv \varepsilon_{eff} \langle \mathbf{E} \rangle; \\ \langle \mathbf{J} \rangle &= \langle \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E} \rangle \equiv \sigma_{eff} \langle \mathbf{E} \rangle; \\ \langle \mathbf{B} \rangle &= \langle \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H} \rangle \equiv \mu_{eff} \langle \mathbf{H} \rangle. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь введены эффективные (макроскопические) характеристики композиционного материала ε_{eff} , σ_{eff} , μ_{eff} , которые зависят от его структуры, свойств его компонентов (фаз) и процессов на межфазных границах. Установление этих зависимостей – одна из основных задач анализа электромагнитных процессов в композите.

Отметим, что соотношения (2.6) записаны в предположении, что композит обладает макроскопически однородными и изотропными свойствами, а его эффективные параметры являются скалярными вели-

чинами. При наличии макроскопически анизотропных свойств эти параметры представляют собой тензоры второго ранга.

В самом общем случае вместо (2.6) следует рассматривать более сложные функциональные зависимости:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{J} \rangle &= F_J(\langle \mathbf{E} \rangle, \langle \mathbf{H} \rangle, \dots); \\ \langle \mathbf{B} \rangle &= F_B(\langle \mathbf{E} \rangle, \langle \mathbf{H} \rangle, \dots); \\ \langle \mathbf{D} \rangle &= F_D(\langle \mathbf{E} \rangle, \langle \mathbf{H} \rangle, \dots),\end{aligned}\tag{2.7}$$

где точками обозначена зависимость от текущего времени, предыстории процесса и других величин.

Установление для каждого материала конкретного вида зависимостей (2.7) является сложной самостоятельной задачей.

Система уравнений (2.5), (2.6), дополненная начальными и граничными условиями, представляет собой математическую модель для анализа распределения макроскопического электромагнитного поля в образце из композиционного материала.

Отметим, что дифференциальный оператор ∇ в системе (2.5) в отличие от системы (2.1) реализуется при приращении пространственных переменных, во много раз больших характерного размера неоднородностей, т.е. $dx, dy, dz \gg a$. Это обстоятельство используется при выборе расчетной сетки в случае численного анализа макроскопического поля. Заметим также, что система (2.5), (2.6) записана в общем случае относительно неизвестных векторов поля $\langle \mathbf{B} \rangle, \langle \mathbf{H} \rangle, \langle \mathbf{E} \rangle, \langle \mathbf{D} \rangle, \langle \mathbf{J} \rangle$. При решении полевых задач определенного класса – электростатика, магнитостатика, поле стационарных токов, квазистационарное поле, волновые процессы – эта система упрощается за счет исключения соответствующих членов в уравнениях (2.5) и использования скалярного $\langle \phi \rangle$ и векторного $\langle \mathbf{A} \rangle$ потенциалов для осредненного поля.

С целью получения системы дифференциальных уравнений для флуктуационного поля представим в системе (2.1) и в соотношениях (2.2) векторы в виде суммы осредненных и флуктуационных составляющих [выражение (2.3)]. Учитывая справедливость выражений для осредненного поля (2.5), получаем:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H}' &= \mathbf{J}' + \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t}; \\
\nabla \times \mathbf{E}' &= -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t}; \\
\nabla \cdot \mathbf{D}' &= \rho'_e; \quad \nabla \cdot \mathbf{B}' = 0; \\
\mathbf{D}' &= \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}' + (\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_{eff})\langle \mathbf{E} \rangle; \\
\mathbf{B}' &= \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}' + (\mu(\mathbf{r}) - \mu_{eff})\langle \mathbf{H} \rangle; \\
\mathbf{J}' &= \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}' + (\sigma(\mathbf{r}) - \sigma_{eff})\langle \mathbf{E} \rangle.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Система (2.8) позволяет определить флуктуационное поле в произвольной точке с координатой $\mathbf{r}$, расположенной в объеме образца. Для этого необходимо в окрестности данной точки выделить малый объем (в качестве которого может рассматриваться представительный элемент объема или элементарная ячейка), конкретизировать вид граничных условий на поверхности, ограничивающей этот объем, и затем решить полевую задачу в этом объеме, используя в общем случае один из численных методов. Вопрос выбора граничных условий при решении такой задачи рассматривается в разделе 2.5.

Резюмируя основные результаты данного раздела, отметим, что представление векторов поля в виде суммы осредненных и флуктуационных составляющих позволяет изначально сложную для решения задачу расчета микроскопического электромагнитного поля во всем объеме образца из композиционного материала, описываемую системой (2.1) с быстро меняющимися коэффициентами, заменить двумя более простыми задачами – расчет макроскопического поля во всем объеме образца [система (2.5) и (2.6) с постоянными коэффициентами] и расчет флуктуационного поля в малом представительном элементе объема композита.

Одним из основных вопросов при решении задачи нахождения макроскопического поля является определение эффективных характеристик композиционного материала. Для их расчета необходимо решить вспомогательную полевую задачу в представительном элементе объема или в объеме элементарной ячейки (для композита с регулярной структурой). Постановка такой вспомогательной задачи рассматривается в разделах 2.5 и 2.6.

2.5. Полевая задача на элементарной ячейке и расчет эффективных характеристик композита

Рассмотрим далее упрощенный случай двухфазного композита с регулярной (трехмерно-периодической) структурой, характеризующейся наличием элементарной ячейки в форме куба с объемом $V = l^3$, в центре которой расположено включение сферической формы. Материал фаз является однородным и изотропным. При таких предположениях композит характеризуется макроскопически однородными и изотропными свойствами, а его эффективные характеристики являются скалярными величинами.

Ранее отмечалось, что решение полевой задачи на ячейке является одним из основных этапов исследования электромагнитных процессов в композите, позволяющих определить значения эффективных характеристик материала, а также получить картину распределения микроскопического поля в окрестности структурных неоднородностей и вычислить ряд дополнительных характеристик, отражающих степень неоднородности распределения векторов поля, объемной плотности мощности и др.

Последовательность решения этой задачи состоит в том, что по значениям векторов $\langle \mathbf{E} \rangle$, $\langle \mathbf{H} \rangle$, распределение которых в пределах объема ячейки предполагается известным, определяется путем численного решения распределение векторов $\mathbf{D}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{B}$, а затем вычисляются их осредненные значения $\langle \mathbf{D} \rangle$, $\langle \mathbf{J} \rangle$, $\langle \mathbf{B} \rangle$ и эффективные характеристики материала ε_{eff} , σ_{eff} , μ_{eff} на основании выражений (2.6).

Полевая задача в ячейке может формулироваться либо относительно векторов микроскопического поля, удовлетворяющих системе уравнений (2.1), (2.2), либо относительно векторов флуктуационного поля, удовлетворяющих системе (2.8). Рассмотрим далее обе эти формулировки.

Задача в ячейке для микроскопического поля. Предполагается известным распределение векторов $\langle \mathbf{E} \rangle$, $\langle \mathbf{H} \rangle$ в объеме элементарной ячейки V в виде слабоменяющихся функций пространственных координат. Необходимо найти распределения в этом объеме векторов микроскопического поля, удовлетворяющих:

1) системе дифференциальных уравнений вида (2.1), (2.2) в объеме V :

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_e; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \\
\mathbf{D} &= \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E};
\end{aligned}
\tag{2.9}$$

2) граничным условиям на поверхности ячейки ∂V , полученным в предположении периодичности изменения флуктуационных составляющих поля $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ по трем координатным направлениям с периодом l :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} - \langle \mathbf{H} \rangle &= \mathbf{H}' \\ \mathbf{E} - \langle \mathbf{E} \rangle &= \mathbf{E}' \end{aligned} \right\} - \text{периодические функции по } x, y, z; \tag{2.10}$$

3) условиям нормирования по объему V вида

$$\frac{1}{V} \int_V \mathbf{H} dV = \langle \mathbf{H} \rangle; \quad \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E} dV = \langle \mathbf{E} \rangle. \tag{2.11}$$

Отметим, что периодический характер изменения $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ обусловлен периодической структурой материала.

Можно показать, что задача (2.9)–(2.11) имеет единственное решение, которое в общем случае может быть получено каким-либо из численных методов. В данной работе использовался метод конечных разностей (в разделах 2.7, 2.8). После решения этой задачи вычисляются значения $\langle \mathbf{D} \rangle$, $\langle \mathbf{J} \rangle$, $\langle \mathbf{B} \rangle$, а затем – эффективные характеристики согласно (2.6).

Задача в ячейке для флуктуационного поля. Предполагается известным распределение векторов $\langle \mathbf{E} \rangle$, $\langle \mathbf{H} \rangle$ в объеме элементарной ячейки V в виде медленноменяющихся функций пространственных координат. Необходимо найти распределения в этом объеме векторов флуктуационного поля, удовлетворяющих:

1) системе дифференциальных уравнений вида (2.8) в объеме V :

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H}' &= \mathbf{J}' + \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t}; \\
\nabla \times \mathbf{E}' &= -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t};
\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho'_e ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B}' = 0 ; \quad (2.12)$$

$$\mathbf{D}' = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}' + (\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_{eff})\langle \mathbf{E} \rangle ;$$

$$\mathbf{B}' = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}' + (\mu(\mathbf{r}) - \mu_{eff})\langle \mathbf{H} \rangle ;$$

$$\mathbf{J}' = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}' + (\sigma(\mathbf{r}) - \sigma_{eff})\langle \mathbf{E} \rangle ,$$

2) граничным условиям на ∂V , полученным в предположении периодичности изменения флуктуационных составляющих поля $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ по трем координатным направлениям с периодом l :

$$\mathbf{H}', \mathbf{E}' - \text{периодические функции по } x, y, z ; \quad (2.13)$$

3) условиям нормирования по объему V вида

$$\int_V \mathbf{H}' dV = 0, \quad \int_V \mathbf{E}' dV = 0. \quad (2.14)$$

Можно показать, что задача (2.12)–(2.14) имеет единственное решение, после нахождения которого эффективные характеристики рассчитываются из определяющих соотношений (2.12) с учетом условий $\langle \mathbf{D}' \rangle = 0$, $\langle \mathbf{B}' \rangle = 0$, $\langle \mathbf{J}' \rangle = 0$. То обстоятельство, что в (2.12) содержатся неизвестные эффективные характеристики, не вызывает трудностей при решении, так как они являются постоянными величинами.

Одно из основных отличий сформулированных задач то, что в задаче для микроскопического поля источники этого поля расположены на внешней границе ячейки ∂V в виде значений $\langle \mathbf{E} \rangle$, $\langle \mathbf{H} \rangle$ и их производных, а в задаче для флуктуационного поля – распределены по объему ячейки и изменяются скачком на границе раздела фаз. В настоящей работе при решении конкретных задач (разделы 2.7, 2.8) использовалась формулировка задачи для микроскопического поля как более простая с точки зрения численной реализации.

Граничные условия в виде (2.10) требуют пояснения. Рассмотрим их более подробно на примере вектора $\mathbf{H}$; для вектора $\mathbf{E}$ могут быть записаны аналогичные выражения.

Векторы флуктуационного поля определяются в основном микроструктурой материала и в случае периодической структуры также представляют собой периодические функции. Из условия периодичности, например, вектора $\mathbf{H}'$ вдоль оси x следует, что

$$\mathbf{H}'|_{x=0} = \mathbf{H}'|_{x=l} ; \quad \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial x}|_{x=l} .$$

Подставляя в эти равенства величину $\mathbf{H} - \langle \mathbf{H} \rangle = \mathbf{H}'$, получаем граничное условие для вектора $\mathbf{H}$ в виде

$$\mathbf{H}|_{x=0} - \mathbf{H}|_{x=l} = \langle \mathbf{H} \rangle|_{x=0} - \langle \mathbf{H} \rangle|_{x=l} ; \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}|_{x=0} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}|_{x=l} = \frac{\partial \langle \mathbf{H} \rangle}{\partial x}|_{x=0} - \frac{\partial \langle \mathbf{H} \rangle}{\partial x}|_{x=l} .$$

Аналогичные граничные условия могут быть записаны по координатным осям y и z .

В выражениях (2.15) вектор $\langle \mathbf{H} \rangle$ предполагается известной слабоменяющейся в пределах ячейки функцией координат, и если при ее разложении в ряд Тейлора ограничиться линейными членами ряда, то правая часть второго выражения (2.15) будет равна нулю.

Относительно приведенных формулировок задач на ячейке сделаем следующие замечания.

1. Задачи в ячейке записаны в общем случае для векторов поля $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{J}$, причем принимаемые граничные условия и условия нормирования предполагают, что решение полевой задачи находится относительно векторов $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$. В то же время при рассмотрении в каждом конкретном случае полевой задачи на ячейке, относящейся к более узкому классу – электростатика, магнитостатика, поле стационарных токов, квазистационарное поле, волновые процессы – формулировка такой задачи упрощается путем исключения соответствующих членов в дифференциальных уравнениях и введения скалярного и векторного потенциалов. Интересно отметить, что возможны ситуации, когда осредненная задача для образца в целом и задача на ячейке могут относиться к разным типам задач. Например, осредненная задача является квазистационарной, а задача на ячейке из-за малых ее размеров рассматривается как стационарная (раздел 2.7).

2. Задачи на ячейке сформулированы для случая идеального контакта на границе раздела фаз. При наличии сложных физико-химических процессов на межфазных границах системы (2.9) и (2.12) должны быть дополнены соответствующими математическими моделями, описывающими эти процессы.

2.6. Полевая задача на представительном элементе объема

Если при анализе процессов в композите с регулярной структурой в качестве представительного элемента объема выбирается элементарная ячейка (рис. 2.9 *a*), то в случае материала с нерегулярной структурой существует проблема выбора представительного элемента объема и решения полевой задачи на этом объеме, в частности, определения граничных условий для данной задачи.

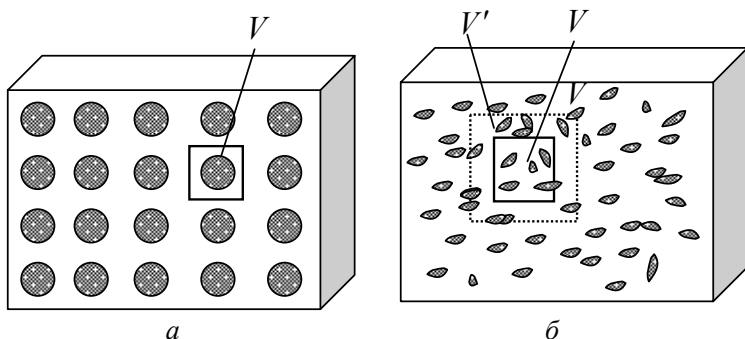


Рис. 2.9. Представительный элемент объема V для композита с регулярной (*a*) и нерегулярной (*b*) структурой.
 V' – расчетный объем

При выборе представительного элемента объема можно воспользоваться подходом [18], согласно которому эффективные характеристики материала вычисляются для ряда объемов $V = l^3$, отличающихся значениями линейных размеров l , после чего результаты расчетов представляются в виде графических зависимостей, показанных на рис. 2.10. Видно, что в пределах интервала $l_{\min} < l < l_{\max}$ значения эффективных характеристик слабо зависят от размера l . В этом случае в качестве представительного элемента объема выбирается объем, принадлежащий этому интервалу, в частности, объем с размером $\sim l_{\min}$.

Как и для случая элементарной ячейки, полевая задача в выбранном объеме V может быть сформулирована как для микроскопического, так и для флуктуационного поля. Ограничимся далее случаем микроскопического поля.

Микроскопическое поле в представительном элементе объема V (как и для случая ячейки) удовлетворяет системе дифференциальных

уравнений (2.9). В качестве граничных условий также могут быть выбраны периодические граничные условия вида (2.10), что эквивалентно замене композита с нерегулярной структурой материалом с регулярной структурой и элементарной ячейкой, совпадающей с объемом V (метод искусственной периодизации). При этом необходимо сделать следующее уточнение.

В случае, когда характерный размер неоднородностей $a \ll l$, такая периодизация приводит к искажению флуктуационного поля лишь в узкой зоне, прилегающей к границе области (полагается, что возмущение флуктуационного поля из-за наличия неоднородного элемента размера a распространяется на расстояние порядка a). Для уменьшения такого искажения можно несколько раздвинуть границы области, т.е. ввести в рассмотрение расчетный объем $V' = (l')^3$, показанный на рис. 2.9 б, где $l' = l + 2a$. Тогда полевая задача на представительном элементе объема может быть сформулирована следующим образом.

Формулировка задачи. Предполагается известным распределение векторов $\langle \mathbf{E} \rangle$, $\langle \mathbf{H} \rangle$ в расчетном объеме V' в виде слабоменяющихся функций пространственных координат. Необходимо найти распределение в этом объеме векторов микроскопического поля, удовлетворяющих:

1) системе дифференциальных уравнений (2.9) в расчетном объеме V' :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0;$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E},$$

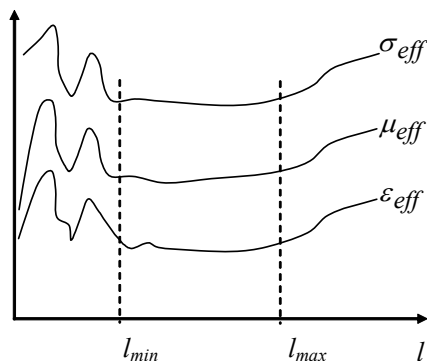


Рис. 2.10. Качественный характер зависимости эффективных параметров композита от размера представительного объема

2) граничным условиям на границе расчетного объема $\partial V'$, полученным в предположении периодичности изменения флуктуационных составляющих поля $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ по трем координатным направлениям с периодом l' :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{H} - \langle \mathbf{H} \rangle = \mathbf{H}' \\ \mathbf{E} - \langle \mathbf{E}' \rangle = \mathbf{E} \end{array} \right\} - \text{периодические функции по } x, y, z; \quad (2.17)$$

3) условиям нормирования по представительному элементу объема V :

$$\frac{1}{V} \int_V \mathbf{H} dV = \langle \mathbf{H} \rangle, \quad \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E} dV = \langle \mathbf{E} \rangle. \quad (2.18)$$

Условия нормирования (2.18) должны выполняться по представительному элементу объема, так как при выводе системы осредненных уравнений (2.5), (2.6) предполагалось осреднение именно по этому объему.

Отметим, что рассматриваемый подход заключается во введении искусственной периодизации структуры композита. В то же время для выполнения условия нормирования (2.18) могут выбираться не только периодические граничные условия для флуктуационных составляющих, но и граничные условия второго рода для этих составляющих, что эквивалентно введению идеальных экранов на границе области $\partial V'$. Так как при граничных условиях второго рода решение полевой задачи во внутренней области определяется с точностью до произвольной постоянной [22], то всегда можно выбрать такое значение этой постоянной, при котором будет выполняться условие нормирования (2.18).

В заключение сделаем следующее замечание. При детальном анализе электромагнитных процессов в композиционном материале задачу на представительном элементе объема необходимо решать дважды: первый раз – при расчете эффективных характеристик материала, а второй – при расчете микроскопического поля в окрестности отдельных структурных неоднородностей. Для решения второй задачи в окрестности неоднородностей может быть выбран объем более малых размеров по сравнению с размером представительного элемента объема. При этом следует исходить из условия, чтобы границы расчетной области не вносили заметного искажения в поле, локализованное в окрестности рассматриваемых неоднородностей. Однако с точки зрения возможно-

сти использования одной и той же программы для решения как первой, так и второй задачи целесообразно выбирать в качестве расчетной области представительный элемент объема.

Данный раздел завершает рассмотрение общих теоретических положений, отражающих особенности расчета электромагнитного поля в композиционном материале, которые кратко можно сформулировать следующим образом.

1. Для анализа электромагнитных процессов в образце из композиционного материала должны быть известны:

- структура материала, т.е. его фазовый состав, расположение фаз и их геометрические характеристики;
- электрофизические свойства материалов фаз и определяющие соотношения для каждой фазы;
- математическая модель для описания контактных процессов на границе раздела фаз.

2. Формулируется и решается полевая задача для осредненного (макроскопического) поля во всем объеме образца из композиционного материала, которая включает осредненную систему уравнений Максвелла, граничные и начальные условия для осредненных векторов поля, а также макроскопические определяющие соотношения для композита в целом, содержащие эффективные характеристики материала.

3. Формулируется и решается полевая задача на элементарной ячейке или представительном элементе объема, позволяющая рассчитать эффективные характеристики материала и получить микроскопическую картину поля. При этом расчет эффективных характеристик должен предшествовать решению задачи для макроскопического поля, после решения которой с учетом найденного распределения векторов макрополя определяется микроскопическая картина поля.

4. На заключительном этапе по результатам решения задачи на ячейке могут рассчитываться дополнительные характеристики, отражающие степень неоднородности распределения микроскопического поля вблизи структурных неоднородностей по отношению к величине осредненного поля, а также локальные значения объемной плотности потерь и др.

В следующих разделах на основе описанного подхода рассматривается решение конкретных задач, имеющих практическое приложение.

2.7. Анализ электромагнитных процессов в магнитно-проводящем композиционном материале с регулярной структурой

Рассчитываются электромагнитные характеристики композиционного материала определенного типа, обладающего одновременно хорошими магнитными и электропроводящими свойствами – магнитно-проводящий композит. Структурно такой материал состоит из электропроводящей матрицы и включений из магнитного материала. Технология получения магнитно-проводящего композита путем пропитки стальных гранул расплавленным алюминием описана в работе [23]. В статье [24] для получения композита рассматривается технология прессования порошкового материала, содержащего электропроводящие и магнитные гранулы, а также показана перспективность использования такого материала при создании электрических машин и аппаратов. В [25] экспериментально исследуются характеристики нового композиционного материала на основе слабопроводящего бетона с включениями из магнитного материала.

Для определения области рационального применения магнитно-проводящего композита и уточнения технологических параметров на этапе получения такого материала необходимо наряду с экспериментальными исследованиями выполнить теоретический анализ по таким вопросам:

- определение эффективных характеристик композита в зависимости от структуры и электрофизических параметров его компонентов;
- определение требуемого объемного содержания компонентов композита для получения материала с определенными свойствами;
- определение степени неоднородности распределения плотности тока и джоулевых потерь в композите с учетом сложной внутренней структуры и наличия границ раздела фаз. Учет этого обстоятельства позволит выбрать режим работы, при котором локальные токовые и тепловые нагрузки не будут превышать предельно допустимых значений.

Рассмотрим далее перечисленные вопросы.

Физическая модель композита. Рассматривается магнитно-проводящий композит, состоящий из двух фаз – матрицы из электропроводящего немагнитного (слабомагнитного) материала с параметрами σ_m, μ_m и включений из магнитного слабопроводящего материала с параметрами σ_f, μ_f . Материал в пределах каждой фазы является однородным и изотропным. Для простоты рассмотрения структура ком-

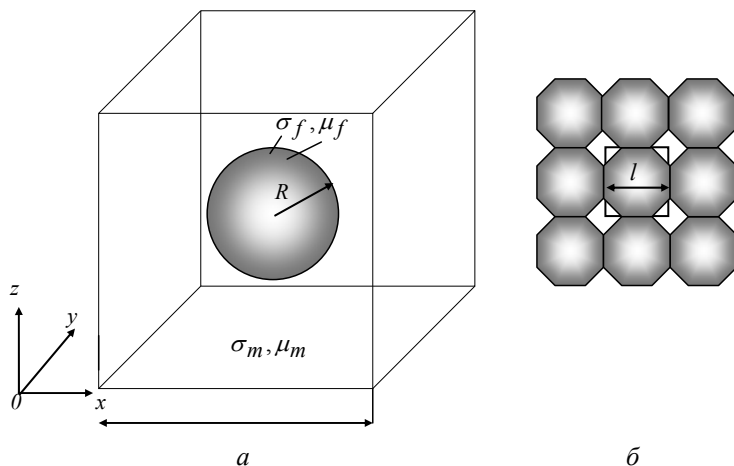


Рис. 2.11. Элементарная объемная ячейка композиционного материала при различной объемной концентрации включения:
 (а) при малой концентрации включения $f \leq 0,523$;
 (б) при большой концентрации включения $f > 0,523$

позита предполагается трехмерно-периодической с одинаковым периодом l по трем координатным осям декартовой системы координат. Основу структуры материала составляет элементарная кубическая ячейка, состоящая из электропроводящей матрицы и включения из магнитного материала, имеющего форму сферы и расположенного в центре ячейки (рис. 2.11 а). Величина объемной концентрации включения $f = V_f / V$ ($V_f = 4\pi R^3 / 3$ – объем включения, $V = l^3$ – объем ячейки) при таком представлении структуры композита может изменяться в пределах $0 \leq f \leq 0,523$, что соответствует изменению радиуса сферы: $0 \leq R \leq 0,5$. Отметим, что наибольший практический интерес представляет случай большой концентрации магнитной фазы, когда $f \cong 0,7 - 0,9$. Для возможности анализа эффективных характеристик материала при больших значениях f , следуя работе [17], будем полагать, что величина радиуса сферы может, принимать большие значения, достигая в пределе $R = 0,707l$, однако при значениях $0,5l < R < 0,707l$ включение приобретает форму сферы со срезанными сегментами (рис. 2.11 б). С учетом этого объемная концентрация включения определяется на основании следующего выражения:

$$f = \begin{cases} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{l} \right)^3, & R \leq 0,5l, \\ \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{l} \right)^3 - 6\pi b^2 \left(\frac{R}{l} - \frac{b}{3} \right), & 0,5l < R < 0,707l, \end{cases}$$

где $b = R/l - 0,5$.

При $R \geq 0,707l$ из-за больших размеров магнитного включения прерывается путь для протекания макроскопического тока в материале матрицы, поэтому такой случай не рассматривается.

Осредненная система уравнений Максвелла. Осредненное (макроскопическое) поле в композите в пренебрежении токами смещения и при гармоническом изменении во времени с круговой частотой ω всех векторов поля удовлетворяет следующей системе уравнений, полученной из системы (2.5):

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle \mathbf{H} \rangle &= \langle \mathbf{J} \rangle; \\ \nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle &= -i\omega \langle \mathbf{B} \rangle; \\ \nabla \cdot \langle \mathbf{J} \rangle &= 0; \quad \nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Будем использовать определяющие соотношения вида (2.6):

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \mu_{eff} \langle \mathbf{H} \rangle; \quad \langle \mathbf{J} \rangle = \sigma_{eff} \langle \mathbf{E} \rangle, \tag{2.20}$$

содержащие эффективные (макроскопические) характеристики композиционного материала σ_{eff} , μ_{eff} , которые зависят от структуры и свойств его фаз. Установление таких зависимостей является одной из основных задач анализа электромагнитных процессов в композите.

При справедливости сделанных ранее допущений, а именно отсутствие нелинейных свойств у компонентов композита и наличие элементарной ячейки кубической формы со сферическим включением, расположенным в центре, эффективные характеристики композита являются скалярными величинами, а материал характеризуется макроскопически однородными и изотропными свойствами.

Для расчета эффективных характеристик магнитно-проводящего композита необходимо рассмотреть полевую задачу на его элементарной ячейке.

Полевая задача в элементарной ячейке композита. Электромагнитное поле в элементарной ячейке с объемом V удовлетворяет:

1) системе уравнений Максвелла (2.9) для микроскопического поля, которая для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}; \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -i\omega \mathbf{B};\end{aligned}\tag{2.21}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0;$$

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E},$$

2) граничным условиям на ∂V :

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{H} - \langle \mathbf{H} \rangle &= \mathbf{H}' \\ \mathbf{E} - \langle \mathbf{E} \rangle &= \mathbf{E}'\end{aligned} \right\} - \text{периодические функции по } x, y, z; \tag{2.22}$$

3) условиям нормирования по объему V вида

$$\frac{1}{V} \int_V \mathbf{H} dV = \langle \mathbf{H} \rangle; \quad \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E} dV = \langle \mathbf{E} \rangle. \tag{2.23}$$

В выражениях (2.22) и (2.23) векторы $\langle \mathbf{H} \rangle$ и $\langle \mathbf{E} \rangle$ предполагаются известными слабоменяющимися в пределах объема ячейки функциями пространственных координат.

Для решения задачи (2.21)–(2.23) в ячейке относительно неизвестного вектора $\mathbf{H}$ (или какого-либо другого вектора) может использоваться один из численных методов, описанных в литературе (например, в работе [26]). После получения этого решения эффективные характеристики композита σ_{eff} , μ_{eff} вычисляются на основании определяющих соотношений (2.20).

Низкочастотное приближение. Задача в ячейке (2.21)–(2.23) существенно упрощается при невысоких частотах изменения электромагнитного поля ω . Учитывая, что на практике при получении композита методом прессования порошков размер ячейки не превышает $l \leq 0,1$ мм, при работе на промышленной частоте глубина проникновения магнитного поля в материал включения δ_f и матрицы δ_m будет относительно большой:

$$\delta_f = (0,5\omega\mu_f\sigma_f)^{-0,5} \gg R; \quad \delta_m = (0,5\omega\mu_m\sigma_m)^{-0,5} \gg l.$$

В случае выполнения этих условий справедливо низкочастотное приближение задачи в ячейке, при котором она может рассматриваться как квазистатическая. При этом решение задачи (2.21)–(2.23) заменяется решением двух несвязанных задач расчета электрического поля $\mathbf{E}$ и расчета магнитного поля $\mathbf{H}$ в объеме ячейки, которые удовлетворяют системам (2.24) и (2.25), соответственно:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0; \\ \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0;\end{aligned}\quad (2.24)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E},$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= 0; \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0;\end{aligned}\quad (2.25)$$

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}.$$

Вводя электрический и магнитный потенциалы как $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, $\mathbf{H} = -\nabla\phi$, из (2.24) и (2.25) с учетом периодических граничных условий (2.22) получаем следующие формулировки задач в ячейке:

$$\nabla \cdot (\sigma(\mathbf{r}) \nabla \varphi) = 0;$$

$$\nabla \cdot (\mu(\mathbf{r}) \nabla \phi) = 0;$$

$$\varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=l} - l\langle E_x \rangle;$$

$$\phi|_{x=0} = \phi|_{x=l} - l\langle H_x \rangle;$$

$$\varphi|_{y=0} = \varphi|_{y=l}, \varphi|_{z=0} = \varphi|_{z=l}; \quad (2.26)$$

$$\phi|_{y=0} = \phi|_{y=l}, \phi|_{z=0} = \phi|_{z=l}; \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{x=0; l} = 0;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{x=0; l} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}|_{y=0; l} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}|_{z=0; l} = 0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}|_{y=0; l} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z}|_{z=0; l} = 0,$$

$$\text{где } \sigma(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sigma_f & \text{во включении } V_f, \\ \sigma_m & \text{в объеме } V - V_f. \end{cases}$$

$$\text{где } \mu(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mu_f & \text{во включении } V_f, \\ \mu_m & \text{в объеме } V - V_f. \end{cases}$$

Здесь $\langle E_x \rangle$ и $\langle H_x \rangle$ предполагаются известными величинами с однородным распределением в объеме ячейки.

Метод решения. Для решения задач (2.26) и (2.27) в работе использовался численный метод контрольного объема. Дискретный аналог дифференциального уравнения (2.26) для сетки, показанной на рис. 2.12, может быть записан в следующем виде [27]:

$$\left(\sum_{n=1}^6 a_n\right)\varphi_0 = \sum_{n=1}^6 a_n\varphi_n + s_0, \quad (2.28)$$

где коэффициенты $a_1, \dots, a_6$ представляют собой эквивалентную проводимость между узловой точкой 0 и соответствующими соседними узлами. Так, например, между узловыми точками 0 и 1 значение коэффициента a_1

вычисляется как $a_1 = \sigma_{0,1} \frac{h_y h_z}{h_x}$, где

$$\sigma_{0,1} = \frac{2\sigma_0\sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1}.$$

Здесь σ_0 – электропроводность материала в узловой точке 0; σ_1 – электропроводность в узловой точке 1.

Величина s_0 в (2.28) представляет собой источниковый член, зависящий от $\langle E_x \rangle$. Для решения системы линейных уравнений (2.28) использовался метод верхней релаксации, причем решение считалось найденным, если в ходе итерационного процесса величина невязки достигала значения

$$\varepsilon = \frac{\|A\varphi - S\|}{\|S\|} \leq 10^{-5}.$$

Отметим, что для решения задач (2.26) и (2.27) используется одна и та же программа при соответствующем задании параметров среды.

После нахождения потенциалов φ и ϕ , а затем и осредненных значений плотности тока и магнитной индукции, эффективные характеристики композита вычисляются на основании выражений, полученных из (2.20):

$$\sigma_{eff} = \frac{\langle \sigma E_x \rangle}{\langle E_x \rangle}; \quad \mu_{eff} = \frac{\langle \mu H_x \rangle}{\langle H_x \rangle}.$$

Обсуждение результатов расчета. *Сопоставление с известными решениями.* Рассмотрим немагнитный электропроводящий композит с периодической структурой, имеющий в качестве элементарной объемной ячейки куб с симметрично расположенным сферическим вклю-

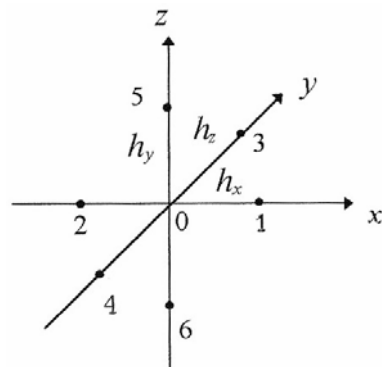


Рис. 2.12. Сетка, используемая в методе конечных разностей, с указанием нумерации узловых точек

чением. Материал матрицы характеризуется параметрами σ_m , $\mu_m = \mu_0$, а материал включения – параметрами σ_f , $\mu_f = \mu_0$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. При малых значениях объемной концентрации включения f для расчета эффективной электропроводности такого материала справедлива формула Рэлея

$$\sigma_{eff} = \sigma_m \frac{\sigma_f + 2\sigma_m + 2f(\sigma_f - \sigma_m)}{\sigma_f + 2\sigma_m - f(\sigma_f + 2\sigma_m)}. \quad (2.29)$$

При произвольном значении концентрации включения $0 \leq f \leq 1$ для расчета σ_{eff} можно воспользоваться результатами работы [16], полученными с использованием метода граничных элементов. Отметим, что в этой работе приведены данные для диэлектрической проницаемости композиционного диэлектрика. Однако с учетом существующей аналогии между потенциальными полями в проводнике и диэлектрике эти данные могут использоваться для расчета электропроводности проводящего композита.

Сопоставительный анализ известных результатов с результатами

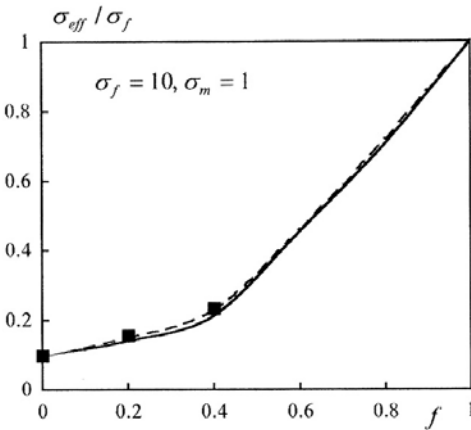


Рис. 2.13. Сопоставление результатов расчета эффективной электропроводности композита, полученных по различным методикам:
 ——— методом конечных разностей;
 - - - - по данным [16];
 ■■■■ по формуле (2.29)

численного расчета с применением метода контрольного объема на пространственной сетке с размерами $h_x = h_y = h_z = l/60$ показан на рис. 2.13. Из рисунка видно, что хотя в методе конечных разностей строго не учитывается положение границы сферического включения (эта граница фактически заменяется ломаной поверхностью), вместе с тем при относительно мелкой сетке этот метод позволяет получать достоверные значения эффективных характеристик.

Эффективные характеристики магнитно-проводящего композита. На рис. 2.14 показана зависимость эффективной электропроводности композита σ_{eff} от объемного содержания включения f и при различных значениях электропроводности его компонентов. В рассматриваемом случае электрический ток протекает преимущественно по матрице, имеющей более высокую электропроводность и при малых размерах включения, когда $f < 0,2$, уменьшение σ_{eff} с ростом f происходит по закону, близкому к линейному. В диапазоне изменения $f = 0,4 - 0,6$, когда происходит резкое уменьшение поперечного сечения матричной фазы (сферическое включение соприкасается с границами ячейки), наблюдается резкое изменение σ_{eff} . При больших значениях f ток протекает преимущественно по прилегающим к границам ячейки участкам матрицы и величина эффективной электропроводности композита σ_{eff} невелика.

Магнитные свойства композита, характеризующиеся эффективной магнитной проницаемостью μ_{eff} , определяются размерами магнитного включения и значениями магнитных проницаемостей фаз. Количественные соотношения между этими величинами показаны на рис. 2.15.

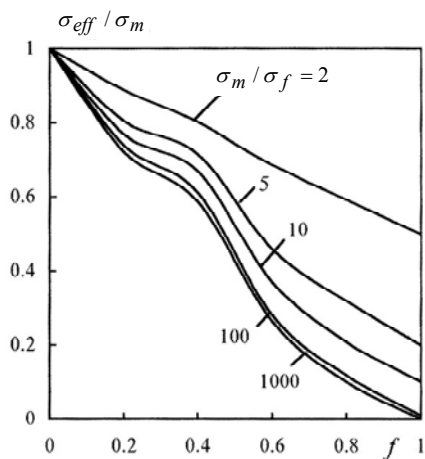


Рис. 2.14. Зависимость эффективной электропроводности композита от объемной концентрации включения f при различных значениях электропроводности его компонентов

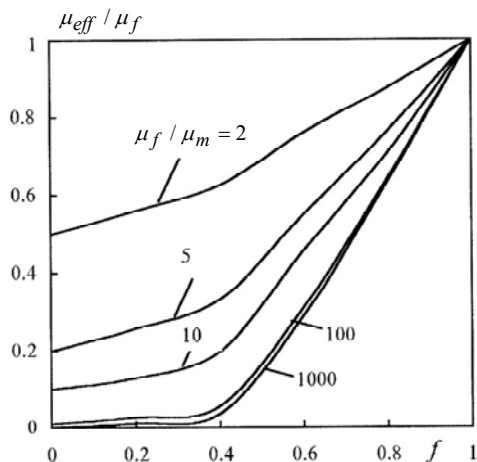


Рис. 2.15. Зависимость эффективной магнитной проницаемости композита от объемной концентрации включения f при различных значениях магнитной проницаемости его компонентов

Композит с оптимальной структурой. Результаты расчетов, представленные на рис. 2.14 и 2.15, позволяют определить требуемую структуру композиционного материала, характеризующуюся значением f , а также электрофизические параметры его компонентов, при которых эффективные электромагнитные характеристики материала будут в наибольшей степени удовлетворять заданным значениям. Так, при малых значениях f композит будет характеризоваться высокой электропроводностью и низкой магнитной проницаемостью. И наоборот, при большом значении f материал будет обладать хорошими магнитными свойствами и низкой электропроводностью. По-видимому, в каждом конкретном случае может рассматриваться задача поиска оптимальной структуры композита и соответствующего оптимального значения концентрации включения f_{opt} , при котором электромагнитные свойства композита в определенном смысле будут наилучшими. В данной работе для определения оптимальной структуры магнитно-проводящего композита в качестве целевой функции рассматривается произведение $\mu_{eff} \cdot \sigma_{eff}$, характеризующее величину магнитной вязкости материала

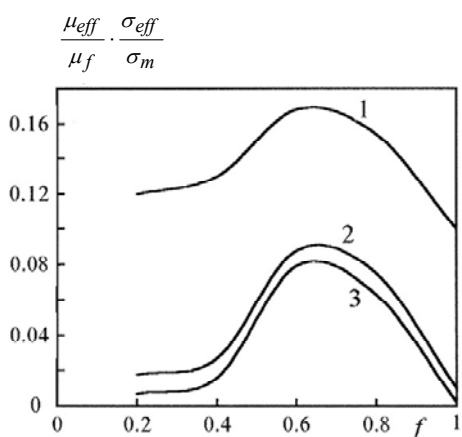


Рис. 2.16. Зависимость значения $\mu_{eff} \cdot \sigma_{eff}$, характеризующего магнитную вязкость композита, от объемной концентрации включения f при различных значениях параметров его компонентов:

$$1 - \mu_f / \mu_m = \sigma_m / \sigma_f = 1000;$$

$$2 - \mu_f / \mu_m = \sigma_m / \sigma_f = 100;$$

$$3 - \mu_f / \mu_m = \sigma_m / \sigma_f = 10$$

$\nu_m = (\mu_{eff} \cdot \sigma_{eff})^{-1}$ и определяющее его экранирующие свойства в переменном или импульсном магнитном поле. Зависимость этой величины от объемной концентрации f при различных соотношениях параметров компонентов композита показана на рис. 2.16. Из приведенных данных следует, что существует оптимальное значение концентрации магнитной фазы $f_{opt} = 0,6 - 0,7$, при котором композит будет обладать наилучшими с точки зрения принятого критерия электромагнитными свойствами.

Неоднородность распределения плотности тока и джоулевых потерь в композите. Эффективные характеристики композита, полученные из решения полевой задачи на ячейке, являются важными величинами, входящими в систему уравнений для осредненного поля (2.19), (2.20), решение которой позволяет найти распределение векторов осредненного поля $\langle \mathbf{B} \rangle$, $\langle \mathbf{H} \rangle$, $\langle \mathbf{J} \rangle$, $\langle \mathbf{E} \rangle$ в двухфазной среде композита. Однако знания этих векторов недостаточно для определения локальных (микроскопических) значений поля и энергетических характеристик, в частности, плотности тока и плотности джоулевых потерь в материале, большие значения которых могут привести к возникновению значительного перегрева в локальных зонах. Для возможности оценки локальных значений этих величин по отношению к их осредненным значениям будем использовать следующие безразмерные коэффициенты неоднородности:

– коэффициент неоднородности распределения плотности тока в объеме элементарной ячейки композита

$$k_J = \frac{J_{\max}}{\langle J_x \rangle};$$

– коэффициент неоднородности распределения плотности мощности джоулевых потерь в объеме элементарной ячейки композита

$$k_Q = \frac{(J^2 / \sigma(\mathbf{r}))_{\max}}{\langle J_x \rangle^2 / \sigma_{eff}},$$

где под максимумом понимается наибольшее значение соответствующей величины в пределах объема элементарной ячейки.

Расчетные значения этих коэффициентов, полученные из решения полевой задачи на ячейке (2.26), представлены на рис. 2.17 и 2.18. Данные рисунков показывают, что при значениях $f \cong f_{opt}$ степень неоднородности распределения велика и составляет $k_J \cong 2 - 20$, $k_Q \cong 3 - 30$ в зависимости от отношения σ_m / σ_f .

На рис. 2.19 показана картина микроскопического поля в элементарной ячейке. В частности, рис. 2.19 а иллюстрирует распределение плотности тока в срединном сечении ($z = 0,5l$) элементарной ячейки, показанной на рис. 2.19 в, а рис. 2.19 б – распределение плотности джоулевых потерь в этом сечении в долях от величины $\langle J_x \rangle^2 / \sigma_{eff}$. Расположение элементарной ячейки на рис. 2.19 в выбрано со смещением по

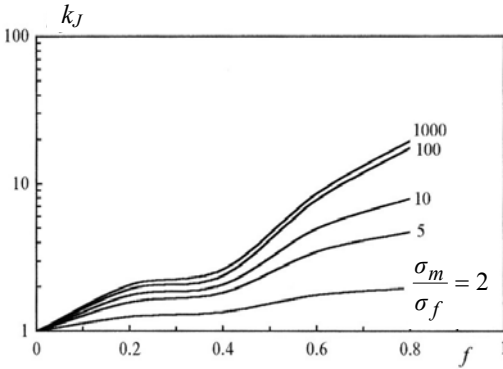


Рис. 2.17. Зависимость коэффициента неоднородности распределения плотности тока в композите от объемной концентрации включения f при различных значениях электропроводности его компонентов

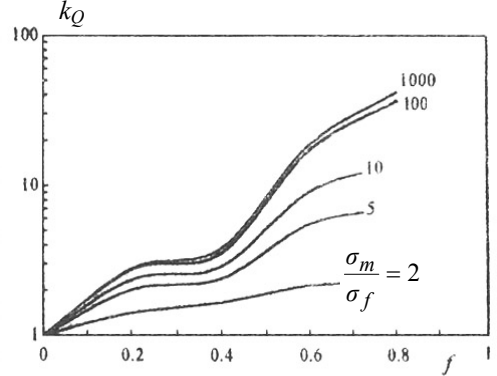


Рис. 2.18. Зависимость коэффициента неоднородности распределения плотности мощности в композите от объемной концентрации включения f при различных значениях электропроводности его компонентов

отношению к ячейке на рис. 2.11 *a* для большей наглядности представления результатов. Результаты на рис. 2.19 показывают, что плотности тока и джоулевых потерь концентрируются на входе и выходе из ячейки в угловых зонах, которые показаны пунктирными стрелками.

Приближенный учет нелинейной зависимости $\mu(H)$ магнитной фазы. В выполненных ранее расчетах эффективных характеристик композита магнитные свойства материала учитывались в предположении $\mu_f = \text{const}$. Для приближенного учета нелинейных свойств этого материала, характеризующихся нелинейной зависимостью $\mu_f(H)$, будем полагать, что значение μ_f слабо изменяется по объему включения и определяется средним значением напряженности магнитного поля по объему включения V_f , т.е.

$$\mu_f = \mu_f(\langle H \rangle_f),$$

$$\text{где } \langle H \rangle_f = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} H dV.$$

Отметим, что при малых f это предположение выполняется с высокой точностью и, как следствие этого, область применения описанного подхода ограничивается малыми значениями f .

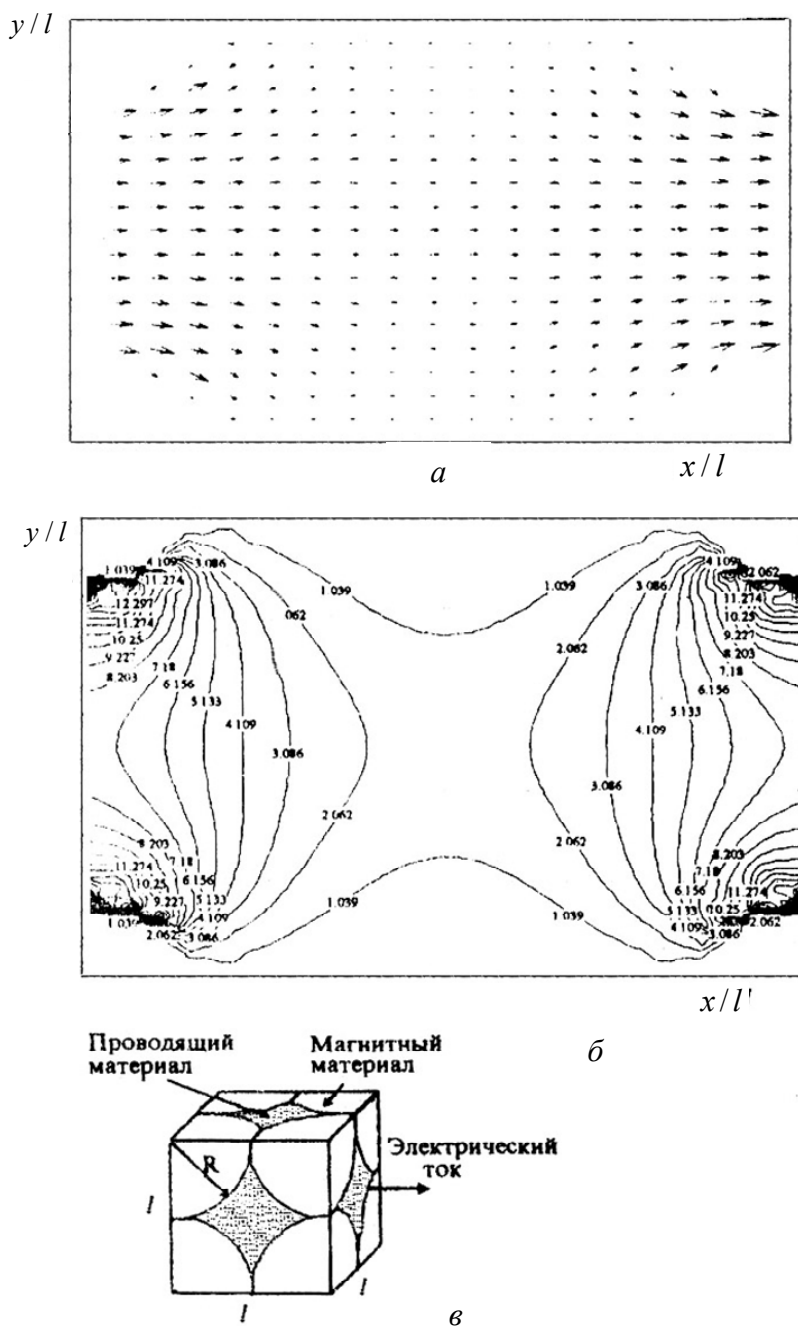


Рис. 2.19. Распределение плотности тока (a) и относительного значения мощности джоулевых потерь (b) в срединном сечении ($z = 0,5 l$) элементарной ячейки (c)

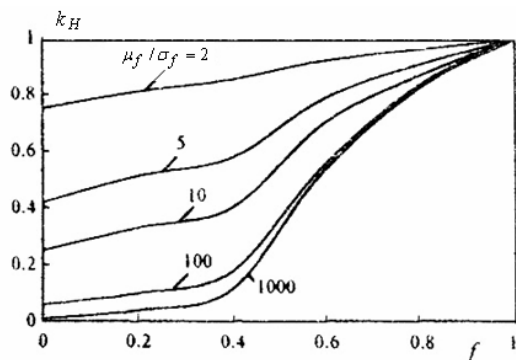


Рис. 2.20. Зависимость коэффициента k_H от объемной концентрации включения f при различных значениях магнитной проницаемости его компонентов

Для расчета величины $\langle H \rangle_f$ по значению $\langle H \rangle$, а именно это значение осредненного поля известно из решения задачи (2.19), (2.20), введем безразмерный коэффициент $k_H = \frac{\langle H \rangle_f}{\langle H \rangle}$.

Числовое значение коэффициента k_H получено из решения задачи на ячейке (2.27) и показано на рис. 2.20 при различных μ_f / μ_m .

Знание значения k_H позволяет при известной величине поля $\langle H \rangle$ в произвольной точке образца $\mathbf{r}$ вычислить с помощью итерационной процедуры магнитную проницаемость включения $\mu_f = \mu_f(k_H \langle H \rangle)$ и затем определить уточненное значение $\mu_{eff}(\mathbf{r})$ в этой точке (например, по данным рис. 2.15).

2.8. Численное моделирование электротепловых процессов при протекании электрического тока в пористом проводнике

Пористый проводник может быть отнесен к композиционным материалам ячеистого типа, состоящим из проводящей матрицы и включений (пор) из непроводящего материала. В частном случае это могут быть воздушные включения. При протекании сильного электрического тока в таком проводнике в окрестности пор возникают локальные зоны концентрации плотности тока, мощности джоулевых потерь и температуры. Это обстоятельство при одних условиях – в случае длительного протекания электрического тока значительной величины – может привести к разрушению пористого проводника, а с другой стороны, при протекании сильного импульсного тока, может использоваться для залечивания дефектов или трещин в объеме проводника [28].

При проведении экспериментальных исследований электротепловых процессов в пористом проводнике измеряются, как правило,

лишь осредненные характеристики электрического поля и температуры, а изучение процессов в окрестности локальных неоднородностей требует проведения дорогостоящих экспериментов. В связи с этим для исследования микроскопических характеристик электрического поля в пористом проводнике и их зависимости от величины пористости, соотношения электро- и теплофизических характеристик его компонентов (матрицы и пор) целесообразно использовать численное моделирование, результаты которого приведены далее.

Постановка задачи. Рассматривается электротепловая задача в образце из пористого проводника, имеющего для простоты форму параллелепипеда (рис. 2.21 *а*), по которому протекает постоянный электрический ток i , подведенный контактным способом. Будем исследовать установившийся режим, при котором все выделяющееся в проводнике тепло передается в окружающую среду, и введем следующие упрощающие допущения и предположения:

1) материал пористого проводника обладает регулярной (трехмерно-периодической) структурой с одинаковым периодом l по трем координатным направлениям; в основе структуры такого материала лежит элементарная ячейка, позволяющая путем трансляции по трем координатным осям декартовой системы полностью воспроизвести структуру материала;

2) ячейка имеет форму куба и состоит из проводящей матрицы и расположенных в вершинах куба включений (пор) сферической формы из непроводящего или слабопроводящего материала (рис. 2.21 *б*);

3) электро- и теплофизические свойства материала матрицы и включения не зависят от величины поля и характеризуются скалярными

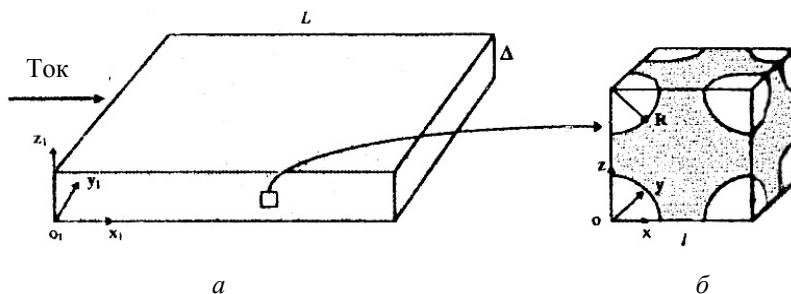


Рис. 2.21. Образец из пористого проводника (*а*), основу структуры которого составляет элементарная ячейка кубической формы (*б*)

значениями электропроводности σ_m, σ_f и теплопроводности λ_m, λ_f , где индекс m соответствует материалу матрицы, а f – материалу включения.

При таких предположениях пористый проводник в целом характеризуется однородными и изотропными макроскопическими свойствами.

Так же, как и для модели ячейки магнитно-проводящего композита, будем рассматривать два случая: радиус сферического включения $R \leq 0,5l$ (рис. 2.22 а) и радиус $R > 0,5l$, а включение имеет форму сферы со срезанными сегментами (рис. 2.22 б). При этом величина пористости f , равная отношению объема пор в ячейке к объему этой ячейки, будет равна

$$f = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{l}\right)^3, & R \leq 0,5l; \\ \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{l}\right)^3 - 6\pi b^2 \left(\frac{R}{l} - \frac{b}{3}\right), & 0,5l < R < 0,707l, \end{cases}$$

где $b = R/l - 0,5$.

Математическое моделирование и анализ электротепловых процессов в пористом проводнике включают такие этапы:

1. Получение осредненной системы уравнений для расчета макроскопических величин электрического и теплового полей – электрического потенциала $\langle \varphi \rangle$ и температуры $\langle T \rangle$ во всем объеме образца в гло-

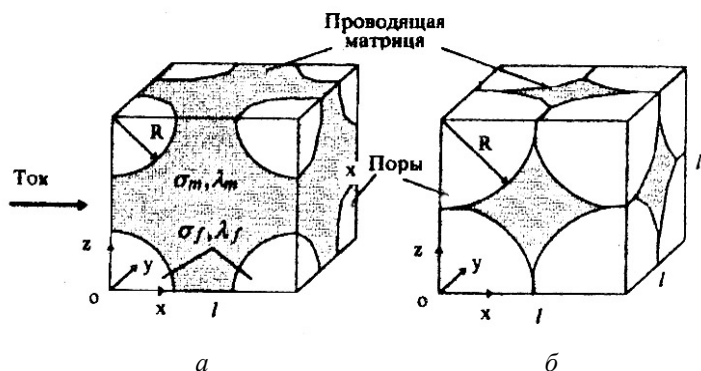


Рис. 2.22. Элементарная ячейка структуры пористого проводника при $R \leq 0,5 \cdot l$ (а) и при $R > 0,5 \cdot l$ (б)

бальной системе координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 2.21 а). При этом система содержит неизвестные на данном этапе эффективные характеристики пористой среды – электропроводность σ_{eff} и теплопроводность λ_{eff} ;

2. Формулировка и решение электрической и тепловой задач на элементарной ячейке в локальной системе координат $Oxyz$, связанной с этой ячейкой (рис. 2.21 б), и определение эффективных характеристик среды;

3. Аналитическое или в общем случае численное решение осредненной электротепловой задачи для определения реального распределения макроскопического электрического поля $\langle \varphi \rangle$, плотности электрического тока $\langle \mathbf{J} \rangle$ и температуры $\langle T \rangle$ в макроскопически однородном образце с эффективными характеристиками;

4. Решение электротепловой задачи на отдельных ячейках образца с целью определения локальных значений плотности тока, плотности джоулевых потерь и температуры. При этом учитывается реальная картина распределения макроскопического поля $\langle \mathbf{J} \rangle$ и $\langle T \rangle$, полученная на этапе 3.

Рассмотрим более подробно каждый из этапов решения поставленной электротепловой задачи в пористом проводнике.

Осредненная система дифференциальных уравнений. Установившаяся электротепловая задача в образце из пористого проводника описывается следующей системой дифференциальных уравнений для микроскопического электрического и теплового полей:

а) уравнение для электрического потенциала:

$$\nabla \cdot [\sigma(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r})] = 0; \quad (2.30)$$

б) уравнение для плотности тока и напряженности электрического поля:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi; \quad (2.31)$$

в) уравнение теплопроводности:

$$\nabla \cdot [\lambda(\mathbf{r}) \nabla T(\mathbf{r})] = -(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}), \quad (2.32)$$

где $\sigma(\mathbf{r})$, $\lambda(\mathbf{r})$ – электропроводность и теплопроводность материала, представляющие собой быстроменяющиеся функции радиус-вектора $\mathbf{r}$ вследствие сложной структуры пористого проводника.

Дополненная граничными условиями система (2.30)–(2.32) описывает электротепловую задачу в образце, решение которой позволяет по-

лучить детальную картину поля на микроскопическом уровне. Однако, ввиду сложной структуры проводника, строгое решение этой задачи сопряжено с практически непреодолимыми трудностями (в случае включений малых размеров). В связи с этим осуществляется переход к макроскопической картине поля, удовлетворяющей следующей системе уравнений:

$$\nabla \cdot [\sigma_{eff} \nabla \langle \varphi \rangle] = 0, \quad (2.33)$$

$$\langle \mathbf{J} \rangle = \sigma_{eff} \langle \mathbf{E} \rangle, \quad \langle \mathbf{E} \rangle = -\nabla \langle \varphi \rangle, \quad (2.34)$$

$$\nabla \cdot [\lambda_{eff} \nabla \langle T \rangle] = -[\langle \mathbf{J} \rangle \cdot \langle \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{J}' \cdot \mathbf{E}' \rangle]. \quad (2.35)$$

Отметим, что уравнения (2.33) и (2.34) получены путем упрощения системы (2.5) и (2.6), а уравнение (2.35) записано по аналогии с (2.33). В них введены эффективные (макроскопические) характеристики пористого проводника – электропроводность σ_{eff} и теплопроводность λ_{eff} , определяемые на основании выражений

$$\sigma_{eff} = \frac{\langle \sigma(\mathbf{r}) \nabla \varphi \rangle}{\nabla \langle \varphi \rangle}; \quad \lambda_{eff} = \frac{\langle \lambda(\mathbf{r}) \nabla T \rangle}{\nabla \langle T \rangle}. \quad (2.36)$$

Выражение в правой части (2.35) представляет собой полную мощность джоулевых потерь, равную сумме потерь осредненного поля $\langle \mathbf{J} \rangle \cdot \langle \mathbf{E} \rangle$ и потерь флуктуационного поля $\langle \mathbf{J}' \cdot \mathbf{E}' \rangle$.

Система (2.33)–(2.35) после вычисления эффективных характеристик и задания граничных условий представляет собой электротепловую задачу для определения осредненного поля $\langle \varphi \rangle$, $\langle T \rangle$. Решение этой задачи в зависимости от сложности конфигурации расчетной области может быть получено аналитическим или численным методом.

Для определения значений эффективных характеристик пористого проводника далее рассмотрим электротепловую задачу в элементарной ячейке.

Электротепловая задача в элементарной ячейке. Полевая электротепловая задача в ячейке при проведении полного цикла исследований решается дважды: первый раз – при расчете эффективных характеристик проводника, а второй – при расчете микроскопического поля в выбранной ячейке и с учетом найденных значений $\langle \varphi \rangle$ и $\langle T \rangle$.

Задача в ячейке на этапе расчета эффективных характеристик сводится к решению двух несвязанных задач расчета микроскопического электрического поля φ и температуры T в объеме, занимаемом ячейкой.

В локальной системе координат $Oxyz$, связанной с ячейкой (рис. 2.21 б), электрическая и тепловая задачи запишутся в виде уравнений (2.30) и (2.32) без источника в правой части:

$$\nabla \cdot [\sigma(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r})] = 0; \quad (2.37)$$

$$\nabla \cdot [\lambda(\mathbf{r}) \nabla T(\mathbf{r})] = 0. \quad (2.38)$$

В качестве граничного условия вследствие регулярной структуры материала будем рассматривать условие периодичности флуктуационных составляющих φ' и T' . Полагая, что величины $\langle \varphi \rangle$ и $\langle T \rangle$ изменяются в пределах элементарной ячейки по линейному закону вдоль оси x , и используя условие периодичности для $\varphi' = \varphi - \langle \varphi \rangle$ и $T' = T - \langle T \rangle$, получаем следующее:

для электрического потенциала:

$$\varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=l} + l\langle E_x \rangle; \quad \varphi|_{y=0} = \varphi|_{y=l}; \quad \varphi|_{z=0} = \varphi|_{z=l};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{x=0;l} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}|_{y=0;l} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}|_{z=0;l} = 0, \quad (2.39)$$

для температуры:

$$T|_{x=0} = T|_{x=l} + l\nabla \langle T \rangle; \quad T|_{y=0} = T|_{y=l}; \quad T|_{z=0} = T|_{z=l};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0;l} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y}|_{y=0;l} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=0;l} = 0. \quad (2.40)$$

После решения краевых задач в объеме ячейки (2.37), (2.39) и (2.38), (2.40) эффективные характеристики определяются на основании выражений (2.36).

Отметим, что отсутствие источников члена в правой части (2.38) связано с тем обстоятельством, что для дополнительной температуры T_S , соответствующей этому источнику, величина $\langle \lambda(\mathbf{r}) \nabla T_S \rangle = 0$, т.е. величина T_S согласно (2.36) не влияет на значение λ_{eff} . Именно по-

этому тепловая задача на этапе расчета λ_{eff} оказывается не связанной с электрической.

Определение макроскопической картины электрического и теплового полей. Для расчета макроскопического поля рассмотрим образец в форме пластины из пористого проводника (рис. 2.21 а) с эффективными характеристиками σ_{eff} , λ_{eff} . Предположим, что в образце протекает постоянный электрический ток в направлении оси x_1 , характеризующийся равномерной плотностью $\langle J_x \rangle$ и плотностью мощности джоулевых потерь $q_1 = (\langle J_x \rangle)^2 / \sigma_{eff}$. Отметим, что джоулевы потери флуктуационного поля $\langle \mathbf{J}' \cdot \mathbf{E}' \rangle$, входящие в выражение (2.35), как показали результаты проведенных расчетов, значительно меньше величины $\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle$, поэтому могут не учитываться.

Осредненное температурное поле в пластине из пористого проводника при $\Delta \ll L$ (см. рис. 2.21 а) может рассматриваться в одномерной постановке и удовлетворяет уравнению $\lambda_{eff} \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial z_1^2} = -q_1$, а также граничным условиям, записанным с учетом отвода тепла в окружающую среду и с учетом симметрии поля относительно плоскости $z_1 = \Delta / 2$: при $z_1 = 0$ $\lambda_{eff} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z_1} = \alpha (\langle T \rangle - T_c)$, при $z_1 = \Delta / 2$ величина $\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z_1} = 0$, где α – коэффициент теплоотдачи, T_c – температура окружающей среды.

Решение этой задачи имеет вид

$$\langle T \rangle = T_{нов} + \frac{q_1}{2\lambda_{eff}} z(\Delta - z), \quad (2.41)$$

где $T_{нов} = T_c + \frac{q_1 \Delta}{2\alpha}$ – температура на поверхности пластины при $z_1 = 0, \Delta$.

Выражение (2.41) будет использоваться далее для получения микроскопической картины поля.

Определение микроскопической картины поля. Для изучения микроскопической структуры электротеплового поля, отражающей характер неоднородного распределения плотности тока и температуры непосредственно в матрице и порах, необходимо на предварительном этапе:

- 1) выбрать определенную ячейку в образце, т.е. задать ее координаты в системе $O_1x_1y_1z_1$;
- 2) задать ориентацию этой ячейки;
- 3) определить характер изменения $\langle \mathbf{J} \rangle$ и $\langle T \rangle$ в объеме этой ячейки;
- 4) рассмотреть полевую задачу в ячейке.

Выберем для этих целей ячейку, лежащую вблизи поверхностного слоя ($z_1 = 0$) и характеризующуюся согласно (2.41) значением температуры $\langle T \rangle = T_{нов}$ и постоянной плотностью тока $\langle J_x \rangle$. Ориентацию ячейки примем согласно рис. 2.21 б, когда одноименные оси локальной и глобальной систем координат направлены параллельно друг другу.

Электротепловая задача в ячейке в локальной системе координат $Oxyz$ записывается в виде системы дифференциальных уравнений (2.30)–(2.32) с граничными условиями, полученными из условия периодичности $\varphi' = \varphi - \langle \varphi \rangle$ и $T' = T - \langle T \rangle$ по трем координатным направлениям и с учетом распределения температуры согласно (2.41):

$$\nabla \cdot [\sigma(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r})] = 0;$$

$$\nabla \cdot [\lambda(\mathbf{r}) \nabla T(\mathbf{r})] = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E};$$

$$\varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=l} + l \langle J_x \rangle / \sigma_{eff}$$

$$T|_{x=0} = T|_{x=l}; \quad T|_{y=0} = T|_{y=l};$$

$$\varphi|_{y=0} = \varphi|_{y=l}; \quad \varphi|_{z=0} = \varphi|_{z=l}; \quad (2.42)$$

$$T|_{z=0} = T|_{z=l} - \frac{q_1}{2\lambda_{eff}} l \Delta; \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{x=0;l} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}|_{y=0;l} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0;l} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y}|_{y=0;l} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}|_{z=0;l} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}|_{z=0} = \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=l} + \frac{q_1}{\lambda_{eff}} l.$$

Уравнение теплопроводности в (2.43) содержит в правой части величину плотности мощности джоулевых потерь, которая определяется из решения задачи (2.42).

Отметим, что температурное поле, удовлетворяющее полевой задаче (2.43), определяется с точностью до произвольной константы. Для получения единственного решения тепловой задачи необходимо использовать условие нормирования температуры по объему ячейки:

$$\frac{1}{V} \int_V T dV = \langle T \rangle, \quad (2.44)$$

где в рассматриваемом случае $\langle T \rangle = T_{нов}$.

При решении электротепловой задачи (2.37)–(2.40), позволяющей определить эффективные характеристики пористого проводника, и при решении задачи (2.42)–(2.44) для определения микроскопической картины поля, в работе использовался метод конечных разностей, описанный для аналогичной задачи в разделе 2.7.

Анализ результатов расчета. Расчеты проводились при следующих исходных данных: $\sigma_m = 148 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$; $\sigma_f / \sigma_m = 10^{-3}$; $\sigma_m = 10^{-3} \sigma_f$, $\lambda_m = 148 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, $\lambda_f - \text{var}$, $l = 50 \text{ мкм}$. В связи с тем, что результаты проведенных расчетов представлены далее в относительных единицах, важно лишь соотношение между указанными параметрами.

На рис. 2.23 показана зависимость эффективной электропроводности пористого проводника, отнесенная к величине электропроводности материала матрицы, в зависимости от величины пористости f .

Расчетные значения эффективной теплопроводности пористого проводника в зависимости от величины пористости и при различных соотношениях теплопроводности материалов матрицы и пор представлены на рис. 2.24. Полученные значения эффективных характеристик необходимы при решении задачи определения микроструктуры поля.

Для количественной оценки степени неоднородности распределения плотности тока, плотности мощности джоулевых потерь и температуры в объеме элементарной ячейки будем использовать безразмерные коэффициенты неоднородности, определяемые соответственно на основании следующих выражений:

$$k_J = \frac{J_{\max}}{\langle J_x \rangle}; \quad k_Q = \frac{(J^2 / \sigma(\mathbf{r}))_{\max}}{\langle J_x \rangle^2 / \sigma_{eff}},$$

где под максимумом понимается наибольшее значение соответствующих величин в пределах объема элементарной ячейки.

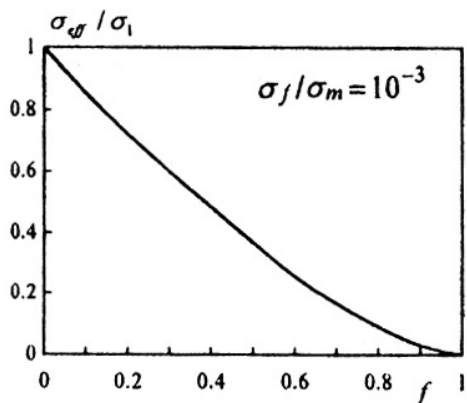


Рис. 2.23. Зависимость эффективной электропроводности пористого проводника от объемной концентрации пор f

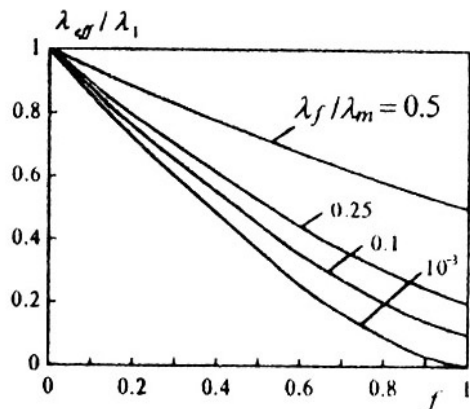


Рис. 2.24. Зависимость эффективной теплопроводности пористого проводника от объемной концентрации пор f

Значения коэффициентов k_J и k_Q зависят от структуры материала (для принятой модели она характеризуется величиной f) и соотношения электропроводностей σ_f/σ_m . Количественный характер этих зависимостей показан на рис. 2.25.

С увеличением пористости материала возрастает степень неоднородности распределения плотности тока и джоулевых потерь. Для иллюстрации этого обстоятельства на рис. 2.26 показано распределение плотности электрического тока и джоулевых потерь в среднем сечении элементарной ячейки ($z_1=0,5l$) для величины пористости $f=0,8$. Видно, что концентрация плотности тока и потерь происходит на участке входа и выхода из ячейки в угловых зонах.

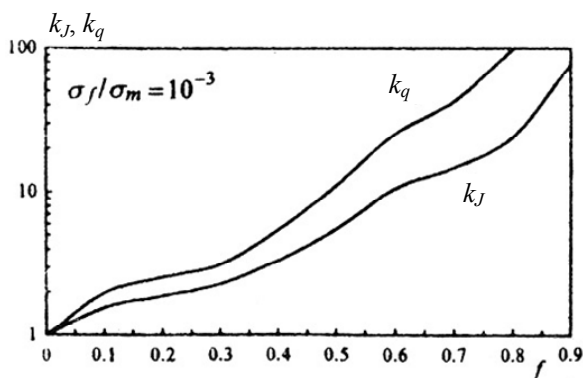


Рис. 2.25. Зависимость коэффициента неоднородности распределения плотности тока k_J и плотности джоулевых потерь k_Q в пористом проводнике от объемной концентрации пор f

Распределение температуры рас-

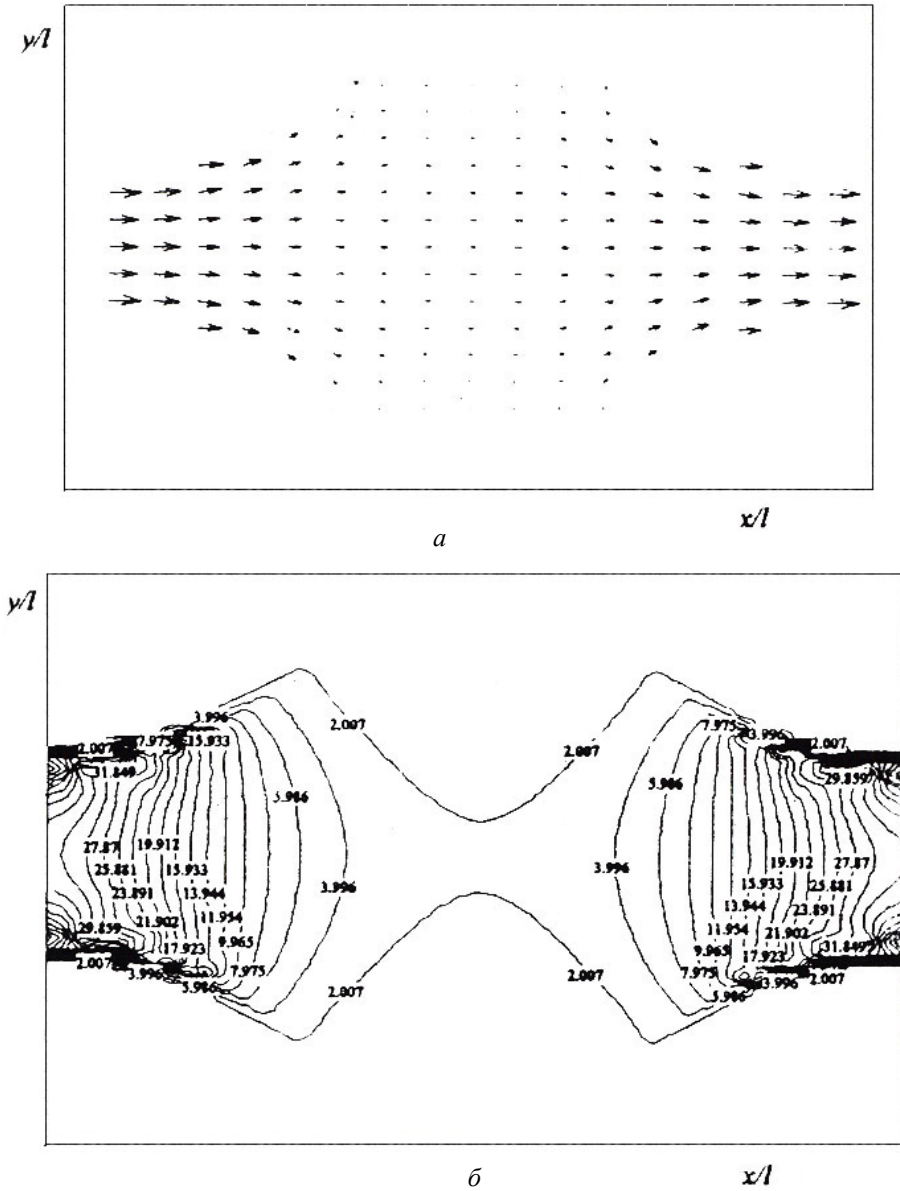


Рис. 2.26. Распределение плотности тока (а) и джоулевых потерь (б) в срединном сечении элементарной ячейки ($z = 0,5l$) при пористости $f = 0,8$

считывалось при следующих значениях параметров: $f = 0,8$; $\sigma_f / \sigma_m = 10^{-3}$; $\lambda_f = 0,034$ Вт/(м·К); $Q = 0,17$; $l / \Delta = 0,1$. Здесь введен безразмерный параметр источника джоулевого тепла, равный

$$Q = \frac{q_1}{\lambda_{eff}} \frac{l^2}{\langle T \rangle}.$$

Выражение для Q вытекает из уравнения теплопроводности в системе (2.43), если его записать в безразмерном виде, принимая в качестве базисных величин температуру $\langle T \rangle$ и длину ячейки l .

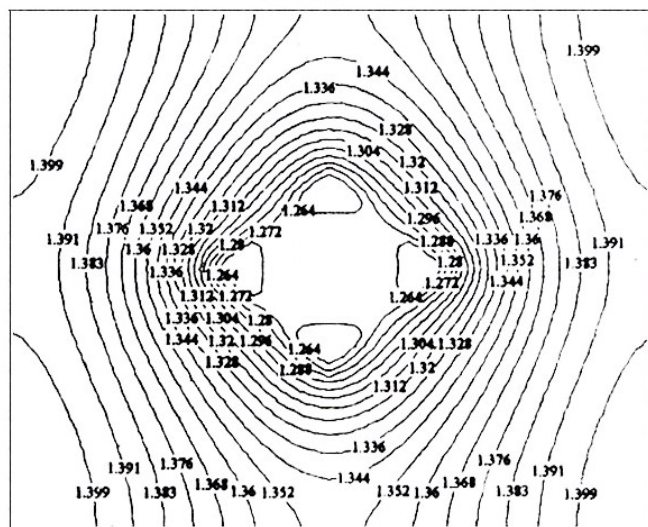
Заметим, что при $Q \ll 1$ упрощается граничное условие в (2.43) для $\partial T / \partial z$ и имеет вид $\frac{\partial T}{\partial z}|_{z=0} = \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=l}$, а при $Q\Delta/l \ll 1$ упрощается граничное условие для T следующим образом: $T|_{z=0} = T|_{z=l}$.

На рис. 2.27 показано полученное расчетным путем распределение температуры для двух различных сечений элементарной ячейки. Значение температуры приведено в относительных единицах в долях от величины $\langle T \rangle$. Видно, что зоны на входе и выходе из ячейки, в которых достигается высокое значение джоулевых потерь (см. рис. 2.26 б), характеризуются более высокими значениями температуры. В случае кратковременного протекания импульсного тока, когда тепловая задача в ячейке будет рассматриваться как нестационарная, концентрация температуры в этих зонах будет более значительной.

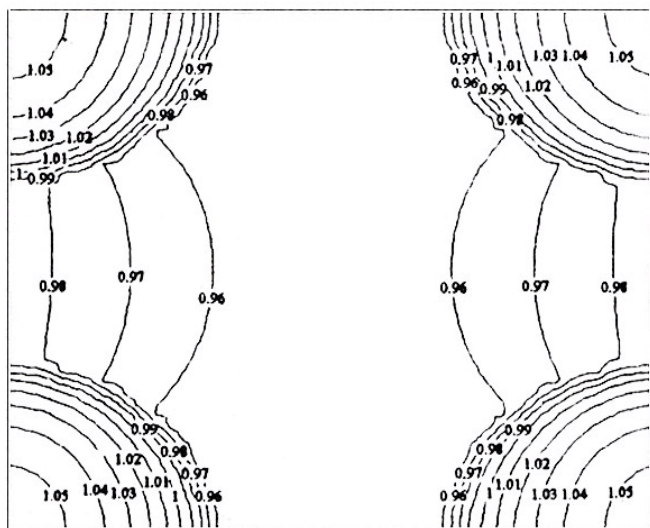
Резюмируя основные результаты данной главы, отметим следующее.

1. Главная особенность расчета электромагнитных процессов в микронеоднородных средах состоит в том, что на первом этапе моделирования исследуется картина осредненного электромагнитного поля [система (2.5)–(2.7)], причем для ее получения необходимо предварительно определить путем физического или математического моделирования эффективные характеристики материала.

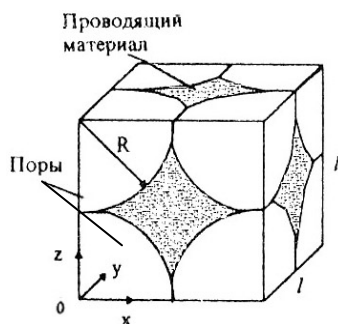
2. Эффективные характеристики материала зависят от его структуры, электро- и теплофизических свойств его фаз и контактных явлений на границе раздела фаз. Для расчета значений этих характеристик необходимо в общем случае решать полевую задачу в объеме ячейки, общая формулировка которой приведена в разделах 2.5 и 2.6.



a



б



в

Рис. 2.27. Распределение температуры $T / \langle T \rangle$
в двух сечениях элементарной ячейки
(*a*) $z = 0,95l$; (*б*) $z = 0,5l$,
(*в*) структура ячейки

3. В материале с малыми структурными неоднородностями существуют локальные области, расположенные, как правило, в непосредственной близости от границ раздела фаз, в которых "истинное" микроскопическое поле может значительно отличаться от осредненного поля. Для получения картины микроскопического поля также необходимо решать полевую задачу в ячейке с учетом реальной картины распределения макроскопического поля в ее объеме.

4. Особенностью анализа электромагнитных процессов в материале со сложной структурой, в которой можно выделить несколько разномасштабных пространственных уровней, является организация циклического процесса расчета эффективных характеристик для каждого уровня (начиная с самого нижнего) и циклического процесса расчета распределения поля на каждом уровне (начиная с самого верхнего) с учетом полученных значений эффективных характеристик.

ГЛАВА 3

МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИЦИОННОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

3.1. Введение

В настоящей главе проводится расчет трехмерного электрического поля и эффективных диэлектрических характеристик искусственно созданного двухкомпонентного композиционного материала с периодической структурой в диапазоне частот 10^{-3} – 10^3 Гц. При этом используется метод многомасштабного моделирования. Рассмотрение выполняется на двух пространственных уровнях – на макроуровне композита в целом и на микроуровне его элементарной ячейки. Характеристики двух компонентов композиционного материала, а также эффективные характеристики композита в целом при различной частоте измерялись в ходе проведения экспериментальных исследований. Для расчета эффективных характеристик композита рассматривалась полевая задача в объеме элементарной ячейки, решение которой выполнялось численными методами контрольного объема и конечных элементов. Получено хорошее совпадение результатов численного расчета и эксперимента. Представлены и проанализированы полученные по результатам расчета электрического поля зависимости от частоты комплексной эффективной диэлектрической проницаемости композита, а также распределение трехмерного электрического поля и потерь энергии в объеме материала. Более полно исследования данной главы изложены в статье [1].

3.2. Структура композиционного материала и результаты эксперимента

На рис. 3.1 схематически показана структура рассматриваемого композиционного диэлектрика, состоящего из двух компонентов – парафина в качестве основного материала (фаза 1) и включений в виде тонких полос из гетинакса (фаза 2). Все полосы гетинакса имеют одинаковые размеры, равно отстоят друг от друга как по оси x , так и по оси z и формируют пространственную периодическую структуру материала. Объемная концентрация включений в композите составляет $q_2 = 0,41$. Такой искусственно созданный композит характеризуется трехмерной периодической структурой, в которой может быть выделена элементарная ячейка, показанная на рис. 3.1 б. Для расчета зависящих от частоты эффективных параметров композита необходимо решить полевую задачу в объеме элементарной ячейки с учетом комплексных диэлектрических проницаемостей составляющих композит материалов – парафина и гетинакса, являющихся функциями частоты. Такие зависимости находились экспериментальным путем.

Для определения характеристик композита и характеристик его двух компонентов были проведены измерения* при различной частоте для

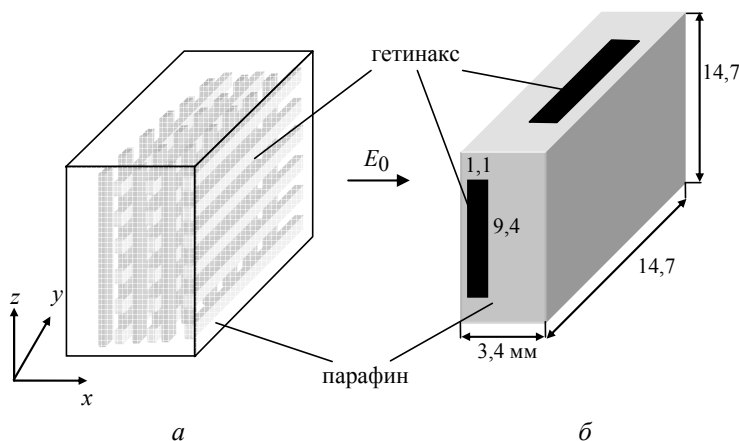


Рис. 3.1. Структура композиционного материала (а) и элементарной ячейки (б). E_0 – внешнее электрическое поле

* Измерения выполнялись в Chalmers University of Technology (Швеция) под руководством проф. С. Губанского.

трех образцов: однородный образец из парафина с размерами – $75 \times 75 \times 6$ мм³, однородный образец из гетинакса – $80 \times 80 \times 1,1$ мм³ и образец из композиционного материала – $80 \times 80 \times 7$ мм³. Образцы помещались между электродами (65 мм в диаметре) трехэлектродной измерительной установки. Емкости образцов измерялись с помощью системы IDA 200 [2]. Частота измерительного напряжения варьировалась в диапазоне $f = 10^{-3} - 10^3$ Гц. Амплитуда измерительного напряжения сохранялась постоянной и равной 20 В. По результатам измерений определялись комплексная диэлектрическая проницаемость парафина $\dot{\varepsilon}_1(\omega) = \varepsilon'_1(\omega) - j\varepsilon''_1(\omega)$, гетинакса $\dot{\varepsilon}_2(\omega) = \varepsilon'_2(\omega) - j\varepsilon''_2(\omega)$ и комплексная эффективная диэлектрическая проницаемость композиционного диэлектрика $\dot{\varepsilon}_{eff}(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega)$.

Зависимости от частоты действительной $\varepsilon'(\omega)$ и мнимой $\varepsilon''(\omega)$ частей этих величин представлены на рис. 3.2. Как видно, отличие в их значениях для компонентов композита достаточно велико. На низкой частоте действительная часть диэлектрической проницаемости гетинакса ε'_2 примерно в 30 раз выше, чем ε'_1 парафина (рис. 3.2 а). Еще большая разница наблюдается для действительной части комплексной диэлектрической проницаемости – на три порядка величины как при низкой, так и при высокой частоте (рис 3.2 б). Кроме того, кривые для гетинакса почти не изменяются в интервале частоты $f \approx 10^{-2} - 10^1$ Гц, тогда как для образца из парафина такое поведение не было зарегистрировано. Параметры композита находятся между параметрами его составляющих. Величина ε'' практически постоянна в широком диапазоне частоты $f \approx 10^{-3} - 10^1$ Гц.

Эквивалентное значение электропроводности материалов, определяемое на основании выражения $\sigma(\omega) = \omega\varepsilon_0\varepsilon''$ ($\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость вакуума) в зависимости от частоты, показано на рис. 3.3. Отметим, что экспериментально полученная зависимость $\sigma(\omega)$ учитывает как электропроводность на постоянном токе, так и диэлектрические потери [3].

Из рис. 3.3 видно, что функции $\sigma(\omega)$ для рассматриваемых материалов достаточно сильно различаются. При частоте $10^{-3} - 10^{-1}$ Гц электропроводность гетинакса σ_1 почти постоянна – $\sigma_1 \sim 10^{-10}$ (Ом·м)⁻¹. Это означает, что электропроводность на постоянном токе доминирует в указанном диапазоне частоты. Вместе с тем σ_1 изменяется при вы-

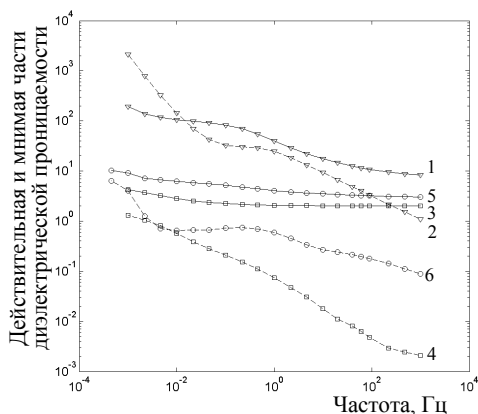


Рис. 3.2. Измеренные действительная (1, 3, 5) и мнимая (2, 4, 6) части комплексной величины диэлектрической проницаемости материалов: 1, 2 – гетинакса; 3, 4 – парафина; 5, 6 – композита

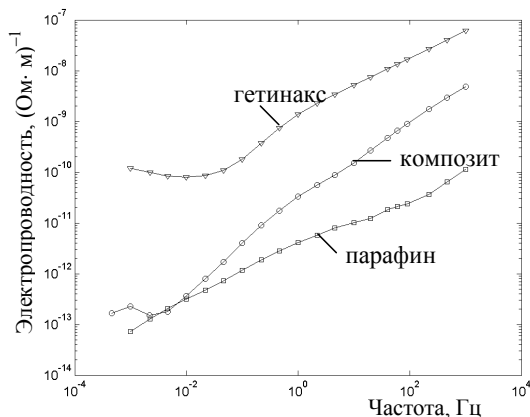


Рис. 3.3. Экспериментальные значения электропроводности материалов, зависящей от частоты

сокой частоте и увеличивается до $10^{-7} (\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$ при $f \approx 10^3$ Гц. Электропроводность парафина σ_2 возрастает с увеличением частоты от $\sigma_2 \approx 5 \times 10^{-14} (\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$ при частоте 10^{-3} Гц до $10^{-11} (\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$ при 10^3 Гц. Электропроводность композита практически совпадает с электропроводностью парафина на низких частотах и растет с увеличением частоты, достигая $\sim 10^{-8} (\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$ при частоте 10^3 Гц.

Таким образом, характеристики композита в значительной степени зависят от частоты. Они могут изменяться также в зависимости от микроскопических величин, например, от распределения электрического поля и потерь энергии в объеме материала.

Заметим, что для измерения характеристик материалов необходимо дорогостоящее оборудование. Вместе с тем значения этих характеристик могут быть получены с помощью как аналитических выражений, так и по результатам численного моделирования, принимая в расчет экспериментально полученные зависимости $\varepsilon'_{1,2}(\omega)$ и $\varepsilon''_{1,2}(\omega)$ или $\sigma_{1,2}(\omega)$ для составляющих композит материалов (см. раздел 3.4).

В силу того, что структура изучаемого композиционного материала достаточно проста, для приближенного анализа его диэлектрических свойств наряду с численными методами могут применяться классические модели композита, для которых известны аналитические выражения. Такие модели рассматриваются далее.

3.3. Использование классических моделей композита

Рассмотрим в качестве простейшей модели двухкомпонентного композита двухслойные структуры, находящиеся во внешнем однородном электрическом поле. В первом случае слои, выполненные из парафина и гетинакса, расположены перпендикулярно внешнему полю и представляют собой два последовательно соединенные неидеальные конденсатора (рассматривается диэлектрик с потерями). Во втором случае эти слои расположены параллельно внешнему полю и представляют собой два параллельно соединенные конденсатора.

Располагая измеренными значениями комплексной диэлектрической проницаемости двух компонентов композита – парафина $\dot{\epsilon}_1(\omega)$ (фаза 1) и гетинакса $\dot{\epsilon}_2(\omega)$ (фаза 2) в зависимости от частоты (см. рис. 3.2), для простейшей двухслойной модели композита могут быть определены предельные значения для эффективной диэлектрической проницаемости в зависимости от частоты электрического поля.

Предельные значения эффективной диэлектрической проницаемости композита. Эффективная диэлектрическая проницаемость для двух упомянутых выше случаев расположения слоев относительно поля может быть определена с помощью соотношения, представляющего так называемые пределы Winner'a [4] для диэлектрических композиционных материалов: $\dot{\epsilon}_{W,\min} = (q_1 / \dot{\epsilon}_1 + q_2 / \dot{\epsilon}_2)^{-1}$ – для последовательного расположения слоев и $\dot{\epsilon}_{W,\max} = \dot{\epsilon}_1 q_1 + \dot{\epsilon}_2 q_2$ – для параллельного расположения слоев. Здесь $\dot{\epsilon}_{1,2}$ и $q_{1,2}$ – соответственно комплексная диэлектрическая проницаемость и объемная фракция фаз 1 и 2, причем $q_1 + q_2 = 1$.

Диаграммы на рис. 3.4 показывают пределы Winner'a для рассматриваемого композиционного материала при различных значениях частоты. Здесь черными квадратами отмечены экспериментально полученные значения. Видно, что параметры композитов находятся внутри замкнутых областей и границы этих областей представляют собой оценку предельных значений диэлектрической проницаемости композита.

Вследствие того, что направление приложенного электрического поля в исследуемом случае перпендикулярно поверхности полос гетинакса (см. рис. 3.1), последовательная модель соединения конденсаторов более точно отражает топологию реальной структуры. Поэтому естественно, что точки, соответствующие экспериментальным данным на

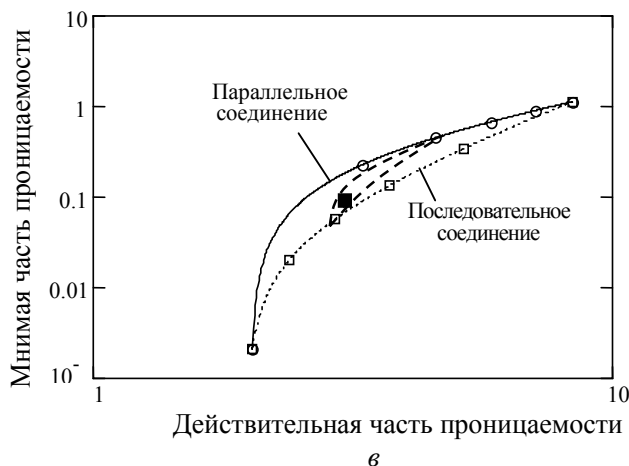
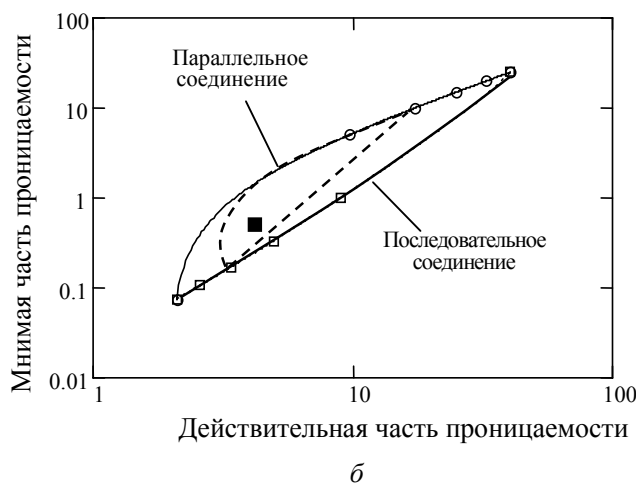
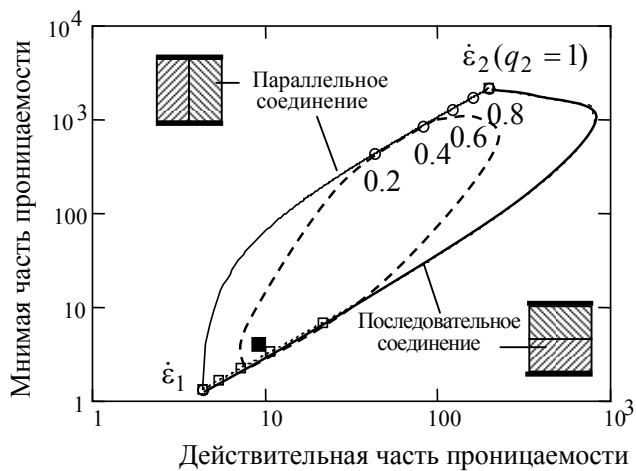


Рис. 3.4. Пределы комплексной диэлектрической проницаемости по Виннеру (сплошная линия) и по Бергман-Милтону (пунктирная линия) для композита, состоящего из парафина и гетинакса при частоте (а) $f = 10^{-3}$ Гц; (б) $f = 1$ Гц; (в) $f = 10^3$ Гц

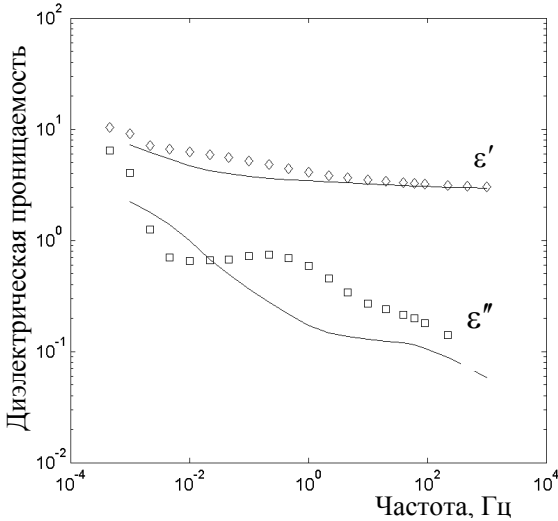


Рис. 3.5. Действительная (ромбы) и мнимая (квадраты) части комплексной эффективной диэлектрической проницаемости, рассчитанные с использованием классической модели последовательно соединенных конденсаторов (сплошная линия). Точками отмечены экспериментальные значения

При известной объемной концентрации включений более точное приближение обеспечивают пределы Bergman-Milton'a [5, 6], которые определяют узкий диапазон допустимых значений параметров композита (пунктирные линии на рис. 3.4). С одной стороны, эти предельные значения представлены дугой

$$\dot{\epsilon}_{v1}(\zeta) = \dot{\epsilon}_1 + \frac{q_2 \dot{\epsilon}_1 (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_1)}{\dot{\epsilon}_1 + \zeta (1 - q_2) (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_1)},$$

а с другой стороны – дугой, которая выражается формулой

$$\dot{\epsilon}_{v2}(\zeta) = \dot{\epsilon}_2 + \frac{(1 - q_2) \dot{\epsilon}_2 (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)}{\dot{\epsilon}_2 + \zeta q_2 (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)},$$

где безразмерный параметр ζ изменяется в пределах от 0 до 1.

Как видно из рис. 3.4, экспериментальные значения лежат вблизи левого нижнего края области, ограниченной пределами Bergman-Milton'a, которые соответствуют нижним значениям действительной и мнимой частей комплексной диэлектрической проницаемости, т.е. параметрам парафина. Это означает, что фаза парафина имеет доминирующее влияние на эффективные свойства композиционного материала.

рис. 3.4 (черные квадраты), расположены на нижней границе. Вместе с тем для последовательной модели расхождение между измеренными параметрами композита и рассчитанными по формуле

$$\dot{\epsilon}_{W,\min} = (q_1 / \dot{\epsilon}_1 + q_2 / \dot{\epsilon}_2)^{-1}$$

велико (см. рис. 3.5). В общем случае, используя пределы Winner'a, можно лишь грубо оценить эффективную диэлектрическую проницаемость композита, особенно для низких частот, для которых пределы достаточно широки (см. рис. 3.4 а).

Рассмотренные две классические модели композита Winner'a и Bergman-Milton'a позволяют приближенно оценивать эффективные диэлектрические свойства композита при условии известных диэлектрических характеристик его компонентов и их объемного содержания. Более точное значение эффективной диэлектрической проницаемости можно получить с использованием метода многомасштабного моделирования и численного расчета поля на уровне элементарной ячейки, что и составляет содержание следующего раздела.

3.4. Математические модели на двух разномасштабных уровнях

Рассматривается композиционный диэлектрик, который находится в переменном электрическом поле $\vec{E}(\mathbf{r}) \cdot \exp(j\omega t)$, изменяющемся во времени по гармоническому закону с угловой частотой ω . Используется квазиэлектростатическое приближение, справедливое при низкой частоте, когда можно пренебречь взаимодействием между магнитным и электрическим полями и считать электрическое поле безвихревым. Предполагается также, что амплитуда электрического поля мала и всеми нелинейными эффектами в материале можно пренебречь. Компоненты композита характеризуются комплексными диэлектрическими проницаемостями $\hat{\epsilon}_1(\omega)$ и $\hat{\epsilon}_2(\omega)$.

Распределение электрического поля рассматривается на двух пространственных уровнях:

- на микроуровне в объеме элементарной ячейки, где определяется распределение микрополя и рассчитывается значение эффективной диэлектрической проницаемости;
- на макроуровне в объеме всего образца, где находится макрополе, осредненное по объему элементарной ячейки.

Модель на микроуровне. Без учета контактных явлений в гетерогенной среде с периодической структурой представительным элементом такой структуры является элементарная ячейка структуры, свойства которой отражают свойства композиционного материала в целом. Решение задачи с соответствующими граничными условиями в элементарной ячейке позволяет исследовать свойства композита на макроуровне.

Элементарная ячейка для исследуемого композита с указанием основных размеров показана на рис. 3.1 б. Ее объем составляет $\sim 1/50$ общего объема образца, использованного в эксперименте.

Изменяющееся во времени по гармоническому закону электрическое поле на микроуровне удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{E}} = -\nabla \dot{\phi}; \quad (3.1)$$

$$\mathbf{J}_{tot} = \sigma(\mathbf{r}, \omega) \dot{\mathbf{E}} + j\omega \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \dot{\mathbf{E}}; \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{tot} = 0, \quad (3.3)$$

где $\dot{\phi}$ – электрический потенциал; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор трехмерного пространства. Здесь плотность полного тока $\mathbf{J}_{tot}$ состоит из плотности тока проводимости $\sigma(\mathbf{r}, \omega) \dot{\mathbf{E}}$ и плотности тока смещения $j\omega \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \dot{\mathbf{E}}$.

Из анализа экспериментальных данных, проведенного в разделе 3.2, следует, что в рассматриваемом диапазоне изменения частоты джоулевы потери в материалах значительно меньше поляризационных потерь. При этом током проводимости можно пренебречь, и тогда уравнение (3.2) перепишем в виде

$$\mathbf{J}_{tot} = j\omega \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \dot{\mathbf{E}}. \quad (3.4)$$

Заметим, что зависимости $\dot{\mathbf{E}}_{1,2}(\omega) = \varepsilon'_{1,2} - j\varepsilon''_{1,2}$ были получены экспериментально и мнимые части диэлектрической проницаемости связаны с диэлектрическими потерями в материале.

Из уравнений (3.1)–(3.3) следует, что электрический потенциал $\dot{\phi}$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot j\omega [\varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \nabla \dot{\phi}(\mathbf{r})] = 0, \quad (3.5)$$

где $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \begin{cases} \dot{\mathbf{E}}_1(\omega) & \text{– в области парафина,} \\ \dot{\mathbf{E}}_2(\omega) & \text{– в области гетинакса.} \end{cases}$

Граничные условия полевой задачи показаны на рис. 3.6.

Задача при условии известного среднего значения воздействующего электрического поля E_0 в элементарной ячейке решалась численно методом контрольного объема [7] и методом конечных элементов*.

Модель на макроуровне. Распределение электрического поля в композиционном материале на макроуровне (в объеме всего образца) характеризуется усредненными векторами $\langle \dot{\mathbf{E}} \rangle$, $\langle \mathbf{J}_{tot} \rangle$ и усредненным потенциалом $\langle \dot{\phi} \rangle$.

* Решение задачи методом конечных элементов выполнялось к.т.н. Ю.В. Сердюком с помощью программы Comsol.

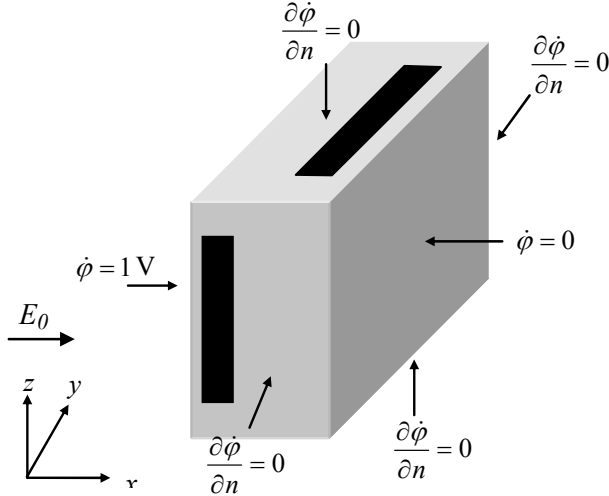


Рис. 3.6. Граничные условия полевой задачи для элементарной ячейки.
 $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали

Здесь пространственное осреднение выполняется по объему элементарной ячейки V_c так, что, например, для напряженности электрического поля

$$\langle \dot{\mathbf{E}} \rangle = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \dot{\mathbf{E}} dV.$$

Из уравнений (3.1)–(3.3) путем осреднения получаем следующую систему уравнений:

$$\nabla \times \langle \dot{\mathbf{E}} \rangle = 0 \quad \text{или} \quad \langle \dot{\mathbf{E}} \rangle = -\nabla \langle \dot{\phi} \rangle; \quad (3.6)$$

$$\langle \dot{\mathbf{J}}_{tot} \rangle = j\omega \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_{eff}(\omega) \langle \dot{\mathbf{E}} \rangle; \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \langle \dot{\mathbf{J}}_{tot} \rangle = 0, \quad (3.8)$$

где $\dot{\varepsilon}_{eff}(\omega)$ – комплексная эффективная диэлектрическая проницаемость композита, которая в общем случае является тензорной величиной.

Решение уравнения (3.5) в объеме элементарной ячейки было использовано для определения величины $\langle \dot{\mathbf{J}}_{tot} \rangle$, а затем вычисления $\dot{\varepsilon}_{eff}$ согласно выражению (3.7). Хотя величина $\dot{\varepsilon}_{eff}$ является анизотропной и имеет различные значения по трем координатным направлениям, в данной работе вычислялось ее значение только в x направлении (см. рис. 3.6) с использованием следующего выражения:

$$\dot{\epsilon}_{eff} = \frac{\langle \dot{J}_x \rangle}{j\omega\epsilon_0\langle \dot{E}_x \rangle}.$$

Описанный подход к определению эффективных параметров композита позволяет исследовать на микроуровне пространственное распределение абсолютной величины напряженности электрического поля $|\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|$ и потерь $P(\mathbf{r})$ в материале. Эти характеристики определялись в соответствии с выражениями

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})| &= \\ &= ((\text{Re}(\dot{E}_x))^2 + (\text{Im}(\dot{E}_x))^2 + (\text{Re}(\dot{E}_y))^2 + (\text{Im}(\dot{E}_y))^2 + (\text{Re}(\dot{E}_z))^2 + (\text{Im}(\dot{E}_z))^2)^{1/2}; \\ P(\mathbf{r}) &= \text{Re}(\dot{\mathbf{J}}_{tot} \cdot \mathbf{E}^*), \end{aligned}$$

где Re и Im обозначают действительную и мнимую части комплексных величин; $\mathbf{E}^*$ – комплексно-сопряженная величина, а $\dot{E}_x, \dot{E}_y, \dot{E}_z$ – составляющие электрического поля в x, y и z направлениях соответственно.

3.5. Результаты компьютерного моделирования

Результаты компьютерных расчетов величины эффективной диэлектрической проницаемости рассматриваемого композита показаны на рис. 3.7. Здесь же приведены данные экспериментов. Расчетные значения для действительной части комплексной величины проницаемости хорошо согласуются с измеренными значениями. Несколько различаются такие данные для мнимой части проницаемости в интервале частоты 10^{-3} – 10^1 Гц. Аналогичная тенденция к расхождению численных и экспериментальных данных имеет место и для эффективной электропроводности композита при низкой частоте (рис. 3.8). Такое отличие можно объяснить пренебрежением джоулевых потерь при выводе уравнения (3.4), а также влиянием межфазных границ и существующих дефектов в рассматриваемом материале (воздушные включения, трещины и т. п.), что не учитывалось в компьютерной модели. Кроме того, как отмечалось ранее, при построении математической модели не принимались во внимание контактные явления.

Данные рис. 3.7 также иллюстрируют небольшое различие между результатами компьютерных расчетов, полученных с использованием различных численных методов, в особенности для мнимой части эффективной диэлектрической проницаемости. Это связано с использованием

различного сеточного разбиения расчетной области при реализации методов контрольного объема и конечных элементов – в методе контрольного объема использовалась равномерная прямоугольная сетка. В этом случае, если граница раздела фаз оказывалась внутри элемента сеточного разбиения, то при расчете она автоматически сдвигалась до ближайшего узла.

Из уравнения (3.7) следует, что основной величиной для определения эффективной диэлектрической проницаемости композита является напряженность электрического поля на микроуровне. Пространственные распределения поля $\vec{E}$, рассчитанного для элементарной ячейки в случае низкой и высокой частоты и при постоянной амплитуде усредненного электрического поля E_0 (на макроуровне), показаны на рис. 3.9. Видно, что картины распределения электрического поля сильно меняются в зависимости от частоты. Так,

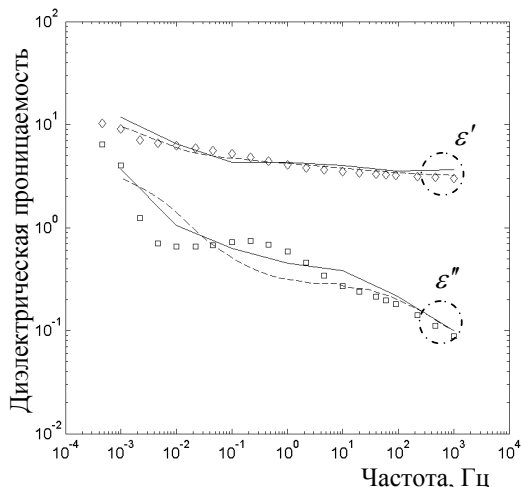


Рис. 3.7. Действительная (ромбы) и мнимая (квадраты) части диэлектрической проницаемости композита. Сплошными линиями показаны результаты расчетов с помощью метода конечных объемов, пунктирными линиями – результаты с использованием конечно-элементного метода. Точками отмечены экспериментальные данные

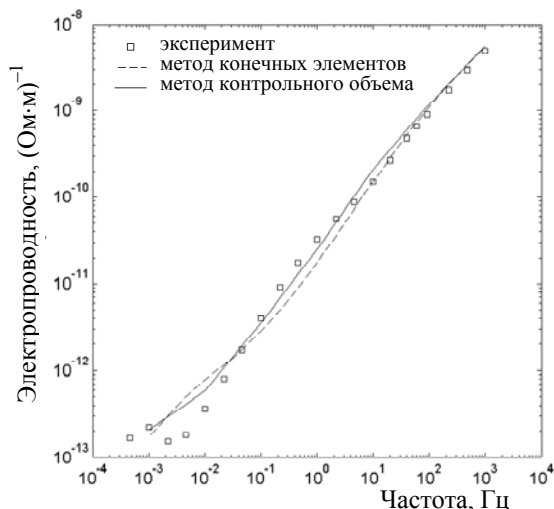


Рис. 3.8. Экспериментально измеренные (точки) и рассчитанные (кривые) зависимости эффективной электропроводности композита от частоты

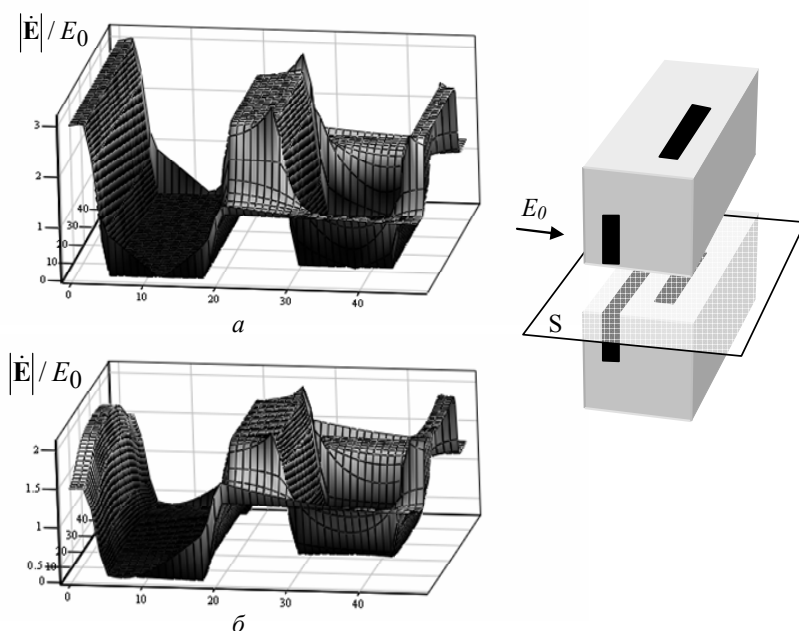


Рис. 3.9. Пространственные распределения нормированной величины напряженности электрического поля $|\dot{\mathbf{E}}|/E_0$ в поперечном сечении (в плоскости S на вставке справа) элементарной ячейки при частоте (а) $f = 10^{-3}$ Гц и (б) $f = 10^3$ Гц

отношение $|\dot{\mathbf{E}}|/E_0$ в парафине достигает значения ~ 3 при частоте $f = 10^{-3}$ Гц и уменьшается до $\sim 1,8$ при 10^3 Гц. В той части композита, где присутствует гетинакс, отношение $|\dot{\mathbf{E}}|/E_0$ очень мало и сильно зависит от частоты. Оно изменяется от 6×10^{-3} при 10^{-3} Гц до 5×10^{-1} при $f = 10^3$ Гц (на рис. 3.9 это не отражено из-за принятого линейного масштаба).

В общем случае распределение электрического поля в композите определяется значениями электропроводности составляющих фаз σ_1 и σ_2 при низкой частоте и их диэлектрическими проницаемостями ε'_1 и ε'_2 при высокой частоте. Для исследуемых материалов справедливы соотношения $\sigma_1 < \sigma_2$ и $\varepsilon'_1 < \varepsilon'_2$ во всем интервале изменения частоты (рис. 3.3 и 3.2 соответственно). Другими словами, комплексные проводимости фаз 1 и 2 удовлетворяют неравенству $|\sigma_1 + j\omega\varepsilon_0\varepsilon'_1| < |\sigma_2 + j\omega\varepsilon_0\varepsilon'_2|$. Таким образом, в соответствии с уравнением (3.2) и в предположении

равенства значений плотности тока напряженность электрического поля концентрируется в фазе 1, т.е. в парафине.

В противоположность электрическому полю, распределение потерь на микроуровне зависит как от распределения поля, так и от соотношения между $\sigma_1(\omega)$ и $\sigma_2(\omega)$, что приводит к сложной зависимости потерь от частоты, которая показана на рис. 3.10. Отметим, что амплитуда осредненного электрического поля E_0 остается постоянной. Как видно из рис. 3.10, величина потерь в парафине составляет $P(\mathbf{r})/\langle P \rangle \approx 3$ при $f = 10^{-3}$ и имеет малое значение в гетинаксе (рис. 3.10 а). Характер

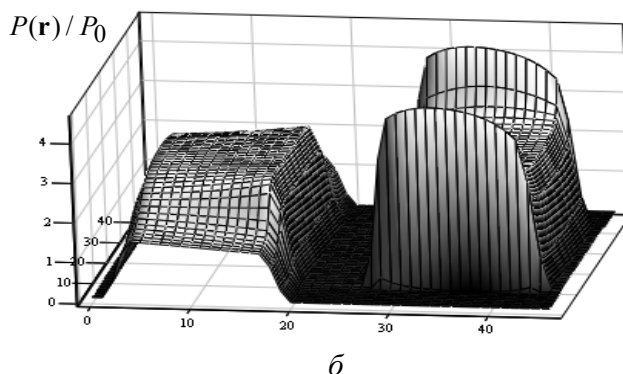
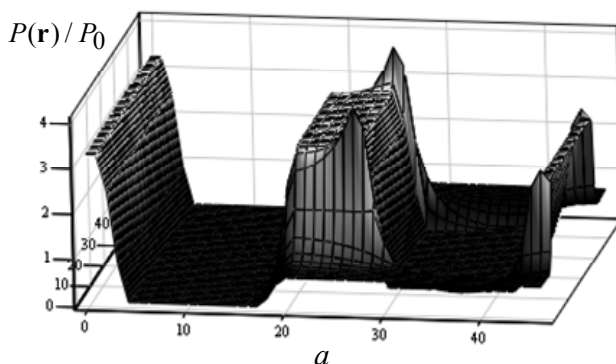


Рис. 3.10. Пространственные распределения нормированной величины потерь энергии $P(\mathbf{r})/P_0$ на микроуровне в поперечном сечении элементарной ячейки при частоте (а) $f = 10^{-3}$ Гц; (б) $f = 10^3$ Гц

распределения потерь сильно меняется при высоких значениях частоты, при этом потери энергии в гетинаксе начинают играть преобладающую роль (рис. 3.10 б).

В заключение отметим основные результаты работы, представленной в данной главе.

1. Разработана методика численного расчета гармонически изменяющегося во времени электрического поля и потерь энергии, а также определения эффективной комплексной диэлектрической проницаемости композиционного диэлектрика, имеющего периодическую структуру.

2. Экспериментальным путем получены зависящие от частоты параметры компонентов композита. Они послужили исходными данными для трехмерного компьютерного моделирования электрического поля и потерь энергии, выполненного конечно-элементным методом и методом контрольного объема. Расчетные зависимости от частоты эффективной диэлектрической проницаемости композита сопоставлены с экспериментальными значениями. При этом получено хорошее совпадение данных за исключением некоторого расхождения для мнимой части диэлектрической проницаемости при низкой частоте.

3. Рассмотрена простая классическая модель Winner'а для композита в виде последовательного и параллельного соединения конденсаторов, которая позволяет оценить предельные значения эффективной диэлектрической проницаемости материала. Наряду с этим рассмотрена модель Bergman-Milton'а и показано, что она позволяет значительно уменьшить область возможных значений эффективной диэлектрической проницаемости.

4. Выявлено, что степень неоднородности пространственного распределения электрического поля и потерь в объеме композита существенно зависит от частоты. Зависимость распределений электрического поля и потерь от частоты является важным свойством, присущим лишь композиционным материалам. Однородные диэлектрики не обладают такой особенностью, т.к. характеризуются приблизительно равномерным распределением поля и потерь в малом объеме композита. Выявленную особенность композиционных диэлектрических материалов необходимо учитывать при решении электрических и тепловых задач, а также при разработке новых композиционных материалов.

ГЛАВА 4

МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИЦИОННОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

4.1. Введение

В главе 3 исследовались эффективные диэлектрические характеристики искусственно созданного двухкомпонентного композиционного материала с периодической структурой. Материал композита состоял из парафина, как основной фазы, и полос гетинакса, образующих включения в этой фазе. В данной главе проводится экспериментальное и теоретическое исследование эффективных диэлектрических свойств другого композиционного материала, также искусственно созданного на основе парафина и гетинакса, но имеющего стохастическую структуру. Диэлектрические характеристики двух компонентов композита и самого композита были измерены на переменном электрическом поле при различной частоте, изменяющейся в диапазоне 10^{-3} – 10^3 Гц.

Разработана методика построения структуры представительного элемента объема на основе обработки фотографических данных поверхности образца из композита с последующим реконструированием по ним объемной модели структуры материала. Численно решена полевая задача и получено распределение электрического поля в объеме представительного элемента композита. Далее с использованием процедуры объемного осреднения получено значение эффективной диэлектрической проницаемости композиционного материала. Проведено сравнение расчетных значений диэлектрической проницаемости с измеренными и

показано их хорошее согласие. Проанализирован характер изменения от частоты приложенного напряжения значения эффективной комплексной диэлектрической проницаемости композиционного материала, а также пространственного распределения трехмерного электрического поля и удельных потерь энергии в объеме композита. Показано, что распределение поля и потерь на микроуровне является резко неоднородным и в значительной степени зависит от частоты при неизменной амплитуде электрического поля. Это свойство является важным отличием композиционного диэлектрика в сравнении с однородным диэлектрическим материалом. Более полно материал данной главы изложен в статье [1].

4.2. Структура композиционного материала и результаты эксперимента

Исследуемый композиционный диэлектрик содержит парафин с хаотическими включениями из гетинакса. В процессе изготовления исследуемого образца расплавленный парафин смешивался с мелкими кусочками гетинакса, имеющими характерный размер 2–5 мм и толщину 1 мм. Перед изготовлением композита была определена объемная фракция гетинакса по известным массе и плотности компонентов:

$m_1 = 25,7 \cdot 10^{-3}$ кг, $\rho_1 = 850$ кг/м³ для основной фазы и $m_2 = 19 \cdot 10^{-3}$ кг, $\rho_2 = 1400$ кг/м³ для фазы включения. Объемная концентрация гетинакса

составила $q_2 = (m_2 / \rho_2) / (m_2 / \rho_2 + m_1 / \rho_1) = 0,31$.

На рис. 4.1 представлена фотография внешней поверхности исследуемого образца композита, характеризующегося наличием микронеоднородностей и стохастической структурой. Включения из гетинакса (темные вкрапления) случайным образом распределены в основном материале (область белого цвета) и имеют разнообразные форму, размеры и ориентацию. Эта фотография принимается за основу для построения далее компьютерной

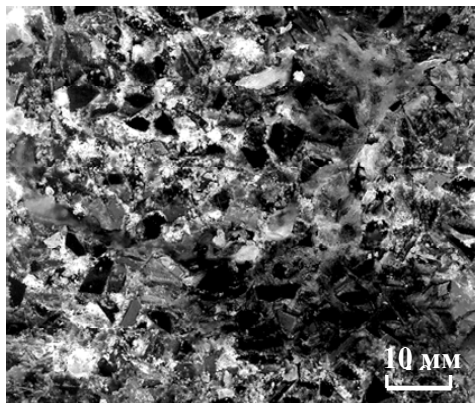


Рис. 4.1. Фотография поверхности исследуемого образца из композита со стохастической структурой.

Белый цвет соответствует парафину, черный – гетинаксу

модели пространственной микроструктуры композита (см. раздел 4.3).

Измерения характеристик двух материалов проводились на образцах следующих размеров: образец из парафина – $75 \times 75 \times 6 \text{ мм}^3$; из гетинакса – $80 \times 80 \times 1,1 \text{ мм}^3$; из композиционного материала – $80 \times 80 \times 7 \text{ мм}^3$. Каждый из этих образцов поочередно помещался между электродами (65 мм в диаметре) трехэлектродной экспериментальной установки, и проводилось измерение его емкости и добротности при различных значениях частоты с помощью системы Insulation Diagnostic System IDA 200 [2]*.

Комплексная диэлектрическая проницаемость основной фазы (парафина) $\dot{\epsilon}_1(\omega) = \epsilon'_1(\omega) - j\epsilon''_1(\omega)$, фазы включения (гетинакса) – $\dot{\epsilon}_2(\omega) = \epsilon'_2(\omega) - j\epsilon''_2(\omega)$ и величина эффективной комплексной диэлектрической проницаемости композита $\dot{\epsilon}_{eff}(\omega) = \epsilon'(\omega) - j\epsilon''(\omega)$ определялись на основании измеренных данных. Полученные частотные зависимости показаны на рис. 4.2 сплошными линиями. Из рисунка видно, что характеристики компонентов композита резко отличаются друг от друга. Действительная часть комплексной диэлектрической проницаемости гетинакса (рис. 4.2 а, кривая 2) в ~ 30 раз больше действительной

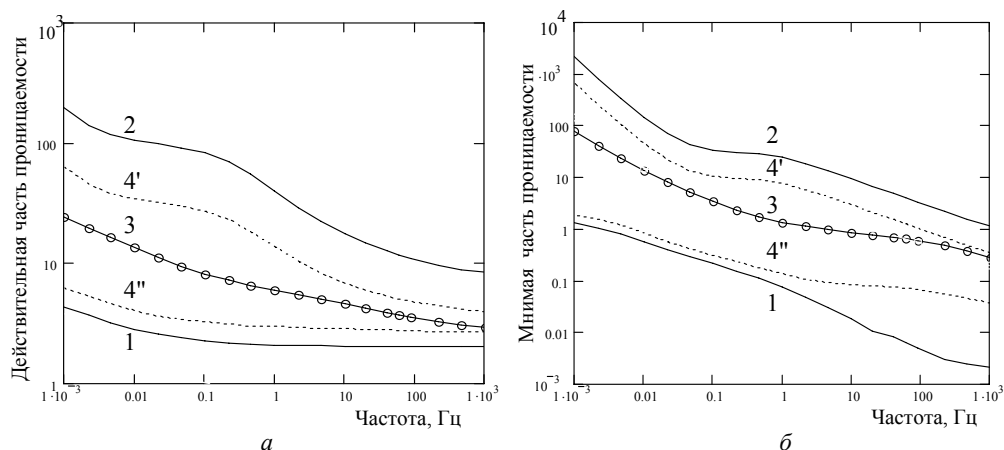


Рис. 4.2. Действительная (а) и мнимая (б) части относительной диэлектрической проницаемости материала, зависящие от частоты.

1 – измеренные данные для парафина, 2 – для гетинакса, 3 – для композита.

Кривые 4' и 4'' – соответственно верхний и нижний пределы Wiener'а (см. раздел 3.3)

* Измерения выполнялись в Chalmers University of Technology (Швеция) под руководством проф. С. Губанского.

части проницаемости парафина (кривая 1) в случае низкой частоты и в ~ 5 раз больше на высокой частоте. Еще более заметно различие мнимых частей комплексной проницаемости (см. кривые 1 и 2 на рис. 4.2 б). Действительная и мнимая части проницаемости композита находятся в области между соответствующими характеристиками составляющих материалов (кривые 3 на рис. 4.2 а и б).

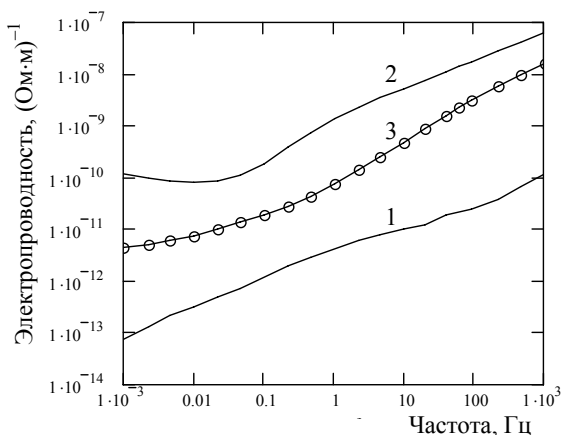


Рис. 4.3. Экспериментально полученные значения электропроводности материалов (1 – парафина, 2 – гетинакса, 3 – композита) в зависимости от частоты

Значения электропроводности материалов, определяемые согласно выражению $\sigma = \omega \varepsilon_0 \varepsilon''$ ($\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость вакуума), показаны на рис. 4.3. Как видно из этого рисунка, электропроводность компонентов композита различается на 2–3 порядка, также как и значения мнимых частей комплексных диэлектрических проницаемостей. Электропроводность композиционного материала

изменяется от $\sigma_{eff}^{dc} \approx 5 \cdot 10^{-12}$ (Ом·м)⁻¹ до $\sigma_{eff} \approx 5 \cdot 10^{-8}$ (Ом·м)⁻¹ в

указанных пределах изменения частоты. Ее значения лежат в области, ограниченной величинами электропроводности компонентов композита.

Экспериментальные данные показали следующее:

- композиционный материал имеет сильно разупорядоченную структуру, характеризующуюся большой объемной концентрацией включений – 0,31;

- значения действительной и мнимой частей комплексной диэлектрической проницаемости компонентов композита в значительной степени различаются во всем рассматриваемом диапазоне частоты;

- для основного материала (парафина) справедливо соотношение $\varepsilon'_1(\omega) > \varepsilon''_1(\omega)$ при всех значениях частоты, что означает превышение плотности тока смещения над плотностью тока проводимости;

- для материала включения – гетинакса при частоте $f < 0,01$ Гц

справедливо неравенство $\varepsilon_2'(\omega) < \varepsilon_2''(\omega)$, т.е. в этом случае плотность тока проводимости больше тока смещения. Соотношение этих величин меняется при более высоких частотах.

Перечисленные особенности позволяют сделать предположение о сложном характере изменения распределения в объеме композита электрического поля и удельных потерь энергии в зависимости от частоты.

Полученные экспериментальным путем зависимости $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$ для компонентов композита используются далее в качестве исходных данных в численных расчетах эффективной диэлектрической проницаемости композиционного материала.

4.3. Двухуровневая математическая модель композиционного материала

Расчет и анализ эффективных характеристик композиционного материала на различной частоте могут быть проведены с помощью компьютерного моделирования, что позволяет также определить распределение электрического поля и удельных (на единицу объема) потерь энергии в объеме материала. В случае, когда характерные размеры исследуемого образца композита значительно больше размеров включений, целесообразно использовать моделирование на двух пространственных уровнях с выделением представительного элемента объема [3–7]. При этом численное моделирование эффективных диэлектрических свойств композиционного диэлектрика со стохастической структурой предполагает выполнение следующих этапов:

- разработка математической модели для определения распределения электрического поля на двух разномасштабных уровнях;
- выделение представительного элемента объема;
- разработка методики построения компьютерной модели пространственной микроструктуры представительного элемента объема;
- решение полевой задачи для электрического поля в объеме представительного элемента и расчет эффективных параметров композиционного материала.

Описание двухуровневой модели. Рассматривается композиционный диэлектрик, который находится в переменном электрическом поле $\vec{E}(\mathbf{r}) \cdot \exp(j\omega t)$, изменяющемся во времени по гармоническому закону с угловой частотой ω . Предполагается, что амплитуда поля мала и нелинейными эффектами в материале пренебрегается. Компоненты ком-

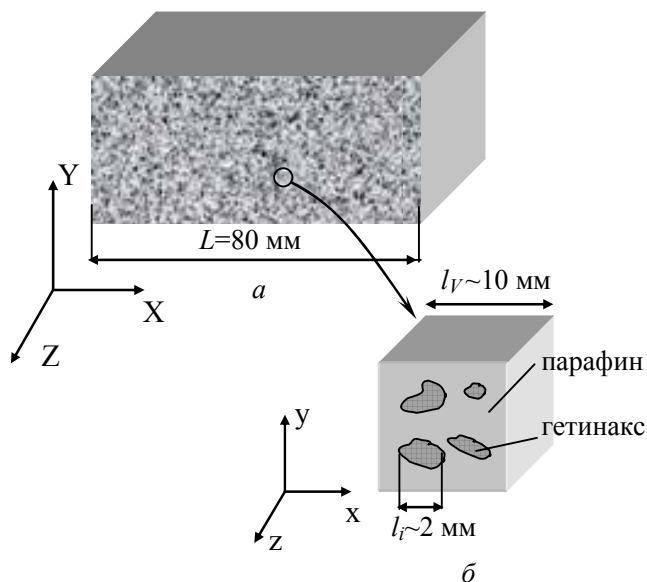


Рис. 4.4. Разномасштабные модели композита:

- (а) на макроуровне, который определяется линейным масштабом образца;
- (б) на микроуровне, который определяется линейным масштабом включений

позита характеризуются комплексными значениями диэлектрических проницаемостей – $\hat{\epsilon}_1(\omega)$ для парафина и $\hat{\epsilon}_2(\omega)$ для гетинакса, которые считаются известными из результатов измерений на специально созданных образцах.

Детальный анализ электрического поля в диэлектрике выполняется на двух пространственных уровнях, показанных на рис. 4.4, а именно:

1) на микроуровне в представительном элементе объема, где находится распределение электриче-

ского поля с учетом микроструктуры композита, затем на основании решения полевой задачи определяется эффективная комплексная диэлектрическая проницаемость материалов;

2) на макроуровне в объеме всего образца; при этом электрическое поле усредняется по представительному элементарному объему и используется значение эффективной комплексной диэлектрической проницаемости.

Микроуровень. Для случая неоднородной среды с периодической структурой, которая изучалась в предыдущей главе, отдельная элементарная ячейка несет в себе полную информацию об интегральных свойствах материала и поэтому расчеты могут проводиться в объеме элементарной ячейки. Для случая же микрон неоднородной среды, имеющей стохастическую структуру, выбирается представительный элемент объема [5, 7]. Размеры такого объема превышают характерные размеры включений, но значительно меньше размеров исследуемого образца.

Гармоническое электрическое поле $\vec{E}$ в представительном элементе объема (на микроуровне) удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{E}} = -\nabla \dot{\phi}; \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{J}}_{tot} = \sigma(\mathbf{r}, \omega) \dot{\mathbf{E}} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \dot{\mathbf{E}}; \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{J}}_{tot} = 0, \quad (4.3)$$

где $\dot{\phi}$ – электрический потенциал; $\mathbf{r}$ – вектор координат трехмерного пространства; ∇ – оператор градиента относительно пространственных координат x, y, z на микроуровне (рис. 4.4 б). Вектор плотности тока $\dot{\mathbf{J}}_{tot}$ определяется плотностью тока проводимости $\sigma(\mathbf{r}, \omega) \dot{\mathbf{E}}$ и плотностью тока смещения $j\omega \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \dot{\mathbf{E}}$.

Уравнение (4.2) может быть записано в виде

$$\dot{\mathbf{J}}_{tot} = j\omega \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) \dot{\mathbf{E}}. \quad (4.4)$$

После подстановки (4.4) в (4.3) с учетом (4.1) получим уравнение для электрического потенциала $\dot{\phi}$ вида

$$\nabla \cdot j\omega [\varepsilon_0 \dot{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) \nabla \dot{\phi}(\mathbf{r})] = 0, \quad (4.5)$$

где $\dot{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_1(\omega) & \text{– в области парафина,} \\ \dot{\varepsilon}_2(\omega) & \text{– в области гетинакса.} \end{cases}$

Для исследуемого в главе 3 композита с периодической структурой области парафина и гетинакса имели относительно простую геометрию, которая легко задавалась в расчетной программе. В случае материала со стохастической структурой для ее описания необходимо разрабатывать методику построения компьютерной модели такой структуры. Для этого используется вспомогательная указательная функция f_n , описанная ниже.

Из решения полевой задачи (4.5) в представительном элементе объема определяются средняя по объему этого элемента плотность полного тока $\langle \dot{J}_{tot,x} \rangle$ (будем рассматривать характеристики материала только вдоль оси x) и средняя напряженность электрического поля $\langle \dot{E}_x \rangle$. Затем рассчитывается эффективная диэлектрическая проницаемость композита $\dot{\varepsilon}_{eff}$ на основании следующего выражения:

$$\dot{\varepsilon}_{eff} = \frac{\langle \dot{J}_x \rangle}{j\omega \varepsilon_0 \langle \dot{E}_x \rangle}. \quad (4.6)$$

Здесь пространственное осреднение выполняется по представительному объему V_r . Например, для плотности тока справедливо равенство

$$\langle J_x \rangle = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} J_x dV. \quad (4.7)$$

По результатам расчета электрического потенциала находятся распределения абсолютной величины напряженности электрического поля $|\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|$ и удельных потерь энергии $P(\mathbf{r})$ согласно следующим выражениям:

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})| = ((\text{Re}(\dot{E}_x))^2 + (\text{Im}(\dot{E}_x))^2 + (\text{Re}(\dot{E}_y))^2 + (\text{Im}(\dot{E}_y))^2 + (\text{Re}(\dot{E}_z))^2 + (\text{Im}(\dot{E}_z))^2)^{1/2}; \quad (4.8)$$

$$P(\mathbf{r}) = \text{Re}(\dot{\mathbf{J}}_{tot} \cdot \mathbf{E}^*). \quad (4.9)$$

Здесь $\mathbf{E}^*$ – комплексно-сопряженная величина; Re и Im обозначают соответственно действительную и мнимую части комплексных величин; $\dot{E}_x, \dot{E}_y, \dot{E}_z$ – составляющие электрического поля в x -, y - и z -направлениях соответственно.

Макроуровень. Распределение электрического поля в объеме композита на макроуровне (в объеме образца) характеризуется усредненными векторами $\langle \dot{\mathbf{E}} \rangle$ и $\langle \dot{\mathbf{J}}_{tot} \rangle$, а также потенциалом $\langle \phi \rangle$. Пространственное осреднение выполняется по представительному элементу объема V_r в соответствии с формулой (4.7).

Из системы (4.1)–(4.3) получаем следующие уравнения:

$$\nabla \times \langle \dot{\mathbf{E}} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \dot{\mathbf{E}} \rangle = -\nabla \langle \phi \rangle; \quad (4.10)$$

$$\langle \dot{\mathbf{J}}_{tot} \rangle = j\omega \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_{eff}(\omega) \langle \dot{\mathbf{E}} \rangle; \quad (4.11)$$

$$\nabla \cdot \langle \dot{\mathbf{J}}_{tot} \rangle = 0, \quad (4.12)$$

где $\dot{\varepsilon}_{eff}(\omega)$ – эффективная комплексная диэлектрическая проницаемость, полученная из выражения (4.6), а ∇ – оператор градиента на макроуровне относительно пространственных координат X, Y, Z (рис. 4.4 а).

Из решения системы (4.10)–(4.12) с соответствующими граничными условиями может быть получено распределение электрического поля на макроуровне – в объеме всего образца.

Построение компьютерной модели пространственной микроструктуры композита. Известно несколько методов прямого построения (реконструкции) трехмерной микроструктуры композита. Так, трех-

мерная микроструктура реконструируется непосредственно по результатам микротомографии для пористого песчаника в работе [8] и для магнитных гелей в [9]. В работах [10, 11] для этих целей делается серия поперечных срезов, фотографии которых затем используются для построения модели трехмерной структуры. Статистический метод реконструкции трехмерной микроструктуры на основании экспериментально полученных картин используется в работах [12, 13]. Отметим, что достаточно сложная реализация указанных методов, приводящая в большинстве случаев к разрушению исследуемого образца, обуславливает необходимость разработки более простых методов реконструкции.

Использование серии повторяющихся срезов является одним из самых наглядных методов реконструкции структуры, однако это требует технологии выполнения срезов без повреждения структуры оставшегося материала. Это осуществимо, например, с помощью замораживания исследуемого образца.

В настоящей работе используется более простой полуэвристический метод моделирования структуры материала с использованием фотографии только поверхности образца, предполагая, что отдельные фрагменты этой фотографии могут заменить фотографии срезов образца. Отметим, что предложенный метод применим для случая композита, компоненты которого существенно различаются по цветовой гамме.

Зная двумерные структуры срезов, с помощью методов компьютерной обработки можно реконструировать трехмерную модель структуры композита. При этом необходимо соблюсти важное условие эквивалентности модели и самого образца или, другими словами, условие равенства объемной концентрации компонентов в полученной модели структуры и в исходном образце.

Алгоритм построения компьютерной модели структуры состоит из следующих этапов, схематически показанных на рис. 4.5 и реализованных в данной работе.

1. Путем фотографирования получается двумерное изображение поверхности образца (рис. 4.5 *а*). Затем полученная фотография преобразуется в цифровое черно-белое изображение (рис. 4.5 *б*), дающее общее представление о структуре. Так, для исследуемого образца темный цвет относится к гетинаксу, а светлый – к парафину. На данном этапе вводится цифровой параметр $0 < q < 1$, характеризующий цветовую границу перехода от одного материала к другому. Чем больше значение q , тем больше будет черного цвета в изображении и тем большее присутствие фракции гетинакса в модели композита.

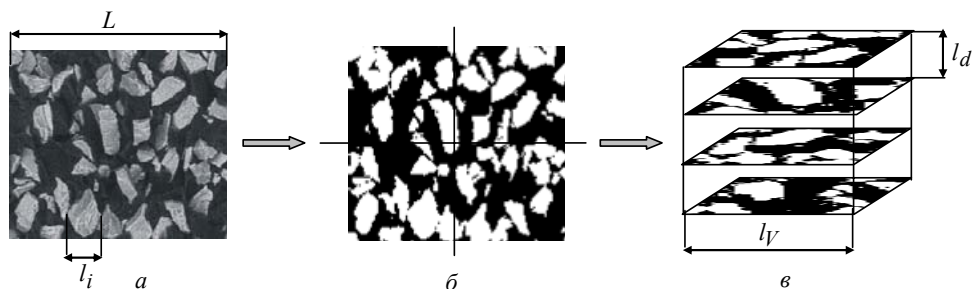


Рис. 4.5. Реконструкция трехмерного цифрового изображения микроструктуры композита. Здесь L , l_i , l_V – соответственно характерные размеры композита, включений и представительного объема; l_d – расстояние между слоями

2. На втором этапе изображение поверхности образца разбивается на N прямоугольных областей с характерным размером $l_V < L$, совпадающим с размером представительного элемента объема. Простейший случай для четырех таких областей представлен на рис. 4.5 б. Далее для каждой области путем компьютерной обработки изображения строится указательная функция

$$f_n(x, z) = \begin{cases} 0 & \text{для белого цвета - парафина;} \\ 1 & \text{для черного цвета - гетинакса,} \end{cases} \quad n=1, \dots, N, \quad (4.13)$$

где N – количество слоев.

3. Из прямоугольных областей формируется трехмерный представительный объем (рис. 4.5 в), для которого записывается функция трехмерного распределения фаз согласно следующей эвристической модели:

$$f_V(x, y, z) = \begin{cases} f_1(x, z) & \text{для } 0 \leq y < l_d, \\ f_2(x, z) & \text{для } l_d \leq y < 2l_d, \\ \dots, \\ f_N(x, z) & \text{для } (N-1)l_d \leq y < Nl_d. \end{cases} \quad (4.14)$$

4. С помощью полученной функции f_V выполняется расчет объемной концентрации гетинакса q_2 . Если значение q_2 отличается от экспериментального значения, равного в данном случае 0,31, на величину, превышающую заданную погрешность δ , то изменяется первоначально заданное значение цветового параметра q и итерационный процесс повторяется. В ходе проведения такой процедуры установлено, что

за 2–3 итерации достигается требуемое значение концентрации гетинакса $q_2 = 0,31$ с ошибкой менее 10 %.

Полученная в соответствии с таким алгоритмом указательная функция f_V согласно (4.14), описывающая микроструктуру рассматриваемого композита и определяющая компьютерную модель структуры материала, используется для численного расчета электрического поля в объеме представительного элемента со стохастической структурой.

Размеры представительного элемента объема исследуемого композита составляли $16 \times 13,3 \times 7 \text{ мм}^3$, что почти на порядок больше характерного размера включений. Задавалось количество слоев $N = 10$.

Граничные условия задачи (4.5) для представительного элемента объема показаны на рис. 4.6. Принималось, что плотности токов проводимости и смещения (нормальные составляющие) на вертикальных границах элементарного объема равны нулю, а значит, нормальные составляющие электрического поля также равны нулю. Напряжение, приложенное по вертикальной оси, задавалось равным 1 В.

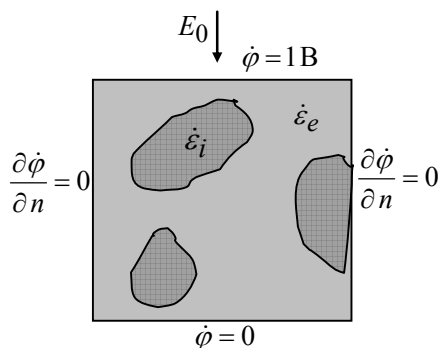


Рис. 4.6. Граничные условия полевой задачи в области представительного элемента объема (для простоты показана двумерная область).
 $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали

4.4. Результаты компьютерного моделирования

Компьютерные расчеты выполнялись для пяти различных вариантов стохастической структуры, составленных на основании пяти двумерных изображений сечений образца. Результаты расчетов комплексной величины эффективной диэлектрической проницаемости композита (средние значения для пяти вариантов) и экспериментально полученные данные показаны на рис. 4.7. Видно, что рассчитанные значения действительной части комплексной диэлектрической проницаемости хорошо согласуются с экспериментальными данными при частоте выше $f \approx 1 \text{ Гц}$. Вместе с тем расхождение между компьютерными и экспериментальными данными увеличивается с уменьшением частоты, достигая ~50 % при $f = 10^{-3} \text{ Гц}$. Расчетные результаты для мнимой части

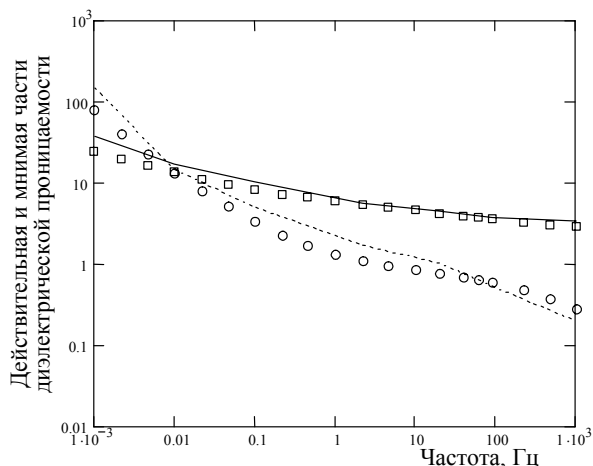


Рис. 4.7. Измеренные (точки) и рассчитанные (кривые) параметры композита. Квадратами и пунктирной линией показана действительная часть эффективной диэлектрической проницаемости, кружками и точечной линией — мнимая часть этой проницаемости

упрощенным представлением модели сложной структуры рассматриваемого композита.

Полученные в результате компьютерных расчетов распределения

нормированных величин напряженности электрического поля $|\vec{E}|/E_0$ и удельных потерь энергии $P/\langle P \rangle$ ($\langle P \rangle$ — осредненные потери) в среднем поперечном сечении представительного элемента объема, показанном на рис. 4.8, приведены на рис. 4.9 и 4.10 соответственно. Данные расчетов свидетельствуют о сильной неоднородности распределения электрического поля на микроуровне из-за сложной микроструктуры материала.

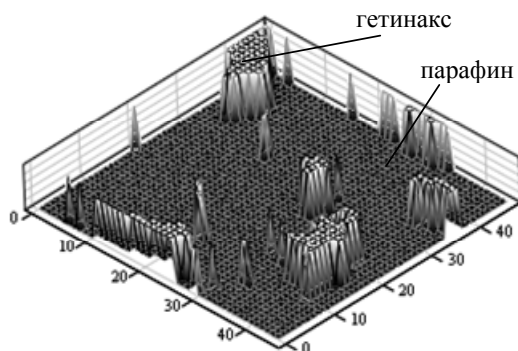


Рис. 4.8. Микроструктура в среднем сечении представительного элемента объема, описываемая функцией распределения $f_n(x, z)$. Пики соответствуют фазе включения

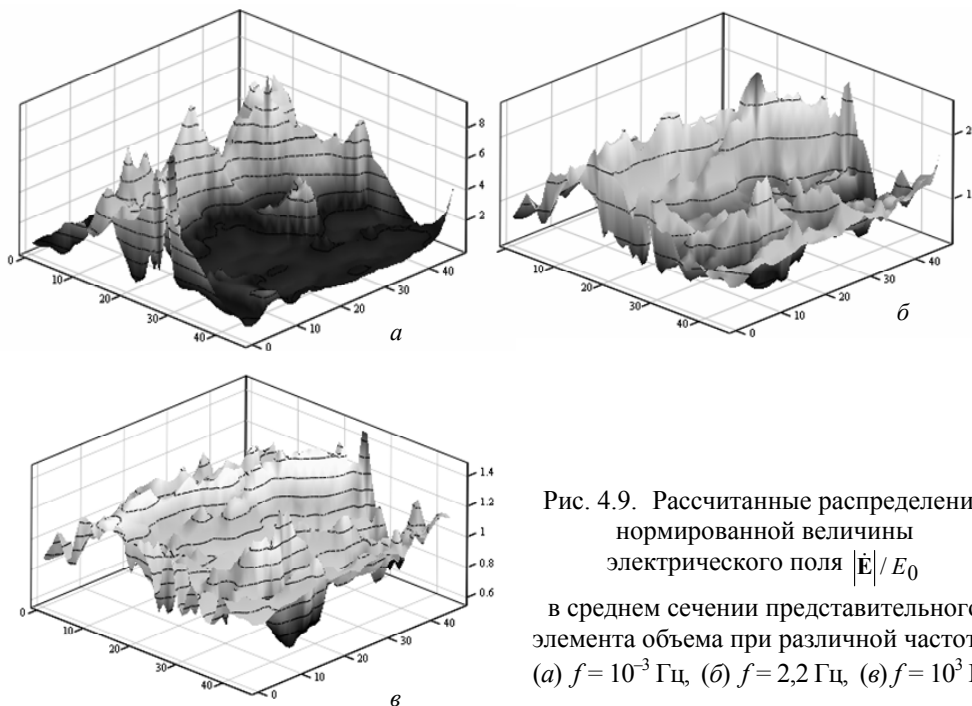


Рис. 4.9. Рассчитанные распределения нормированной величины электрического поля $|\vec{E}|/E_0$ в среднем сечении представительного элемента объема при различной частоте: (а) $f = 10^{-3}$ Гц, (б) $f = 2,2$ Гц, (в) $f = 10^3$ Гц

Значение электрического поля и характер его распределения в объеме резко изменяются в зависимости от частоты (рис. 4.9). Максимальное значение отношения $|\vec{E}|/E_0$ составляет ~ 6 при $f = 10^{-3}$ Гц и снижается до $\sim 1,4$ при $f = 10^3$ Гц. В противоположность случаю низкой частоты, электрическое поле распределяется намного более неравномерно при высоких частотах.

Из уравнения (4.9) следует, что распределение потерь энергии на микроуровне зависит как от распределения электрического поля, так и от соотношения между величинами электропроводности компонентов композита $\sigma_1(\omega)$ и $\sigma_2(\omega)$ вследствие наличия плотности тока проводимости в плотности полного тока. Это обуславливает сложную зависимость потерь энергии от частоты, что показано на рис. 4.10. Видно, что абсолютные значения потерь энергии уменьшаются с увеличением частоты, т.е. распределение потерь становится более равномерным в сечении представительного элемента объема. Зоны, соответствующие наибольшим потерям, также смещаются, а максимальные значения величин практически не изменяются.

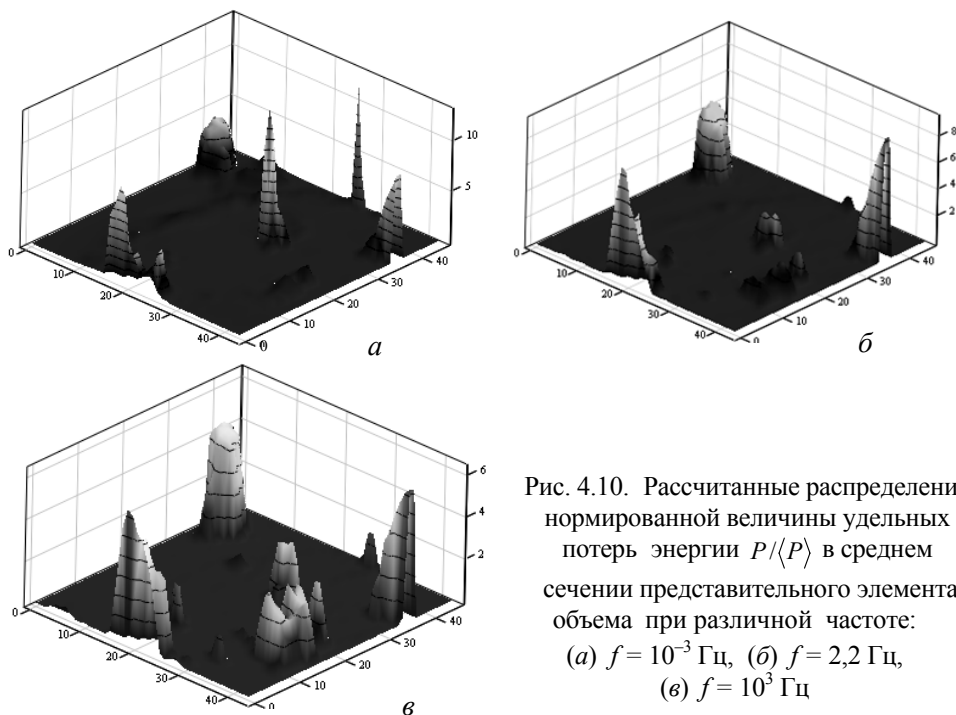


Рис. 4.10. Рассчитанные распределения нормированной величины удельных потерь энергии $P/\langle P \rangle$ в среднем сечении представительного элемента объема при различной частоте:

(а) $f = 10^{-3}$ Гц, (б) $f = 2,2$ Гц,
(в) $f = 10^3$ Гц

Уменьшение максимальных значений нормированного электрического поля и потерь энергии с увеличением частоты, показанное для отдельного сечения, имеет место для всего представительного элемента объема, а значит, и для всего образца. С ростом частоты максимальные значения поля $|\dot{\mathbf{E}}|/E_0$ и удельных потерь $P/\langle P \rangle$ уменьшаются (см. рис. 4.11), и распределения этих величин становятся более равномерными. Этот эффект объясняется зависимостью от частоты свойств компонентов композита и может быть связан с отношением модулей комплексной проводимости парафина $\dot{Y}_1 = \sigma_1 + j\omega\varepsilon_0\varepsilon'_1$ и проводимости гетинакса $\dot{Y}_2 = \sigma_2 + j\omega\varepsilon_0\varepsilon'_2$. Как показано на рис. 4.11, отношение $|\dot{Y}_i|/|\dot{Y}_h|$ уменьшается с увеличением частоты на три порядка в рассматриваемом частотном интервале: от $\sim 7 \cdot 10^2$ при $f = 10^{-3}$ Гц до ~ 5 при $f = 10^3$ Гц. Таким образом, в объеме композита имеет место прямое соответствие между изменениями свойств компонентов и нормированным полем и потерями.

Следует отметить, что зависимость характера распределения электрического поля и удельных потерь от частоты при постоянной ам-

плитуде поля является особым свойством композиционных материалов. Однородные диэлектрики не обладают подобными свойствами. Такие особенности композиционных диэлектрических материалов необходимо учитывать при исследовании протекающих в них электрических и тепловых процессов, а также при проектировании новых материалов.

Основными результатами данной главы являются следующие.

1. Экспериментальным путем и с помощью компьютерного моделирования изучены частотные зависимости диэлектрических характеристик стохастической композиции двух материалов, обладающих различными свойствами.

2. Разработана методика построения компьютерной трехмерной модели стохастической структуры композиционного материала, использующая фотографию поверхности образца этого материала. Модель применима для композита, компоненты которого существенно отличаются по цветовой гамме. Построенная модель структуры используется в полевой задаче при расчете распределения поля и удельных потерь в объеме материала, а также определения значения эффективной диэлектрической проницаемости.

3. Получено хорошее качественное и количественное совпадение экспериментальных данных и расчетных зависимостей от частоты комплексной эффективной диэлектрической проницаемости композита. Показана резкая неоднородность пространственных распределений электрического поля и удельных потерь энергии в объеме композита на микроуровне, зависящих от частоты, что является характерной особенностью композиционного материала в сравнении с однородным диэлектриком.

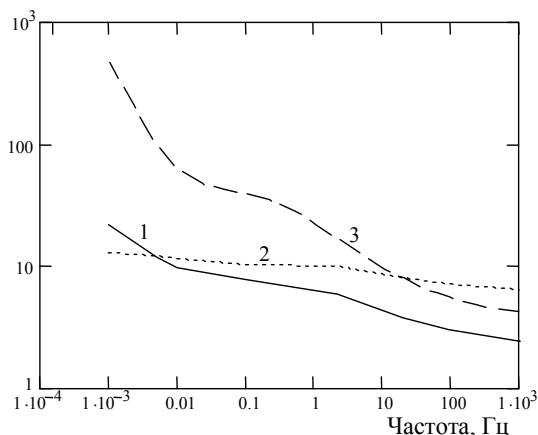


Рис. 4.11. Зависимости от частоты максимальных значений нормированной величины электрического поля $\max(|\vec{E}|/E_0)$ – кривая 1, потерь энергии $\max(P/\langle P \rangle)$ – кривая 2 в представительном элементе объема и отношения комплексных проводимостей гетинакса и парафина $|\dot{Y}_i|/|\dot{Y}_h|$ – кривая 3

ГЛАВА 5

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПАРАМЕТРОВ МНОГОВИТКОВОЙ ОБМОТКИ НА ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЕ

5.1. Введение

Задачи расчета вихревых токов и связанных с ними потерь мощности в массивных проводниках на высокой частоте относятся к одним из наиболее интересных и сложных задач теоретической электротехники. Многие из таких задач, встречающихся на практике, изучены недостаточно полно. В частности, речь может идти об обмотке, выполненной из провода типа литцендрат, который характеризуется регулярным расположением жил в пространстве и испытывает действие внешнего магнитного поля.

Решение задач расчета эквивалентного сопротивления и потерь в системе проводников с током (в том числе и провода типа литцендрат) при различной частоте требуется для многовитковых обмоток магнитных компонентов ряда устройств преобразовательной техники, таких как индукторные системы, силовые трансформаторы, дроссели. Особый интерес представляет анализ электрических потерь в проводниках в области высоких частот.

При протекании переменного тока высокой частоты по проводникам многовитковой обмотки различных электромагнитных систем – трансформаторов, реакторов, дросселей и других – проявляется ряд эффектов, которые необходимо учитывать при расчете эквивалентных параметров обмотки. Такие эффекты обсуждаются, например, в работах

[1–3] и включают:

- поверхностный эффект, приводящий к вытеснению плотности тока на поверхность проводника;
- эффект близости, обусловленный влиянием на распределение плотности тока по сечению проводника, магнитного поля соседних проводников (близкодействующее взаимодействие);
- так называемый геометрический эффект [3], связанный с воздействием на каждый проводник внешнего по отношению к нему поперечного магнитного поля, создаваемого магнитной системой в целом (дальнодействующее взаимодействие); этот эффект зависит от геометрии проводника и обмотки в целом, наличия или отсутствия магнитопровода и его магнитных свойств и определяется распределением магнитного поля в объеме всех проводников.

Следует отметить, что влияние двух последних эффектов на величину потерь в обмотке начинает особенно проявляться при высокой частоте, когда глубина проникновения магнитного поля в проводник $\delta \leq r$, где r – характерный размер (радиус) проводника; $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu_0\sigma)}$; ω – угловая частота; σ – электропроводность материала; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная проницаемость вакуума.

Опубликован ряд работ [2, 4–6], в которых учет указанных эффектов при расчете потерь в обмотке проводится для проводников прямоугольного сечения и для области невысоких частот ($\delta \cong r$). В то же время существующая на современном этапе тенденция к увеличению рабочей частоты полупроводниковых источников питания обуславливает необходимость разработки методики детального расчета потерь в высокочастотных магнитных системах на основе определения магнитного поля.

Работы [2, 3, 5–9] посвящены разработке аналитических моделей для расчета потерь в массивных проводниках многovitковых катушек. В частности, аналитические выражения для величины электрических потерь в круглых проводниках без учета эффекта близости предложены в [2, 3]. В статьях [7–9] приводится и используется аналитическая модель для определения эффективного сопротивления обмоток трансформатора с проводниками прямоугольного сечения и при приближенном учете эффекта близости. Модель для расчета потерь в обмотках, выполненных из круглого литцендратного проводника, представлена в исследовании [9]. Уточненное выражение для эффективного сопротивления обмотки получено в [9] за счет переопределения величины поля рассея-

ния в многожильном проводнике литцендрата. При малой толщине скин-слоя разработка моделей, учитывающих все указанные эффекты, является достаточно трудной задачей из-за сложного распределения магнитного поля по сечению проводников.

Более детальный анализ потерь в обмотках трансформаторов может быть проведен на основе численного моделирования, как в работах [3, 10]. В этом случае при малом числе витков в обмотке ($N \leq 10$) учет указанных эффектов можно выполнить путем прямого решения полевой задачи во всей области обмотки с применением достаточно мелкой сетки, покрывающей сечение каждого проводника (см., например, [3, 11]). В случае же большого числа витков ($N \geq 100$) подход прямого моделирования сопряжен со значительными вычислительными трудностями и проблематичен для реализации.

В качестве альтернативы в настоящей работе для случая многовитковой обмотки с регулярно расположенными проводниками кругового сечения предлагается применять подход, основанный на применении метода многомасштабного моделирования. Он использует концепцию периодически повторяющейся элементарной ячейки [12–14] и упрощает решение задач расчета вихревых токов и потерь в многовитковых обмотках устройств, работающих на высокой частоте.

Целью работы данной главы является, с одной стороны, детальное изучение распределения плотности вихревых токов в круглых массивных проводниках многовитковой обмотки трансформаторов малой мощности с учетом поверхностного эффекта, эффекта близости и действия внешнего магнитного поля. С другой стороны, работа направлена на получение с помощью результатов численного моделирования аналитических выражений и графических зависимостей, позволяющих рассчитывать эффективное сопротивление и потери в многовитковой обмотке с периодическим расположением проводников в широком диапазоне изменения частоты – от постоянного тока и до высокой частоты, соответствующей глубине проникновения магнитного поля $\delta \leq 0,1 \cdot r$. В работе исследуются два типа обмоток: обмотки, выполненные из одножильного проводника кругового сечения, и обмотки из провода типа литцендрат – многожильного провода с изолированными транспонированными жилами с суммарным сечением, равным сечению одножильного провода.

Для расчета электромагнитного поля в массивных проводниках высокочастотного трансформатора применяется метод многомасштабного моделирования. Исследование электромагнитных процессов про-

водится на трех пространственных уровнях: 1) макроуровне – в окне трансформатора; 2) промежуточном уровне – в объеме отдельного проводника трансформаторной обмотки и 3) микроуровне – в объеме одной жилы в случае, когда обмотка выполнена из многожильного провода типа литцендрат.

5.2. Эквивалентное сопротивление многовитковой обмотки с массивными проводниками на различной частоте

Для детального изучения высокочастотных электромагнитных процессов в многовитковой обмотке трансформатора с массивными проводниками проводится анализ переменного магнитного поля на двух пространственных уровнях (рис. 5.1):

- в объеме окна трансформатора в глобальной системе координат XOY (на макроуровне);

- по сечению отдельного проводника в локальной системе координат xOy с учетом влияния близлежащих проводников (на микроуровне).

Предполагается, что обмотка трансформатора многовитковая, ее проводники имеют круглое сечение с радиусом r и характеризуются двумерной периодической структурой, в которой может быть выделена элементарная ячейка C , содержащая единичный проводник (рис. 5.1 б). Анализ электромагнитного поля и потерь в такой структуре предполагает выполнение следующих шагов: 1) определение локального магнитного поля в элементарной ячейке C на микроуровне, а также расчет потерь и эффективной намагниченности; 2) нахождение осредненного магнитного поля в окне трансформатора на макроуровне; 3) вычисление эквивалентного сопротивления и суммарных потерь во всех проводниках обмотки.

Представим часть внутреннего объема многовитковой обмотки в виде системы регулярно расположенных массивных проводников круглого сечения с радиусом r и расстоянием 2Δ , формируемым воздушным зазором и двумя изоляционными слоями (рис. 5.1 б). Предполагается, что проводники являются бесконечно протяженными вдоль координатной оси Oz так, что электромагнитная задача может быть решена в двумерной постановке в плоскости поперечного сечения проводников.

Поскольку рассматриваемая система проводников представляет собой гетерогенную среду с двумерно-периодической структурой, для расчета ее эффективных характеристик достаточно решить полевую задачу в объеме элементарной ячейки [12, 13].

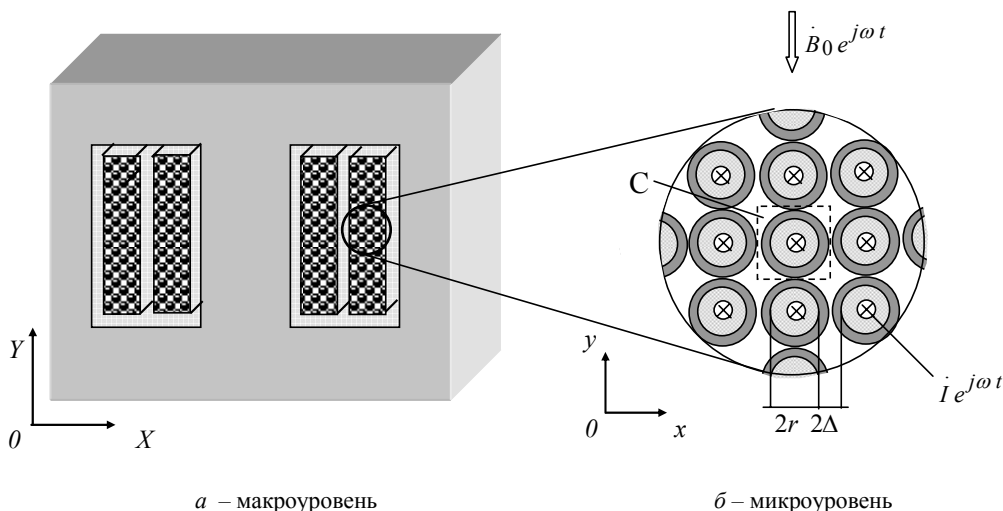


Рис. 5.1. Схематическое представление многовитковой обмотки трансформатора (а) и периодическое расположение изолированных проводников обмотки (б)

Каждый из проводников рассматриваемой системы находится под воздействием 1) переменного электрического тока, определяемого параметрами обмотки и внешней цепи в целом, и 2) внешнего, осредненного по объему ячейки C поперечного магнитного поля $\vec{B}_0 e^{j\omega t}$, создаваемого всеми проводниками обмотки, а при наличии магнитопровода и других обмоток с током зависящего также и от конфигурации всей магнитной системы.

В связи с изложенным рассмотрим далее последовательно две полевые задачи, позволяющие учесть по отдельности вклад каждого из описанных факторов в общие потери в отдельном проводнике, как элементе многовитковой обмотки.

5.2.1. Эквивалентное сопротивление единичного проводника с переменным током

Рассматривается область элементарной ячейки C , содержащая единичный массивный немагнитный проводник радиуса r , по которому протекает заданный ток (рис. 5.1 б). Длина проводника предполагается бесконечно большой. Необходимо определить распределение плотности тока по сечению проводника и мощность потерь, вызывающих его нагрев, с учетом влияния соседних проводников – эффекта близости.

В силу симметрии картины поля относительно геометрических осей проводника в качестве расчетной области G рассматривается $1/4$ элементарной ячейки C (рис. 5.2). Наличие близлежащих токопроводящих элементов учитывается соответствующими условиями на границах Γ_3 и Γ_4 области G .

Полевая задача формулируется для комплексного векторного магнитного потенциала

$\dot{\mathbf{A}} = (0, 0, \dot{A}_z)$, удовлетворяющего системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial y^2} - j\mu_0\sigma\omega\dot{A}_z = -\mu_0\sigma\dot{U}/l; \\ \int_S \dot{J} dS = 0,25\dot{I}, \quad \dot{J} = -j\omega\sigma\dot{A}_z + \sigma\dot{U}/l, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $\dot{J}$ – плотность тока в проводнике; $j = \sqrt{-1}$; σ – электропроводность материала; $\dot{U}/l$ – напряжение, приложенное к единице длины проводника; S – площадь поперечного сечения $1/4$ проводника.

Для определения граничных условий представим векторный потенциал в виде суммы осредненной и флуктуационной составляющих:

$$\dot{A}_z = \langle \dot{A}_z \rangle + \dot{A}'_z,$$

где $\langle \dot{A}_z \rangle = \frac{1}{S_c} \int_{S_c} \dot{A}_z dS$, S_c – площадь ячейки C .

Распределение $\langle \dot{A}_z \rangle$ описывается выражением

$$\dot{A}_z = -\mu_0 \langle \dot{J} \rangle (x^2 + y^2)/4$$

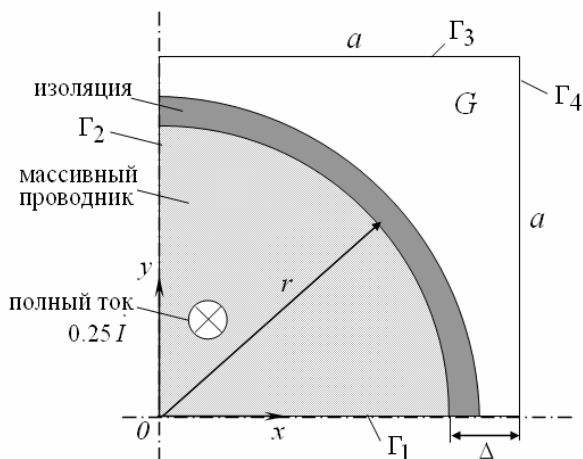


Рис. 5.2. Расчетная двумерная область G , состоящая из $1/4$ -й части элементарной ячейки C

и определяется из решения уравнения Пуассона в бесконечной двумерной области.

Граничные условия для $\dot{A}'_z$ соответствуют нулевым значениям тангенциальной составляющей флуктуационного поля: $\partial \dot{A}'_z / \partial n = 0$ ($\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали).

Таким образом, для векторного потенциала имеем следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y} \Big|_{\Gamma_1} &= 0; & \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x} \Big|_{\Gamma_2} &= 0; \\ \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y} \Big|_{\Gamma_3} &= -\mu_0 \frac{\langle J \rangle}{2} a; & \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x} \Big|_{\Gamma_4} &= -\mu_0 \frac{\langle J \rangle}{2} a. \end{aligned}$$

Такая задача решалась относительно неизвестных $\dot{A}_z(x, y)$ и $\dot{U}/l$ методом контрольного объема [15]. Расчетная область разбивалась на 64×64 сеточных элемента. Относительная погрешность при решении системы уравнений методом последовательной верхней релаксации составила 10^{-6} .

На рис. 5.3 показано неравномерное распределение плотности тока $|J|$ по сечению проводников, полученное в результате численного расчета при радиусе $r = 1$ мм, токе $I = 4$ А и частоте, соответствующей отношению $r/\delta = 3$, для двух случаев: когда расстояние между ближайшими проводниками $2\Delta/r = 1$ (рис. 5.3 а) и $2\Delta/r = 0,1$ (рис. 5.3 б). Относительно геометрических осей проводников ток распределен симметрично.

Данные рис. 5.3 свидетельствуют, что в силу проявления эффекта близости в приповерхностных зонах на кратчайшем расстоянии между проводниками плотность тока характеризуется меньшими значениями, т.е. имеет место неоднородное распределение плотности тока по внешней границе проводников. В случае сближения проводников такая неоднородность проявляется в большей степени (рис. 5.3 б).

Джоулевы потери на единицу длины проводника вычисляются как

$$P^{(1)} = \frac{4}{\sigma} \int_S |J|^2 dS. \quad (5.2)$$

С учетом этого выражения эффективное сопротивление единичного проводника длиной l , входящего в систему проводников, равно

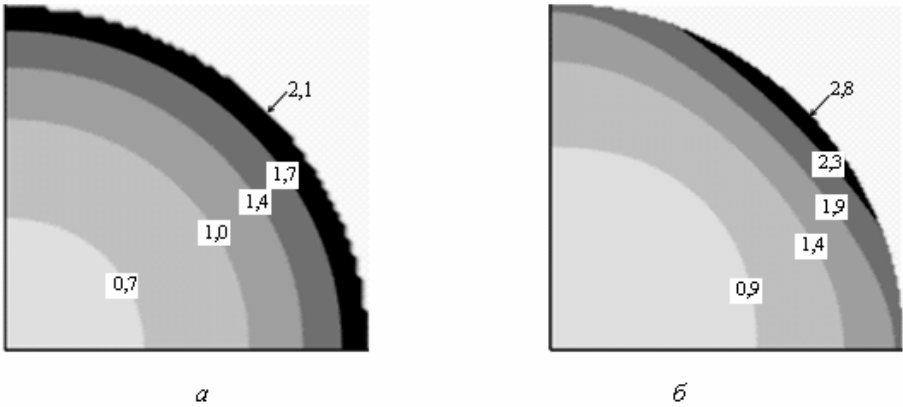


Рис. 5.3. Распределение нормированной плотности тока $|j|/|j_0|$ по сечению проводников, когда расстояние между соседними проводниками (а) $2\Delta/r = 1$ и (б) $2\Delta/r = 0,1$, а частота соответствует отношению $r/\delta = 3$. В силу симметрии картины показана 1/4-я часть проводника

$$R_{AC}^{(1)} = P^{(1)} l / (j \cdot j^*), \quad (5.3)$$

где "*" обозначает комплексно-сопряженную величину.

Для большей наглядности представим величину этого сопротивления в виде произведения сопротивления на переменном токе уединенного проводника согласно [1] и дополнительного безразмерного коэффициента k_I , учитывающего эффект близости:

$$R_{AC}^{(1)} = (R_{DC} \cdot \rho_I) \cdot k_I, \quad (5.4)$$

где R_{DC} – сопротивление проводника на постоянном токе; ρ_I – коэффициент учета поверхностного эффекта в уединенном проводнике, который согласно [1] равен

$$\rho_I \equiv \rho_I\left(\frac{r}{\delta}\right) = \text{Real} \left[\frac{kr}{2} \frac{J_0(kr)}{J_1(kr)} \right] \approx \begin{cases} 1, & r \leq \delta; \\ 0,116\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 - 0,098\frac{r}{\delta} + 0,982, & \delta < r < 2\delta; \\ 0,5\frac{r}{\delta} + 0,25, & r \geq 2\delta. \end{cases} \quad (5.5)$$

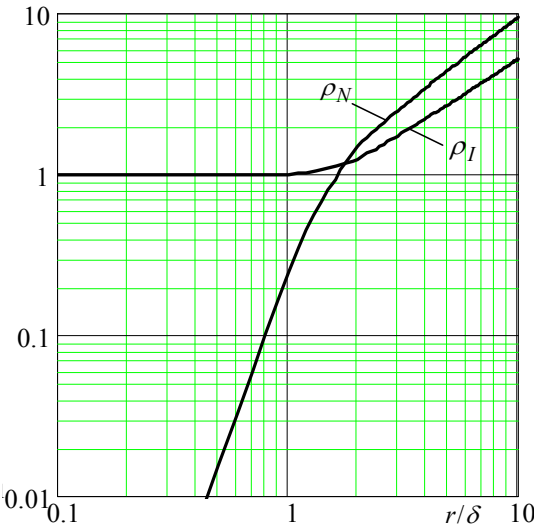


Рис. 5.4. Зависимости ρ_I и ρ_N от отношения r/δ

Здесь $k = \sqrt{j\omega\mu_0\sigma}$; $\delta = \sqrt{2/\omega\mu_0\sigma}$; J_0, J_1 – функции Бесселя.

На рис. 5.4 показана зависимость ρ_I от глубины проникновения магнитного поля, характеризующейся отношением r/δ .

Расчетные значения безразмерного коэффициента k_I , полученные из решения полевой задачи с использованием выражений (5.3) и (5.4), представлены в табл. 5.1. Из приведенных результатов видно, что в приближенных расчетах величины $R_{AC}^{(1)}$ по формуле (5.4) можно полагать $k_I \approx 1$.

Таблица 5.1. Расчетные значения коэффициента k_I

$\frac{2\Delta/r}{r/\delta}$	0	1,0	2,0	4,0
0,1	1,019	1,028	1,03	1,048
0,5	0,994	1,005	1,005	1,005
1,0	1,016	0,9821	0,962	0,9601
2,0	1,0	0,998	0,989	0,983
4,0	1,067	1,044	1,036	1,032
6,0	1,021	1,015	1,008	1,016
8,0	1,021	1,013	1,006	1,005
9,0	1,021	1,012	1,001	0,999
10,0	1,022	1,012	0,998	0,993

5.2.2. Эквивалентное сопротивление единичного проводника при заданном внешнем магнитном поле

Единичный проводник как элемент системы периодически расположенных проводников находится в поперечном переменном магнитном поле $\dot{B}_0 e^{j\omega t}$ (y -составляющая поля), величина которого считается известной. Это поле определяется осреднением "реального" поля $\mathbf{B}$ по объему элементарной ячейки C .

Полный ток, протекающий через сечение проводника, полагается равным нулю. При этом вихревые токи, индуцированные полем $\dot{B}_0$, имеют разное направление в различных зонах сечения проводника, так что в сумме компенсируют друг друга.

В качестве расчетной области G рассматривается 1/2 элементарной ячейки C (рис. 5.5), включающей единичный проводник, и полевая задача формулируется в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial y^2} - j\mu_0 \sigma \omega \dot{A}_z = -\mu_0 \sigma \dot{U}/l; \\ \int_S \dot{J} dS = 0, \quad \dot{J} = -j\omega \sigma \dot{A}_z + \sigma \dot{U}/l. \end{cases} \quad (5.6)$$

Так же, как и в задаче (5.1), граничные условия определяются при представлении векторного потенциала в виде суммы: $\dot{A}_z = \langle \dot{A}_z \rangle + \dot{A}'_z$.

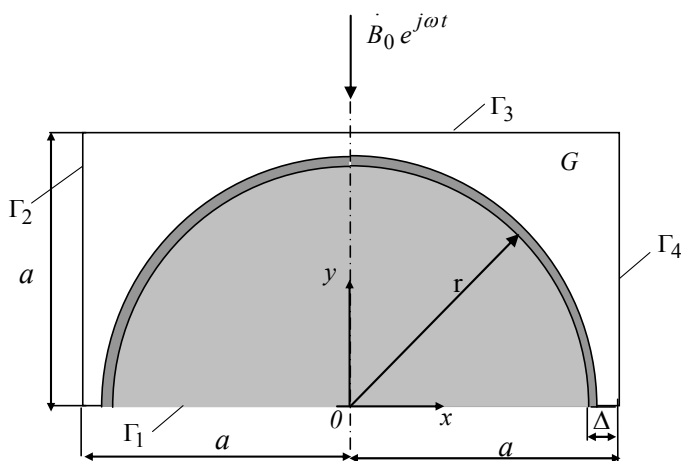


Рис. 5.5. Расчетная двумерная область G , состоящая из 1/2-й части элементарной ячейки C

Составляющая осредненного поля $\langle \dot{A}_z \rangle$ находится с помощью значения приложенного магнитного поля $\dot{B}_0$ по выражению $\langle \dot{A}_z \rangle = -\dot{B}_0 x$.

Граничные условия для $\dot{A}'_z$ следующие:

$$\frac{\partial \dot{A}'_z}{\partial y} \Big|_{\Gamma_1, \Gamma_3} = 0 \quad (\text{условие симметрии});$$

$$\dot{A}'_z \Big|_{\Gamma_2, \Gamma_4} = 0 \quad (\text{учет эффекта близости}).$$

Отсюда определяются граничные условия для $\dot{A}_z$ следующего вида:

$$\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y} \Big|_{\Gamma_1, \Gamma_3} = 0; \quad \dot{A}_z \Big|_{\Gamma_2} = \dot{B}_0 \cdot a; \quad \dot{A}_z \Big|_{\Gamma_4} = -\dot{B}_0 \cdot a. \quad (5.7)$$

Решение задачи (5.6), (5.7) было также получено методом контрольного объема [15] при разбиении области G на 128×64 прямоугольных элемента. Относительная погрешность решения системы алгебраических уравнений составила 10^{-6} .

На рис. 5.6 представлены полученные расчетным путем картины распределения плотности тока $|\dot{J}|$ по сечению проводников при их радиусе $r = 1$ мм, внешнем поле $B_0 = 10^{-4}$ Т и частоте, соответствующей $r/\delta = 3$. Представлены случаи, когда расстояние между проводниками $2\Delta/r = 1$ и $2\Delta/r = 0,1$. При сближении проводников максимальная плотность тока на их границах увеличивается за счет взаимного влияния проводников – проявления эффекта близости.

После получения распределения плотности тока по сечению проводника величина мощности джоулевых потерь на единицу длины может быть определена из выражения

$$P(2) = \frac{2}{\sigma} \int_S |\dot{J}|^2 dS,$$

где S – $1/2$ поперечного сечения проводника.

Мощность потерь на единицу длины проводника, входящего в систему проводников, представим в виде произведения мощности потерь от внешнего поля в уединенном проводнике по [1] и дополнительного безразмерного коэффициента k_N , учитывающего влияние эффекта близости:

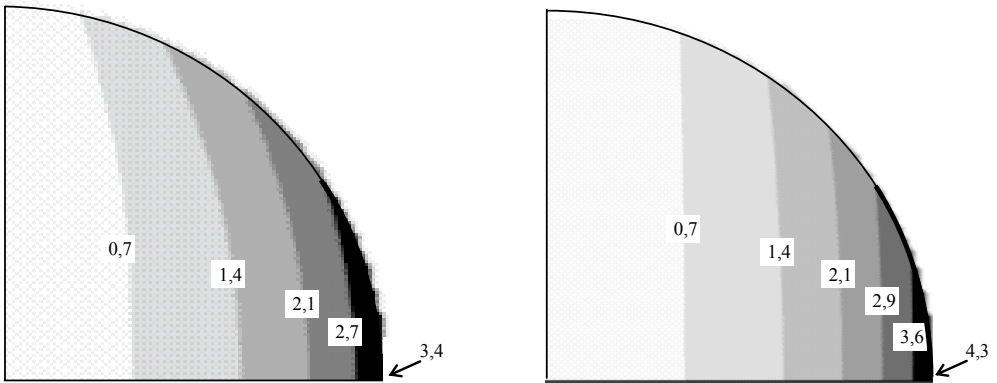


Рис. 5.6. Распределение нормированной плотности тока $|J|/|J_{av}|$ по сечению проводников при различном расстоянии между соседними проводниками: (а) $2\Delta/r=1$; (б) $2\Delta/r=0,1$ и частоте, соответствующей отношению $r/\delta=3$. J_{av} – среднее значение J в 1/2-й области проводника ($x \geq 0$)

$$P(2) = \frac{4\pi B_0^2}{\sigma \mu_0^2} \rho_N \cdot k_N, \quad (5.8)$$

где B_0 – действующее значение внешнего поля, а безразмерный коэффициент ρ_N согласно [1] равен

$$\rho_N \equiv \rho_N\left(\frac{r}{\delta}\right) = -\text{Real} \left[\frac{(kr)^2}{2} \frac{J_2(kr)}{J_0(kr)} \right] \approx \begin{cases} 0,25 \cdot \left(\frac{r}{\delta}\right)^4, & r \leq \delta; \\ 0,268 \cdot \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 0,446 \frac{r}{\delta} - 0,464, & \delta < r < 2\delta; \\ \frac{r}{\delta} - 0,5, & r \geq 2\delta. \end{cases} \quad (5.9)$$

Зависимость коэффициента ρ_N от частоты или глубины проникновения магнитного поля δ показана на рис. 5.4.

Расчетные значения k_N , полученные из решения полевой задачи (5.6), (5.7), представлены на рис. 5.7. Видно, что эффект близости существенно влияет на величину потерь в проводнике в случае высокой час-

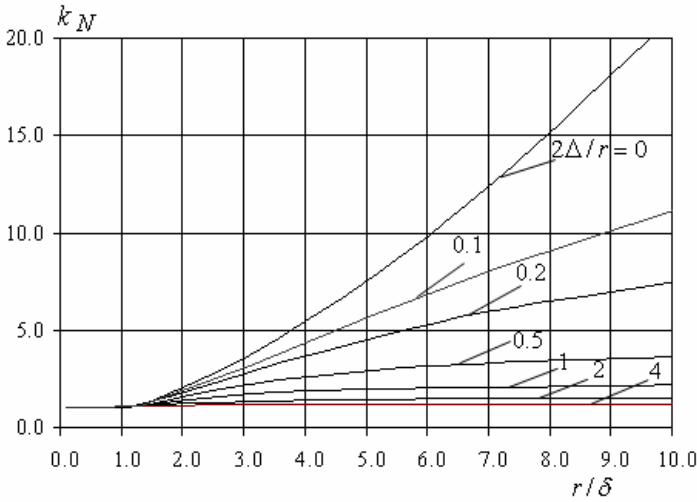


Рис. 5.7. Зависимость коэффициента k_N от r/δ при различном расстоянии между близлежащими проводниками $2\Delta/r$

тоты ($r/\delta > 5$) и при малом расстоянии между проводниками ($2\Delta/r < 0,2$).

Эквивалентное сопротивление единичного проводника во внешнем поле, полученное из условия равенства в нем потерь, равно

$$R_{AC}^{(2)} = P^{(2)} \cdot l / (\dot{I} \cdot \dot{I}^*), \quad (5.10)$$

где l – длина проводника; величина $P^{(2)}$ определяется согласно выражению (5.8), а под током $\dot{I}$ понимается реальный ток, протекающий в обмотке.

Полное эквивалентное сопротивление единичного проводника, по которому течет переменный ток $\dot{I}$ и на который воздействует внешнее переменное магнитное поле B_0 , равно

$$R_{AC} = R_{AC}^{(1)} + R_{AC}^{(2)} \quad (5.11)$$

и соответственно полные потери в проводнике составляют

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} = R_{AC} \cdot \dot{I} \cdot \dot{I}^*. \quad (5.12)$$

5.2.3. Эквивалентное сопротивление многовитковой обмотки трансформатора

Выражения (5.4), (5.10) и (5.11) позволяют рассчитать эквивалентное сопротивление многовитковой обмотки $R_{w,AC}(\omega)$ и потери $P_w(\omega)$ в ней как функции угловой частоты ω в широком диапазоне ее изменения. Для этого необходимо выполнить следующую процедуру:

1. При известных токах в обмотках трансформатора найти распределение магнитного поля в окне трансформатора, т.е. определить распределение $B_0(X, Y)$ в глобальной системе координат XOY .

2. Найти среднеквадратическое значение поля $B_0^2(X, Y)$ в сечении обмотки S_w по формуле

$$\langle B_0^2 \rangle = \frac{1}{S_w} \iint_{S_w} B_0^2(X, Y) dX dY.$$

3. При заданной частоте ω вычислить для обмотки значения $R_{AC}^{(1)}(\omega)$, $R_{AC}^{(2)}(\omega)$ и $R_{w,AC}(\omega)$. Например, величина $R_{w,AC}(\omega)$ для первичной обмотки с числом витков N_1 и средней длиной витка l_w определится как

$$R_{w,AC}(\omega) = R_{DC} \rho_I + \frac{4\pi N_1 l_w}{\sigma \mu_0^2} \frac{\langle B_0^2 \rangle}{I^2} \rho_N k_N, \quad (5.13)$$

где R_{DC} – сопротивление обмотки на постоянном токе; I – ток, протекающий в обмотке ($\langle B_0^2 \rangle$ определяется при токе I); коэффициент k_I в (5.13) полагается равным 1 (см. табл. 5.1).

Чтобы найти величину $\langle B_0^2 \rangle$ в (5.13), необходимо провести следующие вычисления:

1) для различных значений частоты найти эффективную намагниченность многовитковой обмотки, обусловленную вихревыми токами, в силу того, что при высокой частоте массивные проводники обмотки значительно уменьшают внешнее переменное магнитное поле из-за "макроскопического" диамагнитного эффекта;

2) для различных значений частоты рассчитать магнитное поле рассеяния в поперечном сечении трансформаторных обмоток с учетом их эффективной намагниченности.

На первом шаге сначала вычисляется магнитный момент $\dot{\mathbf{m}} = (0, \dot{m}_y, 0)$ единичного проводника, связанный с распределением вихревых токов, по следующей формуле [16]:

$$\dot{m}_y = - \iint_S x \cdot \dot{J}(x, y) dS,$$

где $\dot{J} = -j\omega\sigma \dot{A}_z + \sigma \dot{U}/l$ – плотность тока, определяемая из решения полевой задачи (5.6), (5.7), а интегрирование выполняется по поперечному сечению S проводника.

Затем может быть найдена эффективная намагниченность $\dot{\mathbf{M}}_{eff} = (\dot{M}_{eff,x}, \dot{M}_{eff,y}, 0)$ многовитковой обмотки как неоднородной среды:

$$\dot{M}_{eff,x} = \dot{M}_{eff,y} = \dot{m}_y / (2a)^2,$$

где $2a$ – размер элементарной ячейки.

Заметим, что в рассматриваемом случае (когда элементарная ячейка имеет форму квадрата и содержит единичный проводник кругового сечения) x – и y –составляющие вектора намагниченности имеют одинаковые значения.

Используя основные уравнения для магнитного материала: $\dot{\mathbf{B}} = \mu_0(\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{M}}_{eff})$; $\dot{\mathbf{B}} = \dot{\mu}_{eff} \mu_0 \dot{\mathbf{H}}$ и исключая $\dot{\mathbf{H}}$, для рассматриваемого случая получаем

$$\dot{\mu}_{eff} = (1 + \mu_0 \dot{M}_{eff,x} / B_0)^{-1}.$$

Здесь $\dot{\mu}_{eff} = \mu' - j\mu''$ – комплексная величина эффективной магнитной проницаемости многовитковой обмотки, как неоднородной среды, в высокочастотном магнитном поле.

На втором шаге вычислений при различных значениях частоты определяется распределение поля рассеяния в окне трансформатора. К примеру, в двумерном случае (см. рис. 5.8) поле характеризуется векторным потенциалом $\dot{\mathbf{A}} = (0, 0, \dot{A}_z)$, который удовлетворяет уравнению, записанному в глобальной системе координат XOY :

$$\frac{\partial}{\partial X} \frac{1}{\dot{\mu}} \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \frac{1}{\dot{\mu}} \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial Y} = -\mu_0 \dot{J}.$$

В последней формуле относительная величина комплексной магнитной проницаемости

$$\dot{\mu} = \begin{cases} \dot{\mu}_{eff}^{(1)} & \text{в объеме первичной обмотки;} \\ \dot{\mu}_{eff}^{(2)} & \text{в объеме вторичной обмотки;} \\ 1 & \text{в воздухе,} \end{cases}$$

а осредненная плотность тока

$$J = \begin{cases} J_1 = I_1 N_1 / S_1 & \text{в первичной обмотке;} \\ J_2 = I_2 N_2 / S_2 & \text{во вторичной обмотке,} \end{cases}$$

где S_1 и S_2 – площадь поперечного сечения первичной и вторичной обмоток соответственно.

На границе Γ используется условие для идеального магнитопровода ($\mu = \infty$) в предположении, что полный ток в окне равен нулю [17, 18]: $\partial \dot{A}_z / \partial n|_{\Gamma} = 0$ ($\mathbf{n}$ – единичный

вектор нормали). Заметим, что именно случай нулевого полного тока используется в экспериментальных исследованиях, описанных далее.

Полевая задача в окне трансформатора может быть решена как аналитическими, так и численными методами. В настоящей работе применен метод конечных объемов [15]. Результаты компьютерных расчетов представлены в разделе 5.4.

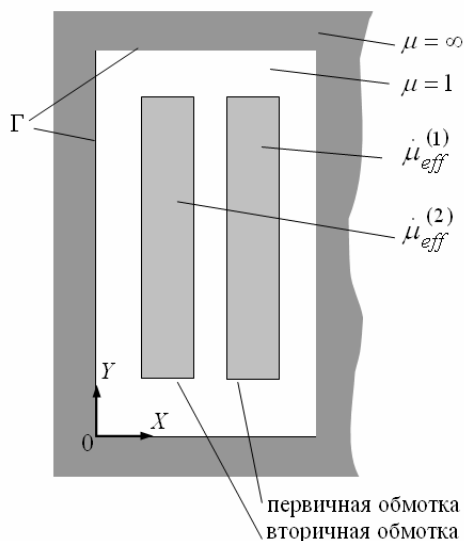


Рис. 5.8. Двумерная область окна трансформатора с обмотками, используемая для расчета магнитного поля рассеяния. Γ – граница области

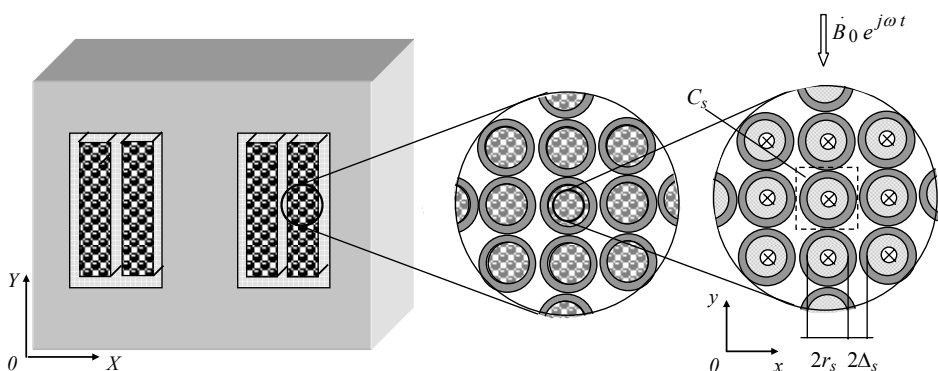
5.3. Эквивалентное сопротивление многовитковой обмотки из провода типа литцендрат

Детальное исследование высокочастотных электромагнитных процессов в трансформаторных обмотках, выполненных из провода типа литцендрат, предполагает рассмотрение трех пространственных уровней: макроуровня – в окне трансформатора; промежуточного уровня – в объеме отдельного проводника и микроуровня – в объеме одной жилы (рис. 5.9).

Предположим, что обмотка многовитковая и каждый проводник многожильный. Жилы проводников характеризуются регулярной двумерной периодической структурой с элементарной ячейкой C_S (рис. 5.9 в), а ток распределен равномерно между всеми жилами.

При таких условиях полевые задачи (5.1) и (5.6), (5.7) могут быть решены в объеме элементарной ячейки C_S , содержащей единичный жильный проводник обмотки, а эквивалентное сопротивление жилы рассчитывается по выражению (5.11). Тогда эквивалентное сопротивление обмотки определится на основании формулы (5.13) следующим образом:

$$R_{w,AC} = R_{DC} \rho_I + \frac{4\pi N_1 N_0 I_w}{\sigma \mu_0^2} \frac{\langle B_0^2 \rangle}{I^2} \rho_N k_N. \quad (5.14)$$



а – макроуровень

б – промежуточный уровень

в – микроуровень

Рис. 5.9. Схематическое представление многовитковой литцендратной обмотки трансформатора (а), периодическая структура изолированных проводников обмотки типа литцендрат (б) и периодическая структура жил в литцендратном проводнике с элементарной ячейкой C_S (в)

Здесь R_{DC} – сопротивление обмотки на постоянном токе; N_0 – число жил в проводнике, а коэффициенты ρ_I , ρ_N , k_N вычисляются с использованием выражений (5.5), (5.9) и данных рис. 5.7 с учетом параметров жилы r_s , Δ_s согласно рис. 5.9 в.

5.4. Результаты экспериментальных исследований и сравнение их с расчетными данными

Для реализации предложенной вычислительной методики была разработана Mathcad–программа, которая содержит в себе оператор вызова Fortran–программы по расчету поля рассеяния в окне трансформатора. Вычисление эквивалентного сопротивления обмоток высокочастотных трансформаторов проводилось при различных значениях частоты. Были изготовлены и изучены два трансформатора с ферритовым сердечником типа E55/28/21: трансформатор № 1 с витками из одножильного проводника и трансформатор № 2 с литцендратными обмотками. Каждый из трансформаторов имел две обмотки с одинаковым числом витков, соединенных встречно-последовательно. Параметры обмоток представлены на рис. 5.10 и в табл. 5.2.

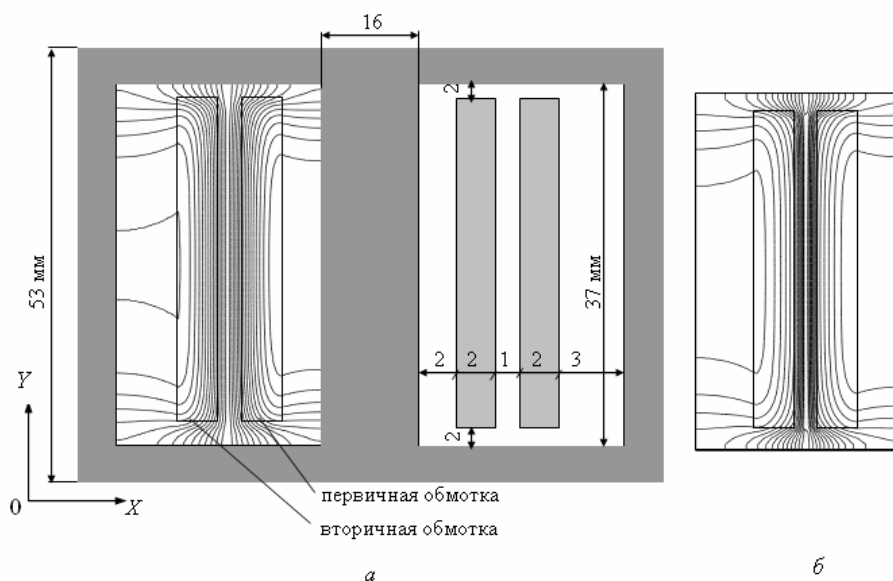


Рис. 5.10. Распределение магнитного векторного потенциала $|\dot{A}|$ в окне трансформатора № 1 при различных значениях частоты: (а) низкая частота – $r/\delta = 0,4$; (б) высокая частота – $r/\delta = 4$

Таблица 5.2. Характеристики обмоток трансформаторов

Параметры	Трансформатор № 1 (обмотка с массивны- ми проводниками)	Трансформатор №2 (обмотка из провода типа литцендрат)
Число витков в первичной и вторичной обмотках	$N_1 = N_2 = 221$	$N_1 = N_2 = 252$
Диаметр проводника, $2r$, мм	0,5	—
Расстояние между проводниками, 2Δ , мм	0,06	—
Диаметр жилы, $2r_s$, мм	—	0,1
Расстояние между жилами, $2\Delta_s$, мм	—	0,07
Число жил в литцендрате	—	9

Следует заметить, что два типа рассматриваемых обмоток можно корректно сравнивать при одинаковом наружном диаметре их проводников (рис. 5.11). Такое условие приближенно выполнялось для изучаемых трансформаторов № 1 и № 2.

Рассчитанные значения действительной μ' и мнимой μ'' частей эффективной магнитной проницаемости многovitковых обмоток (для трансформатора № 1) представлены на рис. 5.12. Как показано, под воздействием приложенного поля $\dot{B}_0 e^{j\omega t}$ потери в многovitковой обмотке

определяются значениями μ'' , а их максимум имеет место при частоте, соответствующей отношению $r/\delta = 1,0 - 2,0$. Эффективная магнитная проницаемость литцендратной обмотки (трансформатор № 2) полагается равной $\mu_{eff} = 1$ в силу

того, что полный объем меди в литцендратной обмотке меньше, а глубина проникновения магнитного поля в проводник $\delta \geq r_s$.

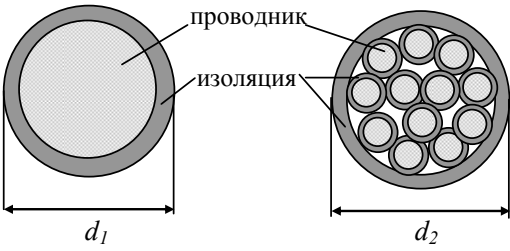


Рис. 5.11. Поперечное сечение двух сравниваемых проводников: массивного одножильного проводника (слева) и литцендратного проводника (справа), имеющих одинаковый наружный диаметр ($d_1 = d_2$)

Картины поля рассеяния в окне трансформатора № 1, рассчитанные как для низкой, так и для высокой частоты, показаны на рис. 5.10 *а* и *б* соответственно. Видно, что при высокой частоте магнитное поле выталкивается из объема обмоток вследствие их диамагнитных свойств.

Пространственное распределение поля рассеяния в окне трансформатора № 2 определялось при $\dot{\mu}_{eff}^{(1)} = \dot{\mu}_{eff}^{(2)} \approx 1$. Такое распределение в пределах рассматриваемого частотного диапазона почти ничем не отличалось от распределения поля для трансформатора № 1 при низкой частоте (рис. 5.10 *а*).

Значения $\langle B_0^2 \rangle$, необходимые для расчета сопротивления $R_{w,AC}(\omega)$ по формуле (5.13), определялись для различных значений угловой частоты ω . Расчетные результаты для первичной обмотки трансформатора № 1 показаны на рис. 5.13.

Зависимости сопротивления $R_{w,AC}(\omega)$ от частоты для рассматриваемых трансформаторов представлены на рис. 5.14. Здесь показаны также экспериментальные данные по измерению эквивалентного сопротивления обмоток двух трансформаторов (измерения проводились с помощью измерителя добротности Q-meter ВМ-560). Литцендратная обмотка с наружным диаметром, равным диаметру массивного проводни-

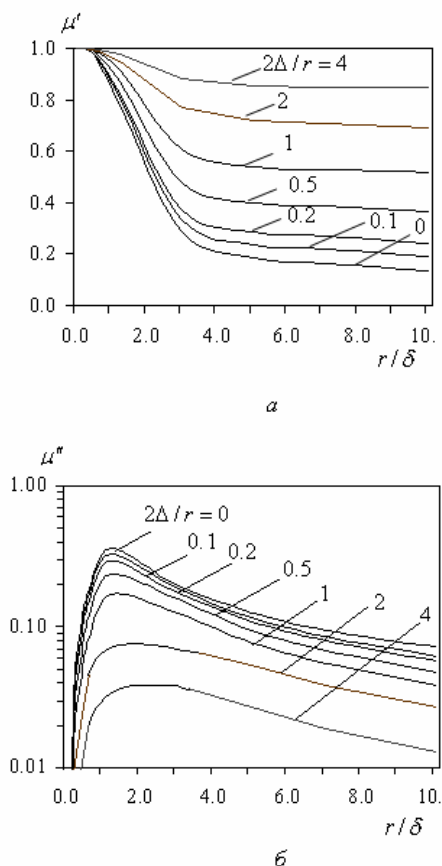


Рис. 5.12. Зависимость эффективной магнитной проницаемости μ' (*а*) и μ'' (*б*) первичной и вторичной обмоток трансформатора № 1 от частоты при различных относительных расстояниях между близлежащими проводниками $2\Delta/r$

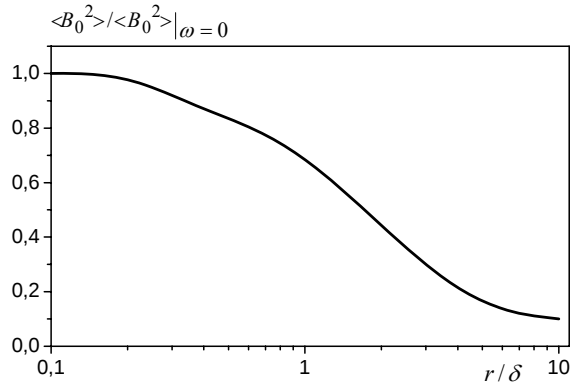


Рис. 5.13. Изменение относительной величины $\langle B_0^2 \rangle$ в поперечном сечении первичной обмотки трансформатора № 1 в зависимости от относительной частоты. $\langle B_0^2 \rangle|_{\omega=0}$ – значение $\langle B_0^2 \rangle$ при низкой частоте

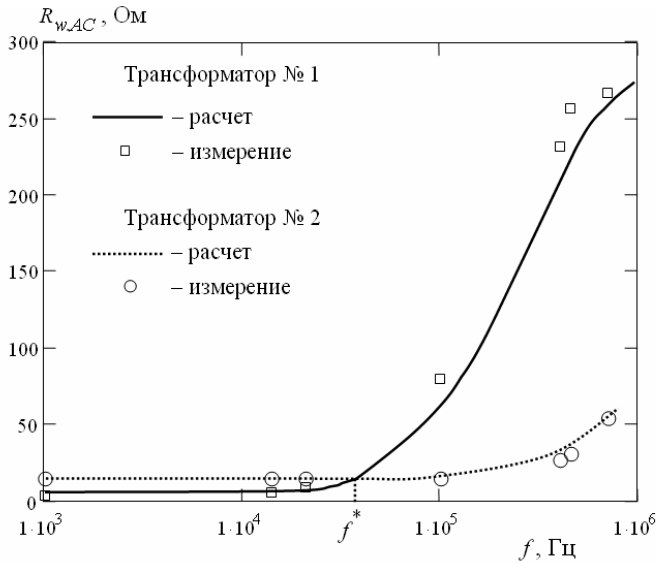


Рис. 5.14. Зависимость сопротивления $R_{w,AC}$ двух встречно-последовательно соединенных обмоток от частоты f
Критическая частота f^* используется для сравнения сопротивлений двух типов обмоток

ка, характеризуется более высоким значением R_{DC} из-за меньшей площади поперечного сечения всех жил. Как следствие, при низкой частоте сопротивление обмотки со сплошным проводником ниже. Однако с

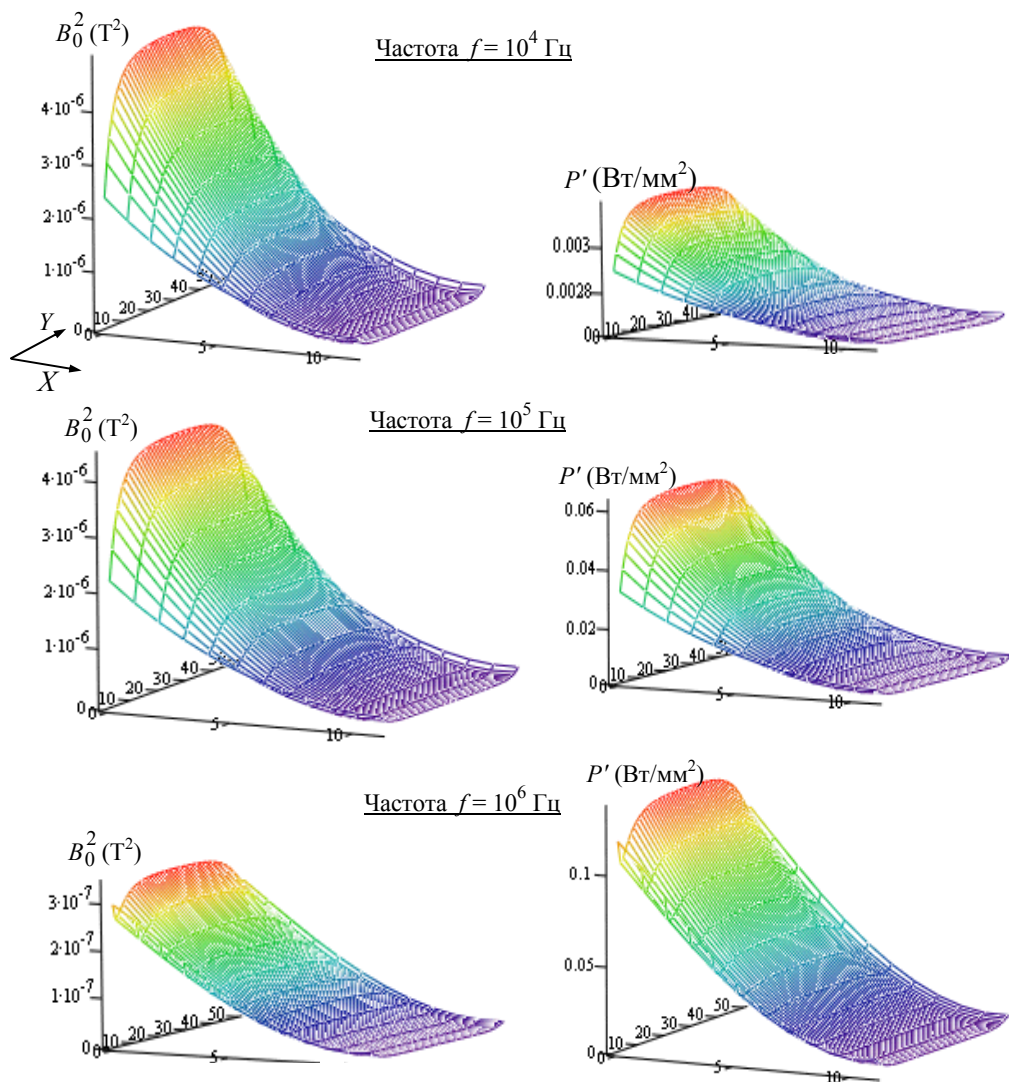


Рис. 5.15. Распределение квадрата магнитной индукции B_0^2 (слева) и потерь P' на единицу площади (справа) в первичной обмотке трансформатора № 1 при различных значениях частоты f

ростом частоты ее сопротивление резко увеличивается. В таком случае может быть определено некоторое критическое значение частоты f^* , начиная с которого литцендрат имеет меньшее сопротивление, а значит,

характеризуется более низкими потерями. Очевидно, что с увеличением числа жил в литцендрате величина f^* возрастает (при условии, что проводник имеет такой же наружный диаметр).

Расхождение между экспериментальными и расчетными результатами может быть связано с 1) приближенным подходом к расчету поля рассеяния в окне трансформатора и 2) неточностями при определении потерь в витках обмотки на ее периферии.

Относительно сравнения двух типов обмотки следует отметить, что при высокой частоте неравномерное распределение потерь по поперечному сечению обмотки со сплошным проводником обусловлено неравномерностью магнитного поля в обмотке (см. рис. 5.10). Электрические потери во всех проводниках первичной обмотки трансформатора № 1 вычислялись с использованием выражений (5.2), (5.8) и (5.12), а затем результаты расчетов усреднялись по сечению обмотки.

Результаты расчетов, представленные на рис. 5.15, показывают неравномерное распределение потерь, связанное как с неравномерностью распределения квадрата магнитной индукции $B_0^2(X, Y)$, так и с выполнением при высокой частоте неравенства $P^{(2)} > P^{(1)}$. Такая неравномерность потерь непременно должна учитываться при обеспечении условий охлаждения высокочастотных трансформаторов.

Относительно обмотки, выполненной из литцендратного провода, отметим, что при частоте $f \leq 10^6$ Гц потери на вихревые токи распределяются почти равномерно.

Основными результатами данной главы являются следующие.

1. Предложена методика расчета эквивалентного электрического сопротивления на переменном токе многовитковой обмотки высокочастотного трансформатора и индуктора с учетом эффекта близости, поверхностного и геометрического эффектов. Особенности методики являются:

- возможность расчета двух типов многовитковых обмоток: выполненных из сплошного круглого проводника и из проводника типа литцендрат;

- рассмотрение регулярного расположения проводников в обмотках и жил в литцендрате; использование для этого случая концепции повторяющейся элементарной ячейки в структуре проводников.

2. Методом компьютерного моделирования изучено распределе-

ние плотности вихревого тока в отдельном проводнике обмотки. На основании этих результатов получены аналитические выражения и графические зависимости для расчета эквивалентных сопротивлений обмоток.

3. Численным путем найдено поле рассеяния в окне трансформатора при учете эффективной магнитной проницаемости многовитковой обмотки, рассматриваемой в виде неоднородной среды. Разработано программное обеспечение по моделированию электромагнитного поля и связанных с ним эффектов в высокочастотных магнитных компонентах, а также по расчету зависящего от частоты сопротивления обмотки.

4. Теоретическими и экспериментальными методами для различных значений частоты проведены сравнение и анализ сопротивления двух типов обмоток: со сплошными проводниками и литцендратным проводом. Как показывают результаты, преимущества литцендратной обмотки проявляются только в случае превышения критического значения частоты (такое значение частоты может быть определено с помощью предложенной методики).

5. С практической точки зрения результаты работы могут найти применение для определения оптимальных параметров многовитковых обмоток, в частности, одножильного провода либо литцендрата, а также выбора числа жил в литцендратном проводе так, чтобы при заданной частоте потери на вихревые токи в обмотках высокочастотных магнитных компонентов были минимальны. Кроме того, разработанная расчетная методика может быть использована для проведения детального анализа частотно-зависимых эффектов, связанных с вихревыми токами, и энергетических потерь в силовых трансформаторах, многожильных кабелях, индуктивных накопителях и импульсных магнитах с многовитковыми катушечными системами.

Более полно материалы главы изложены в работах [19, 20].

ГЛАВА 6

РАСЧЕТ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ОБМОТОК СИЛОВОГО ТРАНСФОРМАТОРА НА ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЕ МЕТОДОМ МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

6.1. Введение

Растущий интерес специалистов к изучению высокочастотных явлений в силовых трансформаторах и реакторах обусловлен потребностями практики. Так, к актуальным практическим вопросам в этой области относятся анализ распределения высокочастотных напряжений в обмотках трансформаторов, возникающих в переходных режимах [1–3], интерпретация результатов измерений отклика на частотное воздействие трансформаторов при диагностике их состояния [4–6], проектирование трансформаторов, предназначенных для работы на высоких частотах и совместно с полупроводниковыми источниками питания [7] и др. Во всех указанных задачах важным является определение зависимостей от частоты эквивалентных параметров трансформаторных обмоток – индуктивности и активного сопротивления, а также оценка величины потерь на высокой частоте как в обмотках, так и в магнитопроводе. Поскольку не всегда удается получить частотные зависимости экспериментальным путем, компьютерное моделирование играет большую роль как средство их расчета.

Моделирование трансформаторов предполагает получение распределения электромагнитного поля во всех его элементах в заданном диапазоне изменения частоты и при известной геометрии (структура и размеры), магнитных и электрических свойствах материалов обмоток, магнитопровода и изоляции, а также режимов работы. В ходе компьютерного моделирования по результатам решения полевой задачи могут

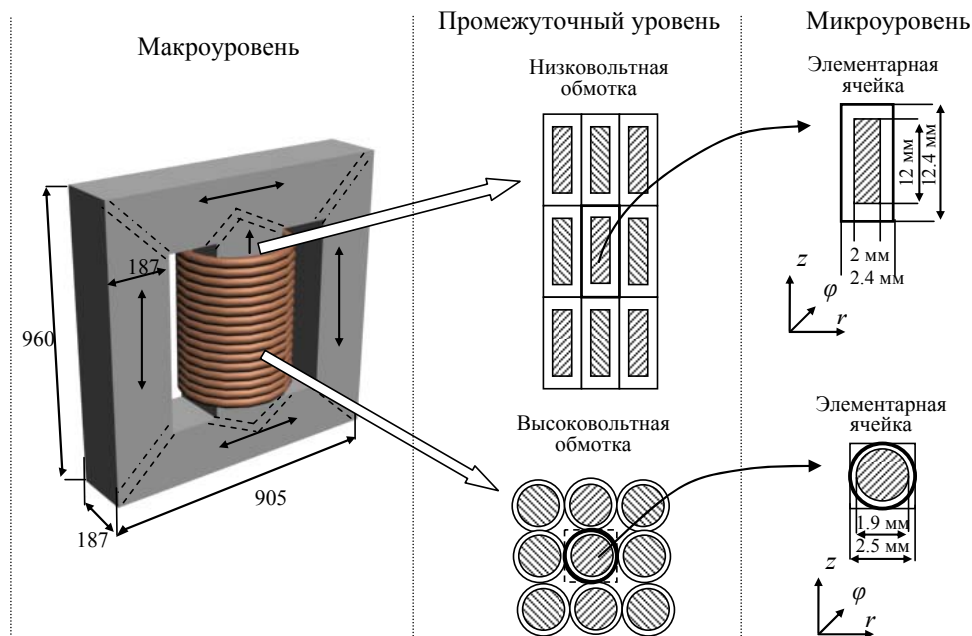


Рис. 6.1. Иерархическая структура трансформатора (400 кВА, 15/0,4 кВ).
 Внутренний диаметр высоковольтной обмотки – 280 мм, внешний диаметр – 340 мм, высота – 500 мм, число витков – 1440. Внутренний диаметр низковольтной обмотки – 220 мм, внешний диаметр – 260 мм, высота – 500 мм, число витков – 29 (пять параллельных проводников)

быть найдены эквивалентные параметры обмоток трансформатора при заданной частоте.

Трудности в детальном моделировании электромагнитных процессов в трансформаторах связаны, прежде всего, с необходимостью учета большого разброса характерных размеров основных структурных элементов (см. рис. 6.1). Так, метровый масштаб является характерным для сердечника и обмоток силового трансформатора, а миллиметровый – для проводников обмоток и листовой электротехнической стали (толщина листа порядка 0,1–0,5 мм определяет величину вихревых токов). В общем случае учет такого большого различия характеристик структурных элементов трансформатора требует привлечения мощных вычислительных ресурсов. Вместе с тем значительно проще можно выполнить анализ трансформатора на отдельных пространственных уровнях, т.е. с применением метода многомасштабного моделирования. В частности,

сначала рассмотреть малый объем отдельного проводника обмотки в локальной системе координат с учетом влияния соседних близко расположенных проводников, что составляет микроуровень и промежуточный уровень многомасштабного моделирования, а затем исследовать магнитное поле в окне магнитопровода в глобальной системе координат, т.е. выполнить моделирование на макромасштабном уровне. В качестве примера на рис. 6.1 показана иерархическая структура рассматриваемого трансформатора.

Многомасштабный подход к моделированию процессов в силовом трансформаторе и реакторе предполагает выполнение следующих этапов:

- 1) расчет распределения локального поля на микроуровне и определение эффективных характеристик среды, включающей обмотки и магнитопровод, в широком диапазоне изменения частоты;
- 2) расчет распределения усредненного поля на макроуровне (в объеме всего трансформатора) с использованием полученных на предыдущем этапе эффективных характеристик;
- 3) расчет эквивалентных параметров обмотки трансформатора, а также электрических и магнитных потерь в его элементах.

Более точное определение распределения магнитного поля на макроуровне требует учета анизотропных свойств обмоток и шихтованного магнитопровода, а также рассмотрения высокочастотных явлений в проводниках обмотки.

Целью работы, представленной в данной главе, являются разработка методики расчета эффективных характеристик среды, включающей обмотку трансформатора и его магнитопровод, и расчет эквивалентных значений индуктивности и сопротивления обмоток с учетом таких факторов, как скин-эффект, эффект близости и геометрический эффект, а также с учетом высокочастотных характеристик магнитопровода. Для достижения цели в работе используется метод многомасштабного моделирования, предполагающий анализ электромагнитных явлений на двух пространственных уровнях. На микроуровне решается двумерная электромагнитная задача для элементарной ячейки обмоток трансформатора, и на макроуровне рассматривается трехмерная задача для определения магнитного поля в объеме всего трансформатора с использованием значений эффективной магнитной проницаемости сердечника и обмоток. Компьютерные расчеты выполнялись с помощью пакета программ Comsol [8].

6.2. Эквивалентное сопротивление и эффективные диамагнитные свойства обмоток трансформатора на высокой частоте

Представим внутренний объем низковольтной и высоковольтной обмотки трансформатора в виде системы регулярно расположенных массивных проводников соответственно прямоугольного или круглого сечения, окруженных воздушным зазором и слоем изоляции (см. промежуточный уровень на рис. 6.1).

Предположим, что такая система проводников является бесконечно протяженной вдоль координатной оси, направленной перпендикулярно плоскости поперечного сечения проводников. В таком случае электромагнитная задача может быть решена в двумерной постановке в области поперечного сечения проводников. Эта область представляет собой композиционную неоднородную среду с периодической структурой, для которой единичный проводник является элементарной ячейкой (микроуровень на рис. 6.1). Эффективные характеристики такой среды определяются из решения полевой задачи в объеме выбранной элементарной ячейки [9, 10] при следующих предположениях для каждого проводника обмотки:

- ток определяется с использованием параметров обмотки и внешней сети;
- поперечное магнитное поле, создаваемое всеми проводниками обмотки, осредняется по объему элементарной ячейки.

В случае же, когда имеются магнитный сердечник и другая токонесущая обмотка, поперечное магнитное поле зависит от конфигурации магнитной системы.

Предполагается, что эффективные параметры проводников низковольтной и высоковольтной обмоток распределены равномерно по их объему, т.е. влияние краевых эффектов не учитывается. Очевидно, что чем больше число витков в обмотке, тем в большей степени справедливо сделанное допущение.

С учетом направления поля рассмотрим два типа проводников – прямоугольного сечения для низковольтной обмотки и круглого сечения для высоковольтной обмотки.

На рис. 6.2 показаны все варианты полевых задач, которые необходимо решить для определения анизотропных эффективных свойств проводников низковольтной обмотки прямоугольного сечения с учетом различного направления внешнего магнитного поля. Так, в задаче 1 (рис. 6.2 *a*) рассматривается распределение плотности тока по сечению

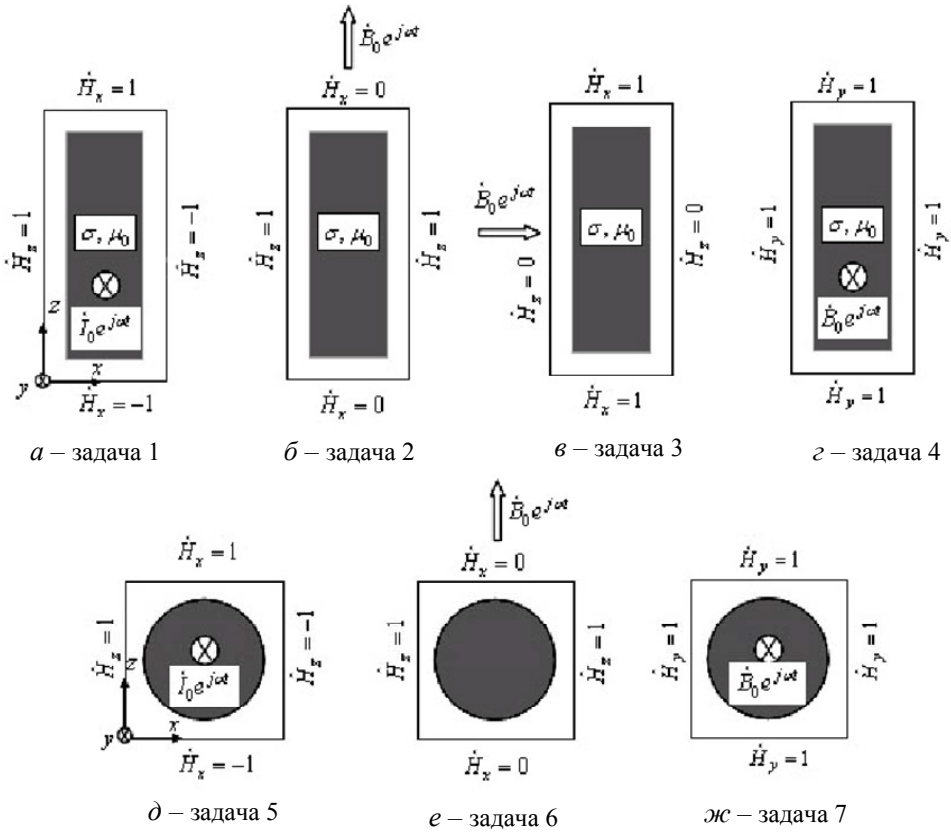


Рис. 6.2. Двумерные расчетные области (элементарные ячейки на микроуровне) и граничные условия для проводников низковольтной (вверху) и высоковольтной (внизу) обмотки. Размеры указаны на рис. 6.1

проводника низковольтной обмотки при заданном полном токе. По результатам ее решения вычисляется эквивалентное сопротивление обмотки при различной частоте. В задачах 2 и 3 исследуются процессы при воздействии на проводник внешнего поперечного магнитного поля в вертикальном и горизонтальном направлениях соответственно. В задаче 4 изучается воздействие продольного поля. В задачах 5, 6 и 7 рассматриваются аналогичные процессы в проводнике высоковольтной обмотки.

Эквивалентные параметры низковольтной обмотки. Многовитковая низковольтная обмотка выполнена из медного проводника прямоугольного сечения, размеры которого показаны на рис. 6.1.

Задача 1. Расчет эквивалентного сопротивления. Область элементарной ячейки (рис. 6.2 а) включает один медный проводник низковольтной обмотки прямоугольного сечения $12 \times 2 \text{ мм}^2$, по которому протекает переменный ток $\dot{I}_0 e^{j\omega t}$ (I_0 – амплитуда, t – время, ω – угловая частота, точка сверху обозначает комплексную величину).

Для нахождения распределения плотности тока в поперечном сечении проводника и расчета его эквивалентного сопротивления на переменном токе, которое зависит от частоты, необходимо решить полевую задачу 1 согласно рис. 6.2 а. Эта полевая задача формулируется относительно векторного магнитного потенциала $\dot{\mathbf{A}} = (0, \dot{A}_y, 0)$ и градиента электрического потенциала $\Delta \dot{V} / L$ ($\Delta \dot{V}$ – изменение потенциала $\dot{V}$ по длине L) следующим образом [11]:

$$j\omega\sigma \dot{A}_y + \nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) = -\sigma \nabla \dot{V} / L; \quad (6.1)$$

$$\int_S \dot{J}_y ds = \dot{I}_0, \quad \dot{J}_y = -j\omega\sigma \dot{A}_y - \sigma \Delta \dot{V} / L. \quad (6.2)$$

Здесь σ – электропроводность проводника; $\dot{J}_y$ – плотность тока в направлении y ; S – площадь поперечного сечения проводника.

Граничные условия задачи показаны на рис. 6.2 а. Они позволяют учесть периодичность структуры, т.е. наличие соседних проводников.

После определения неизвестных величин $\dot{A}_y$ и $\Delta \dot{V} / L$ эквивалентное сопротивление на переменном токе единицы длины проводника рассчитывается из соотношения

$$|\dot{I}_0|^2 R_{AC} = \int_S |\dot{J}_y|^2 / \sigma dS.$$

Решение задачи (6.1), (6.2) с указанными граничными условиями выполнялось численным методом конечных элементов с помощью программы Comsol. Результаты расчетов в виде распределений плотности тока для различных значений частоты f и зависимость от частоты нормированной величины сопротивления (отнесенной к сопротивлению на постоянном токе) для случая низковольтной обмотки показаны на рис. 6.3 а и б соответственно.

Данные рис. 6.3 показывают, что при частоте выше 10^3 Гц влияние скин-эффекта становится значительным. Плотность тока имеет явно выраженные пики в углах проводника, что является результатом проявления геометрического эффекта на высокой частоте.

Задачи 2 и 3. Расчет эффективной магнитной проницаемости.
При воздействии на массивный проводник внешнего переменного магнитного поля в объеме проводника наводятся вихревые токи, магнитное

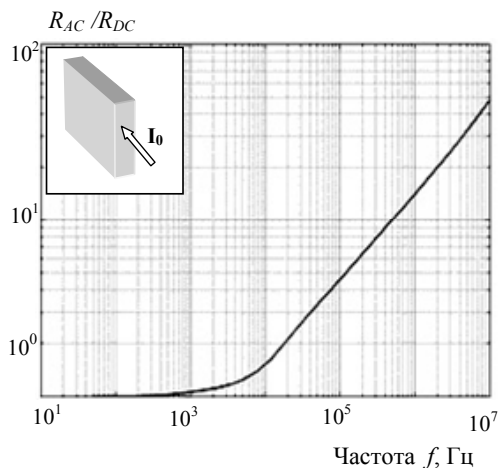
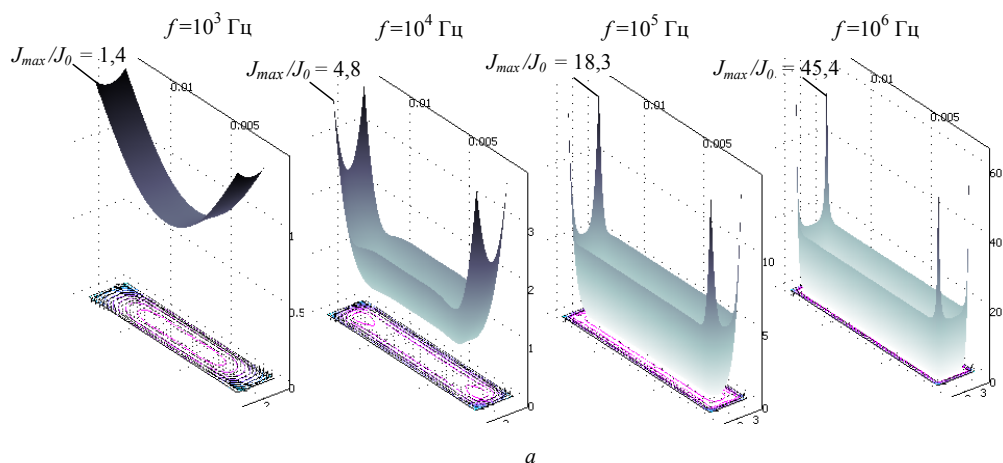


Рис. 6.3. Распределения плотности тока в поперечном сечении проводника для различных значений частоты f (a) и нормированная величина сопротивления на переменном токе на единицу длины проводника R_{AC}/R_{DC} (б).

J_0 обозначает плотность постоянного тока

поле которых стремится уменьшить внешнее магнитное поле согласно правилу Ленца. В этом случае обмотки силового трансформатора на высокой частоте обладают эффективными диамагнитными свойствами [11, 12], характеризующимися тензором эффективной магнитной проницаемости $\tilde{\mu}_{eff}^{LV}$ для низковольтной обмотки и $\tilde{\mu}_{eff}^{HV}$ для высоковольтной обмотки. Для расчета z -составляющей тензора $\tilde{\mu}_{eff}^{LV}$ рассмотрим элементарную ячейку (рис. 6.2 б), которая находится под воздействием внешнего гармонического магнитного поля $\dot{\mathbf{B}}_0 = (0, 0, \dot{B}_0)$. Распределение магнитного поля в такой ячейке описывается следующей системой интегродифференциальных уравнений:

$$j\omega\sigma \dot{A}_y + \nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) = -\sigma \Delta \dot{V} / L; \quad (6.3)$$

$$\int_S (-j\omega\sigma \dot{A}_y - \sigma \Delta \dot{V} / L) ds = 0. \quad (6.4)$$

Граничные условия задачи показаны на рис. 6.2 б. Уравнение (6.4) отражает условие равенства нулю полного тока в проводнике.

После расчета $\dot{A}_y$ и $\Delta \dot{V} / L$ эффективная комплексная магнитная проницаемость низковольтной обмотки в поперечном направлении вдоль оси z определится из соотношения

$$\mu_0 \dot{\mu}_{zz}^{eff} = a^{-1} \int_0^a \dot{B}_z|_{z=0} dx / \dot{H}_0, \quad \text{где } \dot{B}_z = \partial \dot{A}_y / \partial x, \quad \dot{H}_0 = 1. \quad (6.5)$$

Здесь a – размер элементарной ячейки в направлении оси x .

Результаты компьютерных расчетов (см. рис. 6.4, 6.5) показывают, что при частоте $f > 10^4$ Гц магнитное поле интенсивно вытесняется из объема проводника, а диамагнитные свойства обмотки начинают проявляться при частоте выше $\sim 10^3$ Гц, когда относительное значение ее эффективной магнитной проницаемости становится меньше единицы.

Составляющая тензора эффективной магнитной проницаемости в другом поперечном направлении (вдоль оси x) определяется из решения уравнений, аналогичных (6.3) и (6.4), при заданном внешнем магнитном поле $\dot{\mathbf{B}}_0 = (\dot{B}_0, 0, 0)$ в направлении оси x и с использованием граничных условий, представленных на рис. 6.2 в. Соответствующая составляющая эффективной проницаемости вычисляется как

$$\mu_0 \dot{\mu}_{xx}^{eff} = b^{-1} \int_0^b \dot{B}_x|_{x=0} dz / \dot{H}_0; \quad \dot{B}_x = -\partial \dot{A}_y / \partial z; \quad \dot{H}_0 = 1. \quad (6.6)$$

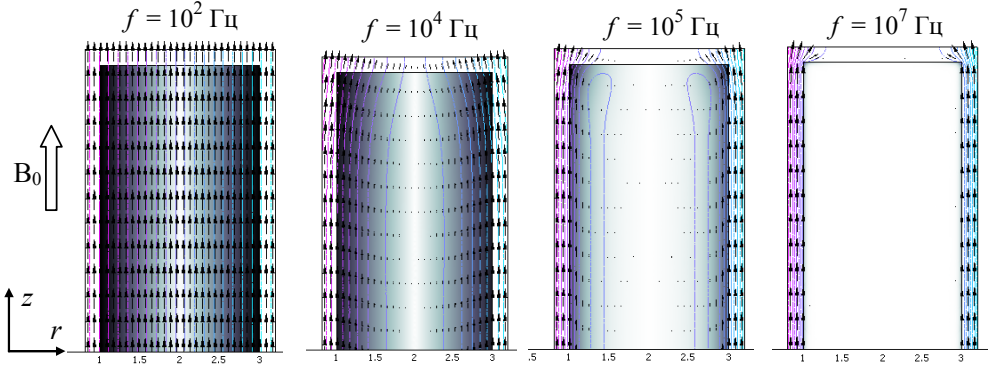


Рис. 6.4. Распределения вихревого тока (затененная область), магнитной индукции (стрелки) и магнитного векторного потенциала (контурные линии) в поперечном сечении проводника низковольтной обмотки при действии z -составляющей внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$ для различных значений частоты f

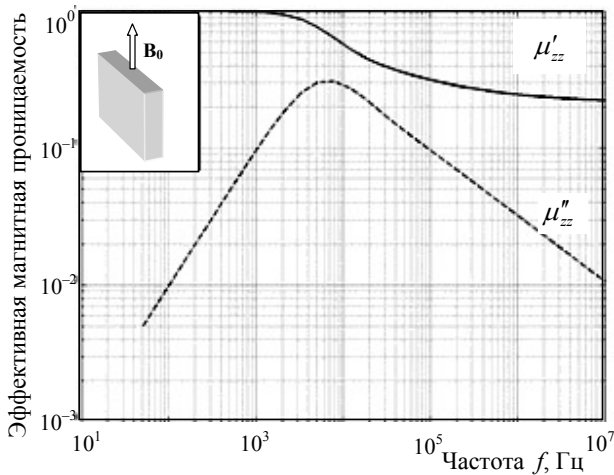


Рис. 6.5. Зависимость от частоты z -составляющей эффективной комплексной относительной магнитной проницаемости

$$\dot{\mu}_{zz}^{eff} = \mu'_{zz} - j\mu''_{zz} \text{ низковольтной обмотки}$$

Здесь b – размер элементарной ячейки в направлении z .

Результаты компьютерного моделирования для этого случая представлены на рис. 6.6 и 6.7. Сравнив их с данными рис. 6.4 и 6.5, отметим, что эффект вытеснения тока более выражен в x -направлении вследствие вытянутой формы проводника. Это приводит к уменьшению

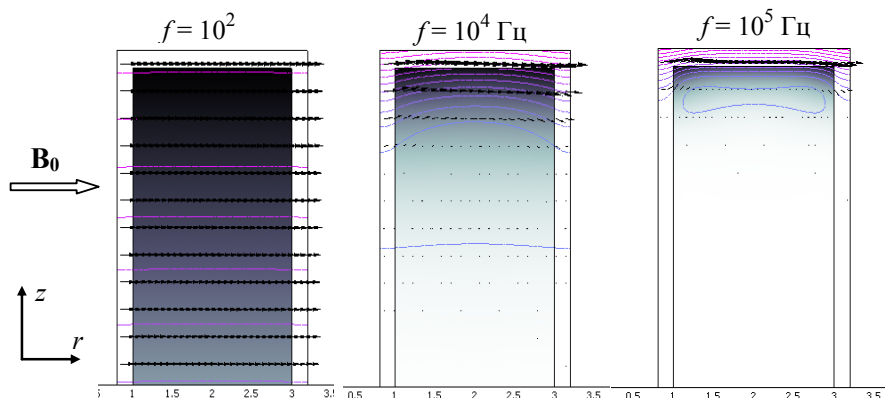


Рис. 6.6. Распределения вихревых токов (затененная область), магнитной индукции (стрелки) и магнитного векторного потенциала (контурные линии) в поперечном сечении проводника низковольтной обмотки под воздействием x -составляющей внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$ при различных значениях частоты f

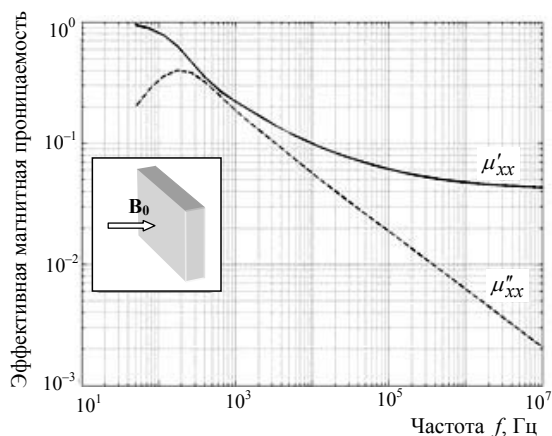


Рис. 6.7. Зависимости от частоты x -составляющей эффективной комплексной относительной магнитной проницаемости $\dot{\mu}_{xx}^{eff} = \mu'_{xx} - j\mu''_{xx}$ для низковольтной обмотки

порогового значения частоты проявления диамагнитного эффекта, которое составляет ~ 200 Гц. Неравенство $\mu'_{xx} < \mu'_{zz}$ остается справедливым во всем исследуемом частотном диапазоне.

Задача 4. Полевая задача для определения эффективной магнитной проницаемости низковольтной обмотки в продольном y -направлении формулируется относительно y -составляющей магнитного поля $\dot{H}_y$:

$$j\omega\mu_0 \dot{H}_y + \nabla \times (\sigma^{-1} \nabla \times \dot{H}_y) = 0. \quad (6.7)$$

Граничные условия задачи показаны на рис. 6.2 *з*. Здесь полагается известной величина внешнего магнитного поля $\dot{\mathbf{B}}_0 = (0, \dot{B}_0, 0)$. После расчета составляющей $\dot{H}_y$ эффективная магнитная проницаемость низковольтной обмотки в направлении y определяется из соотношения

$$\mu_0 \dot{\mu}_{yy}^{eff} = (ab)^{-1} \int_0^a \int_0^b \dot{B}_y dx dz / \dot{H}_0; \quad \dot{H}_0 = 1. \quad (6.8)$$

Результаты компьютерных расчетов для случая продольного внешнего поля показаны на рис. 6.8 и 6.9. Как и ожидалось, они аналогичны данным рис. 6.4 и 6.5 для z -составляющей поля, что объясняется доминирующим влиянием y -направления в интегрировании.

С помощью трех компонентов эффективной магнитной проницаемости для элементарной ячейки тензор эффективной магнитной проницаемости для области с низковольтной обмоткой можно записать в следующем виде:

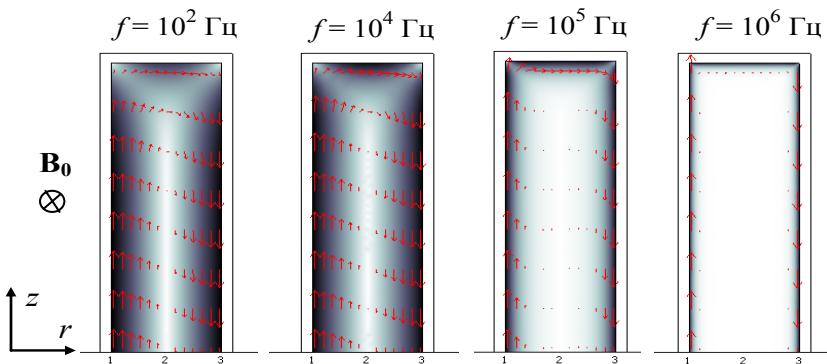


Рис. 6.8. Распределение вихревых токов (стрелки и затененная область) в поперечном сечении проводника низковольтной обмотки под воздействием y -составляющей внешнего магнитного поля при различных значениях частоты f

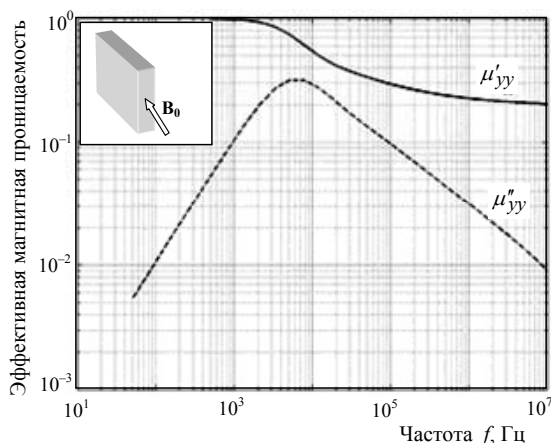


Рис. 6.9. Зависимость от частоты y -составляющей эффективной комплексной относительной магнитной проницаемости

$$\dot{\mu}_{yy}^{eff} = \mu'_{yy} - j\mu''_{yy} \text{ низковольтной обмотки}$$

$$\ddot{\mu}_{eff}^{LV} = \begin{bmatrix} \dot{\mu}_{xx}^{eff} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mu}_{yy}^{eff} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mu}_{zz}^{eff} \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Этот тензор и полученные графические зависимости для его компонентов будут использованы в расчетах магнитного поля силового трансформатора на макроуровне.

Эквивалентные параметры высоковольтной обмотки. Высоковольтная обмотка рассматриваемого трансформатора выполнена из медного проводника круглого сечения диаметром 1,9 мм (рис. 6.1).

Задача 5. Полевая задача для расчета эквивалентного сопротивления и эффективной проницаемости высоковольтной обмотки представлена уравнениями (6.1)–(6.4) и (6.7). Граничные условия приведены на рис. 6.2 *д, е, ж*.

Результаты решения задачи представлены на рис. 6.10–6.14, где показано, что распределение вихревых токов при частоте $f \geq 5 \cdot 10^4$ Гц характеризуется резким скин-эффектом (рис. 6.10 *а*). Он проявляется в увеличении плотности тока в четырех областях, близко расположенных к соседним проводникам. Эквивалентное сопротивление увеличивается с ростом частоты, начиная с $\sim 10^3$ Гц, однако скорость его роста ниже, чем для низковольтной обмотки (видно из сравнения рис. 6.10 *б* и 6.3 *б*). При

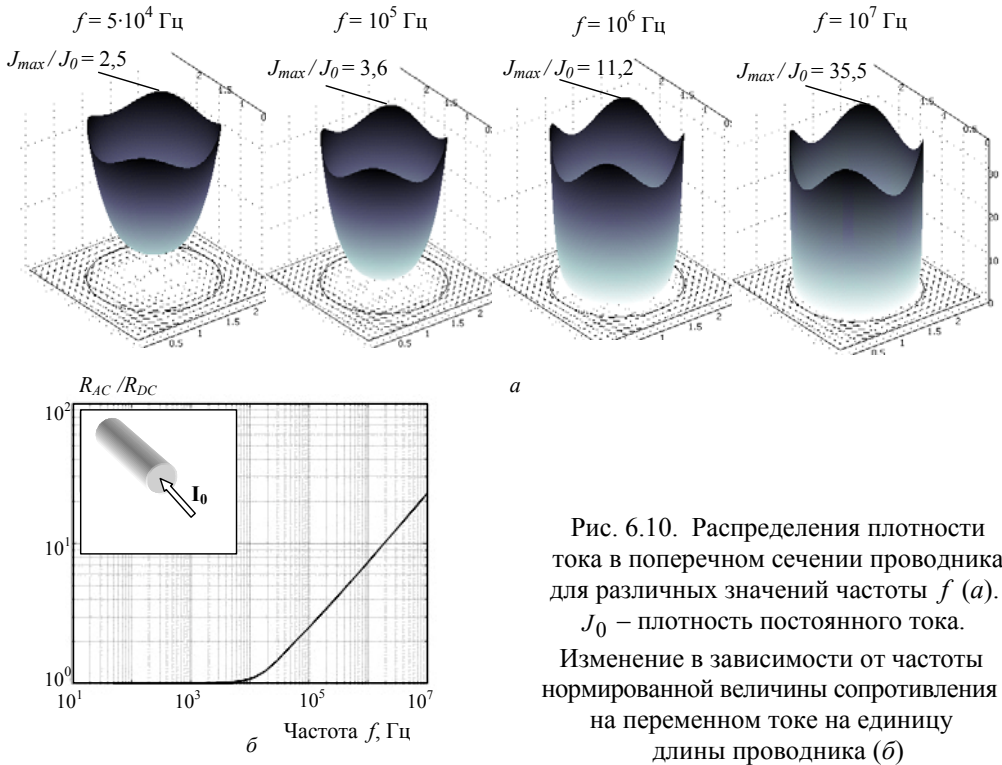


Рис. 6.10. Распределения плотности тока в поперечном сечении проводника для различных значений частоты f (а). J_0 – плотность постоянного тока. Изменение в зависимости от частоты нормированной величины сопротивления на переменном токе на единицу длины проводника (б)

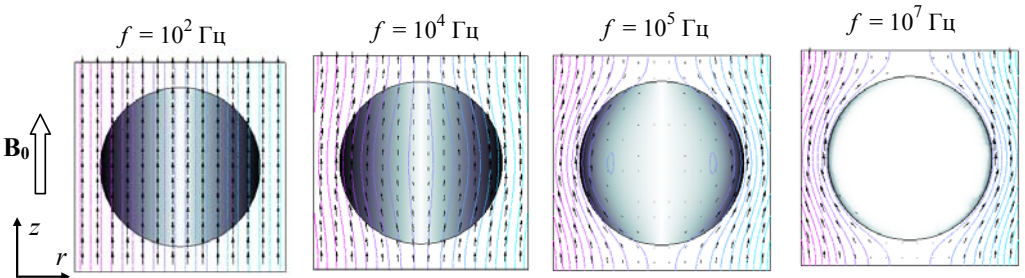


Рис. 6.11. Распределения вихревых токов (затененная область), магнитной индукции(стрелки) и магнитного векторного потенциала (контурные линии) в поперечном сечении проводника высоковольтной обмотки под воздействием y -составляющей внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$ для различных значений частоты f

наибольшей частоте $f = 10^7$ Гц отношение R_{AC}/R_{DC} достигает ~ 20 , хотя для низковольтной обмотки оно составляло ~ 50 . Это свидетельствует о более сильном влиянии вихревых токов в прямоугольных проводниках.

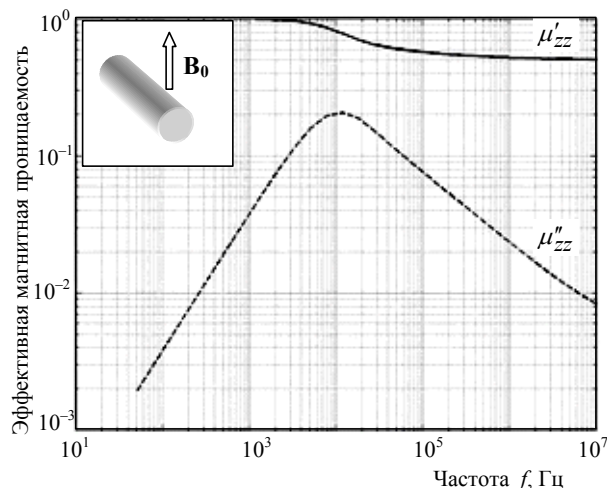


Рис. 6.12. Зависимость от частоты z -составляющей эффективной комплексной относительной магнитной проницаемости $\dot{\mu}_{zz}^{eff} = \mu'_{zz} - j\mu''_{zz}$ высоковольтной обмотки

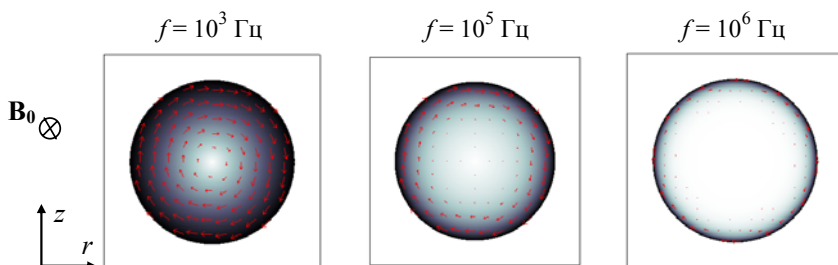


Рис. 6.13. Распределение вихревых токов (затененная область и стрелки) в поперечном сечении проводника высоковольтной обмотки под воздействием y -составляющей внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$ для различных значений частоты f

Задачи 6 и 7. В отличие от низковольтной обмотки для высоковольтной существуют лишь две составляющие тензора эффективной магнитной проницаемости (6.9), соответствующие направлениям вдоль осей z и y . Это объясняется симметрией круглого проводника, так что $\dot{\mu}_{xx}^{eff} = \dot{\mu}_{zz}^{eff}$. Отсюда получим

$$\tilde{\mathbf{\mu}}_{eff}^{HV} = \begin{bmatrix} \dot{\mu}_{zz}^{eff} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mu}_{yy}^{eff} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mu}_{zz}^{eff} \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Электромагнитные процессы в круглом проводнике описываются теми же уравнениями, что и для прямоугольного проводника, а граничные условия приводятся на рис. 6.2 *е, ж*.

Изменения вихревых токов в проводнике для различных значений частоты и зависимости от частоты составляющих тензора $\vec{\mu}_{eff}^{HV}$ приведены на рис. 6.10–6.14. Видно, что скин-эффект проявляется на частоте $\sim 10^4$ Гц (рис. 6.11 и 6.13), а при $f = 10^7$ Гц ток концентрируется в очень тонком слое у поверхности проводника. Это приводит к уменьшению эффективной магнитной проницаемости (рис. 6.12 и 6.14), значение которой становится меньше единицы, что говорит о том, что проводник обладает эффективными диамагнитными свойствами. Пороговая частота $\sim 10^4$ Гц намного выше, чем для низковольтной обмотки ($\sim 10^3$ Гц), что связано с проявлением геометрического эффекта.

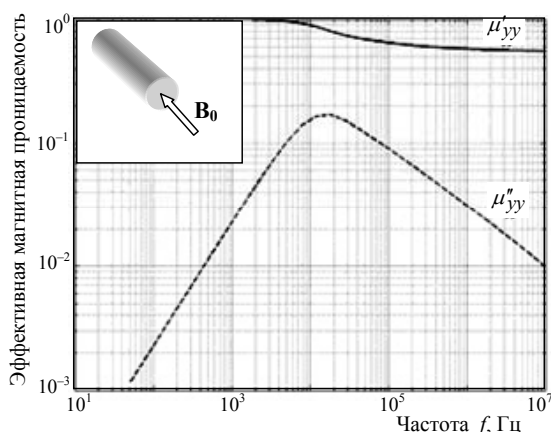


Рис. 6.14. Эффективная комплексная магнитная проницаемость $\dot{\mu}_{yy}^{eff} = \mu'_{yy} - j\mu''_{yy}$ высоковольтной обмотки трансформатора для y -составляющей внешнего магнитного поля в зависимости от частоты f

6.3. Эффективные характеристики шихтованного магнитопровода

Эффективная магнитная проницаемость шихтованного магнитопровода рассматриваемого трансформатора при высокой частоте детально изучена в работе [13]. Представим лишь результаты, необходимые для расчета магнитного поля трансформатора на макроуровне.

Шихтованный магнитопровод представляет собой композицион-

ную структуру (рис. 6.15) с анизотропными линейными магнитными свойствами (насыщение при высокой частоте в данной работе не учитывается). Тензор эффективной магнитной проницаемости такого магнитопровода $\vec{\mu}_{eff}^{core}$, компоненты которого существенно зависят от частоты, находится из следующего соотношения в предположении изотропной электропроводности стальных листов σ_c :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \vec{\mu}_{eff}^{core} \cdot \mathbf{H}; \quad \vec{\mu}_{eff}^{core} = \begin{bmatrix} k_3 \dot{\mu}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_3 \dot{\mu}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mu}_{zz} \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Здесь коэффициент заполнения $k_3 = 2b/h$ характеризует объем стали в структуре магнитопровода; $\dot{\mu}_{xx}, \dot{\mu}_{yy}, \dot{\mu}_{zz}$ – эффективная комплексная магнитная проницаемость шихтованного магнитопровода в различных направлениях для $k_3 = 1$.

Для многослойной структуры, показанной на рис. 6.15, эффективная комплексная магнитная проницаемость рассчитывается по классическим формулам (например, [14]). Ее составляющие вдоль осей x и y определяются согласно следующим выражениям:

$$\dot{\mu}_{xx} \equiv \mu'_{xx} - j\mu''_{xx} = \frac{\mu_x \cdot th((1+j)b/\delta_x)}{(1+j)b/\delta_x}, \quad \delta_x = \sqrt{2/(\omega\sigma_c\mu_0\mu_x)}; \quad (6.12)$$

$$\dot{\mu}_{yy} \equiv \mu'_{yy} - j\mu''_{yy} = \frac{\mu_y \cdot th((1+j)b/\delta_y)}{(1+j)b/\delta_y}, \quad \delta_y = \sqrt{2/(\omega\sigma_c\mu_0\mu_y)}. \quad (6.13)$$

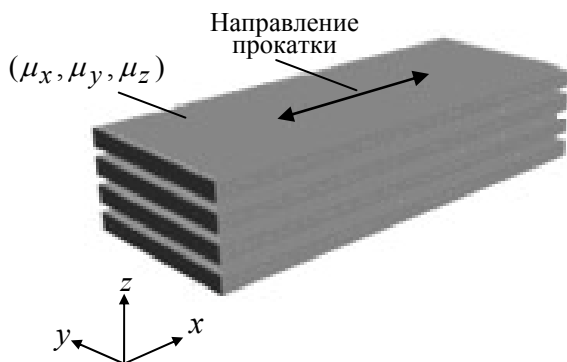


Рис. 6.15. Структура шихтованного магнитного сердечника с анизотропной магнитной проницаемостью листов. Изоляция между листами здесь не показана

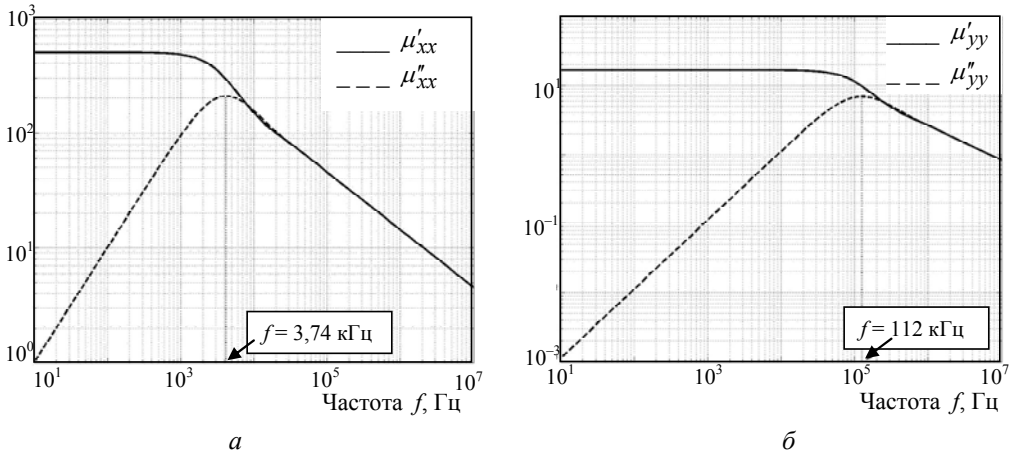


Рис. 6.16. Эффективная комплексная магнитная проницаемость шихтованного магнитного сердечника вдоль прокатки листа μ_{xx}^{eff} (а) и поперек прокатки μ_{yy}^{eff} (б).

Приведены действительная и мнимая части проницаемости.
Расчет выполнен по классическим формулам (6.12), (6.13)

Здесь δ – толщина скин-слоя.

Для z -составляющей магнитной проницаемости справедливо выражение $\mu_{zz} = \mu_z / (\mu_z (1 - k_3) + k_3)$ [15].

Расчетные зависимости от частоты составляющих эффективной магнитной проницаемости показаны на рис. 6.16. Исходными данными для компьютерных расчетов являлись следующие параметры стальных листов: $\mu_x = 500$ – в основном направлении прокатки; $\mu_y = \mu_z = \mu_x / 30 = 16,7$ – в поперечном направлении прокатки; $\sigma_c = 5 \cdot 10^6$ См/м, толщина листов $b = 0,35$ мм; коэффициент заполнения $k_3 = 0,92$. Полученные зависимости для магнитной проницаемости используются далее при расчете магнитного поля трансформатора на макроуровне.

6.4. Расчет трехмерного магнитного поля силового трансформатора при различной частоте

Рассмотрим модель трансформатора (400 кВА, 15/0,4 кВ, Δ -Y), имеющего трехстержневой сердечник и две обмотки – низковольтную и высоковольтную, расположенные либо на среднем, либо на крайнем стержне (размеры сердечника и проводников обмоток приведены на рис. 6.1).

Задача рассматривается в четырех областях, показанных на рис. 6.17 а: Ω_1 – объем низковольтной обмотки; Ω_2 – объем высоковольтной обмотки; Ω_3 – воздушное пространство вокруг магнитопровода; Ω_4 – объем шихтованного магнитопровода. Предполагается, что токи смещения не влияют на распределение магнитного поля и в модели ими пренебрегается.

Формулировка задачи в частотной области строится на основании уравнений Максвелла в квазимагнитостатическом приближении (см. например, [16–18]):

$$\nabla \times ((\mu_0 \tilde{\mathbf{\mu}}(j\omega))^{-1} \cdot \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) = \begin{cases} 0 & \text{в областях } \Omega_1, \Omega_3, \Omega_4; \\ \mathbf{t} N_w \dot{I}_{HV} / S_c & \text{в области } \Omega_2. \end{cases} \quad (6.14)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{\mu}}(j\omega)$ – тензор эффективной комплексной магнитной проницаемости, зависящий от частоты; $\dot{\mathbf{A}}$ – векторный магнитный потенциал; $\mathbf{t}$ – единичный вектор, указывающий направление тока в обмотке; N_w – число витков обмотки; S_c – площадь поперечного сечения обмотки; $\dot{I}_{HV}$ – ток в витке высоковольтной обмотки.

Тензор эффективной магнитной проницаемости в уравнении (6.14) определяется для подобластей, отмеченных на рис. 6.17 а, следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{\mu}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{\mu}}_{eff}^{LV} & \text{в области } \Omega_1; \\ \tilde{\mathbf{\mu}}_{eff}^{HV} & \text{в области } \Omega_2; \\ 1 & \text{в области } \Omega_3; \\ \tilde{\mathbf{\mu}}_{eff}^{core} & \text{в области } \Omega_4. \end{cases} \quad (6.15)$$

Полученные ранее выражения и графические зависимости для составляющих тензора магнитной проницаемости [см. формулы (6.9), (6.10)] определялись по результатам расчета в локальной системе координат одного проводника, в плоскопараллельной постановке на микроуровне. При расчете поля трансформатора на макроуровне тензор преобразуется из локальной системы координат в глобальную систему координат трансформатора. Учитывая, что обе обмотки трансформатора имеют цилиндрическую форму, осуществляется преобразование компонентов тензора из цилиндрической системы в прямоугольную. После такого преобразования получаются следующие выражения:

$$\ddot{\mathbf{m}}_{eff}^{HV} = \begin{bmatrix} \frac{x^2 \dot{\mu}_{r,eff}^{HV} + y^2 \dot{\mu}_{\phi,eff}^{HV}}{x^2 + y^2} & \frac{(\dot{\mu}_{r,eff}^{HV} - \dot{\mu}_{\phi,eff}^{HV})xy}{x^2 + y^2} & 0 \\ \frac{(\dot{\mu}_{r,eff}^{HV} - \dot{\mu}_{\phi,eff}^{HV})xy}{x^2 + y^2} & \frac{y^2 \dot{\mu}_{r,eff}^{HV} + x^2 \dot{\mu}_{\phi,eff}^{HV}}{x^2 + y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mu}_{z,eff}^{HV} \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

где $\dot{\mu}_{z,eff}^{HV} = \dot{\mu}_{r,eff}^{HV}$;

$$\ddot{\mathbf{m}}_{eff}^{LV} = \begin{bmatrix} \frac{x^2 \dot{\mu}_{r,eff}^{LV} + y^2 \dot{\mu}_{\phi,eff}^{LV}}{x^2 + y^2} & \frac{(\dot{\mu}_{r,eff}^{LV} - \dot{\mu}_{\phi,eff}^{LV})xy}{x^2 + y^2} & 0 \\ \frac{(\dot{\mu}_{r,eff}^{LV} - \dot{\mu}_{\phi,eff}^{LV})xy}{x^2 + y^2} & \frac{y^2 \dot{\mu}_{r,eff}^{LV} + x^2 \dot{\mu}_{\phi,eff}^{LV}}{x^2 + y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mu}_{z,eff}^{LV} \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

С учетом симметрии в конструкции трансформатора в качестве расчетной области выбиралась одна четвертая часть объема трансформатора, что показано на рис. 6.17 а. Граничные условия задачи задавались следующим образом: на нижней плоскости при $z = 0$ задавалась нулевая тангенциальная составляющая магнитного поля – $\dot{\mathbf{B}} \times \mathbf{n} = 0$; на внешних границах принимались условия магнитной изоляции – $\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Уравнение (6.14) решено численно методом конечных элементов с помощью пакета программ Comsol. Разбиение расчетной области на конечные элементы (выбиралось 54459 элементов) показано на рис. 6.17 б.

Для подтверждения достоверности программы по результатам расчета поля вычислялось значение индуктивности высоковольтной обмотки трансформатора в предположении отсутствия магнитопровода. Затем это значение сравнивалось с аналитическим расчетом по формуле, приведенной в [19]:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} N_w^2 d_{cp} F = 0,282 \text{ Гн.}$$

Здесь $d_{cp} = 310$ мм – средний диаметр высоковольтной обмотки; $F = 4,4$ – безразмерный коэффициент, зависящий от размеров обмотки. Числен-

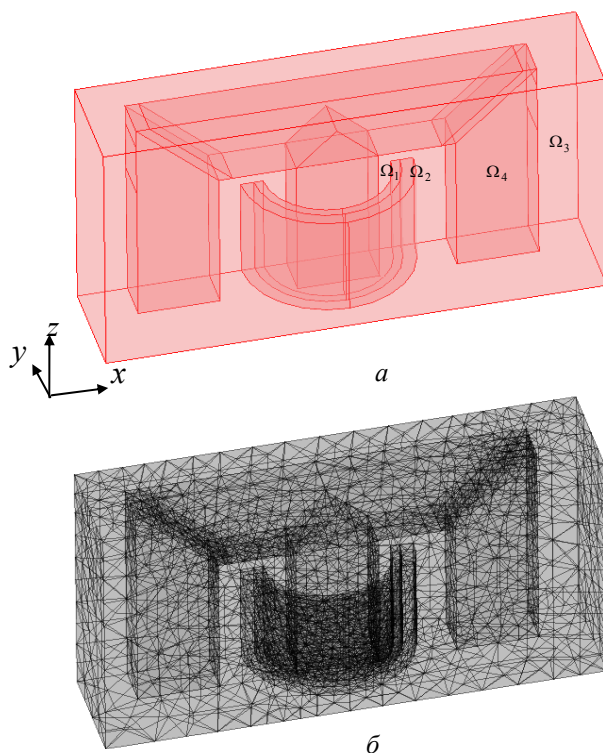


Рис. 6.17. Расчетная область, состоящая из 1/4-й части трансформатора, (а) и используемое в расчетах конечно-элементное разбиение области (б)

ное значение индуктивности по результатам расчета поля при отсутствии магнитопровода составило $L = 0,25$ Гн, что согласуется с аналитическим расчетом. Полученное в численном расчете несколько меньшее значение индуктивности можно объяснить искусственным ограничением расчетной области трансформатора.

Компьютерное моделирование поля в трансформаторе проводилось при запитывании высоковольтной обмотки и для двух случаев – разомкнутой и замкнутой накоротко низковольтных обмоток. Во втором случае в низковольтной обмотке задавалось число ампер-витков, равное по модулю ампер-виткам высоковольтной обмотки, но противоположное по знаку. Расчеты проводились как с учетом, так и без учета эффективных диамагнитных свойств проводников. Кроме того, в зависимости от местонахождения обмоток (либо на среднем, либо на крайнем стержне) определялись картина распределения магнитного поля в трансформаторе, а также эффективные параметры обмотки.

Рассчитанные распределения плотности магнитного потока при низкой и высокой частотах для трансформатора с разомкнутой низковольтной обмоткой и запитываемой высоковольтной обмоткой, находящейся на центральном стержне магнитопровода и на крайнем стержне, приведены соответственно на рис. 6.18 и 6.19.

Расчетные данные показывают, что магнитный поток на частоте 50 Гц замыкается в основном по магнитопроводу, и максимальные значения магнитной индукции составляют 66 и 75 мТ соответственно для случаев расположения обмотки на центральном и на крайнем стержнях. На высокой частоте магнитный поток вытесняется из магнитопровода за

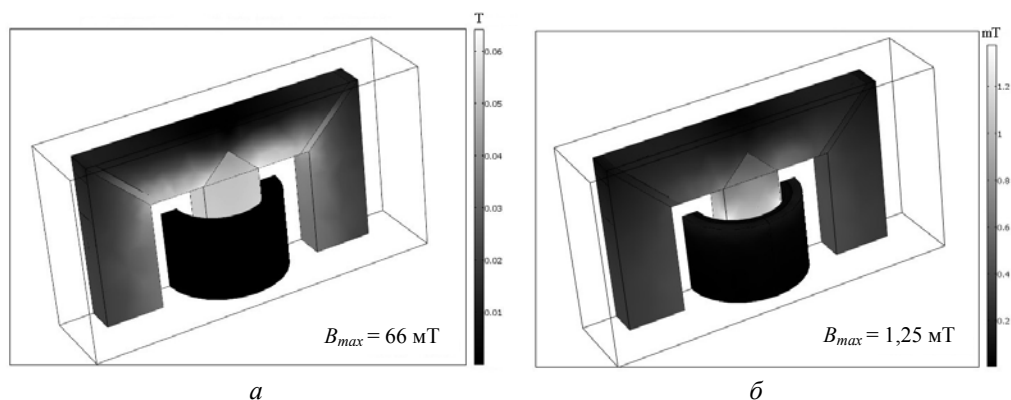


Рис. 6.18. Распределение магнитной индукции в трансформаторе с разомкнутой низковольтной обмоткой, находящейся на центральном стержне магнитопровода, при частоте (а) $f = 50$ Гц, (б) $f = 10^7$ Гц.

Плотность тока в высоковольтной обмотке равна 10^4 А/м²

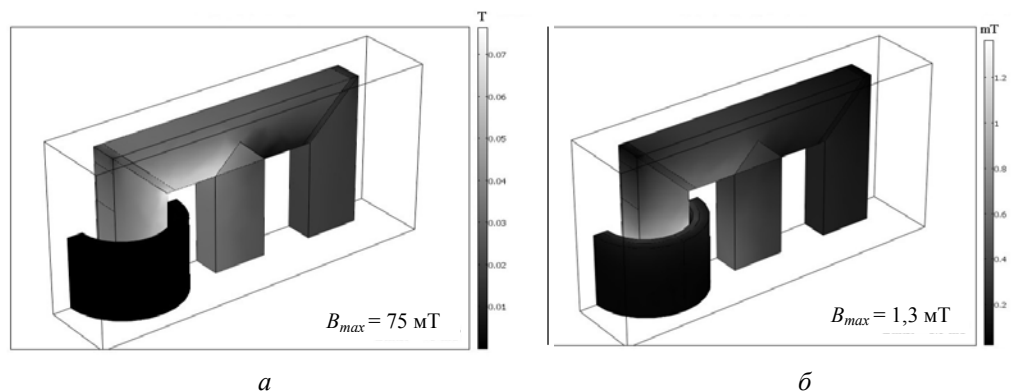


Рис. 6.19. Распределение магнитной индукции в трансформаторе с разомкнутой низковольтной обмоткой, находящейся на крайнем стержне магнитопровода, при частоте (а) $f = 50$ Гц, (б) $f = 10^7$ Гц.

Плотность тока в высоковольтной обмотке равна 10^4 А/м²

счет действия вихревых токов (что приводит к увеличению магнитного сопротивления магнитопровода) и концентрируется вблизи обмоток. Максимальные значения поля в этом случае существенно уменьшаются до 1,25 и 1,3 мТ для расположения обмотки на центральном и крайнем стержнях соответственно. Магнитное поле в области обмоток имеет малое значение из-за сильного проявления диамагнитного эффекта на высокой частоте.

Для случая короткозамкнутой низковольтной обмотки (см. рис. 6.20) магнитный поток вытесняется из зоны сердечника вследствие токов, наведенных в этой обмотке. На высокой частоте происходит сильное вытеснение магнитного поля из объема обмоток и наблюдается его концентрация в воздушном зазоре между обмотками. Для случаев расположения обмоток на центральном или на крайнем стержне максимальные значения поля составляют $\sim 0,16$ и $\sim 0,165$ мТ соответственно.

Рассчитанные распределения магнитного поля могут быть использованы для определения эквивалентного сопротивления и индуктивности обмоток трансформатора, а также для расчета зависящих от частоты потерь в магнитном сердечнике и в обмотках.

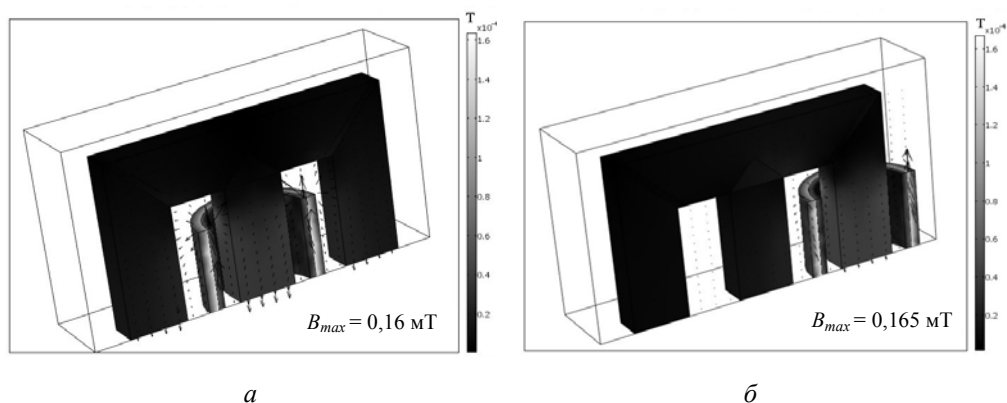


Рис. 6.20. Распределение магнитной индукции в сердечнике и обмотках трансформатора с короткозамкнутой низковольтной обмоткой при частоте 10^7 Гц в случае, когда обмотка находится на центральном стержне (а); на крайнем стержне магнитопровода (б).

Плотность тока в высоковольтной обмотке равна 10^4 А/м²

На рис. 6.21 показаны зависимости от частоты эквивалентных параметров высоковольтной обмотки при разомкнутой низковольтной обмотке. При низкой частоте эквивалентная индуктивность обмотки приблизительно в 100 раз превышает ее индуктивность при отсутствии

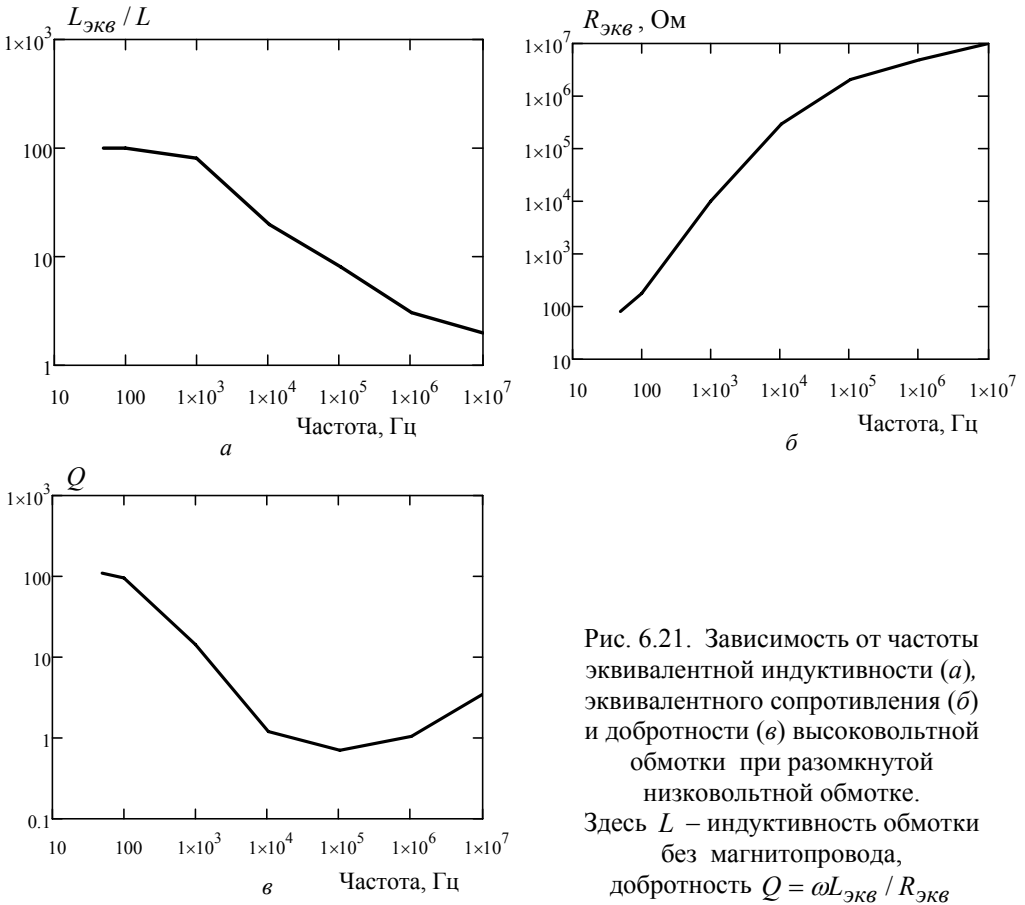


Рис. 6.21. Зависимость от частоты эквивалентной индуктивности (а), эквивалентного сопротивления (б) и добротности (в) высоковольтной обмотки при разомкнутой низковольтной обмотке. Здесь L – индуктивность обмотки без магнитопровода, добротность $Q = \omega L_{\text{экв}} / R_{\text{экв}}$

магнитопровода (см. рис. 6.21 а). С ростом частоты за счет ухудшения магнитных свойств магнитопровода (из-за вихревых токов) и за счет вытеснения магнитного поля из объема обмоток (вследствие проявления их диамагнитных свойств) величина эквивалентной индуктивности уменьшается. Эквивалентное сопротивление высоковольтной обмотки при разомкнутой низковольтной обмотке, учитывающее все виды потерь, монотонно возрастает (см. рис. 6.21 б). При этом величина добротности высоковольтной обмотки уменьшается от 100 до 1 (при частоте 10^5 Гц) и далее незначительно увеличивается с ростом частоты.

На рис. 6.22 и 6.23 показаны зависящие от частоты магнитные потери в магнитопроводе P_{core} , диамагнитные потери в объеме высоковольтной обмотки P_{HV} , низковольтной обмотки P_{LV} и джоулевы потери в меди высоковольтной обмотки P_{Cu} (в которой при расчетах

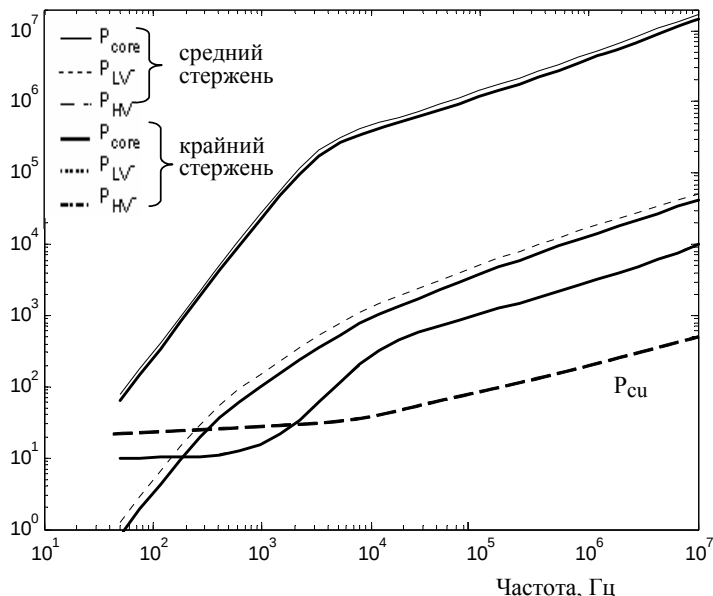


Рис. 6.22. Зависимость от частоты безразмерного значения различных видов потерь в трансформаторе при разомкнутой низковольтной обмотке.

В качестве базового значения потерь используется величина $I_{HV}^2 R$ при $R = 1$ Ом

задается ток I_{HV}). Здесь приведены расчеты для двух случаев: когда обмотки находятся на среднем стержне магнитопровода и на крайнем стержне. Для расчета магнитных и диамагнитных потерь использовались соответственно следующие выражения: $P_{core} = \text{Re}(4 \int_{V_{core}} j\omega \dot{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^* dV)$,

$$P_{LV} = \text{Re}(4 \int_{V_{LV}} j\omega \dot{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^* dV), \quad P_{HV} = \text{Re}(4 \int_{V_{HV}} j\omega \dot{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^* dV).$$

Наличие в этих выражениях множителя 4 связано с тем, что расчетная область составляет 1/4 часть всего объема трансформатора.

Из рис. 6.22 и 6.23 видно, что при разомкнутой низковольтной обмотке потери в магнитопроводе на высокой частоте значительно превышают джоулевы потери в высоковольтной обмотке и диамагнитные потери в обеих обмотках. В случае короткозамкнутой низковольтной обмотки (см. рис 6.23) магнитное поле в магнитопроводе уменьшается, а в области обмоток увеличивается, что приводит к повышению диа-

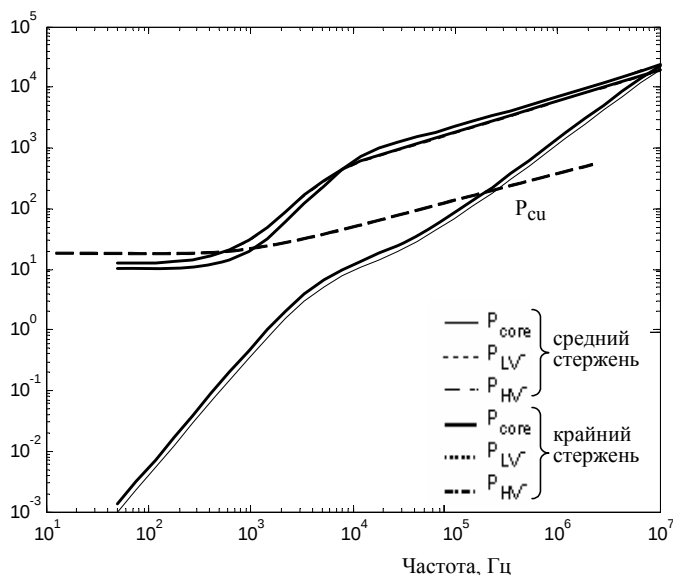


Рис. 6.23. Зависимость от частоты безразмерного значения различных видов потерь в трансформаторе при короткозамкнутой низковольтной обмотке. В качестве базового значения потерь используется величина $I_{HV}^2 R$ при $R = 1$ Ом

магнитных потерь и к малым значениям магнитных потерь в магнитопроводе. Более детальный анализ этих процессов проведен в работе [20].

В заключение выделим следующие основные результаты данной главы.

1. Применен метод многомасштабного моделирования для исследования высокочастотных процессов в силовых трансформаторах. Предложена методика расчета эквивалентных значений сопротивления и индуктивности многовитковой обмотки силового трансформатора в диапазоне изменения частоты $50 - 10^7$ Гц. Методика основана на решении ряда полевых задач в объеме элементарной ячейки на микроуровне. При этом учитываются скин-эффект, эффект близости и геометрический эффект для всех проводников обмотки.

2. Получены частотные зависимости для эффективной магнитной проницаемости среды, занимаемой обмотками трансформатора и шихтованным магнитопроводом. Эти зависимости используются для уточненного расчета трехмерного магнитного поля в объеме трансформатора (на макроуровне) и его эквивалентных параметров в широком диапазоне изменения частоты питающего напряжения – $50 - 10^7$ Гц.

ГЛАВА 7

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В УСТАНОВКЕ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА НА ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УРОВНЯХ

7.1. Введение

Ряд технологических процессов, включающих высокотемпературную обработку материалов, жидких и сыпучих сред, основан на использовании индукционного нагрева активных элементов. Область применения индукционных электронагревателей широка: от горячего водоснабжения до технологического нагрева, в том числе плавка и термическая обработка металлов [1], термическая обработка сыпучих материалов или жидких сред (например, жидкого топлива), помещенных в металлическую емкость, с целью их утилизации. Как самый быстрый и экологически чистый метод бесконтактного нагрева токопроводящих материалов, индукционный нагрев применяется в различных технологических процессах [2], в том числе в машиностроении и металлообработке, при закалке металлов для придания им прочности, при сушке материалов и др.

К преимуществам индукционного нагрева относятся возможность достижения высоких температур в нагреваемом теле (вплоть до температуры его плавления), обеспечение относительно равномерного распределения температуры в материале, высокие энергетические показатели (КПД нагрева, коэффициент мощности). Кроме того, нагрев и электромагнитная обработка многих материалов, в том числе ферромагнитных, могут осуществляться на токах промышленной частоты. В частности, вопросы индукционного нагрева магнитной стали на промышленной частоте обсуждаются в монографии [1].

В индукционных установках, преобразующих электрическую энергию источника питания в энергию электромагнитного поля и затем в тепловую энергию, основными процессами являются электромагнитные и тепловые, которые взаимосвязаны между собой.

Основы анализа электромагнитных и тепловых процессов при индукционном нагреве изложены в работах [1–6]. Численное решение связанных электромагнитной и тепловой задач, возникающих при разработке ряда технологических установок, а также компьютерное моделирование систем индукционного нагрева с ферромагнитными элементами проведено в ряде работ, например в [7–10]. В этих работах учтены такие факторы, как нелинейность электрофизических параметров, изменение ферромагнитных свойств нагреваемого тела от напряженности магнитного поля и температуры, наличие точки магнитных превращений – температуры Кюри. При этом с целью упрощения расчета процесса нестационарного нагрева, воздействие электромагнитного поля отнесено к "быстрому" динамическому процессу, а теплового поля – к инерционному "медленному" процессу, что позволяет рассматривать электромагнитную задачу для комплексных величин в частотной области. Различные схемы расчета индукционных устройств промышленной частоты для нагрева магнитной стали, а также зависимости ее характеристик от напряженности магнитного поля и температуры приведены в [1, 2].

При разработке технологического реактора для нагрева сыпучих материалов индукционным способом необходимо на этапе проектирования выполнить количественный анализ основных характеристик электротеплового процесса и выработать рекомендации по выбору рациональных параметров и режимов нагрева. Такая информация отсутствует в указанных выше работах.

В разделе 7.2 выполняются компьютерное моделирование и анализ, основанный на результатах моделирования, количественных закономерностей протекания электромагнитных и тепловых процессов в стальном реакторе и нагреваемом сыпучем материале, помещенном внутрь этого реактора. При этом рассматривается характер изменения (вследствие нагрева) энергетических характеристик индукционной установки и определяется эффективность преобразования энергии в зависимости от толщины стенки реактора. Отличительной особенностью выполненного исследования от указанных выше работ являются комплексное рассмотрение нелинейных электромагнитных и тепловых процессов при нагреве до температуры 1000 °С, учет зависимости магнитных свойств материала от температуры, а также анализ электромагнит-

ных процессов, протекающих в электрической цепи источника питания установки.

Раздел 7.3 посвящен уточненному расчету электротепловых процессов в индукционной установке нагрева стального реактора с сыпучим материалом, что реализовано с помощью метода многомасштабного моделирования. Относительно применения метода можно сделать следующие замечания.

Индукционный нагрев токопроводящих тел реализуется за счет возбуждения в них электрических токов переменным электромагнитным полем. Источником поля служат индукторы. В мощных установках индукционного нагрева используются многovitковые индукторы, намотанные массивной медной шиной с внутренним каналом для протекания водоохлаждаемой жидкости. Как правило, известно напряжение $\dot{U}$, приложенное к индуктору.

Уточненный электромагнитный расчет индукционных нагревательных установок предполагает учет распределения поля и плотности тока в объеме как нагреваемой заготовки, так и массивных проводников индуктора. При этом обеспечивается высокая точность расчета тепловых характеристик, необходимая на этапе проектирования таких систем. Определение поля в нагреваемой заготовке и массивных витках индуктора, как правило, выполняется численными методами, например, методом конечных элементов, с учетом эффекта близости и скин-эффекта в массивных витках. В полной мере такой подход может быть реализован при небольшом числе витков индуктора ($w = 1 - 5$ витков). С точки зрения теплового расчета существенно, что в пределах глубины проникновения магнитного поля в проводнике выделяется основная часть энергии.

В случае большого числа витков электромагнитное поле круглых массивных проводников с током, представляющих собой модель многovitковой катушки, исследовано в работе [11]. Здесь рассмотрен высокочастотный режим, характеризующийся резким скин-эффектом, и анализируется случай использования как массивных проводников, так и многожильного провода-литцендрата. В работе [12] предложен метод расчета сопротивления литцендратной обмотки индуктора применительно к индукционному нагреву. Сопротивление находится с учетом потерь на вихревые токи и температуры обмотки. Учет вихревых токов и потерь в витках индукторов высокочастотных устройств, основанный на анализе экспериментальных данных, выполнен в работе [13].

Решение полевой электромагнитной задачи для системы индукционного нагрева в случае большого числа массивных витков индукто-

ра ($w \geq 10$) требует в общем случае применения достаточно мелкой расчетной сетки для покрытия сечения всех проводников и таким образом учета в них эффекта близости и скин-эффекта. Дискретизация витков индуктора в этом случае сопряжена со значительными вычислительными трудностями и, как правило, в модели каждый отдельный виток оказывается слишком малым, чтобы корректно учесть неравномерность распределения плотности тока по его сечению при расчете всей системы в целом.

Одним из подходов к упрощению решения задачи может быть предварительное вычисление зависящих от частоты эквивалентных параметров уединенного индуктора (в предположении отсутствия заготовки) и затем использование найденных параметров в расчете всей установки. Однако в случае резкого скин-эффекта (как показано в [11] и исследовано в разделе 7.3) применение такого подхода может быть неэффективно, поскольку параметры индуктора существенно зависят от величины результирующего поля, создаваемого токами как в витках индуктора, так и в заготовке.

Рассмотрим применение метода многомасштабного моделирования к расчету электротепловых процессов в установке индукционного нагрева. В традиционном понимании метода предполагается последовательное рассмотрение иерархических уровней с передачей информации как сверху вниз, так снизу вверх, когда выполняется уточнение итерационным путем основного параметра системы – эквивалентного сопротивления индуктора.

Для исследуемой индукционной установки выделяется два пространственных уровня. На макроуровне рассматривается электромагнитный процесс в объеме всей установки. На микроуровне решается задача в объеме единичного витка индуктора. В результате решения электромагнитной задачи на микроуровне определяется эквивалентное сопротивление индуктора, которое затем в качестве заданного параметра используется для расчета величины тока в индукторе на макроуровне. Задачи, рассматривающие электромагнитный процесс на двух пространственных уровнях, решаются совместно методом последовательных приближений, причем решение задачи на микроуровне уточняет решение задачи на макроуровне.

С использованием многомасштабного моделирования далее проводится компьютерное исследование связанных электротепловых процессов в стальном реакторе и нагреваемом индукционным способом материале, находящемся внутри реактора. Учитываются зависимости магнитных свойств материала реактора от температуры. Выполняется ана-

лиз процессов, протекающих в электрической цепи источника питания индукционной установки. Рассматриваются случаи нагрева при различной частоте источника питания – 50, 400, 1000 Гц.

Для расчетов процессов в индукционной установке использовался численный метод конечных элементов, реализованный в пакете программ Comsol [14].

7.2. Компьютерный анализ электромагнитных и тепловых процессов при индукционном нагреве стального реактора с сыпучим материалом

7.2.1. Постановка электротепловой задачи и метод решения

На рис. 7.1 схематически показана исследуемая установка индукционного нагрева сыпучих материалов. Она содержит металлическую емкость (реактор) 1, выполненную на основе тонкостенной стальной трубы с крышками на нижнем и верхнем торцах. Реактор помещен внутрь многovitкового водоохлаждаемого индуктора 2. Емкость реактора заполнена сыпучим материалом 3 (например, песком), рассматриваемым в работе в виде непроводящей и немагнитной среды, обладающей определенными теплофизическими характеристиками. При подключении индуктора к источнику питания промышленной частоты за счет наведенных токов происходит нагрев стенок реактора и последующий нагрев сыпучего материала под воздействием различных механизмов передачи тепла – теплопроводности, конвекции и излучения.

При разработке модели для анализа свя-

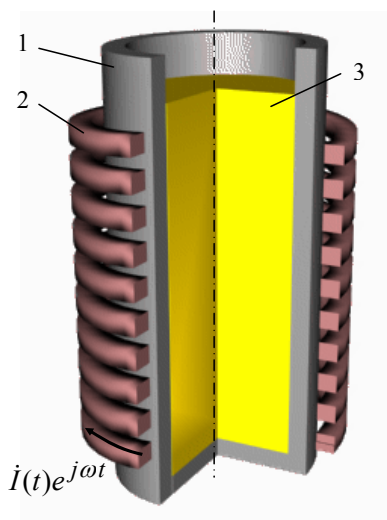


Рис. 7.1. Схематическое изображение индукционной установки для нагрева стального реактора с сыпучим материалом:
1 – реактор в виде тонкостенной стальной трубы с днищем и крышкой сверху (не показано на рисунке);
2 – многovitковый индуктор;
3 – нагреваемый сыпучий материал

занных электромагнитных и тепловых переходных процессов использовались следующие приближения.

1. Характерное время теплового переходного процесса (время нагрева составляет ~ 1800 с) превышает на несколько порядков период изменения тока в индукторе, который составляет 20 мс. В силу этого рассмотрение электромагнитного процесса проводится в частотной области, когда все характеристики поля являются комплексными величинами и одновременно медленно меняющимися функциями времени, представляя тем самым модулированный синусоидальный процесс. В отличие от электромагнитного, тепловой процесс рассматривается как нестационарный и рассчитывается во временной области.

2. Учитывается нелинейная зависимость электропроводности и магнитной проницаемости от температуры, в частности, наличие магнитного фазового перехода в окрестности точки магнитных превращений – температуры Кюри. Зависимость магнитной проницаемости от напряженности магнитного поля не учитывается, так как из-за большого зазора между индуктором и реактором электромагнитный процесс в стали протекает на ненасыщенном участке.

3. Рассматривается случай подключения индуктора к источнику переменного напряжения с частотой 50 Гц, а не к источнику тока, что значительно упростило бы расчет электромагнитного процесса. При этом ток в индукторе является неизвестной величиной, медленно изменяющейся по амплитуде во времени. Значение тока находится в каждый момент времени из решения дополнительного уравнения баланса напряжений в электрической цепи индуктора.

4. Учитывая цилиндрическую форму исследуемого индуктора и реактора, задача решается в двумерной постановке в цилиндрической системе координат $r\theta z$ относительно комплексных переменных – векторного магнитного потенциала $\dot{A}_\varphi(r, z, j\omega, t)$ и величины тока в индукторе $\dot{I}(j\omega, t)$, а также температуры среды $T(r, z, t)$.

Математическая модель, описывающая связанные электромагнитные и тепловые процессы, включает постановку электромагнитной и тепловой задач, которые представлены далее.

Электромагнитная задача. Расчетная область для электромагнитной задачи показана на рис. 7.2 а и содержит три подобласти – стенки реактора Ω_1 , индуктор Ω_2 и окружающую воздушную среду Ω_3 (предполагается, что электромагнитные характеристики сыпучего материала, помещенного внутрь реактора, слабо отличаются от характери-

стик воздуха). Так как днище и верхняя крышка реактора удалены от индуктора и их вклад в процесс нагрева невелик, в расчете они не учитывались.

Электромагнитный процесс описывается следующей системой интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных $\dot{A}_\varphi$, $\dot{I}$.

Уравнения для векторного потенциала:

$$\begin{aligned} j\omega\sigma(T)\dot{\mathbf{A}} + \nabla \times ((\mu_0\mu(T))^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) &= 0, \quad \text{в области } \Omega_1, \\ \nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) &= \begin{cases} \dot{I}w/S, & \text{в области } \Omega_2, \\ 0, & \text{в области } \Omega_3. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Уравнение баланса напряжений:

$$\dot{U} = IR_{AC} + j\omega\dot{\Psi}, \quad (7.2)$$

где $\dot{\Psi} = \frac{w}{S} \int_S 2\pi r \dot{A}_\varphi dS$.

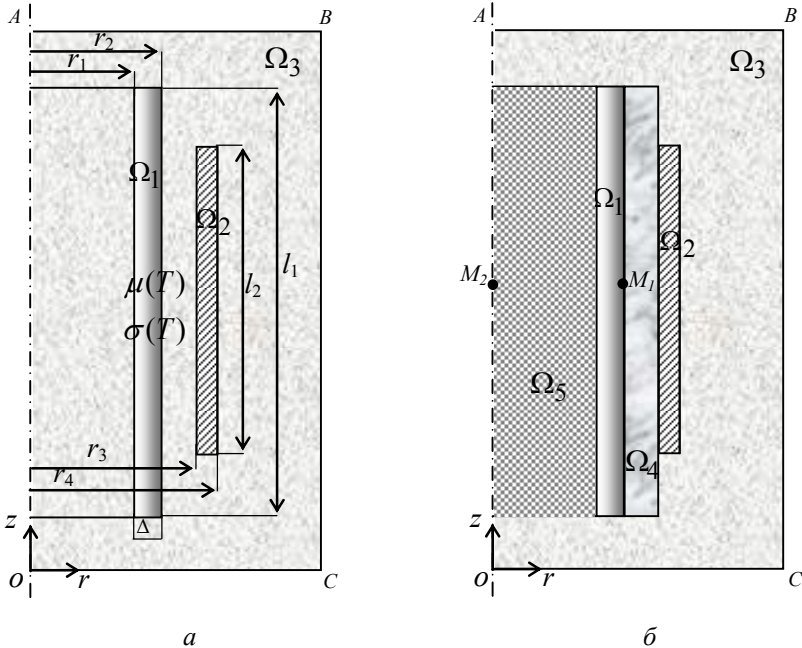


Рис. 7.2. Расчетная область для электромагнитной задачи (а) и тепловой задачи (б):

Ω_1 – стенка реактора; Ω_2 – индуктор; Ω_3 – окружающая теплоизолирующая среда;

Ω_4 – тепловая изоляция; Ω_5 – нагреваемый сыпучий материал

В уравнениях (7.1), (7.2): $\sigma(T)$, $\mu(T)$ – электропроводность и относительная магнитная проницаемость материала стального реактора; ω – угловая частота; $\dot{U}$ – напряжение сети; R_{AC} – активное сопротивление индуктора; w – число витков в индукторе; S – площадь поперечного сечения индуктора; $\dot{\Psi}$ – величина потокоцепления индуктора.

Зависимости параметров материала реактора от температуры выбирались следующими [4]:

$$\sigma(T) = \frac{1}{\rho_0(1 + \alpha(T - T_0))} ; \quad (7.3)$$

$$\mu(T) = \begin{cases} 1 + (\mu_r - 1)(1 - ((T - T_0)/T_K)^2), & T_0 \leq T \leq T_K, \\ 1, & T > T_K, \end{cases} \quad (7.4)$$

где ρ_0 – удельное сопротивление материала реактора при начальной температуре T_0 ; α – температурный коэффициент сопротивления; μ_r – относительная магнитная проницаемость реактора при начальной температуре; T_K – температура точки магнитных превращений – температура Кюри. Заметим, что нелинейная зависимость μ_r от напряженности магнитного поля в работе не учитывалась.

В качестве граничных условий для электромагнитной задачи задавались условие симметрии относительно оси OA (рис. 7.2 а) и условие магнитной изоляции на внешних границах: $\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{H}} = 0$, где $\dot{\mathbf{H}}$ – напряженность магнитного поля; $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали.

Для определения тока $\dot{I}$ в цепи индуктора, удовлетворяющего уравнению (7.2), в работе использовался итерационный процесс, согласно которому ток на $(i+1)$ -й итерации определялся по своему значению на i -й итерации из соотношения

$$\dot{I}^{(i+1)} = \dot{I}^{(i)} \frac{\dot{U}}{\dot{I}^{(i)} R_{AC} + j\omega \dot{\Psi}^{(i)}} \quad (7.5)$$

при условии задания постоянного значения напряжения сети $\dot{U} = const$.

Решение электромагнитной задачи (7.1), (7.2), включая итерационный процесс (7.5), проводилось в каждый момент времени, определяемый решением тепловой задачи.

Тепловая задача. Расчетная область для тепловой задачи показана на рис. 7.2 б и содержит пять подобластей – стенки реактора Ω_1 , индуктор Ω_2 , окружающую теплоизолирующую среду Ω_3 , тепловую изоляцию Ω_4 , расположенную между индуктором и реактором, и нагреваемый сыпучий материал Ω_5 .

Тепловая задача относительно неизвестного распределения температуры T представляется следующим уравнением:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot \lambda \nabla T = \begin{cases} Q, & \text{в области } \Omega_1, \\ 0, & \text{в областях } \Omega_3 - \Omega_5. \end{cases} \quad (7.6)$$

В области индуктора Ω_2 температура полагалась постоянной и равной 70°C .

Отметим также, что передачей тепла за счет конвекции и излучения пренебрегалось из-за относительно малого вклада этих механизмов по сравнению с передачей за счет теплопроводности.

В уравнении (7.6): ρ, C_p, λ – плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность материала соответствующей среды (средние значения в исследуемом температурном интервале); Q – средняя за период удельная мощность источника тепла, обуславливающая индукционный нагрев стенок реактора наведенными токами и определяемая формулой

$$Q = \frac{\dot{J} \cdot \dot{J}^*}{\sigma} = \omega^2 \sigma (\dot{A} \varphi \cdot \dot{A}^* \varphi), \quad (7.7)$$

где $\dot{J} = -j\omega\sigma\dot{A}\varphi$ – действующее значение плотности наведенного тока; $\dot{A}^*$ – комплексно-сопряженная величина магнитного потенциала.

Для тепловой задачи принималось граничное условие Неймана $\partial T / \partial r = 0$ на оси симметрии (граница OA), а на внешней границе расчетной области $ABCO$ (рис. 7.2 б) задавалась температура окружающей среды $T = T_0$.

Связанные задачи расчета электромагнитного поля (7.1), (7.2) и теплового поля (7.6) с учетом приведенных граничных условий и начальных условий вида $T|_{t=0} = T_0$, $\dot{A}\varphi|_{t=0} = 0$ решались совместно методом конечных элементов в вычислительной среде программы Comsol.

7.2.2. Анализ результатов расчета

Исходные данные. Электротепловые явления в индукционной системе зависят от геометрии, свойств системы, частоты питающего тока. Рассматривается случай, когда исследуемая индукционная установка работает на промышленной частоте 50 Гц. Размеры расчетной области $OABC$ (рис. 7.2): внешний радиус и высота соответственно равны 0,35 и 1,2 м. Время нагрева составляет $t_{кон} = 30$ мин. Температура окружающей среды $T_0 = 20^\circ C$.

Задавались следующие параметры реактора: длина $l_1 = 0,9$ м; наружный радиус $r_2 = 0,136$ м. Внутренний радиус r_1 варьировался в зависимости от выбираемой толщины стенки $\Delta = 16, 26, 36$ мм, тогда как величина зазора между реактором и индуктором оставалась постоянной $r_3 - r_2 = 0,04$ м. Отметим, что при изменении Δ изменяется также объем нагреваемого сыпучего материала. Электро- и теплофизические характеристики стального реактора: сопротивление при начальной температуре $T_0 = 20^\circ C$ $\rho_0 = 0,098 \cdot 10^{-6}$ Ом·м; температурный коэффициент сопротивления $\alpha = 0,0065 K^{-1}$; плотность $\rho = 7900$ кг/м³; теплопроводность $\lambda = 71$ Вт/(м·К); теплоемкость материала $c_p = 460$ Дж/(кг·К). Температура Кюри для стали принималась равной $T_K = 993$ К, что учитывалось при расчете магнитной проницаемости стального реактора $\mu(T)$.

Параметры многовиткового индуктора: размеры поперечного сечения – $0,02 \times 0,7$ м; наружный радиус $r_4 = 0,196$ м; число витков $w = 36$. Сопротивление индуктора принималось равным $R_{AC} = 1,1 \cdot R_{DC} = 6,8$ мОм, где R_{DC} – сопротивление индуктора на постоянном токе. Действующее напряжение источника питания $U = 110$ В.

В качестве нагреваемого материала, находящегося внутри реактора, выбирался песок с теплофизическими параметрами: $\rho = 1320$ кг/м³; $\lambda = 0,44$ Вт/(м·К); $c_p = 720$ Дж/(кг·К).

Основные расчетные характеристики индукционного нагрева. Для количественной оценки эффективности нагрева рассматривались следующие характеристики процесса, являющиеся медленно меняющимися функциями времени:

– действующее значение тока в индукторе $I(t)$ (рис. 7.3);

– активная мощность, потребляемая индукционной установкой от сети, $P(t) = \text{Re}(\dot{U} I^*)$ (рис. 7.4 а) и реактивная мощность (рис. 7.4 б) [15]; $Q(t) = \text{Im}(\dot{U} I^*)$;

– активная мощность, выделяемая в индукторе $P_1(t) = I^2 R_{AC}$ и в реакторе $P_2(t) = P(t) - P_1(t)$ (рис. 7.5);

– величина электрического КПД установки (рис. 7.6 а), определяемая по формуле $\eta = P_2(t) / P(t)$;

– коэффициент мощности (рис. 7.6 б) $\cos \varphi =$

$= P(t) / S(t)$, где $S(t) = \sqrt{P^2 + Q^2}$ – полная мощность установки.

Изменение всех характеристик во времени представлено на рис. 7.3–7.6 для случаев различной толщины стенки реактора Δ .

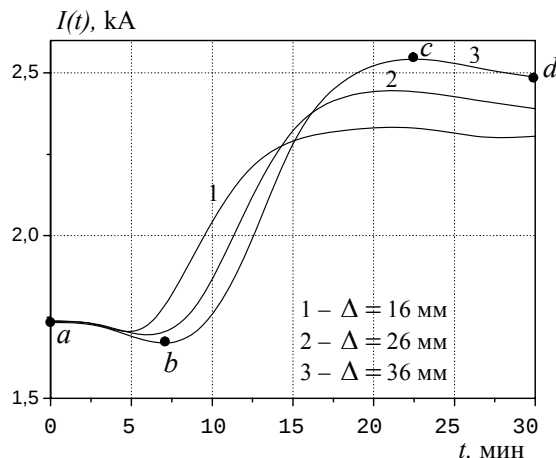


Рис. 7.3. Изменение во времени действующего значения тока в цепи индуктора при различной толщине стенки реактора Δ

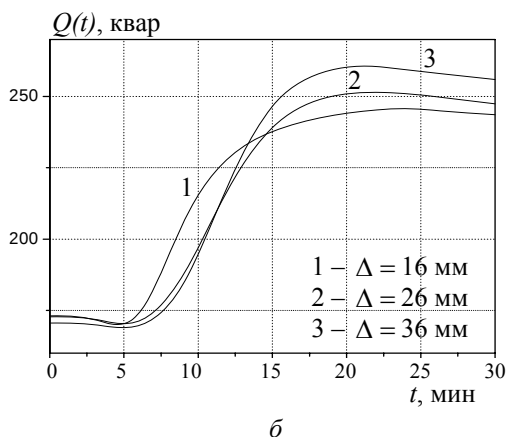
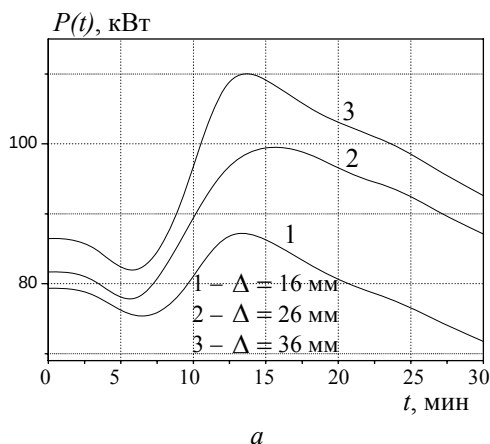


Рис. 7.4. Изменение во времени (а) активной и (б) реактивной мощностей, потребляемых установкой индукционного нагрева, при различной толщине стенки реактора Δ

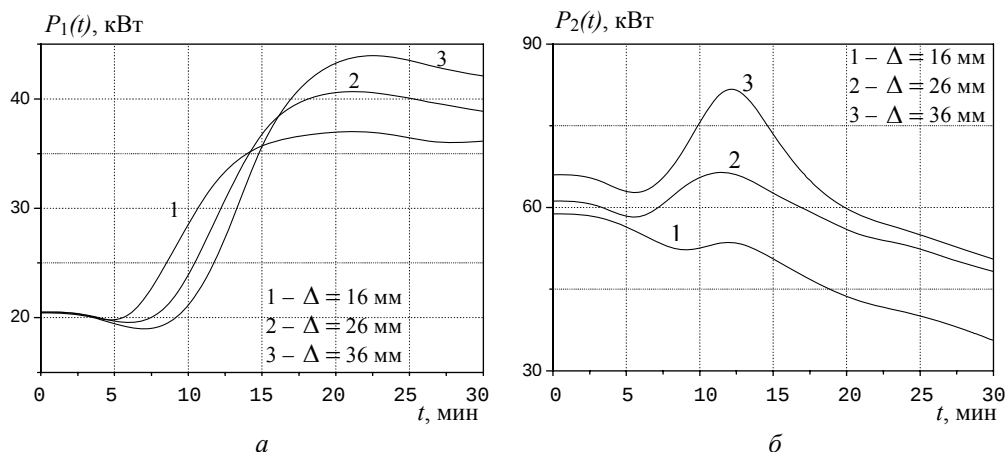


Рис. 7.5. Изменение во времени (а) мощности, выделяемой в индукторе, и (б) мощности, выделяемой в реакторе, при различной толщине его стенки Δ

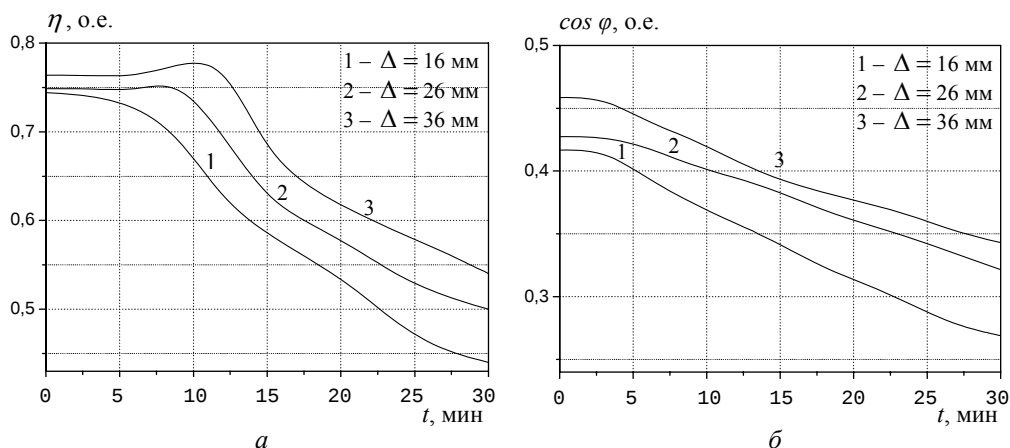


Рис. 7.6. Временные зависимости (а) КПД установки и (б) коэффициента мощности при различной толщине стенки реактора Δ

Анализ численных результатов. Картины распределения электромагнитного поля (изолинии векторного магнитного потенциала $|\dot{A}_\varphi|$) и теплового поля T в градации серого цвета в осевом сечении индукционной установки для четырех различных характерных моментов времени представлены на рис. 7.7 для толщины стенки реактора $\Delta = 36$ мм. Из приведенных результатов видно, что на начальном участке нагрева (рис. 7.7 а) силовые линии магнитного поля локализованы в тонком по-

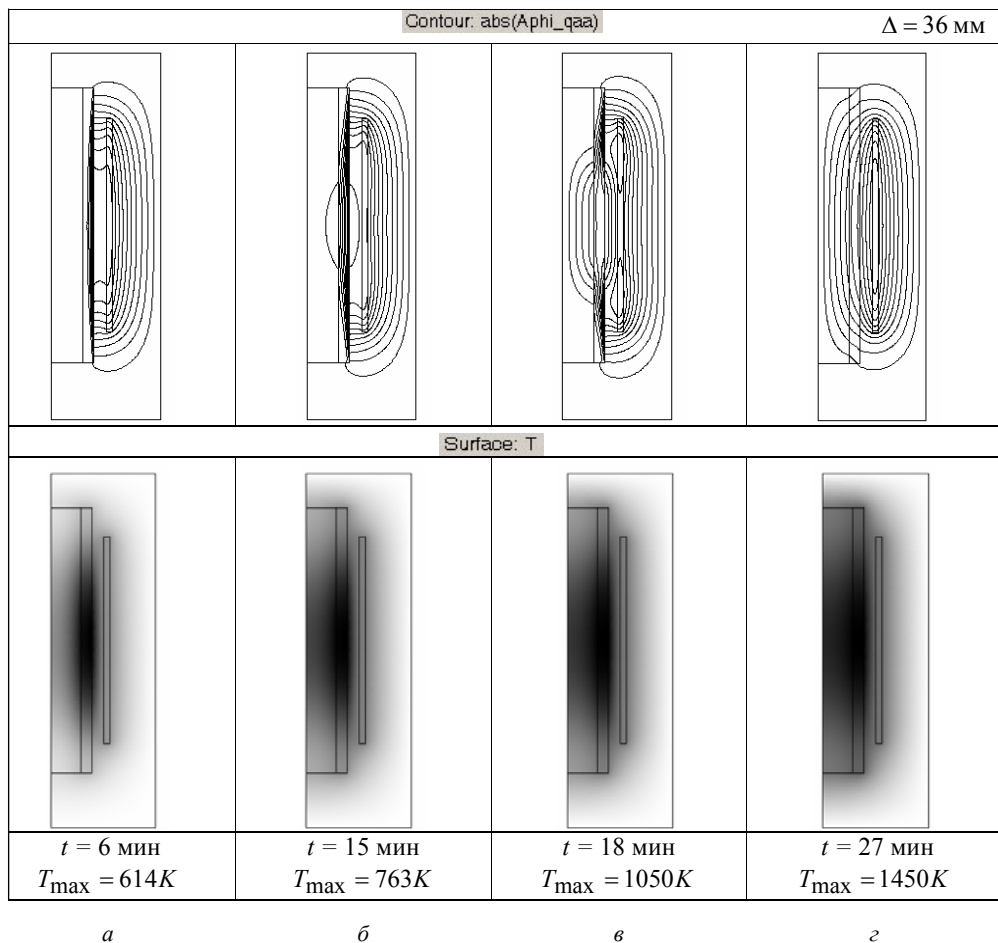


Рис. 7.7. Линии векторного потенциала магнитного поля $|\dot{A}_\varphi|$ (вверху) и распределение температурного поля T (внизу) в различные моменты времени t для реактора со стенкой толщиной $\Delta = 36 \text{ мм}$

верхностном слое стальной стенки реактора из-за проявления резкого скин-эффекта. При этом силовые линии магнитного поля в концевых зонах индуктора входят в глубь стенки практически под прямым углом, что отражает наличие ферромагнитных свойств стали. Далее по мере прогрева реактора величина электропроводности его материала уменьшается, что приводит к увеличению глубины проникновения магнитного поля (рис. 7.7 б). В этом случае максимальная температура стенки еще не достигает температуры Кюри – $T_K = 993 \text{ K}$ и стальная стенка характеризуется магнитными свойствами. По мере дальнейшего нагрева

(рис. 7.7 в) центральная область реактора прогревается до температуры выше T_K . Это приводит к резкому увеличению скин-слоя, превышающего толщину стенки, и к проникновению магнитного поля в центральной области во внутренний объем реактора. Отметим, что, начиная именно с этого момента времени, происходит электромагнитная обработка нагреваемого материала, помещенного в емкость реактора, т.е. нагрев, обусловленный воздействием магнитного поля. На заключительном временном интервале весь реактор нагревается до высокой температуры, превышающей T_K . При этом его стенка по всей высоте становится немагнитной и практически "прозрачной" для магнитного поля из-за низкой электропроводности нагретого до высокой температуры материала стенки (рис. 7.7 г).

Картины распределения температурного поля T (рис. 7.7 внизу) иллюстрируют практически равномерный нагрев стенки реактора по толщине и неравномерный по высоте, когда центральные участки реактора нагреваются сильнее, чем его крайние торцовые зоны.

Далее проанализируем динамику изменения полученных электрических и энергетических характеристик процесса индукционного нагрева.

Приведенные на рис. 7.3 данные представляют характер изменения во времени электрического тока в цепи индуктора при различной толщине стенки реактора. В кривых изменения тока можно выделить три характерных участка – ab , bc и cd (в качестве примера выбрана кривая 3, соответствующая толщине стенки $\Delta = 36$ мм). На начальном участке ab наблюдается небольшое уменьшение тока вследствие нагрева стенки и уменьшения ее электропроводности. На среднем участке bc происходит резкое увеличение тока после достижения температуры Кюри и ухудшения магнитных свойств стальной стенки. На заключительном участке cd так же, как и на ab , происходит уменьшение тока, связанное с дальнейшим нагревом стенки. Отметим, что на начальном участке величина тока практически не зависит от толщины стенки реактора из-за проявления резкого скин-эффекта. Вследствие меньшего электрического сопротивления реактора с более толстой стенкой на конечном участке такой реактор характеризуется протеканием большего тока в индукторе.

Следствием указанного характера изменения тока на участке перехода температуры через точку Кюри является резкое изменение во времени энергетических характеристик индукционной установки (см. рис. 7.4–7.6). Расчетные данные показывают, что установка с реактором,

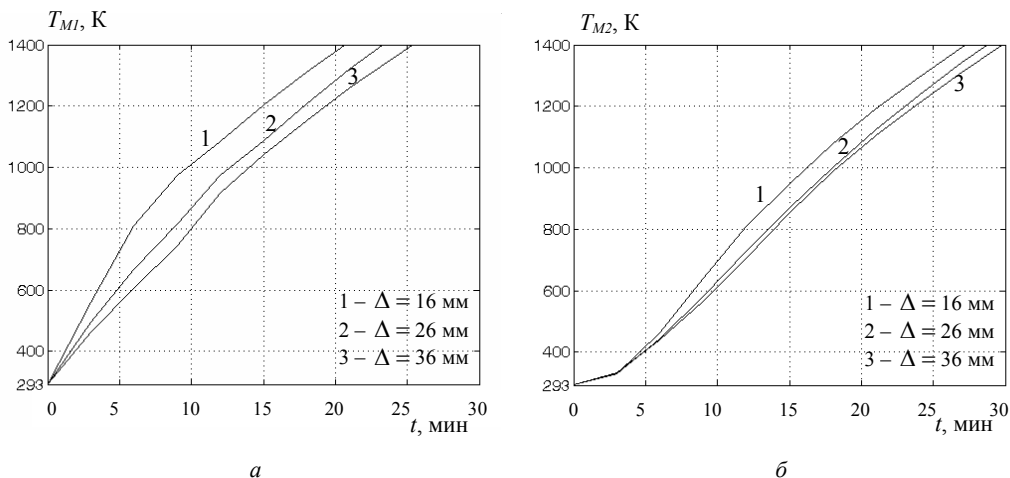


Рис. 7.8. Изменение во времени (а) температуры стенки реактора (в точке M_1 на рис. 7.2 б) и (б) температуры нагреваемого материала (в точке M_2) при различной толщине стенки реактора Δ

имеющим толстую стенку, обладает более высокими значениями КПД и коэффициента мощности в течение всего термического процесса (рис. 7.6).

Отметим, что полученные зависимости для тока $I(t)$ и мощности $P(t)$ согласуются с аналогичными кривыми, представленными в работе [5, рис. 2.1].

Динамика нагрева реактора (в точке M_1 на рис. 7.2 б) и сыпучего материала (в точке M_2 на рис. 7.2 б) отражена на рис. 7.8 а и б соответственно. Сравнив реакторы с различной толщиной стенки Δ , можно заключить следующее.

1. Реактор с более тонкой стенкой обеспечивает более быстрый нагрев обрабатываемого материала до заданной температуры (например, до 1000 °C), причем с меньшими затратами энергии (см. рис. 7.4 а, кривые 1 и 3).

2. Если рассматривается технологический процесс, для которого после нагрева материала до заданной температуры требуется поддерживать эту температуру в течение длительного промежутка времени при включенном индукторе, то в таком случае реактор с толстой стенкой позволяет реализовать режим нагрева более эффективно, т.е. с более высокими значениями КПД и коэффициента мощности (рис. 7.6).

3. В режиме нагрева материала до заданной температуры и последующего отключения индуктора реактор с более толстыми стенками

аккумулирует больше тепловой энергии и, следовательно, остывает более медленно. В результате этого процесс термической обработки сыпучего материала будет более продолжительным, что может оказаться предпочтительным для реализации конкретного технологического процесса.

Таким образом, каждый из рассмотренных вариантов индукционного нагрева реактора имеет определенные преимущества и недостатки. Выбор оптимальной толщины стенки реактора зависит от требуемого режима термической обработки сыпучего материала.

Анализ и компенсация реактивной мощности. Рассчитанные графические зависимости изменения во времени реактивной мощности $Q(t)$, циркулирующей в цепи источника питания, приведены на рис. 7.4 б. Здесь, так же как и на других рисунках, отражен случай реактора с различной толщиной стенки Δ . Данные рис. 7.4 б показывают, что на среднем участке перехода температуры стенки реактора через точку Кюри T_K происходит резкое увеличение Q (приблизительно в 1,6 раза), обусловленное потерей магнитных свойств стального реактора и проникновением магнитного поля в его внутренний объем.

В силу резкого изменения $Q(t)$ для строгой компенсации реактивной мощности в течение всего процесса нагрева (~30 мин) необходимо использовать подключаемую параллельно с индуктором конденсаторную батарею с автоматическим изменением величины емкости. При этом закон изменения емкости $C(t)$ во времени может быть определен из выражения $\omega C(t)U^2 = Q(t)$, где $Q(t)$ – расчетная зависимость, приведенная на рис. 7.4 б для выбранной толщины стенки реактора.

Наряду с таким сложным в реализации подходом, на практике часто используется более простой альтернативный вариант компенсации реактивной мощности (см. рис. 7.9), при котором одна из батарей конденсаторов C_1 включена в течение всего процесса нагрева, а другая C_2 подключается в момент времени t_n , соответствующий увеличению потребления реактивной мощности при переходе через точку Кюри. На рис. 7.9 L_y , R_y – параметры индукционной установки. С целью выбора оптимального момента времени подключения дополнительной емкости $t = t_n^*$ рассмотрим следующую оптимизационную задачу, предваряя ей некоторые пояснения.

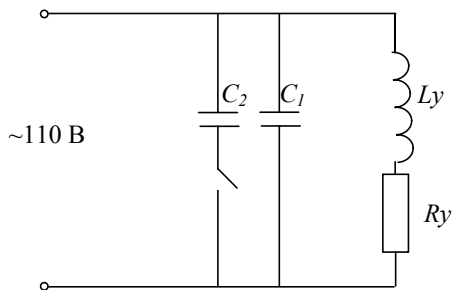


Рис. 7.9. Электрическая схема компенсации реактивной мощности индукционной установки с параметрами L_y , R_y . Дополнительная емкость C_2 подключается в момент времени t_n

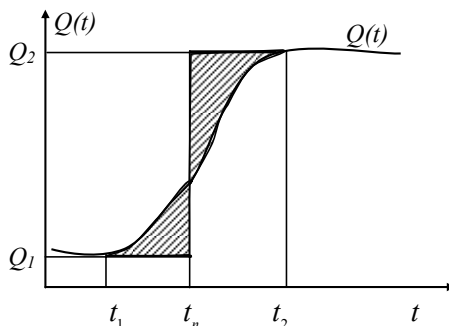


Рис. 7.10. К расчету величины некомпенсированной реактивной мощности индукционной установки

Выделим в расчетной кривой изменения реактивной мощности $Q(t)$, например, для случая толщины стенки $\Delta = 36$ мм, временной интервал $[t_1; t_2]$, характеризующийся резким увеличением $Q(t)$ (рис. 7.10). Определим оптимальный момент t_n^* подключения емкости C_2 из условия достижения минимальной величины площади заштрихованной области на рис. 7.10. Такое условие обеспечит наименьшее значение реактивной энергии, циркулирующей в цепи на интервале $[t_1; t_2]$, или же величины средней реактивной мощности на этом интервале. Полагаем, что на начальном участке, предшествующем моменту t_1 , и на конечном участке после момента времени t_2 достигается полная компенсация реактивной мощности с помощью емкостей C_1 и $C_1 + C_2$ соответственно. В таком случае подключение конденсатора C_2 именно в оптимальный момент t_n^* означает сведение к минимуму величины некомпенсированной реактивной энергии, циркулирующей в цепи источника в течение всего процесса нагрева.

Математически описанная задача формулируется следующим образом. Найти значение t_n , при котором целевая функция

$$F(t_n) = \int_{t_1}^{t_n} Q(t) dt - Q_1(t_n - t_1) - \int_{t_n}^{t_2} Q(t) dt + Q_2(t_2 - t_n) \rightarrow \min, \quad (7.8)$$

где $F(t_n)$ характеризует величину площади заштрихованной области на рис. 7.10, а зависимость $Q(t)$ определяется, например, кривой 3 на

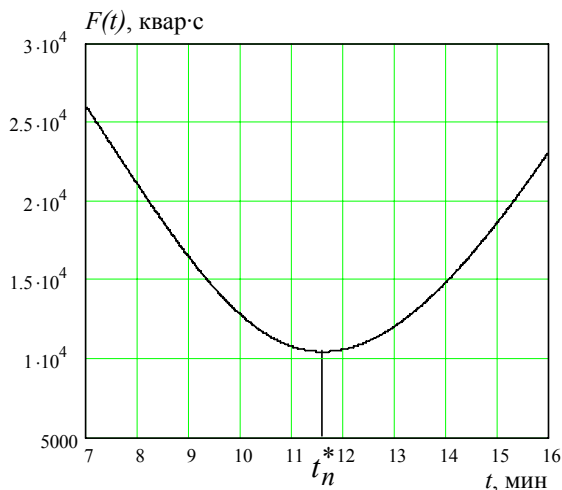


Рис. 7.11. Изменение во времени площади $F(t)$, рассчитываемой при минимизации реактивной мощности ($t_n^* = 11,6$ мин)

рис. 7.4 б, для которой постоянные величины в (7.8) принимают значения: $t_1 = 6,7$ мин; $t_2 = 20,1$ мин; $Q_1 = 170$ квар; $Q_2 = 260$ квар.

Расчетные значения минимизируемой функции $F(t_n)$, заданной выражением (7.8), получены путем вычислений в программном пакете MathCad и приведены на рис. 7.11. Видно, что минимум функции $F(t_n)$ достигается при $t_n^* = 11,6$ мин. Именно в этот момент

протекающего термического процесса в исследуемой индукционной установке целесообразно подключать дополнительную емкость C_2 .

Ориентируясь на практике по величине измеряемого тока в цепи индуктора (значение тока согласно рис. 7.3 в момент t_1 составляет 1,7 кА, а в момент $t_n^* - 1,8$ кА), можно заключить, что подключение дополнительной батареи конденсаторов C_2 целесообразно осуществлять в исследуемом случае во время, когда величина тока увеличивается в 1,06 раза по отношению к наименьшему значению.

7.3. Компьютерное моделирование процессов в индукционной установке на двух пространственных уровнях

7.3.1. Математическая модель электротепловой задачи

Предметом исследования остается установка индукционного нагрева, схематически показанная на рис. 7.1. Индуктор подключен к источнику переменного напряжения заданной частоты. Ток в индукторе неизвестен и подлежит определению в ходе решения полевой задачи.

При решении электротепловой задачи учитывается различие временных масштабов ("быстрый" динамический процесс воздействия электромагнитного поля и "медленный" инерционный процесс распространения тепла). Электромагнитная задача рассматривается для комплексных величин в частотной области – для векторного магнитного потенциала $\dot{A}_\varphi(r, z, j\omega, t)$ и величины тока в индукторе $\dot{I}(j\omega, t)$, амплитудные значения которых являются медленно меняющимися функциями времени t , а тепловая задача решается как нестационарная во временной области относительно температуры $T(r, z, t)$. Вследствие осевой симметрии активных элементов индукционной установки обе задачи формулируются как двумерные в цилиндрической системе координат rOz (на макроуровне).

Отметим, что постановка задачи на макроуровне аналогична электротепловой задаче, решаемой в разделе 7.2.

Рассмотрение процессов на макроуровне. Связанные электромагнитные и тепловые процессы в индукционной установке описываются следующей системой дифференциальных и алгебраических уравнений относительно трех неизвестных величин $\dot{\mathbf{A}} = (0, \dot{A}_\varphi, 0)$, $\dot{I}$, T .

1. Уравнения для векторного потенциала:

$$\begin{aligned} j\omega\sigma(T)\dot{\mathbf{A}} + \nabla \times ((\mu_0\mu(T))^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) &= 0, \quad \text{в области } \Omega_1; \\ \nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) &= \begin{cases} \dot{I}w/S, & \text{в области } \Omega_2, \\ 0, & \text{в области } \Omega_3. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Здесь $\sigma(T)$, $\mu(T)$ – электропроводность и относительная магнитная проницаемость материала стального реактора; ω – угловая частота; w – число витков в индукторе; S – площадь поперечного сечения индуктора; подобласти Ω_1 – Ω_3 показаны на рис. 7.12 а и соответствуют стенке реактора, индуктору и окружающей теплоизолирующей среде. При этом предполагается, что электромагнитные характеристики сыпучего материала слабо отличаются от характеристик воздуха.

2. Уравнение баланса напряжений, из которого находится ток в цепи индуктора $\dot{I}(j\omega, t)$ и которое совпадает с уравнением (7.2):

$$\dot{U} = \dot{I}R_{AC} + j\omega\dot{\Psi}, \quad (7.10)$$

где $\dot{\Psi} = \frac{w}{S} \int_S 2\pi r \dot{A}_\varphi dS$; $\dot{U}$ – заданное напряжение сети; $\dot{\Psi}$ – величина

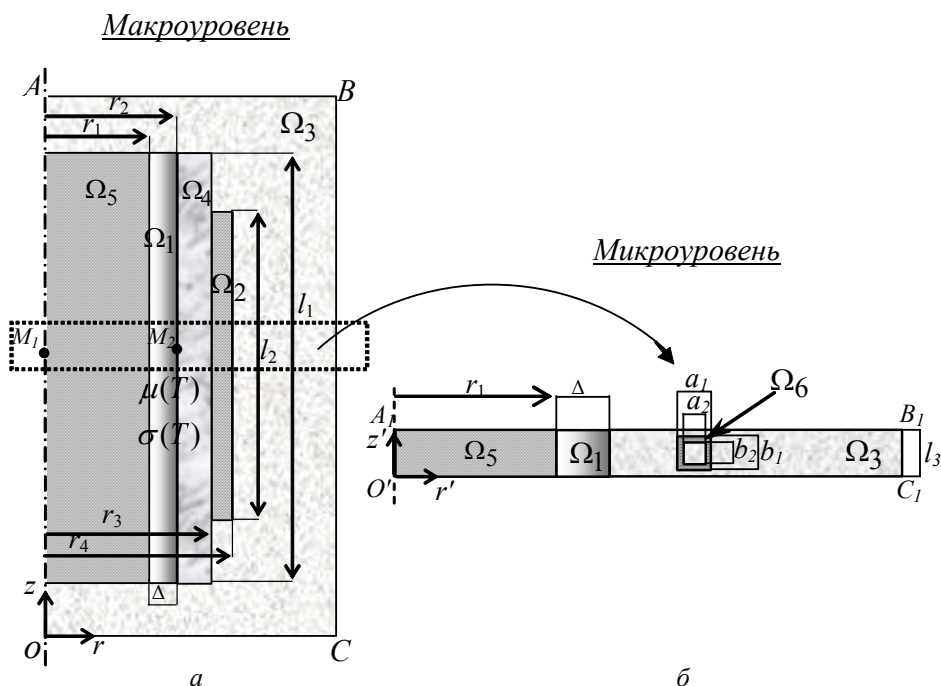


Рис. 7.12. Расчетные области для (а) электротепловой задачи, решаемой на макроуровне, и (б) электромагнитной задачи на микроуровне.

Здесь: Ω_1 – стенка реактора; Ω_2 – индуктор; Ω_3 – окружающая воздушная среда; Ω_4 – тепловая изоляция; Ω_5 – сыпучий материал; Ω_6 – виток индуктора

потокосцепления индуктора; R_{AC} – активное сопротивление индуктора, являющееся неизвестной и медленно изменяющейся во времени величиной; для ее определения далее рассматривается дополнительная полевая задача на микроуровне.

Температурные зависимости параметров материала реактора $\sigma(T)$ и $\mu(T)$ задавались выражениями (7.3) и (7.4) соответственно.

В качестве граничных условий для электромагнитной задачи определялись условие симметрии относительно оси OA (рис. 7.12 а) и условие магнитной изоляции на внешних границах: $\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{H}} = 0$, где $\dot{\mathbf{H}}$ – напряженность магнитного поля; $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали.

3. Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot \lambda \nabla T = \begin{cases} Q, & \text{в области } \Omega_1, \\ 0, & \text{в областях } \Omega_3 - \Omega_5 \end{cases} \quad (7.11)$$

и совпадает с уравнением (7.6).

В области индуктора Ω_2 , учитывая использование на практике системы водяного охлаждения, температура полагалась постоянной и равной 70°C .

В уравнении (7.11) величина Q определялась формулой (7.7).

Для тепловой задачи принималось граничное условие Неймана $\partial T / \partial r = 0$ на оси симметрии (граница OA), а на внешних границах расчетной области $ABCO$ (рис. 7.12 а) задавалась температура окружающей среды $T = T_0$.

Отметим, что передачей тепла за счет конвекции и излучения пренебрегалось из-за относительно малого вклада этих механизмов по сравнению с передачей тепла за счет теплопроводности.

Связанные задачи расчета электромагнитного поля (7.9), (7.10) и теплового поля (7.11) с учетом приведенных граничных условий и начальных условий вида $T|_t=0 = T_0$, $A_\varphi|_t=0 = 0$ решались совместно методом конечных элементов с использованием программы Comsol.

Электромагнитная задача на микроуровне. Для уточненного расчета электромагнитного процесса в массивных витках индуктора индукционной установки, представленной на рис. 7.12 а, осуществлялось решение дополнительной полевой задачи на микроуровне в окрестности одного центрального витка индуктора. При этом предполагалось, что такой проводник является представительным, т.е. его параметры приближенно характеризуют параметры индуктора в целом.

Расчетная область, содержащая единичный виток в центре индуктора, показана на рис. 7.12 б. Она включает следующие под-области: Ω_1 – стенка реактора; Ω_3 – окружающая воздушная среда; Ω_5 – сыпучий материал; Ω_6 – виток индуктора.

Электромагнитный процесс на микроуровне описывается системой дифференциальных уравнений в цилиндрической системе координат $r'O'z'$ для векторного потенциала $\dot{\mathbf{A}}' = (0, \dot{A}'_\varphi, 0)$:

$$\begin{aligned}
j\omega\sigma(T)\dot{\mathbf{A}}' + \nabla' \times ((\mu_0\mu(T))^{-1} \nabla' \times \dot{\mathbf{A}}') &= 0 \quad \text{в области } \Omega_1; \\
j\omega\sigma_\varepsilon \dot{\mathbf{A}}' + \nabla' \times (\mu_0^{-1} \nabla' \times \dot{\mathbf{A}}') &= \sigma_\varepsilon \dot{U}_\varepsilon / (2\pi r') \quad \text{в области } \Omega_6; \\
\nabla' \times (\mu_0^{-1} \nabla' \times \dot{\mathbf{A}}') &= 0 \quad \text{в областях } \Omega_3, \Omega_5
\end{aligned} \quad (7.12)$$

и интегральным выражением для неизвестного напряжения на витке $\dot{U}_\varepsilon$:

$$\dot{I} = \sigma_\varepsilon \int_{S_\varepsilon} \left(-j\omega \dot{A}'_\varphi + \dot{U}_\varepsilon / (2\pi r') \right) dS_\varepsilon, \quad (7.13)$$

где S_ε – площадь поперечного сечения единичного витка индуктора; σ_ε – электропроводность материала витка (меди), а ток в витке $\dot{I}$ равен току в цепи индуктора, определяемому из уравнения (7.10).

Отметим, что система (7.12) учитывает изменение электропроводности $\sigma(T)$ и магнитной проницаемости $\mu(T)$ материала реактора (стали) при его нагреве – согласно выражениям (7.3) и (7.4) соответственно.

Начальные и граничные условия в локальной области $O_I A_I B_I C_I$ (рис. 7.12 б) выбирались в соответствии с решением электромагнитной задачи на макроуровне. В частности, задавались условие симметрии относительно оси $O_I A_I$ и условие магнитной изоляции ($\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{H}} = 0$) на остальных границах.

В ходе решения электромагнитной задачи на микроуровне (7.12) находится распределение плотности тока по сечению единичного витка индуктора $\dot{J}' = -j\omega\sigma_\varepsilon \dot{A}'_\varphi + \sigma_\varepsilon \dot{U}_\varepsilon / (2\pi r')$ и затем рассчитывается мощность джоулевых потерь по формуле

$$P_{\text{Дж}} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \int_S |\dot{J}'|^2 2\pi r' dS.$$

С учетом этого выражения эквивалентное сопротивление индуктора с числом витков w определяется как

$$R_{AC} = w P_{\text{Дж}} / (\dot{I} \cdot \dot{I}^*).$$

Значение сопротивления, вычисляемое в каждый момент времени по последней формуле, используется в выражении (7.10) для решения электромагнитной задачи на макроуровне.

7.3.2. Решение электромагнитной задачи на двух пространственных уровнях

Численная реализация модели. Нелинейные электромагнитные задачи (7.9), (7.10) и (7.12), (7.13), а также нестационарная тепловая задача (7.11) решались численно методом конечных элементов, используя программу Comsol. В электромагнитных расчетах с повышением частоты питающего напряжения в области стенок реактора задавалась более мелкая сетка с тем, чтобы учесть концентрацию тока в приповерхностных зонах стенок.

Процедура решения задач на макроуровне предусматривала реализацию команды Restart для продолжения (возобновления) решения мультифизической электротепловой краевой задачи при использовании в качестве ее начальных условий предварительного решения отдельно стационарной электромагнитной модели. Это связано с необходимостью получения как можно более точного начального приближения для неизвестной величины $\dot{I}$ в уравнениях (7.9). При этом решение задач проводилось с малым шагом по времени.

Для улучшения сходимости решения нелинейной и нестационарной задач выбиралась "слабая" форма записи дифференциальных уравнений в частных производных (weak form). Это обеспечивало возможность совместного решения дифференциального уравнения (7.9) и интегрального соотношения (7.10).

Стационарная электромагнитная модель на микроуровне (7.12), (7.13) представлялась в коэффициентной форме (coefficient form) записи уравнений и использовала данные решения задач на макроуровне, в частности, температуру стенок реактора T_p и ток в цепи $\dot{I}$, что было необходимым для реализации зависимостей $\sigma(T)$, $\mu(T)$ для стали, а также расчета эквивалентного сопротивления индуктора R_{AC} для его задания в формуле (7.10) на каждой следующей итерации решения задач. Вместе с тем комплексное значение напряжения $\dot{U}_e$ в правой части уравнения, записанного для единичного витка индуктора в системе (7.12), определялось по значению тока в индукторе $\dot{I}$.

Уточненное значение сопротивления R_{AC} находилось повторным последовательным решением задач на макроуровне и микроуровне при выборе согласованных исходных данных. В результате трех итераций решения задач на двух пространственных уровнях достигалась схо-

димостью с результатом по анализу локальной полевой задачи. Алгоритм расчета сопротивления R_{AC} приводится далее.

Таким образом, решение задачи на микроуровне (в объеме одного витка) обеспечивает определение эквивалентного сопротивления индуктора, которое затем используется в задаче на макроуровне для расчета тока в индукторе и других зависящих от тока характеристик нагрева. При этом в задаче на макроуровне геометрия индуктора рассматривается упрощенно, без детализации витков индуктора.

Исходные данные для модельных расчетов. Электротепловые процессы в индукционной системе зависят от геометрии, свойств системы, параметров индуктора и частоты питающего напряжения.

Рассматриваются случаи, когда исследуемая индукционная установка работает на промышленной частоте 50 Гц, а также на частотах $f = 400$ и 1000 Гц. Размеры расчетной области $OABC$ (рис. 7.12 а): внешний радиус и высота соответственно равны 0,35 и 1,2 м. Время нагрева составляет $t_{кон} = 30$ мин. Температура окружающей среды $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

В качестве параметров реактора, индуктора и нагреваемого материала (песка) использовались данные, приведенные в разделе 7.2. В дополнение к ним сопротивление индуктора для всех значений частоты f на первой итерации решения электромагнитной задачи принималось равным $R_{AC} = 1,1 \cdot R_{DC} = 6,8$ мОм (R_{DC} – сопротивление индуктора на постоянном токе). Затем это значение уточнялось. Характерные значения $R_{AC} / R_{DC} = 1,09; 2,27; 3,59$ для частоты $f = 50; 400; 1000$ Гц соответственно. Действующее напряжение источника питания принималось равным $U = 110; 280; 470$ В при частоте $f = 50; 400; 1000$ Гц соответственно. Выбор различных значений U связан с условием достижения температуры нагреваемого материала выше 1000°C в течение заданного времени $t_{кон}$.

Геометрия единичного массивного витка индуктора (рис. 7.12 б): $a_1 = 16$ мм, $a_2 = 8,4$ мм, $b_1 = 18$ мм, $b_2 = 10,4$ мм. Зазор между витками – 3 мм. Ширина расчетной области для микрозадачи $l_3 = 21$ мм, остальные размеры (r_1 , Δ , длина отрезка O_1C_1) соответствуют размерам макрозадачи (рис. 7.12 а).

Расчетные характеристики индукционного нагрева. Эффективность нагрева в исследуемой индукционной установке может быть оценена с помощью следующих характеристик:

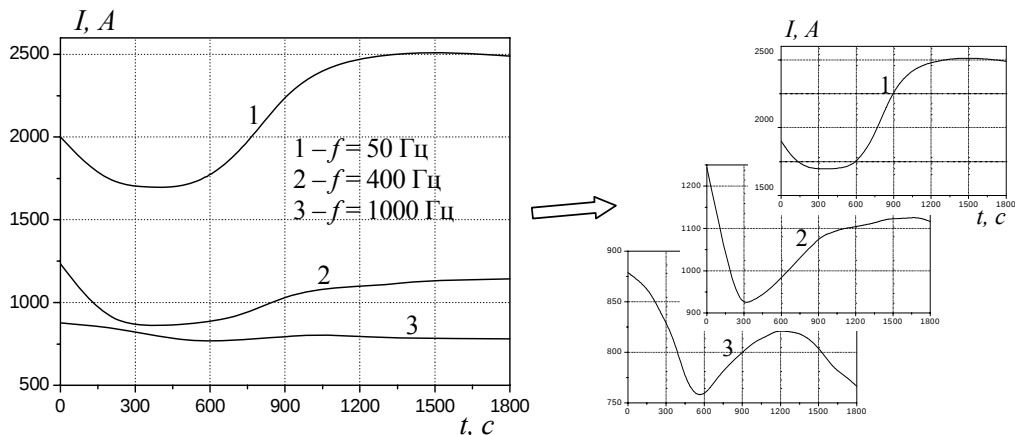


Рис. 7.13. Изменение во времени действующего значения тока I в цепи индуктора при различной частоте питающего напряжения f

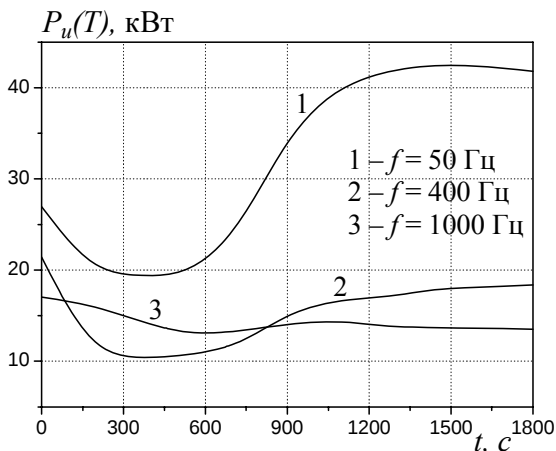


Рис. 7.14. Изменение во времени мощности, рассеиваемой в индукторе при различных значениях частоты напряжения f

- действующее значение тока в индукторе $I(t)$ (рис. 7.13);
- активная мощность, рассеиваемая в индукторе, $P_u(t) = I^2 R_{AC}$ (рис. 7.14);
- электрический КПД установки (рис. 7.15 а), определяемый по формуле $\eta = P_p(t) / P(t)$, где $P_p(t) = P(t) - P_u(t)$ – активная мощность, выделяемая в реакторе, $P(t) = \text{Re}(\dot{U} \cdot I^*)$ – активная мощность, потребляемая всей установкой [15];

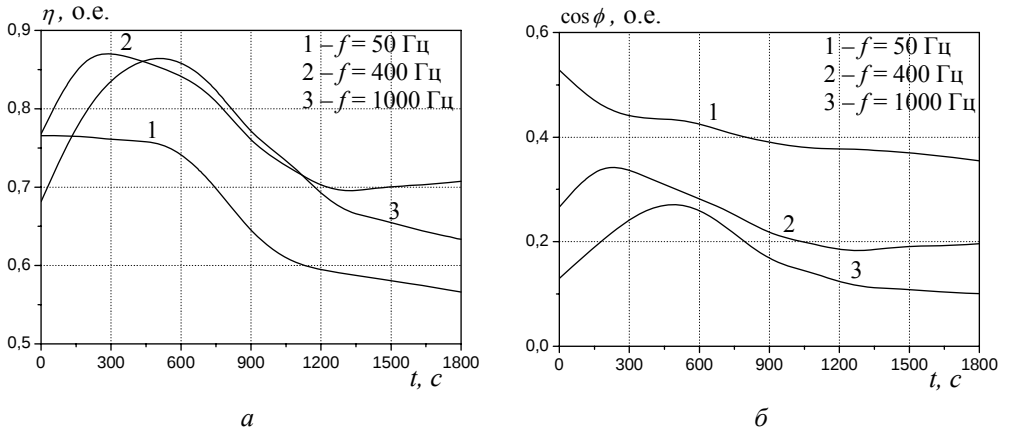


Рис. 7.15. Временные зависимости (а) КПД установки и (б) коэффициента мощности при различной частоте напряжения f

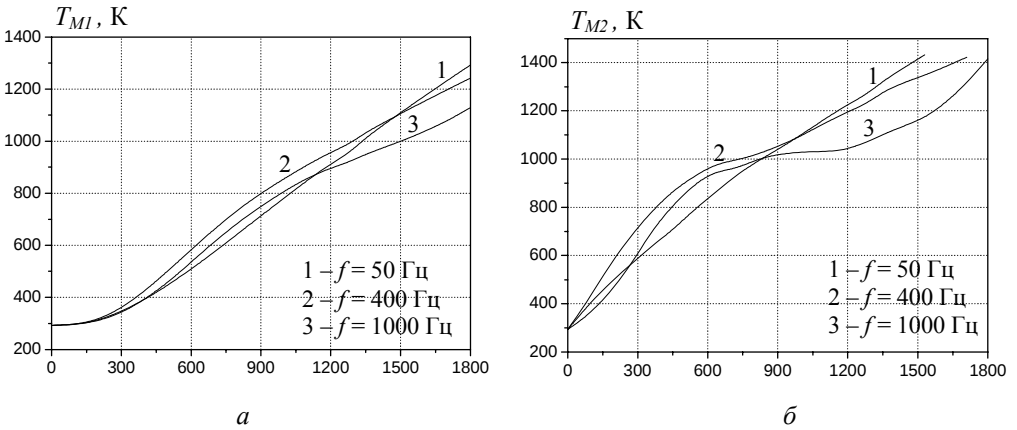


Рис. 7.16. Изменение во времени (а) температуры нагреваемого материала (в точке M_1 , рис. 7.12 а) и (б) температуры стенки реактора (в точке M_2) при различной частоте f

- коэффициент мощности (рис. 7.15 б) $\cos \phi = P(t)/S(t)$, где $S(t)$ – полная мощность установки, определяемая с учетом активной и реактивной мощностей согласно данным работы [15];
- изменяющаяся во времени температура T нагреваемого материала и стенки реактора в характерных точках (рис. 7.16).

7.3.3. Результаты компьютерного моделирования

Динамика изменения электрического тока в цепи индуктора при различной частоте источника питания отображена на рис. 7.13. Здесь же справа эти зависимости показаны в увеличенном масштабе, чтобы продемонстрировать одинаковый характер изменения тока при различной частоте. На начальном интервале нагрева ток в индукторе снижается из-за нагрева стенок реактора и уменьшения их электропроводности. Дальнейшее возрастание тока вызвано потерей магнитных свойств стенок реактора при нагреве выше температуры Кюри. Более детальное объяснение причин такого изменения тока дано в разделе 7.2 и работах [16, 17].

Энергетические характеристики рассматриваемой установки показаны на рис. 7.14 и 7.15. Характер изменения мощности, рассеиваемой в индукторе, повторяет характер изменения тока в индукторе (рис. 7.13). Некоторое отличие заключается лишь в том, что, несмотря на меньший ток при частоте 1000 Гц (в сравнении с $f = 400$ Гц, кривые 3 и 2 на рис. 7.13), потери при $f = 1000$ Гц на начальном интервале оказываются выше (рис. 7.14) из-за более высокого значения эквивалентного сопротивления индуктора. Величина КПД установки при переходе к более высокой частоте по отношению к промышленной в целом возрастает, что подтверждают данные рис. 7.15 а. В то же время величина $\cos \varphi$ уменьшается вследствие увеличения реактивного сопротивления установки, прямо пропорционального частоте (рис. 7.15 б).

Динамика нагрева стенок реактора и сыпучего материала, заполняющего его внутренний объем, показана на рис. 7.16. На более низкой частоте реактор и материал нагреваются до заданной температуры (1200–1400 К) несколько быстрее.

Характерная картина распределения температурного поля T при частоте $f = 50$ Гц в момент времени $t = 1800$ с показана на рис. 7.17. Максимальная температура реализуется в центральной части стенки реактора.

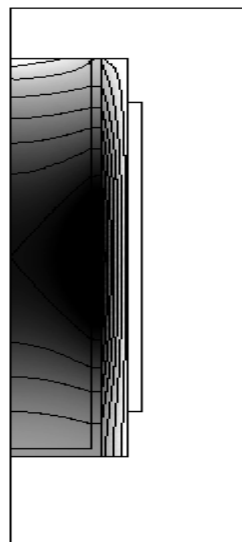


Рис. 7.17. Изолинии температурного поля в нагреваемой емкости при $f = 50$ Гц в момент времени $t = 1800$ с ($T_{\max} = 1584$ К)

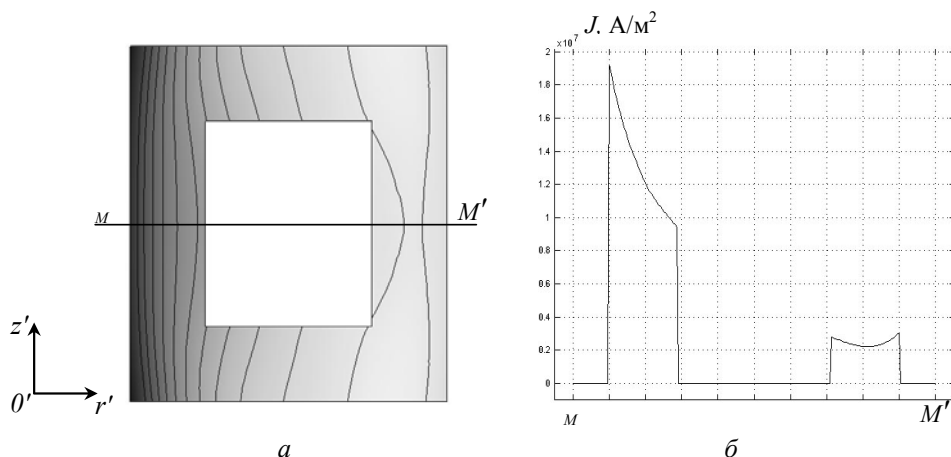


Рис. 7.18. Картина распределения плотности тока в сечении единичного витка индуктора (а) и плотность тока вдоль центральной линии MM' (б) при частоте $f = 400$ Гц в момент времени $t = 1260$ с

Наиболее нагретый материал находится в зоне, прилегающей к стенке.

Расчетные зависимости на рис. 7.18–7.20 отражают результаты решения полевой задачи (7.12), (7.13) на микроуровне.

Распределение плотности тока по сечению единичного витка индуктора и вдоль его центральной линии при частоте $f = 400$ Гц представлено на рис. 7.18 и иллюстрирует существование скин-эффекта во внутренней области витка. Неоднородность в распределении тока и его концентрация в приповерхностных областях витка с ростом частоты проявляются в большей степени.

В работе выполнялся расчет зависящего от частоты эквивалентного сопротивления индуктора для двух случаев: при отсутствии реактора (для уединенного индуктора) – $R_{AC}^{(0)}$ и при наличии стального реактора – R_{AC} с целью сравнения значений этих сопротивлений. Изменение эквивалентного сопротивления уединенного индуктора $R_{AC}^{(0)}$ от частоты показано на рис. 7.19. Видно, что значительное проявление скин-эффекта наблюдается при $f \geq 400$ Гц, когда $R_{AC}^{(0)} \approx 1,8R_{DC}$, где R_{DC} – сопротивление индуктора при постоянном токе. Временные зависимости эквивалентного сопротивления индуктора с учетом реактора для различных значений частоты f показаны на рис. 7.20.

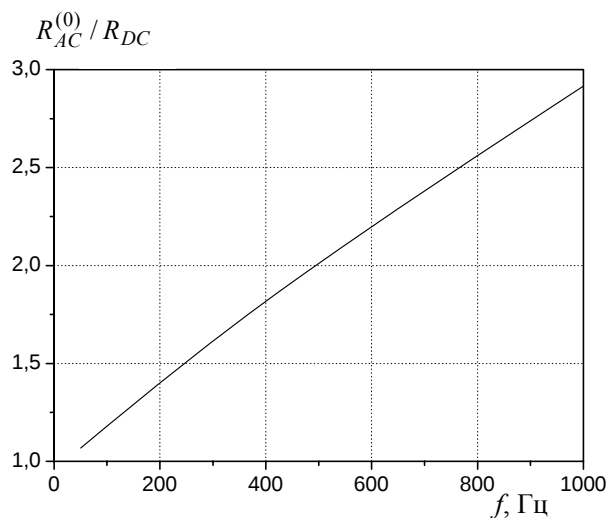


Рис. 7.19. Зависимость от частоты f эквивалентного сопротивления индуктора без учета заготовки (в долях от R_{DC})

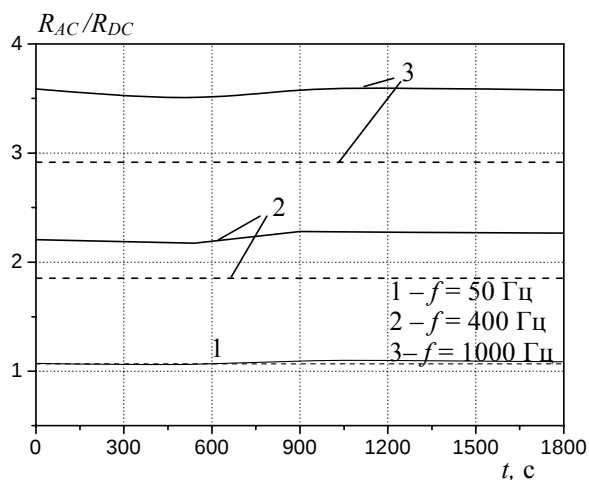


Рис. 7.20. Изменение во времени эквивалентного сопротивления индуктора при наличии заготовки (в долях от R_{DC}) для различных значений частоты f . Пунктирные линии соответствуют случаю отсутствия заготовки

Результаты рис. 7.20 иллюстрируют два обстоятельства. Во-первых, эквивалентное сопротивление индуктора слабо изменяется во времени, и, во-вторых, с ростом частоты влияние магнитного поля, источником которого являются токи в стенках реактора, на эквивалентное сопротивление индуктора усиливается. Сравнив значения эквивалентного сопротивления уединенного индуктора $R_{AC}^{(0)}$ (пунктирные линии) и индуктора с учетом реактора R_{AC} (сплошные линии), можно заключить следующее. При $f > 400$ Гц, что соответствует толщине скин-слоя в медном витке $\delta = 3,7$ мм, величина $R_{AC} \geq 1,22 \cdot R_{AC}^{(0)}$. Это значит, что для данной установки при рабочей частоте $f > 400$ Гц целесообразно решать электротепловую задачу именно по предложенной методике на двух пространственных уровнях. Для низкой частоты ($f < 400$ Гц) эквивалентное сопротивление индуктора может быть рассчитано для случая уединенного индуктора и затем использовано при решении электротепловой задачи только на макроуровне. При этом ошибка в определении R_{AC} не превысит 20 % от реального значения.

Полученные в данной главе результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Выполнено компьютерное моделирование и анализ электротепловых процессов, протекающих при индукционном нагреве стального тонкостенного реактора, внутренний объем которого заполнен сыпучим материалом. Исследованы динамика нагрева реактора, включая переход через температуру магнитных фазовых превращений – точку Кюри, и динамика нагрева сыпучего материала в диапазоне температуры от 20 до 1200 °С. Изучен характер медленного изменения во времени (по отношению к периоду) электромагнитных и энергетических характеристик установки. Показано их резкое изменение при переходе через точку Кюри. В частности, при питании индуктора от источника неизменного по амплитуде напряжения с частотой 50 Гц в момент перехода через точку Кюри наблюдается резкое (в 1,6 раза) увеличение тока в цепи индуктора и резкое изменение энергетических характеристик установки. Отмечено, что нагрев реактора с более толстыми стенками характеризуется более высокими значениями КПД и коэффициента мощности.

2. Для более полной компенсации реактивной мощности индукционной установки, резкоизменяющейся при переходе температуры реактора через точку Кюри, рассмотрена задача определения оптимального момента времени для подключения дополнительной конденсаторной

батареи. В результате решения оптимизационной задачи определено время подключения батареи, соответствующее минимуму некомпенсированной реактивной мощности в цепи источника питания.

3. Предложены математическая модель и методика уточненного расчета электромагнитных процессов в устройствах индукционного нагрева с учетом неравномерного распределения плотности тока в массивных витках индуктора. В основу методики положено компьютерное моделирование электромагнитных процессов на двух пространственных уровнях – в объеме всей установки (макроуровне) и в единичном массивном витке индуктора (микроуровне). Предложенный подход позволяет определить зависящую от частоты и изменяющуюся во времени величину эквивалентного сопротивления многовиткового индуктора с массивными витками с учетом скин-эффекта, эффекта близости в массивных проводниках и влияния магнитного поля, создаваемого токами в стенке нагреваемого реактора. Учет этих факторов позволяет с высокой достоверностью рассчитывать электротепловые процессы в индукционных установках при заданной величине напряжения источника питания.

4. Проведен компьютерный расчет динамики индукционного нагрева стального реактора и сыпучего материала, заполняющего объем реактора, при различных значениях частоты питающего напряжения и, как следствие, различной величине эквивалентного сопротивления индуктора.

5. Показана эффективность применения метода многомасштабного моделирования при резком скин-эффекте в массивных проводниках индуктора (для исследуемой установки при $f \geq 400$ Гц). Отметим также, что использование многомасштабного метода моделирования, предполагающего анализ электромагнитных процессов на двух пространственных уровнях, позволяет более детально исследовать закономерности протекания электротепловых процессов в индукционной установке, определить оптимальные значения частоты и таких параметров установки, как число витков и размеры медной шины индуктора.

ГЛАВА 8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАГНИТНЫХ НАНОЧАСТИЦ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ДЛЯ БИМЕДИЦИНСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

8.1. Применение магнитных наночастиц в биомедицине

В последние годы в биотехнологии интенсивно развиваются новые междисциплинарные направления исследований, базирующиеся на современных знаниях в области физики, электродинамики, гидродинамики, а также на новейших достижениях в области нанотехнологии и многофункциональных наноструктурных материалов. Целью проведения таких исследований является создание и практическое использование наноразмерных частиц и наноструктур из таких частиц, способных оказывать терапевтическое воздействие на биологические системы вплоть до клеточного и молекулярного уровней [1–3].

Интерес биологов и медиков к наноматериалам обусловлен следующими обстоятельствами.

1. За последнее десятилетие разработаны нанотехнологии получения биосовместимых наноразмерных частиц (с размерами от 10 до 100 нм), способных взаимодействовать с биологическими объектами на клеточном и молекулярном уровнях.

2. При рассмотрении материала на наноразмерном уровне наблюдается качественное изменение ряда его свойств, в том числе существенно меняются магнитные свойства. Ультрадисперсные магнитные наночастицы обладают ферро- и суперпарамагнитными свойствами. Суперпарамагнетики проявляют магнитные свойства только при наложении внешнего магнитного поля, ферромагнетики имеют постоянный

средний магнитный момент и характеризуются более сильными магнитными свойствами [4, 5]. К примеру, использование суперпарамагнитных частиц необходимо, чтобы избежать агрегирования частиц после прекращения воздействия внешнего магнитного поля.

3. Посредством наложения внешнего магнитного поля возможны бесконтактное управление движением и удержание в целевой области обладающих магнитными свойствами наноразмерных частиц, содержащих лекарственные или контрастирующие вещества.

4. Магнитные частицы, нагреваясь при наложении внешнего высокочастотного магнитного поля, способны выделять тепловую энергию в окружающую их биологическую среду. Количественный анализ нагрева суперпарамагнитных наночастиц в переменном магнитном поле рассмотрен Розенцвейгом [6]. Такое явление нагрева магнитных частиц используется для реализации механизма выделения лекарственных веществ с поверхности частиц в окружающую биологическую среду и для осуществления гипертермии (абляции) живых тканей [7].

5. Магнитные наночастицы могут быть визуализированы в биологических организмах и выступать в качестве флуоресцентных маркеров (к примеру, суперпарамагнитные наночастицы используются при магнитной резонансной томографии). Это свойство позволяет также контролировать степень точности локализации и аккумуляции наночастиц в заданной области живых тканей. Успех визуализации частиц зависит от контрастных свойств используемых материалов и чувствительности регистрирующей аппаратуры.

В биомедицинских приложениях под наночастицами понимаются биологически совместимые частицы, состоящие из макромолекулярного материала со стабильными физико-химическими свойствами, в состав которого внедрены лекарственные или контрастные вещества. Широкое применение магнитных наночастиц в области биомедицины обусловлено следующими обстоятельствами [1, 4, 8–10].

Во-первых, магнитные частицы имеют контролируемые малые размеры (до 10 нм), которые меньше размеров биологической клетки (10–100 мкм) или вируса (20–450 нм). Это позволяет им проникать внутрь клетки (или вируса) и воздействовать непосредственно на внутриклеточные структуры. Во-вторых, магнитные наночастицы могут воздействовать на уровне тканей, на уровне биологических клеток, а также быть поглощаемы клетками. В-третьих, наночастицы, выполненные из магнитного материала, обладают хорошими магнитными свойствами и испытывают силовое воздействие со стороны внешнего неоднородного магнитного поля. Это позволяет дистанционным бесконтакт-

ным способом управлять движением таких частиц в водных растворах и биологических системах и, в частности, повышать их концентрацию непосредственно в целевых зонах пораженных биологических органов. В-четвертых, магнитные частицы, находящиеся в потоке крови, при наложении внешнего магнитного поля способствуют повышению эффективной вязкости крови и принципиально могут привести к возникновению "управляемых" тромбов в венах и капиллярах, питающих раковые клетки. Это позволяет реализовать управляемый физический эффект блокирования кровоснабжения, например, в пораженных тканях. Основанный на таком физическом эффекте способ терапии опухоли в настоящее время интенсивно изучается. В-пятых, магнитные частицы, находящиеся во внешнем высокочастотном магнитном поле, поглощают энергию поля, нагреваясь при этом сами и нагревая окружающие их ткани. Основанная на этом свойстве технология магнитной гипертермии в настоящее время активно исследуется для терапии опухолевых образований [11–13].

Такие уникальные свойства наночастиц, как высокая поверхностная энергия, изменение физико-химических свойств под действием физических полей, размеры, сопоставимые с биомолекулами, наличие магнитных свойств открывают перспективы применения нанопрепаратов в биологических исследованиях и в терапии различных заболеваний [14–16].

Нанопрепараты биомедицинского назначения создаются на основе соединений магнитных частиц с лекарственными или контрастирующими веществами, имеющими способность быть управляемыми с помощью магнитного поля.

Наиболее распространенными материалами для изготовления магнитных частиц являются оксиды железа. Их диаметр не превышает 10 нм. Характеризуются они низкой дисперсностью, обладают суперпарамагнитностью, высоким удельным поглощением энергии и большой намагнитченностью насыщения [17, 18]. К тому же такие материалы содержатся в живых организмах и близки по биологическим свойствам к тканям человека [19].

На основе магнитных наночастиц создаются магнитные жидкости (суспензии). Ключевые параметры поведения магнитных наночастиц в жидкостях обусловлены химией поверхностных явлений, составом, микроструктурой, формой и размером частиц, их магнитными свойствами (магнитный момент, остаточный магнетизм) [4, 20–22].

В настоящее время достигнуты немалые успехи в использовании магнитных наночастиц в таких двух основных областях биомедицин-

ского приложения [9, 16, 21, 23, 24]:

1) диагностика и средства медицинских исследований, что включает магниторезонансную томографию, магнитную биосепарацию (выделение и очистку биомолекул и клеток), флуорисцирование биомолекул, исследование молекулярного взаимодействия;

2) адресное терапевтическое воздействие, включая целевую доставку терапевтических молекул и магнитожидкостную гипертермию опухолевых образований.

Кроме указанных областей, магнитные наночастицы используются в обнаружении протеинов и болезнетворных микроорганизмов, в биоминерализации, при инженерии тканей, проведении цитологических исследований, трансфекции генов [2, 9].

Далее кратко рассмотрим основные области применения магнитных наночастиц в биомедицине.

Магнитоуправляемая магнитожидкостная гипертермия.

Магнитожидкостная гипертермия – это перспективный метод противоопухолевого лечения. Основан метод на 1) магнитоуправляемой локализации в зоне опухоли магнитных наночастиц и 2) явлении нагрева намагничивающихся сред (частиц вместе с тканями опухоли) в переменном высокочастотном магнитном поле. Принцип нагрева суперпарамагнитных частиц в переменном магнитном поле изложен в [6]. Механизмы нагрева частиц за счет потерь на гистерезис и релаксации Нееля исследованы в работах [17, 25]

В терапии с использованием метода магнитожидкостной гипертермии в опухоль вводят магнитные частицы и подвергают воздействию переменного магнитного поля. Частицы при этом нагреваются и нагревают заданную биологическую область до высокой температуры (42–46 °C), при которой раковые клетки погибают. В настоящее время этот метод успешно применяется в ходе клинических исследований [11, 12]. Для безопасного воздействия на биологические организмы выдерживаются допустимые диапазоны частоты и амплитуды магнитного поля: $f = 0,05\text{--}1,2$ МГц, $H = 0\text{--}15$ кА/м [7].

Основной трудностью реализации метода является обеспечение заданного локального равномерного нагрева зоны опухоли без разрушения близлежащих здоровых тканей. В связи с этим актуальным является изучение электротепловых процессов и динамики нагрева живых тканей с введенными в них наночастицами в условиях воздействия высокочастотного магнитного поля. Исследования в этом направлении проведены, например, авторами работ [11, 25, 26].

Адресная доставка. Перспективным направлением является использование магнитных частиц в качестве носителей в системах целевой адресной доставки лекарственных препаратов к пораженным органам или клеткам, в качестве контрастных агентов для диагностики, например, при магниторезонансной томографии [3, 4, 9]. Для магнитной томографии используются суперпарамагнитные частицы, усиливающие радиочастотный сигнал, в ответ на который воспроизводится контрастное изображение сканируемого участка биологической области.

Основой адресной доставки является способность наночастиц с включенными в их состав лекарственными или флуоресцентными веществами перемещаться и избирательно концентрироваться под воздействием внешнего магнитного поля в заданной области. Физические принципы адресной доставки детально изложены в работах [4, 21].

Важными задачами этого направления являются использование такого уровня внешнего магнитного поля, который не оказывает вредного влияния на организм и вместе с тем обеспечивает возможность локализации и удержания частиц в заданной области.

В данной главе методом компьютерного моделирования исследуются особенности движения магнитных наночастиц в потоке биологической жидкости и их поведение вблизи магнитных систем, создающих силовое воздействие. В статье [27] такие задачи при условии использования системы на постоянных магнитах решаются экспериментальным методом.

Магнитная биосепарация. Магнитная сепарация в последнее время находит широкое применение в таких областях, как молекулярная и клеточная биология, микробиология, биохимия. В основе магнитной биосепарации лежит возможность выделения из микрожидкостей с помощью сильно неоднородного магнитного поля достаточно большой напряженности малых слабوماгнитных объектов, включая частицы клеточных суспензий, определенные популяции клеток или зараженные эритроциты из цельной крови, микрообразцы костного мозга. Метод магнитной сепарации клеток и субклеточных структур, применяемый в медицине, основан на связывании выделяемых клеток с магнитными наночастицами и последующим воздействием неоднородного магнитного поля для извлечения этих наночастиц. Наряду с изучением закономерностей воздействия магнитного поля с учетом свойств магнитных наночастиц, актуальными задачами в области магнитной биосепарации являются разработка магнитных фильтров и изучение влияния магнитной восприимчивости клеток на процессы магнитофоретического движения наночастиц и клеток [28].

Физические принципы, устройства и применение магнитной сепарации описаны в ряде работ [28–31].

Инженерия тканей. Как отмечается в [4], магнитные наноразмерные частицы применимы для конструирования биологических тканей и органов. В таких технологиях магнитные наночастицы связываются либо с клеточной мембраной, либо с механочувствительными ионными каналами мембраны. При этом в результате воздействия переменного магнитного поля возникают биохимические реакции на уровне клеточных структур и проявляются межклеточные взаимодействия. При определенных условиях такие явления стимулируют рост тканей. Достигнутые успехи в этой области (реконструкция сосудистых, костных, хрящевых тканей) описаны в работах [4, 9].

Одним из ключевых вопросов при разработке ряда биомедицинских методов, среди которых адресная доставка лекарств и магнито-жидкостная гипертермия, является достижение в заданной области требуемой концентрации магнитных наночастиц, движущихся в потоке жидкости, за счет наложения внешнего неоднородного магнитного поля. Большую практическую важность представляет собой задача исследования количественных характеристик движения наночастиц в потоке жидкости при наложении внешнего магнитного поля – задача магнитофоретического движения наночастиц.

Использование магнитных наночастиц для биомедицинских исследований является междисциплинарной задачей, для решения которой необходимо привлечение специалистов различного профиля – медиков, биологов, физиков, специалистов в области материаловедения и электродинамики. С точки зрения макроскопической электродинамики отметим следующие основные задачи, от решения которых в значительной мере зависит успешное применение магнитных наночастиц в биомедицине, в частности, в задачах управляемой доставки композиционных магнитных наночастиц к зоне опухоли и сепарации магнитных суспензий:

- 1) обеспечение эффективного силового воздействия магнитного поля на наночастицы;
- 2) исследование магнитофоретического движения магнитных наночастиц в жидких движущихся средах, а также в живых тканях при воздействии внешнего неоднородного магнитного поля.

Задачи эти являются разномасштабными и включают, по крайней мере, два пространственных уровня – макроуровень с характерным размером 0,1–1 м, на котором рассматривается магнитная система в целом, создающая неоднородное магнитное поле и силовое воздействие на

магнитные наноразмерные частицы, и микроуровень с характерным размером 10 нм – 1 см, где исследуется характер магнитоуправляемого движения наночастиц в потоке биологической жидкости, в частности, в потоке крови при рассмотрении процессов в артериях, венах и капиллярах.

В данной главе рассматриваются некоторые из указанных задач. Исследуются различные типы магнитных систем, предназначенных для создания неоднородного магнитного поля. Выполняется анализ силы, действующей на магнитные частицы, и рассчитывается магнитофоретическое движение наночастиц в потоке жидкости под воздействием магнитного поля. При этом движение частиц изучается с двух точек зрения. Согласно первой – континуальной точки зрения, совокупность частиц рассматривается как непрерывная движущаяся сплошная среда, которая характеризуется концентрацией частиц, являющейся непрерывной функцией пространственной координаты и времени. Согласно второй – корпускулярной точки зрения, исследуются траектории движения точечных частиц в магнитном поле без учета их взаимодействия друг с другом. Отметим, что, по сравнению с континуальным рассмотрением, анализ траекторий движения отдельных частиц требует меньших затрат, однако его результаты справедливы лишь для случая малых концентраций частиц в биологических жидкостях или тканях.

8.2. Расчет величины магнитной силы, действующей на наночастицы

Рассмотрим магнитную суспензию, разбавленную до такой степени, что находящиеся в ней магнитные частицы можно считать не взаимодействующими друг с другом. Предположим, что эта суспензия помещена в неоднородное внешнее постоянное магнитное поле $\mathbf{B}_0$. Тогда на каждую магнитную частицу, обладающую магнитным моментом $\mathbf{m}$ и находящуюся в этом поле, действует магнитная сила, определяемая на основании следующего выражения [4, 32]:

$$\mathbf{F}_m = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0. \quad (8.1)$$

С целью конкретизации выражения для расчета этой силы рассмотрим далее магнитные частицы двух типов – многодоменные и однодоменные.

Многодоменные частицы. Магнитный момент многодоменной частицы может быть записан как $\mathbf{m} = V_p \mathbf{M}$, где V_p – объем частицы; $\mathbf{M}$ – намагниченность материала, из которого изготовлена частица. В

линейном приближении $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ (χ – магнитная восприимчивость материала частицы); $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля в объеме частицы.

Будем рассматривать случай, когда концентрация магнитных частиц в жидкости мала, а ее магнитная проницаемость мало отличается от проницаемости вакуума μ_0 . Тогда для магнитного поля в объеме частицы приближенно справедливо равенство $\mathbf{H} = \mathbf{B}_0 / \mu_0$, а отсюда $\mathbf{M} = \chi \mathbf{B}_0 / \mu_0$.

С учетом этого равенства выражение для магнитной силы (8.1) запишется в виде

$$\mathbf{F}_m = \frac{V_p \chi}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0. \quad (8.2)$$

Проведем следующие преобразования для случая постоянного магнитного поля, используя уравнение Максвелла $\nabla \times \mathbf{B}_0 = 0$ и математическое тождество из [33]:

$$\nabla(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_0) = 2\mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{B}_0) + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 = 2(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0. \quad (8.3)$$

Тогда выражение (8.2) для силы, действующей на многодоменные частицы в неоднородном магнитном поле, примет следующий вид:

$$\mathbf{F}_m = V_p \chi \nabla \frac{|\mathbf{B}_0|^2}{2\mu_0}. \quad (8.4)$$

Однодоменные частицы. Выражение (8.4) справедливо для силы, действующей на многодоменные частицы. Известно, что частицы, диаметр которых меньше некоторого критического значения, являются однодоменными [34]. К примеру, критический диаметр частиц из магнетита равен приблизительно 10 нм. Однодоменные частицы характеризуются собственным магнитным моментом m_p . При воздействии на такие частицы внешнего неоднородного поля $\mathbf{B}_0$ векторная величина их магнитного момента равна

$$\mathbf{m} = m_p \frac{\mathbf{B}_0}{|\mathbf{B}_0|}. \quad (8.5)$$

Здесь полагается, что магнитный момент частицы всегда направлен по полю $\mathbf{B}_0$, что справедливо для времени релаксации частицы $\tau \ll T$, где T – период изменения внешнего магнитного поля.

Подставляя выражение (8.5) в (8.1) и используя преобразования (8.3), получим выражение для силы, действующей на однодоменные частицы в неоднородном магнитном поле, вида

$$\mathbf{F}_m = m_p \nabla |\mathbf{B}_0|. \quad (8.6)$$

В дальнейшем будем рассматривать случай многодоменных частиц и использовать для расчета силы выражение (8.4).

Магнитная силовая функция. Выражение (8.4) для магнитной силы, действующей на многодоменные частицы, преобразуем к виду

$$\mathbf{F}_m = V_p \chi \nabla \frac{|\mathbf{B}_0|^2}{2\mu_0} = V_p \chi \mathbf{G}_B, \quad (8.7)$$

где

$$\mathbf{G}_B = \nabla \frac{|\mathbf{B}_0|^2}{2\mu_0}. \quad (8.8)$$

Здесь $\mathbf{G}_B$ – векторная величина, зависящая от пространственного положения точки поля и численно равная силе, действующей на частицу единичного объема и магнитной восприимчивости $\chi = 1$, помещенную в эту точку поля. Назовем ее магнитной силовой функцией магнитного поля.

Магнитная силовая функция $\mathbf{G}_B$ может рассматриваться как характеристика магнитной системы, создающей неоднородное магнитное поле в активной зоне. Зная в каждой точке значение и направление функции $\mathbf{G}_B$, можно сформулировать требования к оптимальной магнитной системе, предназначенной для управления движением магнитных наночастиц. Оптимальная система – это такая система, которая в заданной локальной области биологического объекта создает высокоградиентное магнитное поле, характеризующееся максимальным по модулю значением векторной силовой функции $\mathbf{G}_B$, и направление вектора $\mathbf{G}_B$ в этой области совпадает с заданным. Именно такая система позволяет обеспечить наибольшее силовое воздействие на наночастицы, что дает возможность осуществить бесконтактное управление их движением в живых организмах.

Для анализа и сравнения различных типов магнитных систем необходимо предварительно получить распределение магнитного поля в их активной зоне и затем вычислить и построить распределение магнитной силовой функции $\mathbf{G}_B$. Далее будет получено распределение $\mathbf{G}_B$ для нескольких конкретных типов магнитных систем.

8.3. Магнитное поле и магнитная силовая функция для различных типов магнитных систем

Для создания неоднородного магнитного поля в биологических тканях могут использоваться системы с постоянными магнитами, а также системы с катушками, запитанными постоянным или переменным током. Приведем далее основные дифференциальные уравнения для расчета поля и магнитной силовой функции таких магнитных систем.

Система с постоянными магнитами. Распределение магнитного поля в системе с постоянными магнитами и при отсутствии электрических токов описывается системой уравнений Максвелла в магнито-статическом приближении:

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = -\nabla \varphi_m, \quad (8.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (8.10)$$

где $\mathbf{B}$ – вектор магнитной индукции; $\mathbf{H}$ – вектор напряженности магнитного поля; φ_m – скалярный магнитный потенциал.

Используем уравнение состояния для постоянного магнита в виде

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} + \mathbf{B}_r, \quad (8.11)$$

где μ_r – относительное значение магнитной проницаемости материала магнита; $\mathbf{B}_r$ – остаточная магнитная индукция.

Из выражений (8.9)–(8.11) после простых преобразований получим следующее дифференциальное уравнение для расчета распределения скалярного магнитного потенциала в трехмерной области:

$$\nabla \cdot (\mu_0 \mu_r \nabla \varphi_m - \mathbf{B}_r) = 0. \quad (8.12)$$

После того как получено распределение скалярного магнитного потенциала, определим распределение векторов поля $\mathbf{H}$ с использованием выражения (8.9) и $\mathbf{B}$ согласно формуле (8.11). Затем решим дополнительную задачу расчета векторной силовой функции $\mathbf{G}_B$ согласно (8.8) и величины магнитной силы, действующей на магнитную частицу малых размеров по выражению (8.7).

Система катушек с током. Распределение магнитного поля в системе, содержащей в качестве источника магнитного поля катушку с током, описывается системой дифференциальных уравнений Максвелла, которая для случая векторного магнитного потенциала $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_0. \quad (8.13)$$

Предполагается, что для увеличения поля существует магнитопровод, характеризующийся магнитной проницаемостью μ_r , которая является нелинейной функцией магнитной индукции. В (8.13) вектор $\mathbf{J}_0$ обозначает плотность тока в сечении катушки (одной или нескольких в общем случае).

Результаты компьютерного моделирования. Для численного решения дифференциальных уравнений (8.12) и (8.13) в работе использовался метод конечных элементов, реализованный в пакете программ Comsol [35]. В качестве граничных условий на внешних границах расчетных областей задавалось условие магнитной изоляции. Моделировались магнитные системы следующих типов.

1. *Одиночный соленоид*, схематически показанный на рис. 8.1. Его характеристики: радиус соленоида – 15 мм, высота – 25 мм, толщина намотки – 4 мм, плотность протекающего тока – 10^7 А/мм². Результаты расчета магнитного поля соленоида и распределение силовой функции $\mathbf{G}_B$ представлены на рис. 8.2 *а* и *б* соответственно. Видно, что вектор силовой функции $\mathbf{G}_B$ направлен в сторону витков индуктора. Максимальная величина этого вектора локализована в угловой зоне индуктора и равна $|\mathbf{G}_B|_{\max} = 1,8 \cdot 10^5$ Н/м³. Как будет показано далее, в случае использования постоянных магнитов величина $|\mathbf{G}_B|$ достигает гораздо больших значений.

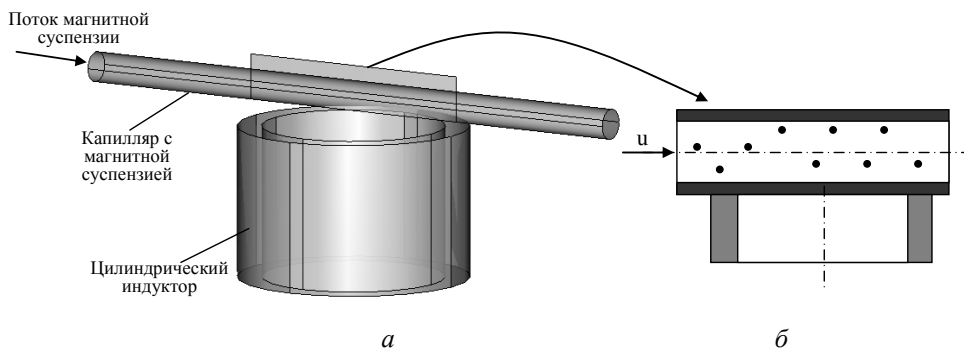


Рис. 8.1. Моделирование движения магнитных частиц в поле цилиндрического индуктора на двух пространственных уровнях – на уровне индуктора (*а*) и на уровне канала капилляра (*б*)

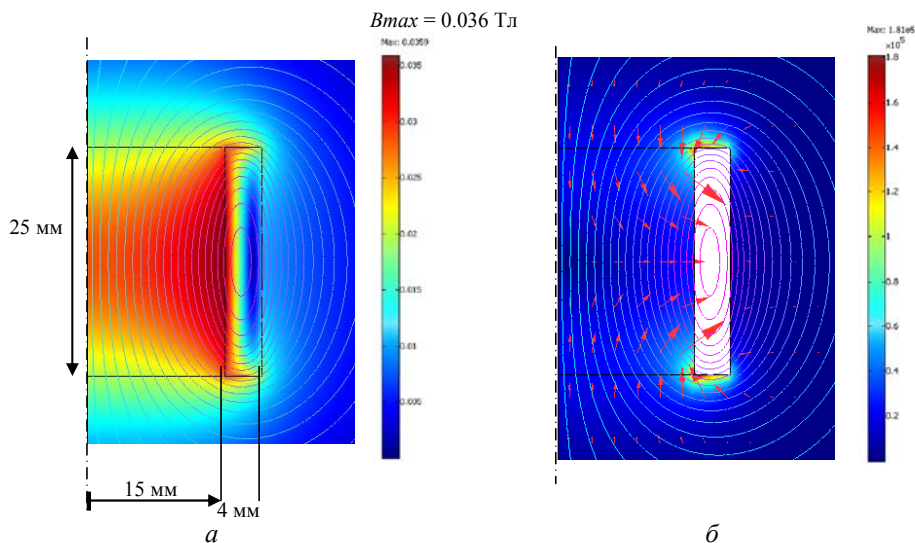


Рис. 8.2. Распределение в осевом сечении цилиндрического индуктора магнитной индукции в Тл (а) и векторной силовой функции G_B в H/m^3 (стрелками, в оттенках цвета показан модуль вектора) (б)

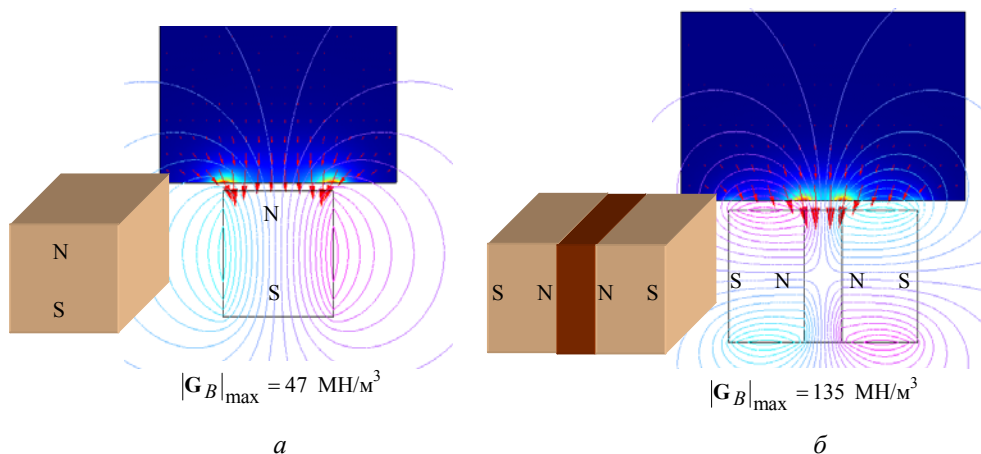


Рис. 8.3. Результаты расчета магнитного поля (в цвете и силовыми линиями) и векторной силовой функции G_B (стрелками) для двух типов магнитных систем: (а) для одиночного постоянного магнита; (б) для двух постоянных магнитов, разделенных магнитопроводом

2. *Простейшая система с одним или двумя постоянными магнитами.* Результаты расчета для двух таких систем показаны на рис. 8.3. Видно, что в случае применения двух постоянных магнитов с магнито-

проводом между ними, величина силовой функции G_B приблизительно в три раза выше, чем для случая одного магнита, и достигает значения $|G_B| = 1,35 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$.

3. *Ферромагнитная проволока во внешнем магнитном поле.* Система, состоящая из одной или целого ряда ферромагнитных проволок, расположенных во внешнем поперечном магнитном поле, составляет основу конструкции сепаратора магнитной жидкости [36], схематически показанную на рис. 8.4. На этапе проектирования такого сепаратора необходимо предварительно определить размеры активной зоны вблизи проволоки, где на магнитные наночастицы будет действовать значительная магнитная сила, влияющая на траекторию движения частиц. Для этого целесообразно использовать методы компьютерного моделирования.

Рассматривается случай, когда ряд периодически расположенных ферромагнитных проволок диаметром 2 мм находится в однородном поперечном магнитном поле 1 Тл, создаваемом магнитной системой (см. рис. 8.4). Так как структура проволок является, как правило, периодической, то для анализа поля (а также величины силы и траектории движения) достаточно рассмотреть элементарную ячейку в форме квадрата $10 \times 10 \text{ мм}$, показанную на рис. 8.4.

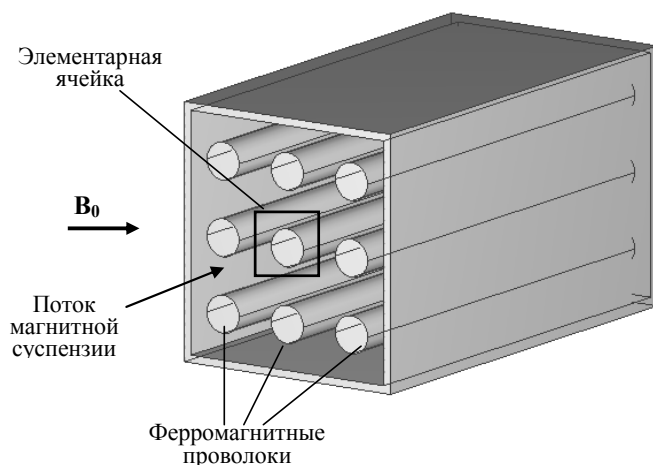


Рис. 8.4. Один из вариантов конструкции магнитного сепаратора с набором периодически расположенных ферромагнитных проволок

Результаты расчета магнитного поля и магнитной силовой функции в элементарной ячейке в окрестности ферромагнитной проволоки представлены на рис. 8.5. Видно, что существуют участки, расположенные сверху и снизу проволоки, на которых магнитные частицы отталкиваются от нее. На боковых участках наблюдается притяжение частиц к проволоке. На этих участках максимальное значение силовой функции $|\mathbf{G}_B|$ достигается на поверхности проволоки и составляет $3,07 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$. При удалении от поверхности значение этой функции резко падает.

Для количественной оценки характера затухания $|\mathbf{G}_B|$ на рис. 8.6 показано распределение модуля этого вектора вдоль горизонтальной оси x , проходящей через центр проволоки. Из анализа полученных данных следует, что уменьшение $|\mathbf{G}_B|$ в 10 раз по сравнению со значением на поверхности проволоки происходит на расстоянии $h = 0,75 \text{ мм} = 0,75 R$.

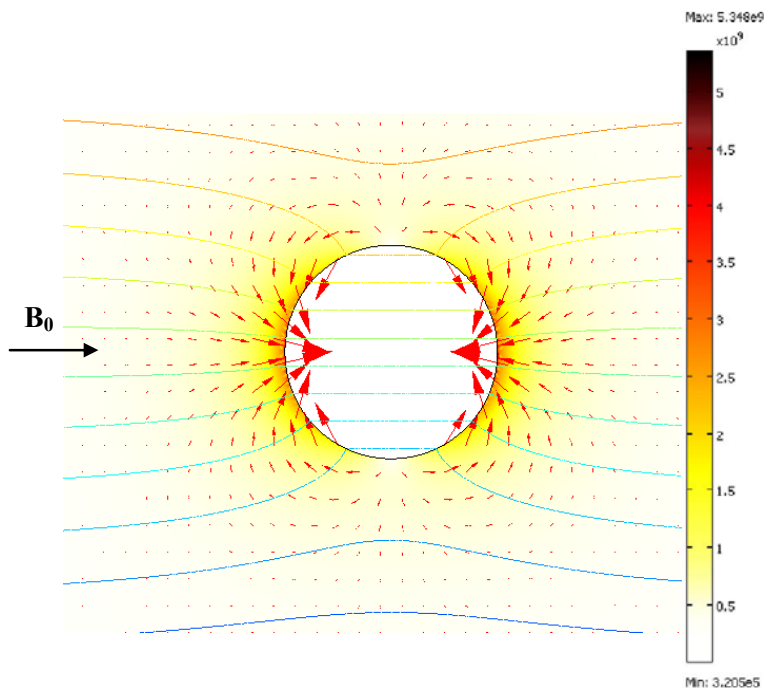


Рис. 8.5. Силовые линии магнитного поля и распределение силовой функции $|\mathbf{G}_B|$ (в оттенках серого) в области ячейки в окрестности ферромагнитной проволоки. Стрелками показана векторная величина $\mathbf{G}_B$

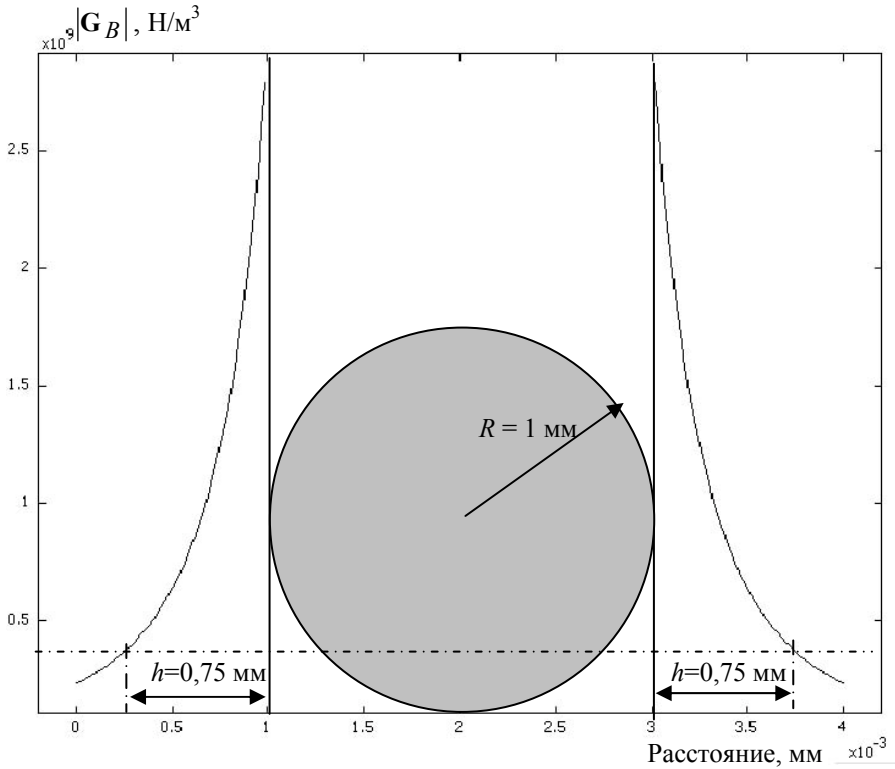


Рис. 8.6. Характер затухания $|G_B|$ при удалении от поверхности проволоки

Результаты расчетов силовой функции трех магнитных систем позволяют выполнить их сравнительный анализ с точки зрения эффективности управления движением и сепарацией магнитных частиц, например, оценивая максимальное значение $|G_B|$ в активной зоне системы и характер затухания этой величины при удалении от источника магнитного поля.

Полученные распределения магнитной силовой функции в различных магнитных системах будут использоваться далее для анализа движения магнитных частиц в потоке жидкости под воздействием магнитного поля, создаваемого такими системами.

8.4. Магнитофоретическое движение магнитных наночастиц в потоке жидкости

8.4.1. Расчет изменяющейся во времени концентрации магнитных частиц

При решении практических задач адресной доставки магнитных наночастиц к целевым зонам биологических тканей, а также сепарации или фракционирования магнитной жидкости, содержащей наночастицы, необходимо предварительно выполнить анализ движения магнитных наночастиц в потоке жидкости под воздействием внешнего неоднородного магнитного поля, т.е. исследовать магнитофоретическое движение наночастиц. Далее исследуется такое движение магнитных наночастиц с применением двух подходов – континуального и корпускулярного. Согласно первому подходу, совокупность частиц рассматривается как континуум, характеризующийся непрерывно распределенной в пространстве и изменяющейся во времени функцией концентрации частиц $C(\mathbf{r}, t)$. Согласно второму подходу, исследуется траектория движения выбранного числа точечных частиц, не взаимодействующих друг с другом. Использование второго подхода требует меньших затрат, однако он применим лишь для случая малых концентраций частиц.

В соответствии с континуальным подходом, распределение концентрации наночастиц $C(\mathbf{r}, t)$ в потоке жидкости, циркулирующей по замкнутому объему, удовлетворяет уравнению баланса массы частиц вида

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (8.14)$$

В уравнении (8.14) величина потока частиц $\mathbf{J}$ имеет четыре составляющие, отражающие соответственно процессы диффузии, действие магнитной силы, сил гравитации и конвекции:

$$\mathbf{J} = -D\nabla C + \mu_p C \mathbf{F}_m + \mu_p C \frac{4}{3} \pi R_p^3 (\rho_p - \rho_f) \mathbf{g} + C \mathbf{u}. \quad (8.15)$$

Здесь D – коэффициент диффузии частиц; μ_p – подвижность частиц; R_p – радиус частиц (предполагается, что частицы имеют сферическую форму); ρ_p и ρ_f – плотность материала частиц и окружающей жидкости соответственно; $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения; $\mathbf{u}$ – скорость движения жидкости.

Полагая, что движение частиц подчиняется закону Стокса, величина подвижности сферических частиц записывается в виде

$$\mu_p = 1/(6\pi\eta R_p), \quad (8.16)$$

где η – динамическая вязкость жидкости.

Согласно соотношению Стокса-Эйнштейна, коэффициент диффузии D равен

$$D = \mu_p k_B T,$$

где $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура жидкости.

Величина магнитной силы F_m в выражении для потока частиц (8.15) определяется по формуле (8.7).

Дифференциальное уравнение (8.14) с учетом (8.15) дополняется нулевыми начальными условиями для концентрации, а также следующими граничными условиями:

- на входе в канал задается значение концентрации частиц $C_{\max}$;
- на выходе из канала задается конвективный поток;
- на боковых стенках канала задается условие непрохождения частиц сквозь них, т.е. нулевое значение полного потока частиц.

Предполагается, что скорость движения магнитной жидкости $\mathbf{u}$ имеет продольную x -составляющую, изменяющуюся по высоте канала радиусом R по закону параболы:

$$\mathbf{u} = (u_x, 0), \quad u_x = u_{\max} (1 - (x/R)^2). \quad (8.17)$$

Представленная математическая модель описывает динамику движения магнитных наночастиц в жидкой среде под влиянием неоднородного магнитного поля с использованием значения их концентрации. Численная реализация модели проводилась методом конечных элементов в программе Comsol.

Пороговое значение размера частиц. В качестве предварительного анализа выполним приближенную оценку порогового значения радиуса частицы R_p^* из условия, что частицы с радиусом $R_p > R_p^*$ захватываются в активной зоне магнитной системы, а частицы меньшего радиуса $R_p < R_p^*$ уносятся потоком жидкости.

Значение R_p^* определим из условия, что за время движения магнитной частицы в активной зоне длиной l , равное значению l/u (см. рис. 8.7, вставка сверху), эта частица под действием магнитной силы проходит в поперечном направлении путь, равный диаметру (высоте) канала d . Полагаем также, что частица, достигшая стенки канала под действием магнитной силы, задерживается у этой стенки длительное время.

Для расчета R_p^* будем использовать следующее приближенное равенство:

$$\frac{l}{u} = \frac{d}{\mu_p \langle F_{my} \rangle},$$

где $\langle F_{my} \rangle$ – среднее по высоте капилляра значение поперечной y – составляющей магнитной силы.

Используя выражения для силы (8.4) и подвижности частиц (8.16), преобразуем последнее равенство к виду

$$\frac{\frac{3}{4} \pi R_p^{*3} \chi \left\langle \frac{\partial |\mathbf{B}_0|^2}{\partial y} \frac{1}{2\mu_0} \right\rangle}{6\pi\eta R_p^*} \frac{l}{u} = d,$$

откуда получим выражение для порогового значения R_p^* :

$$R_p^{*2} = \frac{9}{2} \frac{d}{l} \frac{\eta}{\chi} u \left\langle \frac{\partial |\mathbf{B}_0|^2}{\partial y} \frac{1}{2\mu_0} \right\rangle^{-1}. \quad (8.18)$$

На рис. 8.7 приведены рассчитанные согласно (8.18) зависимости R_p^* от скорости жидкости u при различных значениях магнитной восприимчивости частицы χ . При этом использовались следующие исходные данные: геометрические размеры (см. рис. 8.7, вставка сверху) $d=1,5$ мм, $l=8$ мм; динамическая вязкость $\eta = 0,005$ Па·с; средняя по высоте поперечная составляющая силы $\left\langle \frac{\partial |\mathbf{B}_0|^2}{\partial y} \frac{1}{2\mu_0} \right\rangle = 1,5 \cdot 10^8$ Н/м³.

Из данных рис. 8.7 видно, что для удержания частиц с характерным размером ~ 100 нм в канале со средней скоростью движения биологической жидкости $\sim 0,1$ м/с, частицы должны обладать сильными маг-

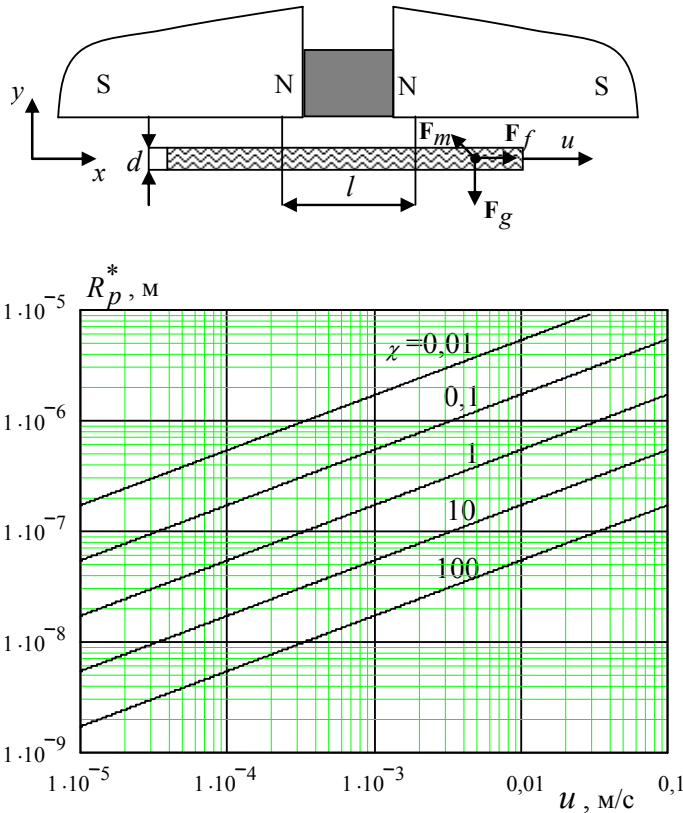


Рис. 8.7. Пороговое значение радиуса частицы R_p^* в функции скорости течения биологической жидкости u и для различных значений магнитной восприимчивости частицы χ .

На вставке сверху показаны величины, используемые при расчете R_p^*

нитными свойствами – их магнитная восприимчивость должна составлять $\chi \cong 100$. Вместе с тем для удержания частиц в потоке жидкости, движущейся со средней скоростью $\sim 0,001$ м/с, могут использоваться слабомагнитные частицы.

Отметим, что приведенные оценки справедливы для одиночных частиц. Известно, что в магнитном поле система частиц способна объединяться в кластеры, которые могут рассматриваться как крупные квазичастицы. Такие квазичастицы будут значительно легче удерживаться магнитной системой по сравнению с одиночными частицами.

Результаты расчета концентрации частиц. Управление движением и удержание магнитных наночастиц, введенных в канал, осуществляются системой постоянных магнитов, которые создают неоднородное магнитное поле. Структура рассматриваемой системы и конечно-элементная сетка двумерной расчетной области показаны на рис. 8.8. Значения параметров, принятые для численных расчетов, приведены в табл. 8.1.

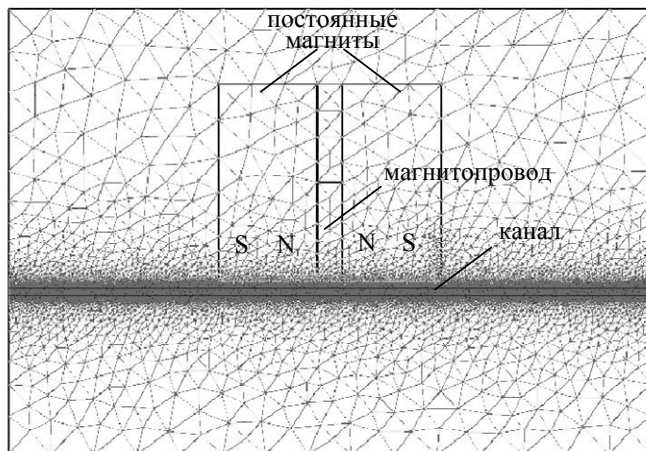


Рис. 8.8. Расчетная область с конечно-элементной сеткой, используемой для анализа магнитного поля, сил, концентрации и траекторий движения частиц в потоке биологической жидкости.

Область включает магнитную систему и канал диаметром 2,25 мм.

Расстояние от поверхности магнитов до канала – 1 мм

Распределение магнитной силовой функции для такой магнитной системы показано на рис. 8.9. Как видно, максимальное значение силовой функции локализовано в угловых зонах постоянных магнитов и достигает $3,8 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$.

Распределения концентрации частиц (значения $C/C_{\max}$) в канале в различные моменты времени показаны на рис. 8.10. Исходными данными выбирались значения $R_p = 56 \text{ нм}$, $\chi = 1$, $\eta = 1,46 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$, $u_{\max} = 10^{-3} \text{ м/с}$, $\rho_p = 4,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. На рис. 8.10 видна динамика изменения концентрации частиц вдоль канала. В начальный момент времени видно, как частицы увлекаются потоком жидкости (см. рис. 8.10 а). Далее, по мере приближения к зоне действия магнитной системы, частицы

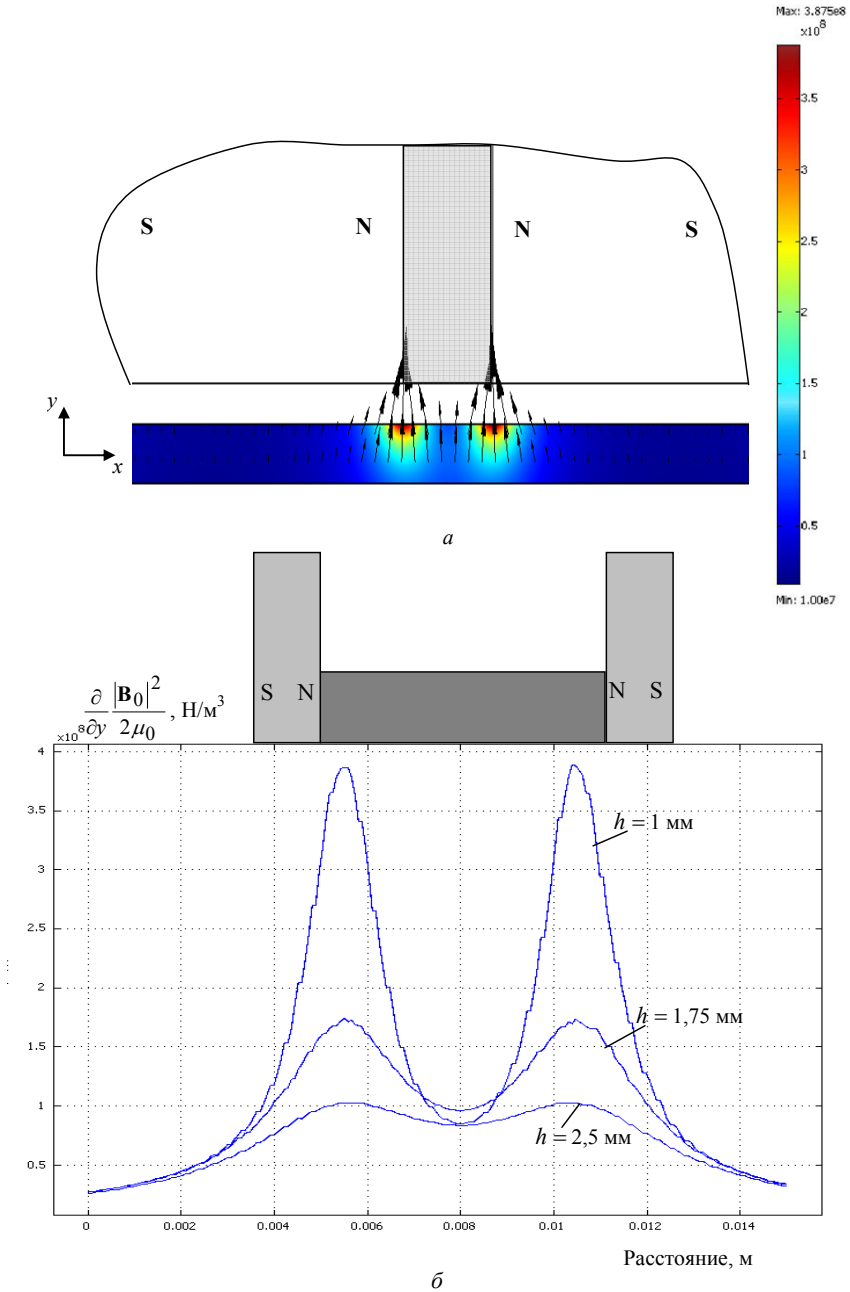


Рис. 8.9. Распределение векторной силовой функции $\nabla |\mathbf{B}_0|^2 / 2\mu_0$ в активной зоне (a) и ее y-составляющей вдоль активной зоны (б).
 h – расстояние от поверхности магнита

Таблица 8.1. Значения величин, использованных в компьютерных расчетах

Параметры	Значения
<i>Система постоянных магнитов</i>	
Геометрические размеры магнитов, м	$0,02 \times 0,04$
Размеры магнитопровода между магнитами, м	$0,005 \times 0,02$
Относительная магнитная проницаемость магнитов, μ_r	1,006
Остаточная магнитная индукция магнитов, B_r , Тл	1,0
Относительная магнитная проницаемость магнитопровода, μ_r	1000
<i>Магнитные наночастицы (магнетит)</i>	
Радиус частицы R_p , нм	56
Плотность материала, кг/м ³	4600
Магнитная восприимчивость суспензии с наночастицами, χ	1
<i>Характеристики канала</i>	
Внутренний диаметр, мм	2,25
Расстояние до магнитной системы, мм	1,0
Плотность жидкости, кг/м ³	1050
Динамическая вязкость жидкости η , Па·с	$1,46 \cdot 10^{-3}$
Скорость потока жидкости $u_{\max}$, м/с	0,001
Абсолютная температура T , К	293

все в большей степени концентрируются в области максимальной магнитной силы (рис. 8.9 б и в). Данные рис. 8.10 г иллюстрируют то обстоятельство, что значительное количество частиц не захватывается магнитной системой и уносится с потоком жидкости. Результаты компьютерного моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными, представленными в работе [27].

8.4.2. Расчет траектории движения магнитных частиц в потоке жидкости во внешнем магнитном поле

Альтернативным подходом к моделированию движения частиц является корпускулярный подход, более простой в компьютерной реализации, но справедливый при малых концентрациях частиц. Согласно этому подходу движение каждой магнитной частицы в потоке жидкости и во внешнем магнитном поле описывается с помощью следующего уравнения баланса сил, записанного на основании второго закона Ньютона:

$$\rho_p V_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \mathbf{F}_m(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_g(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_p), \quad (8.19)$$

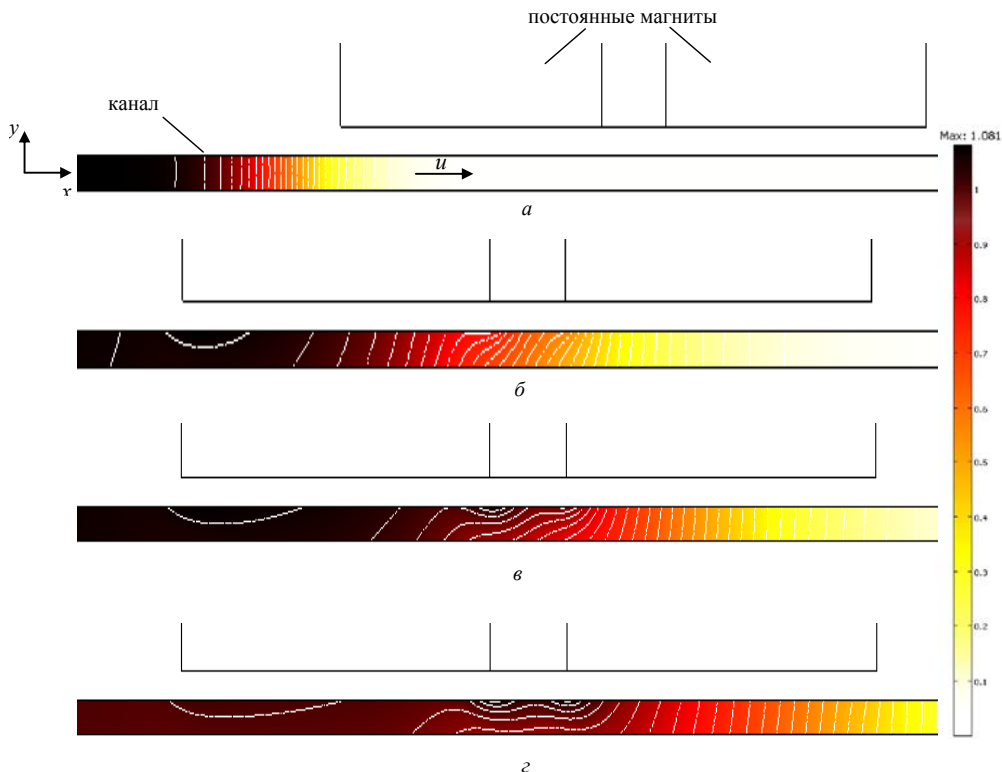


Рис. 8.10. Расчетные распределения концентрации частиц в капилляре в различные моменты времени
(а) $t = 10$ с, (б) $t = 40$ с, (в) $t = 50$ с, (г) $t = 60$ с

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_p. \quad (8.20)$$

Здесь $\mathbf{r}$ – вектор, определяющий пространственное положение частицы; $\mathbf{v}_p$ – вектор скорости частицы; ρ_p, V_p – соответственно плотность и объем частицы; $\mathbf{F}_m$ – магнитная сила, действующая на частицу и вычисляемая с помощью выражения (8.7); $\mathbf{F}_g$ – сила тяжести и Архимеда, равная $\mathbf{F}_g = V_p(\rho_p - \rho_f)\mathbf{g}$; ρ_f – плотность жидкости, в которой движется частица; $\mathbf{g}$ – векторная величина ускорения свободного падения; $\mathbf{F}_f$ – гидродинамическая сила, действующая на частицу и вычисляемая по формуле Стокса:

$$\mathbf{F}_f = 6\pi R_p \eta (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p), \quad (8.21)$$

где η – кинематическая вязкость жидкости; $\mathbf{u}$ – скорость течения жидкости. Направление указанных сил, действующих на частицу, показано на вставке рис. 8.7.

Для численного решения системы дифференциальных уравнений (8.19), (8.20) при выбранном количестве частиц, дополненной начальными условиями для положений этих частиц и их скоростей, использовался неявный метод предиктор-корректор, описанный в [37]. Реализация этого метода выполнялась в пакете программ Matlab. Расчеты траектории движения магнитных частиц выполнялись для трех типов магнитных систем, рассмотренных выше.

Траектории движения частиц в поле двух постоянных магнитов. Распределение магнитной силовой функции для этой магнитной системы, необходимое для расчета силы $\mathbf{F}_m$ в (8.19), приведено на рис. 8.9 б. В предыдущем разделе динамика движения магнитных частиц в такой системе рассматривалась на основе континуального подхода. В данном разделе выполняются расчеты на основе корпускулярного подхода. При этом рассматриваются два варианта, отличающиеся начальным положением частиц в активной зоне: вариант 1 – частицы в начальный момент времени расположены на входе в канал (равномерно распределены вдоль оси y при $x = 0$) и вариант 2 – частицы в начальный момент равномерно распределены по всему каналу. Предполагается, что скорость движения магнитной жидкости $\mathbf{u}$ имеет продольную составляющую, изменяющуюся по высоте канала радиусом R по закону параболы (8.17).

Расчетные траектории движения магнитных наночастиц для начальных условий по варианту 1 показаны на рис. 8.11. В расчетах принималось: $R_p = 56$ нм, $\chi = 1$, $\eta = 1,46 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $u_{\max} = 10^{-3}$ м/с, $\rho_p = 4,6 \cdot 10^3$ кг/м³. Как видно из результатов расчета, в начальный момент времени (см. рис. 8.11 а) частицы увлекаются потоком жидкости, и их распределение по высоте канала соответствует параболическому закону распределения скорости движения жидкости. По мере их приближения к магнитам все большее число частиц отклоняется в сторону магнитов под действием магнитной силы (см. рис. 8.11 б). На заключительном этапе (см. рис. 8.11 в), когда частицы достигают выхода из канала, видно, что около 40 % всех частиц (отмечены на графике вертикальной линией слева) захватываются магнитной системой, а остальные уносятся с потоком жидкости. Полученные данные хорошо согласуются с результатами моделирования на континуальной модели, приведенными на рис. 8.10.

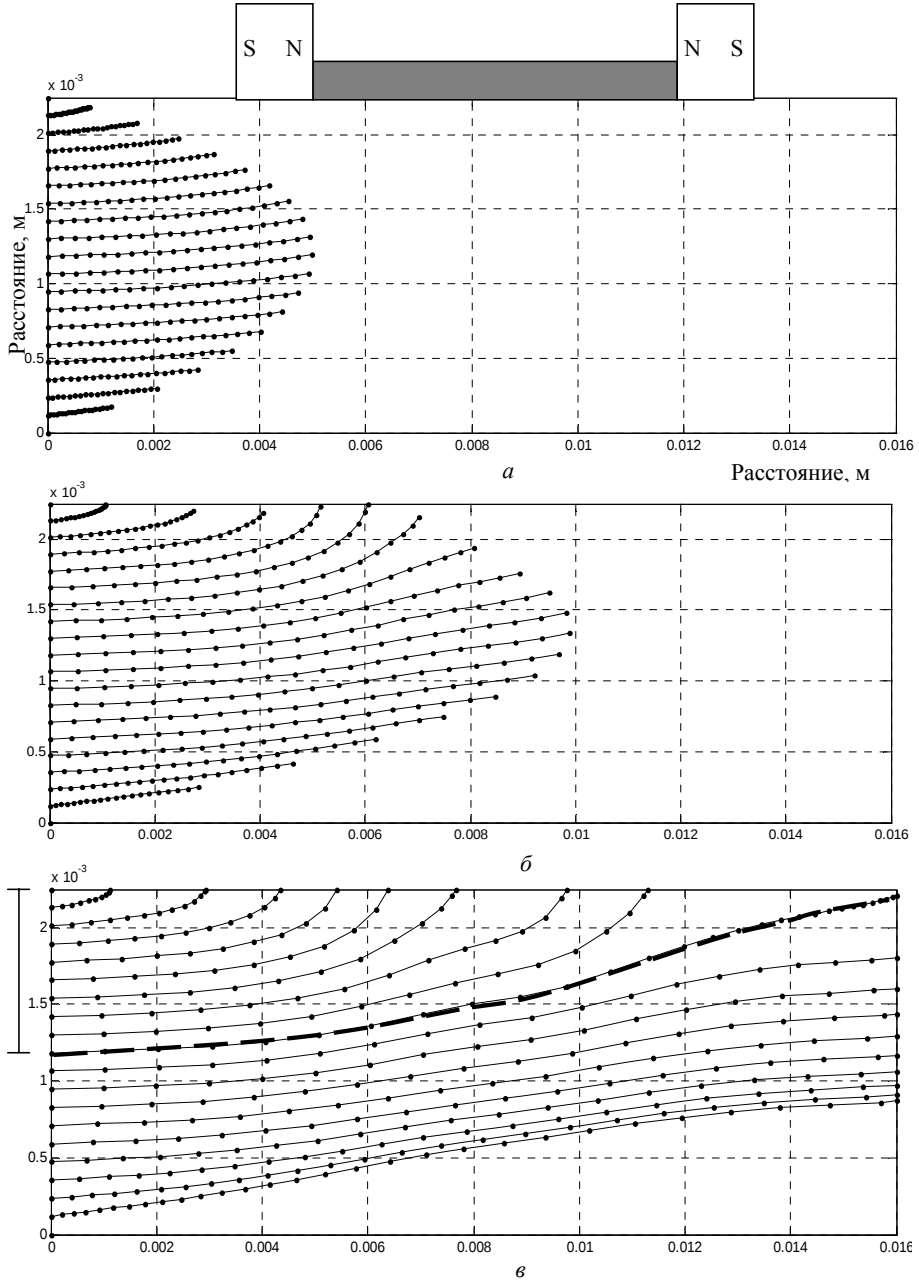


Рис. 8.11. Траектории движения частиц в поле магнитной системы с двумя постоянными магнитами в различные моменты времени:
(а) $t = 5$ с, (б) $t = 10$ с, (в) $t = 50$ с

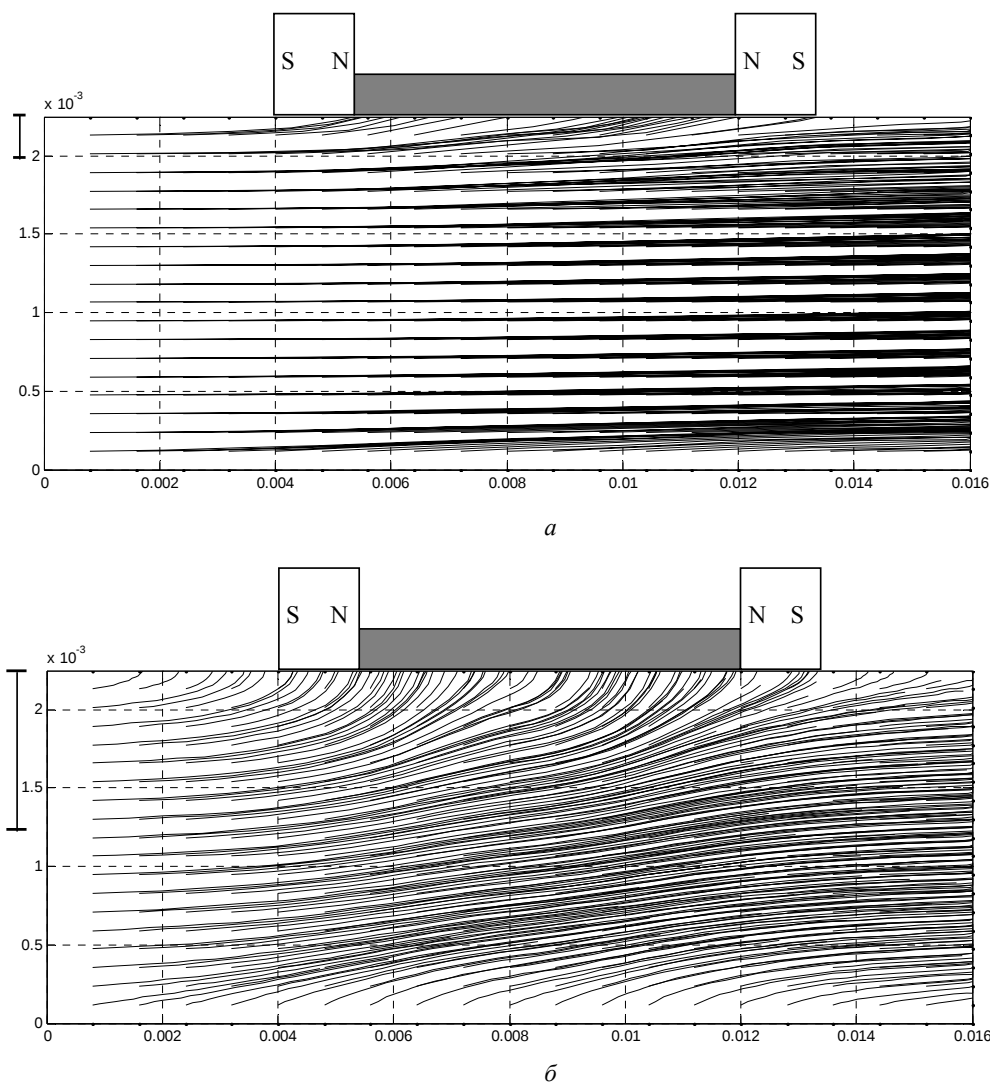


Рис. 8.12. Траектории движения частиц в поле магнитной системы с двумя магнитами для момента времени $t = 12$ с и для различных значений скорости движения жидкости: (а) $u_{\max} = 0,01$ м/с (вверху); (б) $u_{\max} = 0,001$ м/с (внизу)

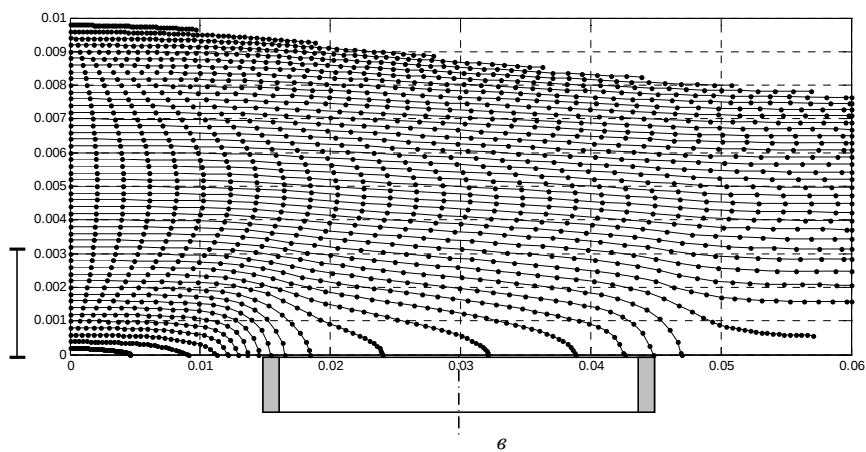
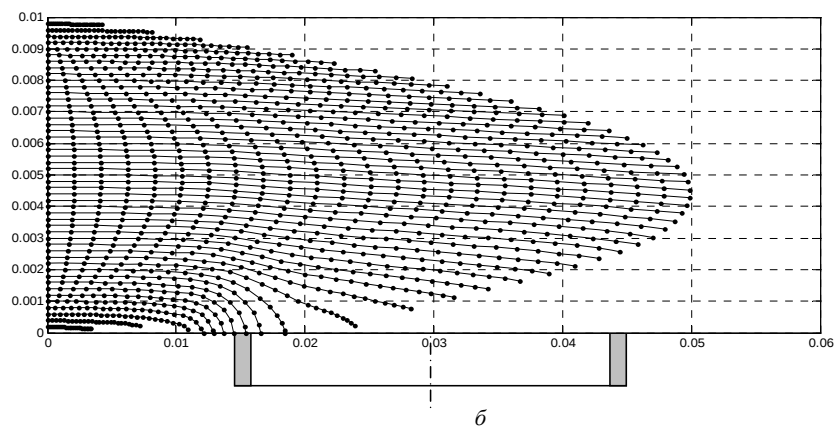
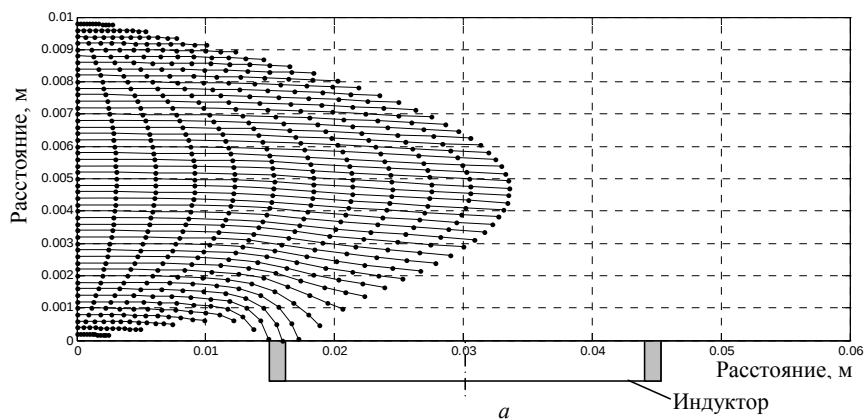


Рис. 8.13. Траектории движения магнитных частиц в потоке жидкости в магнитном поле индуктора для моментов времени:
(а) $t = 35$ с, (б) $t = 50$ с, (в) $t = 100$ с

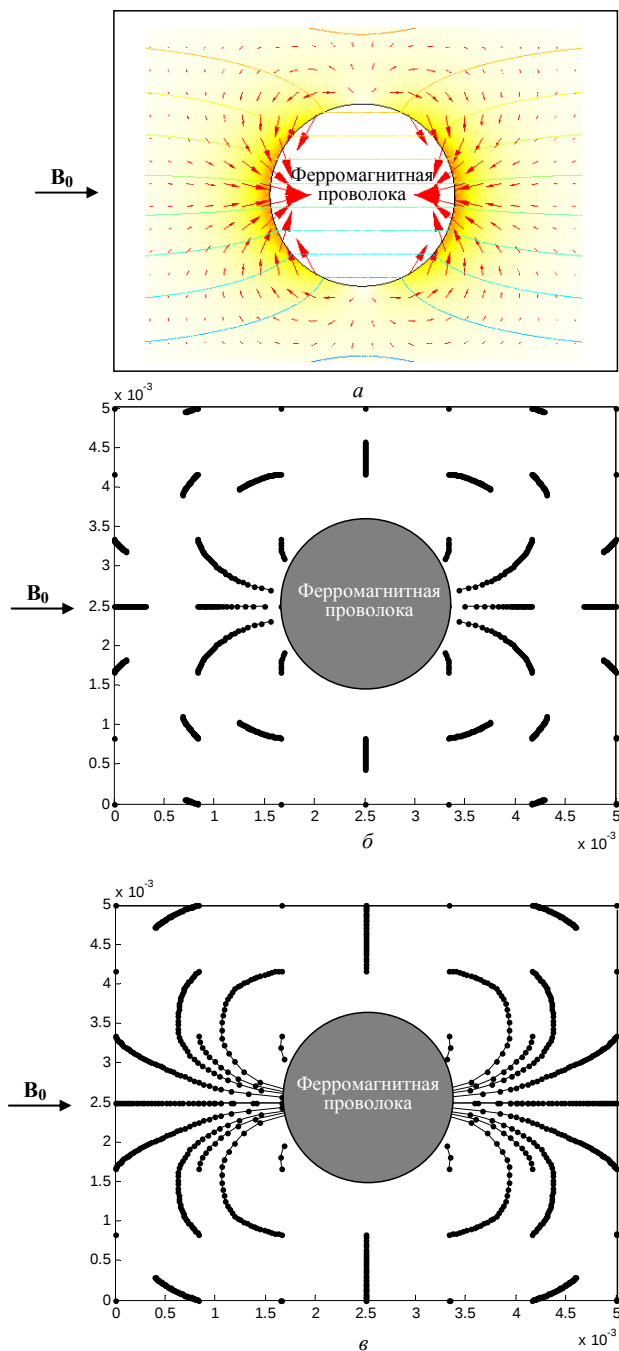


Рис. 8.14. Распределение силовой функции G_B (a) и траектории движения магнитных частиц в области ферромагнитной проволоки в моменты времени: (б) $t = 5$ с, (е) $t = 20$ с

Расчетные траектории движения магнитных наночастиц при начальных условиях по варианту 2 и для двух значений скорости жидкости показаны на рис. 8.12. Здесь также принималось: $R_p = 56$ нм, $\chi = 1$, $\eta = 1,46 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho_p = 4,6 \cdot 10^3$ кг/м³. Видно, что при большой скорости движения жидкости (0,01 м/с), практически все частицы уносятся потоком жидкости (см. рис. 8.12 а), а при снижении скорости жидкости происходит интенсивный захват частиц магнитным полем.

Траектории движения частиц в поле цилиндрического индуктора изображены на рис. 8.13. Здесь использовалось полученное ранее распределение магнитной силовой функции для этой системы, необходимое для расчета силы F_m в (8.19), которое показано на рис. 8.2 б. В расчетах принималось: $R_p = 1$ мкм, $\chi = 10$, $\eta = 1,46 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho_p = 4,6 \cdot 10^3$ кг/м³, скорость жидкости распределялась по высоте канала согласно закону параболы (8.17) с $u_{\max} = 10^{-3}$ м/с. Так как величина силовой функции для этой системы относительно мала – согласно данным рис. 8.2 величина $G_{B\max} = 1,81 \cdot 10^5$ Н/м³, то такая система может применяться лишь для захвата крупных магнитных частиц. Поэтому расчеты проводились для частиц с радиусом $R_p = 1$ мкм. Из приведенных на рис. 8.13 траекторий видно, что около 30 % таких частиц захватываются магнитным полем индуктора.

Траектории движения частиц в окрестности ферромагнитной проволоки показаны на рис. 8.14. Здесь принималось: $R_p = 56$ нм, $\chi = 1$, $\eta = 1,46 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho_p = 4,6 \cdot 10^3$ кг/м³. В начальный момент времени задавалось, что частицы равномерно распределены по расчетной области. Хотя в такой магнитной системе магнитная жидкость движется в продольном направлении, расчет траекторий частиц выполнялся в поперечной плоскости, полагая в выражении для гидродинамической силы по формуле Стокса (8.21) $\mathbf{u} = 0$. Расчеты проводились для двух значений времени. При заданной длине канала сепаратора время движения частиц в поперечной плоскости определяется скоростью потока жидкости.

Из приведенных результатов компьютерных расчетов траекторий частиц можно заключить следующее:

– магнитные частицы выталкиваются из зон, расположенных сверху и снизу проволоки, и притягиваются к поверхности проволоки в боковых зонах;

– за время порядка 20 с частицы с периферийных участков достигают поверхности проволоки. Исходя из этого значения времени, можно выбрать необходимую скорость потока жидкости по выражению $u = L/20$, где L – длина канала сепаратора.

Обобщая основные результаты данной главы, отметим следующее.

1. Для анализа эффективности магнитных систем, создающих неоднородное магнитное поле и проектируемых для управления движением магнитных наночастиц в жидкой среде, предложено использовать магнитную векторную силовую функцию G_B , являющуюся функцией пространственной координаты и численно равную магнитной силе, действующей на частицу единичного объема и с единичной магнитной восприимчивостью. На основе такого подхода проведено сравнение различных магнитных систем по максимальному значению G_B .

2. Для изучения движения магнитных наночастиц в потоке жидкости под воздействием внешнего магнитного поля выполнено компьютерное моделирование на двух пространственных уровнях. На макроуровне, в объеме магнитной системы в целом, проведен численный расчет магнитного поля, а на микроуровне, в области канала с движущейся жидкостью, исследован характер движения магнитных частиц с учетом действующей на них магнитной силы, создаваемой магнитным полем, а также гидродинамической силы и силы гравитации.

3. Для исследования движения магнитных частиц в потоке жидкости и в неоднородном магнитном поле – магнитофоретического движения частиц в работе применены два подхода – континуальный и корпускулярный, для одного варианта расчета проведен их сравнительный анализ.

4. Разработанные подходы к моделированию и реализующие их программные средства позволяют проектировать в каждом конкретном случае магнитные системы для получения резконеоднородного магнитного поля с оптимальными характеристиками, а также прогнозировать количественные характеристики магнитофоретического движения магнитных частиц в биомедицинских исследованиях.

ГЛАВА 9

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВНЕШНЕГО ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ТЕЛЕ ЧЕЛОВЕКА МЕТОДОМ МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

9.1. Введение

Находясь в непосредственной близости от мощных электроэнергетических устройств, человек испытывает воздействие внешнего электромагнитного поля. Примером таких устройств являются высоковольтные линии электропередачи, испытательное высоковольтное оборудование, а также созданный природой "электрофизический комплекс", генерирующий разряд молнии. Изучение вопросов электромагнитной совместимости обслуживающего персонала с такими устройствами обуславливает необходимость проведения анализа электромагнитных процессов в теле человека при воздействии на него внешнего электромагнитного поля с последующим привлечением специалистов в области медицины и биофизики для детального изучения кратковременных и отдаленных во времени последствий такого электромагнитного воздействия на человека.

Одним из современных методов анализа индуцированных токов в теле человека является метод компьютерного моделирования. Такой метод включает в себя разработку математических моделей электромагнитных процессов в теле человека и окружающей среде, численную реализацию математических моделей на компьютере, подтверждение достоверности полученных результатов, выявление различных механизмов электромагнитного воздействия и их количественный анализ, а также прогнозирование возможных последствий такого воздействия.

Все живые организмы, в том числе и человек, имеют сложную внутреннюю иерархическую структуру. В этом смысле говорят о безграничной гетерогенности живых систем [1]. В связи с этим углубленный анализ распределения электромагнитного поля в теле человека возможен только на основе метода многомасштабного моделирования с рассмотрением процессов на различных пространственных уровнях и "сшиванием" решений, относящихся к соседним уровням (см., например, [2]).

Один из возможных подходов к выделению таких пространственных уровней применительно к рассматриваемой в данной главе задаче показан на рис. 9.1. Так, исследуя в качестве примера воздействие электрического поля высоковольтной линии электропередачи, на первом шаге следует определить поле в линии при отсутствии человека, а затем в самом теле человека, выбирая характерный размер приблизительно 1 м. При этом можно учесть расположение внутренних органов, их геометрию, электрические свойства и характеристики. Таким путем будут получены локальные значения поля в различных точках тела человека и определены зоны максимального поля. Зная распределение поля на уровне всего человека, на следующем шаге возможен переход на более низкий пространственный уровень – уровень отдельной клетки с характерным размером приблизительно 100 мкм. В результате решения соответствующей полевой задачи будут получены значения поля в различных точках биологической клетки, в том числе в клеточной мембране, т.е. определено поле на клеточном пространственном уровне, без знания которого невозможно анализировать, например, движение ионов в клетке под действием внешних сил. Зная поле в объеме мембраны, можно перейти на следующий более низкий по иерархии пространственный уровень – уровень отдельной поры в мембране с характерным размером приблизительно 10 нм (см. рис. 9.1).

Отметим, что только процедура последовательного решения ряда полевых задач на различных пространственных уровнях с переносом решения на следующий более низкий пространственный уровень позволяет получить в каждом конкретном случае внешнего электромагнитного воздействия достоверные значения величины поля на уровне клеточных и субклеточных структур в теле человека. Причем знание величины поля именно на уровне клетки и мембраны является исходной информацией, позволяющей биофизикам и медикам анализировать движение ионов и электрических диполей и прогнозировать возникновение различных эффектов, вызванных биологическим действием внешнего электрического поля на человека. К числу таких известных эффектов могут быть отнесены следующие [3–5]:

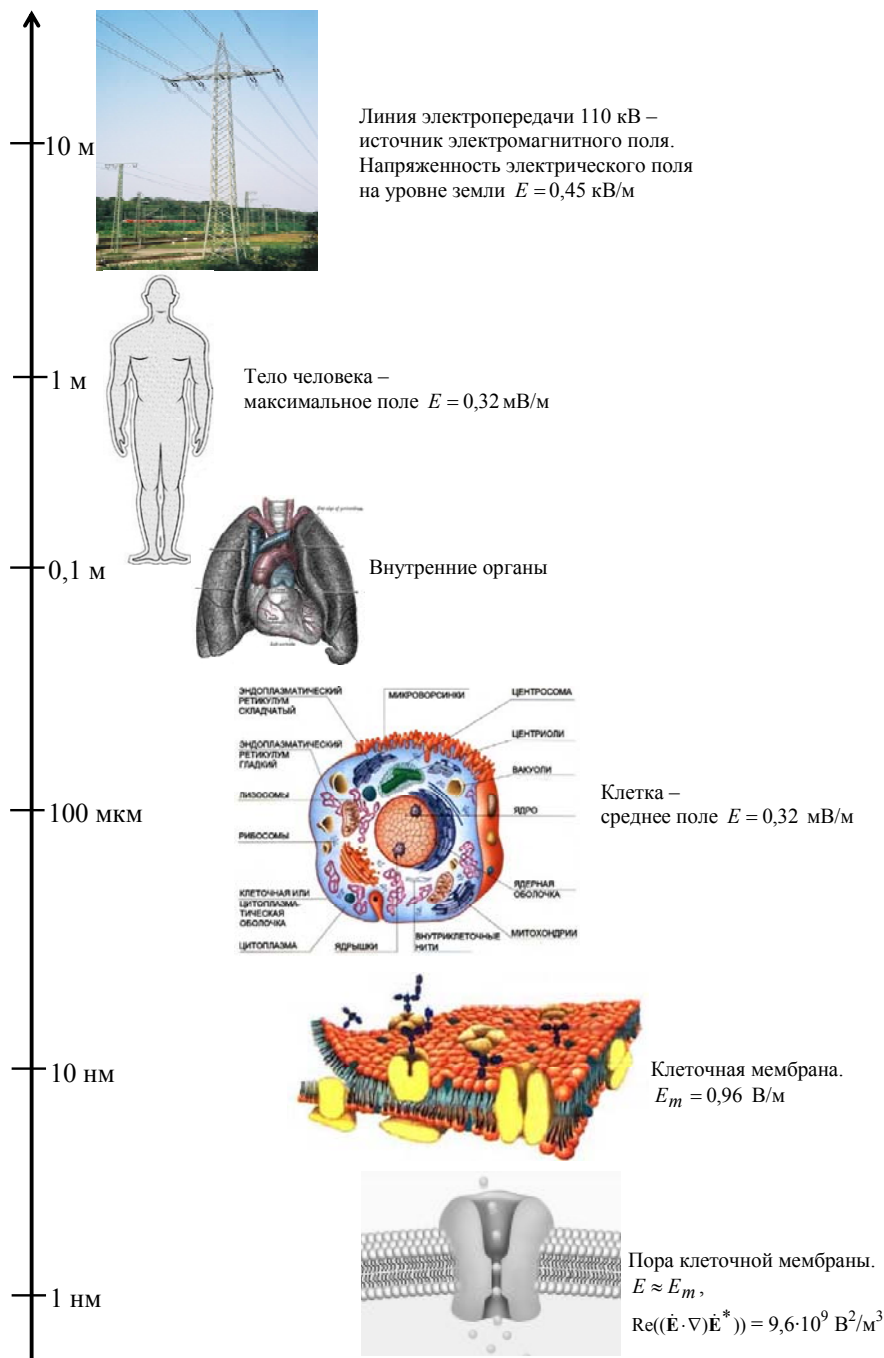


Рис. 9.1. Иерархия физических моделей для детального исследования электромагнитных процессов в биологических системах на примере человека на различных пространственных уровнях

- электропорация или кратковременное повышение проницаемости пор, входящих в структуру клеточной мембраны, под действием импульсного электрического поля, превышающего некоторую критическую величину;
- электрослияние мембран;
- движение клеток в электрическом поле (электрофорез, диэлектрофорез, электровращение);
- деформация мембран под действием электрических сил;
- электротрансфекция – введение в клетку носителей зарядов, содержащих лекарственные вещества или молекулы инородных ДНК;
- электрическая активация и стимуляция биохимических процессов в клетке.

В главе 9 представлены разработка и численная реализация математических моделей для анализа методом многомасштабного моделирования электрического поля в теле человека на различных пространственных уровнях. Для количественной оценки электрического поля на уровне отдельной клетки человека, находящегося под высоковольтной линией электропередачи, выполняется последовательное решение ряда полевых задач на различных пространственных уровнях, а именно задач расчета:

- электрического поля высоковольтной линии электропередачи;
- поля в теле человека;
- поля в биологической клетке;
- поля в поре клеточной мембраны.

Для решения этих задач в работе разрабатываются математические модели и методики их численной реализации. Путем обработки и анализа результатов компьютерных расчетов исследуется эффект возможного усиления (или ослабления) электрического поля при переходе с одного пространственного уровня на другой более низкий. Показано, что понятие локального поля в биологических системах, имеющих сложную иерархическую структуру и испытывающих воздействие внешнего электромагнитного поля, требует не только конкретизации определенной "точки" пространства, но и строгой привязки ее к тому пространственному уровню, на котором рассматривается процесс.

9.2. Переменное электрическое поле высоковольтной воздушной линии электропередачи на пространственном уровне человека

В качестве источника внешнего электрического поля рассматривается высоковольтная линия электропередачи напряжением 110 кВ.

Электромагнитное поле в пространстве вокруг воздушной линии обусловлено наличием, во-первых, высокого электрического потенциала на проводниках линии, создающего потенциальное квазистатическое поле в окружающем пространстве и, во-вторых, переменных токов в проводниках линии, создающих переменное магнитное поле и индуцированное вихревое электрическое поле в окружающем пространстве. Предварительные оценки показывают, что в воздушных линиях электропередачи величина напряженности потенциального электрического поля значительно превышает величину вихревого электрического поля. В силу этого будем рассматривать только потенциальную составляющую электрического поля. Учет вихревой составляющей электрического поля имеет ряд особенностей и требует самостоятельного рассмотрения.

Задачу на пространственном уровне человека решим в два этапа. Сначала проведем расчет поля воздушной линии электропередачи без учета нахождения вблизи ее человека, а затем на основе полученных результатов выполним расчет поля в окрестности тела человека и в его объеме.

9.2.1. Двумерное квазистатическое поле воздушной линии электропередачи напряжением 110 кВ

Задача определения квазистатического поля решается при следующих допущениях. Проводники линии предполагаются бесконечно протяженными и расположенными параллельно поверхности земли, что позволяет рассматривать задачу в двумерной постановке. Влиянием короны в проводниках пренебрегается.

Расчетная область, включающая рассматриваемую линию, с указанием основных геометрических размеров показана на рис. 9.2 (см. вставку слева).

Распределение комплексной величины электрического потенциала ϕ в воздушной среде пространства описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\nabla \cdot (-\varepsilon_0 \nabla \phi) = 0,$$

где ε_0 – абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума.

Внутренние и внешние граничные условия определяются следующим образом. На поверхности проводников задаются действующие значения электрических потенциалов в виде $\phi_1 = U_0 e^{j0}$, $\phi_2 = U_0 e^{j2\pi/3}$, $\phi_3 = U_0 e^{j4\pi/3}$, что характеризует симметричный режим работы линий.

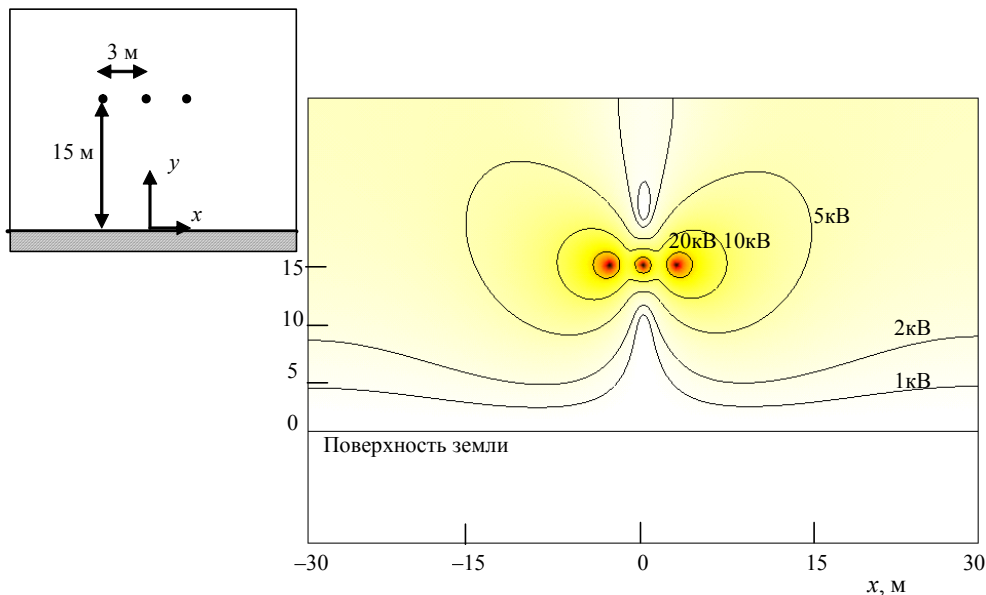


Рис. 9.2. Распределение электрического потенциала (изолинии $|\phi|$) исследуемой воздушной линии электропередачи. На вставке слева показана расчетная область с тремя проводами, к которым приложено напряжение

Рассматривается линия с действующим значением межфазного напряжения 110 кВ, что соответствует потенциалу на каждой фазе по отношению к земле $U_0 = 110/\sqrt{3}$ кВ. На поверхности земли выбирается нулевой потенциал, а на верхней и боковых границах расчетной области задается условие электрической изоляции – $\partial\phi/\partial n = 0$.

Поставленная задача решалась численно методом конечных элементов с помощью программы Comsol [6].

На рис. 9.2 показано распределение электрического потенциала под воздушной линией электропередачи, а на рис. 9.3 – распределение напряженности квазиэлектростатического поля $|\dot{\mathbf{E}}|$ ($\dot{\mathbf{E}} = -\nabla\phi$) на различном расстоянии от поверхности земли. Видно, что наибольшее значение поля вблизи поверхности земли (на расстоянии до двух метров) достигается на удалении приблизительно 5 м по обе стороны от центрального провода линии. Напряженность электрического поля здесь составляет около 0,45 кВ/м. Это значение будет использоваться далее при расчете напряженности электрического поля в теле человека в предположении, что он находится именно в зоне с максимальным полем.

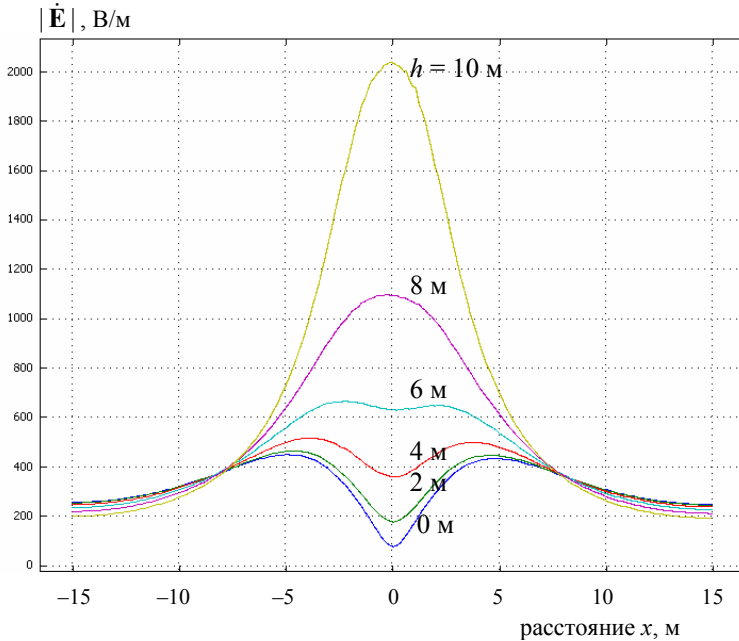


Рис. 9.3. Распределение напряженности электрического поля ($|\dot{\mathbf{E}}|$) под воздушной линией электропередачи на различном расстоянии от поверхности земли h

9.2.2. Трехмерное электрическое поле в теле человека

Для расчета поля в теле человека поместим его в зону с максимальным полем 0,45 кВ/м и выделим вокруг него относительно небольшую расчетную область в форме параллелепипеда с размерами $2 \times 2 \times 4$ м (рис. 9.4 а). При воздействии переменного квазиэлектростатического поля в воздушной среде протекают токи смещения, а в теле человека – преимущественно токи проводимости (при частоте внешнего поля 50 Гц). Учитывая это обстоятельство, распределение комплексной величины электрического потенциала $\dot{\phi}$ в теле человека и в окружающей его воздушной среде описывается следующей системой уравнений:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{J}} = 0, \quad \dot{\mathbf{J}} = \sigma(\mathbf{r})\dot{\mathbf{E}} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(\mathbf{r})\dot{\mathbf{E}}, \quad \dot{\mathbf{E}} = -\nabla \dot{\phi},$$

которая после простых преобразований сводится к дифференциальному уравнению вида

$$\nabla \cdot (-(\sigma(\mathbf{r}) + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(\mathbf{r}))\nabla \dot{\phi}) = 0. \quad (9.1)$$

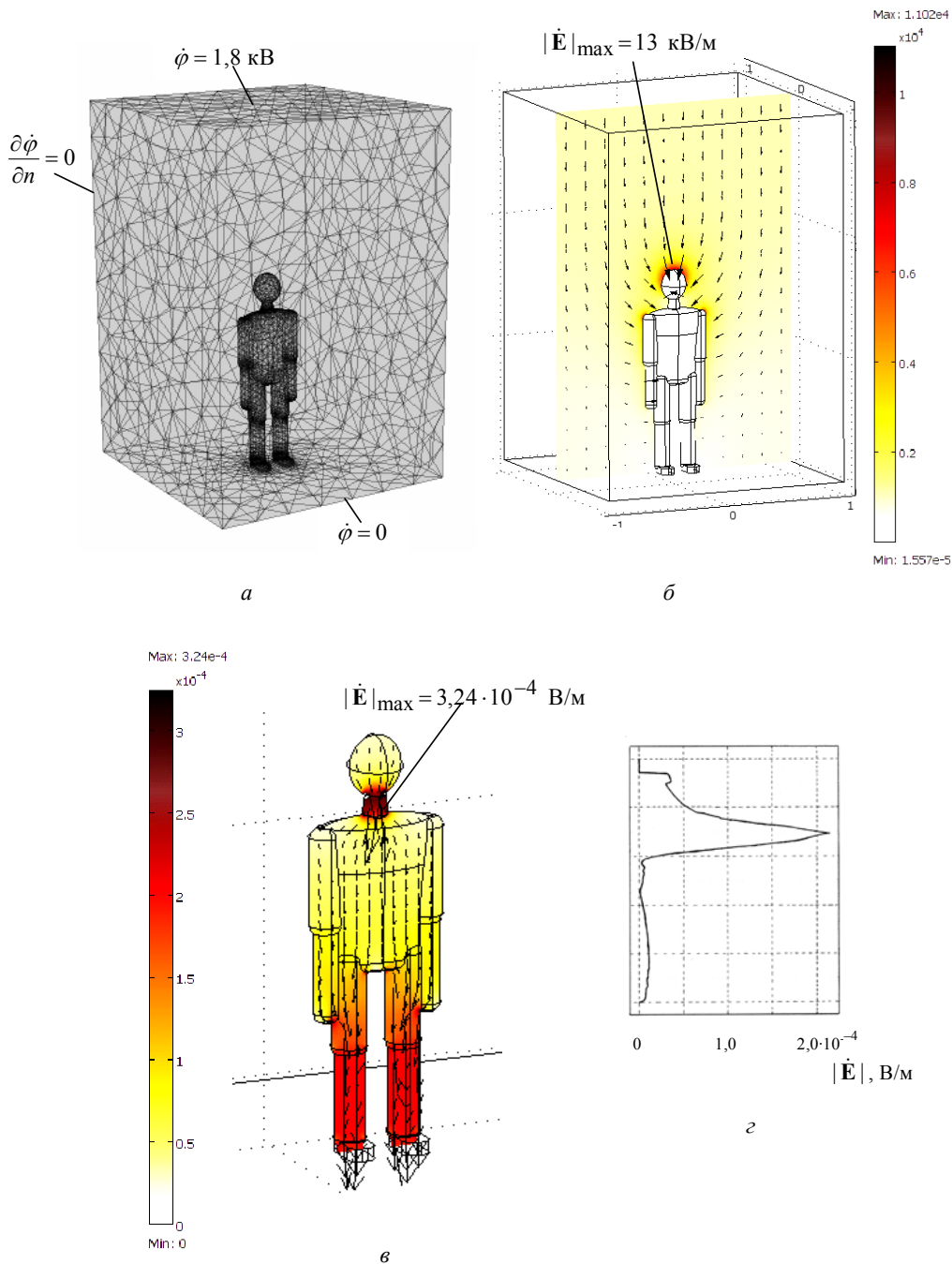


Рис. 9.4. Расчетная область с конечно-элементной сеткой (*a*) и расчетное распределение электрического поля (стрелками и в оттенках серого) вокруг тела человека (*b*) и в его объеме (*c*). Кривая распределения поля вдоль центральной вертикальной линии (*d*)

Здесь $\mathbf{J}$ – плотность полного тока, включающего ток проводимости и ток смещения; σ и ε_r – электропроводность и относительная диэлектрическая проницаемость среды, которые в общем случае являются функциями пространственной координаты. Для области воздуха значения этих величин – $\sigma = 0$, $\varepsilon_r = 1$. Тело человека рассматривается как однородная изотропная среда, характеризующаяся следующими усредненными значениями параметров: $\sigma = 0,5$ См/м, $\varepsilon_r = 80$. Угловая частота изменения поля $\omega = 314$ рад/с.

Граничные значения для потенциала показаны на рис. 9.4 а. Значение потенциала на верхней границе определено как $0,45 \text{ кВ/м} \times 4 \text{ м} = 1,8 \text{ кВ}$.

Решение краевой задачи выполнялось численно методом конечных элементов в вычислительной среде программы Comsol.

Распределение электрического поля в воздухе вокруг тела человека показано на рис. 9.4 б, из которого видно, что максимальное значение поля достигается в верхней точке поверхности головы и составляет приблизительно 13 кВ/м. Заметим, что величина среднего поля в расчетной области при отсутствии человека равна 0,45 кВ/м. Таким образом, заряды в теле человека под действием внешнего электрического поля концентрируются на его поверхности (и особенно на поверхности головы при вертикальном положении тела), что приводит к увеличению более чем на порядок максимального значения внешнего электростатического поля в воздухе в верхней части головы.

Наряду с увеличением внешнего электрического поля в воздухе, происходит значительное уменьшение этого поля в теле человека, что подтверждают данные рис. 9.4 в. Область с относительно большим значением поля локализована в зоне головы, шеи и верхней части грудной клетки. Максимум поля достигается в области шеи и щитовидной железы и в рассматриваемом случае составляет 0,32 мВ/м. Отметим, что максимум поля и плотности тока находится именно в области шеи, так как эта зона представляет собой самое "узкое" место на пути токов проводимости, протекающих вдоль тела человека в землю и затем замыкающихся по воздуху через токи смещения.

Полученное значение поля (0,32 мВ/м) будем использовать далее для анализа величины электрического поля на уровне клетки и отдельной поры применительно к исследуемому случаю воздействия на человека электрического поля воздушной линии электропередачи напряжением 110 кВ.

9.3. Переменное электрическое поле на уровне биологической клетки

Клетка живых организмов имеет сложную структуру, схематически показанную на рис. 9.1 и 9.5 а [7]. Биологическая клетка включает мембрану и внутриклеточную среду, которая в свою очередь состоит из ядра и цитоплазмы, где также находится ряд структурных клеточных компонентов. Характерными размерами клетки человека и ее мембраны являются диаметр клетки $D \approx 7 - 200$ мкм, толщина мембраны $\Delta_m \approx 5 - 10$ нм.

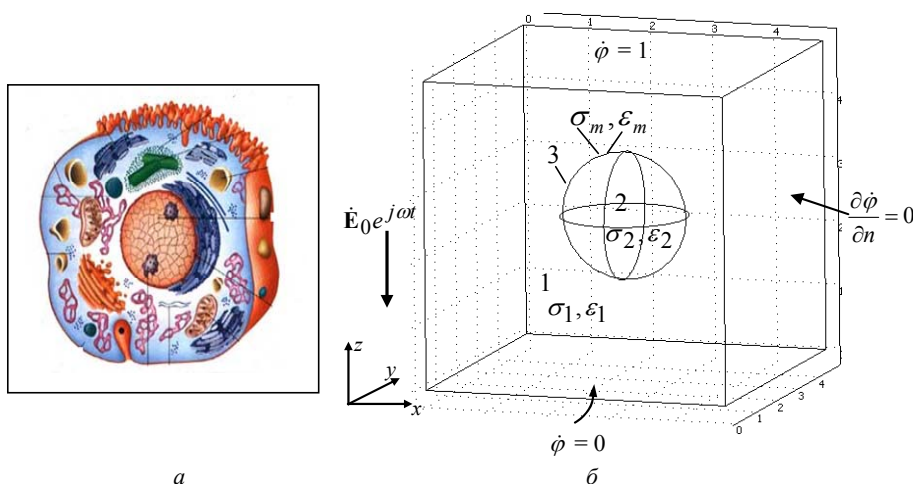


Рис. 9.5. Сложная структура клетки (а) и трехмерная расчетная область с упрощенной моделью клетки (б):
1 – внеклеточное пространство, 2 – внутриклеточное пространство, 3 – клеточная мембрана

Для анализа электромагнитных процессов, как правило, принимают упрощенную модель клетки, полагая, что она имеет сферическую форму, и выделяют в ней три основные объемные фазы гетерогенной структуры клетки и окружающей среды [8, 9], а именно внеклеточную среду, мембрану и внутриклеточную среду, которые в первом приближении могут рассматриваться как однородные среды. Они обладают одновременно проводящими и диэлектрическими свойствами, характеризующимися электропроводностью $\sigma(\mathbf{r})$ и диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\mathbf{r})$. В работе рассматривается именно такая упрощенная модель клетки.

9.3.1. Постановка задачи и ее решение

Расчетная область представляет собой куб, содержащий биологическую клетку в форме сферы диаметром $D = 20$ мкм (см. рис. 9.5 б). В этой области выделяются три подобласти, отличающиеся электрофизическими характеристиками (электропроводностью σ и диэлектрической проницаемостью ε). Подобласти обозначены на рис 9.5 б как 1 – внеклеточная среда, 2 – внутриклеточная среда, 3 – клеточная мембрана. Особенностью рассматриваемой задачи является относительно малая толщина клеточной мембраны – $\Delta_m / D \approx 2,5 \cdot 10^{-4}$. Поэтому в расчетной модели рассматриваются только две пространственные подобласти – внеклеточная среда и внутриклеточная среда, а наличие мембраны учитывается заданием специальных внутренних граничных условий на поверхности клетки – так называемых поверхностных граничных условий, отражающих свойства мембраны (см., например, [10]).

Рассматривается случай воздействия внешнего электрического поля, изменяющегося во времени по гармоническому закону $E_0 \exp(j\omega t)$. Задача решается в трехмерной постановке и квазиэлектростатическом приближении, когда влиянием переменного магнитного поля и индуцированного от его действия электрического поля можно пренебречь.

В таком приближении распределение электрического поля характеризуется скалярным электрическим потенциалом $\phi(\mathbf{r})$, удовлетворяющим дифференциальному уравнению:

$$\nabla \cdot (-(\sigma(\mathbf{r}) + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(\mathbf{r}))\nabla\phi) = 0, \quad (9.2)$$

где $\sigma(\mathbf{r}), \varepsilon_r(\mathbf{r})$ – зависящие от пространственной координаты электропроводность и относительная диэлектрическая проницаемость соответствующей биологической среды. Например, величина электропроводности

$$\sigma(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{– во внеклеточной среде,} \\ \sigma_2 & \text{– внутри клетки.} \end{cases}$$

Аналогичное выражение можно записать для диэлектрической проницаемости.

Одним из основных расчетных вопросов является учет электрических процессов в тонкой мембране, имеющей толщину Δ_m и характеризующейся электрическими параметрами σ_m и ε_m . В данной работе наличие тонкой мембраны учитывается заданием специальных гранич-

ных условий на границе между внешним и внутренним пространством клетки. Далее представим такие граничные условия.

Предполагая, что электрический потенциал по толщине мембраны изменяется по линейному закону, получим следующее выражение для направленной по нормали плотности полного тока в области мембраны:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}^{(m)} = (\sigma_m + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_m) \frac{\phi_2 - \phi_1}{\Delta_m}.$$

Исходя из равенства $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, нормальная компонента плотности полного тока $\mathbf{J}$ является непрерывной функцией на внутренней и наружной поверхности клетки. Следовательно, на внешней поверхности клетки (или на внешней поверхности мембраны)

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}^{(1)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}^{(m)} = (\sigma_m + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_m) \frac{\phi_2 - \phi_1}{\Delta_m}, \quad (9.3)$$

на внутренней поверхности клетки (или мембраны)

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}^{(2)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}^{(m)} = (\sigma_m + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_m) \frac{\phi_2 - \phi_1}{\Delta_m}. \quad (9.4)$$

Выражения (9.3) и (9.4) представляют собой внутренние поверхностные граничные условия на границе раздела внеклеточной и внутриклеточной сред и отражают электрические свойства мембраны.

Заданные условия для электрического потенциала на внешних границах расчетной области показаны на рис. 9.5 б.

Численное решение задачи (9.2)–(9.4) со сложными внутренними граничными условиями проведено методом конечных элементов, реализованным в программном пакете Comsol. Исходные данные для расчета приведены в табл. 9.1.

Прежде чем перейти к описанию результатов численных расчетов, проведем предварительный качественный анализ электромагнитных процессов при указанных исходных данных. Известно, что слабопроводящая диэлектрическая среда с постоянными значениями параметров σ , ε характеризуется диэлектрическим (максвелловским) временем релаксации $\tau = \varepsilon_0\varepsilon/\sigma$. В случае, когда частота внешнего электрического поля f мала, так что выполняется условие $f \ll \tau^{-1}$, среда может рассматриваться как проводник, по которому во внешнем элек-

трическом поле протекает ток проводимости $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$, значительно превышающий по величине ток смещения. При быстроменяющемся внешнем поле с частотой $f \gg \tau^{-1}$ в среде преобладают токи смещения с плотностью $\mathbf{J}_d = j\omega\epsilon_0\epsilon\mathbf{E}$. При $f \approx \tau^{-1}$ порядок величин обоих токов один и тот же.

Таблица 9.1. Исходные данные для компьютерных расчетов [11–13]

Параметры	Значение
Радиус клетки, r	10^{-5} м
Толщина мембраны, Δ_m	$5 \cdot 10^{-9}$ м
Электропроводность внеклеточной среды, σ_1	1,2 См/м
Электропроводность внутриклеточной среды, σ_2	0,3 См/м
Электропроводность клеточной мембраны, σ_m	$3 \cdot 10^{-7}$ См/м
Диэлектрическая постоянная внеклеточной среды, ϵ_1	72,3
Диэлектрическая постоянная внутриклеточной среды, ϵ_2	72,3
Диэлектрическая постоянная мембраны, ϵ_m	5,0
Радиус канала, формируемого порой в мембране, r_p	$0,5 \cdot 10^{-9}$ м
Электропроводность поры, σ_p	0,1 См/м

В рассматриваемом случае обратные величины времени релаксации для каждой из областей имеют согласно данным табл. 9.1 следующие значения: $\tau_1^{-1} = 1,9 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$; $\tau_2^{-1} = 4,7 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$; $\tau_m^{-1} = 6,8 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$.

Следовательно, при низкой частоте ($f < 10^4$ Гц) все среды носят преимущественно резистивный характер. Тогда в силу большого сопротивления мембраны следует ожидать протекания малого тока через внутренний объем клетки, другими словами мембрана в этом случае будет выступать в качестве электрического экрана для внутриклеточной среды. В случае высокой частоты $f \gg 10^4$ Гц через мембрану протекает большой емкостный ток, благодаря чему экранирующие свойства мембраны снижаются. Изложенное будет подтверждено ниже результатами количественного анализа распределения электрического поля в объеме клетки. Аналогичные результаты были получены ранее в работе [14] для случая воздействия импульсного электрического поля.

9.3.2. Анализ результатов расчета

На рис. 9.6 показано полученное расчетным путем распределение электрического потенциала ϕ и вектора плотности полного тока $\mathbf{J}$ для трех значений частоты электрического поля: а) $f=10^2$ Гц; б) $f=10^6$ Гц; в) $f=10^9$ Гц. Видно, что при низкой частоте из-за большого омического сопротивления мембраны и малого тока смещения (пропорционального частоте) в ней, мембрана служит барьером для тока $\mathbf{J}$, который, как видно из рис. 9.6 а, обтекает клетку со всех сторон. Этот процесс сопровождается накоплением большого заряда на внешней и внутренней поверхностях мембраны и появлением большого падения напряжения V_m на мембране – так называемого трансмембранного потенциала (рис. 9.7). С ростом частоты полное комплексное сопротивление мембраны снижается за счет уменьшения реактивного сопротивления мембраны $1/\omega C'_m$ (C'_m – емкость единицы поверхности мембраны). При этом возрастает часть тока, протекающего по внутреннему объему клетки, и уменьшается падение напряжения на мембране (рис. 9.6 б). В случае высокой частоты величина плотности тока $\mathbf{J}$ во внутреннем объеме клетки практически равна току во внеклеточном пространстве (рис. 9.6 в). Показанное на рис. 9.7 распределение электрического потенциала вдоль диаметра по высоте клетки для трех значений частоты позволяет количественно определить величину падения напряжения на мембране V_m .

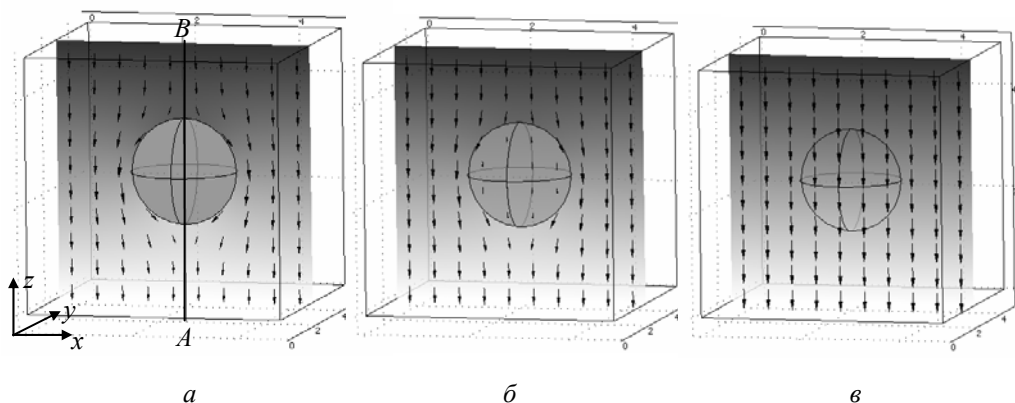


Рис. 9.6. Расчетное распределение потенциала $|\phi|$ (в оттенках серого) и вектора плотности полного тока $\mathbf{J}$ (стрелками) в среднем сечении исследуемой области при различных значениях частоты приложенного электрического поля: (а) $f=10^2$ Гц; (б) $f=10^6$ Гц; (в) $f=10^9$ Гц

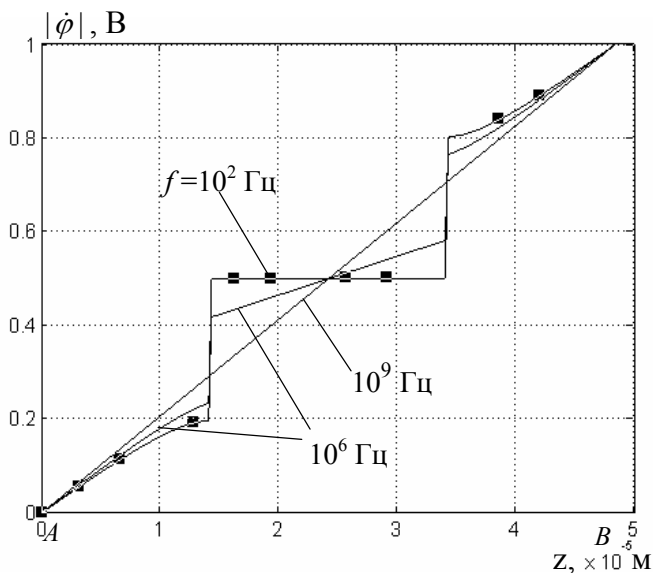


Рис. 9.7. Распределение электрического потенциала $|\phi|$ вдоль линии AB (показана на рис. 9.6 а) для различной частоты f

При наложении на объем клетки и внеклеточное пространство внешнего электрического поля со средним значением напряженности в расчетной области $\langle E \rangle = U/h$, как реакция на это поле, в клеточной мембране возникает сильное электрическое поле с напряженностью $E_m = V_m / \Delta_m$ (V_m – разность потенциалов на мембране; Δ_m – толщина мембраны). Из расчетных данных, приведенных на рис. 9.6 и 9.7, следует, что величина E_m является функцией частоты приложенного поля. Для количественной характеристики этой зависимости будем использовать безразмерный коэффициент усиления внешнего электрического поля в мембране, определяемый выражением

$$k_{Em} = E_m / \langle E \rangle.$$

Расчетная зависимость коэффициента k_{Em} от частоты представлена на рис. 9.8, из которого следует, что при частоте $f < 10^5$ Гц в мембране преобладают токи проводимости, величина которых мала из-за малой электропроводности мембраны. Вследствие этого в объеме мембраны происходит усиление внешнего электрического поля. Поле в мембране в рассматриваемом случае превышает приложенное поле

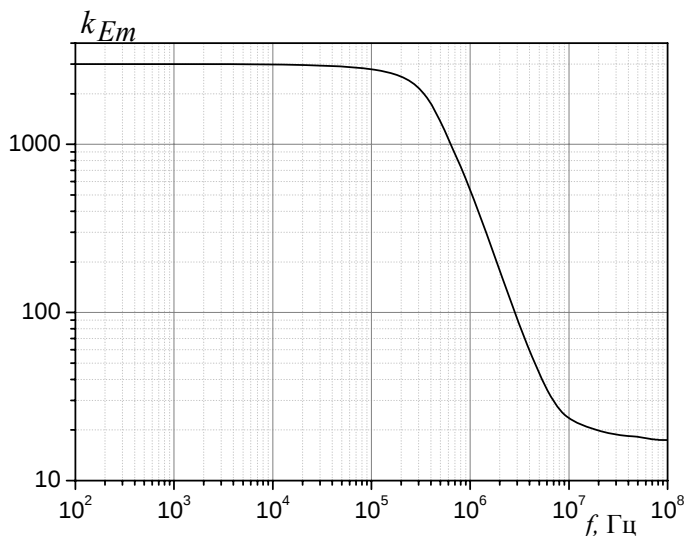


Рис. 9.8. Зависимость коэффициента k_{Em} усиления напряженности электрического поля в мембране клетки от частоты

приблизительно в 3000 раз. В этом диапазоне частоты величина коэффициента усиления k_{Em} слабо зависит от частоты f .

В случае $10^5 < f < 10^7$ Гц роль токов смещения в мембране резко возрастает, что приводит к уменьшению уровня электрического поля в мембране с ростом частоты. В этом частотном диапазоне мембрана практически утрачивает барьерные функции для прохождения тока внутрь клетки. При частоте $f > 10^7$ Гц поле в мембране относительно невелико ($\sim 20\langle E \rangle$) и слабо зависит от частоты. В целом значение поля в мембране определяется соотношением параметров трех сред: мембраны, внеклеточного и внутриклеточного пространства.

Применительно к рассматриваемому масштабному уровню клетки для оценки величины поля в клеточной мембране примем $\langle E \rangle = 0,32$ мВ/м – то максимальное значение поля в теле человека, которое было найдено путем решения полевой задачи на предыдущем пространственном уровне – уровне человека, находящегося под линией электропередачи 110 кВ (см. раздел 9.2). Тогда на основании данных рис. 9.8 получим значение максимального поля в мембране $E_m = 3000 \cdot 0,32$ мВ/м = 0,96 В/м ≈ 1 В/м.

Для более детального рассмотрения клеточной мембраны необходимо учитывать ее сложную структуру, в частности, наличие в ней пор, обеспечивающих транспортирование ионов и молекул различных веществ как внутрь клетки, так и во внешнюю среду. Выявленное ранее повышенное значение поля в мембране под воздействием внешнего электрического поля может приводить к дальнейшему усилению поля на более низком пространственном уровне – уровне отдельной поры мембраны, а также к появлению зон с резко неоднородным распределением поля. С целью исследования этих явлений далее рассмотрим задачу расчета электрического поля на более низком пространственном уровне отдельной поры с характерным размером приблизительно 10 нм.

9.4. Переменное электрическое поле на уровне поры

Схематическое изображение поры с указанием ее размеров приведено на рис. 9.9 [15]. На рис. 9.9 б показана двумерная расчетная область в цилиндрической системе координат $r\theta z$, которая приближенно отражает форму поры и прилегающих к ней областей мембраны. Вы-

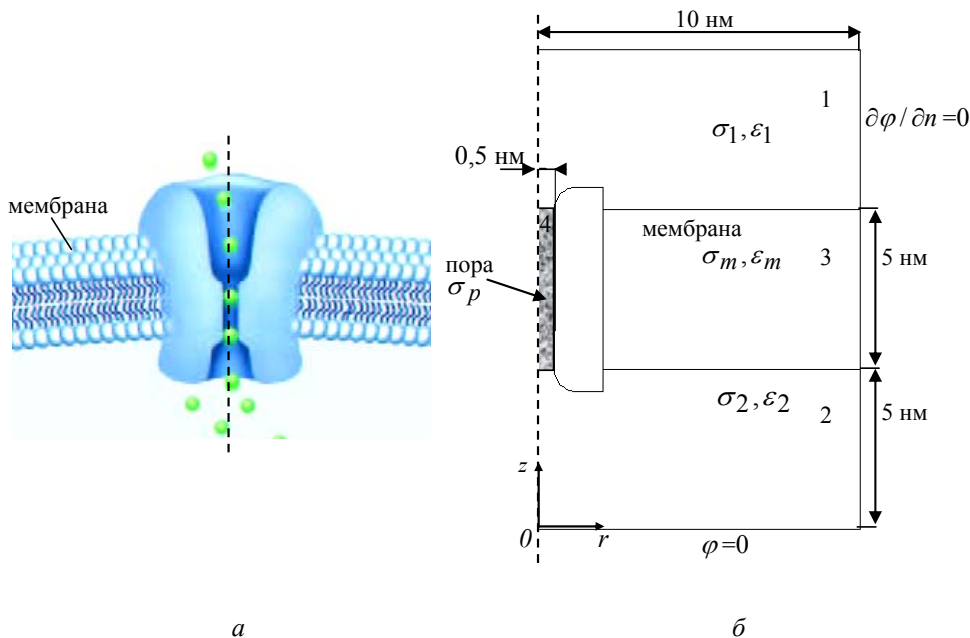


Рис. 9.9. Вид поры с движущимися ионами (а) и двумерная расчетная область в цилиндрической системе координат (б), содержащая фрагмент клеточной мембраны с выделенной на ней порой: 1 – внеклеточная среда; 2 – внутриклеточная среда; 3 – клеточная мембрана; 4 – канал поры

бранная расчетная область используется далее для расчета и анализа распределения электрического поля в поре при различной частоте внешнего поля.

При наложении внешнего электрического поля в области каждой поры концентрируется электрический ток, вызванный дрейфовым движением ионов под действием этого поля и обуславливающий появление в области поры электрического поля, характеризующегося относительно большим значением напряженности $E_p \geq \langle E \rangle$, где $\langle E \rangle$ – среднее поле в области мембраны, зависящее от частоты.

Задача расчета электрического поля в выделенной поре мембраны рассматривается в квазистатическом приближении и описывается дифференциальным уравнением в частных производных вида (9.1) при выборе соответствующих значений параметров (см. табл. 9.1) для каждой из подобластей расчетной области, показанных на рис. 9.9 б. Граничные условия задачи также указаны на рис. 9.9 б.

Картины распределения электрического поля в области поры,

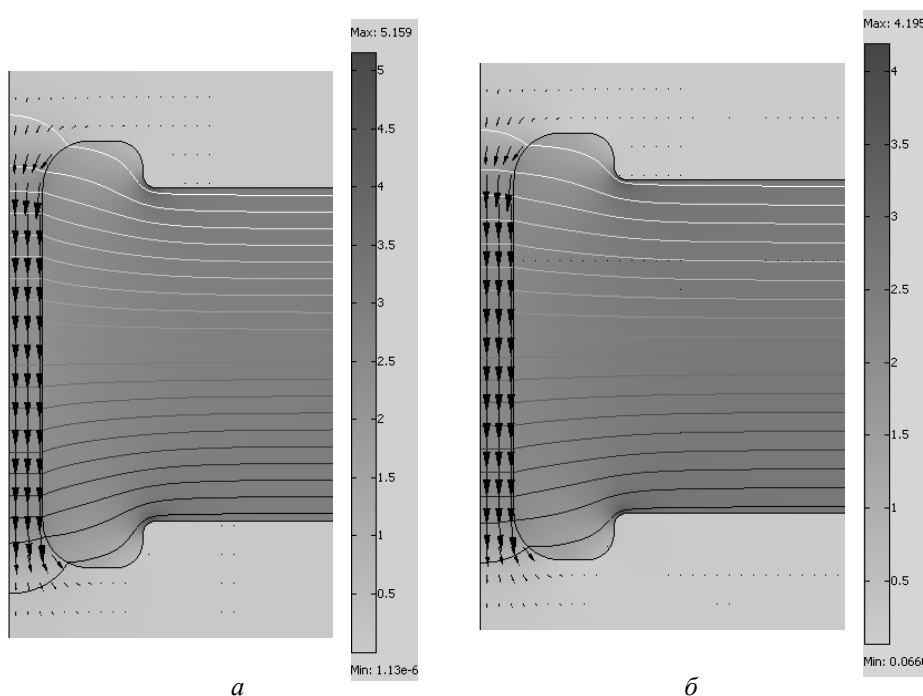


Рис. 9.10. Распределение электрического поля E (в оттенках серого), изолиний электрического потенциала и вектора плотности тока (стрелками) в окрестности поры при частоте приложенного электрического поля
(а) $f = 100$ Гц и (б) $f = 10^9$ Гц

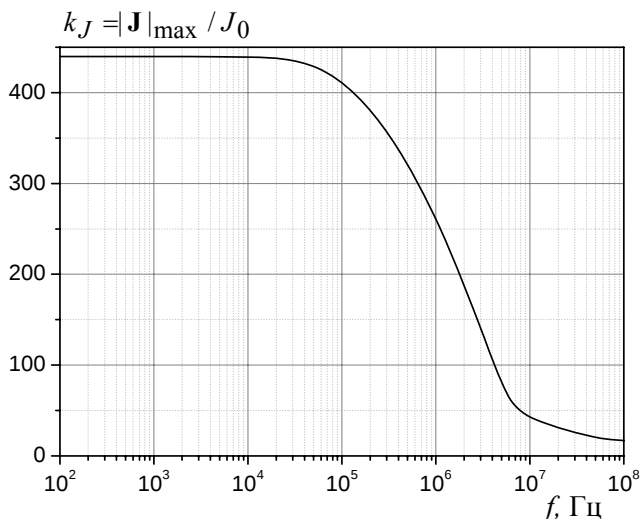


Рис. 9.11. Зависимость коэффициента $k_J = |\mathbf{J}|_{\max} / J_0$ ($J_0 = 1 \text{ А/м}^2$) в центре области внутри поры от частоты f

полученные путем численного решения поставленной задачи методом конечных элементов в среде программы Comsol, изображены на рис. 9.10 для различных значений частоты приложенного поля $f = 100$ и 10^9 Гц. Видно, что в канале поры существует достаточно большое поле, по порядку величины не сильно отличающееся от поля в мембране.

Для количественного анализа концентрации тока в поре используется коэффициент усиления по плотности тока, равный

$$k_J = |\mathbf{J}|_{\max} / J_0,$$

где $|\mathbf{J}|_{\max}$ – максимальная плотность тока в канале поры; J_0 – средняя плотность тока в мембране.

Зависимость коэффициента k_J от частоты f показана на рис. 9.11. Так же, как и для зависимости k_{Em} от частоты (рис. 9.8), значение k_J резко уменьшается в переходном интервале частот $10^5 < f < 10^7$ Гц, когда в мембране усиливается роль тока смещения.

Для оценки величины средней плотности тока J_0 , протекающего через мембрану, определим значения эффективных параметров $\sigma_{эф}$, $\varepsilon_{эф}$ мембраны при наличии пор на основании следующего выражения:

$$\mathbf{J}_0 = (\sigma_{эф} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{эф})\mathbf{E}_m.$$

Зависимости $\sigma_{эф}$ и $\varepsilon_{эф}$ от частоты представлены на рис. 9.12. Отметим, что такие частотные зависимости справедливы для конкретного случая отношения $S_p / S_m = 2,5 \cdot 10^{-3}$, где S_p – площадь поры, а S_m – площадь части поверхности мембраны, соответствующей одной поре.

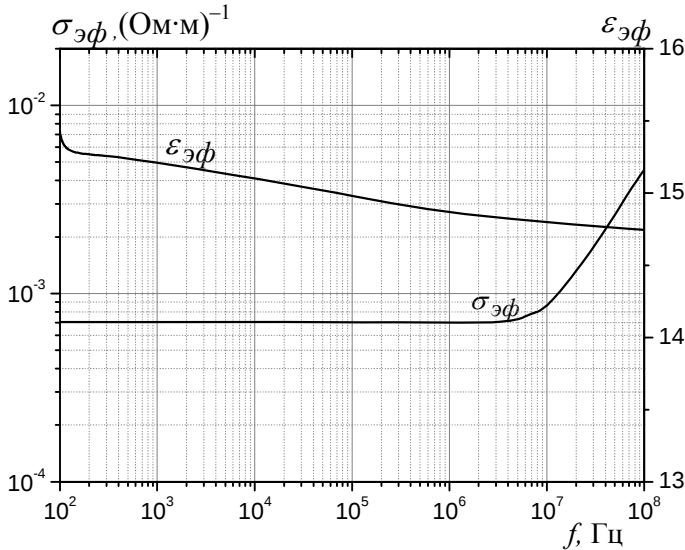


Рис. 9.12. Рассчитанные зависимости от частоты f эффективных значений $\sigma_{эф}$ и $\varepsilon_{эф}$ для мембраны

9.4.1. Электрические диполи в неоднородном электрическом поле

Анализ распределения электрического потенциала и напряженности электрического поля в области поры свидетельствует о том, что при воздействии внешнего гармонического электрического поля, наряду с наличием сильного электрического поля в канале поры, на ее входе и выходе возникают зоны с резко неоднородным электрическим полем, характеризующимся большим значением $\text{grad}|\mathbf{E}|$. Как известно (например, [16, 17]), электрические диполи различного типа, находящиеся в неоднородном изменяющемся во времени по гармоническому закону электрическом поле, испытывают одностороннее действие электри-

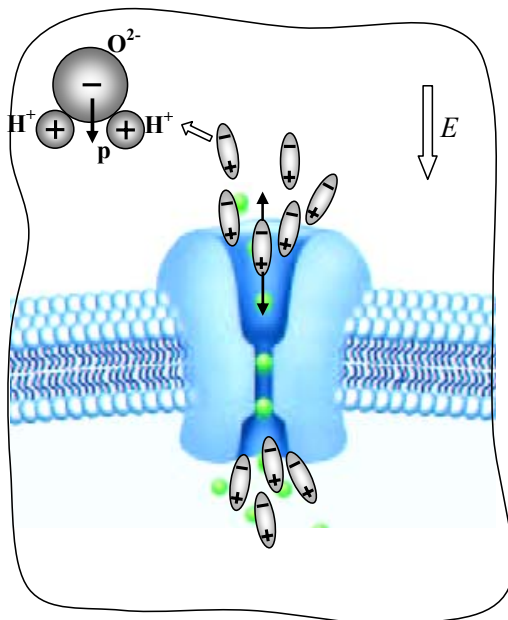


Рис. 9.13. Схематическое изображение повышенной концентрации электрических диполей молекул воды на входе и выходе из поры под действием высокоградиентного электрического поля

ческой силы, стремящейся втянуть их в зону с более сильным полем. Схематическое пояснение этого эффекта для случая молекул воды, обладающих дипольным моментом, показано на рис. 9.13. Из этого рисунка видно, что интегральная сила, действующая на диполь в неоднородном электрическом поле, обусловлена различием по амплитуде сил, действующих отдельно на положительный и отрицательный заряды диполя. Данное явление, называемое диэлектрофорезом, впервые наиболее полно было изучено в работе [17].

Сила, действующая на электрический диполь $\mathbf{p}$ в неоднородном электростатическом поле $\mathbf{E}$ (неизменном во времени), определяется на основании следующего выражения [16]:

$$\mathbf{F}_e = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} .$$

В переменном гармоническом электрическом поле средняя за период величина силы определяется как

$$\langle \mathbf{F}_e \rangle = \text{Re}((\dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{E}}^*) , \quad (9.5)$$

где $\dot{\mathbf{E}}^*$ представляет собой комплексно-сопряженную величину, а Re обозначает действительную часть комплексной величины.

Далее рассматривается случай, когда величина электрического диполя изменяется пропорционально полю, т.е. $\dot{\mathbf{p}} = \varepsilon_0 \alpha \dot{\mathbf{E}}$, где α – коэффициент поляризуемости [18]. При расчете $\dot{\mathbf{p}}$ предполагается, что локальное поле приблизительно равно $\dot{\mathbf{E}}$. Подставляя значение электрического момента в (9.5), получим выражение для расчета средней за период силы:

$$\langle \mathbf{F}_e \rangle = \varepsilon_0 \alpha \operatorname{Re}((\dot{\mathbf{E}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{E}}^*) \quad \text{или} \quad \langle \mathbf{F}_e \rangle = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{G}, \quad (9.6)$$

где $\mathbf{G} = \operatorname{Re}((\dot{\mathbf{E}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{E}}^*)$.

Здесь $\mathbf{G}$ – векторная силовая характеристика неоднородного распределения электрического поля.

На рис. 9.14 показано полученное расчетным путем распределение вектора $\mathbf{G}$ при частоте $f = 50$ Гц и напряженности поля мембраны $E_m = 1$ В/м (именно эта величина поля была найдена из решения полевой задачи на предыдущем пространственном уровне – уровне клетки). Видно, что на входе и выходе из канала поры электрическая сила стремится втянуть электрические диполи внутрь канала. Максимальное значение этой величины для случая нахождения человека под 110 кВ линией электропередачи (что соответствует полю в мембране $E_m = 1$ В/м) равно $|\mathbf{G}|_{\max} = 9,6 \cdot 10^9 \text{ В}^2/\text{м}^3$.

Определим величину этой силы для случая полярной молекулы воды, имеющей дипольный момент $p = 6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м [18]. Будем полагать, что дипольные моменты ориентированы по полю. Тогда $\dot{\mathbf{p}} = p \dot{\mathbf{E}} / |\dot{\mathbf{E}}|$, а величина силы $\langle \mathbf{F}_e \rangle = ((\dot{\mathbf{E}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{E}}^*) p / \dot{\mathbf{E}}$.

Для сравнения рассмотрим силу, действующую на положительный ион, который имеет заряд, равный заряду электрона e . Пусть ион находится в канале поры и испытывает воздействие электрического поля $\mathbf{E}_m$. Тогда действующая сила равна $\mathbf{F} = e \mathbf{E}_m$, а отношение модулей сил $|\langle \mathbf{F}_e \rangle| / |\mathbf{F}| = |\mathbf{G}|_{\max} p / e |\dot{\mathbf{E}}_m|^2 \approx 0,4$. Полученное оценочное значение отношения сил показывает, что величина силы, действующей на полярные молекулы воды и возникающей как результат воздействия внешнего электрического поля высоковольтной линии, достаточно велика. Это может привести к эффекту "закупоривания" пор электрическими диполями и, как следствие, к замедлению обменных процессов клетки с окружающей средой. Такое явление может рассматриваться как одно из

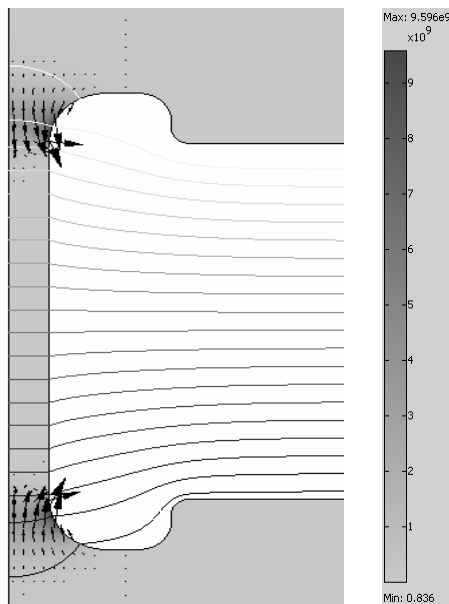


Рис. 9.14. Распределение силового вектора $\mathbf{G}$ в канале поры. Значение $|\mathbf{G}|_{\max} = 9,6 \cdot 10^9 \text{ В}^2/\text{м}^3$ имеет место на входе и выходе из поры

возможных негативных последствий воздействия внешнего переменного электрического поля на живые организмы.

На основании изложенного в данной главе можно сделать следующие выводы.

1. Исследование электрических процессов в теле человека, как сложной иерархической системе, при воздействии на него внешнего гармонического электрического поля проведено с помощью метода многомасштабного моделирования. Выполнен последовательный анализ распределения электрического поля на различных пространственных уровнях – уровне источника внешнего поля (линий электропередачи на 110 кВ), уровне тела человека, уровне клетки и уровне отдельной поры клеточной мембраны. Показано, что при таком подходе возможно получение более точных количественных данных для анализа распределения электрического поля в живых организмах, испытывающих действие внешнего в общем случае электромагнитного поля.

2. Результаты численных исследований показали, что при наложении внешнего электрического поля на тело человека наблюдается

усиление величины поля на уровне мембраны. Коэффициент усиления поля достигает наибольшего значения (~ 3000) при частоте внешнего поля $f < 10^5$ Гц, что связано с проявлением электрических барьерных свойств мембраны на низких частотах. При $f > 10^5$ Гц возрастает ток смещения в мембране, что приводит к уменьшению коэффициента усиления поля.

3. В результате воздействия внешнего переменного электрического поля в окрестности каждой поры клеточной мембраны возникают зоны с резко неоднородным распределением электрического поля, характеризующегося большим значением градиента $|\mathbf{E}|$. Молекулы различных веществ, находящиеся в таком поле и обладающие дипольным моментом (индуцированным или спонтанно существующим как для случая полярных молекул воды), испытывают воздействие однонаправленной электрической силы – явление диэлектрофореза. Получено пространственное распределение этих сил и показано, что их действие может потенциально приводить к эффекту "закупоривания" пор и, как следствие, к замедлению обменных процессов клетки с окружающей средой. Такой эффект следует рассматривать как одно из возможных негативных проявлений действия внешнего переменного электрического поля на живые организмы.

Результаты исследования влияния внешнего электрического поля на человека изложены также в статье [19].

ЛИТЕРАТУРА К ПРЕДИСЛОВИЮ

1. *Механика* композитов. В 12-ти томах / Под общей ред. А.Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1993–1995.
2. *Kaviany M.* Principles of heat transfer in porous media // Springer Publishers, 1995. – 689 p.
3. *Whitaker S.* The method of volume averaging // Kluwer Academic Publishers, 1999. – 240 p.
4. *Емец Ю.П.* Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой. – К.: Наук. думка, 1986. – 191 с.
5. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Элементы теории и численного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах. – К.: Изд-во Ин-та электродинамики НАН Украины, 1999. – 363 с.
6. *Виноградов А.П.* Электродинамика композиционных материалов. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 176 с.
7. *I-я и II-я Всерос.* конф. «Многомасштабное моделирование процессов и структур в нанотехнологиях» – <http://www.nanometer.ru>

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 1

1. *E.W., Engquist B.* Multiscale modeling and computations // Notices of the AMS. – Vol. 50, No. 9. – 2003. – P. 1062–1070.
2. *Multiscale* modeling and simulation in science. (Series: Lecture Notes in Computational science and engineering. Vol. 66) – Ed. by Engquist B., Lötstedt P., Runborg O. – Springer Publisher, 2009. – 320 p.
3. *Liu W.K., Karpov E.G., Park H.S.* Nano mechanics and materials: theory, multiscale methods and applications. – John Wiley & Sons Publisher, 2006. – 320 p.
4. *Tang S., Hou T.Y., Liu W.K.* A mathematical framework of the bridging scale method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2006. – Vol. 63. – P. 1688–1713.

5. *Choly N., Lu G., E.W., Kaxiras E.* Multiscale simulations in simple metals a density-functional-based methodology // *Phys. Rev. B.* – 2005. – Vol. 71, 094101. – P. 1–16.
6. *Kwon Y.W., Allen D.H., Talreja R.R.* Multiscale modeling and simulation of composite materials and structures. – Springer Publisher, 2008. – 630 p.
7. *Liu W.K., Karpov E.G., Zhang S., Park H.S.* An introduction to computational nanomechanics and materials // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* – 2004. – Vol. 193, Issues 17–20. – P. 1529–1578.
8. *Lu G., Kaxiras E.* Overview of multiscale simulations of materials // *Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology.* – Ed. by M. Rieth and W. Schommers. – 2005. – Vol. X. – P. 1–33.
9. *Park H.S., Liu W.K.* An introduction and tutorial on multiple-scale analysis in solids // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* – 2004. – Vol. 193. – P. 1733–1772.
10. *Ghoniem N.M., Busso E.P., Kioussis N., Huang H.* Multiscale modeling of nanomechanics and micromechanics: an overview // *Philosophical Magazine.* – Nov.–Dec. 2003. – Vol. 83, Nos. 31–34. – P. 3475–3528.
11. *De Fabritiis G., Delgado-Buscalioni R., Coveney P.V.* Multiscale modeling of liquids with molecular specificity // *Physical Review Letters.* – 2006. – Vol. 97, Issue 13. – P. 134501-1–134501-4.
12. *Park H.S., Karpov E.G., Liu W.K.* Non-reflecting boundary conditions for atomistic, continuum and coupled atomistic/continuum simulations // *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* – 2005. – Vol. 64. – P. 237–259.
13. *Shil'ot L.E., Curtin W.A., Miller R.E.* A coupled atomistic/continuum model of defects in solids // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* – 2002. – Vol. 50. – P. 2086–2106.
14. *Wagner G.J., Liu W.K.* Coupling of atomistic and continuum simulations using a bridging scale decomposition // *Journal of Computational Physics.* – 2003. – Vol. 190. – P. 249–274.
15. *Liu W.K., Park H.S., Qian D., Karpov E.G., Kadowaki H., Wagner G.J.* Bridging scale methods for nanomechanics and materials. Invited paper // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* – 2006. – Vol. 195. – P. 1407–1421.
16. *Multiscale modeling of polymer properties (Series: Computer-aided chemical engineering; 22)* / Ed. by M. Laso and E.A. Perpete. – Amsterdam; Oxford: Elsevier, 2006. – 424 p.
17. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Компьютерное исследование распределения внешнего переменного электрического поля в теле человека // *Электронное моделирование.* – 2009. – Том 31. – № 3. – С. 91–109.
18. *Максименко А.Л.* Прямое многомасштабное моделирование холодного прессования металлических порошков // *Порошковая металлургия.* – 2009. – № 3/4. – С. 27–36.

19. *Sinha S., Goodson K.E.* Review: multiscale thermal modeling in nanoelectronics // *International Journal for Multiscale Computational Engineering*. – 2005. – Vol. 3. – No. 1. – P. 107–133.
20. *Baeurle S.A.* Multiscale modeling of polymer materials using field-theoretic methodologies: a survey about recent developments // *Journal of Mathematical Chemistry*. – 2009. – Vol. 46, No. 2. – P. 363–426.
21. *Leszczynski J., Shukla M.K.* Practical aspects of computational chemistry: methods, concepts and applications. Chapter 4: Multiscale Modeling: A Review by M. F. Horstemeyer. – Springer Publisher, 2010. – P. 87–135.
22. *Medina G.M., Martinez R.R.* Molecular and multiscale modeling: review on the theories and applications in chemical engineering // *C.T.F Cienc. Tecnol. Futuro*. – Jan./Dec. 2009. – Vol.3, No. 5. – P. 205–224. – http://www.scielo.unal.edu.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0122-3832009000100013&lng=en&nrm=iso
23. *Chapman S.J.* Multiscale mathematical modeling in medicine and biology // *Proceedings of the 18th World IMACS / MODSIM Congress*. – Cairns, Australia, 13–17 July 2009. – P. 13–22.
24. *Dallon J.C.* Multiscale modeling of cellular systems in biology // *Current Opinion in Colloid & Interface Science*. – Vol. 15, No. 1–2. – 23 April 2010. – P. 24–31.
25. *Fyta M.G., Mechionna S., Kaxiras E., Succi S.* Multiscale coupling of molecular dynamics and hydrodynamics: application to DNA translocation through a nanopore // *Multiscale Model. Simulation*. – Vol. 5, No. 4. – 2006. – P. 1156–1173.
26. *Shipley R.J., Chapman S.J.* Multiscale modelling of fluid and drug transport in vascular tumours // *Bulletin of Mathematical Biology*. – 2010. – Vol. 72. – P. 1464–1491.
27. *International Journal for Multiscale Computational Engineering* – <http://www.begellhouse.com/journals/61fd1b191cf7e96f,1b4adbb73e2792e0.html>
28. *Journal of Multiscale Modeling (JMM)* – <http://www.worldscinet.com/jmm.html>
29. *И-я Всероссийская конференция "Многомасштабное моделирование процессов и структур в нанотехнологиях": Сб. тез. докл. ММПСН–2008*. – М.: МИФИ, 2008. – 352 с.
30. *И-я Всероссийская конференция "Многомасштабное моделирование процессов и структур в нанотехнологиях": Сб. тез. докл. ММПСН–2009*. – М.: МИФИ, 2009. – 492 с.
31. *Ибрагимов И.М., Ковшов А.Н., Назаров Ю.Ф.* Основы компьютерного моделирования наносистем: Уч. пособие. – СПб.: Изд-во Лань, 2010. – 384 с.
32. *Vvedensky D.D.* Multiscale modeling of nanostructures. Topical review // *Journal of Physics: Condensed Matter*. – 2004. – Vol. 16, No. 50. – P. R1537–R1576.

33. *Hamdi M., Ferreira A.* Multiscale design and modeling of nanorobots // Proc. of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. – Oct. 29, 2007 – Nov. 2, 2007. – P. 3821–3827.
34. *E.W., Engquist B.* The heterogeneous multiscale methods // Comp. Math. Sci. – Vol. 1, No. 1. – 2002. – P. 87–132.
35. *E.W., Engquist B., Li X., Ren W., Vanden-Eijnden.* The heterogeneous multiscale method: a review. – 2005. – <http://www.math.princeton.edu/multiscale>.
36. *E.W., Engquist B., Huang Z.* Heterogeneous multiscale method: a general methodology for multiscale modeling // Physical Review B. – Vol. 67, Issue 9. 092101. – March 2003. – P. 1–4.
37. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Компьютерное моделирование электротепловых процессов в установке индукционного нагрева на двух пространственных уровнях // Электрон. моделирование. – 2007. – Т. 29. – № 2. – С. 85–99.
38. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Применение многоуровневого моделирования для исследования электротепловых процессов в установке индукционного нагрева // Техн. електродинаміка. Темат. вип. "Проблеми сучасної електротехніки". – 2006. – Ч. 3. – С. 17–20.
39. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Элементы теории и численного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах. – К.: Изд. Ин-та электродинамики НАН Украины, 1999. – 363 с.
40. *Antropov V.P., Belashchenko K.D.* Multiscale modeling of hysteretic phenomena in magnets (invited) // Journal of Applied Physics. – Vol. 93, No. 10. – 15 May 2003. – P. 6438–6443.
41. *Jourdan T., Marty A., Lancon F.* Multiscale method for Heisenberg spin simulations // Phys. Rev. B. – Vol 77, 224428. – 2008. – P. 1–10.
42. *Lee J.H., Chung Y.K., Kwak H.R., Park I.H.* Local electric field analysis for evaluation of charge transfer system using sequential subwindow technique // IEEE Trans. on Magnetics. – March 2004. – Vol. 40, No. 2. – P. 679–682.
43. *Chitarin G., Guarnieri M., Stella A.* Transient behavior of thick-walled axisymmetric windings: a lumped parameters approach // IEEE Trans. on Magnetics. – 1988. – Vol. 24, No. 1. – P. 205–208.
44. *Christopoulos C.* Multi-scale modelling in time-domain electromagnetics // International Journal of Electronics and Communications. – Vol. 57, Issue 2. – 2003. – P. 100–110.
45. *Christopoulos C., Sewell P., Biwojino K., Wykes J., Paul J.D., Thomas D.W.P., Ajayi A., de Menezes L.* Multi-scale problems and complexity in computational electromagnetics // Computational Electromagnetics Workshop, 2007. – 30–31 Aug. 2007. – P. 44–48.
46. *Podoltsev A.D., Nilanga K.G., Serdyuk Yu.V., Gubanski S.M.* Multiscale computations of parameters of power transformer windings at high frequencies. Part I: small-scale level // IEEE Trans. on Magnetics. – Vol. 43,

- No. 11. – November, 2007. – P. 3991–3998; Part II: large-scale level // IEEE Trans. on Magnetics. – Vol. 43, No. 12. – December, 2007. – P. 4076–4082.
47. *Podoltsev A.D., Kucheryavaya I.N., Lebedev B.B.* Analysis of effective resistance and eddy-current losses in multi-turn winding of high-frequency magnetic components // IEEE Trans. on Magnetics. – 2003. – Vol. 39, No. 1. – P. 539–548.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 2

1. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
2. *Механика композитов* / Под ред. А.Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1993. – Т. 1–3.
3. *Механика композиционных материалов* / Под ред. Дж. Сендецки. – М.: Мир, 1978. – 564 с.
4. *Фудзи Т. Дзако М.* Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
5. Арамян М.А. Расчет потенциальных полей и средних параметров дисперсных систем регулярных структур с различными формами включения // Электричество. – 1997. – № 2. – С. 64–69.
6. *Германович Л.Н.* Эффективные характеристики среды с включениями в переменном магнитном поле // ДАН СССР. – 1989. – Т. 306, № 6. – С. 1356–1362.
7. *Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П.* Теплопроводность смесей и композиционных материалов. – Л.: Энергия, 1974. – 264 с.
8. *Емец Ю.П.* Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой. – К.: Наук. думка, 1986. – 192 с.
9. *Нетушил А.В.* Модели электрических полей в гетерогенных средах нерегулярных структур // Электричество. – 1975. – № 10. – С. 1–8.
10. *Фокин А.Г.* Макроскопическая проводимость случайно-неоднородных сред. Методы расчета // Успехи физ. наук. – 1996. – Т. 166, № 10. – С. 1069–1089.
11. *Шидловский А.К., Резцов В.Ф.* Изотропизация и эквивалентирование неоднородных сред со взаимной и не взаимной проводимостью // ДАН УССР. – 1984. – № 8. – С. 83–87.
12. *Landauer R.* Electrical conductivity in inhomogeneous media. Ed. by E.W.Garland and D.Tanner // AIP Conf. Proc. – New-York: AIP, 1978. – P. 2–43.
13. *Maxwell J.C.* A Treatise on Electricity and Magnetism. – 3rd Edition. – Oxford: Clarendon press, 1904. – Vol. 1. – 440 p.
14. *Толмачев С.Т.* Специальные методы решения задач магнитостатики. – К.: Вища шк., 1983. – 167 с.

15. *Feddi M.El., Ren Z., Razek A., Bossavit A.* Homogenization technique for Maxwell equation in periodic structures // IEEE Trans. on Magn. – 1997. – Vol. 33, No.2. – P. 1383–1385.
16. *Sareni B., Krahenbuhl L., Beroual A., Nicolas A., Brosseau C. A.* Boundary integral equation method for the calculation of the effective of periodic composites // IEEE Trans. on Magn. – 1997. – Vol. 33, No. 2. – P. 1580–1583.
17. *Shen L., Liu C., Korringa J., Dunn K.* Computation of conductivity and dielectric constant of periodic porous media // J. Appl. Phys. – 1990. – Vol. 67, No.1. – P. 7071–7081.
18. *Низматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. – Часть 1. – М.: Наука, 1987. – 464 с.
19. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
20. *Schumann U.* Subgrid scale model for finite difference simulation of turbulent flows in plane channels and annuli // J. Comp. Phys. – 1975. – Vol. 18. – P. 376–404.
21. *Bossavit A.* Effective penetration depth in spatially periodic grids: a novel approach to homogenization // Proc. of Internat. EMC'94 Roma Symp. on Electromagnetic Compatibility (Rome, Italy, September, 1994) – 1994. – P. 859–864.
22. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
23. *Затуловский С.С., Иванова Р. К., Кезик В.Я.* Литые композиционные материалы. – К.: Техніка, 1990. – 240 с.
24. *Janta T., Kordecki A., Weglinski B.* Idea of magnetic-conductive elements for electrical machines made of powder composites // Proc.of the Third Internat. Scientific and Technical Conf. on Unconventional Electromechanical and Electrical Systems (September 19–21, 1997, Alushta, The Crimea, Ukraine). – 1997. – Vol. 3. – P. 1125–1130.
25. *Кузнецов В.Г., Шидловский А.К., Гашимов А.М., Дмитриев В.Е.* Реакторы с сердечником из нового композиционного материала // Техн. электродинамика. – 1999. – № 3. – С. 43–47.
26. *Bossavit A., Verite J.* The TRIFOU Code: Solving the 3-D eddy-current problem by using H as state variable // IEEE Trans. on Magn. – 1983. – Vol. 19, No. 6. – P. 2465–2470.
27. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
28. *Финкель В.М., Головин Ю.И., Слетов А.А.* Разрушение трещины сильным электромагнитным полем // ДАН СССР. – 1977. – Т. 237, № 2. – С. 325–327.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 3

1. *Serdyuk Y.V., Podoltsev A.D., Gubanski S.M.* Numerical simulation of dielectric properties of composite material with periodic structure // *Journal of Electrostatic.* – 2005. – Vol. 63. – P. 1073–1091.
2. *Insulation Diagnostic System IDA 200, User's Manual, Programma Electric AB, Täby, Sweden, 2002.*
3. *Jonscher A.K.* Dielectric relaxation in solids. – Chelsea Dielectric Press, 1983.
4. *Wiener O.* Die theori des mischkorpers fur das feld der stationaren stromung // *Abh. Math. Phys. Kl. Akad. Wiss. Leipzig.* – 1912. – Vol. 32. – P. 509–604.
5. *Bergman D.J.* Exactly solvable microscopic geometries and rigorous bounds for the complex dielectric constant of a two-component composite material // *Phys. Rev. Let.* – 1980. – Vol. 44, No. 19. – P. 1285–1287.
6. *Milton G.W.* Bounds on the complex permittivity of a two-component composite material // *J. Appl. Phys.* – 1981. – Vol. 52, No. 8. – P. 5286–5293.
7. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 4

1. *Serdyuk Yu.V., Podoltsev A.D., Gubanski S.V.* Numerical simulations and experimental study of frequency-dependent dielectric properties of composite material with stochastic structure // *IEEE Trans. on Dielectrics and Electrical Insulation.* – Vol. 11, No. 3. – June 2004. – P. 379–392.
2. *Insulation Diagnostic System IDA 200, User's Manual, 2002. Programma Electric AB. – Täby, Sweden (<http://www.programma.se/ida200.html>)*
3. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Элементы теории и численного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах. – К.: Изд. Ин-та электродинамики НАН Украины, 1999. – 363 с.
4. *Feddi M.E., Ren Z., Razek A.* Homogenisation technique for Maxwell equations in periodic structures // *IEEE Trans. on Magn.* – 1997. – Vol. 33, No. 2.
5. *Kaviany M.* Principles of heat transfer in porous media. – Berlin, Springer, 1999.
6. *Pride S.* Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media // *Physical Rev. B.* – 1994. – Vol. 50, N. 21. – P. 15678–15696.

7. *Whitaker S.* The method of volume averaging. – Kluwer Academic Publishers, 1999.
8. *Jonscher A.K.* Dielectric relaxation in solids. – Chelsea Dielectrics Press. – London, 1983.
9. *Rintol M.D. et al.* Structure and transport properties of a porous magnetic gel via x-ray microtomography // *Phys. Rev. E.* – 1996. – Vol. 54, N. 3. – P. 2663–2669.
10. *MacDonald I.F., Zhao H.Q., Kwiecien M.J.* Analysis of the approaches to 3-D reconstruction of porous media // *J. Colloid Interface Sci.* – 1995. – Vol. 173. – P. 245–248.
11. *Odgaard A., Andersen K., Melsen F., Microsc J.* A direct method for fast three-dimensional serial reconstruction // *J. Microsc.* – 1990. – Vol. 159. – P. 335–342.
12. *Biswal B., Manwart C., Hilfer R.* Three-dimensional local porosity analysis of porous media // *Physica A.* – 1998. – Vol. 255. – P. 221–241.
13. *Roberts A.P.* Statistical reconstruction of three-dimensional porous media from two-dimensional images // *Phys. Rev. E.* – 1994. – Vol. 56, No. 3. – P. 3203–3212.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 5

1. *Каден Г.* Электромагнитные экраны в высокочастотной технике и технике электросвязи. – М.– Л.: Госэнергоиздат, 1957. – 327 с.
2. *Ламмеранер Й., Штафль М.* Вихревые токи. – М.– Л.: Энергия, 1967.
3. *Pleite J., Prieto R., Asensi R., Cobos J.A., Olias E.* Obtaining a frequency-dependent and distributed-effects model of magnetic components from actual measurements // *IEEE Trans. on Magnetics.* – Vol. 35, No 6. – November, 1999. – P. 4490–4502.
4. *Горский А.Н., Русин Ю.С., Иванов Н.Р. и др.* Расчет электромагнитных элементов источников вторичного электропитания. – М.: Радио и связь, 1988. – 176 с.
5. *Roshen W.A., Steigerwald R.L., Charles R.J., Earls W.G., Claydon G.S., Saj C.F.* High-efficiency, high-density MHz magnetic components for low profile converters // *IEEE Trans. on Industry Applications.* – Vol. 31, No 4. – July/August, 1995. – P. 869–878.
6. *Vandelac J.P., Ziogas P.D.* A novel approach for minimizing high-frequency transformer copper losses // *IEEE Trans. on Power Electronics.* – Vol. 3, No 3. – July, 1988. – P. 266–277.
7. *Dowell P.L.* Effects of eddy currents in transformer windings // *Proc. IEEE.* – Vol. 113, No 8. – August, 1966. – P. 1387–1394.

8. *Lavers J.D., Bolborici V.* Loss comparison in the design of high frequency inductors and transformers // IEEE Trans. on Magnetics. – Vol. 35, No 5. – September, 1999. – P. 3541–3543.
9. *Tourkhani F., Viarouge P.* Accurate analytical model of winding losses in round litz wire winding // IEEE Trans. on Magnetics. – Vol. 37, No 1. – January, 2001. – P. 538–543.
10. *Asensi R., Cobos J.A., Garsia O., Prieto R., Useda J.* A full procedure to model high frequency transformers windings // IEEE Power Electron. Specialists Conf. Record. – Taipei, Taiwan, 1994.
11. *Chitarin G., Cuarnieri M., Stella A.* Transient behaviour of thick-walled axisymmetric windings: a lumped parameters approach // IEEE Trans. on Magnetics. – Vol. 24, No 1. – January, 1988. – P. 205–208.
12. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Элементы теории и численного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах. – Киев, Изд. Ин-та электродинамики НАН Украины, 1999. – 364 с.
13. *Feddi M.El., Ren Z., Razek A.* Homogenization technique for Maxwell equations in periodic structure // IEEE Trans. on Magnetics. – Vol. 33, No 2. – March, 1997. – P. 1382–1385.
14. *Discontinuous materials and structures* / Edited by M.B.Bush. – WIT Press, Computational Mechanics Publications, 1998. – 280 p.
15. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
16. *Moon F.C.* Magneto-solid mechanics. – A Wiley-Interscience Publication, 1984. – 436 p.
17. *Stafl M.* Electrodynamics of electrical machines / Edited by G.A. Toombs. – Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences. – Prague, 1967. – 183 p.
18. *Binns K.J., Lawrenson P.J.* Analysis and computation of electric and magnetic field problems. – Pergamon Press, Oxford, 1963.
19. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Расчет вихревых токов и потерь в системе массивных проводников с учетом эффекта близости и воздействия внешнего магнитного поля // Техн. електродинаміка. – 2001. – № 1. – С. 11–16.
20. *Podoltsev A.D., Kucheryavaya I.N., Lebedev B.B.* Analysis of effective resistance and eddy current losses in multi-turn winding of high-frequency magnetic components // IEEE Trans. on Magnetics. – Vol. 39, No 1. – January, 2003. – P. 539–548.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 6

1. *Greenwood A.* Electrical transient in power systems. – New-York: John Wiley, 1991.
2. *Shibuya Y., Fujita S.* High frequency model and transient response on power transformer // Proc. Transition and Distribution Conference and Exhibition 2002: Asia Pacific. IEEE/PES. – 6–10 Oct. 2002. – Vol 3. – P. 1839–1844.
3. *Кандаков С.А., Лантев О.И.* Исследование резонансных перенапряжений в силовых трансформаторах мощных блоков электрических станций: 1X Симпозиум «Электротехника 2030», М., 29–31 мая 2007, доклад 2.07.
4. *Abeywickrama K.G.N.G., Serdyuk Y.V., Gubanski S.M.* Exploring possibilities for characterization of power transformer insulation by frequency response analysis (FRA) // IEEE Trans. on Power Delivery. – July 2006. – Vol. 21. – P. 1375–1382.
5. *Serdyuk Yu. V., Podoltsev A.D., Gubanski S.M.* Applicability of the FRA method for characterization of insulation of power transformers // Proc. 2nd Int. Conference on Advances in Processing, Testing and Application of Dielectric Materials, Wroclaw, Poland. – 15–17 Sept. 2004. – P. 82–85.
6. *Rahimpour E., Christian J., Feser K., Mohseni H.* Transfer function method to diagnose axial displacement and radial deformation of transformer windings // IEEE Trans. on Power Delivery. – April 2003. – Vol. 18. – P. 493–505.
7. *Dallagoa E., Giuseppe V.* Analytical and experimental approach to high-frequency transformer simulation // IEEE Trans. on Power Electronics. – 1999. – Vol.14, No. 3. – P. 415–421.
8. *Comsol Multiphysics* – <http://www.comsol.com>
9. *Feddi M.E., Ren Z., Razek A.* Homogenization technique for Maxwell equations in periodic structure // IEEE Trans. on Magnetics. – Mar. 1997. – Vol. 33. – P. 1382–1385.
10. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Элементы теории и численного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах. – К.: Изд. Ин-та электродинамики, 1999. – 363 с.
11. *Konrad A.* Integrodifferential finite element formulation of two-dimensional steady-state skin effect problems // IEEE Trans. on Magnetics. – Jan. 1982. – Vol. 18, Issue 1. – P. 284–292.
12. *Podoltsev A.D., Kucheryavaya I.N., Lebedev B.B.* Analysis of effective resistance and eddy-current losses in multi-turn winding of high-frequency magnetic components // IEEE Trans. on Magnetics. – 2003. – Vol. 39, No. 1. – P. 539–548.
13. *Abeywickrama K.G., N.G., Podoltsev A.D., Serdyuk Yu.V., Gubanski S.M.* Computation of parameters of power transformer windings for use in

- frequency response analysis // IEEE Trans. on Magnetics. – May 2007. – Vol. 43, No. 5. – P. 1983–1990.
14. *Lammeraner J., Stafl M.* Eddy current. – London, U.K.: ILIFFE Books, 1966.
 15. Gyselinck J., Dular P. A time-domain homogenization technique for laminated iron cores in 3-D finite-elements models // IEEE Trans. on Magnetics. – March 2004. – Vol. 40. – P. 856–859.
 16. *Silverster P.P., Ferrari R.L.* Finite elements for electrical engineers. – New York: Cambridge University Press, 1983.
 17. *Trang R.Y.* Transient simulation of power transformer using 3D finite element model coupled to electrical circuit equations // IEEE Trans. on Magnetics. – July 2000. – Vol. 36. – P. 1414–1420.
 18. *Ho S.L., Li Y., Wang H.C., Tang R.Y.* Numerical simulation of transient force and eddy current loss in a 720-MVA power transformer // IEEE Trans. on Magnetics. – March 2004. – Vol. 40. – P. 687–690.
 19. *Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А.* Расчет индуктивностей: Справочная книга. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986. – 488 с.
 20. *Podoltsev A.D., Abeywickrama K.G. N. B., Serdyuk Yu.V., Gubanski S.M.* Multi-scale computations of parameters of power transformer windings at high frequencies. Part II: large-scale level // IEEE Trans. on Magnetics. – December 2007. – Vol. 43, No. 12. – P. 4076–4082.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 7

1. *Кувалдин А.Б.* Индукционный нагрев ферромагнитной стали. – М., Энергоатомиздат, 1988. – 200 с.
2. *Rudnev V., Loveless D., Cook R., Black M.* Handbook of induction heating. – Marcel Dekker, Inc., 2003.
3. *Бабат Г.И.* Индукционный нагрев металлов и его промышленное применение. – М.–Л.: Энергия, 1965. – 400 с.
4. *Немков В.С., Демидович В.Б.* Теория и расчет устройств индукционного нагрева. – Л.: Энергоатомиздат, 1988. – 280 с.
5. *Слухоцкий А.Е., Рыскин С.Е.* Индукторы для индукционного нагрева. – Л.: Энергия, 1974. – 264 с.
6. *Установки индукционного нагрева* // Под ред. А.Е. Слухоцкого. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 326 с.
7. *Dolezel I., Mach M., Ulrych B.* Induction heating of metal cylinder levitating in harmonic electromagnetic field // Техн. електродинаміка. Темат. вип. "Проблеми сучасної електротехніки". 2004. – Ч. 3.– Р. 3–7.

8. *Kawase Y., Miyatake T., Hirata K.* Thermal analysis of steel blade quenching by induction heating // IEEE Trans. on Magnetics. – 2000. – Vol. 36, No. 4. – P. 1788–1791.
9. *Skoczkowski T.P., Kalus M.F.* The mathematical method of induction heating of ferromagnetic pipes // IEEE Trans. on Magnetics. – 1989. – Vol. 25, No. 3. – P. 2745–2750.
10. *Urbanek P., Skorek A., Zaremba M.B.* Magnetic flux and thermal analysis in induction heated steel cylinder // IEEE Trans. on Magnetics. – 1994. – Vol. 30, No. 5. – P. 3328–3330.
11. *Podoltsev A.D., Kucheryavaya I.N., Lebedev B.B.* Analysis of effective resistance and eddy-current losses in multi-turn winding of high-frequency magnetic components // IEEE Trans. on Magnetics. – 2003. – Vol. 39, No. 1. – P. 539–548.
12. *Acero J., Hernandez P.J., Burdio J.M., Alonso R., Barragan L.A.* Simple resistance calculation in litz-wire planar windings for induction cooking appliances // IEEE Trans. on Magnetics. – 2005. – Vol. 41, No. 4. – P. 1280–1287.
13. *Pleite J., Prieto R., Asensi R., Cobos J.A., Olias E.* Obtaining a frequency-dependent and distributed-effects model of magnetic components from actual measurements // IEEE Trans. on Magnetics. – 1999. – Vol. 36, No. 6. – P. 4490–4502.
14. *Comsol Multiphysics* – <http://www.comsol.com>
15. *Атабеков Г.И.* Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1969. – 424 с.
16. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Компьютерное моделирование электромагнитных и тепловых процессов при индукционном нагреве стального реактора с сыпучим материалом // Техн. электродинамика. – 2005. – № 3. – С. 3–11.
17. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Компьютерное моделирование электро-тепловых процессов в установке индукционного нагрева на двух пространственных уровнях // Электронное моделирование. – 2007. – Т. 29. – № 2. – С. 85–99.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 8

1. *Розенфельд Л.Г., Москаленко В.Ф., Чекман І.С., Мовчан Б.О.* Нанотехнології, наномедицина: перспективи наукових досліджень та впровадження їх результатів у медичну практику // Укр. мед. часопис. – IX/X 2008. – 5 (67) – С. 63–68.

2. *Ernest H., Shetty R.* Impact of nanotechnology on biomedical sciences. Review of current concepts on convergence of nanotechnology with biology // *Journal of Nanobiotechnology*, 2005. – <http://www.azonano.com/Details.asp?ArticleID=1242>
3. *Magnetism in Medicine: A Handbook, Second Edition.* / Ed. by A. Wilfried and H. Nowak. – Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2007. – 655 p.
4. *Pankhurst Q.A., Connolly J., Jones S.K., Dobson J.* Applications of magnetic nanoparticles in biomedicine. Topical review // *Journal of Physics D: Applied Physics*. – 2003. – Vol. 36. – P. R167–R181.
5. *Губин С.П., Кокиаров Ю.А., Хомутов Г.Б., Юрков Г.Ю.* Магнитные наночастицы: методы получения, строение, свойства // *Успехи химии*. – 2005. – Т. 74(6). – С. 539–574.
6. *Rosensweig R.E.* Heating magnetic fluid with alternating magnetic field // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. – Vol. 252. – November 2002. – P. 370–374.
7. *Никифоров В.Н.* Магнитная индукционная гипертермия // *Изв. высш. уч. заведений. Физика*. – № 9. – 2007. – С. 60–72.
8. *Горбик П.П., Чехун В.Ф., Шнак А.П.* Физико-химические и медико-биологические аспекты создания полифункциональных нанокомпозитов и нанороботов // *Нанорозмірні системи: будова, властивості, технології*: Мат. конф. 21–23 листопада 2007 р., Київ. – С. 422.
9. *Першина А.Г., Сазонов А.Э., Мильто И.В.* Использование магнитных наночастиц в биомедицине // *Бюл. сибирской медицины*. – 2008. – № 2. – С. 70–78.
10. *Ito A., Shinkai M., Honda H., Kobayasi T.* Medical application of functionalized magnetic nanoparticles (review) // *Journal of Bioscience and Bioengineering*. – 2005. – Vol. 100 (1). – P. 1–11.
11. *Jordan A., Scholz R., Wust P., Fahling H., Felix R.* Magnetic fluid hyperthermia (MFH): cancer treatment with AC magnetic field induced excitation of biocompatible superparamagnetic nanoparticles // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. – 1999. – No. 201. – P. 413–419.
12. *Thiesen B., Jordan A.* Clinical applications of magnetic nanoparticles for hyperthermia // *Int. Journal of Hyperthermia*. – September, 2008. – Vol. 24, No. 6. – P. 467–474.
13. *Philips J.L.* A topical review of magnetic fluid hyperthermia // *Journal of Science and Health at the University of Alabama*. – Vol. 3. – August 2005. – P. 14–18.
14. *Mornet S., Vasseur S., Grasset F., Duguet E.* Magnetic nanoparticle design for medical diagnosis and therapy // *Journal of Materials Chemistry*. – 2004. – 14. – P. 2161–2175.
15. *Mornet S., Vasseur S., Grasset F., Veverka P., Goglio G., Demourgues A., Portier J., Pollert E., Duguet E.* Magnetic nanoparticle design for medical

- applications // Progress in Solid State Chemistry. – Vol. 34, Issues 2–4. – July 2006. – P. 237–247.
16. *Salata O.V.* Applications of nanoparticles in biology and medicine. Review // Journal of Nanobiotechnology. – 2004. – No. 2 (3). – P. 1–6. <http://www.jnanobiotechnology.com/content/pdf/1477-3155-2-3.pdf>
 17. *Hergt R., Dutz S.* Magnetic particle hyperthermia – biophysical limitations of a visionary tumour therapy // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – Vol. 311, Issue 1. – April 2007. – P. 187–192.
 18. *Zeng Q., Baker I., Loudis J.A., Liao Y., Hoopes P.J., Weaver J.B.* Fe/Fe₃ oxide nanocomposite particles with large specific absorption rate for hyperthermia // Appl. Phys. Letters. – Vol. 90, Issue 23. – 2007.
 19. *Zhang D., Du Y.* The biocompatibility study of Fe₃O₄ magnetic nanoparticles used in tumor hyperthermia // Proc. of the 1st IEEE Int. Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems, NEMS '06. – Jan. 2006. – P. 339–342.
 20. *Микроструктуры новых функциональных материалов. Вып. 1. Наноструктурированные материалы. – МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет наук о материалах. – Москва, 2006 – 10 с.*
 21. *Gijs M. A.* Magnetic bead handling on chip: new opportunities for analytical applications // Microfluids and Nanofluids. – 2004. – Vol. 1, No. 1. – P. 22–40.
 22. *Goya G.F., Lima E., Arelaro A.D., Torres T., Rechenberg H.R., Rossi L., Marquina C., Ibarra M. R.* Magnetic Hyperthermia with Fe₃O₄ nanoparticles: the influence of particle size on energy absorption // IEEE Trans. Magn. – No. 10. – 2008.
 23. *Михайлов Г.А., Васильева О.С.* Технология будущего: использование магнитных наночастиц в онкологии // Бюл. Сибирского отделения РАН. – 2008. – № 3 (131). – С. 18–22.
 24. *Berry C.C., Curtis A.S.* Functionalisation of magnetic nanoparticles for applications in biomedicine // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2003. – Vol. 36. – P. 198–206.
 25. *Hergt R., Andra W., d'Ambly C.G., Hilger I., Kaiser W.A., Richter U., Schmidt H.G.* Physical limits of hyperthermia using magnetite fine particles // IEEE Trans. on Magnetics. – Vol. 34, No. 5. – September, 1998. – P. 3745–3754.
 26. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Конечно-элементное моделирование магнитных и тепловых процессов при магнитно-жидкостной гипертермии биологических тканей // Электронное моделирование. – 2010. – Т. 32, № 1. – С. 89–103.
 27. *Кириленко А.В., Чехун В.Ф., Подольцев А.Д., Кондратенко И.П., Кучерявая И.Н., Бондарь В.В., Шпилевая С.И., Тодор И.Н.* Исследование силового воздействия высокоградиентного магнитного поля на магнитные наночастицы в потоке жидкости // Доп. Нац. акад. наук України. – 2010. – № 9. – С. 162–172.

28. *Каишевский С.Б., Прохоров И.В., Александрова Е.Н., Истомин Ю.П.* Магнитофорез и магнитная восприимчивость опухолевых клеток HeLa // *Биофизика*. – 2006. – Т. 51, вып. 6. – С. 1026–1032.
29. *Бар'яхтар В.Г., Горобець Ю.І., Потьомкін М.М.* Магнітна пастка для локалізації мікрочастинок у потоці рідини // *Наукові вісті НТУУ "КПІ"*. – 2009. – № 3. – Р. 143–147.
30. *Smistrup K., Hansen O., Bruus H., Hansen M.K.* Magnetic separation in microfluidic systems using microfabricated electromagnets – experiments and simulations // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. – 2005. – Vol. 293. – Р. 597–604.
31. *Wei Z.H., Lee C.P., Lai M.F.* Magnetic particle separation using controllable magnetic force switches // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. – 2010. – Vol. 322. – Р. 19–24.
32. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. – М.: Физматлит, 1965. – 700 с.
33. *Борисенко А.И., Тарапов И.Е.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – М.: Высш. шк., 1966. – 252 с.
34. *Боровик Е.С., Еременко В.В., Мильнер А.С.* Лекции по магнетизму. М.: Физматлит. – 2005. – 510 с.
35. *Comsol Multiphysics* – <http://www.comsol.com>
36. *Шалыгин А.Н., Кротов К.А.* Магнитный захват одиночных биологических клеток // *УФН*. – 1990. – Т. 160, № 7. – С. 83–104.
37. *Pham P., Masse P., Berthier J.* Numerical modeling of superparamagnetic sub-micronic particles trajectories // *Eur. Phys. J. AP*. – 2000. – No. 12. – Р. 211–216.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 9

1. *Основы общей биологии* / Под ред. Э. Либберта. – М.: Мир, 1982. – 500 с.
2. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Элементы теории и численного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах. – К.: Изд. Ин-та электродинамики НАН Украины, 1999. – 363 с.
3. *Волькенштейн М.В.* Биофизика. – М.: Наука, 1981. – 575 с.
4. *Костюк П.Г., Гродзинский Д.М., Зима В.Л. и др.* Биофизика. – К.: Вища шк., 1988. – 504 с.
5. *Рубин А.Б.* Биофизика. Т. 2. – М.: Книжный дом, 2000. – 467 с.
6. *Comsol Multiphysics* – <http://www.comsol.com>
7. *Геннис Р.* Биомембраны. – М.: Мир, 1997. – 623 с.

8. *Gowrishankar T.R., Stewart D.A., Weaver J.C.* Model of confined spherical cell in uniform and heterogeneous applied electric fields // *Bioelectrochemistry*. – 2005. – Vol. 68. – P. 185–194.
9. *Kotnik T., Miklavčič D.* Second-order model of membrane electric field induced by alternating external electric fields // *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*. – 2000. – Vol. 47, No. 8. – P. 1074–1081.
10. *Мухайлов В.М.* Исходные соотношения и приближенные граничные условия для расчета поля в системах с тонкими слоями // *Электричество*. – 2007. – № 3. – С. 49–55.
11. *Chiu R.S., Stuchli M.A.* Electric fields in bone marrow substructures at power-line frequencies // *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*. – 2005. – Vol. 52, No. 6. – P. 1103–1109.
12. *Jayaram S.H., Boggs S.A.* Optimization of electroporation waveforms for cell sterilization // *IEEE Trans. on Industry Applications*. – 2004. – Vol. 40, No. 6. – P. 1489–1497.
13. *McIntosh R.L., Anderson V., McKenzie R.J.* A numerical evaluation of SAR distribution and temperature changes around a metallic plate in the head of a RF exposed worker // *Bioelectromagnetics*. – 2005. – Vol. 26. – P. 377–388.
14. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Численное моделирование распределения импульсного электрического поля и температуры в объеме биологической клетки // *Техн. электродинамика*. – 2004. – № 2. – С. 4–14.
15. *Chung S.H., Kuyucak S.* Recent advances in ion channel research. Review // *Biochimica et Biophysica Acta*. – 2002. – Vol. 1565. – P. 267–286.
16. *Парселл Э.* Электричество и магнетизм. – М.: Наука, 1983. – 450 с.
17. *Pohl H.A.* Dielectrophoresis. – Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
18. *Орешкин П.Т.* Физика полупроводников и диэлектриков. – М.: Высш. шк., 1977. – 448 с.
19. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Компьютерное исследование распределения внешнего переменного электрического поля в теле человека // *Электронное моделирование*. – 2009. – Том 31. – № 3. – С. 91–109.

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

ПОДОЛЬЦЕВ Олександр Дмитрович
КУЧЕРЯВА Ірина Миколаївна

БАГАТОМАСШТАБНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ

(Російською мовою)

Київ, Інститут електродинаміки
Національної академії наук України, 2011

Редактор Н.В. Новік
Комп'ютерна верстка Ю.В. Морозової-Леонової

Підп. до друку 25.03.2011. Формат 70×100/16. Папір офс. № 1. Гарнітура Таймс. Друк офс.
Ум. друк. арк. 25,5. Ум. фарбо-відб. 24,5. Обл.- вид. арк. 23,5. Тираж 300 прим. Зам. № 35/11.

ТОВ «Артпринт»
Київ, вул. Смирнова-Ласточкина, 3/5
Тел. 224-59-44