

Моделювання вертикального руху вгору кулі зі змінним за дробово-лінійним законом радіусом

Василь Ольшанський¹, Станіслав Ольшанський²

¹ д. ф-м. н., професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, вул. Артема, 44, Харків, 61002

² к. ф-м. н., Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», вул. Фрунзе, 21, Харків, 61002, e-mail: stasolsh77@gmail.com

У функціях Бесселя побудовано замкнутий наближений аналітичний розв'язок нелінійного диференціального рівняння вертикального підйому сферичного тіла змінної маси за дробово-лінійного зменшення його радіуса у часі та квадратичного опору повітряного середовища.

Ключові слова: куля змінної маси, аеродинамічний опір, рівняння Ріккати, вертикальний рух, функції Бесселя.

Вступ. Розрахунок вертикального руху тіл змінної маси та розмірів доводиться проводити у процесі математичного польоту згораючих частинок палива крапель вогнегасної рідини, яка випаровується [1], дрібнодисперсних хімічно активних викидів виробництв та ін. Але під час моделювання крапель вогнегасних рідин потрібно враховувати турбулентні потоки повітря та нерівномірність температури, що значно ускладнює задачу. Отже аналіз особливостей руху таких тіл у газовому середовищі належить до актуальних науково-технічних задач.

Рух легких частинок середовища супроводжується низкою особливостей, зокрема наявністю ефекту відбиття легкої частинки зустрічним потоком [2], а також наявністю екстремуму швидкості, який характерний тільки під час руху малої частинки змінної маси [3, 4].

Під час моделювання руху кулі використовуються різні закони зміни розміру тіла [5, 6], у тому числі лінійний, експонентний і закон В. Срезневського. Відомий також дробово-лінійний закон, якому приділено менше уваги. Його розглядали В. О. Сапа та М. М. Сагітов [7] у випадку лінійного аеродинамічного опору рухові.

1. Формулювання та розв'язок задачі Коші

Припускаємо, що сила аеродинамічного опору рухові пропорційна площі міделєвого перерізу сферичної частинки та квадрату швидкості руху. Густина частинки приймаємо сталою. Тому зменшення її маси визначається законом зміни її радіуса, який беремо у вигляді

$$r = \frac{r_0}{1 + \gamma t}, \quad (1)$$

де $r_0 = r(0)$; γ — параметр, що характеризує інтенсивність зменшення радіуса та маси кулі.

Зазначимо, що тут розглядається політ тіла змінних розмірів і маси.

У рамках прийнятих припущень зміна координати z у часі описується нелінійним диференціальним рівнянням зі змінним коефіцієнтом

$$\ddot{z} + \frac{k}{r} \dot{z}^2 = -g. \quad (2)$$

Тут g — прискорення вільного падіння; k — зведений коефіцієнт опору середовища; $\dot{z}(t) = v(t)$ — швидкість центру тіла; $z = z(t)$ — вертикальне переміщення центру тіла вздовж осі Oz , спрямованої вгору; крапка над символом означає похідну за часом t .

Значення початкової швидкості кулі дорівнює v_0 . Тому розв'язок рівняння (2) повинен задовольняти початковим умовам

$$z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = v_0. \quad (3)$$

Враховуючи формулу (1), перетворенням

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{\gamma}{r_0} r^2 \frac{d}{dr} \quad (4)$$

подаємо співвідношення (2) у формі

$$\frac{dv}{dr} - k_0 \frac{v^2}{r^3} = \frac{g_0}{r^2}, \quad (5)$$

де $k_0 = kr_0/\gamma$; $g_0 = gr_0/\gamma$.

Далі рівняння (5) зводимо до вигляду

$$v'_r = f(r)v^2 + h(r). \quad (6)$$

Тут $f(r) = k_0/r^3$; $h(r) = -g_0/r^2$.

Рівняння (6) є загальним рівнянням Ріккати [8]. Використовуючи залежність

$$v = \exp\left(-\int f(r)u(r)dr\right), \quad (7)$$

зводимо співвідношення (6) до лінійного диференціального рівняння

$$r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + 3r \frac{du}{dr} + \frac{k_0 g_0}{r^3} u = 0, \quad (8)$$

Рівняння (8) належить до рівнянь типу Бесселя, а його загальним розв'язком є

$$u(r) = \frac{1}{r} [c_1 J_{-2/3}(\xi) + c_2 Y_{-2/3}(\xi)]. \quad (9)$$

Тут $\xi = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{k_0 g_0}{r^{3/2}}}$; c_1, c_2 — довільні сталі; $J_{-2/3}(\xi), Y_{-2/3}(\xi)$ — відповідно функції Бесселя та Неймана індексу $-2/3$.

Зворотнє перетворення для знаходження розв'язку рівняння Ріккати має вигляд [8]

$$v = -\frac{u'_r}{uf(r)}. \quad (10)$$

Для знаходження похідних використовуємо формули

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} J_{-2/3}(\xi) &= -J_{1/3}(\xi) - \frac{2}{3\xi} J_{-2/3}(\xi), \\ \frac{d}{d\xi} Y_{-2/3}(\xi) &= -Y_{1/3}(\xi) - \frac{2}{3\xi} Y_{-2/3}(\xi). \end{aligned}$$

У підсумку отримуємо перший інтеграл рівняння (2)

$$\dot{z} \equiv v = -\frac{\sqrt{rg_0}}{\sqrt{k_0}} \frac{cJ_{1/3}(\xi) + Y_{1/3}(\xi)}{cJ_{-2/3}(\xi) + Y_{-2/3}(\xi)}, \quad (11)$$

де $c = c_1/c_2$; $J_{1/3}(\xi), Y_{1/3}(\xi)$ — відповідно функції Бесселя та Неймана індексу $1/3$.

Розв'язок диференціального рівняння (11) задовольняє другій початковій умові у співвідношеннях (3), якщо

$$c = -\frac{bY_{-2/3}(\xi_0) + Y_{1/3}(\xi_0)}{J_{1/3}(\xi_0) + bJ_{-2/3}(\xi_0)}. \quad (12)$$

Тут $\xi_0 = \frac{2}{3} \sqrt{k_0 g_0 / r_0^3}$; $b = v_0 \sqrt{k_0 / (r_0 g_0)}$.

Таким чином, за допомогою виразів (11) і (12) неважко визначити швидкість вертикального руху тіла в будь-який момент часу.

У разі потреби визначення висоти підйому тіла $z(t)$ доводиться обчислювати інтеграл

$$z(t) = \int_0^t v(t) dt, \quad (13)$$

який не виражається через затабульовані спеціальні функції. Його доводиться обчислювати чисельно на комп'ютері.

Для наближеного обчислення $z(t)$ виділимо у співвідношенні (13) головну частину, використовуючи асимптотику

$$v(t) \xrightarrow{g \rightarrow 0} v_a(t) = \frac{r_0}{kt(1 + 0,5\gamma t) + r_0/v_0}.$$

Головна частина розв'язку не залежить від g тому, що частка має малу вагу та сила гравітації значно менша від інших сил. Наприклад, у роботі [1] задачу вертикального руху краплі розв'язують без врахування ваги краплі.

Інтеграл

$$S(t) = \int_0^t v_a(t) dt$$

виражається через елементарні функції

$$S(t) = \frac{r_0}{\gamma ka} \ln \frac{\left| t + \frac{1}{\gamma} - a \right| \left| \frac{1}{\gamma} + a \right|}{\left| t + \frac{1}{\gamma} + a \right| \left| \frac{1}{\gamma} - a \right|}, \quad (14)$$

причому $a = \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 - \frac{2r_0\gamma}{kv_0}}$.

Враховуючи вираз (14), замість (13) отримуємо більш зручну формулу для обчислення висоти підйому

$$z = S(t) + \Phi(t). \quad (15)$$

Тут другий доданок

$$\Phi(t) = \int_0^t [v(t) - v_a(t)] dt$$

значно менший від першого та його легко оцінити за допомогою нерівності

$$\Phi(t) < t[v(t) - v_a(t)].$$

У наближених розрахунках методом трапеції можна прийняти

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{2} t[v(t) - v_a(t)]. \quad (16)$$

2. Числові розрахунки

Розрахунки проведено для $r_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ м; $k = 3,12 \cdot 10^{-5}$; $\gamma = 3$ с⁻¹. Про зміну швидкості тіла у процесі руху свідчать графіки на рис. 1, отримані за різних значень v_0 .

На рис. 1 цифрами 1, 2, 3 позначено криві, які отримано для значень $v_0 = 80, 40, 20$ м/с. Куля рухається вгору, зменшуючи свою швидкість внаслідок дії сил опору та гравітації. Нулі функції швидкості не сильно залежать від величини початкової швидкості v_0 .

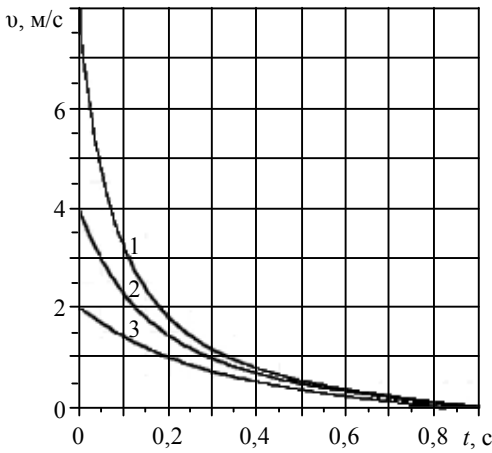


Рис. 1. Залежності швидкості від часу за різних v_0

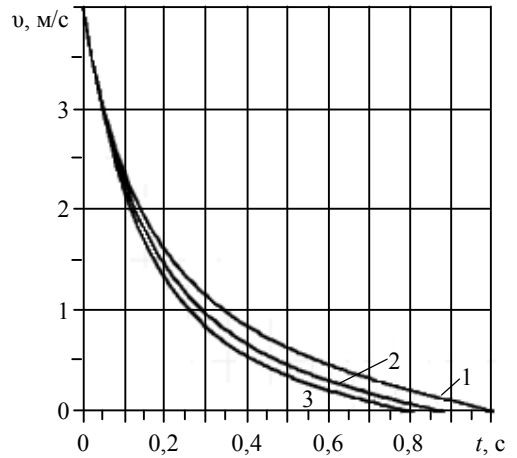


Рис. 2. Залежності швидкості від часу за різних γ

На рис. 2 цифрами 1, 2, 3 позначено криві, які отримано для значень швидкості зміни радіуса $\gamma = 1, 3, 5 \text{ c}^{-1}$, а також $v_0 = 40 \text{ м/с}$. Час польоту кулі вгору суттєво залежить від величини γ .

Результати розрахунку пройденого частинкою шляху за різні проміжки часу подано в таблиці. Для розрахунку використовували попередні вихідні дані та $v_0 = 80 \text{ м/с}$, $\gamma = 3 \text{ c}^{-1}$.

Таблиця

Значення $z(t)$, отримані за допомогою аналітичного розв'язку та числовим інтегруванням квадратури (13)

$t, \text{ c}$	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90
$z_a, \text{ м}$	5,03	8,27	10,51	11,30	11,35
$z_c, \text{ м}$	5,03	8,25	10,45	11,24	11,35

Числа z_a в другому рядку отримані за формулами (14)-(16), а числа z_c у третьому рядку — шляхом числового інтегрування квадратури (13). Порівняння чисел отриманих різними способами у таблиці показало, що наближений аналітичний розв'язок прийнятний для розрахунку процесу вертикального руху тіла, зокрема в задачах автоматизованого пожежогасіння, де інтенсивність випаровування крапель рідких вогнегасних речовин обумовлена високою температурою газового середовища, а підйом відбувається за короткий інтервал часу.

Висновок. Спеціальною заміною змінних у нелінійному диференціальному рівнянні руху сферичного тіла, радіус якого зменшується за дробово-лінійним законом, його вдалося звести до загального рівняння Ріккати, розв'язок якого подається у функціях Бесселя. Побудовано наближений розв'язок для визначення переміщення кулі, який добре узгоджується з результатами числового інтегрування.

Література

- [1] Севриков В. В., Карпенко В. А., Севриков И. В. Автоматические быстродействующие системы пожарной защиты. — Севастополь: СевГТУ, 1996. — 260 с.
- [2] Балістика крапель, які випаровуються при польоті / С. І. Кучеренко, В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, Л. М. Тищенко. — Харків: ХНТУСГ, 2007. — 304 с.
- [3] Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Об условиях экстремума скорости падения сферического тела переменного радиуса // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып.: Системный анализ, управление и информационные технологии. — Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. — Вып. 26. — С. 67-78.
- [4] Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. О максимуме скорости падения сферического тела убывающей массы // Механіка та машинобудування. — 2007. — № 1. — С. 25-29.
- [5] Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Аналитические решения уравнения Мещерского, описывающие вертикальное движение шара убывающей массы // Техническая механика. — 2009. — № 4. — С. 36-42.
- [6] Ольшанский В. П., Аврамов К. В., Ольшанский С. В. Замкнутые решения уравнения Мещерского при различных законах уменьшения радиуса летящего шара // Механика твёрдого тела. — 2009. — Вып. 39. — С. 207-214.
- [7] Сагитов М. Н. Некоторые случаи движения вращающегося шара переменной массы, ось которого горизонтальна // Известия АН Казахской ССР. Серия физ.-мат. наук. Математика и механика. — 1963. — Вып. 15. — С. 88-99.
- [8] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Москва: Наука, 1976. — 576 с.
- [9] Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). — Москва: Наука, 1979. — 832 с.
- [10] Градштейн И. М., Рыжик И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — Москва: Физматгиз, 1962. — 1100 с.

Simulation of vertical movement upwards of the sphere on a variable fractional-linear law radius

Vasily Olshanskii, Stanislav Olshanskii

Closed approximate analytic solution in Bessel's functions of the nonlinear differential equation vertical lift of a spherical body of a variable mass in fractional-linear decrease of its radius in time and quadratic resistance of air was constructed.

Моделювання вертикального руху шара з змінним по дробно-лінійному закону радіусом

Василий Ольшанський, Станіслав Ольшанський

В функціях Бесселя побудовано замкнуте приближенное аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения вертикального подъёма сферического тела переменной массы при дробно-линейном убывании его радиуса во времени и квадратичном сопротивлении воздушной среды.

Представлено професором Г. Сулимом

Отримано 16.11.12